ASTÉRISQUE 282

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2000/2001
EXPOSÉS 880-893

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.
Url : `http://www.bourbaki.ens.fr/`

***Mots clefs et classification mathématique par sujets* (2000)**

Exposé n° 880. — Application birationnelle, éclatement lisse. — 14Exx.
Exposé n° 881. — Hyperbolicité, courbes entières, surfaces algébriques complexes, feuilletages. — 14J29, 32Q45, 37F75.
Exposé n° 882. — Espace probabilisé filtré, filtration standard, filtration brownienne, critère de Vershik, filtration confortable. — 60G05, 60G25, 60G42, 60G44.
Exposé n° 883. — Variétés asymptotiquement plates, courbure scalaire, masse, inégalité de Penrose, trous noirs. — 53C21, 58J35, 58J60, 83C30, 83C57.
Exposé n° 884. — Systèmes hamiltoniens, systèmes intégrables, géométrie symplectique, théorie de Galois différentielle, système de Hénon-Heiles. — 34XX, 37JXX, 37K10, 53DXX, 70G45.
Exposé n° 885. — Fonctions zêtas, intégrales itérées, fonctions (quasi-)symétriques, nombres de Bernoulli, polylogarithmes, nombres polyzêtas, nombres transcendants, mélange, séries génératrices, polynômes non commutatifs, algèbre de Hopf. — 11J82, 40B05, 17B01, 33E20, 34M35.
Exposé n° 886. — Géométrie d'Arakelov, méthode des pentes, feuilles algébriques de feuilletages, équations différentielles arithmétiques, propriété de Liouville. — 14G40, 11GXX, 37F75.
Exposé n° 887. — Fonctions L, matrices aléatoires. — 11F66, 11M36, 15A52.
Exposé n° 888. — Quantification, réduction, variété symplectique préquantifiée, conjecture de Guillemin-Sternberg, action hamiltonienne, opérateur de Dirac, orbites coadjointes, multiplicités, polytope de Kirwan, indice, coupure symplectique. — 22-XX, 53-XX.
Exposé n° 889. — Entropie, algèbres de von Neumann, probabilités libres. — 46L54, 46L10.
Exposé n° 890. — Représentations automorphes, fonctorialité, conjectures de Langlands, valeur propre du laplacien. — 22E55, 22E50.
Exposé n° 891. — Hauteurs, variétés de Fano. — 14G05, 11G35.
Exposé n° 892. — Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse, algèbres de Hopf. — 16S38, 16W30, 57T05.
Exposé n° 893. — Équations de Boltzmann, Euler, Stokes et Navier-Stokes, limite hydrodynamique, entropie. — 76D05, 76P05.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2000/2001
EXPOSÉS 880-893

***Résumé.* —** Comme les précédents volumes de ce séminaire, celui-ci contient quatorze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : quatre exposés de géométrie algébrique, deux de probabilités, classiques ou libres, un de géométrie riemannienne, un de géométrie non commutative, un sur la (non) intégrabilité des systèmes hamiltoniens, un sur les fonctions L et les matrices aléatoires, un sur la fonctorialité de Langlands, un sur les fonctions polylogarithmes, un sur la quantification géométrique et un sur les équations hydrodynamiques.

***Abstract* (Séminaire Bourbaki, volume 2000/2001, exposés 880-893)**

As in the preceding volumes of this seminar, one finds here fourteen survey lectures on topics of current interest: four lectures on algebraic geometry, two on probability, classical or free, one on Riemannian geometry, one on non-commutative geometry, one on (non-)integrability of Hamiltonian systems, one on L-functions and random matrices, one on Langlands fonctoriality, one on polylogarithms, one on geometric quantization and one on hydrodynamical equations.

© Astérisque 282, SMF 2002

Résumés des exposés vii

NOVEMBRE 2000

880 Laurent BONAVERO — *Factorisation faible des applications birationnelles [d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli]* 1

881 Marco BRUNELLA — *Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes [d'après McQuillan, Demailly–El Goul,...]* 39

882 Michel ÉMERY — *Espaces probabilisés filtrés : de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson* 63

883 Marc HERZLICH — *L'inégalité de Penrose [d'après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen,...]* 85

MARS 2001

884 Michèle AUDIN — *Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...]* 113

885 Pierre CARTIER — *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents* 137

886 Antoine CHAMBERT-LOIR — *Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne [d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky]* 175

887 Philippe MICHEL — *Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires* 211

888 Michèle VERGNE — *Quantification géométrique et réduction symplectique* 249

JUIN 2001

889 Philippe BIANE — *Entropie libre et algèbres d'opérateurs* 279

890 Guy HENNIART — *Progrès récents en fonctorialité de Langlands* .. 301

891 Emmanuel PEYRE — *Points de hauteur bornée et géométrie des variétés [d'après Y. Manin et al.]* 323

892 Georges SKANDALIS — *Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse et algèbres de Hopf [d'après A. Connes et H. Moscovici]* 345

893 Cédric VILLANI — *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann [d'après C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond]* 365

Laurent BONAVERO – *Factorisation faible des applications birationnelles* [*d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli*]

Dans cet exposé, nous expliquerons le résultat suivant démontré récemment par Abramovich, Karu, Matsuki et Włodarczyk : toute application birationnelle entre deux variétés algébriques complètes et lisses sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle se factorise en une suite finie d'éclatements et de contractions de centres lisses. Ce résultat n'aurait sans doute pas vu le jour sans la démonstration de son analogue dans le cadre de la géométrie torique par Morelli et Włodarczyk au milieu des années 90. La démonstration donnée par Abramovich, Karu, Matsuki et Włodarczyk est une réduction au cas torique, nous en donnerons les grandes étapes.

Marco BRUNELLA – *Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes* [*d'après McQuillan, Demailly–El Goul,...*]

Une *courbe entière* dans une variété complexe X est une application holomorphe non constante de la droite complexe $\mathbf{C}$ à valeurs dans X. Autour de 1970, Kobayashi conjectura qu'une hypersurface générique dans $\mathbf{C}P^n$, de degré assez grand, ne contient aucune courbe entière. Autour de 1980, Green et Griffiths conjecturèrent qu'aucune courbe entière dans une variété projective complexe de type général (e.g., une hypersurface dans $\mathbf{C}P^n$ de degré $\geqslant n+2$) n'est Zariski-dense. On exposera les résultats récents de McQuillan et de Demailly-El Goul sur ces deux conjectures, dans le cas bidimensionnel. Ces travaux passent à travers la construction et l'étude de certains feuilletages holomorphes.

Michel ÉMERY – *Espaces probabilisés filtrés : de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson*

ll y a une trentaine d'années, Vershik a exhibé des espaces probabilisés filtrés aux propriétés paradoxales, et donné un critère nécessaire et suffisant pour que de telles propriétés se manifestent. Longtemps inconnus des probabilistes occidentaux, ces travaux, prolongés depuis quelques années par les idées de Tsirelson, permettent de progresser dans la compréhension du mouvement brownien.

Marc HERZLICH – *L'inégalité de Penrose* [*d'après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen,...*]

R. Penrose a conjecturé en 1973 que la masse d'un trou noir isolé devait être minorée par une fonction explicite de son aire. Cet énoncé de nature physique possède une interprétation élégante en des termes purement géométriques. Cette traduction mathématique a résisté pendant près de 25 ans à toutes les tentatives de démonstration et ce n'est qu'en 1997 que G. Huisken et T. Ilmanen ont pu apporter une preuve complète et rigoureuse de l'inégalité de Penrose. Depuis, une autre démonstration a vu le jour sous la plume de H. Bray. L'intérêt et les grandes lignes des deux approches seront décrites dans l'exposé.

Michèle AUDIN – *Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens* [*d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...*]

Les systèmes différentiels hamiltoniens décrivent les systèmes mécaniques dont l'énergie est conservée. Un système hamiltonien est dit « intégrable » s'il a « assez » d'autres quantités conservées. Il y a des systèmes hamiltoniens dont on soupçonne qu'ils ne sont pas intégrables. Mais comment le *démontrer* ? Dans cet exposé, je présenterai des réponses à cette question, résultats de non-intégrabilité basés sur les propriétés du groupe de monodromie (Ziglin, 1982) ou du groupe de Galois différentiel (Morales & Ramis, 1998) du système linéarisé le long d'une solution particulière.

Pierre CARTIER – *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents*

Les séries L de Dirichlet se généralisent en les sommes $Li\binom{z_1 \cdots z_r}{s_1 \cdots s_r} = \sum_{(n)} \frac{z_1^{n_1} \cdots z_r^{n_r}}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}}$ (sommation sur les systèmes d'entiers $n_1 > \cdots > n_r > 0$). Le problème arithmétique central est la nature des nombres $Li\binom{\sigma_1 \cdots \sigma_r}{s_1 \cdots s_r}$ où les σ_i sont des racines de l'unité et les s_i des entiers positifs. On énoncera les principales conjectures actuelles (Drinfeld, Deligne, Ihara,...) et les résultats positifs déjà obtenus (Goncharov, Racinet, Écalle, Rivoal,...). On montrera le rôle important joué par des torseurs sous des groupes pro-unipotents.

Antoine CHAMBERT-LOIR – *Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne* [*d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky*]

Dans un article récent, J.-B. Bost établit un critère assurant que certaines « sous-variétés formelles » de variétés algébriques sont en fait algébriques. Son théorème unifie et généralise des résultats des frères Chudnovsky et de Y. André motivés par une conjecture arithmétique de Grothendieck prédisant que les solutions de certaines équations différentielles sont des fonctions algébriques.

La démonstration reprend les techniques d'approximation diophantienne utilisées par ces auteurs avec toutefois un point de vue systématiquement géométrique, via notamment la géométrie d'Arakelov et le formalisme des pentes.

Philippe MICHEL – *Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires*

Récemment, Katz et Sarnak (inspirés par des travaux antérieurs de Montgomery) ont proposé de modéliser les zéros des fonctions L par les valeurs propres de matrices aléatoires de grand rang. Dans cet exposé, nous passons en revue les différentes statistiques qui ont été utilisées pour éprouver la validité de ce modèle (sans obtenir de contraction jusqu'ici !), et notamment la distribution, étudiée en détail par Iwaniec, Luo et Sarnak, des « petits » zéros dans les familles de fonctions L. Nous discuterons également d'applications importantes suggérées par ce modèle.

Michèle VERGNE – *Quantification géométrique et réduction symplectique*

Soit M une variété symplectique, et f une fonction réelle sur M, engendrant une action circulaire. On espère (credo de la mécanique quantique) qu'il existe un espace de Hilbert $Q(M)$ et un opérateur $Q(f)$ dont les valeurs propres sont les valeurs entières de f. La conjecture de Guillemin-Sternberg exprime la multiplicité des valeurs propres en fonction de la fibre réduite de f. Elle a été prouvée pour une action d'un groupe compact sur une variété compacte préquantifiable par Meinrenken-Sjamaar et par Tian-Zhang.

Philippe BIANE – *Entropie libre et algèbres d'opérateurs*

Voiculescu a introduit une notion d'entropie pour un n-uplet d'opérateurs auto-adjoints dans une algèbre de von Neumann finie, définie, à la Boltzmann, comme le logarithme du volume d'un ensemble de micro-états matriciels. En utilisant cette entropie libre, Voiculescu montre que les facteurs de groupes libres n'ont pas de sous-algèbre de Cartan, tandis que Liming Ge montre qu'ils sont premiers. Il s'agit des premiers exemples de tels facteurs. On décrira ces résultats, ainsi que d'autres applications dues, notamment, à Dykema, Ge et Stefan.

Guy HENNIART – *Progrès récents en fonctorialité de Langlands*

Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire classique, vecteur propre des opérateurs de Hecke. On sait lui associer une représentation ℓ-adique $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ telle que $L(\rho, s)$ soit à peu près $L(f, s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}$. Si $\mathrm{Sym}^k : \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{GL}_{k+1}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la représentation donnée par le produit symétrique k-ième, on espère que $L(\mathrm{Sym}^k \circ \rho, s)$ est la fonction L d'un objet analytique comme la forme f, une représentation automorphe pour GL_{k+1} sur $\mathbb{Q}$. C'est un cas particulier des conjectures de fonctorialité de Langlands. Nous exposerons les résultats récents sur ces conjectures, et notamment les travaux de Kim et Shahidi pour Sym^3 et Sym^4.

Emmanuel PEYRE – *Points de hauteur bornée et géométrie des variétés* [*d'après Y. Manin et al.*]

Si V est une variété algébrique ayant une infinité de points rationnels sur un corps de nombres, il est naturel de munir V d'une hauteur et d'étudier de manière asymptotique les points rationnels de hauteur bornée sur V. Les conjectures énoncées par Manin vers 1989 proposent une interprétation géométrique de ce comportement asymptotique où le fibré canonique et le cône engendré par les diviseurs effectifs dans le groupe de Néron-Severi jouent un rôle crucial. Le but de cet exposé est un survol des travaux suscités par ces conjectures.

Georges SKANDALIS – *Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse et algèbres de Hopf* [*d'après A. Connes et H. Moscovici*]

Dans cet exposé, nous présentons une série de travaux de Connes-Moscovici, qui construisent un opérateur de signature (presque) invariant par le groupe de tous les difféomorphismes d'une variété, donnent une formule de l'indice « locale » pour cet opérateur, puis introduisent une algèbre de Hopf naturelle. Celle-ci joue le rôle de « groupe quantique » de « symétries quantiques » de ce système ; elle permet de simplifier les calculs dans cette formule d'indice. En particulier, la cohomologie cyclique de cette algèbre de Hopf est égale à la cohomologie de Gelfand-Fuchs.

Cédric VILLANI – *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann* [*d'après C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond*]

Considérons un gaz de particules obéissant aux lois de la mécanique classique. Selon les échelles physiques considérées, on peut en faire une description microscopique (équations de Newton), cinétique (équation de Boltzmann...) ou hydrodynamique (équations d'Euler, Navier-Stokes...). Le sixième problème de Hilbert concerne la cohérence mathématique de ces différentes modélisations. On exposera certains des progrès importants réalisés très récemment par Bardos, Golse, Levermore, Lions, Masmoudi, Saint-Raymond, quant au passage de l'équation de Boltzmann à diverses équations hydrodynamiques.

Séminaire BOURBAKI Novembre 2000
53e année, 2000-2001, nO 880, p. 1 à 37

FACTORISATION FAIBLE DES APPLICATIONS BIRATIONNELLES
[d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli]

par **Laurent BONAVERO**

1. INTRODUCTION

Dans tout ce texte, $\mathbf{K}$ désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle (la nullité de la caractéristique est essentielle dans les parties 2 et 5, les constructions des parties 3 et 4 sont cependant valables en caractéristique arbitraire).

1.1. Rappels sur les éclatements

Si $n \geqslant 2$ et si V est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, on note $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}(V)$ l'espace projectif des droites vectorielles de V. Si $V = \mathbf{K}^n$, on note simplement $\mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}_{\mathbf{K}}(V)$. Considérons

$$B_0(\mathbf{K}^n) = \{(v, d) \in \mathbf{K}^n \times \mathbf{P}^{n-1} \mid v \in d\}.$$

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées sur $\mathbf{K}^n$ et $[y_1 : \ldots : y_n]$ les coordonnées homogènes associées sur $\mathbf{P}^{n-1}$, alors

$$B_0(\mathbf{K}^n) = \{(x, y) \in \mathbf{K}^n \times \mathbf{P}^{n-1} \mid \forall i, j\ ,\ x_i y_j = x_j y_i\}.$$

Il en découle que $B_0(\mathbf{K}^n)$ est une sous-variété algébrique fermée lisse de $\mathbf{K}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$. La première projection $\pi : B_0(\mathbf{K}^n) \to \mathbf{K}^n$ est une application régulière birationnelle qui se restreint en un isomorphisme $\pi : B_0(\mathbf{K}^n) \setminus \pi^{-1}(0) \to \mathbf{K}^n \setminus \{0\}$ avec $\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}$. L'application birationnelle $\pi : B_0(\mathbf{K}^n) \to \mathbf{K}^n$ s'appelle *l'éclatement de* $\mathbf{K}^n$ *en* 0 ; 0 est le *centre* de π et $\pi^{-1}(0)$ est le *diviseur exceptionnel* de π.

Plus généralement (voir par exemple [Har77]), si Y est une sous-variété fermée lisse d'une variété algébrique lisse X, il y a une variété algébrique lisse $B_Y(X)$ et une application régulière birationnelle $\pi : B_Y(X) \to X$ qui se restreint en un isomorphisme $\pi : B_Y(X) \setminus \pi^{-1}(Y) \to X \setminus Y$ et $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbf{P}(N_{Y/X})$ où $N_{Y/X}$ désigne le fibré normal de Y dans X. L'application birationnelle $\pi : B_Y(X) \to X$ s'appelle *l'éclatement de* X *le long de* Y*, ou de centre* Y et $E := \pi^{-1}(Y)$ est le *diviseur exceptionnel* de π. Moralement, on remplace chaque point y de Y par l'espace projectif des directions

normales à Y dans X passant par y. Si la donnée initiale est $B_Y(X)$, on dit encore que $\pi : B_Y(X) \to X$ est une *contraction* de centre Y (éclatement et contraction désignent donc *dans ce texte* la même application birationnelle, ils sont utilisés respectivement suivant que la donnée initiale est X (resp. $B_Y(X)$) et la donnée finale $B_Y(X)$ (resp. X)). Enfin, si Z est une sous-variété de X, on appelle *transformée stricte de Z* l'adhérence dans $B_Y(X)$ de $\pi^{-1}(Z) \setminus E$.

1.2. Énoncé du théorème principal

C'est un problème classique depuis une trentaine d'années de savoir s'il est possible de décomposer une application birationnelle entre deux variétés algébriques complètes lisses en une suite d'éclatements et contractions de centres lisses. En dimension 1, la question est vide : toute application birationnelle entre deux courbes algébriques complètes lisses est un isomorphisme. Dans le cas des surfaces, on sait depuis un siècle que toute application birationnelle entre surfaces complètes lisses est une suite d'éclatements et contractions de centre des points (voir par exemple [BPV84]) : un exemple classique est la transformation de Cremona $[x : y : z] \to [1/x : 1/y : 1/z]$ de $\mathbf{P}^2$ dans $\mathbf{P}^2$ qui se décompose en l'éclatement des trois points $[0 : 0 : 1]$, $[0 : 1 : 0]$ et $[1 : 0 : 0]$ suivie de la contraction des transformées strictes des trois droites joignant deux à deux les points précédents. Le problème était ouvert dès la dimension trois.

Nous donnons dans cet exposé les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant, dû à Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk [AKMW99] et Włodarczyk [Wlod99].

THÉORÈME 1.1. — *Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux variétés algébriques complètes et lisses X_1 et X_2 sur $\mathbf{K}$. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses. Autrement dit, il y a une suite d'applications birationnelles entre variétés algébriques complètes et lisses*

$$X_1 = V_0 \overset{\varphi_0}{\dashrightarrow} V_1 \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{i-1}}{\dashrightarrow} V_i \overset{\varphi_i}{\dashrightarrow} V_{i+1} \overset{\varphi_{i+1}}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{l-2}}{\dashrightarrow} V_{l-1} \overset{\varphi_{l-1}}{\dashrightarrow} V_l = X_2$$

de sorte que $\varphi = \varphi_{l-1} \circ \varphi_{l-2} \circ \cdots \varphi_1 \circ \varphi_0$ et pour tout i, $\varphi_i : V_i \dashrightarrow V_{i+1}$ ou $\varphi_i^{-1} : V_{i+1} \dashrightarrow V_i$ est une application régulière obtenue en éclatant une sous-variété irréductible lisse.

Ce texte est pour l'essentiel une reprise de [AKMW99] et [Mat99], dans lesquels on trouvera beaucoup plus de précisions, une liste de références très complète ainsi qu'une discussion détaillée des extensions ou généralisations du théorème 1.1.

Mentionnons aussi que le théorème de factorisation admet les raffinements fondamentaux suivants :

- *si φ est un isomorphisme sur un ouvert U, le centre de chaque φ_i ou φ_i^{-1} peut être choisi disjoint de U,*
- *si X_1 et X_2 sont des variétés projectives, chaque V_i peut être choisie projective,*

• *si X_1 et X_2 ne sont pas supposées complètes, toute application birationnelle propre (voir* [Har77] *pour cette notion) entre X_1 et X_2 se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses,*

• *si X_1 et X_2 sont deux variétés analytiques complexes compactes lisses, toute application biméromorphe propre entre X_1 et X_2 se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres analytiques lisses,*

• *le théorème 1.1 est vrai même si $\mathbf{K}$ n'est pas supposé algébriquement clos.*

Pour simplifier l'exposition, nous nous contenterons de renvoyer à [AKMW99] et [Mat99] pour une démonstration de ces points.

Faisons aussi les remarques suivantes :

• *la factorisation n'est évidemment pas unique (même si l'on impose que pour tout i, φ_i ne soit pas l'inverse de φ_{i-1}),*

• *dans le cas des surfaces, si φ est régulière, alors toutes les φ_i peuvent être choisies régulières. Ceci est faux en dimension supérieure ou égale à trois,*

• *la factorisation décrite dans le théorème 1.1 est une solution positive au problème de factorisation faible ; le problème de factorisation forte (au sens où il existe un entier i_0 tel que pour tout $i \leqslant i_0$, φ_i^{-1} est régulière et pour tout $i \geqslant i_0+1$, φ_i est régulière) est un problème ouvert à ce jour en dimension supérieure ou égale à trois.*

1.3. Quelques mots sur la démonstration du théorème 1.1

La démonstration du théorème 1.1 est en un certain sens une victoire de la géométrie torique. En effet, la ligne directrice est une réduction (en plusieurs étapes, certaines utilisant fondamentalement des techniques toriques) au cas d'une application birationnelle équivariante entre variétés toriques, cas résolu par Morelli [Mor96] et Włodarczyk [Wlo97], puis étendu au cadre toroïdal par Abramovich, Matsuki et Rashid [AMR99]. Il est bien connu depuis quelques années que la géométrie des variétés toriques (ou des plongements toroïdaux), gouvernée par des objets combinatoires simples issus de la géométrie convexe, donne une bonne vision locale de certaines propriétés des variétés algébriques (voir par exemple l'existence d'altérations due à De Jong). L'exposé qui suit donnera, je l'espère, envie au lecteur de mieux connaître ou de découvrir ces techniques ; ce texte ne remplaçant certainement pas l'énorme effort pédagogique que constitue le texte [Mat99] de K. Matsuki.

Remerciements. — Merci aux collègues qui m'écoutent parler d'éclatements depuis plusieurs années, ils sont trop nombreux pour être tous mentionnés. Merci à Michel Brion, Laurent Manivel, Kenji Matsuki et Emmanuel Peyre pour m'avoir aidé à préparer ce texte, et plus particulièrement à Stéphane Guillermou, infatigable relecteur de multiples versions préliminaires, ainsi qu'à Cinzia Casagrande pour m'avoir signalé les trop nombreuses coquilles de la version distribuée le jour de l'exposé.

Je dédie ce travail à mes enfants Alex et Zoé, et à Marguerite leur maman.

2. COBORDISME BIRATIONNEL ET ACTION DE $\mathbf{K}^*$

La notion de cobordisme birationnel a été dégagée par Włodarczyk [Wlo97], suite au travail fondamental de Morelli [Mor96] dans le cadre des variétés toriques. L'idée essentielle est la suivante : la théorie de Morse sur les variétés (différentiables réelles) permet de reconstruire topologiquement une variété donnée X à partir d'une fonction de Morse f sur X. Le passage des points critiques de f (qui sont aussi les points fixes du champ de vecteurs $\mathrm{grad}(f)$ lorsque X est munie d'une métrique riemannienne) correspond aux changements de topologie par ajout d'une cellule. A un morphisme birationnel entre X_1 et X_2 de dimension n, on associe une variété algébrique de dimension $n+1$ munie d'une action de $\mathbf{K}^*$, avec un ordre sur les composantes connexes de points fixes. L'action de $\mathbf{K}^*$ joue le rôle du champ de vecteurs $\mathrm{grad}(f)$ et à chaque composante connexe de $\mathbf{K}^*$-points fixes, on associe une application birationnelle élémentaire, dont on montre qu'elle est « localement torique ».

2.1. Rappels sur les $\mathbf{K}^*$-actions

Lorsque le groupe multiplicatif $\mathbf{K}^*$ agit algébriquement sur une variété algébrique X, pour $t \in \mathbf{K}^*$ et $x \in X$, le résultat de l'action de t sur x sera noté $t \cdot x$. On note $X/\mathbf{K}^*$ l'ensemble des orbites de l'action et $X^{\mathbf{K}^*}$ l'ensemble des $\mathbf{K}^*$-points fixes de X.

Définition. — *Un* bon quotient *ou* quotient catégorique $Y = X//\mathbf{K}^*$ *est la donnée d'une variété algébrique Y et d'une application régulière $\pi : X \to Y$ constante sur les $\mathbf{K}^*$-orbites de sorte que pour tout ouvert affine U de Y, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert affine de X et l'application induite $\pi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to (\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)))^{\mathbf{K}^*}$ est un isomorphisme (ici, $(\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)))^{\mathbf{K}^*}$ désigne les éléments $\mathbf{K}^*$-invariants de $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$). Si de plus les fibres de π sont exactement les orbites, alors Y est appelé* quotient géométrique.

Rappelons (voir par exemple [MFK94]) que $\mathbf{K}^*$ étant un groupe réductif, pour toute variété affine X munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$, le quotient catégorique $X//\mathbf{K}^*$ existe et ses points correspondent aux $\mathbf{K}^*$-orbites fermées. De plus $X//\mathbf{K}^*$ est normale si X l'est.

Notations. — Soit X une variété algébrique sur laquelle $\mathbf{K}^*$ agit algébriquement. Introduisons les deux sous-ensembles localement fermés de X suivants :

$$X_+ = \{x \in X \mid \lim_{t\to\infty} t \cdot x \text{ n'existe pas dans } X\}$$

et

$$X_- = \{x \in X \mid \lim_{t\to 0} t \cdot x \text{ n'existe pas dans } X\}.$$

Précisons ici que « $\lim_{t\to 0} t \cdot x$ existe dans X » signifie que l'application régulière de $\mathbf{K}^*$ dans X qui à t associe $t \cdot x$ s'étend en une application régulière de $\mathbf{K}$ dans X ayant $\lim_{t\to 0} t \cdot x$ pour valeur en 0.

Premier exemple fondamental. — Considérons l'action algébrique de $\mathbf{K}^*$ sur $X = \mathbf{K}^{n+1}$ définie par $t \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (t^{a_1}x_1, \ldots, t^{a_{n+1}}x_{n+1})$ où les a_i sont des entiers premiers entre eux tels que $a_i < 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant \alpha$ et $a_i > 0$ pour $\alpha + 1 \leqslant i \leqslant n+1$ pour un entier α tel que $2 \leqslant \alpha \leqslant n$. Alors $X_+ = X \setminus (\mathbf{K}^\alpha \times \{0\})$ et $X_- = X \setminus (\{0\} \times \mathbf{K}^{n+1-\alpha})$. Les quotients géométriques $X_+/\mathbf{K}^*$ et $X_-/\mathbf{K}^*$ existent, ainsi que le quotient catégorique $X//\mathbf{K}^*$ et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_-/\mathbf{K}^* & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & X_+/\mathbf{K}^* \\ & {\scriptstyle\varphi_-}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varphi_+} & \\ & X//\mathbf{K}^* & \end{array}$$

Si $\underline{0} \in X//\mathbf{K}^*$ désigne l'unique $\mathbf{K}^*$-orbite fermée de X, la fibre $\varphi_+^{-1}(\underline{0})$ (resp. $\varphi_-^{-1}(\underline{0})$) est isomorphe à l'espace projectif à poids $\mathbf{P}(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{n+1})$ (resp. $\mathbf{P}(a_1, \ldots, a_\alpha)$) De plus, φ_+ et φ_- se restreignent en des isomorphismes sur l'ouvert $(X_- \cap X_+)/\mathbf{K}^*$, ainsi $\varphi = \varphi_+^{-1} \circ \varphi_- : X_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow X_+/\mathbf{K}^*$ est une application birationnelle.

2.2. Cobordisme birationnel

La définition suivante sera l'outil fondamental dans toute la suite.

DÉFINITION. — *Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux variétés algébriques normales X_1 et X_2 sur $\mathbf{K}$. Un* cobordisme birationnel *pour φ est la donnée d'une variété algébrique normale B telle que :*

(i) *le groupe multiplicatif $\mathbf{K}^*$ agit de façon effective sur B (*i.e. $\bigcap_{x \in B} \mathrm{Stab}(x) = 1$*),*

(ii) *les ensembles B_- et B_+ sont des ouverts (de Zariski) non vides,*

(iii) *les quotients géométriques $B_-/\mathbf{K}^*$ et $B_+/\mathbf{K}^*$ existent et sont respectivement isomorphes à X_1 et X_2,*

(iv) *si $\psi : B_- \dashrightarrow B_+$ est l'application birationnelle induite par les inclusions $B_- \cap B_+ \subset B_-$ et $B_- \cap B_+ \subset B_+$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} B_- & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & B_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & X_2 \end{array}$$

Dans le premier exemple fondamental, $X = \mathbf{K}^{n+1}$ est un cobordisme birationnel pour $\varphi : X_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow X_+/\mathbf{K}^*$.

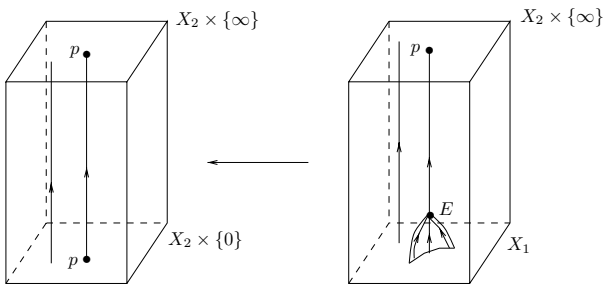


FIGURE 1. Cobordisme birationnel : éclatement d'un point

Deuxième exemple fondamental (voir aussi [Ful84]*).—* Soient X une variété algébrique complète et lisse, Y une sous-variété irréductible lisse de X et $\varphi : X_1 \to X_2 = X$ l'éclatement de X de centre Y. Construisons un cobordisme birationnel pour φ. Soit W la variété algébrique $X_2 \times \mathbf{P}^1$ sur laquelle le groupe $\mathbf{K}^*$ agit algébriquement par multiplication sur le second facteur. Notons $\overline{Y} = Y \times \{0\} \subset W$ et soit $\overline{B}$ la variété algébrique complète et lisse obtenue en éclatant W le long de $\overline{Y}$. Comme $\overline{Y}$ est inclus dans l'ensemble des $\mathbf{K}^*$-points fixes de W, l'action de $\mathbf{K}^*$ sur W se relève en une action sur $\overline{B}$. La transformée stricte D_1 de $X_2 \times \{0\}$ est isomorphe à X_1 si bien que $\overline{B}$ possède deux diviseurs constitués de $\mathbf{K}^*$-points fixes, l'un, D_1, isomorphe à X_1 et l'autre, noté D_2 et égal à l'image inverse dans $\overline{B}$ de $X_2 \times \{\infty\}$, isomorphe à X_2. Posons alors $B = \overline{B} \setminus (D_1 \cup D_2)$. Soit E le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\overline{B} \to W$. Ce diviseur est isomorphe à $\mathbf{P}(N_{\overline{Y}/W}) = \mathbf{P}(N_{Y/X_2} \oplus \underline{0})$ et est $\mathbf{K}^*$-invariant ($\underline{0}$ désigne le fibré en droites trivial). Remarquons que l'ensemble des $\mathbf{K}^*$-points fixes de B correspond à l'image de $\mathbf{P}(N_{X_2 \times \{0\}/W|\overline{Y}})$ dans l'identification précédente et est donc naturellement isomorphe à Y. C'est ensuite un exercice facile de voir que B est un cobordisme birationnel pour φ. La figure 1 représente le cas de l'éclatement d'un point dans une surface et devrait éclairer le lecteur.

2.3. Construction de cobordisme birationnel

On démontre ici le résultat suivant, dû à Włodarczyk [Wlo00] :

THÉORÈME 2.1. — *Soit $\varphi : X_1 \to X_2$ une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives lisses. Alors, il existe une variété projective lisse $\overline{B}$ munie d'une action algébrique effective de $\mathbf{K}^*$ vérifiant :*

(i) *il existe deux plongements $\iota_1 : X_1 \to \overline{B}^{\mathbf{K}^*}$ et $\iota_2 : X_2 \to \overline{B}^{\mathbf{K}^*}$ d'images disjointes,*
(ii) *la variété $B = \overline{B} \setminus (\iota_1(X_1) \cup \iota_2(X_2))$ est un cobordisme birationnel pour φ.*

Démonstration. — Elle suit de près la construction du deuxième exemple fondamental. Comme $\varphi : X_1 \to X_2$ est une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives, il existe un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X_2}$ cohérent tel que φ soit l'éclatement de $\mathcal{I}$ (voir par exemple [Har77] page 166). Soit W la variété algébrique $X_2 \times \mathbf{P}^1$ sur

laquelle le groupe $\mathbf{K}^*$ agit algébriquement par multiplication sur le second facteur. Soit $\mathcal{J} = (p_1^{-1}\mathcal{I} + p_2^{-1}\mathcal{I}_0)\mathcal{O}_W$ où $\mathcal{I}_0$ est l'idéal du point 0 de $\mathbf{P}^1$ et soit $\pi : \widetilde{W} \to W$ l'éclatement de $\mathcal{J}$. Comme $\mathcal{J}$ est $\mathbf{K}^*$-invariant, l'action de $\mathbf{K}^*$ sur W se relève à $\widetilde{W}$. La variété $\widetilde{W}$ est projective et en général singulière. La transformée stricte D_1 de $X_2 \times \{0\}$ est isomorphe à X_1 et, étant lisse, de Cartier et d'équation locale d'ordre 1, est incluse dans le lieu régulier de $\widetilde{W}$. Soit alors $\overline{B}$ une désingularisation canonique de $\widetilde{W}$ (une telle désingularisation est obtenue par une suite d'éclatements le long de centres lisses disjoints du lieu régulier de $\widetilde{W}$ et est naturellement munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$ relevant l'action de $\mathbf{K}^*$ sur W ; de telles désingularisations existent, voir la partie 5 pour plus de détails). Alors, la pré-image D_1' de D_1 dans $\overline{B}$ est isomorphe à X_1, la pré-image D_2' de $X_2 \times \{\infty\}$ dans $\overline{B}$ est isomorphe à X_2 et $B = \overline{B} \setminus (D_1' \cup D_2')$ est un cobordisme birationnel pour φ. □

2.4. Filtrabilité

La notion de cobordisme filtrable est due à Morelli [Mor96] et Włodarczyk [Wlo97], son origine se situe dans les travaux de Bialynicki-Birula.

Définition. — *Soit B une variété algébrique munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$. Si F_1 et F_2 sont deux composantes connexes de $B^{\mathbf{K}^*}$, on dit que F_1* précède *F_2, que l'on note $F_1 \prec F_2$, s'il existe $x \in B \setminus B^{\mathbf{K}^*}$ tel que $\lim_{t\to 0} t\cdot x \in F_1$ et $\lim_{t\to\infty} t\cdot x \in F_2$.*

La relation $\prec$ n'est en général pas transitive.

Définition. — *Soit B une variété algébrique munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$. On dit que B est* filtrable *s'il n'y a pas de $\prec$-cycle de composantes connexes de $B^{\mathbf{K}^*}$*

$$F_1 \prec F_2 \prec \cdots \prec F_m \prec F_1.$$

En particulier, il n'y a pas de composante connexe F de $B^{\mathbf{K}^*}$ telle que $F \prec F$.

Le lemme suivant est élémentaire mais essentiel :

Lemme 2.2. — *Soit B une variété algébrique lisse munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$. Si B est quasi-projective, alors B est filtrable.*

Démonstration. — Par un résultat de Sumihiro [Sum74] [Sum75], il existe une immersion localement fermée et équivariante de B dans un espace projectif $\mathbf{P}(V)$ où V est un espace vectoriel sur lequel $\mathbf{K}^*$ agit linéairement et algébriquement. Comme l'action de $\mathbf{K}^*$ est algébrique, V se décompose en espaces propres $V = \bigoplus_{k=0}^{m} V(a_k)$ où les a_k sont des entiers relatifs ordonnés $a_0 < \cdots < a_m$ et $\mathbf{K}^*$ agit sur $x_k \in V(a_k)$ par $t\cdot x_k = t^{a_k} x_k$ (les a_k sont les *poids* de la représentation V). L'observation suivante est élémentaire mais cruciale : *soit $x \in \mathbf{P}(V)$ que l'on relève en $\overline{x} = x_0 \oplus \cdots \oplus x_m$ dans V. Soit* $\min(x)$ *(resp.* $\max(x)$*) le plus petit (resp. grand) indice i dans $\{0,\dots,m\}$ tel que $x_i \neq 0$. Alors* $\lim_{t\to 0} t\cdot x$ *(resp.* $\lim_{t\to\infty} t\cdot x$*) est l'image dans $\mathbf{P}(V)$ de $x_{\min(x)}$ (resp. $x_{\max(x)}$).*

Les composantes connexes de $(\mathbf{P}(V))^{\mathbf{K}^*}$ sont les $C_{a_k} = \mathbf{P}(V(a_k))$ et le lemme repose sur le fait suivant : s'il existe x dans $\mathbf{P}(V) \setminus (\mathbf{P}(V))^{\mathbf{K}^*}$ tel que $\lim_{t\to 0} t \cdot x \in C_{a_i}$ et $\lim_{t\to\infty} t \cdot x \in C_{a_j}$, alors, d'après l'observation précédente, $a_i < a_j$. De là, si F est une composante connexe de $B^{\mathbf{K}^*}$ et si $a(F)$ est l'unique entier tel que $F \subset C_{a(F)}$, on déduit que $F \prec F'$ implique $a(F) < a(F')$. Il s'ensuit que B est filtrable. □

2.5. Décomposition d'un cobordisme birationnel et théorie géométrique des invariants

Soit $\varphi : X_1 \to X_2$ une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives lisses et soit B un cobordisme birationnel quasi-projectif (et donc filtrable d'après ce qui précède) pour φ donné par le théorème 2.1. Dans le paragraphe précédent, on a associé à B une suite de poids entiers ordonnés $(a_i)_{i=0,\dots,m}$, et quitte à remplacer V par $\mathrm{Sym}^2(V)$, on peut supposer de plus que tous les poids a_i sont pairs, en particulier $a_i < a_i + 1 < a_{i+1}$. Rappelons aussi qu'à toute composante connexe F de $B^{\mathbf{K}^*}$ correspond l'un de ces poids $a(F)$. Si x appartient à $B^{\mathbf{K}^*}$, x appartient à une unique composante connexe F de $B^{\mathbf{K}^*}$ et on note $a(x)$ le poids $a(F)$ correspondant.

Notations. — Soit a_i l'un des poids précédents. On note B_{a_i} le complémentaire dans B de

$$\{x \mid x_\infty = \lim_{t\to\infty} t \cdot x \text{ existe dans } B \text{ et } a(x_\infty) < a_i\} \cup \{x \mid x_0 = \lim_{t\to 0} t \cdot x \text{ existe dans } B \text{ et } a(x_0) > a_i\}.$$

Remarquons que chaque B_{a_i} contient l'ouvert $B_- \cap B_+$ et que si x est un point fixe dans B_{a_i}, alors $a(x) = a_i$. En particulier, d'après le paragraphe 2.4, il n'existe pas de point x dans $B_{a_i} \setminus B_{a_i}^{\mathbf{K}^*}$ tel que $\lim_{t\to 0} t \cdot x$ et $\lim_{t\to\infty} t \cdot x$ existent dans B_{a_i}. Cette dernière observation joue un rôle crucial dans la construction de « l'atlas torique » de la partie 2.6.

Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 2.3. — *Avec les notations précédentes,* $(B_{a_i})_+ = (B_{a_{i+1}})_-$ *pour tout* $0 \leqslant i \leqslant m-1$. *De plus,* $B_- = (B_{a_0})_-$ *et* $B_+ = (B_{a_m})_+$.

Exemple. — Considérons $\mathbf{P}(V)$ où V est un espace vectoriel sur lequel $\mathbf{K}^*$ agit linéairement et algébriquement. Comme précédemment, V se décompose en espaces propres $V = \bigoplus_{k=0}^m V(a_k)$ où les a_k sont les poids de V supposés tels que $a_k < a_k + 1 < a_{k+1}$ pour tout k. Considérons $B = \mathbf{P}(V) \setminus (\mathbf{P}(V(a_0) \cup \mathbf{P}(V(a_m)))$. Alors, il est très facile de voir que

$$B_{a_i} = \{x \in B \mid \min(x) \leqslant i \leqslant \max(x)\},$$
$$(B_{a_i})_+ = \{x \in B \mid \min(x) \leqslant i \leqslant i+1 \leqslant \max(x)\}$$
et
$$(B_{a_i})_- = \{x \in B \mid \min(x) \leqslant i-1 \leqslant i \leqslant \max(x)\}.$$

Le résultat suivant est dû à Włodarczyk [Wlo00], il voit son origine dans les travaux de Guillemin-Sternberg [GuS89] et Brion-Procesi [BrP90] :

PROPOSITION 2.4. — *Le quotient catégorique $B_{a_i}//\mathbf{K}^*$ et les quotients géométriques $(B_{a_i})_-/\mathbf{K}^*$ et $(B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$ existent. De plus, B_{a_i} est un cobordisme birationnel pour*

$$\varphi_i : (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*.$$

Démonstration. — Les notations étant celles de la démonstration du lemme 2.2, soit ρ_0 l'action de $\mathbf{K}^*$ sur $V = \bigoplus_{k=0}^m V(a_k)$ et pour un entier $r \in \mathbf{Z}$, soit ρ_r l'action de $\mathbf{K}^*$ obtenue en « tordant » ρ_0 par t^{-r}. Autrement dit, si $x_k \in V(a_k)$, on a $\rho_r(t)\cdot x_k = t^{a_k - r}x_k$. Evidemment, l'action de ρ_r sur $\mathbf{P}(V)$ est égale à l'action initiale ρ_0, mais ρ_r induit un changement de linéarisation sur le $\mathbf{K}^*$-fibré en droites ample $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(1)$. Sous l'hypothèse que les poids de l'action vérifient $a_i + 1 < a_{i+1}$, on observe que B_{a_i} (resp. $(B_{a_i})_-$, resp. $(B_{a_i})_+$) est le lieu des points semi-stables de B pour le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(1)$ linéarisé par ρ_{a_i} (resp. ρ_{a_i-1}, resp. ρ_{a_i+1}) - rappelons que x est un point semi-stable d'une variété algébrique munie d'une action de $\mathbf{K}^*$ et d'un fibré en droites L ample et linéarisé par ρ_r si et seulement si il existe une section invariante de $L^{\otimes n}$ non nulle en x pour un certain entier n. La théorie géométrique des invariants [MFK94] assure alors que les quotients catégoriques $B_{a_i}//\mathbf{K}^*$, $(B_{a_i})_-//\mathbf{K}^*$ et $(B_{a_i})_+//\mathbf{K}^*$ existent, et comme de plus chaque orbite de $(B_{a_i})_-$ (resp. $(B_{a_i})_+$) est fermée dans $(B_{a_i})_-$ (resp. $(B_{a_i})_+$), les quotients $(B_{a_i})_-//\mathbf{K}^*$ et $(B_{a_i})_+//\mathbf{K}^*$ sont des quotients géométriques. De plus, le quotient catégorique $\pi_i : B_{a_i} \to B_{a_i}//\mathbf{K}^*$ est un morphisme affine : ceci découle du fait déjà observé qu'il n'existe pas de point x dans $B_{a_i} \setminus B_{a_i}^{\mathbf{K}^*}$ tel que $\lim_{t\to 0} t\cdot x$ et $\lim_{t\to\infty} t\cdot x$ existent dans B_{a_i}. Notons enfin qu'il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* & \overset{\varphi_i}{\dashrightarrow} & (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^* \\ & {\scriptstyle (\varphi_i)_-} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle (\varphi_i)_+} & \\ & B_{a_i}//\mathbf{K}^* & \end{array}$$

si bien que le cobordisme birationnel $\varphi_i : (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$ s'interprète comme un changement de linéarisation pour la restriction à B_{a_i} du $\mathbf{K}^*$-fibré en droites ample $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(1)$. □

Faisons le point. — Si $\varphi : X_1 \to X_2$ est une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives lisses, ce qui précède montre que φ se factorise en une suite d'applications birationnelles

$$X_1 = V_0 \overset{\varphi_0}{\dashrightarrow} V_1 \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{i-1}}{\dashrightarrow} V_i \overset{\varphi_i}{\dashrightarrow} V_{i+1} \overset{\varphi_{i+1}}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{m-1}}{\dashrightarrow} V_m \overset{\varphi_m}{\dashrightarrow} V_{m+1} = X_2$$

où chaque $\varphi_i : V_i \dashrightarrow V_{i+1}$ est un cobordisme birationnel $\varphi_i : (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$, la variété B_{a_i} étant une $\mathbf{K}^*$-variété quasi-projective pour laquelle le quotient catégorique $B_{a_i}//\mathbf{K}^*$ existe. La figure suivante illustre cette décomposition.

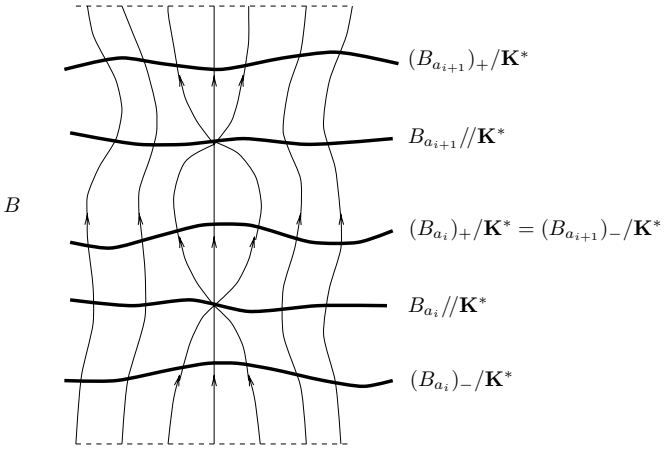


FIGURE 2. Décomposition d'un cobordisme birationnel

2.6. Structures localement toriques

Nous allons expliquer dans ce paragraphe, en montrant que l'on peut munir les variétés B_{a_i} construites précédemment d'un atlas de « cartes étales fortement toriques », que la décomposition obtenue précédemment est une décomposition en applications « localement toriques ». Ceci est un point essentiel pour la suite où toutes les constructions élaborées (en particulier dans la partie 4) et la vérification de leurs propriétés se feront à l'aide de cet atlas.

Rappelons qu'une application régulière $f : Z \to X$ entre variétés algébriques est *étale* si elle est lisse de dimension relative 0. De façon équivalente, f est étale si pour tout $z \in Z$, f induit un isomorphisme $f^* : \widehat{\mathcal{O}}_{X,f(z)} \to \widehat{\mathcal{O}}_{Z,z}$ entre les complétés des anneaux locaux. Sur le corps des nombres complexes, f est étale si et seulement si f est un biholomorphisme local.

DÉFINITION. — *Soit $f : Z \to X$ un morphisme étale, $\mathbf{K}^*$-équivariant entre deux variétés algébriques affines munies d'une action de $\mathbf{K}^*$. On dit que f est* fortement étale *si et seulement si $f//\mathbf{K}^* : Z//\mathbf{K}^* \to X//\mathbf{K}^*$ est étale et l'application naturelle $Z \to Z//\mathbf{K}^* \times_{X//\mathbf{K}^*} X$ est un isomorphisme.*

Soit V une variété algébrique lisse munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$ et soit $x \in V$ un $\mathbf{K}^*$-point fixe. Par un résultat de Sumihiro [Sum74] [Sum75], il existe un voisinage $\mathbf{K}^*$-invariant et affine W_x de x dans V. Comme x est un point fixe, le lemme fondamental de Luna [Lun73] [MFK94] assure qu'il existe un voisinage $\mathbf{K}^*$-invariant et affine $V_x \subset W_x$ de x, saturé pour la projection $\pi_x : W_x \to W_x//\mathbf{K}^*$, et un morphisme $\mathbf{K}^*$-équivariant et fortement étale $\eta_x : V_x \to X_x := T_xV$ (où T_xV est l'espace tangent de V en x). Comme l'action de $\mathbf{K}^*$ sur T_xV se diagonalise, il existe une base de

vecteurs propres de T_xV, faisant de T_xV une variété torique affine lisse où $\mathbf{K}^*$ agit comme sous-groupe à un paramètre du tore (nous renvoyons au paragraphe suivant pour les notions de géométrie torique).

En adaptant un peu cette construction, on obtient la proposition suivante, où l'on a repris les notations des paragraphes précédents :

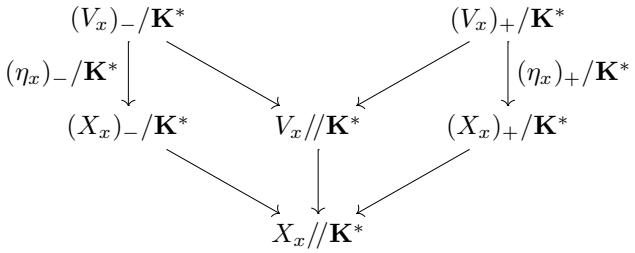
PROPOSITION 2.5. — *Soit B_{a_i} comme dans le paragraphe 2.5 et soit $\pi_i : B_{a_i} \to B_{a_i}//\mathbf{K}^*$ le quotient catégorique. Alors, pour tout $x \in B_{a_i}$, il y a un voisinage $\mathbf{K}^*$-invariant et affine V_x de x, saturé pour π_i, une variété torique affine lisse X_x et un morphisme $\mathbf{K}^*$-équivariant et fortement étale $\eta_x : V_x \to X_x$.*

Mentionnons ici que l'on peut choisir les V_x saturés pour π_i car π_i est un morphisme affine d'après la démonstration de la proposition 2.4. Mentionnons aussi que la version en caractéristique non nulle du résultat de Luna donnée par Bardsley et Richardson [BaR85] peut s'appliquer ici si on ne suppose plus $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle.

DÉFINITION. — *Dans la proposition 2.5, pour $x \in B_{a_i}$, on appelle* carte torique fortement étale en x *la donnée de $\eta_x : V_x \to X_x$.*

Ces cartes toriques fortement étales ont des propriétés très fortes, en particulier :

- $(B_{a_i})_- \cap V_x = (V_x)_-$ et $(B_{a_i})_+ \cap V_x = (V_x)_+$,
- le morphisme η_x se restreint en des morphismes $(\eta_x)_- := (\eta_x)_{|(V_x)_-} : (V_x)_- \to (X_x)_-$ et $(\eta_x)_+ := (\eta_x)_{|(V_x)_+} : (V_x)_+ \to (X_x)_+$ fortement étales et il y a un diagramme commutatif :



La proposition 2.5 signifie donc que le cobordisme birationnel $\varphi_i : (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$ est *localement torique* au sens où, au voisinage de tout point, et à morphisme étale près, l'application birationnelle φ_i est torique. Il est essentiel de remarquer que nous sommes encore loin d'avoir démontré le théorème de factorisation : d'une part les $(B_{a_i})_-/\mathbf{K}^*$ et $(B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$ sont des variétés singulières en général, et d'autre part la structure torique dépend du point x choisi dans B_{a_i}.

Le but de la partie 4 est de décomposer un cobordisme birationnel donné en une suite de cobordismes birationnels (en général singuliers) « toroïdaux », ce qui signifie en un certain sens que la « structure torique » ne dépendra plus du point x choisi.

En attendant, dans la partie 3 suivante, nous nous intéressons au cadre torique.

3. LE THÉORÈME DE MORELLI ET WŁODARCZYK

Nous montrons ici le théorème de factorisation faible des applications birationnelles toriques.

3.1. Rappels de géométrie torique et énoncé du théorème

Des références usuelles de géométrie torique sont [Ewa96], [Ful93] et [Oda88].

DÉFINITION. — *Une* variété torique *(de dimension n) est une variété algébrique normale, contenant le tore $T := (\mathbf{K}^*)^n$ comme ouvert (de Zariski), munie d'une action algébrique de T prolongeant l'action de T sur lui-même.*

Si M est un réseau (*i.e.* un groupe abélien libre) de rang n, une variété torique X_Σ de dimension n munie d'une action du tore $T = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{K}^*)$ est définie par la donnée d'un éventail Σ, subdivision de l'espace vectoriel dual $N_\mathbf{Q} := \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z}) \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{Q}$ par des cônes rationnels polyédraux.

Si X_Σ est une variété torique d'éventail Σ, à chaque cône σ de Σ correspond naturellement un ouvert affine T-invariant U_σ de X_Σ de sorte que $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma$. De plus, si $\sigma \subset \tau$ (*i.e.* σ est une face de τ), alors $U_\sigma \subset U_\tau$. Rappelons aussi qu'il y a une correspondance bijective entre les orbites de T de codimension r dans X_Σ et les cônes de dimension r de Σ. Pour $\sigma \in \Sigma$, on note $V(\sigma)$ l'adhérence de l'orbite correspondant à σ ; si $\sigma \subset \tau$, alors $V(\tau) \subset V(\sigma)$. Rappelons enfin qu'une variété torique est lisse si et seulement si tous les cônes de Σ sont *non-singuliers* (*i.e.* engendrés par une famille de $N := \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$ pouvant se compléter en une base de N) et complète si et seulement si le support de Σ est $N_\mathbf{Q}$.

Le théorème de factorisation faible dans le cadre torique est dû à Morelli [Mor96] et Włodarczyk [Wlo97], voir aussi [AMR99] et [Mat00] :

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle équivariante entre deux variétés toriques complètes et lisses X_1 et X_2 sur $\mathbf{K}$. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses invariants. Autrement dit, il y a une suite d'applications birationnelles équivariantes entre variétés toriques complètes et lisses*

$$X_1 = V_0 \overset{\varphi_0}{\dashrightarrow} V_1 \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{i-1}}{\dashrightarrow} V_i \overset{\varphi_i}{\dashrightarrow} V_{i+1} \overset{\varphi_{i+1}}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{l-2}}{\dashrightarrow} V_{l-1} \overset{\varphi_{l-1}}{\dashrightarrow} V_l = X_2$$

de sorte que $\varphi = \varphi_{l-1} \circ \varphi_{l-2} \circ \cdots \varphi_1 \circ \varphi_0$ et pour tout i, $\varphi_i : V_i \dashrightarrow V_{i+1}$ ou $\varphi_i^{-1} : V_{i+1} \dashrightarrow V_i$ est une application régulière obtenue en éclatant une adhérence d'orbite du tore.

Dans la suite, nous donnons les grandes lignes de la preuve du théorème 3.1. Mentionnons ici que malgré les travaux [Mor96] et [AMR99], le problème de factorisation forte torique est toujours ouvert, même en dimension trois (voir [Mat00] pour une discussion des lacunes de [Mor96] et [AMR99]).

3.2. Cobordisme torique en termes d'éventails, d'après Morelli

Soient M un réseau de rang n et N le réseau dual $\mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$. Soient N^+ le réseau $(n+1)$-dimensionnel $N \oplus \mathbf{Z}$, $N_{\mathbf{Q}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, $N^+_{\mathbf{Q}} := N^+ \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et π la projection $N^+_{\mathbf{Q}} \to N_{\mathbf{Q}}$.

Dans toute la suite et sauf mention explicite du contraire, tous les cônes rationnels σ de $N^+_{\mathbf{Q}}$ que nous considérerons seront supposés *simpliciaux* (*i.e.* engendrés par une famille libre d'éléments de N^+) et *π-strictement convexes* (*i.e.* $\pi(\sigma)$ est un cône strictement convexe de $N_{\mathbf{Q}}$).

Définition. — *Soit σ un cône rationnel de $N^+_{\mathbf{Q}}$. On dit que σ est* π-indépendant *si $\pi_{|\sigma}$ est injective (ceci signifie que* $\mathrm{Vect}(\sigma)$ *ne contient pas la direction verticale $\{0\} \oplus \mathbf{Q}$). On dit que σ est* π-dépendant *s'il n'est pas π-indépendant. Soit σ un cône rationnel π-indépendant de $N^+_{\mathbf{Q}}$. On dit que σ est* π-non-singulier *si $\pi(\sigma)$ est un cône non-singulier de $N_{\mathbf{Q}}$. On dit que σ est* π-singulier *s'il n'est pas π-non-singulier. On dit qu'un éventail de $N^+_{\mathbf{Q}}$ est* π-non-singulier *si tous ses cônes π-indépendants sont π-non-singuliers.*

Nous noterons $\nu = (0, 1) \in N \oplus \mathbf{Z} = N^+$, ce vecteur correspond à un sous-groupe à un paramètre λ_ν du tore $N^+ \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{K}^* = T \times \mathbf{K}^*$.

Soit Σ un éventail simplicial de $N^+_{\mathbf{Q}}$. Définissons les *faces supérieure et inférieure de* Σ

$$\partial_+(\Sigma) = \{x \in \Sigma \mid x + \varepsilon\nu \notin \Sigma \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ petit}\}$$

et

$$\partial_-(\Sigma) = \{x \in \Sigma \mid x - \varepsilon\nu \notin \Sigma \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ petit}\}.$$

Définition. — *Soit σ un cône rationnel simplicial de $N^+_{\mathbf{Q}}$. Nous dirons que σ est un* circuit *si σ est π-dépendant et si toutes les faces strictes de σ sont π-indépendantes.*

Remarquons que tout cône rationnel simplicial π-dépendant de $N^+_{\mathbf{Q}}$ contient (*i.e.* comme face) un unique circuit.

Soit τ un cône rationnel simplicial π-dépendant de $N^+_{\mathbf{Q}}$ et soit σ l'unique circuit inclus dans τ. *Dans ce qui suit, nous allons montrer que la variété affine X_τ munie de l'action du sous-groupe à un paramètre λ_ν est un cobordisme birationnel, que $V(\sigma)$ est l'unique composante connexe de λ_ν-points fixes de X_τ et relier $\partial_-(\tau)$ et $\partial_+(\tau)$ à $(X_\tau)_-$ et $(X_\tau)_+$.*

Supposons pour simplifier que τ est non-singulier et écrivons $\tau = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k, \ldots, \rho_m \rangle$ où les ρ_i sont les générateurs dans N^+ des faces de dimension 1 de τ numérotés de sorte que $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$. Comme τ est non-singulier, on peut compléter la famille $(\rho_1, \ldots, \rho_k, \ldots, \rho_m)$ en une base $(\rho_1, \ldots, \rho_m, \ldots, \rho_{n+1})$ de N^+. La variété torique X_τ est isomorphe à $\mathbf{K}^m \times (\mathbf{K}^*)^{n+1-m}$ et contient l'ouvert affine invariant $U_\sigma = \mathbf{K}^k \times (\mathbf{K}^*)^{n+1-k}$. Soit $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ la base duale de $(\rho_1, \ldots, \rho_{n+1})$. Comme $\nu \in \mathrm{Vect}(\sigma)$, on a $\langle u_i, \nu \rangle = 0$ pour $i \geqslant k+1$ et quitte à renuméroter les ρ_j, on peut

supposer que $\langle u_i, \nu\rangle > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$ et $\langle u_i, \nu\rangle < 0$ pour $l+1 \leqslant i \leqslant k$ où l est un certain entier vérifiant $1 \leqslant l \leqslant k-1$ (un tel l existe car σ est π-strictement convexe).

Le groupe $\mathbf{K}^*$ agit comme sous-groupe à un paramètre λ_ν sur $x \in X_\tau$ par

$$t \cdot x = \lambda_\nu(t)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (t^{\langle u_1,\nu\rangle}x_1, \ldots, t^{\langle u_k,\nu\rangle}x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

Pour j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k$, notons $\gamma_j = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho_j}, \ldots, \rho_m\rangle$ où la notation $\check{\rho_j}$ signifie que ρ_j ne figure pas parmi les arêtes de γ_i. C'est une face maximale de τ et les formules précédentes montrent que :

$$\begin{aligned}(X_\tau)^{\mathbf{K}^*} &= \{(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})\} = V(\sigma),\\ (X_\tau)_+ &= \textstyle\bigcup_{1\leqslant j\leqslant l} U_{\gamma_j}\\ (X_\tau)_- &= \textstyle\bigcup_{l+1\leqslant j\leqslant k} U_{\gamma_j}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, c'est un exercice facile de montrer que

$$\partial_+(\tau) = \textstyle\bigcup_{1\leqslant j\leqslant l} \gamma_j \ \text{ et } \ \partial_-(\tau) = \bigcup_{l+1\leqslant j\leqslant k} \gamma_j.$$

Ainsi, la variété torique $X_{\pi(\partial_+(\tau))}$ (resp. $X_{\pi(\partial_-(\tau))}$) d'éventail $\pi(\partial_+(\tau))$ (resp. $\pi(\partial_-(\tau))$) est la variété torique $(X_\tau)_+/\mathbf{K}^*$ (resp. $(X_\tau)_-/\mathbf{K}^*$) et X_τ est un cobordisme torique birationnel pour $\varphi : X_{\pi(\partial_-(\tau))} \dashrightarrow X_{\pi(\partial_+(\tau))}$. Tout ceci est illustré par la figure 3.

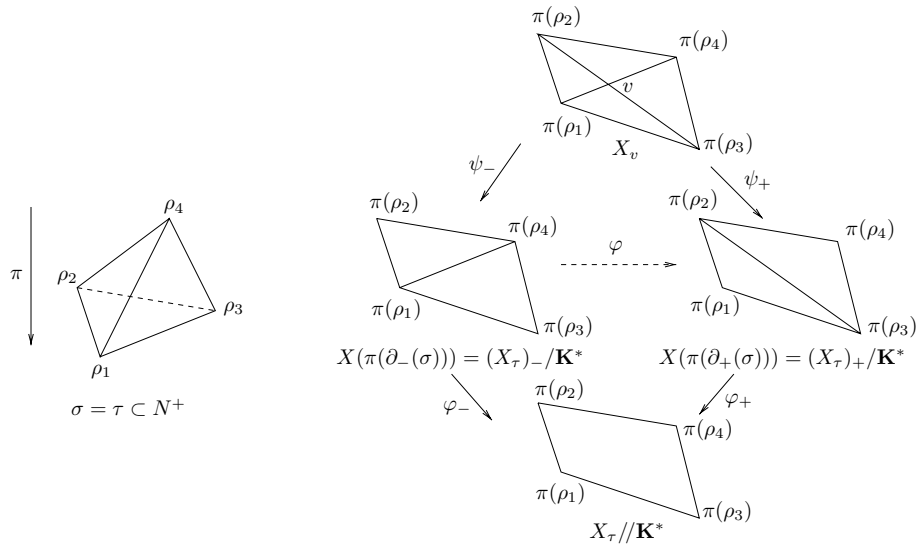


FIGURE 3. Cobordisme torique

Étudions maintenant l'application birationnelle $\varphi : X_{\pi(\partial_-(\tau))} \dashrightarrow X_{\pi(\partial_+(\tau))}$. Pour chaque ρ_j, soit v_j le générateur dans N de l'arête engendrée par $\pi(\rho_j)$ et w_j le rationnel

tel que ρ_j soit proportionnel à (v_j, w_j) : on écrit $\rho_j = c_j(v_j, w_j)$ où c_j est un entier strictement positif. Projetant l'égalité

$$\nu = (0,1) = \sum_{j=1}^{k} \langle u_j, \nu \rangle \rho_j$$

sur le facteur $N_{\mathbf{Q}}$ de $N_{\mathbf{Q}}^+$, il vient :

$$\sum_{j=1}^{k} \langle u_j, \nu \rangle c_j v_j = 0.$$

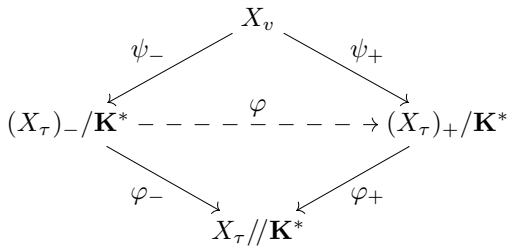
Posons

$$v = \sum_{j=1}^{l} \langle u_j, \nu \rangle c_j v_j = -\sum_{j=l+1}^{k} \langle u_j, \nu \rangle c_j v_j \in N.$$

Ce vecteur v est dans l'intérieur relatif des cônes

$$\langle v_1, \ldots, v_l \rangle = \bigcap_{j=l+1}^{k} \pi(\gamma_j) \text{ et } \langle v_{l+1}, \ldots, v_k \rangle = \bigcap_{j=1}^{l} \pi(\gamma_j).$$

Par conséquent, les éventails obtenus par subdivision étoilée de $\pi(\partial_+(\tau))$ et de $\pi(\partial_-(\tau))$ par rapport à v sont égaux, si bien qu'il existe une variété torique X_v et un diagramme commutatif :



Si de plus le cône initial τ est π-non singulier, alors $(X_\tau)_-/\mathbf{K}^*$ et $(X_\tau)_+/\mathbf{K}^*$ sont lisses et

$$v = \sum_{j=1}^{l} v_j = \sum_{j=l+1}^{k} v_j \in N,$$

de sorte que X_v est lisse, $\psi_+ : X_v \to (X_\tau)_+/\mathbf{K}^*$ et $\psi_- : X_v \to (X_\tau)_-/\mathbf{K}^*$ sont des éclatements le long de sous-variétés lisses invariantes (voir la figure 3).

Insistons ici sur le fait que seule la π-non singularité du cône initial τ est importante (pour obtenir des variétés $(X_\tau)_-/\mathbf{K}^*$ et $(X_\tau)_+/\mathbf{K}^*$ lisses et des éclatements ψ_+ et ψ_- le long de sous-variétés lisses invariantes) mais il n'est pas nécessaire de supposer que τ soit non-singulier, le fait qu'il soit simplicial est suffisant.

3.3. Cobordisme torique

Soit $\varphi : X_{\Delta'} \to X_\Delta$ une application régulière birationnelle équivariante entre deux variétés toriques projectives lisses de dimension n et d'éventails respectifs Δ' et Δ dans $N_{\mathbf{Q}}$. La construction expliquée au paragraphe 2.3 s'adapte sans difficulté au cas torique (historiquement, rappelons que c'est la construction torique qui a inspiré le cas général), si bien qu'il existe un cobordisme birationnel B torique (au sens où l'action de $\mathbf{K}^*$ sur B est celle d'un sous-groupe à un paramètre du tore de B) quasi-projectif pour φ.

D'après ce qui précède, l'existence d'un tel B en termes d'éventails se traduit de la façon suivante. Il existe un éventail Σ non-singulier (et donc simplicial) dans $N^+_{\mathbf{Q}}$ tel que $\pi(\partial_-(\Sigma)) = \Delta'$, $\pi(\partial_+(\Sigma)) = \Delta$, B est la variété torique d'éventail Σ et φ est le cobordisme birationnel $\varphi : B_-/\mathbf{K}^* = X_{\Delta'} \to B_+/\mathbf{K}^* = X_\Delta$. Comme B est quasi-projectif, il y a un ordre sur les circuits de Σ (qui correspondent aux composantes connexes des points fixes pour l'action du sous-groupe à un paramètre $\nu = (0,1)$). Choisissons un circuit σ_1 minimal pour cet ordre. Soient

$$\mathrm{Star}(\sigma_1) = \{\tau \in \Sigma \mid \sigma_1 \subset \tau\}$$

et

$$\overline{\mathrm{Star}}(\sigma_1) = \{\tau' \in \Sigma \mid \tau' \subset \tau \text{ pour un } \tau \text{ dans } \mathrm{Star}(\sigma_1)\}.$$

Alors comme σ_1 est minimal, $\partial_-(\overline{\mathrm{Star}}(\sigma_1)) \subset \partial_-(\Sigma)$. Posons alors $\Sigma_1 = (\Sigma \setminus \partial_-(\overline{\mathrm{Star}}(\sigma_1))) \cup \partial_+(\overline{\mathrm{Star}}(\sigma_1))$. D'après le paragraphe précédent, si B_1 est la variété d'éventail Σ_1 et si X_1 est la variété torique d'éventail $\Delta_1 := \pi(\partial_-(\Sigma_1))$, alors φ se décompose en

$$\varphi : B_-/\mathbf{K}^* = X_{\Delta'} \overset{\psi_-}{\leftarrow} X_v \overset{\psi_+}{\to} X_{\Delta_1} = (B_1)_-/\mathbf{K}^* \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} X_\Delta = (B_1)_+/\mathbf{K}^* = B_+/\mathbf{K}^*,$$

et on peut recommencer avec le cobordisme B_1. Si de plus Σ est π-non singulier, alors X_{Δ_1} et X_v sont lisses, ψ_- et ψ_+ sont des éclatements le long de sous-variétés lisses invariantes et Σ_1 est encore π-non singulier.

Faisons le point. — Le théorème 3.1 est démontré pour une application régulière $\varphi : X_{\Delta'} \to X_\Delta$ birationnelle équivariante entre deux variétés toriques projectives lisses de dimension n si on peut contruire un cobordisme birationnel $\widetilde{B}$ quasi-projectif d'éventail $\widetilde{\Sigma}$ simplicial et π-*non singulier* dans $N^+_{\mathbf{Q}}$ tel que $\pi(\partial_-(\widetilde{\Sigma})) = \Delta'$ et $\pi(\partial_+(\widetilde{\Sigma})) = \Delta$.

Un tel éventail $\widetilde{\Sigma}$ va être obtenu en π-désingularisant l'éventail Σ, son existence est garantie par le théorème de π-désingularisation de Morelli, dont l'énoncé fait l'objet du paragraphe suivant et dont la démonstration est repoussée à la fin de ce texte §6.

3.4. Le théorème de π-désingularisation de Morelli

Les notations sont celles du paragraphe précédent. Le théorème suivant est dû à Morelli [Mor96] avec une démonstration incomplète ; la démonstration a été complétée par Abramovich, Matsuki et Rashid [AMR99] [Mat00].

THÉORÈME 3.2. — *Soit Σ un éventail de $N_{\mathbf{Q}}^+$. Alors il existe un éventail π-non-singulier de $N_{\mathbf{Q}}^+$ obtenu par une suite finie de subdivisions étoilées de Σ. De plus, la procédure de π-désingularisation n'affecte pas les cônes π-non-singuliers de Σ.*

Il apparaîtra clairement lors de la démonstration de ce résultat §6 que l'éventail obtenu n'est en général pas non-singulier.

3.5. Démonstration du théorème de factorisation faible torique

On termine la démonstration du théorème de factorisation, qui repose sur le lemme de Chow torique (voir par exemple [Oda88]) et la levée des indéterminations torique due à De Concini-Procesi [DCP85].

THÉORÈME 3.3. — *Soit X une variété torique complète. Alors il existe une variété torique projective lisse $\widetilde{X}$ et une application régulière birationnelle équivariante $\varphi : \widetilde{X} \to X$.*

THÉORÈME 3.4. — *Soit $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle équivariante entre deux variétés toriques complètes lisses. Alors il existe une suite d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi : \overline{X} \to X$ telle que $\varphi \circ \psi : \overline{X} \to X'$ soit une application régulière birationnelle équivariante.*

De ces deux résultats, déduisons une version précise du théorème de Moishezon torique :

THÉORÈME 3.5. — *Soit X une variété torique lisse et complète. Alors il existe une variété torique projective lisse $\widetilde{X}$ obtenue à partir de X par suite d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi : \widetilde{X} \to X$.*

Démonstration. — Soit $\varphi : \widetilde{X} \to X$ donnée par le théorème 3.3, où $\widetilde{X}$ est projective lisse. Appliquons le théorème 3.4 à φ^{-1} : il y a une suite d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi : \overline{X} \to X$ de sorte que $h = \varphi^{-1} \circ \psi : \overline{X} \to \widetilde{X}$ soit une application régulière birationnelle. Comme ψ est un morphisme projectif et puisque $\varphi \circ h = \psi$, h est aussi un morphisme projectif, et comme $\widetilde{X}$ est projective, on en déduit que $\overline{X}$ est projective. □

Application. — Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux variétés toriques complètes et lisses. Par le théorème 3.5, il y a des variétés toriques projectives lisses $\widetilde{X_1}$ et $\widetilde{X_2}$ et deux suites d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi_1 : \widetilde{X_1} \to X_1$ et $\psi_2 : \widetilde{X_2} \to X_2$. Soit $\widetilde{\varphi} = \psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1 : \widetilde{X_1} \dashrightarrow \widetilde{X_2}$. Par le théorème 3.4, il existe une suite d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi : \overline{X_1} \to \widetilde{X_1}$ telle que $\widetilde{\varphi} \circ \psi : \overline{X_1} \to \widetilde{X_2}$ soit une application régulière birationnelle équivariante. Comme $\overline{X_1}$ et $\widetilde{X_2}$ sont projectives lisses, il y a d'après les paragraphes précédents une factorisation faible pour $\widetilde{\varphi} \circ \psi$ et par suite une factorisation faible pour φ. Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

3.6. Extension au cas toroïdal

Il y a une classe de variétés algébriques possédant essentiellement les mêmes propriétés que les variétés toriques.

DÉFINITION. — *Soit V une variété algébrique et U un ouvert de V. Le plongement $U \subset V$ est un* plongement toroïdal *si pour tout $x \in V$, il y a un voisinage V_x de x dans V, une variété torique X_x et une application étale $\eta_x : V_x \to X_x$ telle que $\eta_x^{-1}(T_x) = V_x \cap U$.*

Comme dans le cas torique, il y a une notion naturelle de morphismes toroïdaux et d'applications birationnelles toroïdales entre plongements toroïdaux. De plus, il y a une stratification naturelle de V et les adhérences des strates correspondent formellement aux adhérences d'orbites dans les variétés toriques. Enfin, un plongement toroïdal est décrit par un complexe polyédral conique rationnel qui joue exactement le rôle de l'éventail d'une variété torique (à ceci près que ce complexe est défini abstraitement et qu'il ne se plonge en général pas linéairement dans un espace vectoriel $N_{\mathbf{Q}}$). Les résultats de la géométrie birationnelle des variétés toriques (existence de désingularisation, levée des indéterminations par éclatements de centres lisses, etc.) s'étendent sans trop de difficultés au cas des plongements toroïdaux (voir [KKMS73] ou [AbO97] p. 69-73). Il en est de même pour le théorème de factorisation comme l'ont remarqué Abramovich, Matsuki et Rashid [AMR99].

THÉORÈME 3.6. — *Soit $\varphi : (U_1 \subset X_1) \dashrightarrow (U_2 \subset X_2)$ une application birationnelle toroïdale entre deux plongements toroïdaux lisses sur $\mathbf{K}$, X_1 et X_2 complètes. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses égaux à des adhérences de strates.*

4. STRUCTURES TOROÏDALES ET COBORDISME BIRATIONNEL

Le but de cette partie est de décomposer un cobordisme birationnel donné en une suite de cobordismes birationnels (en général singuliers) toroïdaux. L'idée est la suivante : si on éclate un faisceau d'idéaux I sur une variété algébrique, on obtient une nouvelle variété algébrique avec un diviseur bien déterminé puisque I devient principal après éclatement. Le complémentaire de son support est alors un candidat pour être un plongement toroïdal. Lorsque de plus la variété algébrique est munie d'une action de $\mathbf{K}^*$, on peut essayer de construire I de sorte que le plongement toroïdal obtenu soit compatible avec l'action de $\mathbf{K}^*$.

4.1. Idéal α-toroïdal

Soit V une variété algébrique munie d'une action algébrique effective de $\mathbf{K}^*$. Pour $v \in V$, on note $\mathrm{Stab}(v)$ le stabilisateur de v ($\mathrm{Stab}(v)$ est isomorphe soit à $\mathbf{K}^*$, soit à un groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$).

Notation. — Si α est un entier, on note $J_{\alpha,v}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{V,v}$ engendré par les fonctions $f \in \mathcal{O}_{V,v}$ $\mathrm{Stab}(v)$-semi-invariantes de $\mathrm{Stab}(v)$-poids α, *i.e.* pour tout $t \in \mathrm{Stab}(v)$, $t^*(f) = t^\alpha f$.

Il n'est pas difficile de voir que si $z_1, \ldots, z_n$ sont des générateurs $\mathrm{Stab}(v)$-semi-invariants de l'idéal maximal $\mathcal{M}_{V,v}$ dont l'existence est assurée par le théorème de Sumihiro [Sum74] [Sum75], alors $J_{\alpha,v}$ est engendré par les monômes $z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$ de $\mathrm{Stab}(v)$-poids α. Ceci implique en particulier que si $\eta : V \to X$ est un morphisme $\mathbf{K}^*$-équivariant fortement étale entre deux variétés algébriques munies d'une action de $\mathbf{K}^*$, alors l'image inverse de $J_{\alpha,\eta(v)}$ engendre $J_{\alpha,v}$ pour tous $v \in V$ et $\alpha \in \mathbf{Z}$.

La collection des $J_{\alpha,v}$ lorsque v décrit V ne définit pas un faisceau d'idéaux cohérent en général. Cependant, on a la proposition suivante :

Proposition 4.1. — *Soient $\alpha \in \mathbf{Z}$ et B un cobordisme birationnel lisse quasi-projectif de la forme B_{a_i} (les notations sont celles des parties 2.5 et 2.6). Alors, il existe un unique faisceau d'idéaux cohérent $\mathbf{K}^*$-équivariant I_α non nul tel que pour tout $v \in (B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}$, on a $(I_\alpha)_v = J_{\alpha,v}$.*

L'idéal I_α s'appelle le faisceau *α-toroïdal* associé à l'action de $\mathbf{K}^*$ sur B. Rappelons que $(B_+ \cap B_-)$ est un ouvert non vide de B et que $(B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}$ est l'union des $\mathbf{K}^*$-orbites fermées de B.

Démonstration de la proposition 4.1. — Commençons par l'unicité de I_α. Elle est claire sur $(B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}$. Soit donc v dans le complémentaire de $(B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}$. L'adhérence de l'orbite de v contient un point fixe. Comme I_α est uniquement déterminé en ce point fixe, il l'est aussi au voisinage puisque I_α est cohérent. Par $\mathbf{K}^*$-équivariance, I_α est alors uniquement déterminé en v.

Pour l'existence, la proposition 2.5 permet de recouvrir B par des cartes toriques $\eta_x : V_x \to X_x$ fortement étales. Comme $((B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}) \cap V_x$ est l'image inverse par η_x de $((X_x)_+ \cap (X_x)_-) \cup (X_x)^{\mathbf{K}^*}$, il suffit de construire un faisceau α-toroïdal sur X_x. Par image inverse, ceci définit un faisceau α-toroïdal sur V_x et l'unicité déjà prouvée entraîne que ces faisceaux ainsi construits se recollent en un faisceau sur B. Le lemme suivant [AKMW99] achève donc la preuve. □

Lemme 4.2. — *Soit X une variété torique affine lisse définie par un cône régulier σ d'un réseau N et soit $a \in N$ un élément primitif correspondant à une action effective de $\mathbf{K}^*$ d'un sous-groupe à un paramètre de T. On suppose de plus que a n'appartient pas à $\sigma \cup -\sigma$ (ceci correspond au fait que $B_+ \cap B_-$ est non vide). Alors, pour tout*

$\alpha \in \mathbf{Z}$, le faisceau I_α existe, est non nul et engendré par les monômes z^m où $m \in \check{\sigma}$ avec $\langle m, a\rangle = \alpha$.

Remarquons qu'il n'est pas utile d'après ce lemme de calculer explicitement les stabilisateurs $\mathrm{Stab}(v)$. Donnons un exemple concret, que nous utiliserons aussi dans la suite :

Exemple « $(2,1,-1)$ ». — Soit $X = \mathbf{K}^3$ munie de l'action du sous-groupe à un paramètre $a = (2,1,-1)$ (*i.e.* $\lambda_a(t)(z_1,z_2,z_3) = (t^2 z_1, t z_2, t^{-1} z_3)$), alors I_2 (resp. I_1, resp. I_{-1}) est le faisceau d'idéaux engendré par z_1 et z_2^2 (resp. $z_1 z_3$ et z_2, resp. z_3).

4.2. Plongements toroïdaux avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$

Soit V une variété algébrique munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$. On suppose que l'action de $\mathbf{K}^*$ est localement torique au sens où on peut recouvrir V par des cartes toriques fortement étales. Soit D un diviseur effectif de V et U l'ouvert $V \setminus \mathrm{Supp}(D)$.

Définition. — *On dit que U est un* plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$ *si pour tout $x \in V$, il y a un voisinage $\mathbf{K}^*$-invariant et affine V_x de x, une variété torique affine X_x avec une action de $\mathbf{K}^*$ d'un sous-groupe à un paramètre et un morphisme $\mathbf{K}^*$-équivariant étale $\eta_x : V_x \to X_x$ tel que $\eta_x^{-1}(T_x) = V_x \cap U$ (où T_x désigne le tore dense de X_x). On appelle* carte toroïdale étale *en x la donnée d'une telle $\eta_x : V_x \to X_x$. D'après le lemme fondamental de Luna, si une telle carte existe, en restreignant l'ouvert V_x, on peut la supposer de plus fortement étale.*

Exemples. — Soit X la variété torique $\mathbf{K}^2$ définie par un cône régulier $\sigma = \langle v_1, v_2\rangle$ d'un réseau N et soit $a = (a_1, a_2) \in N$ un élément primitif correspondant à une action effective de $\mathbf{K}^*$ d'un sous-groupe à un paramètre de T. Soient $D_{v_1} = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{K}^2 \mid z_1 = 0\}$ et $D_{v_2} = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{K}^2 \mid z_2 = 0\}$. Alors, $U = \mathbf{K}^2 \setminus (D_{v_1} \cup D_{v_2})$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$ quel que soit le choix du sous-groupe à un paramètre a. En revanche, $U = \mathbf{K}^2 \setminus D_{v_1}$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$ si et seulement si $a = \pm v_1$. Géométriquement, ceci signifie que l'action de $\mathbf{K}^*$ sur $\mathbf{K}^2$ est produit de l'action triviale sur $\{0\} \times \mathbf{K}$ et d'une action d'un sous-groupe à un paramètre de la variété torique $\mathbf{K} \times \{0\}$ et que le diviseur D_{v_2} est égal à $\mathbf{K} \times \{0\}$.

Cet exemple se généralise en le lemme suivant [AKMW99] :

Lemme 4.3. — *Soit X une variété torique définie par un éventail Σ d'un réseau N et soit $a \in N$ un élément primitif correspondant à une action effective de $\mathbf{K}^*$ d'un sous-groupe à un paramètre de T, soient D un diviseur torique effectif de X et $U = X \setminus \mathrm{Supp}(D)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout cône* σ *de* Σ *et tout diviseur torique* E *de l'ouvert torique affine* $U_\sigma \subset X$*, si* E *n'est pas dans* $\mathrm{Supp}(D)$*, alors il existe une variété torique affine* $X_{\sigma'}$ *telle que :*

$$U_\sigma \simeq X_{\sigma'} \times \mathbf{K} \ \text{ et } \ E \simeq X_{\sigma'} \times \{0\}$$

de sorte que l'action de $\mathbf{K}^*$ *sur* U_σ *soit le produit de l'action d'un sous-groupe à un paramètre sur* $X_{\sigma'}$ *et de l'action triviale sur* $\mathbf{K}$*,*

(ii) U *est un plongement toroïdal avec action toroïdale de* $\mathbf{K}^*$*.*

Remarquons que l'implication *(i) implique (ii)* est aisée, c'est la seule utilisée dans la suite.

4.3. Faisceaux toroïdaux et plongements toroïdaux

Soit B un cobordisme birationnel lisse et quasi-projectif de dimension $n+1$ de la forme B_{a_i} (les notations sont celles des parties 2.5 et 2.6). Fixons-nous une famille finie de cartes toriques fortement étales $\eta_x : V_x \to X_x$ recouvrant B. Dans X_x, l'action de $\mathbf{K}^*$ correspond à celle d'un sous-groupe à un paramètre : concrètement X_x est isomorphe à $\mathbf{K}^m \times (\mathbf{K}^*)^{n+1-m}$ et l'action de $\mathbf{K}^*$ est de la forme $t \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_{n+1}} x_{n+1})$ pour certains poids entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$.

Notation. — On note $\mathcal{A}$ une famille finie d'entiers telle que pour toute carte torique fortement étale $\eta_x : V_x \to X_x$, tous les poids $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ de l'action de $\mathbf{K}^*$ appartiennent à $\mathcal{A}$. Une telle famille d'entiers sera dite *admissible*.

Définition. — *Si* $\mathcal{A}$ *est une famille admissible d'entiers, on note* $I_\mathcal{A}$ *le faisceau d'idéaux sur* B *défini par* $I_\mathcal{A} = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$*. Un tel faisceau d'idéaux sur* B *est appelé* faisceau toroïdal.

Notation. — Si $I_\mathcal{A}$ est un faisceau toroïdal, on note $\pi_\mathcal{A} : B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}} \to B$ la normalisation de l'éclatement de B de centre le faisceau d'idéaux $I_\mathcal{A}$. Comme $I_\mathcal{A}$ est $\mathbf{K}^*$-équivariant, la variété $B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ est naturellement munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$ faisant de $\pi_\mathcal{A}$ un morphisme équivariant. On note $D^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ le diviseur défini par le faisceau inversible $\pi_\mathcal{A}^{-1}(I_\mathcal{A})\mathcal{O}_{B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}}$ et $U^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ le complémentaire de son support dans $B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$.

La proposition suivante est le cœur de cette partie :

Proposition 4.4. — *La variété algébrique* $B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ *est un cobordisme birationnel quasi-projectif. L'ouvert* $U^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ *est un plongement toroïdal avec action toroïdale de* $\mathbf{K}^*$*. Enfin,* $(B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}})_+ = \pi_\mathcal{A}^{-1}(B_+)$ *et* $(B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}})_- = \pi_\mathcal{A}^{-1}(B_-)$*.*

Démonstration. — Montrons que l'ouvert $U^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$. A nouveau, il suffit de traiter le cas torique, autrement dit de montrer ce résultat dans chacune des cartes toriques fortement étales considérées au début de la construction. Le lemme suivant donne donc le résultat. □

LEMME 4.5. — *Soit X la variété torique affine lisse $\mathbf{K}^m \times (\mathbf{K}^*)^{n+1-m}$ avec une action de $\mathbf{K}^*$ de la forme $t \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_{n+1}} x_{n+1})$ pour certains poids entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Soient $\mathcal{A}$ une famille d'entiers contenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ et $I_{\mathcal{A}}$ le faisceau toroïdal associé. Soient $\pi_{\mathcal{A}} : X^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}} \to X$ la normalisée de l'éclatement de centre $I_{\mathcal{A}}$, $D^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ le diviseur défini par le faisceau inversible $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(I_{\mathcal{A}})\mathcal{O}_{B^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}}$ et $U^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ le complémentaire de son support dans $B^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$. Alors $U^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$.*

Démonstration. — Les diviseurs toriques de $X^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ non inclus dans $\mathrm{Supp}(D^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}})$ (les seuls à considérer d'après le lemme 4.3) sont des transformées strictes de diviseur $D_i := \{x \in X \mid x_i = 0\}$. Soit donc i dans $\{1, \ldots, n+1\}$. Evidemment, le monôme x_i appartient au faisceau α_i-toroïdal I_{α_i}. Si ce dernier est principal engendré par x_i, alors D_i est dans $\mathrm{Supp}(D^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}})$. Sinon, soit X_i la normalisée de l'éclatement du faisceau α_i-toroïdal I_{α_i}. Il est aisé de vérifier que D_i satisfait l'assertion (i) du lemme 4.3. La suite de la démonstration consiste à remarquer que $X^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ est obtenu en normalisant l'éclatement de centre I_{α_1}, puis en normalisant l'éclatement de centre l'image inverse de I_{α_2}, etc. □

Reprenons l'exemple « $(2, 1, -1)$ » : $X = \mathbf{K}^3$ munie de l'action du sous-groupe à un paramètre $(2, 1, -1)$. On prend ici $\mathcal{A} = \{-1, 1, 2\}$. Si X est définie par un cône régulier $\sigma = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, alors $X^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ est la variété torique d'éventail Σ obtenu en subdivisant σ en les trois cônes : $\sigma_1 = \langle v_1, 2v_1 + v_2, v_3 \rangle$, $\sigma_2 = \langle v_1 + v_2, v_3, 2v_1 + v_2, v_2 + v_3 \rangle$ et $\sigma_3 = \langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2 \rangle$. Le diviseur $D^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ est le diviseur $D_{v_3} \cup D_{v_1+v_2} \cup D_{2v_1+v_2} \cup D_{v_2+v_3}$. Seul les cônes σ_1 et σ_3 sont à considérer pour vérifier l'assertion (i) du lemme 4.3, avec $E = D_{v_1}$ pour σ_1 et $E = D_{v_2}$ pour σ_3. L'assertion (i) est satisfaite car $a = (2, 1, -1)$ appartient au réseau engendré par $v_1 + v_2$ et $v_2 + v_3$ et au réseau engendré par $2v_1 + v_2$ et v_3.

COROLLAIRE 4.6. — *Soit B_{a_i} un cobordisme birationnel lisse et quasi-projectif obtenu dans le paragraphe 2.5. Choisissons un faisceau toroïdal $I_{\mathcal{A}_i}$ et notons $\pi_{\mathcal{A}_i} : B^{\mathrm{tor}}_{a_i} \to B_{a_i}$ la normalisée de l'éclatement de centre $I_{\mathcal{A}_i}$. Alors, il y a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} & & (B^{\mathrm{tor}}_{a_i})_-/\mathbf{K}^* & \xrightarrow{\varphi_i^{\mathrm{tor}}} & (B^{\mathrm{tor}}_{a_i})_+/\mathbf{K}^* & & \\ & \swarrow{\scriptstyle (\pi_{\mathcal{A}_i})_-} & & & & \searrow{\scriptstyle (\pi_{\mathcal{A}_i})_+} & \\ V_i = (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* & & \dashrightarrow^{\varphi_i} & & & & (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^* = V_{i+1} \end{array}$$

Faisons le point. — La variété $B^{\mathrm{tor}}_{a_i}$ contient l'ouvert $U^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}_i}}$ comme plongement toroïdal avec action de $\mathbf{K}^*$ si bien que φ_i^{tor} est une application birationnelle toroïdale au sens

où pour tout $x \in B_{a_i}^{\mathrm{tor}}$ il y a une carte en x toroïdale fortement étale $\eta_x : V_x^{\mathrm{tor}} \to X_x$ (donc vérifiant $\eta_x^{-1}(T_x) = V_x^{\mathrm{tor}} \cap U_{I_{\mathcal{A}_i}}^{\mathrm{tor}}$) induisant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (V_x^{\mathrm{tor}})_-/\mathbf{K}^* & \overset{\varphi_i^{\mathrm{tor}}}{- -\to} & (V_x^{\mathrm{tor}})_+/\mathbf{K}^* \\ (\eta_x)_-/\mathbf{K}^* \big\downarrow & & \big\downarrow (\eta_x)_+/\mathbf{K}^* \\ (X_x)_-/\mathbf{K}^* & - - \to & (X_x)_+/\mathbf{K}^* \end{array}$$

où $(X_x)_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (X_x)_+/\mathbf{K}^*$ est une application birationnelle entre variétés toriques. Dans la partie suivante, on explique comment on peut obtenir un résultat analogue en restant dans le cadre des variétés non singulières.

5. DÉSINGULARISATION CANONIQUE ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FACTORISATION

5.1. Désingularisation canonique

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, on sait depuis Hironaka [Hir64] que toute variété algébrique peut être désingularisée par une suite d'éclatements le long de centres lisses. A partir de la dimension trois, il n'y a pas de désingularisation minimale et il n'y a pas de choix naturel d'un modèle non singulier pour une variété algébrique donnée. Cependant, avec les travaux de Bierstone-Milman [BiM97], Encinas-Villamayor [EnV97] et Villamayor [Vil89], on peut parler de désingularisation « canonique ».

Définition. — *Une* résolution canonique des singularités *est un algorithme qui à toute variété algébrique X associe une suite uniquement déterminée d'éclatements le long de centres lisses $r : X^{\mathrm{res}} \to X$ satisfaisant : pour tout morphisme lisse $Y \to X$, la variété Y^{res} est égale au produit fibré $Y \times_X X^{\mathrm{res}}$.*

Une résolution canonique des singularités a les propriétés suivantes découlant de la définition :

- les centres des éclatements sont au-dessus du lieu singulier de X,
- toute famille d'automorphismes $(\theta_g)_{g\in G}$ d'une variété X paramétrée par une variété non singulière G se relève en une famille d'automorphismes de X^{res}. Ceci s'applique en particulier au cas de l'action d'un groupe algébrique.

De telles résolutions canoniques des singularités existent d'après Bierstone-Milman, Encinas-Villamayor, Hironaka ou Villamayor.

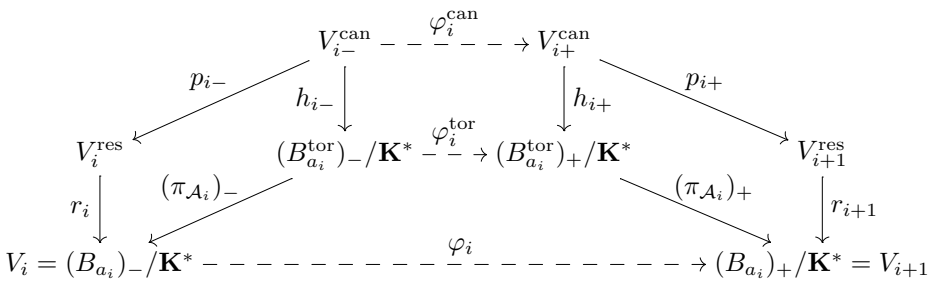
Les algorithmes connus de résolutions canoniques des singularités ont la propriété supplémentaire suivante : *pour tout faisceau d'idéaux cohérent $I \subset \mathcal{O}_X$ sur une variété non singulière X, il existe une suite uniquement déterminée d'éclatements le long de*

centres lisses $p : X^{\mathrm{can}} \to X$ de sorte que $p^{-1}(I)\mathcal{O}_{X^{\mathrm{can}}}$ soit principal et pour tout morphisme lisse $f : Y \to X$, la suite correspondante d'éclatements $p' : Y^{\mathrm{can}} \to Y$ de sorte que $(p')^{-1}(f^*I)\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{can}}}$ soit principal est égale au produit fibré $Y \times_X X^{\mathrm{can}} \to Y$. (Attention, $p : X^{\mathrm{can}} \to X$ dépend de I mais nous n'avons pas inclus I dans la notation pour ne pas alourdir la suite.)

Dorénavant, on se fixe une résolution canonique des singularités.

La proposition suivante est le cœur de cette partie :

PROPOSITION 5.1. — *Avec les notations du corollaire 4.6, il y a un diagramme commutatif de variétés algébriques :*



où

(i) *p_{i-} et p_{i+} sont deux suites d'éclatements le long de centres lisses,*

(ii) *si $U_{i-}^{\mathrm{can}} = h_{i-}^{-1}((U_{I_{\mathcal{A}_i}}^{\mathrm{tor}})_-/\mathbf{K}^*)$ et $U_{i+}^{\mathrm{can}} = h_{i+}^{-1}((U_{I_{\mathcal{A}_i}}^{\mathrm{tor}})_+/\mathbf{K}^*)$, alors $(U_{i-}^{\mathrm{can}} \subset V_{i-}^{\mathrm{can}})$ et $(U_{i+}^{\mathrm{can}} \subset V_{i+}^{\mathrm{can}})$ sont des plongements toroïdaux et φ_i^{can} est birationnelle toroïdale.*

Expliquons la construction de ce diagramme. Il s'agit de montrer dans un premier temps que $(\pi_{\mathcal{A}_i})_-$ est l'éclatement d'un faisceau d'idéaux $(I_i)_-$ sur V_i. C'est plus facile si l'on suppose que la famille admissible $\mathcal{A}_i$ est choisie vérifiant

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i} \alpha = 0,$$

ce qu'il est toujours possible de faire en rajoutant un entier à la famille admissible initialement choisie. Alors, le faisceau toroïdal $I_{\mathcal{A}_i}$ sur B_{a_i} est engendré par des fonctions invariantes d'après le lemme 4.2, donc provient d'un faisceau d'idéaux I_i sur $B_{a_i}//\mathbf{K}^*$. Le faisceau d'idéaux $(I_i)_-$ sur V_i est alors obtenu par image inverse $V_i = (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \to B_{a_i}//\mathbf{K}^*$. Le morphisme $p_{i-} : V_{i-}^{\mathrm{can}} \to V_i^{\mathrm{res}}$ est la suite d'éclatements uniquement déterminée rendant $r_i^{-1}((I_i)_-)\mathcal{O}_{V_i^{\mathrm{res}}}$ principal et h_{i-} est l'unique morphisme induit par la propriété universelle de l'éclatement d'un faisceau d'idéaux. La vérification du point (ii) se fait à nouveau dans les cartes toriques fortement étales utilisées pour construire le faisceau toroïdal $I_{\mathcal{A}_i}$, on renvoie à [AKMW99] pour les détails.

COROLLAIRE 5.2. — *Soit $\varphi : X_1 \to X_2$ une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives lisses. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de tout ce qui précède : il suffit d'appliquer le théorème 3.6 à chaque φ_i^{can} et de remarquer que puisque X_1 et X_2 sont lisses, alors $X_1 = V_0 = V_0^{\mathrm{res}}$ et $X_2 = V_{m+1} = V_{m+1}^{\mathrm{res}}$. □

5.2. Fin de la démonstration du théorème de factorisation

Elle se termine exactement comme dans le cas torique, à l'aide du théorème de Moishezon [Moi67]. La levée des indéterminations, due à Hironaka [Hir75] dans le cadre général se formule ainsi :

THÉORÈME 5.3. — *Soit $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle entre deux variétés complètes lisses. Alors il existe une suite d'éclatements le long de sous-variétés lisses $\psi : \overline{X} \to X$ telle que $\varphi \circ \psi : \overline{X} \to X'$ soit une application régulière birationnelle.*

Le lemme de Chow (voir [Har77] p. 107) est lui aussi valable en général :

THÉORÈME 5.4. — *Soit X une variété algébrique complète. Alors il existe une variété projective lisse $\widetilde{X}$ et une application régulière birationnelle $\varphi : \widetilde{X} \to X$.*

On déduit de ces résultats le théorème de Moishezon [Moi67] (dont la preuve initiale, antérieure à la levée des indéterminations est évidemment beaucoup plus difficile) comme dans le cas torique :

THÉORÈME 5.5. — *Soit X une variété algébrique lisse et complète. Alors il existe une variété projective lisse $\widetilde{X}$ obtenue à partir de X par suite d'éclatements le long de sous-variétés lisses $\psi : \widetilde{X} \to X$.*

Ceci permet enfin de ramener le théorème de factorisation au corollaire 5.2.

6. APPENDICE : DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE π-DÉSINGULARISATION

6.1. Outils et résultats intermédiaires principaux.

Les notes qui suivent sont une reprise de [AMR99], avec une simplification de la démonstration de la proposition 6.5. *Merci à Adam Parusinski pour sa lecture attentive de cet appendice.*

6.1.1. Relation de π-dépendance, π-multiplicité et π-profil de multiplicité.— Soit

$$\eta = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$$

un cône simplicial de N^+ et pour $1 \leqslant i \leqslant k$, soit v_i le générateur dans N de l'arête engendrée par $\pi(\rho_i)$. Il existe alors un unique w_i dans $\mathbf{Q}$ tel que ρ_i soit proportionnel à (v_i, w_i).

Définition. — *Si η est π-indépendant, on définit la* π-multiplicité *de η, notée* π-mult(η) *comme étant la multiplicité du cône $\pi(\eta)$ (égale à l'indice dans le réseau engendré par $\pi(\eta)$ du sous-groupe $\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_k$). Remarquons que η est π-non-singulier si et seulement si* π-mult$(\eta) = 1$. *On définit le* π-profil de multiplicité *de η, noté* π-mp(η), *comme étant le quadruplet* π-mp$(\eta) := (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0)$.

Si η est π-dépendant, comme le noyau de π est de dimension 1, il existe une unique *relation de π-dépendance*

$$\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = 0 \text{ avec } \max\{|r_i| \,;\, 1 \leqslant i \leqslant k\} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{k} r_i w_i > 0.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on note η_i la face de codimension 1 de η suivante :

$$\eta_i = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_k \rangle.$$

Le lemme suivant est élémentaire et essentiel :

Lemme 6.1. — (i) *La face η_i est π-indépendante si et seulement si $r_i \neq 0$.*
(ii) *Si η_i et η_j sont toutes deux π-indépendantes, alors*

$$|r_j| \, \pi\text{-mult}(\eta_i) = |r_i| \, \pi\text{-mult}(\eta_j).$$

Notation. — Introduisons les ensembles : $I_1(\eta) = \{i \,;\, r_i = 1\}$, $I_+(\eta) = \{i \,;\, r_i > 0\}$, $I_{-1}(\eta) = \{i \,;\, r_i = -1\}$, $I_-(\eta) = \{i \,;\, r_i < 0\}$ et $i_1(\eta)$, $i_+(\eta)$, $i_{-1}(\eta)$ et $i_-(\eta)$ leur cardinal respectif.

Définition. — *Si η est π-dépendant, on définit la* π-multiplicité *de η comme étant le maximum des π-multiplicités des faces η_i pour $i \in I_+(\eta) \cup I_-(\eta)$. Autrement dit,* π-mult(η) *est le maximum des π-multiplicités des faces π-indépendantes de η. On définit le* π-profil de multiplicité *de η, noté* π-mp(η), *comme étant le quadruplet*

$$\pi\text{-mp}(\eta) := (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0) \;\; si \;\; i_1(\eta) + i_{-1}(\eta) = 1,$$

et

$$\pi\text{-mp}(\eta) := (\pi\text{-mult}(\eta), 1, i_+(\eta) + i_-(\eta), i_1(\eta) + i_{-1}(\eta)) \;\; si \;\; i_1(\eta) + i_{-1}(\eta) \geqslant 2.$$

Remarquons que la quantité $k_\eta = i_+(\eta) + i_-(\eta)$ est la dimension de l'unique circuit contenu dans η.

Notation. — Soit Σ un éventail de $N_{\mathbf{Q}}^+$. On note g_Σ le maximum (pour l'ordre lexicographique) des π-mp(η) lorsque η décrit tous les cônes maximaux de Σ (*i.e.* non contenus strictement dans un cône de Σ) et s_Σ le nombre de cônes maximaux atteignant ce maximum. Alors le *π-profil de multiplicité* de Σ est le quintuplet :

$$\pi\text{-mp}(\Sigma) := (g_\Sigma, s_\Sigma).$$

6.1.2. Faces codéfinies.— Soient $\eta = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$ un cône π-dépendant de $N_{\mathbf{Q}}^+$ et τ une face π-indépendante de η. Si

$$\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = 0$$

est la relation de π-dépendance de η, on dit que τ est *codéfinie* par rapport à η si ses générateurs sont inclus dans $\{\rho_i\,,\, r_i \geqslant 0\}$ ou dans $\{\rho_i\,,\, r_i \leqslant 0\}$. Evidemment, si τ est une face de τ' où τ' est codéfinie par rapport à η, alors τ est codéfinie par rapport à η.

Si $\tau = \langle \rho_1, \ldots, \rho_l \rangle$ est un cône π-indépendant de $N_{\mathbf{Q}}^+$, et si v_i est le générateur dans N de l'arête engendrée par $\pi(\rho_i)$, on note :

$$\text{par}(\pi(\tau)) = \{v \in N\,;\, v = \sum_{i=1}^{l} a_i v_i\,,\, 0 < a_i < 1\}.$$

Remarquons que si η est un cône π-singulier de $N_{\mathbf{Q}}^+$, et si τ est une face π-indépendante et π-singulière de η de dimension minimale, alors $\text{par}(\pi(\tau)) \neq \varnothing$.

La proposition suivante est le résultat central de ce paragraphe. Elle illustre parfaitement l'utilité des faces codéfinies.

PROPOSITION 6.2. — *Soient η un cône π-dépendant de N^+ et τ une face π-indépendante de η. Soient $v \in \text{par}(\pi(\tau))$ et $\rho \in N_{\mathbf{Q}}^+$ dans l'intérieur relatif de τ tel que $\pi(\rho) = v$. Soit η' l'éventail obtenu par subdivision étoilée de η par rapport à ρ. Si τ est codéfinie par rapport à η, alors π-mp$(\eta') \leqslant \pi$-mp(η) et si de plus τ est contenue dans une face γ de codimension 1 de η de π-multiplicité maximale, alors π-mp$(\eta') < \pi$-mp(η).*

Démonstration. — Notons $\tau = \langle \rho_1, \ldots, \rho_m \rangle$ et $\eta = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n \rangle$ avec $n > m$. On note $\rho = \sum_{i=1}^{m} a_i \rho_i$ et soit $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 0$ la relation de π-dépendance de η.

Les cônes maximaux de η' sont les $\eta_\alpha = \langle \rho, \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \rho_m, \ldots, \rho_n \rangle$ pour $1 \leqslant \alpha \leqslant m$. Nous allons estimer π-mp(η_α).

Les faces nouvelles de η_α (*i.e.* les faces de η_α qui ne sont pas faces de η) sont les

$$\gamma_{\alpha\beta} = \langle \rho, \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \check{\rho_\beta}, \ldots, \rho_n \rangle$$

pour $\beta \neq \alpha$. Supposons que $\gamma_{\alpha\beta}$ est π-indépendante et remarquons que cela implique que $r_\alpha \neq 0$ ou $r_\beta \neq 0$.

- si $\beta \geqslant m+1$, alors

$$\begin{aligned}\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) &= |\det(v, v_1, \ldots, \check{v_\alpha}, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n)| \\ &= a_\alpha |\det(v_1, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n)| \\ &\leqslant a_\alpha\, \pi\text{-mult}(\eta) < \pi\text{-mult}(\eta).\end{aligned}$$

- si $\beta \leqslant m$, alors

$$\begin{aligned}\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) = |a_\alpha \det(v_\alpha, v_1, \ldots, \check{v_\alpha}, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n) \\ + a_\beta \det(v_\beta, v_1, \ldots, \check{v_\alpha}, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n)|.\end{aligned}$$

Pour $\lambda = \alpha$ ou β, posons $m_\lambda = \det(v_\lambda, v_1, \ldots, \check{v_\alpha}, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n)$. De $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$, on en déduit que $r_\alpha m_\alpha + r_\beta m_\beta = 0$, et τ étant codéfinie par rapport à η, r_α et r_β sont de même signe donc m_α et m_β sont de signes opposés. De là

$$\begin{aligned}\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) &= |a_\alpha m_\alpha + a_\beta m_\beta| \\ &\leqslant \max(a_\alpha |m_\alpha|, a_\beta |m_\beta|) \\ &\leqslant \max(a_\alpha, a_\beta)\, \pi\text{-mult}(\eta) < \pi\text{-mult}(\eta).\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute nouvelle face $\gamma_{\alpha\beta}$, on a $\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) < \pi\text{-mult}(\eta)$.

Enfin, chaque η_α possède une unique ancienne face de codimension un :

$$\gamma_\alpha = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \rho_n \rangle$$

et cette face satisfait évidemment $\pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) \leqslant \pi\text{-mult}(\eta)$.

Le bilan est le suivant :

$$\begin{aligned}\text{si } \pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) = \pi\text{-mult}(\eta), &\quad \text{alors } \pi\text{-mp}(\eta_\alpha) = (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0) \\ \text{et si } \pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) < \pi\text{-mult}(\eta), &\quad \text{alors } \pi\text{-mp}(\eta_\alpha) < (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Notons s' le nombre de faces de codimension 1 de η ne contenant pas τ et de π-multiplicité maximale et r_η le nombre de faces de codimension 1 de η de π-multiplicité maximale.

Alors,

- si $s' = 0$, ce qui précède montre que $\pi\text{-mp}(\eta_\alpha) < (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0)$ pour tout α, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$, et donc $\pi\text{-mp}(\eta') < \pi\text{-mp}(\eta)$.
- si $s' = 1$, on a

$$\pi\text{-mp}(\eta') = ((\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0), 1) \leqslant \pi\text{-mp}(\eta).$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $r_\eta = s' = 1$, ce qui ne se produit pas dans le cas où τ est contenue dans une face de codimension 1 de η de π-multiplicité maximale.

- si $s' \geqslant 2$, on a

$$\pi\text{-mp}(\eta') = ((\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0), s') < \pi\text{-mp}(\eta) = ((\pi\text{-mult}(\eta), 1, k_\eta, r_\eta), 1). \qquad \square$$

La proposition 6.2 nous encourage à fabriquer des faces codéfinies. Ce sera l'objet du paragraphe suivant. Enonçons dès maintenant le lemme immédiat suivant :

LEMME 6.3. — *Soient η un cône π-dépendant de N^+, τ une face π-indépendante de η et σ l'unique circuit contenu dans η. Si* $\dim(\sigma) \leqslant 2$*, alors τ est codéfinie par rapport à η.*

6.1.3. Subdivision étoilée positive et négative.— Soient Σ un éventail de $N^+_{\mathbf{Q}}$ et $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$ un circuit de Σ. Si

$$\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = 0$$

est la relation de π-dépendance de σ, on pose

$$v_+ = \sum_{i \in I_+(\sigma)} v_i \text{ et } v_- = \sum_{i \in I_-(\sigma)} v_i.$$

(Attention, v_+ et v_- ne sont pas nécessairement primitifs.) Remarquons que comme σ est un circuit, on a $I_+(\sigma) \cup I_-(\sigma) = \{1, \ldots, k\}$, autrement dit, tous les r_i de la relation de π-dépendance de σ sont non nuls.

Comme

$$v_+ = \sum_{i \in I_+(\sigma)} v_i = \sum_{i \in I_+(\sigma)} (1 - \varepsilon r_i) v_i + \sum_{i \in I_-(\sigma)} (-\varepsilon r_i) v_i,$$

pour ε petit, v_+ est de la forme $\sum_{i=1}^{k} c_i v_i$ où tous les c_i sont strictement positifs. Il existe donc ρ_+ dans l'intérieur relatif de σ tel que $\pi(\rho_+) = v_+$. Soit Σ^+ l'éventail obtenu par subdivision étoilée de Σ par rapport à ρ_+. On l'appelle *subdivision étoilée positive* de Σ par rapport à σ. (Cette construction dépend du choix de ρ_+ mais les propriétés que nous énoncerons n'en dépendent pas.) La même construction à partir de v_- donne lieu à la *subdivision étoilée négative* Σ^- de Σ par rapport à σ.

Malheureusement, le π-profil de multiplicité de Σ^+ (resp. Σ^-) n'est en général pas inférieur ou égal à celui de Σ. Le lemme facile suivant illustre néanmoins l'intérêt des subdivisions étoilées positive et négative :

LEMME 6.4. — *Soient η un cône π-dépendant de $N^+_{\mathbf{Q}}$, γ une face de codimension* 1 *de η de π-multiplicité maximale. Soit η^+ (resp. η^-) l'éventail obtenu par subdivision étoilée positive (resp. négative) de η par rapport à l'unique circuit σ contenu dans η. Alors γ est codéfinie par rapport au cône maximal de η^+ (resp. η^-) contenant γ.*

La proposition suivante joue un rôle crucial dans la démonstration du théorème de π-désingularisation.

PROPOSITION 6.5. — *Soit σ un circuit de $N^+_{\mathbf{Q}}$ de dimension strictement supérieure à* 2*. Alors soit l'éventail σ^+ obtenu par subdivision étoilée positive de σ, soit l'éventail σ^- obtenu par subdivision étoilée négative de σ satisfait l'une des deux propriétés suivantes (nous notons σ' l'éventail σ^+ ou l'éventail σ^- qui convient) :*

A) *pour tout cône maximal δ' de σ', on a $\pi\text{-mp}(\delta') < \pi\text{-mp}(\sigma)$; en particulier*

$$\pi\text{-mp}(\sigma') < \pi\text{-mp}(\sigma).$$

B) *il existe un cône maximal κ' de σ' vérifiant π-mp$(\kappa') = \pi$-mp(σ) et tel que tout cône maximal $\delta' \neq \kappa'$ de σ' vérifie π-mp$(\delta') < \pi$-mp(σ) ; en particulier*

$$\pi\text{-mp}(\sigma') = \pi\text{-mp}(\sigma).$$

De plus, l'unique ancienne face γ' de codimension 1 de κ' est π-indépendante, et vérifie π-mult$(\gamma') = \pi$-mult$(\kappa') = \pi$-mult(σ). En particulier, γ' est codéfinie par rapport à κ' d'après le lemme 6.4.

Avant de commencer la démonstration proprement dite, commençons par un calcul intermédiaire : notons $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n \rangle$, $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$ la relation de π-dépendance de σ et $v_+ = \sum_{i \in I_+(\sigma)} v_i = e\overline{v}_+$ avec $\overline{v}_+$ primitif. Soit enfin ρ_+ dans l'intérieur relatif de σ tel que $\pi(\rho_+) = v_+$. Les cônes maximaux de σ^+ sont de la forme $\sigma_\alpha = \langle \rho_+, \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \rho_n \rangle$ et nous devons estimer leur π-profil de multiplicité ; chacun d'eux a une face ancienne de codimension un $\gamma_\alpha = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \rho_n \rangle$ et de nouvelles faces

$$\gamma_{\alpha\beta} = \langle \rho_+, \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \check{\rho_\beta}, \ldots, \rho_n \rangle.$$

Les calculs de π-multiplicité des faces de σ_α sont faciles :

- si $r_\alpha > 0$ alors

$$\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) = \begin{cases} \frac{1}{e} |\, \pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) - \pi\text{-mult}(\gamma_\beta)| & \text{si } r_\beta > 0 \\ \\ \frac{1}{e}\, \pi\text{-mult}(\gamma_\beta) & \text{si } r_\beta < 0, \end{cases}$$

- si $r_\alpha < 0$ alors

$$\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) = \begin{cases} \frac{1}{e}\, \pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) & \text{si } r_\beta > 0 \\ \\ 0 \text{ si } r_\beta < 0. \end{cases}$$

Démonstration de la proposition 6.5

• supposons qu'une seule face de codimension 1 de σ est de π-multiplicité maximale, autrement dit π-mp$(\sigma) = (\pi\text{-mult}(\sigma), 0, 0, 0)$. Ceci signifie que $i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) = 1$ et on peut supposer que $i_{-1}(\sigma) = 0$ et $i_1(\sigma) = 1$, on note alors α_0 le seul indice tel que $r_{\alpha_0} = 1$. Montrons que σ^+ satisfait la propriété B).

En effet, les formules précédentes montrent que π-mult$(\sigma_\alpha) < \pi$-mult(σ) pour $\alpha \neq \alpha_0$ (et donc π-mp$(\sigma_\alpha) < \pi$-mp(σ) pour $\alpha \neq \alpha_0$) et que π-mult$(\sigma_{\alpha_0}) = \pi$-mult$(\sigma)$, la seule face de codimension 1 de σ_{α_0} de π-multiplicité maximale étant γ_{α_0}. On en déduit que π-mp$(\sigma_{\alpha_0}) = \pi$-mp$(\sigma)$, et γ_{α_0}, étant de π-multiplicité maximale, est codéfinie par rapport à σ_{α_0} d'après le lemme 6.4.

• supposons que π-mp$(\sigma) = (\pi\text{-mult}(\sigma), 1, i_+(\sigma) + i_-(\sigma), i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma))$. Dans ce cas, $i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) \geqslant 2$ et on peut supposer que $i_1(\sigma) \geqslant 1$. Montrons que σ^+ satisfait l'une des propriétés A) ou B) sauf si $i_{-1}(\sigma) = i_-(\sigma) = 1$.

(i) si $e > 1$, les formules précédentes montrent que π-mult$(\sigma_\alpha) \leqslant \pi$-mult$(\sigma)$ pour tout α, et que si π-mult$(\sigma_\alpha) = \pi$-mult(σ), la seule face de codimension 1 de σ_α de π-multiplicité maximale est γ_α. On en déduit que π-mp$(\sigma_\alpha) \leqslant (\pi\text{-mult}(\sigma), 0, 0, 0) < \pi$-mp$(\sigma)$ pour tout α et donc que σ^+ satisfait la propriété A).

(ii) si $e = 1$, évaluons séparément π-mp(σ_α) suivant que $r_\alpha = -1$, $-1 < r_\alpha < 0$, $r_\alpha = 1$ ou $1 > r_\alpha > 0$.

a) si $-1 < r_\alpha < 0$, les formules précédentes montrent que π-mult$(\sigma_\alpha) < \pi$-mult(σ) et donc que π-mp$(\sigma_\alpha) < \pi$-mp(σ).

b) si $1 > r_\alpha > 0$, les formules précédentes montrent que

$$\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) \begin{cases} \leqslant (\pi\text{-mult}(\sigma), 0, 0, 0) < \pi\text{-mp}(\sigma) & \text{si } i_{-1}(\sigma) \leqslant 1, \\ \\ = (\pi\text{-mult}(\sigma), 1, k_{\sigma_\alpha}, i_{-1}(\sigma)) & \text{si } i_{-1}(\sigma) \geqslant 2. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, $k_{\sigma_\alpha} \leqslant k_\sigma = \dim(\sigma)$ et $i_{-1}(\sigma) < i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma)$ donc π-mp$(\sigma_\alpha) < \pi$-mp(σ).

c) si $r_\alpha = 1$, les formules précédentes montrent que

$$\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) = \begin{cases} (\pi\text{-mult}(\sigma), 1, k_{\sigma_\alpha}, 1 + i_{-1}(\sigma)) & \text{si } i_{-1}(\sigma) \neq 0, \\ (\pi\text{-mult}(\sigma), 0, 0, 0) < \pi\text{-mp}(\sigma) & \text{si } i_{-1}(\sigma) = 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas, si $i_1(\sigma) \geqslant 2$, σ_α possède une face de codimension 1 π-dépendante (car de π-multiplicité nulle) donc $k_{\sigma_\alpha} < k_\sigma$ et par suite π-mp$(\sigma_\alpha) < \pi$-mp(σ) ; sinon $i_1(\sigma) = 1$, par suite π-mp$(\sigma_\alpha) = \pi$-mp(σ) et γ_α, étant de π-multiplicité maximale, est codéfinie par rapport à σ_α d'après le lemme 6.4.

d) si $r_\alpha = -1$, les formules précédentes montrent que

$$\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) = (\pi\text{-mult}(\sigma), 1, k_{\sigma_\alpha}, 1 + i_+(\sigma)).$$

(Remarquons que $i_+(\sigma) \geqslant i_1(\sigma) \geqslant 1$). Si $i_-(\sigma) \geqslant 2$, σ_α possède une face de codimension 1 π-dépendante (car de π-multiplicité nulle) donc $k_{\sigma_\alpha} < k_\sigma$ et par suite π-mp$(\sigma_\alpha) < \pi$-mp(σ) ; si $i_-(\sigma) = 1$, alors

$$1 + i_+(\sigma) \geqslant i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) = i_1(\sigma) + 1$$

et on ne peut conclure à ce stade de la démonstration.

Le bilan est cependant le suivant : si $i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) \geqslant 2$ et $i_1(\sigma) \geqslant 1$ alors σ^+ satisfait l'une des propriétés A) ou B) sauf si $i_{-1}(\sigma) = i_-(\sigma) = 1$. De façon symétrique, si $i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) \geqslant 2$ et $i_{-1}(\sigma) \geqslant 1$ alors σ^- satisfait l'une des propriétés A) ou B) sauf si $i_1(\sigma) = i_+(\sigma) = 1$.

Le seul cas restant est donc celui où

$$i_{-1}(\sigma) = i_-(\sigma) = i_1(\sigma) = i_+(\sigma) = 1,$$

mais alors $\dim(\sigma) = 2$ ce qui est exclu par l'hypothèse. □

Nous aurons besoin du lemme suivant qui précise la proposition 6.5 :

LEMME 6.6. — *Soient Σ un éventail de N^+, σ un circuit de Σ de dimension strictement supérieure à 2. Si $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$ désigne l'éventail obtenu par la subdivision étoilée positive ou négative de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ donnée par la proposition précédente, alors*

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') < \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}) \ \textit{dans le cas A)}$$

et

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') = \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}) \ \textit{dans le cas B)}\ .$$

Indication de démonstration. — On montre que si

$$\pi\text{-mp}(\sigma) = (\pi\text{-mult}(\sigma), b_\sigma, k_\sigma, r_\sigma, 1) \ \text{ et } \ \pi\text{-mp}(\sigma') = (\pi\text{-mult}(\sigma'), b_{\sigma'}, k_{\sigma'}, r_{\sigma'}, s'),$$

alors il existe des entiers e et s supérieurs ou égaux à 1 tels que

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}) = (\pi\text{-mult}(\sigma)e, b_\sigma, k_\sigma, r_\sigma, s)$$

et

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') = (\pi\text{-mult}(\sigma')e, b_{\sigma'}, k_{\sigma'}, r_{\sigma'}, s's). \qquad \square$$

6.2. Démonstration du théorème de π-désingularisation.

Soit Σ un éventail de N^+. La stratégie est claire : si Σ est π-non-singulier, il n'y a rien à faire. Sinon, il suffit de construire un éventail Σ_1 obtenu par une suite finie de subdivisions étoilées de Σ n'affectant pas les cônes π-non-singuliers de Σ et vérifiant $\pi\text{-mp}(\Sigma_1) < \pi\text{-mp}(\Sigma)$. Si Σ_1 est π-non-singulier, c'est fini, sinon on recommence. Ce procédé doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes et l'éventail obtenu est π-non-singulier. La construction de Σ_1 se fait en trois étapes, illustrées par la figure 4.

Étape 1. — Posons $\pi\text{-mp}(\Sigma) = (g_\Sigma, s_\Sigma)$ et choisissons η un cône maximal de Σ de π-profil de multiplicité maximal (*i.e.* égal à g_Σ) et soit σ l'unique circuit contenu dans η.

(i) Supposons que $\dim(\sigma) > 2$ et appliquons alors la proposition 6.5 ; on note Σ' l'éventail ainsi obtenu et η' le sous-éventail de Σ' obtenu en subdivisant η.

- Dans le cas A), le lemme 6.6 assure que $\pi\text{-mp}(\Sigma') < \pi\text{-mp}(\Sigma)$. On pose alors $\Sigma_1 := \Sigma$.
- Dans le cas B), le lemme 6.6 assure que $\pi\text{-mp}(\Sigma') = \pi\text{-mp}(\Sigma)$. Soit γ l'unique face de codimension 1 de η telle que $\gamma \cap \sigma = \gamma'$ (γ' donnée par la proposition 6.5). Alors γ est codéfinie par rapport à l'unique cône maximal ν de η' dont elle est face, elle est de plus de π-multiplicité maximale.

(ii) Supposons que $\dim(\sigma) \leqslant 2$ et choisissons une face γ de codimension 1 de η, de π-multiplicité maximale. Comme $\dim(\sigma) \leqslant 2$, γ est codéfinie par rapport à η.

Le bilan de l'Étape 1 est le suivant : nous avons construit un éventail Σ', subdivision étoilée de Σ, vérifiant $\pi\text{-mp}(\Sigma') \leqslant \pi\text{-mp}(\Sigma)$ avec

(i) un cône maximal ν de π-profil de multiplicité maximal,

(ii) une face γ de codimension 1 de ν, de π-multiplicité maximale, codéfinie par rapport à ν.

Choisissons alors τ une face de γ (donc codéfinie par rapport à ν), π-singulière de dimension minimale, $v \in \mathrm{par}(\pi(\tau))$ et $\rho \in N^+_{\mathbf{Q}}$ dans l'intérieur relatif de τ tel que $\pi(\rho) = v$.

Le problème à ce stade est que τ, qui est codéfinie par rapport à ν, ne l'est en général pas par rapport aux autres cônes maximaux qui la contiennent.

Étape 2. — Enonçons la proposition suivante, dont la démonstration sera donnée à la fin de ce paragraphe :

PROPOSITION 6.7. — *Soit Σ un éventail de N^+, σ un circuit de Σ. Soit τ dans $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$, π-indépendante. Alors il y a une subdivision de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$, notée $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$, obtenue par une suite finie de subdivisions étoilées positives ou négatives par rapport à des circuits successifs contenus dans σ telle que :*

(i) $\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') \leqslant \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)})$,

(ii) *τ est une face de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$ (*i.e. *τ n'est pas affectée par les subdivisions) et τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$ qui la contiennent.*

Appliquons cette proposition de la façon suivante à notre situation : on considère l'ensemble des circuits σ' différents de celui contenu dans ν tels que τ est contenu dans $\overline{\mathrm{Star}(\sigma')}$ et on applique la proposition précédente à chacun d'eux (le résultat obtenu ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a considéré les différents σ').

Le bilan de l'Étape 2 est alors le suivant : nous avons construit un éventail Σ'', obtenu par une suite de subdivisions étoilées de Σ vérifiant $\pi\text{-mp}(\Sigma'') \leqslant \pi\text{-mp}(\Sigma)$, avec

(i) un cône maximal ν de π-profil de multiplicité maximal,

(ii) une face γ de codimension 1 de ν, de π-multiplicité maximale, codéfinie par rapport à ν,

(iii) une face τ de γ (donc codéfinie par rapport à ν), π-singulière de dimension minimale, $v \in \mathrm{par}(\pi(\tau))$ et $\rho \in N^+_{\mathbf{Q}}$ dans l'intérieur relatif de τ tel que $\pi(\rho) = v$. *De plus, τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de Σ'' qui la contiennent.*

Étape 3. — On note Σ_1 l'éventail obtenu par subdivision étoilée de Σ'' par rapport à ρ. Comme τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de Σ'' qui la contiennent, on a $\pi\text{-mp}(\Sigma_1) \leqslant \pi\text{-mp}(\Sigma'')$ d'après la proposition 6.2, et puisque τ est contenue dans une face γ de π-multiplicité maximale, on a en fait $\pi\text{-mp}(\Sigma_1) < \pi\text{-mp}(\Sigma'')$, ce qui termine la démonstration du théorème de π-désingularisation. □

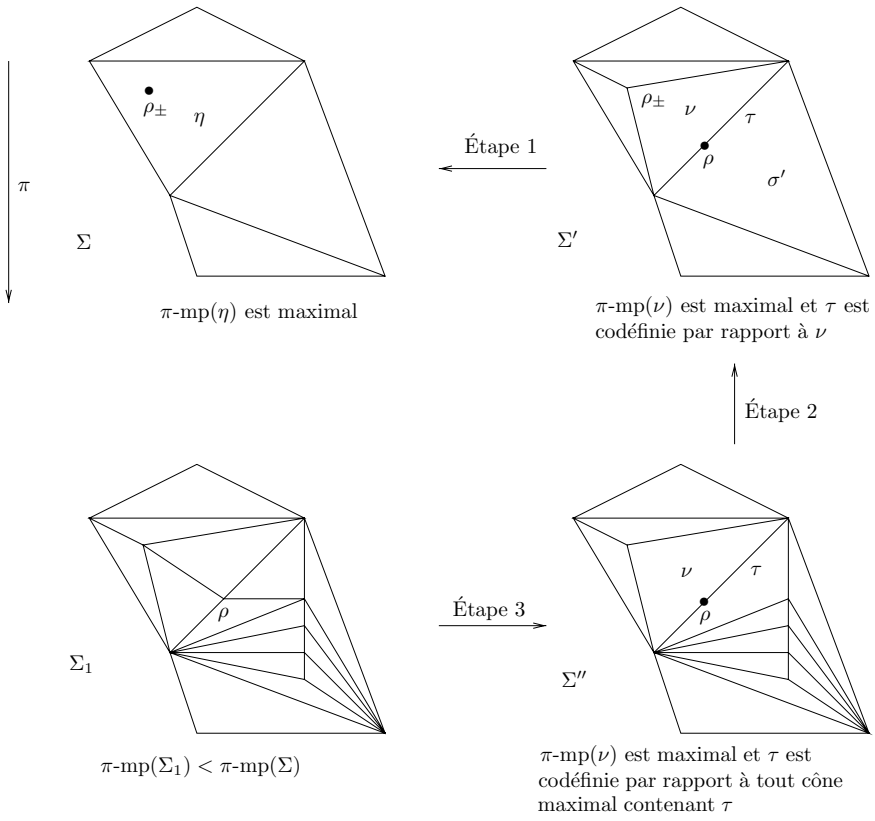


FIGURE 4. Le théorème de π-désingularisation

Démonstration de la proposition 6.7. — Si $\dim(\sigma) \leqslant 2$, il n'y a rien à faire : τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ qui la contiennent. On suppose dorénavant que $\dim(\sigma) > 2$.

Si π-mult$(\sigma) = 1$, remarquons que si η est un cône maximal contenant σ, alors toutes les faces de codimension un π-indépendantes de η ont même π-multiplicité. Soit $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}^+$ la subdivision étoilée positive de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ par rapport à σ. Alors $\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}^+) \leqslant \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)})$ par le lemme 6.6 et la face τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}^+$ qui la contiennent d'après le lemme 6.4.

La démonstration de la proposition 6.7 se fait alors par récurrence sur π-mult(σ) : subdivisons une première fois $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ à l'aide de la proposition 6.5. On a

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') \leqslant \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)})$$

par le lemme 6.6.

Si le cas A) de la proposition 6.5 se produit, les circuits contenus dans $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$ sont tous de π-multiplicité strictement inférieure à celle de σ et on conclut par l'hypothèse de récurrence.

Si le cas B) de la proposition 6.5 se produit, seul le circuit $\overline{\sigma}$ contenu dans κ' pose un problème *a priori* car on ne peut pas lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Mais si τ est face d'un cône maximal contenant κ', alors $\tau \cap \sigma$ est incluse dans γ'. En effet : écrivons $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$ et quitte à renuméroter les ρ_i, on peut supposer que $\tau = \langle \rho_l, \ldots, \rho_k, \ldots, \rho_m \rangle$ pour certains indices l et m tels que $2 \leqslant l \leqslant k$ et $m \geqslant k$ (si $\tau \cap \sigma = \varnothing$, alors τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ qui la contiennent). Le cône κ' est de la forme $\langle \rho, \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_k \rangle$ pour un certain i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$ et alors $\gamma' = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_k \rangle$. Comme τ est face d'un cône maximal contenant κ', on a $i \leqslant l-1$, c'est-à-dire $\gamma' = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_l, \ldots, \rho_k \rangle$ donc

$$\tau \cap \sigma = \langle \rho_l, \ldots, \rho_k \rangle \subset \gamma' = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_l, \ldots, \rho_k \rangle.$$

Finalement, comme γ' est codéfinie par rapport à κ', τ est codéfinie par rapport à tout cône maximal contenant $\overline{\sigma}$. □

RÉFÉRENCES

[AKMW99] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk – *Torification and factorization of birational maps.* J. Amer. Math. Soc. 15, no. 3, (531-572) 2002. Preprint `math.AG/9904135`, 1999.

[AMR99] D. Abramovich, K. Matsuki, S. Rashid – *A note on the factorization theorem of toric birational maps after Morelli and its toroidal extension.* Tohoku Math. J. (2), 51, no. 4, (489-537) 1999.

[AbO97] D. Abramovich, F. Oort – *Alterations and resolution of singularities.* In *Resolution of Singularities,* Progr. Math. 181, Birkhäuser, (39-108) 2000.

[BaR85] P. Bardsley, R.W. Richardson – *Etale slices for algebraic transformation groups in characteristic p.* Proc. London Math. Soc. (3), 51, (295-317) 1985.

[BiM97] E. Bierstone, P. Milman – *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant.* Invent. Math. 128 (2), (207-302) 1997.

[BPV84] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven – *Compact complex surfaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 4, Springer-Verlag, 1984.

[BrP90] M. Brion, C. Procesi – *Action d'un tore dans une variété projective.* In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, Progr. Math. 92, Birkhäuser, (509-539) 1990.

[DCP85] C. De Concini, C. Procesi – *Complete Symmetric Varieties II.* In Algebraic Groups and Related Topics (R. Hotta, ed.), Adv. Studies in Pure Math. 6, (481-513) 1985.

[EnV97] S. Encinas, O. Villamayor – *Constructive desingularization.* In *Resolution of Singularities,* Progr. Math., 181, Birkhäuser, (39-108) 2000.

[Ewa96] G. Ewald – *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 168, Springer-Verlag, 1996.

[Ful84] W. Fulton – *Intersection theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer-Verlag, 1984.

[Ful93] W. Fulton – *Introduction to toric varieties.* Annals of mathematics studies, 131, Princeton University Press, 1993.

[GuS89] V. Guillemin, S. Sternberg – *Birational equivalence in the symplectic category.* Invent. Math. 97, No. 3, (485-522) 1989.

[Har77] R. Hartshorne – *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag, 1977.

[Hir64] H. Hironaka – *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero.* Annals of Math. vol 79, (109-326) 1964.

[Hir75] H. Hironaka – *Flattening theorem in complex analytic geometry.* Amer. J. of Math. vol. 97, no. 2, (503-547) 1975.

[KKMS73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat – *Toroidal embeddings I.* Lecture Notes in Mathematics, 339, Springer-Verlag, 1973.

[Lun73] D. Luna – *Slices étales.* Bull. Soc. Math. France, Suppl., Mem. No. 33, (81-105) 1973.

[Mat99] K. Matsuki – *Lectures on factorization of birational maps.* RIMS preprint `math.AG/0002084`, 2000.

[Mat00] K. Matsuki – *Correction : "A note on the factorization theorem of toric birational maps after Morelli and its toroidal extension".* Tohoku Math. J. (2), 52, no. 4, (629-631) 2000.

[Moi67] B. Moishezon – *On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions.* Amer. Math. Soc. Trans. 63, (51-177) 1967.

[Mor96] R. Morelli – *The birational geometry of toric varieties.* J. Alg. Geom. 5, (751-782) 1996.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan – *Geometric Invariant Theory (Third Enlarged Edition).* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 034, Springer-Verlag, 1994.

[Oda88] T. Oda – *Convex bodies and algebraic geometry : an introduction to the theory of toric varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, 015, Springer-Verlag, 1988.

[Sum74] H. Sumihiro – *Equivariant Completion I.* J. Math. Kyoto Univ. 14, (1-28) 1974.

[Sum75] H. Sumihiro – *Equivariant Completion II.* J. Math. Kyoto Univ. 15, (573-605) 1975.

[Vil89] O. Villamayor – *Constructiveness of Hironaka's resolution.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 22, no. 1, (1-32) 1989.

[Wlo97] J. Włodarczyk – *Decomposition of birational toric maps in blow-ups and blow-downs. A proof of the weak Oda conjecture.* Transactions of the AMS 349, (373-411) 1997.

[Wlo00] J. Włodarczyk – *Birational cobordism and factorization of birational maps.* J. Alg. Geom. 9, no. 3, (425-449) 2000.

[Wlod99] J. Włodarczyk – *Combinatorial structures on toroidal varieties and a proof of the weak factorization theorem.* Preprint `math.AG/9904076`, 1999.

Laurent BONAVERO

Université Grenoble I
Institut Fourier
Lab. de Mathématiques Pures
URA 5582 du CNRS
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
E-mail : `bonavero@ujf-grenoble.fr`

Séminaire BOURBAKI Novembre 2000
53e année, 2000-2001, nO 881, p. 39 à 61

COURBES ENTIÈRES DANS LES SURFACES ALGÉBRIQUES COMPLEXES [d'après McQuillan, Demailly–El Goul,...]

par **Marco BRUNELLA**

1. QUELQUES CONJECTURES ET QUELQUES THÉORÈMES SUR LES COURBES ENTIÈRES

Soit X une variété complexe. Une *courbe entière* dans X est une application holomorphe non constante de la droite complexe $\mathbf{C}$ à valeurs dans X. La variété X est *hyperbolique* (au sens de Brody [Kob]) si elle ne contient aucune courbe entière. Les variétés complexes compactes qui possèdent une métrique kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe négative sont des exemples classiques de variétés hyperboliques [Kob].

Rappelons qu'une variété projective complexe X est *de type général* si son fibré canonique $K_X = \det(\Omega^1_X)$ est *gros*, c'est-à-dire s'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $K_X^{\otimes m}$ possède $n+1$ ($n = \dim X$) sections holomorphes globales algébriquement indépendantes $s_0, \ldots, s_n$ (i.e., les fonctions méromorphes $\frac{s_1}{s_0}, \ldots, \frac{s_n}{s_0}$ sont algébriquement indépendantes). La propriété « K_X gros » est très proche (mais un peu plus faible) de « K_X ample », ce qui équivaut d'ailleurs, du point de vue métrique, à « K_X possède une métrique hermitienne à courbure positive » et donc à « X possède une métrique kählérienne à courbure de Ricci négative » (Aubin, Yau). Il est donc naturel de s'attendre à des contraintes sur les courbes entières dans les variétés de type général. Autour de 1980, Green et Griffiths proposaient dans [GGr] la conjecture suivante.

Conjecture 1.1 (Green–Griffiths). — *Soit X une variété projective complexe de type général, et soit $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière dans X. Alors l'image de f n'est pas Zariski-dense dans X : il existe une hypersurface algébrique $Y \subset X$ telle que $f(\mathbf{C}) \subset Y$.*

Ici l'hypersurface Y dépend, a priori, de la courbe f. On trouve dans les travaux de Lang (par exemple [Lan]) la conjecture un peu plus forte selon laquelle, étant donné X comme ci-dessus, il existe une sous-variété propre $Z \subset X$ telle que *toute* courbe entière

dans X est contenue dans Z. En plus, selon cette même conjecture, Z coïncide avec l'adhérence de Zariski de l'union de toutes les sous-variétés de X qui sont images de variétés abéliennes par des applications rationnelles non constantes. Ces conjectures de Lang sont intimement liées à certaines conjectures de nature arithmétique, dont nous ne parlerons pas et pour lesquelles nous renvoyons à [Lan].

Si $\dim X = 1$, la conjecture 1.1 ne présente aucune difficulté : « type général » signifie dans ce cas que le genre de X est au moins 2, et donc toute application holomorphe de $\mathbf{C}$ dans X est constante (Liouville).

Si $\dim X = n \geqslant 2$, la situation est par contre beaucoup plus compliquée, et même pour $n = 2$ la conjecture 1.1 n'a pas encore été entièrement démontrée. Avant d'énoncer le théorème de McQuillan, qui constitue l'objet central de cet exposé, nous allons expliquer une approche de la conjecture 1.1 (et d'autres conjectures sur les courbes entières) qui s'est révélée fructueuse.

Le point de départ est le résultat suivant, qui se trouve dans [GGr] (avec une lacune dans la preuve) et dans [Dm1] et [SY2]. Voir aussi [Dm2] pour un exposé très agréable de ces idées. Soit X une variété projective complexe et soit $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière. Soit P un *opérateur différentiel algébrique* sur X à valeurs dans le dual A^* d'un fibré linéaire ample $A \in \mathrm{Pic}(X)$ (nous renvoyons aux articles mentionnés pour la définition exacte de ces opérateurs différentiels, mais le lecteur peut bien s'imaginer ce que cela signifie). Alors f satisfait l'équation différentielle associée à P :

$$P(f', f'', \ldots, f^{(k)}) \equiv 0.$$

La preuve de ce théorème est basée sur des arguments de courbure négative (lemme d'Ahlfors–Schwarz), ou bien sur des estimations de la théorie de Nevanlinna (lemme de la dérivée logarithmique).

Supposons, pour fixer les idées, qu'on veut démontrer qu'une variété X est hyperbolique. D'après le résultat ci-dessus, il suffit de construire sur X un nombre assez grand d'opérateurs différentiels algébriques « indépendants » (et à valeurs dans les duaux de fibrés amples) : chacun de ces opérateurs donne une équation différentielle satisfaite par toute application holomorphe $f : \mathbf{C} \to X$, et si l'on dispose d'un nombre assez grand d'équations différentielles « indépendantes », on en déduit la constance de f. Nous expliquerons plus loin, dans des cas concrets, la notion d'indépendance requise.

La difficulté dans cette approche est qu'il n'est pas du tout facile de construire des opérateurs différentiels algébriques « indépendants ». Construire des opérateurs différentiels algébriques revient à construire des sections holomorphes globales de certains fibrés, ce qu'on peut faire à l'aide de la formule de Riemann–Roch (à condition de savoir calculer certaines classes de Chern, de savoir démontrer certains théorèmes d'annulation de cohomologie,...). Par exemple, dans [GGr] on montre que, si X est une surface de type général, alors de tels opérateurs différentiels existent toujours. Mais la condition d'« indépendance » est souvent difficile, sinon impossible, à vérifier :

la formule de Riemann–Roch permet (parfois) de montrer qu'un fibré a des sections non triviales, voire *beaucoup* de telles sections, mais ne permet pas de contrôler les lieux d'annulation de ces sections, et c'est justement ces lieux d'annulation qui interviennent dans cette condition d'« indépendance ».

Il y a toutefois des cas où la stratégie qu'on vient de décrire marche assez bien. C'est par exemple le cas du théorème de Bloch (1926) qui affirme que la conjecture 1.1 est vraie si $\dim H^0(X, \Omega^1_X) > \dim X$ et qu'on redémontre dans [GGr] et [Dm1] (entre autres). Ici, grosso modo, ce sont les 1-formes holomorphes sur X qui fournissent les opérateurs différentiels recherchés. Un autre exemple remarquable, sur lequel nous reviendrons, est le théorème de Lu et Yau [LuY] qui prouve la conjecture 1.1 dans le cas des surfaces de type général avec signature strictement positive ($c_1^2 > 2c_2$). Enfin, Siu et Yeung montrent dans [SY1], par ces mêmes techniques, l'hyperbolicité du complémentaire dans le plan projectif d'une courbe générique de degré assez grand.

Voici maintenant le théorème de McQuillan, qui prouve la conjecture de Green–Griffiths dans le cas des surfaces dont la classe de Segre $c_1^2 - c_2$ est strictement positive.

THÉORÈME 1.2 ([MQ1]). — *Soit X une surface projective complexe de type général dont les nombres de Chern satisfont l'inégalité $c_1^2(X) > c_2(X)$. Alors aucune courbe entière dans X n'est Zariski-dense.*

C'est-à-dire, une courbe entière dans une telle surface a son image contenue dans une courbe *algébrique*, courbe qui doit être, évidemment, rationnelle ou elliptique. D'autre part, dans les années '70 Bogomolov avait démontré que, sous les mêmes hypothèses (et nous verrons que ce n'est pas par hasard), X contient un nombre *fini* de courbes rationnelles ou elliptiques [Bog] (voir aussi [Des] pour un exposé dans ce séminaire). On obtient ainsi (McQuillan + Bogomolov) une confirmation partielle de la conjecture de Lang : une surface X de type général avec $c_1^2(X) > c_2(X)$ contient une courbe algébrique C (dont les composantes irréductibles sont rationnelles ou elliptiques) telle que toute courbe entière dans X est en fait contenue dans C.

Il nous conviendra de découper le théorème 1.2 en deux morceaux :

THÉORÈME 1.3 ([MQ1] ; voir aussi [LuY], [GGr], [Dm1]). — *Soit X une surface projective complexe de type général avec $c_1^2(X) > c_2(X)$ et soit $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière. Il existe alors une surface projective complexe Z, une application holomorphe surjective $\pi : Z \to X$ et un feuilletage holomorphe (singulier) $\mathcal{F}$ sur Z tels que :*

i) *f se relève sur Z en une courbe entière g (i.e., il existe une courbe entière $g : \mathbf{C} \to Z$ telle que $\pi \circ g = f$) ;*

ii) *g est tangente à $\mathcal{F}$ (i.e., si ω est une 1-forme holomorphe locale qui définit $\mathcal{F}$, on a alors $g^*(\omega) \equiv 0$).*

THÉORÈME 1.4 ([MQ1]). — *Soit Z une surface projective complexe de type général, soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe sur Z et soit $g : \mathbf{C} \to Z$ une courbe entière tangente à $\mathcal{F}$. Alors $g(\mathbf{C})$ n'est pas Zariski-dense dans Z.*

Le théorème 1.2 est corollaire des théorèmes 1.3 et 1.4. Remarquons que la surface Z qui apparaît dans le théorème 1.3 est forcément de type général (car X l'est), même si sa classe de Segre $c_1^2(Z) - c_2(Z)$ n'est plus nécessairement positive. Heureusement, dans le théorème 1.4 il n'y a aucune hypothèse sur les nombres de Chern de Z.

Le théorème 1.3 n'est pas, à vrai dire, entièrement nouveau. En effet, c'est un cas spécial du résultat de [GGr], [Dm1] et [SY2] rappelé ci-dessus, via des arguments de Bogomolov [Bog] (voir aussi [LuY]). Plus exactement, ces arguments de Bogomolov (qu'on expliquera en détail dans la suite) permettent de montrer l'existence sur X d'opérateurs différentiels algébriques *du premier ordre* (i.e., sections holomorphes globales non triviales de $(\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X) \otimes A^*$, pour m entier assez grand et A ample), et dire qu'une courbe entière est solution de l'équation différentielle associée à un tel opérateur revient à dire que, modulo un revêtement $Z \to X$ (de degré m), la courbe entière est tangente à un feuilletage holomorphe. D'ailleurs, c'est en développant ces arguments que Lu et Yau démontrent le théorème 1.2 dans le cas $c_1^2(X) > 2c_2(X)$: en utilisant un résultat de Miyaoka [Miy], ils montrent (grosso modo) que X possède *deux* opérateurs différentiels algébriques du premier ordre et « indépendants », donc la courbe entière est tangente à *deux* feuilletages holomorphes, ce qui entraîne bien sûr qu'elle n'est pas Zariski-dense.

La preuve de McQuillan du théorème 1.3 est toutefois indépendante de [GGr], [Dm1], [SY2] : les arguments de Bogomolov sont combinés avec une *inégalité tautologique* pour les courbes entières, démontrée au début de [MQ1] et qui est, d'une certaine façon, la contrepartie globale (ou cohomologique) des arguments infinitésimaux (lemme d'Ahlfors–Schwarz) de [GGr], [Dm1], [SY2]. Cette inégalité joue un rôle fondamental aussi dans la preuve du théorème 1.4.

À côté de la conjecture de Green–Griffiths, une autre conjecture sur les courbes entières qui a été beaucoup étudiée est celle de Kobayashi, formulée autour de 1970.

Conjecture 1.5 (Kobayashi). — i) *Pour tout $n \geqslant 1$, il existe un entier $d(n)$ tel que toute hypersurface générique dans $\mathbf{C}P^{n+1}$ de degré $d \geqslant d(n)$ est hyperbolique.*

ii) *Pour tout $n \geqslant 1$ il existe un entier $e(n)$ tel que, pour toute hypersurface générique D dans $\mathbf{C}P^n$ de degré $e \geqslant e(n)$, le complémentaire $\mathbf{C}P^n \setminus D$ est hyperbolique.*

Ici *générique* signifie qu'il faut exclure, dans l'espace des hypersurfaces de degré donné, celles qui appartiennent à une union dénombrable de sous-ensembles algébriques.

Pour $n = 1$ la conjecture 1.5 est facile, avec $d(1) = 4$ et $e(1) = 3$. Pour $n \geqslant 2$ le résultat optimal devrait être avec $d(n) = e(n) = 2n+1$ [Zai]. Moralement, la partie ii) devrait être réduisible à la partie i) (avec $e(n) = d(n)$), en considérant dans $\mathbf{C}P^{n+1}$ l'hypersurface donnée comme revêtement cyclique de $\mathbf{C}P^n$, de degré e et ramifié le long de D, et en relevant sur cette hypersurface les courbes entières dans $\mathbf{C}P^n \setminus D$. Il y a toutefois une lacune dans ce raisonnement, car les hypersurfaces dans $\mathbf{C}P^{n+1}$

obtenues par cette construction ne sont pas génériques par rapport à la totalité des hypersurfaces. Remarquons cependant que ces revêtements cycliques forment un sous-ensemble algébrique dans l'ensemble des hypersurfaces. Pour réparer la lacune, il suffit alors de montrer que ce sous-ensemble algébrique n'est pas entièrement contenu dans un des sous-ensembles algébriques exclus par la partie i) de la conjecture (voir [DEG] pour un exemple de cette démarche).

Dans le cas $n = 2$, la conjecture de Kobayashi est conséquence de la conjecture de Green–Griffiths, avec $d(2) = e(2) = 5$. En effet, une (hyper)surface lisse X dans $\mathbf{C}P^3$ de degré $d \geqslant 5$ est de type général, donc (si la conjecture 1.1 est vraie) toute courbe entière dans X est contenue dans une courbe rationnelle ou elliptique. Mais un théorème de Clemens [Cle] (de Xu [XuG] si $d = 5$) affirme que, si de plus X est générique, alors X ne contient *aucune* courbe rationnelle ou elliptique, d'où son hyperbolicité. Un raisonnement similaire s'applique au cas du complémentaire $\mathbf{C}P^2 \setminus D$, via le revêtement cyclique mentionné ci-dessus. Le théorème de Clemens est dans ce cas remplacé par la constatation facile suivante : une courbe générique $D \subset \mathbf{C}P^2$ de degré $e \geqslant 5$ coupe *toute* courbe elliptique en au moins 1 point et *toute* courbe rationnelle en au moins 3 points.

Cette réduction de la conjecture de Kobayashi à celle de Green–Griffiths semble envisageable aussi dans le cas $n \geqslant 3$.

On a déjà mentionné le théorème de Siu et Yeung [SY1], qui prouve la conjecture 1.5.ii) pour $n = 2$ (avec $e(2)$ de l'ordre de 10^{13}). Suite à [MQ1], Demailly et El Goul ont prouvé la conjecture 1.5.i), toujours pour $n = 2$, tout en améliorant considérablement le résultat de [SY1]. Le même théorème se trouve aussi dans [MQ2], mais avec des estimations sur le degré un peu moins fines.

THÉORÈME 1.6 ([DEG] ; voir aussi [MQ2]). — *Pour $n = 2$, la conjecture de Kobayashi 1.5 est vraie, avec $d(2) = e(2) = 21$.*

La partie ii) de la conjecture est analysée dans [DEG] par la construction de revêtements ramifiés le long de D (idem pour [SY1]). On peut toutefois étudier cette partie sans cette construction mais en utilisant des techniques « logarithmiques », à pôles sur D. Par cette voie, dans un travail plus récent El Goul a prouvé la conjecture 1.5.ii) ($n = 2$) avec $e(2) = 15$ [ElG].

Comme le théorème 1.2, le théorème 1.6 se démontre en deux étapes. D'abord, on montre que sur un revêtement de la surface X toute courbe entière devient tangente à un feuilletage holomorphe. Ensuite on applique le théorème 1.4 et on conclut avec [Cle]. La différence importante avec le théorème 1.2 est que la première partie de cette preuve (la construction du feuilletage) est bien plus compliquée. La raison est qu'une hypersurface X dans $\mathbf{C}P^3$ (de degré au moins 3) ne satisfait *jamais* l'inégalité $c_1^2(X) > c_2(X)$, ainsi les arguments de Bogomolov utilisés dans le théorème 1.3 ne sont plus suffisants. Plus précisément, ces arguments montrent, cette fois, qu'il existe sur X un opérateur différentiel algébrique *du second ordre* (et non plus du premier

ordre). Un tel opérateur n'engendre pas un feuilletage sur un revêtement Z de X, mais il engendre plutôt un feuilletage (par courbes) sur une 3-variété W au-dessus de X ; la courbe entière se relève sur W et devient tangente à ce feuilletage. Il faut ensuite des arguments additionnels et assez délicats pour « réduire » la dimension de W de 3 à 2.

2. L'INÉGALITÉ TAUTOLOGIQUE

Soit X une variété complexe compacte et soit $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière dans X. On va d'abord rappeler comment on peut associer à f un courant positif fermé $\Phi \in A^{1,1}(X)'$, de bidegré $(1,1)$. Grosso modo, Φ sera le « courant d'intégration sur $f(\mathbf{C})$ », quitte à surmonter le problème de la non compacité de $\mathbf{C}$. C'est une construction très classique, qui dans son essence remonte à Ahlfors [Ahl] et qui se résume dans l'affirmation suivante : le bord à l'infini de $\mathbf{C}$ est négligeable.

Fixons une métrique hermitienne (i.e., une $(1,1)$-forme positive) ω sur X. Pour tout $r \in \mathbf{R}^+$ définissons le courant positif (non fermé) $\Phi_r \in A^{1,1}(X)'$ par la formule

$$\Phi_r(\eta) = \frac{\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} f^*(\eta)}{\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} f^*(\omega)} \qquad \forall \eta \in A^{1,1}(X)$$

où $\mathbf{D}(t) \subset \mathbf{C}$ est le disque de rayon t (le lecteur pourrait se demander la raison de la double intégration $\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)}$, à la place de $\int_{\mathbf{D}(r)}$; cette raison est technique, et sera expliquée plus loin).

Un argument de compacité dans l'espace des courants montre qu'on peut choisir une suite divergente r_n, $n \in \mathbf{N}$, telle que Φ_{r_n} converge, pour $n \to +\infty$, vers un courant positif Φ. Nous voulons toutefois que cette limite soit aussi fermée. En appliquant le théorème de Stokes, on voit facilement que cette dernière propriété est satisfaite dès que la condition suivante est remplie : si $a(t) = \text{aire}(\mathbf{D}(t))$ (par rapport à la (pseudo-)métrique $f^*(\omega)$), $l(t) = \text{longueur}(\partial \mathbf{D}(t))$, $A(r) = \int_0^r a(t)\frac{dt}{t}$, $L(r) = \int_0^r l(t)\frac{dt}{t}$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{L(r_n)}{A(r_n)} = 0.$$

Or, c'est justement le « lemme d'Ahlfors » (ou, plus précisément, une variation sur ce lemme, voir e.g. [Br1] lemme 0) qui garantit l'existence de suites divergentes $\{r_n\}$ remplissant cette condition. En fait, « presque toute » suite divergente convient : pour tout $\varepsilon > 0$ la mesure de Lebesgue logarithmique de $\{r \in \mathbf{R}^+ \mid L(r) > \varepsilon A(r)\}$ est finie.

Dorénavant Φ désignera un courant positif fermé associé à f par la construction précédente. Remarquons que Φ ne peut pas être trivial, car $\Phi(\omega) = 1$. Un tel courant n'est pas forcément unique, car il peut dépendre de la suite $\{r_n\}$ (le choix de ω n'est par contre pas essentiel, à constante multiplicative près). On peut toutefois

s'arranger pour que certaines propriétés fonctorielles soient satisfaites : par exemple, si $\pi : X_1 \to X_2$ est un morphisme surjectif entre variétés de même dimension et si f_1 et f_2 sont deux courbes entières dans X_1 et X_2 telles que $f_2 = \pi \circ f_1$ et f_1 n'est pas entièrement contenue dans le lieu critique de π, on peut alors construire Φ_1 et Φ_2 tels que $\pi_*(\Phi_1) = \Phi_2$.

Soit Y une hypersurface complexe compacte dans X, et soit $[Y]$ sa classe de cohomologie dans $H^2(X, \mathbf{R})$. Le courant fermé Φ détermine lui aussi une classe de cohomologie $[\Phi]$, dans $H^{2n-2}(X, \mathbf{R})$ (où $n = \dim X$). On peut donc faire le produit d'intersection $[\Phi] \cdot [Y] \in \mathbf{R}$; concrètement, il s'agit de prendre une 2-forme fermée lisse η qui représente $[Y]$ et d'évaluer Φ sur η. La propriété suivante sera essentielle dans la suite :

$$si \qquad f(\mathbf{C}) \not\subset Y \qquad alors \qquad [\Phi] \cdot [Y] \geqslant 0.$$

La preuve (voir, e.g., [Br1] lemme 1 ou [Dm2]) est une simple application des formules de Poincaré–Lelong et de Jensen, et c'est exactement ici que la « double intégration » ci-dessus montre ses qualités. Observons que l'hypothèse « $f(\mathbf{C})$ n'est pas contenue dans Y » n'exclut pas que le support de Φ, $\operatorname{Supp}\Phi$, soit entièrement contenu dans Y : on a évidemment $\operatorname{Supp}\Phi \subset \overline{f(\mathbf{C})}$, mais cette inclusion peut bien être stricte. Par exemple, il peut arriver que Φ soit le courant d'intégration sur une courbe compacte $C \subset Y$, et dans ce cas l'inégalité ci-dessus dit quelque chose de non trivial (tandis que si $C \not\subset Y$ la même inégalité est triviale).

Après ces préliminaires, nous pouvons maintenant passer à l'*inégalité tautologique* de [MQ1].

Soit PTX le fibré tangent projectivisé de X, $\pi : PTX \to X$ la projection canonique, et $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$ le fibré tautologique sur PTX (qui a degré -1 sur chaque fibre de π). On peut relever la courbe entière f sur PTX, à travers sa dérivée projectivisée $f' : \mathbf{C} \to PTX$. À f' on peut associer un courant positif fermé $\Phi' \in A^{1,1}(PTX)'$ par la construction ci-dessus. On supposera en plus que la suite divergente $\{r_n\}$ satisfait les deux propriétés suivantes : si $A(r)$ et $L(r)$ sont les aires et les longueurs associées à f (pas à f') alors *(i)* $\lim_{n\to+\infty} L(r_n)/A(r_n) = 0$ et *(ii)* $\lim_{n\to+\infty} \frac{dL}{dr}(r_n)/A(r_n) = 0$. La première condition dit simplement que f est associée, elle aussi, à un courant positif fermé $\Phi \in A^{1,1}(X)'$. La deuxième condition sera éclaircie plus en bas. Les arguments du lemme d'Ahlfors montrent que « presque toute » suite divergente satisfait ces deux conditions additionnelles.

On peut maintenant considérer le produit d'intersection entre $[\Phi']$ et la classe de Chern de $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$, $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)) \in H^2(PTX, \mathbf{R})$.

PROPOSITION 2.1 ([MQ1], theorem A). — $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)) \cdot [\Phi'] \geqslant 0.$

On peut comprendre cette inégalité de la manière suivante. Soit C une courbe compacte lisse dans X, et soit C' son relevé dans PTX. Alors $\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_{C'}$ n'est rien d'autre que le fibré tangent de C (par tautologie), et donc $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)) \cdot [C'] = \chi(C)$.

Le produit qui apparaît dans la proposition 2.1 pourrait alors, à raison, être appelé « caractéristique d'Euler de Φ », et la proposition 2.1 dirait que cette caractéristique est positive ou nulle ; ce qui n'est pas inattendu, car Φ est « uniformisé » par $\mathbf{C}$.

La preuve de McQuillan de la proposition 2.1 est inspirée des travaux de Faltings et Vojta sur les conjectures (arithmétiques) de Mordell–Lang [Lan] (on a d'ailleurs déjà noté que ces conjectures arithmétiques sont, conjecturellement, liées aux courbes entières). Nous allons reproduire ici une version quelque peu simplifiée de cette preuve, version qui nous a été communiquée par Mihai Paun. Voir aussi l'appendice de [Vo1] pour une preuve basée sur le « lemme de la dérivée logarithmique ».

La métrique ω sur X induit une métrique hermitienne tautologique sur le fibré linéaire $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$, dont la courbure $\Theta \in A^{1,1}(PTX)$ représente $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1))$. Cette courbure est négative sur les fibres de π, et donc $\widetilde{\omega} = \pi^*\omega - \varepsilon\Theta$ est partout positive pour $\varepsilon > 0$ assez petit ; on l'utilisera comme métrique de référence sur PTX. Si

$$T(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} (f')^*(\Theta)$$

et $A(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} f^*(\omega)$, $\widetilde{A}(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} (f')^*(\widetilde{\omega})$, on a alors $\widetilde{A}(r) = A(r) - \varepsilon T(r)$. Pour démontrer l'inégalité tautologique, i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{T(r_n)}{\widetilde{A}(r_n)} \geqslant 0$, il suffit donc de prouver que $-T(r_n)$ croît plus lentement que $A(r_n)$. On prouvera que $-T(r_n) \leqslant \log(A(r_n)) + \text{const}$. La dérivée $\frac{df}{dz} : \mathbf{C} \longrightarrow TX$ définit une section tautologique $s \in H^0(\mathbf{C}, (f')^*(\mathcal{O}_{PTX}(-1)))$, ce qui permet d'écrire

$$(f')^*(\Theta) = \delta_{\{s=0\}} - dd^c \log \|s\|$$

(formule de Poincaré–Lelong). Observons que, par tautologie, la norme $\|s(z)\|$ est égale à $\|\frac{df}{dz}(z)\|_\omega$ = norme de $\frac{df}{dz}(z)$ par rapport à ω. On supposera $\frac{df}{dz}(0) \neq 0$, sans perte de généralité. La formule de Jensen et la concavité du logarithme donnent alors

$$-T(r) \leqslant \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} dd^c \log \left\| \frac{df}{dz} \right\|_\omega \leqslant \text{const} + \log \int_0^{2\pi} \left\| \frac{df}{dz}(re^{i\theta}) \right\|_\omega d\theta.$$

Mais $\int_0^{2\pi} \|\frac{df}{dz}(re^{i\theta})\|_\omega d\theta = \frac{1}{r} l(r) = \frac{dL}{dr}(r)$, et pour n assez grand on a $\frac{dL}{dr}(r_n) \leqslant A(r_n)$, par le choix de $\{r_n\}$. On obtient ainsi

$$-T(r_n) \leqslant \text{const} + \log(A(r_n))$$

ce qui achève la preuve.

Remarquons que ces mêmes calculs montrent aussi que l'image directe $\pi_*(\Phi')$ est proportionnelle à Φ, plus exactement $\pi_*(\Phi') = c\Phi$ où $c = 1 + \varepsilon c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)) \cdot [\Phi'] \geqslant 1$. Quitte à renormaliser $\widetilde{\omega}$ on pourra donc supposer que $\pi_*(\Phi') = \Phi$.

Dans la suite on aura besoin aussi de la version logarithmique de la proposition 2.1, version qu'on trouve explicitement dans [Vo1] et déguisée sous forme d'inégalité tautologique *raffinée* dans [MQ1]. Supposons que X contient une hypersurface D à croisements normaux, telle que $f(\mathbf{C}) \cap D = \varnothing$. Soit $TX(\log D)$ le fibré tangent

logarithmique de X à pôles sur D (i.e., le dual de $\Omega^1_X(\log D)$; il est donc engendré localement par les champs de vecteurs holomorphes tangents à D). Soit $PTX(\log D)$ son projectivisé et $\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1)$ son fibré tautologique. Comme auparavant, on peut encore relever f sur $PTX(\log D)$ et associer à ce relevé f' un courant positif fermé Φ'. On a alors (quitte à bien choisir la suite divergente $\{r_n\}$...)

PROPOSITION 2.2 ([Vo1] proposition 5.1, [MQ1] theorem II.3.3.2.bis)

$$c_1(\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1)) \cdot [\Phi'] \geqslant 0.$$

La preuve suit les mêmes arguments que ceux de la preuve de la proposition 2.1. La seule différence est que la métrique tautologique sur $\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1)$ est maintenant induite par une métrique $\omega_{\log}$ sur $X \setminus D$ à singularités logarithmiques le long de D. Observons que la dérivée $\frac{df}{dz}$ définit encore une section holomorphe de $(f')^*(\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1))$, car f ne coupe pas D. On est ainsi amené à montrer que $\int_0^{2\pi} \log \|\frac{df}{dz}(re^{i\theta})\|_{\omega_{\log}} d\theta$ croît plus lentement que $A(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} f^*(\omega)$, et pour cela on utilise le lemme de la dérivée logarithmique (voir, e.g., [Dm2] : grosso modo, c'est la version logarithmique du lemme d'Ahlfors).

Pour terminer cette section, signalons que dans [MQ1] et [Vo1] on trouve en réalité des inégalités plus générales que celles ci-dessus. Par exemple, McQuillan ne se limite pas aux courbes entières, mais il considère aussi des courbes « ramifiées sur $\mathbf{C}$ », et Vojta ne demande pas $f(\mathbf{C}) \cap D = \varnothing$, mais seulement $f(\mathbf{C}) \not\subset D$. Par conséquent dans leurs estimations apparaissent des termes correctifs, qui sont toutefois identiquement nuls dans les cas que nous avons traités.

3. CONSTRUCTION DE FEUILLETAGES

Dans cette section nous expliquerons d'abord la preuve de McQuillan du théorème 1.3, basée sur des idées de Bogomolov [Bog] [Des] et l'inégalité tautologique de la section précédente. Voir aussi [DEG] section 2 pour une preuve légèrement différente, qui utilise le lemme de Ahlfors–Schwarz de [Dm1] ou [SY2] à la place de l'inégalité tautologique.

Soit X une surface projective complexe lisse de type général. Comme dans la section précédente, soit $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$ le fibré tautologique sur PTX (qui est une 3-variété), soit $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ son dual, et soit $\mathcal{O}_{PTX}(m) = \mathcal{O}_{PTX}(1)^{\otimes m}$. Rappelons le fait suivant : pour tout fibré linéaire L sur X, la cohomologie de X à coefficients dans $(\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X) \otimes L$ est isomorphe à celle de PTX à coefficients dans $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(L)$.

L'hypothèse du théorème 1.3 sur les nombres de Chern de X est utilisée exclusivement à travers le lemme suivant.

LEMME 3.1 (Bogomolov). — *Si $c_1^2(X) > c_2(X)$, alors le fibré $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ est gros.*

Démonstration. — Un calcul standard donne $c_1^3(\mathcal{O}_{PTX}(1)) = c_1^2(X) - c_2(X) > 0$, et ainsi d'après la formule de Riemann–Roch appliquée à $\mathcal{O}_{PTX}(m)$ on a

$$\dim H^0(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)) + \dim H^2(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)) > cm^3$$

pour un certain $c > 0$ et pour tout $m \gg 0$. D'autre part, par dualité de Serre et l'isomorphisme $K_X \otimes TX \simeq \Omega^1_X$, on a

$$H^2(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)) \simeq H^2(X, \mathrm{Sym}^m \Omega^1_X) \simeq H^0(X, K_X^{\otimes(1-m)} \otimes \mathrm{Sym}^m \Omega^1_X).$$

Mais X est de type général, donc $K_X^{\otimes(m-1)}$ a des sections holomorphes globales non triviales pour $m \gg 0$, et par conséquent pour $m \gg 0$

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, K_X^{\otimes(1-m)} \otimes \mathrm{Sym}^m \Omega^1_X) &\leqslant \dim H^0(X, \mathrm{Sym}^m \Omega^1_X) \\ &= \dim H^0(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)).\end{aligned}$$

Donc $\dim H^0(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)) \geqslant \dim H^2(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m))$ pour $m \gg 0$, d'où la conclusion cherchée : $\dim H^0(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m))$ a une croissance cubique en m, ce qui équivaut à dire que $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ est gros. □

On pourrait remarquer que la preuve ci-dessus n'a pas réellement besoin que X soit de type général : il suffit que $K_X^{\otimes m}$ soit effectif pour $m \gg 0$, ce qui est bien plus faible que K_X gros. Mais, d'après la classification des surfaces, toute surface X avec $K_X^{\otimes m}$ effectif pour $m \gg 0$ *et* $c_1^2(X) > c_2(X)$ est en fait de type général.

Fixons sur X un fibré ample A. Puisque $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ est gros, le fibré $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$ est aussi gros pour $m \gg 0$ (la propriété « gros » est ouverte), et en particulier il possède des sections holomorphes globales non triviales (en fait, pour tout fibré linéaire L il y a équivalence entre « L est gros » et « pour tout fibré linéaire B le fibré $L^{\otimes m} \otimes B$ est effectif pour $m \gg 0$ »). Soit s une telle section et soit $D = (s = 0) \subset PTX$ son diviseur des zéros, ainsi $\mathcal{O}_{PTX}(D)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$.

Soient $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière, $f' : \mathbf{C} \to PTX$ son relevé, $\Phi' \in A^{1,1}(PTX)'$ un courant positif fermé associé à f'. Notons que $\Phi = \pi_*(\Phi')$ est un courant positif fermé non trivial et donc $c_1(\pi^*(A)) \cdot [\Phi'] = c_1(A) \cdot [\Phi] > 0$ car A est ample. On a alors

$$[\Phi'] \cdot [D] = c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m)) \cdot [\Phi'] - c_1(\pi^*(A)) \cdot [\Phi'] < 0$$

car $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m)) \cdot [\Phi'] \leqslant 0$ d'après la proposition 2.1. De cette inégalité et du fait que D est un diviseur positif on déduit qu'*il existe une composante irréductible Z de* $\mathrm{Supp}\, D$ *qui contient toute la courbe entière* f' :

$$f'(\mathbf{C}) \subset Z.$$

Distinguons alors deux situations possibles :

1) Z est *verticale*, i.e. $\pi(Z)$ est une courbe algébrique C dans X : on a évidemment $f(\mathbf{C}) \subset C$ et le théorème 1.3 (ainsi que le théorème 1.2) est démontré.

2) Z est *horizontale*, i.e. $\pi(Z) = X$. Une telle surface est munie naturellement d'un *feuilletage tautologique* $\mathcal{F}$: si $z \in Z$ est un point générique, où Z est transverse à la

fibration π, alors un voisinage U de z dans Z induit un feuilletage sur un voisinage V de $x = \pi(z)$ dans X (U est une section de PTX au-dessus de V), et ce feuilletage se relève sur U à travers l'isomorphisme $U \xrightarrow{\pi} V$ (les feuilles dans U sont donc les dérivées des feuilles dans V) ; ensuite, ce feuilletage (non singulier) sur un ouvert de Zariski de Z s'étend à un feuilletage (singulier) sur toute la surface Z. Bien sûr, Z peut être singulière, et dans ce cas il vaut mieux la remplacer par sa désingularisation, qu'on notera encore par Z ; le feuilletage $\mathcal{F}$ et la courbe f' se relèvent, évidemment, sur cette désingularisation. Or, le fait que f' soit à valeurs dans Z et que f' soit la dérivée d'une courbe dans X impliquent, tautologiquement, que f' est *tangente* à $\mathcal{F}$. Voici donc démontré le théorème 1.3 (avec $g = f'$).

En principe, ces arguments pourraient être considérablement améliorés. Plutôt que de prendre *une seule* section s de $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$ et son diviseur $D = (s = 0)$, il convient d'introduire le *lieu base* $B_m \subset PTX$ de ce même fibré, défini comme l'intersection des lieux d'annulation de *toutes* les sections du fibré. Les arguments qui précèdent montrent alors que $f'(\mathbf{C}) \subset B_m$. Si on a la chance de démontrer que $\dim B_m \leqslant 1$ pour m assez grand, on aura alors une preuve directe du théorème 1.2 qui ne nécessitera pas l'usage des feuilletages. Et si, sous certaines hypothèses, on arrive à montrer que $\dim B_m \leqslant 0$, on aura alors démontré l'hyperbolicité de X (c'est le cas, par exemple, d'une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe négative, car $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ est alors ample et donc $B_m = \varnothing$ pour m assez grand). Mais, malheureusement, le contrôle de ce lieu base B_m est très difficile : le lemme 3.1 garantit que $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$ a beaucoup de sections, mais ne dit rien sur les lieux d'annulation de ces sections.

Il y a toutefois un cas particulier où cette approche est effective, grâce à un théorème de Miyaoka [Miy] [LuY] (voir aussi [MQ1] theorem II.0.2.2 et [DEG] theorem 2.3).

LEMME 3.2 (Miyaoka). — *Soit X une surface projective complexe de type général avec $c_1^2(X) > 2c_2(X)$. Soit $Z \subset PTX$ une surface irréductible horizontale. Alors le fibré $\mathcal{O}_{PTX}(1)|_Z$ est gros.*

Démonstration. — L'argument est proche de celui du lemme 3.1, mais en plus il faut utiliser la semi-stabilité de Ω^1_X et les inégalités qui en découlent [Bog]. Sans perdre de généralité, on peut supposer X minimale, c'est-à-dire K_X numériquement effectif (rappelons qu'un fibré est *numériquement effectif* s'il est de degré positif ou nul sur toute courbe).

Calculons $c_1^2(\mathcal{O}_{PTX}(1)|_Z)$. Le fibré $\mathcal{O}_{PTX}(Z)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(L)$ pour un certain $m \in \mathbf{N}$ (le degré de $Z \to X$) et un certain $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Ce fibré étant effectif, on en déduit que $(\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X) \otimes L$ a une section globale non triviale, i.e. L^* a un morphisme non trivial vers $\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X$. La semi-stabilité de Ω^1_X, et donc de $\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X$, donne alors l'inégalité

$$c_1(L) \cdot c_1(X) \leqslant \frac{m}{2} c_1^2(X).$$

On obtient ainsi

$$c_1^2(\mathcal{O}_{PTX}(1)|_Z) = c_1^2(\mathcal{O}_{PTX}(1)) \cdot [c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m)) + c_1(\pi^*(L))]$$
$$= m(c_1^2(X) - c_2(X)) - c_1(X) \cdot c_1(L) \geqslant \frac{m}{2}(c_1^2(X) - 2c_2(X)) > 0.$$

La formule de Riemann–Roch et la dualité de Serre impliquent que $\mathcal{O}_{PTX}(1)|_Z$ ou bien son dual $\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_Z$ est gros. Mais la deuxième possibilité est exclue, car on obtient aussi

$$c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_Z) \cdot c_1(\pi^*(K_X)|_Z) = c_1(X) \cdot c_1(L) - mc_1^2(X) \leqslant -\frac{m}{2}c_1^2(X) < 0$$

et le produit d'intersection entre un fibré gros et un fibré numériquement effectif, tel que K_X et donc $\pi^*(K_X)|_Z$, ne peut pas être strictement négatif. □

Ce lemme ne dit pas que le lieu base de $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$ est de dimension 1 (au plus), car les sections de ce fibré sur Z ne s'étendent pas nécessairement à toute la variété PTX. Mais les arguments précédents s'appliquent encore sans aucun problème : si $f : \mathbf{C} \to X$ est telle que $f' : \mathbf{C} \to PTX$ est à valeurs dans une surface horizontale Z, et si s est une section non triviale de $[\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)]|_Z$, alors l'image $f'(\mathbf{C})$ est en fait contenue dans la courbe $C = (s = 0)$. En effet, on peut considérer Φ' comme courant sur Z, et évidemment $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m)|_Z) \cdot [\Phi'] = c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m)) \cdot [\Phi'] \leqslant 0$, d'où $[\Phi'] \cdot [C] < 0$. Cela prouve, d'après Lu et Yau [LuY], la conjecture de Green–Griffiths dans le cas $c_1^2 > 2c_2$.

Pour terminer cette discussion autour du théorème 1.3, rappelons deux résultats de Bogomolov et Vojta qui avaient exploité précédemment les mêmes techniques.

Dans [Bog] (voir aussi [Des]) on montre qu'une surface X de type général avec $c_1^2(X) > c_2(X)$ contient un nombre fini de courbes rationnelles ou elliptiques. D'après ce qui précède, ces courbes (qui sont entières...) sont tangentes à un feuilletage, quitte à passer sur un revêtement Z de X. Leur finitude provient alors d'un théorème de Jouanolou [Jou] qui affirme qu'un feuilletage sur une surface possède un nombre fini de feuilles algébriques, sauf dans le cas où le feuilletage est donné par les niveaux d'une fonction rationnelle. Mais dans ce dernier cas on déduit encore la finitude des courbes rationnelles ou elliptiques sur X, car une surface de type général ne possède aucune fibration rationnelle ou elliptique.

Dans [Vo2] on montre qu'une fibration $X \xrightarrow{F} C$, où X est une surface algébrique, C est une courbe algébrique, la fibre générique de F est de genre $\geqslant 2$, et F n'est pas isotriviale, possède un nombre fini de sections (« conjecture de Mordell géométrique », prouvée originairement par Manin et ensuite par beaucoup de monde, voir [Lan] pour une discussion approfondie ; le résultat de Vojta fournit des estimations différentes de celles des résultats antérieurs). La preuve consiste à construire un feuilletage (sur un revêtement...) qui contient ces sections comme feuilles, et ensuite on applique à

nouveau le théorème de Jouanolou. La construction du feuilletage est similaire à celle de Bogomolov.

Passons maintenant aux constructions de [DEG] et [MQ2], visant à la conjecture de Kobayashi.

Si X est une hypersurface lisse dans $\mathbf{C}P^3$, de degré $d \geqslant 5$ afin qu'elle soit de type général, le lemme 3.1 ne s'applique pas, car $c_1^2(X) < c_2(X)$ (et, en fait, on peut même montrer que $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ n'est jamais gros dans ce cas). On a toutefois l'inégalité $c_1^2(X) > \frac{9}{13}c_2(X)$ dès que $d \geqslant 15$, ce qui sera utile dans la suite.

Pour obtenir des équations différentielles satisfaites par les courbes entières dans X il faut prendre en considération les dérivées secondes de ces courbes. Soit donc $J_2 \to X$ le fibré des 2-jets des courbes holomorphes dans X, et soit $E_2 \to X$ le quotient de J_2 par l'action du groupe des 2-jets de difféomorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$ (voir [Dm1] ou [DEG] pour plus de détails sur ces fibrés). Il faut penser à E_2 comme étant le fibré des 2-jets des courbes holomorphes « non paramétrées ». On a une $\mathbf{C}P^1$-fibration $E_2 \stackrel{\widehat{\pi}}{\to} PTX$, induite par 2-jet $\mapsto$ 1-jet, et un fibré tautologique $\mathcal{O}_{E_2}(-1) \in \mathrm{Pic}(E_2)$. On a aussi une fibration $\widetilde{\pi} = \pi \circ \widehat{\pi} : E_2 \to X$. Remarquons que $\dim E_2 = 4$.

LEMME 3.3 ([Dm1] ; voir aussi [DEG] et [MQ2]). — *Soit X une surface de type général avec $c_1^2(X) > \frac{9}{13}c_2(X)$. Alors le fibré $\mathcal{O}_{E_2}(1)$ est gros.*

La preuve imite celle du lemme 3.1 : on calcule $c_1^4(\mathcal{O}_{E_2}(1))$, qui est positivement proportionnel à $13c_1^2(X) - 9c_2(X)$, ensuite on applique la formule de Riemann–Roch, et la dualité de Serre pour contrôler la cohomologie en degré positif. À noter que la cohomologie de E_2 à coefficients dans $\mathcal{O}_{E_2}(m)$ (y comprise celle en degré 0) s'exprime en termes de celle de X à coefficients dans certains fibrés vectoriels, les fibrés des opérateurs différentiels algébriques du second ordre.

En particulier, sous les hypothèses du lemme 3.3 (satisfaites par les hypersurfaces de degré $\geqslant 15$) le fibré linéaire $\mathcal{O}_{E_2}(m) \otimes \widetilde{\pi}^*(A^*)$, où $A \in \mathrm{Pic}(X)$ est ample, a des sections holomorphes globales non triviales pour $m \gg 0$. Si $f : \mathbf{C} \to X$ est une courbe entière et $f'' : \mathbf{C} \to E_2$ son relevé, on en déduit que l'image $f''(\mathbf{C})$ est contenue dans une hypersurface $W \subset E_2$, composante irréductible du lieu d'annulation d'une section de $\mathcal{O}_{E_2}(m) \otimes \widetilde{\pi}^*(A^*)$:

$$f''(\mathbf{C}) \subset W.$$

Cette dernière affirmation est démontrée dans [DEG] comme conséquence du lemme de Ahlfors–Schwarz de [GGr], [Dm1] et [SY2], et dans [MQ2] à l'aide d'une inégalité tautologique pour les dérivées d'ordre supérieur.

Comme dans le cas $c_1^2 > c_2$, on a donc deux situations possibles. Si W est *verticale*, i.e. $\widehat{\pi}(W) \subset PTX$ est une surface Z, on en déduit que $f'(\mathbf{C}) \subset Z$ et donc soit $f(\mathbf{C})$ est dans une courbe $C \subset X$ (si Z est verticale) soit f' est tangente au feuilletage tautologique de Z (si Z est horizontale). Si, par contre, W est *horizontale*, i.e. $\widehat{\pi}(W) = PTX$, on en déduit seulement que f'' est tangente au feuilletage tautologique (par courbes)

de W. Puisque $\dim W = 3$ et puisqu'on ne connaît pas grand chose sur les feuilletages en dimension $\geqslant 3$, dans ce deuxième cas il faut des arguments supplémentaires pour se ramener à la dimension 2.

Une démarche naturelle est alors la suivante, inspirée du résultat de [LuY] expliqué ci-dessus : essayer de démontrer que, si $W \subset E_2$ est horizontale, le fibré $\mathcal{O}_{E_2}(1)|_W$ est encore gros. Cela donnera une surface $\widehat{Z} \subset W$ telle que $f''(\mathbf{C}) \subset \widehat{Z}$, et donc une surface $Z = \widehat{\pi}(\widehat{Z}) \subset PTX$ telle que $f'(\mathbf{C}) \subset Z$. Si l'on cherche un résultat « général » dans cette direction, avec des hypothèses concernant seulement les nombres de Chern de X, il faudra alors imposer sur $c_1^2(X)$ et $c_2(X)$ une inégalité plus forte que celle qui apparaît dans le lemme 3.3. Dans [DEG] on fait un tel calcul, qui est encore une fois basé sur la semi-stabilité de Ω^1_X, et on trouve que l'inégalité à imposer est $c_1^2(X) > \frac{9}{7}c_2(X)$. Ce résultat « général » n'est pas très utile à ce point, car nous savons déjà construire des feuilletages sur des surfaces sous l'hypothèse plus faible $c_1^2(X) > c_2(X)$...

Toutefois, les hypersurfaces génériques dans $\mathbf{C}P^3$ ont une propriété remarquable : leur groupe de Picard est isomorphe à $\mathbf{Z}$ (théorème de Noether–Lefschetz). En utilisant cette propriété, Demailly et El Goul parviennent à démontrer que, pour avoir $\mathcal{O}_{E_2}(1)|_W$ gros, il suffit d'une inégalité du type

$$c_1^2(X) > \frac{9}{13 + 12\theta_2} c_2(X),$$

où $\theta_2 = \theta_2(X)$ est l'infimum des nombres rationnels $\frac{l}{m}$ (avec $m \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{Z}$) tels que le fibré $\mathcal{O}_{E_2}(m) \otimes \widetilde{\pi}^*(K_X^{\otimes l})$ a des sections holomorphes globales non triviales. On a $\theta_2 < 0$ car $\mathcal{O}_{E_2}(1)$ est gros, et $\theta_2 > -\infty$ car K_X est gros. Bien sûr, cette inégalité est plus forte que $c_1^2(X) > \frac{9}{13}c_2(X)$. Mais Demailly et El Goul arrivent aussi à donner des estimations sur θ_2 et, enfin, ils montrent par cette voie que l'inégalité $c_1^2(X) > \frac{9}{13+12\theta_2}c_2(X)$ est satisfaite par les hypersurfaces génériques de $\mathbf{C}P^3$ dès que leur degré est $\geqslant 21$.

Tous ces calculs sont assez compliqués, et nous ne pouvons que renvoyer à [DEG] pour les détails. Observons toutefois l'aspect suivant. Prouver une estimation du type « $\theta_2 > ...$ » signifie prouver que certains fibrés n'ont aucune section non triviale. Or, si on a une famille (connexe) de surfaces (e.g., la famille des hypersurfaces lisses de $\mathbf{C}P^3$ de degré fixé) il suffit de faire cela dans le cas d'*une seule* surface pour en déduire la même propriété pour toutes les surfaces *génériques* de la famille (théorème de semi-continuité). C'est donc ici que le fait de travailler avec des hypersurfaces de $\mathbf{C}P^3$, et pas avec des surfaces abstraites, se révèle très utile : on choisit une hypersurface spéciale dans $\mathbf{C}P^3$ et on fait les calculs sur elle.

En conclusion, donc, Demailly et El Goul montrent que si $X \subset \mathbf{C}P^3$ est générique de degré $d \geqslant 21$ et si $f : \mathbf{C} \to X$ est une courbe entière, il existe une surface $Z \to X$, un feuilletage $\mathcal{F}$ sur Z, un relevé $g : \mathbf{C} \to Z$ de f sur Z tangent à $\mathcal{F}$. Le théorème 1.4 et le théorème de Clemens [Cle] conduisent alors à la preuve du théorème 1.6 :

X est hyperbolique. Cela se trouve aussi dans [MQ2], suivant le même schéma mais avec des détails qui semblent un peu plus compliqués (d'ailleurs, McQuillan étudie une situation plus générale que celle de la conjecture de Kobayashi).

Terminons cette section avec quelques remarques sur le cas logarithmique.

Soit X une surface projective complexe et soit $D \subset X$ une courbe à croisements normaux. Pour étudier les courbes entières dans $X \setminus D$ il est alors naturel de travailler avec des objets à singularités logarithmiques le long de D. Soit donc $PTX(\log D)$ le fibré tangent logarithmique projectivisé, et soit $\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1)$ son fibré tautologique.

Comme dans le lemme 3.1, on obtient que si (X, D) est de type log-général (i.e., $K_X \otimes \mathcal{O}_X(D)$ est gros) et si $c_1^2(TX(\log D)) > c_2(TX(\log D))$, alors $\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(1)$ est gros. Cela fournit donc un feuilletage sur un revêtement Z de X, et les courbes entières dans $X \setminus D$ se relèvent en feuilles de ce feuilletage. Bien sûr, la proposition 2.1 est ici remplacée par sa version logarithmique 2.2.

Sans surprise, cela ne marche jamais si $X = \mathbf{C}P^2$ et D est une courbe lisse : l'inégalité ci-dessus entre nombres de Chern logarithmiques n'est jamais satisfaite. Il faut à nouveau prendre en compte les dérivées secondes, etc. On trouve tout cela dans [ElG], où l'auteur prouve la deuxième partie de la conjecture de Kobayashi avec $e(2) = 15$. Bien sûr, le théorème 1.4 est, dans ce contexte, remplacé lui aussi par sa version logarithmique.

4. FEUILLES ENTIÈRES

Dans cette section nous expliquerons les idées qui apparaissent dans la preuve du théorème 1.4.

Soit X une surface projective complexe lisse et $\mathcal{F}$ un feuilletage sur X, à singularités isolées. La donnée d'un tel feuilletage équivaut à la donnée d'une suite exacte

$$0 \to N_{\mathcal{F}}^* \to \Omega_X^1 \to \mathcal{I}_S \cdot K_{\mathcal{F}} \to 0$$

où $N_{\mathcal{F}}^*$ et $K_{\mathcal{F}}$ sont des fibrés linéaires sur X (le *fibré conormal* et le *fibré canonique* de $\mathcal{F}$), S est un sous-schéma de X de codimension 2 (le *schéma singulier* de $\mathcal{F}$), et $\mathcal{I}_S$ est son idéal. Plus exactement, $N_{\mathcal{F}}^*$ (resp. $T_{\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}}^*$) est le fibré linéaire engendré par les 1-formes holomorphes locales (resp. les champs de vecteurs holomorphes locaux) qui définissent $\mathcal{F}$. En prenant le déterminant de la suite exacte ci-dessus, on obtient

$$K_X = K_{\mathcal{F}} \otimes N_{\mathcal{F}}^*.$$

On peut associer à $\mathcal{F}$ son *graphe* $F \subset PTX$: c'est une surface irréductible, qui coupe chaque fibre de $\pi : PTX \to X$ au-dessus d'un point non singulier x en un seul point v_x (= la droite tangente à $\mathcal{F}$ en x) et qui contient chaque fibre de π au-dessus

d'un point singulier. En général, F peut avoir des singularités, au-dessus de certains points singuliers de $\mathcal{F}$.

Remarquons que l'énoncé du théorème 1.4 est invariant par transformations birationnelles : on peut donc faire tous les éclatements qu'on veut. Cela permet, grâce à un théorème classique de Seidenberg [Sei], de supposer que toutes les singularités de $\mathcal{F}$ sont *réduites*. Nous ne voulons pas rentrer ici dans les détails de cette théorie (voir, e.g., [Br2] pour un exposé plus complet), et pour simplifier l'exposition nous allons dans la suite faire les hypothèses suivantes :

i) $\mathcal{F}$ a une seule singularité, p (ce qui évitera l'introduction de trop d'indices) ;

ii) p est une singularité *réduite* et *non dégénérée*, i.e. $\mathcal{F}$ est engendré au voisinage de p par un champ de vecteurs holomorphe dont la partie linéaire en p a valeurs propres λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbf{Q}^+$ (ce qui exclura les singularités de type « nœud-col », qui donnent quelque difficulté technique en plus).

Bien sûr, les deux propositions ci-dessous restent vraies dans le cas général des feuilletages à singularités réduites, voir [MQ1] et [Br1].

Le graphe $F \subset PTX$ contient la fibre $E = \pi^{-1}(p)$, et l'hypothèse ii) implique que F est lisse au voisinage de E (et donc partout). En fait, la projection $\pi : F \to X$ s'identifie à l'éclatement de X en p et $E \subset F$ est son diviseur exceptionnel. La restriction du fibré tautologique $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$ à F coïncide avec $\pi^*(T_{\mathcal{F}})$ hors de E (par tautologie) et avec $\mathcal{O}_F(E)$ le long de E (car $\deg(\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_E) = -1 = \deg(\mathcal{O}_F(E)|_E)$). C'est-à-dire :

$$\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_F = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}_F(E).$$

Soit $f : \mathbf{C} \to X$ une *feuille entière* de $\mathcal{F}$, i.e. une courbe entière tangente à $\mathcal{F}$. La dérivée $f' : \mathbf{C} \to PTX$ est donc à valeurs dans F. Si $\Phi' \in A^{1,1}(PTX)'$ est un courant positif fermé associé à f' (qu'on peut aussi identifier à un courant sur F), l'inégalité tautologique (proposition 2.1) donne alors l'inégalité

$$c_1(\pi^*(T_{\mathcal{F}})) \cdot [\Phi'] + [\Phi'] \cdot [E] \geqslant 0$$

i.e.

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant -[\Phi'] \cdot [E]$$

où $\Phi = \pi_*(\Phi')$ est un courant positif fermé associé à f. Notons que $[\Phi'] \cdot [E] \geqslant 0$, car $f'(\mathbf{C}) \not\subset E$. Le résultat suivant de McQuillan est alors une amélioration significative de l'inégalité ci-dessus.

Proposition 4.1 ([MQ1], theorem II.3.3.2). — *Si $f(\mathbf{C})$ est Zariski-dense dans X, on a*

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0.$$

Démonstration. — Supposons d'abord que f ne passe pas par p : $f(\mathbf{C}) \cap \{p\} = \varnothing$ (mais, bien sûr, p peut être dans $\operatorname{Supp} \Phi$, sinon tout est trivial).

Soit alors $X^{(1)} \overset{\pi^{(1)}}{\to} X$ l'éclaté de X en p, $E^{(1)} \subset X^{(1)}$ le diviseur exceptionnel, $f^{(1)} : \mathbf{C} \to X^{(1)}$ le relevé de f. Le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève en un feuilletage $\mathcal{F}^{(1)}$ sur $X^{(1)}$, tangent à $E^{(1)}$. On peut donc considérer son *graphe logarithmique* $F^{(1)} \subset PTX^{(1)}(\log E^{(1)})$. Or, $\mathcal{F}^{(1)}$ a deux singularités $p^{(1)}$, $q^{(1)}$ sur $E^{(1)}$, qui sont encore réduites et non dégénérées. Mais du point de vue logarithmique, ces deux points $p^{(1)}$ et $q^{(1)}$ *ne sont pas* singuliers : si v est un champ de vecteurs holomorphe local qui engendre $\mathcal{F}^{(1)}$ au voisinage de $p^{(1)}$, alors v s'annule en $p^{(1)}$ en tant que section de $TX^{(1)}$, mais il ne s'annule pas en tant que section de $TX^{(1)}(\log E^{(1)})$. Cela signifie que le graphe $F^{(1)}$ est une section de $PTX^{(1)}(\log E^{(1)})$ même au-dessus de $p^{(1)}$ et $q^{(1)}$, et donc partout. On obtient alors la formule tautologique

$$\mathcal{O}_{PTX^{(1)}(\log E^{(1)})}(-1)|_{F^{(1)}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}^{(1)}}).$$

Notons, à ce propos, que le « fibré tangent logarithmique » du feuilletage $\mathcal{F}^{(1)}$ coïncide avec son fibré tangent ordinaire $T_{\mathcal{F}^{(1)}}$, puisqu'un champ de vecteurs local qui engendre le feuilletage est forcément logarithmique, i.e. tangent à $E^{(1)}$. Par contre, le « fibré conormal logarithmique » de $\mathcal{F}^{(1)}$ est égal à $N^*_{\mathcal{F}^{(1)}} \otimes \mathcal{O}_{X^{(1)}}(E^{(1)})$ et diffère donc du fibré conormal ordinaire.

La feuille entière $f^{(1)} : \mathbf{C} \to X^{(1)}$ a son image disjointe de $E^{(1)}$, on peut donc lui appliquer l'inégalité tautologique logarithmique (proposition 2.2), ce qui donne

$$c_1(T_{\mathcal{F}^{(1)}}) \cdot [\Phi^{(1)}] \geqslant 0$$

où $\Phi^{(1)}$ est un courant positif fermé associé à $f^{(1)}$. On peut supposer que $\Phi^{(1)}$ se projette sur Φ par $\pi^{(1)}$, et d'autre part $T_{\mathcal{F}^{(1)}}$ coïncide avec $(\pi^{(1)})^*(T_{\mathcal{F}})$ car p est réduite. On obtient ainsi l'inégalité cherchée :

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0.$$

Le cas général, où f passe par p, nécessite une « suite infinie » d'éclatements. On peut faire à nouveau la construction précédente, mais alors $f^{(1)}(\mathbf{C})$ n'est plus disjointe de $E^{(1)}$ car elle peut contenir $p^{(1)}$ et/ou $q^{(1)}$. Il faut donc éclater $p^{(1)}$ et $q^{(1)}$, en obtenant une surface $X^{(2)}$, une projection $X^{(2)} \overset{\pi^{(2)}}{\to} X$ avec $E^{(2)} = (\pi^{(2)})^{-1}(p) =$ chaîne de trois courbes rationnelles, un feuilletage $\mathcal{F}^{(2)}$ tangent à $E^{(2)}$ et une feuille entière $f^{(2)} : \mathbf{C} \to X^{(2)}$. Le feuilletage $\mathcal{F}^{(2)}$ est singulier aux points de croisement de $E^{(2)}$ et, en plus, en deux points $p^{(2)}$ et $q^{(2)}$, qui se trouvent aux extrémités de $E^{(2)}$ et qui sont susceptibles d'être dans l'image de $f^{(2)}$. On éclate $p^{(2)}$ et $q^{(2)}$, on itère la construction, et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on obtient ainsi une surface $X^{(n)} \overset{\pi^{(n)}}{\to} X$, une chaîne de $(2n-1)$ courbes rationnelles $E^{(n)} = (\pi^{(n)})^{-1}(p)$, un feuilletage $\mathcal{F}^{(n)}$ tangent à $E^{(n)}$, une feuille entière $f^{(n)} : \mathbf{C} \to X^{(n)}$, et deux singularités $p^{(n)}$ et $q^{(n)}$ aux extrémités de $E^{(n)}$.

Soit alors $D^{(n)} \subset X^{(n)}$ la chaîne de $(2n-3)$ courbes rationnelles qui s'obtient de $E^{(n)}$ en ôtant les deux courbes rationnelles extrémales. On a $f^{(n)}(\mathbf{C}) \cap D^{(n)} = \varnothing$, et on peut maintenant appliquer l'inégalité tautologique logarithmique à

$f^{(n)} : \mathbf{C} \to X^{(n)} \setminus D^{(n)}$. Du point de vue logarithmique (à pôles sur $D^{(n)}$) $\mathcal{F}^{(n)}$ est singulier *seulement* en $p^{(n)}$ et $q^{(n)}$. On obtient ainsi l'inégalité

$$c_1(T_{\mathcal{F}^{(n)}}) \cdot [\Phi^{(n)}] \geqslant -[(\Phi^{(n)})'] \cdot ([E_{p^{(n)}}] + [E_{q^{(n)}}])$$

où $E_{p^{(n)}}$ et $E_{q^{(n)}}$ sont les fibres de $PTX^{(n)}(\log D^{(n)})$ au-dessus de $p^{(n)}$ et $q^{(n)}$, fibres contenues dans le graphe logarithmique de $\mathcal{F}^{(n)}$. Puisque $T_{\mathcal{F}^{(n)}} = (\pi^{(n)})^*(T_{\mathcal{F}})$ et $\pi^{(n)}_*(\Phi^{(n)}) = \Phi$, on a

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant -[(\Phi^{(n)})'] \cdot ([E_{p^{(n)}}] + [E_{q^{(n)}}]).$$

D'autre part, un calcul simple (voir [Br1] page 206) montre que

$$[\Phi^{(n)}]^2 = [\Phi]^2 - ([\Phi'] \cdot [E])^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \{([(\Phi^{(j)})'] \cdot [E_{p^{(j)}}])^2 + ([(\Phi^{(j)})'] \cdot [E_{q^{(j)}}])^2\}.$$

C'est à ce point que l'hypothèse de Zariski-densité de f (et donc de $f^{(n)}$ pour tout n) intervient : cette hypothèse implique que les classes des courants $\Phi^{(n)}$ sont numériquement effectives, et par conséquent $[\Phi^{(n)}]^2 \geqslant 0$. La somme $\sum_{j=1}^{n-1}\{...\}$ ci-dessus est donc majorée, pour tout n, par $[\Phi]^2$. Cela implique que $[(\Phi^{(n)})'] \cdot [E_{p^{(n)}}]$ et $[(\Phi^{(n)})'] \cdot [E_{q^{(n)}}]$ (qui sont positifs ou nuls) tendent vers 0 pour $n \to +\infty$. L'inégalité

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0$$

s'obtient alors par passage à la limite. □

Remarque. — Comme les propositions 2.1 et 2.2, la proposition 4.1 est vraie à condition de considérer, dans la construction du courant Φ, une « bonne » suite divergente $\{r_n\}$, c'est-à-dire une suite qui produit des courants positifs fermés $\Phi^{(k)}$, $(\Phi^{(k)})'$, $k \in \mathbf{N}$, satisfaisant les inégalités tautologiques correspondantes. Même si on a fait une « suite infinie » d'éclatements, il n'y a aucun problème pour l'existence de telles suites.

À côté de la proposition 4.1, qui estime $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$, on a la proposition suivante, qui estime $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$. Nous suivrons ici [Br1], qui donne un résultat un peu meilleur que celui de [MQ1] et qui permettra donc d'abréger la conclusion de la preuve du théorème 1.4.

PROPOSITION 4.2 ([Br1], théorème 2). — *Si $f(\mathbf{C})$ est Zariski-dense dans X, on a*

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0.$$

Démonstration. — On a déjà observé dans la section 2 que, bien que f soit Zariski-dense, le courant Φ peut contenir le courant d'intégration sur une courbe algébrique. Dans la suite, pour simplifier, on va supposer que Φ ne contient pas de telle composante (voir [Br1] pour le cas général, qui demande simplement des arguments logarithmiques). Cela revient à dire que les nombres de Lelong de Φ hors des singularités de $\mathcal{F}$ sont nuls.

Le produit $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ est égal à $\Phi(\Omega)$, où Ω est une 2-forme fermée qui représente $c_1(N_{\mathcal{F}})$. On va donc construire une telle 2-forme, en suivant les idées de Baum et Bott [BBo]. Remarquons que le fibré $N_{\mathcal{F}}$ est, hors de la singularité p, plat le long des feuilles de $\mathcal{F}$. Cela permet de construire une 2-forme fermée Ω telle que $[\Omega] = c_1(N_{\mathcal{F}})$ et $\Omega|_{\mathcal{F}} \equiv 0$ hors d'un voisinage U de p. Un calcul standard (voir, e.g., [Br1] ou [Br2] chapter 3) donne aussi la recette suivante pour $\Omega|_{\mathcal{F}}$ dans U. Soit ω une 1-forme holomorphe locale qui engendre $\mathcal{F}$ dans U et soit β une $(1,0)$-forme C^∞ sur U telle que $d\omega = \beta \wedge \omega$ dans $U \setminus V$, où $V \subset\subset U$ est un autre voisinage de p. Une telle β existe toujours (voir ci-dessous) ; en général, on ne peut pas la choisir holomorphe. On peut alors supposer que

$$\Omega|_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2i\pi} d\beta|_{\mathcal{F}}$$

dans U. Remarquons que $d\beta|_{\mathcal{F}} \equiv 0$ dans $U \setminus V$, car $d\omega = \beta \wedge \omega \implies d\beta \wedge \omega \equiv 0$, et donc $\mathrm{Supp}(\Omega|_{\mathcal{F}}) \subset \overline{V} \subset\subset U$. Remarquons aussi que, une fois fixé ω, la restriction $\beta|_{\mathcal{F}}$ est uniquement définie dans $U \setminus V$; et si on remplace ω par $F \cdot \omega$, $F \in \mathcal{O}^*(U)$, la restriction $\beta|_{\mathcal{F}}$ est remplacée par $(\beta + \frac{dF}{F})|_{\mathcal{F}}$. On peut donc dire que la « classe de cohomologie relative » de $\beta|_{\mathcal{F}}$ dans $U \setminus V$ est intrinsèquement définie par $\mathcal{F}$.

La valeur de Φ sur une 2-forme η dépend seulement de $\eta|_{\mathcal{F}}$, car $\Phi(\eta)$ se calcule en intégrant η sur la feuille $f : \mathbf{C} \to X$. Puisque $\Omega|_{\mathcal{F}} \equiv 0$ hors de U, on a ainsi localisé le calcul : $\Phi(\Omega)$ est égal à $\Phi_U(\frac{1}{2i\pi} d\beta)$, où Φ_U est la restriction de Φ à U (ou, si l'on préfère, $\Phi_U = \chi_U \cdot \Phi$). On peut toujours supposer que U est une boule autour de p et β est définie au voisinage de $\overline{U}$. On a alors

$$\Phi(\Omega) = \Phi_U(\tfrac{1}{2i\pi} d\beta) = \Psi(\tfrac{1}{2i\pi} \beta)$$

où $\Psi \in A^1(\partial U)'$ est le courant bord de Φ_U (ou, si l'on préfère, $\Psi = d\chi_U \wedge \Phi$). Dorénavant on supposera que $p \in \mathrm{Supp}\, \Phi$, sinon on a trivialement $\Phi(\Omega) = 0$.

Pour fixer les idées, supposons que $\mathcal{F}$ soit linéarisable au voisinage de p, i.e. engendré par la 1-forme

$$\omega = z dw - \lambda w dz$$

avec $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \mathbf{Q}^+$ (car p est réduite et non dégénérée). Supposons aussi que $\lambda \notin \mathbf{R}^-$ (voir [Br1] pour le cas $\lambda \in \mathbf{R}^-$, qui est en effet un peu plus délicat). Alors, quitte à restreindre U, la 3-sphère ∂U est transverse à $\mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}$ induit sur ∂U un feuilletage non singulier réel $\mathcal{L}$ de dimension 1, *orienté* par $\mathcal{F}|_U$:

$$\mathcal{L} = \partial(\mathcal{F}|_U).$$

Le courant Φ est associé à une *mesure transverse* à $\mathcal{F}$, invariante par holonomie [Sul] : la valeur de Φ sur η se calcule en intégrant η le long des feuilles et ensuite en intégrant la fonction ainsi obtenue (sur l'espace des feuilles) par rapport à la mesure transverse. Cette mesure transverse à $\mathcal{F}$ induit une mesure transverse à $\mathcal{L}$, invariante par holonomie. Et, réciproquement, cette dernière est associée à un courant $\widehat{\Psi}$ sur ∂U,

de degré 1 (= $\dim \mathcal{L}$), positif (i.e. $\widehat{\Psi}(\gamma) > 0$ si $\gamma|_{\mathcal{L}} > 0$), fermé. Bien sûr, ce courant $\widehat{\Psi}$ coïncide avec le bord Ψ de Φ_U introduit ci-dessus : $\widehat{\Psi} = \Psi$.

L'hypothèse d'annulation des nombres de Lelong de Φ hors de p se traduit dans l'absence d'atomes pour les mesures transverses en jeu. Cela permet d'exclure le cas $\lambda \notin \mathbf{R}$. En effet, dans ce cas le flot $\mathcal{L}$ a deux orbites périodiques ($\{z = 0\} \cap \partial U$ et $\{w = 0\} \cap \partial U$) et toute autre orbite a ces deux orbites comme ensemble limite, ce qui force toute mesure transverse invariante à être concentrée sur ces deux orbites et donc à être atomique. On a donc $\lambda \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}^+$.

Pour ce qui concerne la $(1,0)$-forme β, on peut choisir

$$\beta = h \cdot \frac{1+\lambda}{|z|^2 + |\lambda w|^2}(\overline{z}dz + \overline{\lambda}\overline{w}dw)$$

où $h \in C^\infty(\overline{U})$, $h \equiv 0$ au voisinage de p, $h \equiv 1$ sur $\overline{U} \setminus V$. On a alors

$$\frac{1}{2i\pi}\beta|_{\mathcal{L}} = \frac{(1+\lambda)}{2\pi i}\frac{dz}{z}|_{\mathcal{L}} > 0$$

et par conséquent $\Psi(\frac{1}{2i\pi}\beta) > 0$.

Le cas $\lambda \in \mathbf{R}^-$ conduit par contre à $\Psi(\frac{1}{2i\pi}\beta) = 0$, voir [Br1]. En tout cas on a donc $\Psi(\frac{1}{2i\pi}\beta) \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] = \Psi(\frac{1}{2i\pi}\beta) \geqslant 0. \qquad \square$$

Grâce aux propositions 4.1 et 4.2, la preuve du théorème 1.4 est maintenant immédiate. En effet, d'après $K_X = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}}$ on obtient

$$c_1(K_X) \cdot [\Phi] \leqslant 0$$

pour tout courant Φ associé à une feuille entière Zariski-dense d'un feuilletage à singularités réduites. Mais la classe $[\Phi]$ est numériquement effective et non triviale, et donc

$$c_1(L) \cdot [\Phi] > 0$$

pour tout fibré gros $L \in \mathrm{Pic}(X)$ (c'est une conséquence du théorème de l'indice de Hodge). Ainsi K_X n'est pas gros, i.e. X n'est pas de type général.

Dans [MQ1] la conclusion de la preuve est un peu plus élaborée, car on dispose seulement d'une version « faible » de la proposition 4.2. Grosso modo, cette version faible permet de conclure qu'on a l'inégalité de la proposition 4.2 si $[\Phi]^2 = 0$. Si par contre $[\Phi]^2 > 0$, McQuillan fait appel à un théorème de Miyaoka [ShB] qui affirme que le fibré canonique d'un feuilletage non réglé est pseudo-effectif (sa classe dans $\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbf{R}$ est dans la clôture du cône effectif). Dans notre situation, cela donne en particulier l'inégalité $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \leqslant 0$, car $[\Phi]$ est numériquement effective, et donc

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] = 0.$$

Ensuite, des techniques standard en géométrie des surfaces (théorème de l'indice de Hodge, décomposition de Zariski des diviseurs,...) montrent (grâce à : $[\Phi]$ numériquement effective, $[\Phi]^2 > 0$, $K_{\mathcal{F}}$ pseudo-effectif, $c_1(K_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] = 0$) que $T_{\mathcal{F}}$ est « presque » trivial, i.e. $\mathcal{F}$ est « presque » engendré par un champ de vecteurs holomorphe global. Cela implique à nouveau que X n'est pas de type général, essentiellement parce qu'une surface de type général ne possède aucun champ de vecteurs holomorphe global.

D'ailleurs, tout cela a été le point de départ d'un travail postérieur de McQuillan [MQ3] (voir aussi [Br2]) dans lequel on classifie les feuilletages $\mathcal{F}$ des surfaces projectives tels que $K_{\mathcal{F}}$ n'est pas gros, ce qui en particulier contient la classification des feuilletages ayant une feuille entière Zariski-dense, grâce à la proposition 4.1. À vrai dire, à l'heure actuelle cette classification des feuilletages avec fibré canonique non gros présente encore une lacune (le cas « dimension de Kodaira $-\infty$ »), mais cette lacune est remplissable dans le cas spécial des feuilletages avec une feuille entière Zariski-dense (en utilisant la proposition 4.2, ou sa version faible dans [MQ1]).

Il serait évidemment de grand intérêt de généraliser ces résultats, même partiellement, en dimension supérieure. Dans l'étude de la conjecture de Green–Griffiths pour les surfaces X de type général, on rencontre la situation suivante : une n-variété projective Y, une projection surjective $\pi : Y \to X$, un feuilletage par courbes $\mathcal{F}$ sur Y, et une feuille entière $f : \mathbf{C} \to Y$. On voudrait démontrer que $\pi \circ f : \mathbf{C} \to X$ n'est pas Zariski-dense. Si, par contradiction, elle l'était, on aurait alors $c_1(\pi^*(K_X)) \cdot [\Phi] > 0$. D'autre part, $\pi^*(K_X)$ se décompose comme $K_{\mathcal{F}} \otimes L^*_{\mathcal{F},\pi}$, où $L_{\mathcal{F},\pi}$ est, grosso modo, le quotient du fibré normal à $\mathcal{F}$ par le fibré tangent à $\operatorname{Ker}\pi$. Il semble encore possible de démontrer une inégalité du type $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0$, à éclatements près, à partir de l'inégalité tautologique. Par contre, une inégalité du type $c_1(L_{\mathcal{F},\pi}) \cdot [\Phi] \geqslant 0$ semble plus difficile à prouver. Un obstacle dans tout ça est dû à l'absence d'un théorème de résolution des singularités des feuilletages en dimension $\geqslant 3$. Notons toutefois que, dans le cas bidimensionnel, la proposition 4.2 reste vraie sans aucune hypothèse sur les singularités de $\mathcal{F}$, moyennant une faible hypothèse sur les singularités de $[\Phi]$ (voir [Br2] chapter 3).

RÉFÉRENCES

[Ahl] L. Ahlfors – *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math. 65 (1935).

[BBo] P. Baum, R. Bott – *On the zeroes of meromorphic vector fields*, Essais en l'honneur de De Rham, Springer Verlag (1970), 29-74.

[Bog] F. Bogomolov – *Families of curves on a surface of general type*, Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 1294-1297.

[Br1] M. Brunella – *Courbes entières et feuilletages holomorphes*, Ens. Math. 45 (1999), 195-216.

[Br2] M. Brunella – *Birational geometry of foliations*, Congr. UMALCA, notas de curso, IMPA (2000).

[Cle] H. Clemens – *Curves on generic hypersurfaces*, Ann. Sci. ENS 19 (1986), 629-636.

[Dm1] J.-P. Demailly – *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Symp. Pure Math. 62 (1997), 285-360.

[Dm2] J.-P. Demailly – *Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques*, Gazette des math. 73 (1997), 3-23.

[DEG] J.-P. Demailly, J. El Goul – *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math. 122 (2000), 515-546.

[Des] M. Deschamps – *Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général (d'après F. Bogomolov)*, Sém. Bourbaki, exp. n° 519 (juin 1978), Lecture Notes in Math. 710 (1979), 233-247.

[ElG] J. El Goul – *Logarithmic jets and hyperbolicity*, prépublication Toulouse III (2001).

[GGr] M. Green, Ph. Griffiths – *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Springer Verlag (1980), 41-74.

[Jou] J.-P. Jouanolou – *Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique*, Math. Ann. 332 (1978), 239-248.

[Kob] S. Kobayashi – *Hyperbolic complex spaces*, Springer Verlag (1998).

[Lan] S. Lang – *Survey of diophantine geometry (Number Theory III)*, EMS vol. 60, Springer Verlag (1991).

[LuY] S.S.Y. Lu, S.T. Yau – *Holomorphic curves in surfaces of general type*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 87 (1990), 80-82.

[MQ1] M. McQuillan – *Diophantine approximations and foliations*, Publ. IHES 87 (1998), 121-174.

[MQ2] M. McQuillan – *Holomorphic curves on hyperplane sections of 3-folds*, Geom. funct. anal. 9 (1999), 370-392.

[MQ3] M. McQuillan – *Noncommutative Mori theory*, prépubl. IHES M/00/15 (2000).

[Miy] Y. Miyaoka – *Algebraic surfaces of positive index*, Classification of algebraic and analytic manifolds, Progr. in Math. 39, Birkhäuser (1983), 281-301.

[Sei] A. Seidenberg – *Reduction of singularities of the differential equation* $Ady = Bdx$, Amer. J. Math. 89 (1968), 248-269.

[ShB] N.I. Shepherd-Barron – *Miyaoka's theorems on the generic seminegativity of* T_X *and on the Kodaira dimension of minimal regular threefolds*, Flips and abundance for algebraic threefolds, Astérisque 211 (1992), 103-114.

[SY1] Y.T. Siu, S.K. Yeung – *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, Inv. Math. 124 (1996), 573-618.

[SY2] Y.T. Siu, S.K. Yeung – *Defects for ample divisors of abelian varieties, Schwarz lemma, and hyperbolic hypersurfaces of low degree*, Amer. J. Math. 119 (1997), 1139-1172.

[Sul] D. Sullivan – *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*, Inv. Math. 36 (1976), 225-255.

[Vo1] P. Vojta – *On the ABC conjecture and diophantine approximations by rational points*, Amer. J. Math. 122 (2000), 843-872.

[Vo2] P. Vojta – *On algebraic points on curves*, Comp. Math. 78 (1991), 29-36.

[XuG] G. Xu – *Subvarieties of general hypersurfaces in projective space*, J. Diff. Geom. 39 (1994), 139-172.

[Zai] M. Zaidenberg – *The complement of a generic hypersurface of degree* $2n$ *in* $\mathbf{C}P^n$ *is not hyperbolic*, Siberian Math. J. 28 (1987), 425-432.

Marco BRUNELLA

Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
UMR 5584 du CNRS
9, Avenue Savary - BP 47870
F-21078 Dijon
E-mail : brunella@satie.u-bourgogne.fr

Séminaire BOURBAKI Novembre 2000
53e année, 2000-2001, no 882, p. 63 à 83

ESPACES PROBABILISÉS FILTRÉS : DE LA THÉORIE DE VERSHIK AU MOUVEMENT BROWNIEN, VIA DES IDÉES DE TSIRELSON

par **Michel ÉMERY**

> D'infinis tirages ne nécessitent pas, comme les ignorants le supposent, un temps infini ; il suffit en réalité que le temps soit infiniment subdivisible.
>
> J. L. Borges, *La loterie à Babylone*

La cinématique étudie géométriquement tous les mouvements possibles, dans le cadre d'un espace-temps donné. De même, la théorie des martingales, véritable cinématique des probabilités, s'intéresse à toutes les évolutions possibles, au cours du temps, des probabilités d'événements futurs ; et l'on sait, depuis sa fondation par J. L. Doob il y a soixante ans, que le cadre naturel pour cette théorie est un *espace probabilisé filtré.* Il s'agit d'un espace probabilisé muni d'une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathcal{T}}$ de tribus, appelée *filtration.* Le symbole $\mathcal{T}$ désigne un ensemble ordonné qui joue le rôle d'axe des temps ; la filtration formalise l'acquisition d'information, les événements de $\mathcal{F}_n$ s'interprétant comme ceux dont, à l'instant n, on sait avec certitude s'ils sont ou non réalisés.

En théorie des martingales à temps discret, on prend habituellement pour axe des temps $\mathcal{T}$ l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Une autre situation est le cas, dit des martingales inverses, où l'on prend $\mathcal{T} = -\mathbb{N}$; Doob a montré que le comportement des martingales inverses est plus simple que celui des martingales, mais A. M. Vershik a découvert, il y a une trentaine d'années, que, au contraire du cas où $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, la description des filtrations lorsque $\mathcal{T} = -\mathbb{N}$ fait apparaître, au voisinage de $-\infty$, des phénomènes tout à fait inattendus et qui heurtent l'intuition.

Prenons pour fixer les idées une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leqslant 0}$ telle que la tribu $\bigcap_n \mathcal{F}_n$ soit grossière (tous ses événements ont probabilité zéro ou un), et telle que, pour chaque n, $\mathcal{F}_n$ soit engendrée par $\mathcal{F}_{n-1}$ et par un événement indépendant de $\mathcal{F}_{n-1}$ et de probabilité $\frac{1}{2}$ (en d'autres termes, aucun événement non trivial n'est connu depuis toujours, et l'univers des événements connus s'enrichit, à chaque instant entier, du résultat d'un coup de pile ou face indépendant du passé). Sous ces hypothèses, on s'attendrait à l'existence d'un jeu de pile ou face joué à chaque instant entier depuis

un temps infini, et tel que $\mathcal{F}_n$ décrive les résultats observés jusqu'à l'instant n. Mais Vershik a, entre autres,

• exhibé des contre-exemples (les espaces probabilisés filtrés qu'il a appelés non standard) ;

• donné un critère nécessaire et suffisant pour reconnaître si un espace probabilisé filtré est standard ;

• démontré le *théorème d'isomorphisme lacunaire* : tout espace probabilisé filtré du type ci-dessus mais non standard peut être rendu standard par changement de temps, c'est-à-dire en regroupant en paquets les apports successifs d'information : il existe une sous-suite $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ strictement croissante, et des variables aléatoires *indépendantes* $(U_n)_{n\leqslant 0}$ telles que, pour chaque n, $\mathcal{F}_{\nu(n)}$ soit engendrée par la famille $\{U_m,\ m \leqslant n\}$.

Ces idées de Vershik sont restées inconnues des probabilistes occidentaux jusqu'aux années 90, quand B. Tsirelson et d'autres les ont utilisées pour construire, à la stupéfaction générale, une probabilité équivalente à la mesure de Wiener, mais telle que le nouvel espace probabilisé filtré ne soit pas isomorphe à l'espace de Wiener. Ceci a relancé l'intérêt pour des questions sur les filtrations browniennes, soulevées par M. Yor voici vingt ans ; et a aussi poussé Vershik à rédiger la synthèse [24] de ses anciens travaux sur ce thème, dans laquelle nous avons largement puisé.

Tsirelson a ensuite introduit dans [20] un nouvel invariant, le *confort,* qui lui a permis de montrer que l'espace probabilisé filtré associé à un processus de Walsh (sorte de mouvement brownien à valeurs dans une étoile formée d'au moins trois demi-droites issues d'une même origine) n'est pas non plus isomorphe à l'espace de Wiener. Ces idées diffusent maintenant dans les milieux probabilistes, et commencent à donner lieu à une floraison de travaux dont nous parlerons un peu en fin d'exposé.

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Un *espace probabilisé filtré* est la donnée d'un ensemble Ω, d'une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ de tribus de parties de Ω, appelée *filtration,* et d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}_0$ (et donc aussi, par restriction, sur chaque $\mathcal{F}_n$).[(1)] Nous supposerons toujours que $\mathcal{F}_0$ (et donc aussi chaque $\mathcal{F}_n$) est essentiellement séparable, c'est-à-dire engendrée, aux événements négligeables près, par une famille dénombrable, ou encore par une v.a. (D'une façon générale, lorsque nous dirons qu'une tribu ou une filtration est engendrée par quelque chose, ce sera toujours modulo les événements négligeables.)

[(1)] Les probabilistes définissent traditionnellement $\mathbb{P}$ sur une tribu, dite « ambiante », pouvant être plus grosse que $\mathcal{F}_0$; la définition simplifiée nous suffira ici.

L'ensemble $-\mathbb{N}$ joue le rôle d'axe des temps ; sa structure discrète mais non bien ordonnée est la plus simple qui puisse donner lieu aux phénomènes découverts par Vershik. En théorie du mouvement brownien, le temps serait $\mathbb{R}_+$ au lieu de $-\mathbb{N}$.

Intuitivement, un espace probabilisé filtré décrit l'évolution chronologique des probabilités au fur et à mesure de l'acquisition des connaissances. Cette évolution étant elle-même aléatoire, la probabilité à un instant n d'un événement E est une variable aléatoire, égale à la probabilité conditionnelle[(2)] $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$; les événements de $\mathcal{F}_n$ sont ceux dont la probabilité à l'instant n ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 et 1, à l'exclusion des valeurs intermédiaires ; et la probabilité « brute » $\mathbb{P}$, non aléatoire, représente l'état de nos connaissances — ou de notre ignorance — avant le début de l'évolution.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré, l'ensemble $\mathcal{F}_0/\mathbb{P}$, formé des classes d'équivalences d'événements de $\mathcal{F}_0$ pour l'égalité presque sûre, est une tribu (abstraite) probabilisée ; un *isomorphisme* entre deux espaces probabilisés filtrés $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ est une bijection Ψ entre $\mathcal{F}_0/\mathbb{P}$ et $\overline{\mathcal{F}}_0/\overline{\mathbb{P}}$, qui préserve les structures de tribus probabilisées, et telle que pour tous $n \in -\mathbb{N}$ et $E \in \mathcal{F}_0$ on ait, aux négligeables près, $E \in \mathcal{F}_n \;\Leftrightarrow\; \Psi(E) \in \overline{\mathcal{F}}_n$. Cet isomorphisme s'étend alors aux espaces $\mathrm{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ et $\mathrm{L}^0(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}_0, \overline{\mathbb{P}})$, formés des classes d'équivalences de variables aléatoires pour l'égalité p.s.

Pour simplifier, restreignons-nous à la plus élémentaire des situations auxquelles s'intéresse Vershik, en considérant un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfaisant aux deux hypothèses suivantes[(3)] :

Grossièreté asymptotique : la « tribu initiale » $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$ est grossière (elle ne contient que les événements négligeables et les événements presque certains ; ou encore, pour tout événement E, $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_{-\infty}] = \mathbb{P}[E]$) ;

Dyadicité : il existe pour chaque $n \leqslant 0$ une v.a. X_n, prenant chacune des deux valeurs -1 et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$, et telle que $\mathcal{F}_n$ soit la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}_{n-1}$ et les événements $\{X_n = -1\}$ et $\{X_n = 1\}$.

La question que s'est posée Vershik est : Ces deux hypothèses suffisent-elles à caractériser l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à isomorphisme près ? L'exemple évident vérifiant ces conditions est l'espace naturel du jeu de pile ou face ; mais y en a-t-il d'autres ?

En remplaçant l'axe des temps $-\mathbb{N}$ par $\{0, 1, ..., N\}$ ou par $\mathbb{N}$, on obtiendrait un problème analogue, et beaucoup plus facile, auquel la réponse serait positive, simplement parce que la filtration $\mathcal{F}$ serait alors engendrée par le processus X. Mais lorsque

(2) Techniquement, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$ peut être définie comme la densité de Radon-Nikodym de la mesure $F \mapsto \mathbb{P}(E \cap F)$ sur $\mathcal{F}_n$, par rapport à la mesure $\mathbb{P}$ restreinte à $\mathcal{F}_n$.

(3) Prises ensemble, elles disent que $\mathcal{F}$ possède la propriété de représentation prévisible par rapport à un jeu de pile ou face.

le temps est $-\mathbb{N}$, cet argument est en défaut. Prendre par exemple un jeu de pile ou face $Y = (Y_n)_{n\leqslant 0}$ (c'est-à-dire des v.a. Y_n indépendantes et valant ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$), appeler $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par Y, et poser $X_n = Y_{n-1}Y_n$. Le processus X est aussi un jeu de pile ou face, les deux hypothèses ci-dessus sont satisfaites par $\mathcal{F}$ et X, et cependant X n'engendre pas $\mathcal{F}$, puisque la v.a. Y_0, qui est mesurable pour $\mathcal{F}_0$, est indépendante du processus X et ne peut donc être une fonctionnelle des X_n.

Dans cet exemple, bien que X n'engendre pas $\mathcal{F}$, l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ engendré par Y est néanmoins isomorphe à celui engendré par X, puisque les processus X et Y ont la même loi (ce sont tous deux des jeux de pile ou face). Voici maintenant un exemple, beaucoup plus surprenant, emprunté à Vershik [24], d'un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui satisfait aux deux hypothèses ci-dessus, sans être engendré par aucun jeu de pile ou face.

Exemple. — Considérer une suite $(M_n)_{n\leqslant 0}$ de v.a. qui suivent chacune la loi uniforme sur $[0,1]$, et qui se déduisent les unes des autres de la façon suivante : Ayant observé toutes les M_m pour $m \leqslant n$, on obtient M_{n+1} en jetant une pièce de monnaie et en ne conservant, dans le développement décimal de M_n, que les décimales de rang pair ou impair selon que l'on a obtenu pile ou face. En termes plus savants, M est un processus de Markov stationnaire, de loi uniforme sur $[0,1]$ et de probabilités de transition

$$0, d_1d_2d_3d_4d_5d_6 \ldots \begin{cases} \nearrow\ 0, d_1d_3d_5 \ldots & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ \searrow\ 0, d_2d_4d_6 \ldots & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si l'on se donne $m \leqslant n \leqslant 0$ et si l'on pose $r = 2^{n-m}$ et $M_m = 0, e_1e_2e_3e_4\ldots$, la loi conditionnelle de M_n à l'instant m consiste en le choix au hasard de l'un parmi les r nombres $0,e_1e_{r+1}e_{2r+1}\ldots$, $0,e_2e_{r+2}e_{2r+2}\ldots$, et ainsi de suite jusqu'à $0,e_re_{2r}e_{3r}\ldots$, chacun avec probabilité $1/r$; puisque ces r nombres sont des v.a. indépendantes et de même loi uniforme, la loi faible des grands nombres entraîne que cette loi conditionnelle est proche de la loi uniforme quand r est grand, c'est-à-dire quand m tend vers $-\infty$, et la grossièreté asymptotique résulte alors de la propriété de Markov. Le caractère dyadique est évident ; il est clair également que le jeu de pile ou face qui a servi à construire M n'engendre pas tout l'espace probabilisé filtré : la première décimale de M_0, par exemple, est indépendante de ce jeu de pile ou face. Mais il est bien plus délicat de montrer qu'*aucun* jeu de pile ou face ne peut engendrer cet espace probabilisé filtré ; Vershik le déduit de son « critère de standardité » (et d'estimations de nature combinatoire sur M). Pour pouvoir énoncer ce critère, nous aurons besoin de quelques définitions.

Définition 1. — *On appelle* sous-filtration *d'une filtration $\mathcal{F}$ une filtration $\mathcal{E}$ telle que $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{F}_n$ pour tout instant $n \in -\mathbb{N}$.*

On dit qu'une filtration $\mathcal{E}$ est immergée dans *un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\mathcal{E}$ est une sous-filtration de $\mathcal{F}$ telle que, pour tout événement $E \in \mathcal{E}_0$ et tout temps $n \in -\mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}[E|\mathcal{E}_n]$ et $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$ sont (p.s.) égales.*

Définition 2. — *Soient $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ deux espaces probabilisés filtrés. On dit que $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est* immersible *dans $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ s'il existe une filtration $\overline{\mathcal{E}}$ immergée dans $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que les espaces probabilisés filtrés $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{E}}, \overline{\mathbb{P}})$ soient isomorphes.*

L'immersibilité formalise rigoureusement l'idée très simple souvent ainsi informellement exprimée : « Quitte à enrichir l'espace, on peut supposer que... ».

Définition 3. — *Un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit* standard diffus *s'il existe une suite $(U_n)_{n\leqslant 0}$ de v.a. indépendantes et de lois diffuses*[(4)] *telle que, pour chaque $n \in -\mathbb{N}$, la tribu $\mathcal{F}_n$ soit engendrée par la famille $(U_m)_{m\leqslant n}$.*

Un espace probabilisé filtré est dit standard *s'il est immersible dans un espace probabilisé filtré standard diffus.*

On vérifie sans peine que deux espaces probabilisés filtrés standard diffus sont toujours isomorphes (car on peut choisir les U_n de loi uniforme sur $[0,1]$) ; il est trivial qu'un espace probabilisé filtré isomorphe à un espace probabilisé filtré standard est lui-même standard, et facile de vérifier qu'un espace probabilisé filtré immersible dans un espace probabilisé filtré standard est lui aussi standard (car l'immersibilité est transitive).

Si $(U_n)_{n\leqslant 0}$ est une suite indépendante de v.a. (de lois non nécessairement diffuses) et si $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par les U_m pour $m \leqslant n$, l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est standard. Pour établir que l'espace probabilisé filtré de l'exemple vu plus haut n'est pas engendré par un jeu de pile ou face, il suffira donc à Vershik de montrer qu'il n'est pas standard ; nous verrons plus loin comment.

Proposition 1. — *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré standard, $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ une application croissante non bornée, et $\mathcal{E}$ la filtration définie par $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_{\nu(n)}$. L'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est standard.*

Démonstration. — Pour n tel que $d = \nu(n) - \nu(n-1) \geqslant 2$, utiliser une bijection bimesurable et préservant la mesure de Lebesgue entre $[0,1]$ et $[0,1]^d$. □

Le théorème d'isomorphisme lacunaire (théorème 3 plus bas) montrera combien la réciproque à la proposition 1 est loin d'être vraie.

La proposition suivante exprime que le fait d'être standard est une propriété asymptotique au voisinage de $n = -\infty$.

(4) C'est-à-dire $\mathbb{P}[U_n = a] = 0$ pour tout réel a.

PROPOSITION 2. — *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et m un instant fixé dans $-\mathbb{N}$; on pose $\mathcal{F}_n^{m]} = \mathcal{F}_{m\wedge n}$. Si l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}^{m]}, \mathbb{P})$ est standard, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'est aussi.*

Démonstration. — Sans restreindre la généralité, on peut supposer l'existence d'un vecteur aléatoire $(U_{m+1}, ..., U_0)$ indépendant de $\mathcal{F}_m$ et de loi uniforme sur $[0,1]^{|m|}$; il suffit alors de poser $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n$ pour $n \leqslant m$ et $\mathcal{G}_n = \sigma(\mathcal{F}_m, U_{m+1}, ..., U_n)$ pour $m < n \leqslant 0$, et d'observer que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est immersible dans $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, qui est lui-même standard. □

Remarque. — La proposition 2 reste vraie si l'on y remplace l'instant fixe m par un temps d'arrêt, c'est-à-dire une variable aléatoire N à valeurs dans $-\mathbb{N}$ (la valeur $-\infty$ est interdite !) telle que, pour chaque $n \in -\mathbb{N}$, l'événement $\{N = n\}$ soit dans $\mathcal{F}_n$.

2. LE CRITÈRE DE VERSHIK

Avant de pouvoir énoncer la condition nécessaire et suffisante donnée par Vershik pour qu'un espace probabilisé filtré soit standard, il nous faut introduire quelques no(ta)tions.

Si (K, ρ) est un espace métrique compact, l'ensemble K' de toutes les mesures de probabilités sur K est métrisable et compact pour la topologie faible (K' est inclus dans le dual de $\mathrm{C}(K)$) ; cette topologie peut être définie à l'aide de la distance ρ' donnée par

$$\rho'(\mu,\nu) = \inf_{\substack{\lambda \text{ de marges} \\ \mu \text{ et } \nu}} \int_{K\times K} \rho(k_1,k_2)\,\lambda(dk_1,dk_2) = \sup_{f \text{ contraction}} \Big[\int f\,d\mu - \int f\,d\nu\Big]\,,$$

où l'infimum porte sur toutes les probabilités λ sur le produit $K\times K$ ayant μ et ν comme marges, et le supremum sur toutes les fonctions $f : K \to \mathbb{R}$ telles que $|f(k_1) - f(k_2)| \leqslant \rho(k_1, k_2)$ pour tous k_1 et k_2 dans K.

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et (K, ρ) un espace métrique compact, nous noterons $\mathrm{L}(\mathcal{A}, K)$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence pour $\mathbb{P}$ de v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans K. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, la *loi conditionnelle sachant* $\mathcal{B}$ d'une v.a. $R \in \mathrm{L}(\mathcal{A}, K)$ est définie comme la v.a. $R' \in \mathrm{L}(\mathcal{B}, K')$ telle que, pour chaque borélien G de K, on ait $[R'(\omega)](G) = \mathbb{P}[R \in G|\mathcal{B}](\omega)$ pour presque tout ω ; nous la noterons $\mathcal{L}[R|\mathcal{B}]$.

Si maintenant $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré et (K, ρ) un espace métrique compact, pour tout $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ on peut définir de proche en proche

$$\begin{aligned} \pi_0 R &= R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)\,, \\ \pi_{-1} R &= \mathcal{L}[\pi_0 R|\mathcal{F}_{-1}] \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{-1}, K')\,, \\ \pi_{-2} R &= \mathcal{L}[\pi_{-1} R|\mathcal{F}_{-2}] \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{-2}, K'')\,, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

En appelant (K_n, ρ_n) le $|n|$-ième itéré de l'espace (K, ρ) par la transformation qui en fait (K', ρ'), on a ainsi, pour chaque $n \leqslant 0$, une variable aléatoire $\pi_n R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K_n)$, que l'on peut appeler la *prédiction itérée* de R à l'instant n.

Pour $n < -1$, cette prédiction itérée $\pi_n R$ recèle en général bien plus d'information que la simple loi conditionnelle $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_n]$: cette dernière indique seulement l'état à l'instant n des prévisions concernant la valeur prise par R, alors que $\pi_n R$ décrit aussi les prédictions quant à la façon dont ces prévisions elles-mêmes vont pouvoir évoluer au cours du temps, et ainsi de suite jusqu'au $|n|$-ième degré. Pour illustrer ceci, prenons par exemple trois v.a. indépendantes (non constantes) N, X_{-1} et X_0, telles que N prenne les valeurs -1 et 0, et que X_{-1} et X_0 aient la même loi ; supposons que $\mathcal{F}_{-2} = \sigma(N)$, $\mathcal{F}_{-1} = \sigma(N, X_{-1})$ et $\mathcal{F}_0 = \sigma(N, X_{-1}, X_0)$, et considérons la v.a. $R = X_N$. La v.a. $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{-2}]$, qui est constante, dit seulement que R est indépendante de $\mathcal{F}_{-2}$ et a même loi que X_{-1} et X_0 ; alors que la v.a. $\pi_{-2}R$, plus informative, dit que si $N = -1$, R sera entièrement dévoilée à l'instant -1, et que si $N = 0$, R sera encore complètement indéterminée à l'instant -1.

THÉORÈME 1 (Critère de Vershik). — *Pour qu'un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *soit standard, il faut et il suffit que soit satisfait le critère suivant, où* (K, ρ) *est le compact* $[0, 1]$ *muni de la distance usuelle : Pour toute v.a.* $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$*, il existe une suite* $(\mu_n)_{n \leqslant 0}$ *telle que* μ_n *soit dans* K_n *pour chaque* n*, et que* $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, \mu_n)]$ *tende vers zéro quand* $n \to -\infty$*.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}_{-\infty}$ soit grossière est que les lois conditionnelles $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_n]$ deviennent déterministes quand $n \to -\infty$; le critère de Vershik, condition bien plus forte, demande que les prédictions itérées $\pi_n R$ deviennent déterministes quand $n \to -\infty$.

Remarques. — 1) Le critère peut s'énoncer sans faire intervenir explicitement la suite déterministe des μ_n. En effet, si X est une v.a. à valeurs dans (K, ρ), appelant ξ la loi de X, ϕ la fonction $k \mapsto \mathbb{E}[\rho(X, k)]$ sur K, et dispersion de X le nombre

$$\operatorname{disp} X = \mathbb{E}[\phi \circ X] = \iint_{K \times K} \rho(k_1, k_2)\, \xi(dk_1)\, \xi(dk_2)\ ,$$

on a l'encadrement

$$\inf_{k \in K} \mathbb{E}[\rho(X, k)] \leqslant \operatorname{disp} X \leqslant 2 \inf_{k \in K} \mathbb{E}[\rho(X, k)]\ ;$$

un énoncé équivalent au critère de Vershik est donc : *pour toute v.a.* $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$*,* $\operatorname{disp} \pi_n R \to 0$ *quand* $n \to -\infty$*.*

2) Le critère reste vrai si l'on y remplace $[0, 1]$ par n'importe quel espace métrique compact infini, ou encore si l'on y remplace « pour toute R à valeurs dans $[0, 1]$ » par « pour tout (K, ρ), où K est un ensemble fini muni de la distance $\rho(k_1, k_2) = \mathbf{1}_{\{k_1 \neq k_2\}}$, et toute R à valeurs dans K ». Mais j'ignore si l'on obtient encore une condition équivalente en se restreignant aux K n'ayant que deux points, c'est-à-dire en

remplaçant les variables aléatoires R par les événements de $\mathcal{F}_0$. (C'est bien équivalent lorsqu'il existe un temps d'arrêt $N > -\infty$ et une v.a. mesurable pour $\mathcal{F}_0$, indépendante de $\mathcal{F}_N$ et de loi diffuse ; mais le cas dyadique, par exemple, échappe à cette condition.)

La nécessité du critère de Vershik (utilisée pour montrer que l'exemple vu plus haut n'est pas standard) se vérifie sans peine, au moyen des trois arguments suivants :

a) *Stabilité par immersions.* — Si $\mathcal{F}$ est immergée dans $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ et si ce dernier satisfait au critère de Vershik, il en va de même de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Cela résulte immédiatement de ce que, par immersion, les prédictions itérées $\pi_n R$ d'une v.a. R mesurable pour $\mathcal{F}_0$ sont les mêmes, qu'elles soient calculées dans la filtration $\mathcal{F}$ ou dans la filtration $\mathcal{G}$. Pour établir que tout espace standard satisfait au critère, il suffit donc de montrer que tout espace engendré par un processus $(U_n)_{n\leqslant 0}$ fait de v.a. indépendantes y satisfait. On est ainsi ramené au cas où $\mathcal{F}_n = \sigma(U_m\,,\ m \leqslant n)$.

b) *Robustesse de la prédiction.* — Si R et S sont deux v.a. mesurables pour $\mathcal{F}_0$ et à valeurs dans $K = [0,1]$, on vérifie facilement, à l'aide de la définition de ρ', l'inégalité $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, \pi_n S)] \leqslant \mathbb{E}[\rho(R,S)]$ (plus précisément, mais nous n'en aurons pas besoin, le processus $\big(\rho_n(\pi_n R, \pi_n S)\big)_{n\leqslant 0}$ est une sous-martingale). Pour montrer que $\pi_n R$ est proche d'une constante lorsque n est assez petit, cette inégalité permet de se restreindre à des R pris dans une partie dense de $\mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$.

c) *Prédiction d'une fonctionnelle des innovations.* — Comme partie dense de $\mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$, nous prendrons l'ensemble des v.a. de la forme $f(U_{n+1}, ..., U_0)$ pour un $n \leqslant 0$ et une fonction borélienne $f : \mathbb{R}^{|n|} \to K$; la densité est assurée par le classique théorème de Doob sur les martingales directes ($\mathcal{T} = \mathbb{N}$). Lorsque R est de cette forme, il est immédiat, par récurrence descendante, que, pour chaque $m \in \{n, ..., 0\}$, la prédiction itérée $\pi_m R$ est de la forme $g_m(U_{n+1}, ..., U_m)$ pour une fonction borélienne $g_m : \mathbb{R}^{m-n} \to K_m$ (c'est ici qu'intervient l'indépendance des U_ℓ). En particulier, pour $m = n$, on voit que la v.a. $\pi_n R$ est constante ; ceci reste vrai a fortiori lorsque l'on remplace n par un instant antérieur. La nécessité du critère est établie.

Il est plus ardu de montrer que le critère est suffisant ; nous allons seulement esquisser ci-dessous les grandes lignes de l'argument. Pour plus de détails, voir Vershik [24], ou [11] pour un langage plus probabiliste, ou encore Feldman-Smorodinsky [13] pour une méthode légèrement différente.

Étant données, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux sous-tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, rappelons que, pour qu'il existe une v.a. X mesurable pour $\mathcal{B}$, de loi diffuse, indépendante de $\mathcal{C}$ et telle que $\mathcal{C} \vee \sigma(X) = \mathcal{B}$ (une telle X sera appelée un *complément à $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$*), il faut et il suffit que toute v.a. V vérifiant $\mathcal{C} \vee \sigma(V) = \mathcal{B}$ ait une loi diffuse. Nous dirons en ce cas que $\mathcal{B}$ est *conditionnellement diffuse par rapport à $\mathcal{C}$* ; et un espace probabilisé filtré tel que chaque $\mathcal{F}_n$ soit conditionnellement diffuse par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$ sera dit *de type diffus.* Pour ce type d'espaces, on a une sorte de réciproque à l'inégalité du b) précédent :

LEMME 1. — *L'espace probabilisé filtré étant de type diffus, soient* $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K)$ *et* $L \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{n-1}, K')$ *deux v.a. étagées, et telles que les valeurs (dans* K'*) prises par* L *soient des probabilités (sur* K*) à supports finis. Il existe une v.a.* $S \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K)$ *vérifiant les deux égalités* $\mathcal{L}[S|\mathcal{F}_{n-1}] = L$ *et* $\mathbb{E}[\rho(R,S)] = \mathbb{E}\big[\rho'\big(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}], L\big)\big]$.

Démonstration. — Remarquer d'abord que, par compacité faible de l'ensemble des probabilités sur $K\times K$, l'infimum dans la définition de $\rho'(\mu,\nu)$ est atteint pour un certain λ ; si de plus K est fini, ce λ optimal peut être choisi fonction mesurable du couple (μ,ν).

Par hypothèse, il existe un ensemble fini $H \subset K$ tel que les valeurs prises par R soient des points de H et que les valeurs (en nombre fini) prises par L soient des probabilités à supports dans H. Choisissant $\mu = \mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega)$ et $\nu = L(\omega)$, on obtient pour presque tout ω l'existence d'une probabilité $\lambda(\omega)$ sur $H\times H$, dont la dépendance en ω est mesurable pour $\mathcal{F}_{n-1}$, et qui vérifie

$$\sum_{k\in H} \lambda(\omega,\ .\ ,k) = \mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega) \qquad \sum_{h\in H} \lambda(\omega,h,\ .\ ) = L(\omega)$$

et
$$\sum_{(h,k)\in H\times H} \rho(h,k)\,\lambda(\omega,h,k) = \rho'\big(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega), L(\omega)\big)\ .$$

Posons $\Sigma(\omega) = \sum\limits_{k\in H} \lambda\big(\omega, R(\omega), k\big) = \sum\limits_{h\in H} \mathbf{1}_{\{R=h\}}\,\mathbb{P}[R{=}h|\mathcal{F}_{n-1}]$. De

$$\mathbb{P}[\Sigma = 0 \text{ et } R = h|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]\ \mathbf{1}_{\{\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]=0\}} = 0\ ,$$

on déduit $\mathbb{P}[\Sigma = 0] = 0$ et $\Sigma > 0$ p.s. Appelons $k_1,\dots,k_p$ les points de H et pour $0 \leqslant j \leqslant p$ posons

$$Q_j(\omega) = \frac{\lambda\big(\omega,R(\omega),k_1\big) + \cdots + \lambda\big(\omega,R(\omega),k_j\big)}{\Sigma(\omega)}\ ;$$

ces v.a. sont mesurables pour $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$ et vérifient $0 = Q_0 \leqslant Q_1 \leqslant \cdots \leqslant Q_p = 1$. Mais, R étant étagée, $\mathcal{F}_n$ est conditionnellement diffuse par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$; il existe donc un complément X à $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$ dans $\mathcal{F}_n$, de loi uniforme sur $[0,1]$. Ceci permet de définir une v.a. S, mesurable pour $\mathcal{F}_n$ et à valeurs dans H, par la formule

$$S(\omega) = k_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q_{j-1}(\omega) < X(\omega) \leqslant Q_j(\omega)\ ,$$

et l'on a

$$\mathbb{P}[S=k|\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)] = \frac{\lambda\big(\omega,R(\omega),k\big)}{\Sigma(\omega)}\ ;$$

$$\mathbb{P}[R=h \text{ et } S=k|\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)] = \mathbf{1}_{\{R=h\}}\,\frac{\lambda(\omega,h,k)}{\mathbb{P}[R{=}h|\mathcal{F}_{n-1}]}\ ;$$

$$\mathbb{P}[R=h \text{ et } S=k|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]\,\frac{\lambda(\omega,h,k)}{\mathbb{P}[R{=}h|\mathcal{F}_{n-1}]} = \lambda(\omega,h,k)$$

(où tout s'annule quand le dénominateur est nul). En conséquence, la loi conditionnelle de (R,S) par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$ vaut λ. Ceci implique d'une part $\mathcal{L}[S|\mathcal{F}_{n-1}] = L$ et d'autre part

$$\mathbb{P}[\rho(R,S)|\mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{(h,k)\in H\times H} \rho(h,k)\,\lambda(h,k) = \rho'\big(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}], L\big)\ ,$$

d'où $\mathbb{P}[\rho(R,S)] = \mathbb{P}\big[\rho'\big(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}], L\big)\big]$. □

Posons $K_0^\circ = K$ et, pour tout $n<0$, appelons K_n° l'ensemble, inclus dans K_n, de toutes les probabilités portées par un nombre fini de points de K_{n+1}°. Il est facile de vérifier que, étant donné un $R\in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0,K)$, toutes les $|n|+1$ v.a. $\pi_n R$, $\pi_{n+1}R$,...,$\pi_0 R$ sont étagées si et seulement si $\pi_n R$ est étagée et à valeurs dans K_n°. Les v.a. R ayant cette propriété seront dites *étagées jusqu'à n*. Avec ces notations, en itérant $|n|$ fois le lemme 1, on obtient sans peine :

Lemme 2. — *Toujours en supposant que l'espace est de type diffus, soient $n\in -\mathbb{N}$, $R\in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0,K)$ et $L\in\mathrm{L}(\mathcal{F}_n,K_n^\circ)$; on suppose en outre L étagée. Il existe une v.a. $S\in\mathrm{L}(\mathcal{F}_0,K)$, étagée jusqu'à n, telle que $\pi_n S = L$ et que $\mathbb{E}[\rho(R,S)] = \mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, L)]$.*

Ceci a lieu dans tout espace probabilisé filtré de type diffus. Pour montrer que le critère de Vershik est suffisant, supposons-le satisfait, et cherchons à établir que l'espace est standard. Quitte à immerger $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ dans un espace plus gros, nous devons construire un processus engendrant la filtration et formé de v.a. indépendantes. En faisant un produit, c'est-à-dire un grossissement indépendant, par « l' » espace probabilisé filtré standard diffus, et en vérifiant que le critère est stable par de tels produits, on se ramène au cas où $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est de type diffus.

Pour $R\in\mathrm{L}(\mathcal{F}_0,K)$ et $\varepsilon>0$, nous savons par hypothèse qu'il existe un $n\leqslant 0$ et un $\mu\in K_n$ tels que $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R,\mu)]<\varepsilon$. Il est immédiat de vérifier que K_n° est dense dans K_n ; on peut donc choisir μ dans K_n°. En prenant la v.a. constante $L=\mu$ dans le lemme 2, on obtient une $S\in\mathrm{L}(\mathcal{F}_0,K)$ telle que $\pi_n S$ soit déterministe, que $\pi_{n+1}S$, ..., $\pi_0 S$ soient étagées, et que $\mathbb{E}\big[|S-R|\big]<\varepsilon$. Puisque chaque $\pi_\ell S$ est étagée, il existe pour tout $\ell\in\{n{+}1,\ ...,\ 0\}$ un complément X_ℓ à $\mathcal{F}_{\ell-1}\vee\sigma(\pi_\ell S)$ dans $\mathcal{F}_\ell$. On peut définir une filtration $\mathcal{E}$ en prenant $\mathcal{E}_\ell$ grossière pour $\ell\leqslant n$, et

$$\mathcal{E}_\ell = \sigma\big(\pi_{n+1}S, X_{n+1}, \pi_{n+2}S, X_{n+2},\ ...,\ \pi_\ell S, X_\ell\big) \qquad \text{pour } \ell > n\,;$$

on montre que $\mathcal{F}_n\vee\mathcal{E}_\ell=\mathcal{F}_\ell$ pour tout $\ell\geqslant n$, que $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{F}_n$ sont indépendantes, et donc que $\mathcal{E}$ est immergée dans $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Pour $\ell\in\{n{+}1,\ ...,\ 0\}$ il existe un complément U_ℓ à $\mathcal{E}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{E}_\ell$; nécessairement, U_ℓ est aussi un complément à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$. Puisque S est mesurable pour $\mathcal{E}_0$, elle est fonction borélienne de $U_{n+1},\ ...,\ U_0$; il est donc établi que *les v.a. de la forme $f(U_{n+1},\ ...,\ U_0)$, où f est borélienne, n dans $-\mathbb{N}$, et chaque U_ℓ un complément à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$, sont denses dans* L^1.

Si en outre R est étagée, à valeurs dans une partie finie F de K, en remplaçant f par $g\circ f$, où $g:K\to F$ est l'identité sur F et est continue en tout point de F,

on obtient l'existence d'une S de la forme ci-dessus, et proche de R au sens fort où $\mathbb{P}[S \neq R] < \varepsilon$.

Supposons maintenant donnés $n \in -\mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, des compléments U_{n+1}, ..., U_0 comme ci-dessus, et une v.a. $R \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}_0)$. En raison de la séparabilité essentielle, il existe une suite croissante $(\mathcal{F}_n^k)_{k\geqslant 0}$ de sous-tribus essentiellement finies de $\mathcal{F}_n$ telle que $\bigvee_k \mathcal{F}_n^k = \mathcal{F}_n$; par un théorème de Doob, R est donc approchable dans L^1 par des v.a. de la forme $\phi(T, U_{n+1}, ..., U_0)$ où T est étagée et mesurable pour $\mathcal{F}_n$. En appliquant la remarque précédente à T au lieu de R et à la filtration décalée $(\mathcal{F}_m)_{m\leqslant n}$, on obtient l'existence de T', mesurable pour $\mathcal{F}_n$, telle que $\mathbb{P}[T' \neq T] < \varepsilon$ et qui soit de la forme $T' = \psi(V_{m+1}, ..., V_n)$, où $m < n$ et où les V_ℓ sont respectivement des compléments à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$. Il s'ensuit que R est approchable par $\phi\big(\psi(V_{m+1}, ..., V_n), U_{n+1}, ..., U_0\big)$. Résumons : *$U_{n+1}$, ..., U_0 étant donnés, on obtient une partie dense de $\mathrm{L}^1(\mathcal{F}_0)$ en considérant les v.a. de L^1 qui sont de la forme $h(V_{m+1}, ..., V_n, U_{n+1}, ..., U_0)$, où h est borélienne, $m < n$ et, où V_ℓ est un complément à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$ pour $m < \ell \leqslant n$.*

Pour terminer la démonstration, considérons une v.a. intégrable R qui engendre la tribu $\mathcal{F}_0$. En partant par exemple de $n_0 = -1$ et d'un complément U_0 à $\mathcal{F}_{-1}$ dans $\mathcal{F}_0$, l'étape précédente permet de construire de proche en proche une suite strictement décroissante $(n_k)_{k\geqslant 0}$ et des compléments U_ℓ à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$ tels que, pour chaque k, R soit à distance au plus $1/k$ d'un élément de $\mathrm{L}^1\big(\sigma(U_\ell\,,\ n_k < \ell \leqslant 0)\big)$. Il en résulte que R est mesurable pour la tribu limite $\sigma(U_\ell\,,\ \ell \in -\mathbb{N})$; et $\mathcal{F}_0$, engendrée par R, l'est aussi par les U_ℓ. Enfin, la filtration $\mathcal{F}'$ engendrée par les U_ℓ est immergée dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifie ${\mathcal{F}_0}' = \mathcal{F}_0$; ces deux propriétés suffisent à entraîner que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est donc standard. □

Comme nous l'avons dit plus haut, ce critère est utilisable en pratique, puisqu'il permet de vérifier que l'exemple donné dans la section 1 n'est pas standard. Une autre situation, non fabriquée ad hoc, où le critère fait la preuve de son efficacité, est le problème « T, T^{-1} », résolu par D. Heicklen et C. Hoffman [15] : Si T est un automorphisme d'un espace probabilisé $(E, \mathcal{E}, \mu)$, et si l'entropie de T n'est pas nulle, le processus de Markov à valeurs dans E, de loi stationnaire μ et de probabilités de transition $p(x, .) = \frac{1}{2}(\delta_{Tx} + \delta_{T^{-1}x})$ engendre un espace probabilisé filtré qui n'est pas standard.

Dans la même veine que le critère, voici un autre résultat également emprunté à Vershik [24] :

THÉORÈME 2. — *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré ; pour chaque $n \leqslant 0$, supposons $\mathcal{F}_n$ engendrée par $\mathcal{F}_{n-1}$ et par une v.a. indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$, de loi soit diffuse, soit uniforme sur un ensemble fini. Alors $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est standard (si et) seulement s'il est engendré par un processus formé de v.a. indépendantes.*

Pour la démonstration, nous renvoyons à Vershik [24]. Il ne la donne complètement que dans le cas où aucune des lois n'est diffuse ; mais dans le cas général les instants n

pour lesquels $\mathcal{F}_n$ admet une v.a. diffuse indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$ se traitent facilement par les mêmes arguments que plus haut. Une variante de sa méthode est proposée par J. Feldman et M. Smorodinsky ([13], théorème 3.2).

Dans le theorème 2, on ne peut se passer de l'hypothèse d'uniformité des lois. Un contre-exemple très simple est fourni par un processus de Markov stationnaire $(X_n)_{n\leqslant 0}$ ne prenant que deux valeurs, tel que $\mathbb{P}[X_n = X_{n-1}] = p$, où $p \in]0,1[$ est fixé et différent de $\frac{1}{2}$. Par un argument de couplage, le critère de confort-I, dont nous parlerons en fin d'exposé, entraîne facilement que l'espace probabilisé filtré engendré par X est standard. Mais cet espace ne peut pas être engendré par un processus formé de v.a. indépendantes, car les deux seuls événements de $\mathcal{F}_n$ non dégénérés et indépendants de $\mathcal{F}_{n-1}$ sont $\{X_n = X_{n-1}\}$ et $\{X_n = X_{n-1}\}$ (c'est ici qu'intervient la restriction $p \neq \frac{1}{2}$), et la tribu engendrée par tous les événements de ce type est indépendante de la v.a. X_0 (échanger les deux points de l'espace d'états), donc strictement incluse dans $\mathcal{F}_0$.

Au premier abord, la théorie de Vershik est surprenante, et l'existence d'espaces filtrés non standard inattendue. Une fois habitué, et quelques exemples assimilés, on fait face à un deuxième choc, le théorème d'isomorphisme lacunaire, selon lequel un espace probabilisé filtré non standard peut toujours être rendu standard par un changement de temps adéquat.

THÉORÈME 3 (d'isomorphisme lacunaire). — *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré tel que la tribu initiale* $\mathcal{F}_{-\infty}$ *soit grossière. Il existe une application strictement croissante* $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ *telle que, si l'on pose* $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\nu(n)}$, *l'espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *soit standard.*

La démonstration de cet étonnant résultat est assez semblable à celle du théorème 1 plus haut ; on ne dispose plus de la puissante hypothèse qu'est le critère, mais l'on sait que toutes les martingales convergent à $-\infty$, et l'on peut à volonté accélérer cette convergence en regroupant l'innovation par paquets, qui correspondront à des intervalles $]\nu(n-1), \nu(n)]$. Pour les détails, voyez Vershik [24] ou [11].

3. CHANGEMENTS NON STANDARD DE PROBABILITÉS

À partir d'ici, nous abandonnons la convention selon laquelle l'axe des temps $\mathcal{T}$ est toujours $-\mathbb{N}$: nous rencontrerons aussi le cas où $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$; nous préciserons donc explicitement, lorsque le contexte sera ambigu, l'axe des temps utilisé, en parlant de *temps continu* quand $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ et de *temps discret* quand $\mathcal{T} = -\mathbb{N}$; les instants seront notés m ou n en temps discret et s ou t en temps continu.

Nous appellerons *espace de Wiener* l'espace probabilisé filtré (à temps continu) engendré par un mouvement brownien.

En 1995, L. Dubins, Feldman, Smorodinsky et Tsirelson [8] et [14] ont utilisé le critère de Vershik pour construire, sur l'espace de Wiener, des probabilités aux propriétés étranges. Leur construction commence avec un jeu de pile ou face infini $(X_n)_{n\leqslant 0}$ et l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qu'il engendre. Au moyen d'une martingale de densités $(D_n)_{n\leqslant 0}$ markovienne par blocs (avec des blocs de plus en plus gros au voisinage de $-\infty$), ils parviennent à définir une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, vérifiant même $1-\varepsilon < d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = D_0 < 1+\varepsilon$, et cependant telle que l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ ne soit pas standard ! Très compliquée, leur construction n'est pas explicite (« tel ensemble ayant une mesure non nulle, on peut y choisir un point... ») ; malgré deux tentatives [18] et [4] pour la simplifier un peu, l'argument reste assez indigeste. Par contre, transférer le résultat du jeu de pile ou face vers le mouvement brownien ne pose pas de difficultés : Étant donné un mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour une probabilité $\overline{\mathbb{P}}$, on choisit dans $\mathbb{R}_+$ une suite strictement croissante $(t_n)_{n\leqslant 0}$, et il suffit de définir la densité $d\overline{\mathbb{Q}}/d\overline{\mathbb{P}}$ comme $\phi\big(\mathrm{sgn}(B_{t_n}-B_{t_{n-1}})\ ,\ n\leqslant 0\big)$, où la fonction ϕ est celle qui définit $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ à partir des X_n pour le jeu de pile ou face : $D_0 = \phi(X_n\ ,\ n\leqslant 0)$.

Historiquement, cette construction de Dubins, Feldman, Smorodinsky et Tsirelson a été le premier exemple fournissant la réponse (négative) à une question posée par M. Yor [27] en 1979 : Appelons *faiblement brownien* un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que la filtration $\mathcal{F}$ possède la propriété de représentation prévisible par rapport à un mouvement brownien ; ceci signifie que $\mathcal{F}_0$ est grossière et que toutes les martingales sont des intégrales stochastiques par rapport à ce mouvement brownien ; c'est l'analogue en temps continu d'un espace probabilisé filtré à temps discret dyadique et asymptotiquement grossier. Tout espace probabilisé filtré faiblement brownien est-il engendré par un mouvement brownien ?

En fait, une fois que l'on a à sa disposition la théorie de Vershik, et si l'on ne s'intéresse pas aux changements de probabilités mais seulement à la question de Yor, l'argument de transfert du jeu de pile ou face vers le mouvement brownien fournit très facilement des exemples bien plus simples, de la façon suivante.

On se donne, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux objets indépendants : un mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$, et une filtration à temps discret $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leqslant 0}$ telle que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soit non standard, mais dyadique et asymptotiquement grossier (l'exemple de Vershik donné plus haut, avant la définition des espaces standard, fait parfaitement l'affaire). Il existe des v.a. $(X_n)_{n\leqslant 0}$ telles que X_n soit indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$, prenne les valeurs 1 et -1 avec même probabilité $\frac{1}{2}$, et que $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(X_n)$. On se donne aussi, dans $\mathbb{R}_+$, une suite strictement croissante $(t_n)_{n\leqslant 0}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $-\infty$; en remarquant que l'ensemble des v.a. $X'_n = X_n\ \mathrm{sgn}(B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ est indépendant de B, on définit un nouveau mouvement brownien $(B'_t)_{t\geqslant 0}$ par

$$B'_t = B'_{t_{n-1}} + X'_n(B_t - B_{t_{n-1}})$$

si t est dans l'intervalle $I_n =]t_{n-1}, t_n]$ pour un $n \leqslant 0$, et par $B'_t = B'_{t_0} + (B_t - B_{t_0})$ si $t \in]t_0, +\infty[$; remarquer que le signe de l'accroissement $B'_{t_n} - B'_{t_{n-1}}$ est X_n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les filtrations (à temps continu) engendrées par B et B'. On peut définir une filtration à temps continu $\mathcal{G}$ par $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{n(t)} \vee \mathcal{B}'_t$, où $n(t)$ est le plus grand n tel que $t_n \leqslant t$; observer que l'on a aussi $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_n \vee \mathcal{B}'_t$ pour chaque n tel que $t_n \leqslant t$. Comme les accroissements de B' dans l'intervalle I_n sont fonction de X_n et des accroissements de B dans I_n, ils sont indépendants de $\mathcal{F}_{n-1} \vee \mathcal{B}_{t_{n-1}}$ et a fortiori de $\mathcal{G}_{t_{n-1}}$. Comme, par définition de $\mathcal{G}$, on a

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t_{n-1}} \vee \sigma\big(B'_s - B'_{t_{n-1}},\ s \in]t_{n-1}, t]\big) \qquad \text{pour } t \in]t_{n-1}, t_n],$$

B' est un mouvement brownien pour $\mathcal{G}$; comme en outre $\mathcal{G}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{B}_0$ est grossière, $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ jouit de la propriété de représentation prévisible par rapport à B', et est donc faiblement brownien. Et cependant $\mathcal{G}$ ne saurait être engendrée par aucun mouvement brownien (ni même aucun processus dont les accroissements sur les I_n sont mutuellement indépendants), puisque la filtration à temps discret $\mathcal{F}$, qui n'est pas standard, est immergée dans l'espace probabilisé filtré à temps discret $\big(\Omega, (\mathcal{G}_{t_n})_{n \leqslant 0}, \mathbb{P}\big)$, qui n'est donc pas standard non plus.

Avant de quitter cette section, signalons encore un autre contre-exemple, qui touche à une question voisine : Partant de l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et effectuant des changements de temps suffisamment réguliers, obtient-on un espace isomorphe à l'espace initial ? Inspirée des idées de Dubins, Feldman, Smorodinsky et Tsirelson, mais beaucoup plus simple que leur changement de probabilité, une construction faite dans [9] donne une famille $(T_t)_{t \geqslant 0}$ de temps d'arrêt de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, vérifiant les propriétés suivantes : chaque fonction $t \mapsto T_t(\omega)$ est C^∞ et de dérivée dT_t/dt vérifiant $1 - \varepsilon < dT_t/dt < 1 + \varepsilon$; et cependant la filtration changée de temps $(\mathcal{F}_{T_t})_{t \geqslant 0}$ n'est engendrée par aucun mouvement brownien. Ici encore, la construction s'effectue d'abord en temps discret, et est seulement ensuite transférée au cadre brownien.

4. CONFORT ET POINTS TRIPLES

Revenons à la question de Yor mentionnée dans la section précédente. Depuis 1988, M. Barlow, J. Pitman et Yor [3] soupçonnaient que les processus de Walsh y fournissent un contre-exemple. Ce sont des processus dont la filtration est faiblement brownienne, et ces auteurs conjecturaient qu'elle n'est pas engendrée par un mouvement brownien.

Le processus de Walsh le plus simple est une sorte de mouvement brownien à valeurs dans une (é)toile à trois rayons $T = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^3 \in \mathbb{R}_+\}$; sa distance à l'origine est (en loi) la même que pour un mouvement brownien usuel, mais les excursions hors de l'origine, au lieu d'être affectées comme d'habitude de signes ± 1 indépendants, choisissent leur direction indépendamment, et uniformément, parmi les trois rayons

de la toile. L'idée de Barlow, Pitman et Yor était que le choix entre trois possibilités (les trois rayons), effectué par le processus aux instants aléatoires où il quitte l'origine, est impossible dans une filtration brownienne. Plus précisément, on sait définir une classe d'instants aléatoires, les *temps honnêtes*[5], tels que les débuts d'excursions aient lieu à de tels instants ; et si L est un temps honnête, il y a deux tribus, $\mathcal{F}_L$ et $\mathcal{F}_{L+}$, qui représentent respectivement les événements connus à l'instant L et ceux connus juste après L, et qui vérifient toujours $\mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_{L+}$. Dans le cas où la filtration $\mathcal{F}$ abriterait un processus de Walsh W, en notant L le temps honnête égal au dernier instant avant 2001 où W passe à l'origine, $\mathcal{F}_{L+}$ devrait contenir une v.a. à *trois* valeurs (le rayon choisi pour quitter l'origine, c'est-à-dire celui où se trouve le point W_{2001}) indépendante de $\mathcal{F}_L$. La stratégie que proposaient Barlow, Pitman et Yor consiste à montrer que si L est n'importe quel temps honnête dans une filtration $\mathcal{F}$ engendrée par un mouvement brownien, $\mathcal{F}_{L+}$ est engendrée par $\mathcal{F}_L$ et par une v.a. ne prenant que *deux* valeurs ; cette propriété, appelée « conjecture de Barlow » par Yor [28], rendrait impossible l'existence dans $\mathcal{F}_{L+}$ d'une v.a. trivaluée indépendante de $\mathcal{F}_L$, et, par là même, d'un processus de Walsh dans $\mathcal{F}$.

Une bonne partie de ce programme a été menée à bien par Tsirelson en 1996 : en introduisant une idée radicalement nouvelle, le *confort,* il a démontré dans [20] que les processus de Walsh ne peuvent être immergés dans la filtration engendrée par un mouvement brownien, fût-il de dimension plus grande que 1, ou même infinie. Une des nouveautés essentielles de son approche est qu'il ne travaille pas sur *un* processus de Walsh supposé vivre dans *une* filtration brownienne, mais qu'il considère simultanément *deux* copies de cette situation, qui soient très proches (condition (iv) de la définition 6 ci-dessous), mais en même temps un tout petit peu indépendantes (condition (iii)).

DÉFINITION 4. — *En temps discret ou continu, on dit que deux filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sont* co-immergées *si elles sont toutes deux immergées dans une même troisième.*

Il est facile de voir qu'en ce cas, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont toutes deux immergées dans la plus petite filtration qui les contient toutes deux.

DÉFINITION 5. — *En temps continu, on dit que deux filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et co-immergées, sont* séparées *s'il existe une constante $c < 1$ telle que, pour toute martingale M pour $\mathcal{F}$ et toute martingale N pour $\mathcal{G}$, on ait*

$$[M, N]^2 \leqslant c\,[M, M]\,[N, N]\,.$$

[5] Ce sont exactement les fins des ensembles optionnels.

Sans la constante c, ce serait l'inégalité de Kunita-Watanabe usuelle ; la constante vient renforcer l'inégalité, de façon uniforme pour toutes les martingales de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Noter que la condition de co-immersion donne un sens à la formule : le calcul de la covariation $[M,N]$ se fait dans une filtration commune, qui est celle dans laquelle $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont immergées. Nous n'utiliserons cette définition que dans le cas où toutes les martingales de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont continues — c'est la situation que considérait Tsirelson lorsqu'il a inventé cette notion — ; elle s'interprète alors comme une sorte d'indépendance partielle, l'indépendance étant obtenue pour $c=0$.

Définition 6. — *En temps continu, on dit qu'un espace probabilisé filtré* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *est* confortable *si, pour toute v.a.* $R\in \mathrm{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$ *et tout* $\varepsilon>0$*, il existe un espace probabilisé* $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathbb{P}})$ *pourvu de deux filtrations* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *telles que*

(i) *les trois espaces probabilisés filtrés* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $(\overline{\Omega},\mathcal{F}',\overline{\mathbb{P}})$ *et* $(\overline{\Omega},\mathcal{F}'',\overline{\mathbb{P}})$ *sont isomorphes ;*

(ii) *les deux filtrations* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *sont co-immergées ;*

(iii) *les deux filtrations* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *sont séparées* (la constante de séparation c pouvant bien entendu dépendre de R et ε) ;

(iv) *les deux v.a.* $R'\in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}'_\infty)$ *et* $R''\in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}''_\infty)$*, respectivement obtenues à partir de* R *par les isomorphismes de la condition* (i)*, vérifient* $\overline{\mathbb{E}}\big[|R'-R''|\big]<\varepsilon$.

Ceci signifie que l'on peut faire vivre ensemble (ii) deux copies (i) de l'espace, tout à la fois proches (iv) et un peu indépendantes (iii). La démarche de Tsirelson consiste à établir que les espaces probabilisés filtrés engendrés par des mouvements browniens (pouvant être multidimensionnels) sont toujours confortables, alors que l'espace probabilisé filtré engendré par un processus de Walsh n'est jamais confortable. Il en résultera qu'un processus de Walsh ne peut engendrer le même espace qu'un mouvement brownien. Plus précisément, comme tout espace probabilisé filtré immergé dans un espace probabilisé filtré confortable l'est aussi (cela résulte facilement de la définition 6), l'espace engendré par un processus de Walsh n'est immersible dans aucun espace engendré par un mouvement brownien.

La première étape de Tsirelson est donc celle-ci :

Théorème 4. — *Un espace probabilisé filtré engendré par un mouvement brownien est toujours confortable.*

Démonstration. — Prendre deux copies indépendantes B^0 et $B^{\pi/2}$ du brownien générateur, et considérer l'espace probabilisé filtré $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbb{P}})$ engendré par le couple $(B^0,B^{\pi/2})$. Pour tout réel α, le processus $B^\alpha=B^0\cos\alpha+B^{\pi/2}\sin\alpha$ est un mouvement brownien dans $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbb{P}})$; la filtration $\mathcal{F}^\alpha$ qu'il engendre est donc immergée dans cet espace. Si $\alpha-\beta$ n'est pas multiple de π, $\mathcal{F}^\alpha$ et $\mathcal{F}^\beta$ sont séparées, avec constante $c=\cos^2(\alpha-\beta)<1$, car l'inégalité de Kunita-Watanabe renforcée, vraie pour les mouvements browniens B^α et B^β, s'étend aux autres martingales par représentation prévisible.

Pour conclure, il ne reste qu'à établir que, étant donnée une fonctionnelle bornée R^0 de B^0, la copie R^α de R^0 dans la filtration $\mathcal{F}^\alpha$ vérifie $\overline{\mathbb{E}}\big[|R^\alpha - R^0|\big] < \varepsilon$ pour un α assez voisin de 0 (mais non nul, pour que $\mathcal{F}^\alpha$ et $\mathcal{F}^0$ soient séparées). Cela résulte facilement du joli théorème suivant, qui semble classique chez les probabilistes russes sous le nom de « lemme de Slutsky » :

Si une suite $(Z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de v.a. ayant même loi converge en probabilité vers une limite Z_∞, et si h est une fonction borélienne, la suite $(h\circ Z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $h\circ Z_\infty$.

En effet, si l'on n'exige pas que les Z_p aient la même loi, c'est vrai pour toute h continue ; et lorsque les Z_p ont même loi, l'ensemble des h pour lesquelles c'est vrai est stable par limites simples de suites. □

La deuxième étape est tout aussi simple à énoncer que la première ; mais sa réalisation demandera bien plus d'efforts :

THÉORÈME 5. — *Si, dans un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, il existe un processus de Walsh (pour la filtration $\mathcal{F}$), cet espace n'est pas confortable.*

Éléments de démonstration. — Considérant deux copies de $\mathcal{F}$ co-immergées et séparées, on a deux processus de Walsh W' et W'' dans une même filtration. Tsirelson montre tout d'abord que les instants où W' et W'' sont tous deux à l'origine sont rares : mesuré en termes du temps local de l'un, le temps passé par l'autre à l'origine est nul. Ceci est établi par une méthode de comparaison de solutions d'inéquations aux dérivées partielles ; pour une autre démonstration (par le calcul stochastique), voir [12]. C'est ici qu'est utilisée l'hypothèse de séparation.

Tsirelson s'intéresse ensuite à la distance $D_t = d(W'_t, W''_t)$, mesurée sur la toile T. Le processus D est une sous-martingale, dont le compensateur ne croît que lorsque W' et W'' sont égaux, ou que l'un au moins d'entre eux est à l'origine. Le résultat du paragraphe précédent permet de minorer ce compensateur par une somme de termes de temps locaux de W' et W'' à l'origine, qui se calculent séparément ; on obtient ainsi $\overline{\mathbb{E}}[D_t] \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{2t/\pi}$ (si l'on remplaçait T par une toile à r rayons au lieu de 3, le coefficient $\frac{1}{3}$ deviendrait $\frac{r-2}{r}$, et le théorème subsisterait pourvu que $r > 2$).

Enfin, la minoration ci-dessus, universelle et indépendante en particulier de la constante de séparation c, montre que les v.a. complexes W'_t et W''_t ne sont pas proches, et empêche que ne soit satisfaite la condition (iv) de la définition 6 : l'espace ne peut être confortable. □

En appliquant les mêmes méthodes à des processus à valeurs dans T un peu plus généraux (les « semimartingales-araignées », qui sont les semimartingales continues, de compensateur porté par l'ensemble des instants où le processus est à l'origine), Tsirelson établit, sous l'hypothèse de confort, la formule $dL_1 \wedge dL_2 \wedge dL_3 = 0$, où L_i est le temps local à l'origine du processus projeté sur le i-ième rayon. Soient maintenant U_1, U_2 et U_3 trois ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$, deux-à-deux disjoints. En choisissant comme

semimartingale-araignée le processus $(G_1 \circ B, G_2 \circ B, G_3 \circ B)$, où G_i est une fonction de Green dans U_i et B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, il obtient $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 = 0$, où μ_i est « la » mesure harmonique sur la frontière de U_i (seule la classe d'équivalence de μ_i est intrinsèquement définie). Ce résultat selon lequel, en dimension d quelconque, les frontières harmoniques ont fort peu de points triples, avait été conjecturé par C. Bishop [5] en 1991 (en dimension $d = 3$ on savait seulement que la multiplicité est $\leqslant 4$, et, en grandes dimensions, $\leqslant 10$). En donner une démonstration non probabiliste est, selon Tsirelson [21], « a challenge for classical analysis ! ».

En utilisant les outils introduits par Tsirelson, mais avec une définition du confort légèrement modifiée, la conjecture de Barlow a été complètement établie dans [2] (voir aussi [6] pour une simplification). L'idée est ici, partant d'un temps honnête L tel que $\mathcal{F}_{L+}$ ne soit pas engendrée par $\mathcal{F}_L$ et par une v.a. à deux valeurs, de construire une martingale à valeurs dans T (une « martingale-araignée ») quittant l'origine à l'instant L, et de lui faire ensuite subir les traitements infligés par Tsirelson aux processus de Walsh, pour montrer que l'espace ne peut être confortable.

Le confort, ou plutôt son absence, a également été utilisé par S. Watanabe [26] pour montrer qu'une certaine diffusion dans le plan, symétrique pour la mesure de Lebesgue et de probabilités de transition continues, introduite par Ikeda et lui-même en 1971, ne peut pas non plus s'immerger dans un espace de Wiener. Ce processus se déplace de façon brownienne dans le plan ; lorsqu'il rencontre les rayons de la toile T, il s'agite aussi de façon brownienne le long du rayon, à une vitesse beaucoup plus rapide (réglée par le temps local de la composante normale au rayon) ; lorsqu'il est à l'origine, ce qui se produit de façon récurrente, son comportement est régi par une loi d'excursions explicite. Watanabe montre qu'aux instants où le processus quitte l'origine, la conjecture de Barlow est violée ; d'où le résultat.

Dans le même article, il en déduit que le « mouvement brownien gluant » (mouvement brownien réel ralenti lorsqu'il passe en 0 de façon à faire coïncider son temps local avec le temps ordinaire passé en 0) n'est pas confortable non plus. L'argument consiste simplement à remarquer qu'à changement de temps près, deux mouvements browniens gluants indépendants forment une diffusion du type vu précédemment, la toile (à quatre rayons) étant formée des deux axes.

Ce dernier résultat est aussi obtenu, indépendamment, par Warren [25], en étudiant directement deux copies co-immergées de ce processus. (Mais ma fille soutient que sans étudier les mathématiques, tout le monde sait que rien de gluant ne peut être confortable.)

Nous avons vu que, pour prouver la conjecture de Barlow, la définition du confort a dû être modifiée ; voici, pour terminer, une autre variation sur cette notion, qui fournit un lien entre critère de Vershik et confort. Revenons en temps discret, les filtrations

étant indexées par $-\mathbb{N}$, et reprenons la définition 6, en y remplaçant bien sûr $\mathcal{F}_\infty$ par $\mathcal{F}_0$, mais aussi la condition (iii) par

(iii′) *il existe un* $n \in -\mathbb{N}$ *tel que les tribus* $\mathcal{F}'_n$ *et* $\mathcal{F}''_n$ *soient indépendantes sous* $\overline{\mathbb{P}}$.

La propriété obtenue est appelée *confort-I* (le I signifie indépendance) ; elle a été utilisée, sans être explicitement définie, par Smorodinsky [19], comme condition nécessaire pour que l'espace probabilisé filtré soit standard ; et cette condition nécessaire se trouve être aussi suffisante [11]. Elle fournit ainsi un substitut au critère de Vershik (qui est d'ailleurs mis à contribution pour montrer qu'elle est suffisante).

Un intérêt du confort-I est d'être parfois plus simple à mettre en œuvre que le critère de Vershik, parce que l'on n'a pas à calculer dans un espace métrique dépendant de n ; l'exemple donné juste après le théorème 2 en est une illustration. Mais le confort-I donne aussi un nouvel éclairage au concept d'espace standard, par le lien qu'il établit avec la notion de *couplage*. Le couplage consiste à faire évoluer simultanément deux versions d'un même processus, de conditions initiales différentes, en cherchant à maximiser leur probabilité de rencontre ; c'est une méthode familière aux probabilistes pour obtenir des estimations en loi (voir le traité de Lindvall [16] ou l'exposé de Diaconis [7]). L'analogie avec le confort-I saute aux yeux : si la filtration $\mathcal{F}$ est engendrée par un processus X, la condition (iii′) dit que jusqu'à un instant passé n on disposait de deux copies indépendantes X' et X'' de X, la condition (ii) dit qu'après n les deux processus évoluent conjointement, et (iv), qu'à la fin, les deux copies donnent à une certaine fonctionnelle de X des valeurs proches. Pour un exemple éclairant sur ce que le couplage peut apporter à l'étude des filtrations, voir la démonstration par Arnaudon [1] du fait que le mouvement brownien sur une variété compacte à d dimensions en temps éternel (l'axe des temps est $\mathbb{R}$) a une filtration brownienne à d dimensions, ou [10] pour le cas, plus simple, où la variété est une sphère.

Une question stimulante pour les travaux à venir me paraît être la recherche d'un analogue, en temps continu, de la théorie de Vershik : comprendre ce qui fait qu'un espace probabilisé filtré est, ou n'est pas, isomorphe à l'espace de Wiener (qui devrait être un analogue, en temps continu, de l'espace probabilisé filtré standard dyadique).

Les progrès actuels à cet égard sont de deux types : d'une part, de plus en plus de bruits stochastiques continus, autres que les bruits blancs, sont définis et explorés par Tsirelson [22] et [23]. D'autre part, les démonstrations du fait qu'une filtration donnée est engendrée par un mouvement brownien sont de moins en moins explicitement constructives (voyez M. Malric [17]).

Mais, pour impressionnantes que soient les avancées de ces dernières années, bien du chemin reste à parcourir. La question posée par Yor il y a vingt ans reste d'actualité, une fois précisée et reformulée à la lumière des connaissances actuelles :

Si un espace probabilisé filtré faiblement brownien est immersible dans l'espace de Wiener, est-il nécessairement isomorphe à l'espace de Wiener (c'est-à-dire engendré par un mouvement brownien)?

RÉFÉRENCES

[1] M. Arnaudon – *La filtration du mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}$ dans une variété compacte.* Séminaire de Probabilités xxxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 304–314, 1999.

[2] M. Barlow, M. Émery, F. Knight, S. Song & M. Yor – *Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non browniennes.* Séminaire de Probabilités xxxii, Springer Lecture Notes in Math. 1686, 264–305, 1998.

[3] M. Barlow, J. Pitman & M. Yor – *On Walsh's Brownian motions.* Séminaire de Probabilités xxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1372, 275–293, 1989.

[4] S. Beghdadi-Sakrani & M. Émery – *On certain probabilities equivalent to coin-tossing, d'après Schachermayer.* Séminaire de Probabilités xxxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 240–256, 1999.

[5] C. Bishop – *A characterization of Poissonian domains.* Ark. Mat. 29, 1–24, 1991.

[6] B. De Meyer – *Une simplification de l'argument de Tsirelson sur le caractère non-brownien des processus de Walsh.* Séminaire de Probabilités xxxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 217–220, 1999.

[7] P. Diaconis – *From shuffling cards to walking around the building : an introduction to modern Markov chain theory.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math., Extra Vol. I, 187–204, 1998.

[8] L. Dubins, J. Feldman, M. Smorodinski & B. Tsirelson – *Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion.* Ann. Prob. 24, 882–904, 1996.

[9] M. Émery & W. Schachermayer – *Brownian filtrations are not stable under equivalent time-changes.* Séminaire de Probabilités xxxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 267–276, 1999.

[10] M. Émery & W. Schachermayer – *A remark on Tsirelson's stochastic differential equation.* Séminaire de Probabilités xxxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 291–303, 1999.

[11] M. Émery & W. Schachermayer – *On Vershik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness.* Séminaire de Probabilités xxxv, à paraître.

[12] M. Émery & M. Yor – *Sur un théorème de Tsirelson relatif à des mouvements browniens corrélés et à la nullité de certains temps locaux.* Séminaire de Probabilités xxxii, Springer Lecture Notes in Math. 1686, 306–312, 1998.

[13] J. Feldman & M. Smorodinski – *Decreasing sequences of measurable partitions : product type, standard, and prestandard.* Ergodic Theory and Dynamical Systems 20, 1079–1090, 2000.

[14] J. Feldman & B. Tsirelson – *Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion II.* Ann. Prob. 24, 905–911, 1996.

[15] D. Heicklen & C. Hoffman – *T, T^{-1} is not standard.* Ergodic Theory and Dynamical Systems 18, 875–878, 1998.

[16] T. Lindvall – *Lectures on the Coupling Method.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, 1992.

[17] M. Malric – *Filtrations quotients de la filtration brownienne.* Séminaire de Probabilités xxxv, à paraître.

[18] W. Schachermayer – *On certain probabilities equivalent to Wiener measures, d'après Dubins, Feldman, Smorodinsky and Tsirelson.* Séminaire de Probabilités xxxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 221–239, 1999.

[19] M. Smorodinski – *Processes with no standard extension.* Israel J. Math. 107, 327–331, 1998.

[20] B. Tsirelson – *Triple points : From non-Brownian filtrations to harmonic measures.* GAFA, Geom. funct. anal. 7, 1096–1142, 1997.

[21] B. Tsirelson – *Within and beyond the reach of Brownian innovation.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math., Extra Vol. III, 311–320, 1998.

[22] B. Tsirelson – *Toward stochastic analysis beyond the white noise.* Prépublication. `http://www.math.tau.ac.il/~tsirel/Research/Recent/toward.html`

[23] B. Tsirelson – *Noise sensitivity on continuous products : an answer to an old question of J. Feldman.* Prépublication. `http://www.math.tau.ac.il/~tsirel/Research/Recent/products.html`

[24] A. M. Vershik – *Approximation in measure theory.* Thèse de doctorat, Leningrad 1973. Version anglaise augmentée et mise à jour : *The theory of decreasing sequences of measurable partitions.* St. Petersburg Math. J. 6, 705–761, 1995.

[25] J. Warren – *On the joining of sticky Brownian motion.* Séminaire de Probabilités xxxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 257–266, 1999.

[26] S. Watanabe – *The existence of a multiple spider martingale in the natural filtration of a certain diffusion in the plane.* Séminaire de Probabilités xxxiii, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 277–290, 1999.

[27] M. Yor – *Sur l'étude des martingales continues extrémales.* Stochastics 2, 191–196, 1979.

[28] M. Yor – *Some Aspects of Brownian Motion. Part II : Some Recent Martingale Problems.* Birkhäuser, 1997.

Michel ÉMERY

C.N.R.S. et Université Louis Pasteur
I.R.M.A.
URA 7501 du C.N.R.S.
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
E-mail : `emery@math.u-strasbg.fr`

Séminaire BOURBAKI Novembre 2000
53e année, 2000-2001, nO 883, p. 85 à 111

L'INÉGALITÉ DE PENROSE
[d'après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen,...]

par **Marc HERZLICH**

L'inégalité de Penrose est un énoncé purement géométrique. Les objets qui y interviennent trouvent cependant leur source et une grande part de leurs motivations dans la théorie de la relativité générale. Il apparaît donc opportun (et c'est le choix fait par l'auteur de ces lignes) de consacrer une première partie de cet exposé à une description rapide du contexte physique, avant d'entrer plus avant dans les détails proprement mathématiques.

1. UN RAPIDE SURVOL DE RELATIVITÉ GÉNÉRALE

La théorie physique de la relativité générale entretient des liens étroits et féconds avec la géométrie [8, 22, 30, 33]. Elle modélise l'espace-temps comme une variété différentielle (lisse) N de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne γ, de signature $(-+++)$, représentant le champ de gravitation. Les *équations d'Einstein* relient le champ de gravitation aux autres interactions en présence. La métrique y apparaît par l'intermédiaire de l'un des avatars de sa courbure, le *tenseur d'Einstein*, combinaison de la courbure de Ricci Ric^γ et de sa trace la courbure scalaire Scal^γ ; les autres champs sont combinés pour former le tenseur d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$, dont l'expression varie suivant la nature des interactions en présence. Les équations s'écrivent alors :

$$\mathrm{Ric}^\gamma - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^\gamma\,\gamma \;=\; 8\pi\,\mathbf{T}. \tag{1.1}$$

Le tenseur d'Einstein est à divergence nulle, ce qui fournit les lois de conservation usuelles de la théorie des champs ($\mathrm{div}\,\mathbf{T} = 0$).

La situation à laquelle nous allons particulièrement nous intéresser est celle des *systèmes isolés* dans laquelle, de manière très schématique, on impose à l'ensemble des interactions de décroître au fur et à mesure que l'on s'éloigne de leur source et même de s'annuler à l'infini. Cette exigence est difficile à formuler géométriquement dans un cadre lorentzien, mais on peut donner une famille d'exemples archétypiques d'un tel

comportement : les métriques de Schwarzschild ont été introduites par K. Schwarzschild dès 1916 [47] pour modéliser l'extérieur d'une étoile fixe et statique de masse m, représenté par la variété $N = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}))$ munie de la métrique :

$$\gamma_{\text{schw.}} \;=\; -\frac{\left(1-\frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2}\, d\tau^2 \;+\; \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 \text{eucl} \tag{1.2}$$

où eucl désigne la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ (cette écriture, qui n'est pas la plus commune pour une métrique de Schwarzschild, se révèlera la plus commode pour la suite). Cette famille de métriques est à symétrie sphérique et elles sont toutes « asymptotes » à l'infini à la métrique de Minkowski $-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ sur $\mathbb{R}^4$ (la situation où les interactions gravitationnelles sont absentes). La métrique semble devenir singulière lorsque l'on approche l'hypersurface $\{r = \frac{m}{2}\}$. Il ne s'agit en réalité que de singularités du système de coordonnées. Un changement de coordonnées, découvert par M. Kruskal [31], permet un prolongement lisse des métriques de Schwarzschild au-delà de l'hypersurface. Une fois les espaces de Schwarzschild ainsi « complétés », ils peuvent alors être interprétés comme le champ de gravitation d'un *trou noir* de masse m dont l'ouvert difféomorphe à $N = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}))$ constitue la région « extérieure ». L'hypersurface de séparation est l'*horizon* du trou noir : aucune courbe de type temps ou lumière (aucune particule) ne peut s'échapper de la région intérieure. Les sphères $\{\tau = \tau_0 \;\; r = \frac{m}{2}\}$ contenues dans l'horizon sont des surfaces minimales (et même totalement géodésiques) et elles entourent une (vraie) singularité de la métrique au centre du trou noir. La relation entre rayon de l'horizon et masse n'est pas fortuite ; elle est même au cœur de cet exposé.

1.1. Variétés asymptotiquement plates

Instruits par les exemples de Schwarzschild, nous imaginons désormais que toutes nos variétés sont le produit d'un intervalle (de type temps) par une variété *riemannienne* M de dimension 3. Via les équations de Gauss et Codazzi, tous les objets géométriques « de dimension 4 » peuvent s'écrire en fonction des métriques et secondes formes fondamentales des différentes *tranches d'espace* $\{\tau\} \times M$. Cette traduction a l'avantage de transformer de très nombreuses interrogations sur la géométrie lorentzienne de l'espace-temps en des questions de *pure géométrie riemannienne*. Dans le cas qui nous préoccupe, se donner un système isolé revient à imposer à chaque tranche d'être *asymptotiquement plate* (d'autres conditions géométriques, analogues mais non nécessairement équivalentes, sont parfois utilisées, voir [23, 42, 51]) :

Définition 1.1. — *Une variété riemannienne (M^n, g) non compacte, à un seul bout, est dite asymptotiquement plate d'ordre $\rho > 0$ s'il existe un compact $K \subset M$ et un difféomorphisme* (*dit* carte à l'infini) $z : M \setminus K \to \mathbb{R}^n \setminus B_0(r)$ (*où* $r > 0$) *tels que les*

coefficients de la métrique vérifient dans cette carte $\{z^1, \dots, z^n\}$

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O(|z|^{-\rho}),\ \frac{\partial}{\partial z^k} g_{ij} = O(|z|^{-\rho-1}),\ \frac{\partial^2}{\partial z^k \partial z^\ell} g_{ij} = O(|z|^{-\rho-2}). \tag{1.3}$$

Cette définition reposant sur des cartes particulières et des expressions en coordonnées peut paraître surprenante. Elle définit cependant un bon objet géométrique ; nous avons néanmoins préféré l'exposer en premier lieu dans la mesure où elle fournit une vision très concrète des variétés asymptotiquement plates. Elle est justifiée par le travail dû à S. Bando, A. Kasue et H. Nakajima [2] qui montre l'équivalence entre platitude asymptotique et des conditions bien précises de décroissance de la courbure et de comportement du volume des grandes sphères géodésiques à l'infini.

1.2. La masse

Dans l'expression (1.2) des métriques de Schwarzschild, le paramètre m est la masse de l'étoile. Cette identification se trouve confortée par l'étude de l'équation différentielle régissant la trajectoire d'une géodésique radiale qui est de la forme $r'' = -mr^{-2} + O(r^{-3})$. Contrairement à l'intuition, la théorie des systèmes isolés ne dispose pourtant pas d'une notion universelle (et locale) de masse et estimer la quantité de matière présente dans une région bornée de l'espace(-temps) reste à l'heure actuelle une question mal comprise (voir la fin de ce texte).

La manière dont a été réalisée l'identification entre le paramètre m et la masse dans la métrique de Schwarzschild amène alors à l'idée que la masse totale d'un système isolé doit être calculée de façon *globale*, à l'aide d'un procédé de *passage à la limite*. La définition la plus couramment utilisée aujourd'hui est celle donnée en 1962 par R. Arnowitt, S. Deser et C. Misner [1], qui attribue une masse *à toute hypersurface asymptotiquement plate* d'un espace-temps. Cette définition, comme la précédente, est purement riemannienne et s'étend à toutes les dimensions.

DÉFINITION 1.2. — *Soient* (M^n, g) *une variété riemannienne asymptotiquement plate,* S_r *une sphère de rayon* r *dans une carte à l'infini et* ν *sa normale sortante. La masse est*

$$m(M, g) = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \nu^j \, d\mathrm{vol}_{S_r} \tag{1.4}$$

si cette intégrale existe.

Le coefficient 16π est choisi ici pour que le calcul de la masse de toute tranche d'espace $\{\tau\} \times M$ de la métrique de Schwarzschild (1.2) soit exactement m.

Cet objet, calculé d'une manière apparemment non-tensorielle –et à partir des *dérivées premières* de la métrique de surcroît !–, est pourtant bien défini. La confirmation de ce fait, connu de manière heuristique par les physiciens dès les années 60, se fera

attendre jusqu'en 1985, année où est démontré le théorème crucial qui permet d'attribuer une signification non ambiguë à la masse, dû à R. Bartnik [4] et indépendamment à P. Chruściel [14].

THÉORÈME 1.3. — *Si la variété riemannienne (M, g) de dimension n est asymptotiquement plate d'ordre $\rho > \frac{n-2}{2}$ et si sa courbure scalaire est dans l'espace de Lebesgue L^1, alors sa masse est bien définie. C'est un* invariant riemannien*, indépendant du choix de la carte.*

V. Denisov et O. Solovev ont construit dans [16] un contre-exemple en dimension 3, d'ordre de décroissance à l'infini exactement égal à $1/2$ et dont deux cartes à l'infini fournissent deux masses différentes.

Si les équations d'Einstein du vide ($\mathbf{T} = 0$) sont vérifiées dans un espace-temps asymptotiquement plat $N = \mathbb{R} \times M$, la masse est indépendante de la tranche choisie pour le calcul [15] et on peut donc parler de la masse de l'espace-temps. Dans le cas général, il est naturel d'espérer que la masse soit positive si les interactions en présence sont physiquement réalistes et qu'elle ne puisse être nulle que pour l'espace-temps trivial de Minkowski. Les critères utilisés par les physiciens pour décider du caractère raisonnable des interactions sont des inégalités sur leur tenseur d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$, dites *conditions d'énergie* [22], qui se traduisent donc, *via* les équations d'Einstein, en inégalités sur la courbure.

Un cas particulier très important (et très étudié) est celui où l'hypersurface asymptotiquement plate (M, g) dont on calcule la masse est de courbure moyenne nulle (par exemple si elle est totalement géodésique, *i.e.* si sa seconde forme est nulle). Les conditions d'énergie impliquent alors que *la courbure scalaire de (M, g) est positive.* Tout ce qui précède apporte donc une motivation profonde au résultat fondamental suivant, dû à R. Schoen et S.T. Yau [44] en 1978. Une preuve alternative a été donnée en 1981 par E. Witten [52] (voir aussi [4, 13, 30, 32]). Cet énoncé est purement riemannien et ne fait plus référence à la relativité.

THÉORÈME 1.4 (Théorème de la masse positive). — *Si (M, g) est une variété riemannienne asymptotiquement plate de dimension* 3*, complète, sans bord et à* courbure scalaire positive*, alors sa masse est positive, et elle est nulle si et seulement si (M, g) est isométrique à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \mathrm{eucl})$.*

Cette inégalité et la rigidité associée au cas d'égalité constituent donc un remarquable énoncé de géométrie riemannienne globale, dont certains corollaires sont frappants. On peut citer par exemple celui choisi par R. Geroch dans un exposé de 1974 au cours d'un symposium de l'A.M.S. pour tenter d'attirer l'attention des mathématiciens sur les problèmes issus de la relativité [19] : *la seule métrique riemannienne à courbure scalaire positive et plate en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^3$ est la métrique euclidienne.*

Ce théorème fait partie du paysage depuis 20 ans. Outre son importance en relativité, il joue un rôle crucial en géométrie conforme en relation avec la courbure scalaire, comme en témoigne le célèbre *problème de Yamabe* [32]. Mais on ne connaît pas encore ses conditions de validité les plus générales : à l'heure actuelle, il est vérifié en toutes dimensions si la variété est spinorielle (E. Witten) ou si la dimension est inférieure ou égale à 7 dans le cas général (preuve due à R. Schoen et S.-T. Yau, qui utilise des surfaces minimales, d'où la restriction ; ils ont affirmé à plusieurs reprises posséder une preuve valable en toutes dimensions, mais, à la connaissance de l'auteur, elle semble ne jamais avoir été publiée).

1.3. Trous noirs et inégalité de Penrose

En 1973, R. Penrose a conjecturé une inégalité frappante pour la masse d'un espace-temps asymptotiquement plat contenant un trou noir [43].

Qu'est-ce qu'un trou noir ? En étant volontairement flou, un espace-temps asymptotiquement plat (défini comme précédemment, c'est-à-dire feuilleté par des hypersurfaces riemanniennes $\{\tau\} \times M$ asymptotiquement plates) en contient un s'il existe une région (« bornée » en espace) dont aucune courbe de type temps ou lumière ne peut s'échapper et où toutes les géodésiques de ce type sont incomplètes. Si l'on se limite au cas où les tranches d'espace $\{\tau\} \times M$ sont totalement géodésiques, la présence d'une surface minimale dans $\{\tau\} \times M$ est un bon indice de l'existence d'un trou noir [22, chap. 9]. Il existe alors toujours une collection de sphères minimales, dites « les plus extérieures », c'est-à-dire délimitant une région extérieure qui ne contient aucune autre sphère minimale que les composantes de son bord (ce fait est non trivial, voir la section 3.6 pour plus de détails). Ces surfaces forment l'*horizon* du trou noir [22, chap. 9] : l'intérieur est caché aux yeux de tout observateur extérieur.

Dans ce cadre désormais riemannien, la conjecture de Penrose s'énonce : *si* (M, g) *est une variété riemannienne asymptotiquement plate de dimension* 3 *qui contient une surface minimale compacte et qui satisfait aux hypothèses du théorème de la masse positive, alors*

$$m(M, g) \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\text{Aire}\,(S)}{\pi}} \tag{1.5}$$

où S *est l'ensemble des sphères minimales « les plus extérieures » contenues dans* M.

L'inégalité (1.5) est inspirée à la fois de la thermodynamique des trous noirs (qui impose des relations entre masse et entropie, c'est-à-dire aire) et d'une autre conjecture fameuse de relativité, la *censure cosmique*. Celle-ci prédit que la situation rencontrée dans les métriques de Schwarzschild (une singularité centrale entourée par un horizon) est en fait générique : tout espace-temps singulier admet une perturbation dans laquelle la singularité doit être entourée d'un horizon. Cet énoncé est probablement le problème ouvert le plus important pour les spécialistes de relativité ; sa vérification aurait des conséquences concrètes en astrophysique. Or R. Penrose présente dans [43]

un argument, heuristique mais convaincant, qui va à l'encontre de la censure cosmique si l'inégalité (1.5) est violée !

On comprend donc aisément l'importance de la conjecture de Penrose et son attrait. Pris du côté de la physique, son énoncé est très naturel : la masse d'un espace-temps statique qui contient un trou noir est minorée par la masse de la métrique de Schwarzschild dont le trou noir a un horizon de même aire (c'est-à-dire, en termes physiques, de même entropie). De plus, il n'est pas surprenant que l'énoncé ne concerne que la surface minimale la plus extérieure : la masse étant calculée à l'infini, ne peut y contribuer que la partie de l'espace-temps située au-delà de l'horizon puisque celui-ci masque le contenu intérieur aux yeux de l'infini... Mathématiquement parlant, il s'agit d'un résultat d'isolation qui impose à toute variété à courbure scalaire positive suffisamment différente de l'espace euclidien (qui ne contient pas de surface minimale compacte) d'avoir une masse non seulement strictement positive mais aussi notablement éloignée de zéro. Et les deux points de vue se rejoignent pour prédire que le cas d'égalité est caractéristique d'une tranche de la métrique de Schwarzschild (1.2), c'est-à-dire de la situation la plus symétrique.

La conjecture a résisté pendant près de 25 ans aux différentes tentatives de démonstrations (voir cependant [6, 39] pour des cas particuliers). Ce n'est que récemment (1997) que G. Huisken et T. Ilmanen [26, 27] ont pu apporter la preuve de sa véracité lorsque l'horizon est connexe. En 1999, H. Bray [9, 11] en a fourni une autre preuve.

THÉORÈME 1.5 (Bray, Huisken–Ilmanen). — *Soit (M, g) une variété asymptotiquement plate de dimension 3 à courbure scalaire positive ou nulle, ayant pour bord (intérieur) une sphère minimale S et ne contenant pas d'autres surfaces minimales. Alors*

$$m(M, g) \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(S)}{\pi}}. \tag{1.6}$$

Le cas d'égalité n'est vérifié que si M est isométrique à $(\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}), (1 + \frac{m}{2r})^4\,\mathrm{eucl})$.

2. APPROCHES POSSIBLES

Il existe plusieurs stratégies possibles pour étudier la masse, inventées au cours des années 70 pour démontrer le théorème de la masse positive. L'approche qui a conduit pour la première fois au succès, c'est-à-dire celle de R. Schoen et S.T. Yau, était une démonstration par l'absurde. Il était donc difficile de l'utiliser pour en déduire des estimations effectives sur la masse. En revanche, la simplicité de la méthode mise à profit par E. Witten dans sa propre preuve de la masse positive faisait d'elle une candidate naturelle pour l'attaque de l'inégalité de Penrose.

2.1. L'approche spinorielle

L'argument de E. Witten se fonde sur la géométrie spinorielle : sur toute variété riemannienne spinorielle, la formule de Lichnerowicz [34] relie l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ au laplacien brut D^*D de la connexion de Levi-Civita :

$$\mathcal{D}^*\mathcal{D} = D^*D + \frac{1}{4}\,\mathrm{Scal}^g. \tag{2.1}$$

E. Witten a alors remarqué que, lorsque cette formule, évaluée sur un champ de spineurs ψ *asymptotiquement constant* (cette notion étant définie avec précision), est intégrée sur des domaines de plus en plus grands, le terme de bord tend vers un multiple de la masse à l'infini, *i.e.*

$$\left(4\pi \lim_{\infty} |\psi|^2\right) m(M,g) \;=\; \int_M |D\psi|^2 \;+\; \frac{1}{4}\int_M \mathrm{Scal}^g\,|\psi|^2 \;-\; \int_M |\mathcal{D}\psi|^2. \tag{2.2}$$

La positivité de la masse est alors immédiate si l'on sait exhiber un spineur harmonique (c'est-à-dire annulé par $\mathcal{D}$) asymptotiquement constant et de dérivée de carré intégrable.

L'existence d'un spineur solution est obtenue grâce à la théorie des espaces de Sobolev ou de Hölder *à poids* développée pour les variétés asymptotiquement plates [4, 36, 37]. Le cas d'égalité s'obtient aisément en remarquant que la nullité de la masse entraîne que le spineur est parallèle, donc la courbure de Ricci est nulle. Le cas limite de l'estimation classique du volume due à Bishop [7] et le caractère asymptotiquement plat font le reste.

Le principal intérêt de cette stratégie est la simplicité avec laquelle elle peut être mise en œuvre. Malheureusement, elle ne conduit pas à une preuve de l'inégalité de Penrose. La principale difficulté est d'interpréter dans ce contexte spinoriel l'exigence de ne considérer que la surface minimale *la plus extérieure*. Faire abstraction de cette restriction conduit néanmoins à un résultat, moins fort mais valable pour toute surface minimale. La borne inférieure obtenue fait intervenir la constante géométrique

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(S)}{\pi}}\left(\inf_{f\in C_c^\infty} \frac{\int_{M_S}|df|^2}{\int_S f^2}\right). \tag{2.3}$$

À normalisation près, il s'agit de l'inverse de la norme de l'application trace qui envoie le complété (pour la norme de type Sobolev $||df||_{L^2(M_S)}$) de l'espace C_c^∞ des fonctions lisses à support compact sur l'extérieur M_S de la surface minimale S dans l'espace $L^2(S)$ des fonctions de carré intégrable sur S. Elle est donc strictement positive par nature et invariante par changement d'échelle, la valeur précise de l'aire de S n'y apparaissant qu'à des fins de normalisation. Le résultat, obtenu dans [24] à une époque où aucune preuve de l'inégalité de Penrose n'était disponible, peut alors s'énoncer :

THÉORÈME 2.1. — *Si (M, g) est une variété asymptotiquement plate de dimension 3 à courbure scalaire positive, ayant pour bord une sphère minimale S, alors*

$$m(M,g) \geqslant \frac{\sigma(S)}{2+2\sigma(S)}\sqrt{\frac{\text{Aire}\,(S)}{\pi}}. \tag{2.4}$$

Le cas d'égalité n'est vérifié que si $M = (\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}), (1+\frac{m}{2r})^4\,\text{eucl})$.

La preuve repose avant tout sur une étude précise du cas d'égalité : celui-ci fait ressortir le rôle joué par la métrique euclidienne, dont la masse est nulle, qui est la seule métrique conforme à la (tranche spatiale de la) métrique de Schwarschild de courbure scalaire nulle et dans laquelle la sphère S est à courbure moyenne constante égale à $4\sqrt{\frac{\pi}{\text{Aire}(S)}}$. La preuve suit alors le cours suivant : on déforme notre métrique d'origine en une métrique conforme $\bar{g} = \varphi^4\, g$ qui est à courbure scalaire nulle et dont la courbure moyenne de S vérifie exactement (dans la métrique $\bar{g}$) l'égalité précédente. Un calcul direct livre alors que la différence entre la masse de g et celle de $\bar{g}$ est minorée par la constante annoncée. Il reste à exhiber pour $\bar{g}$ un théorème de masse positive, obtenu par la méthode de Witten, pour la partie non bornée M_S. La subtilité provient de l'apparition, lors de l'intégration de la formule de Lichnerowicz (2.2), de termes de bord sur S contenant l'opérateur de Dirac de celle-ci. Il est alors possible de contrôler leur signe en faisant appel aux travaux de C. Bär et O. Hijazi sur la première valeur propre de l'opérateur de Dirac [3, 25].

2.2. Le flot de la courbure moyenne inverse

De nombreuses tentatives ont été faites pour donner une expression plus intrinsèque de la masse. L'idée la plus intéressante est due à S.W. Hawking [21] : sur une variété asymptotiquement plate de dimension 3,

$$m(M,g) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{\text{Aire}\,(S_t)}}{64\pi^{3/2}}\left(16\pi - \int_{S_t} H_t^2\right), \tag{2.5}$$

si les surfaces S_t (de courbure moyenne H_t) convergent très vite (en un sens précis) vers des sphères euclidiennes à l'infini. L'expression à l'intérieur de la limite dans (2.5) est appelée *masse de Hawking* $m_H(S_t)$ d'une surface S_t et vaut zéro pour toute sphère ronde dans l'espace euclidien (c'est le théorème de Gauss-Bonnet !)

Cette remarque conduit à une nouvelle approche de la masse positive, fondée sur une *formule de monotonie*. R. Geroch [18] et P. S. Jang et R. Wald [29] ont en effet imaginé que toute variété asymptotiquement plate (de dimension 3) « raisonnable » puisse être recouverte par des sphères (topologiques) évoluant sous le flot de la *courbure moyenne inverse*. Plus précisément, ils espèrent disposer d'une application lisse et *régulière* (sans points critiques) $F : \mathbb{R}\times\mathbb{S}^2 \longrightarrow M$, $(t,x) \longmapsto F_t(x)$, obéissant à l'équation

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(x) = \frac{1}{H_t(x)}\;\nu_t(x) \tag{2.6}$$

où ν_t est le champ des normales unitaires sortantes et H_t la courbure moyenne de $S_t = F_t(\mathbb{S}^2)$. Par exemple, si S_0 est une sphère ronde de rayon r_0 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, la solution du flot (2.6) est fournie par les sphères concentriques S_t de rayons $r(t) = \mathrm{e}^{t/2}\, r_0$.

LEMME 2.2. — *Si* $\mathrm{Scal}^g \geqslant 0$*, et sous les hypothèses précédentes, la masse de Hawking* $m_H(S_t)$ *est une fonction croissante.*

Preuve. – Tout d'abord on a, pour tout t, $\mathrm{Aire}\,(S_t) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{Aire}\,(S_0)$ puisque la courbure moyenne est précisément la dérivée du volume infinitésimal. Notons K_t la courbure de Gauss et A^0_t la partie à trace nulle de la seconde forme fondamentale A_t de S_t ; on peut calculer la dérivée de H_t par rapport à t à partir de la formule (2.6). Cela conduit à :

$$\frac{d}{dt}\int_{S_t} H_t^2 \;=\; -\int_{S_t} 2\,H_t^{-2}\,|dH_t|^2 + 2\,|A^0_t|^2 + 2\,\mathrm{Ric}(\nu_t,\nu_t). \tag{2.7}$$

L'équation de Gauss fournit par ailleurs

$$-2\,\mathrm{Ric}(\nu_t,\nu_t) + \mathrm{Scal}^g = 2\,K_t + |A^0_t|^2 - \frac{1}{2}H_t^2 \tag{2.8}$$

(une remarque déjà utilisée par R. Schoen et S.T. Yau dans le contexte de la courbure scalaire [45]), d'où

$$\frac{d}{dt}\left(16\pi - \int_{S_t} H_t^2\right) \;\geqslant\; \int_{S_t} -2\,K_t + \mathrm{Scal}^g + |A^0_t|^2 + \frac{1}{2}H_t^2 \;\geqslant\; -\frac{1}{2}\left(16\pi - \int_{S_t} H_t^2\right) \tag{2.9}$$

(en utilisant Gauss-Bonnet). Compte tenu du comportement de l'aire décrit plus haut, on obtient finalement

$$\frac{d}{dt}m_H(S_t) \;=\; \frac{\sqrt{\mathrm{Aire}\,(S_0)}}{64\pi^{3/2}}\,\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{2}}\left(16\pi - \int_{S_t} H_t^2\right)\right) \;\geqslant\; 0, \tag{2.10}$$

ce qui conclut la preuve. □

Si l'on fait l'hypothèse que le flot peut évoluer de cette façon *régulière* à partir d'une très petite sphère géodésique à $t = \varepsilon$ (dont la masse de Hawking est très proche de zéro puisque la géométrie riemannienne est asymptote à l'ordre 2 à la géométrie euclidienne au voisinage d'un point) et se comporte lorsque t tend vers l'infini comme les grandes sphères géodésiques, ce procédé fournit donc une nouvelle preuve de la masse positive.

C'est cette méthode que mettent en œuvre G. Huisken et T. Ilmanen dans leur preuve de l'inégalité de Penrose, au prix de formidables difficultés techniques. Même dans les cas les plus simples, il est en effet inévitable de voir se créer en temps fini des singularités du flot. Les contrôler de manière efficace et développer les outils permettant d'y faire face constitue l'essentiel de leur travail.

2.3. Trous noirs et inégalité isopérimétrique

L'idée de H. Bray pour démontrer l'inégalité est de considérer le quotient de la masse par la racine carrée de l'aire de l'horizon $\mathcal{P}(g) = \mathrm{Aire}\,(S(g))^{-\frac{1}{2}}\, m(g)$, qu'il dénomme *quotient de Penrose* de la variété et qu'il interprète comme une constante isopérimétrique pour l'horizon $S(g)$, ou encore comme une fonctionnelle sur l'espace des métriques asymptotiquement plates qui possèdent un horizon.

Plutôt que de tenter de rechercher directement un minimum de cette fonctionnelle, il définit un flot de métriques (et d'horizons associés) qui fait décroître le quotient de Penrose. Pour ce faire, il construit une famille de métriques conformes $g_t = \varphi_t^4\, g$ sur M, de quotient décroissant en t et munies d'horizons $S(g_t)$ qui, lorsque t tend vers l'infini, ont progressivement tendance à « enfler » (lorsqu'on les étudie avec la métrique d'origine) et donc à tendre vers l'infini. Le point crucial est le suivant : la restriction d'une métrique asymptotiquement plate arbitraire à l'extérieur d'un compact de plus en plus grand approxime de mieux en mieux une métrique de Schwarzschild qui est en quelque sorte sa *meilleure approximation à l'ordre* 1 *à l'infini*. Puisque $S(g_t)$ « tend vers l'infini », il est donc permis d'espérer que la métrique g_t tende vers une métrique de Schwarzschild de quotient de Penrose $(16\pi)^{-1/2}$. Cette approche est entièrement nouvelle et originale dans l'étude de la masse et des variétés asymptotiquement plates. Contrairement à celle de G. Huisken et T. Ilmanen, elle débouche sur une inégalité de Penrose générale où l'horizon n'est plus nécessairement connexe (voir le Théorème 4.7).

3. ESQUISSE DE LA PREUVE DE G. HUISKEN ET T. ILMANEN

Comme dit précédemment, leur preuve consiste à rendre rigoureuse l'approche du flot de la courbure moyenne inverse introduite par R. Geroch, P.S. Jang et R. Wald. Leur travail se décompose en deux parties distinctes : une étude générale du flot, valable en toute généralité et en toutes dimensions (ou au moins en dimension $n < 8$ en ce qui concerne les résultats de régularité), et une application au cas particulier de l'inégalité de Penrose sur une variété asymptotiquement plate à courbure scalaire positive.

3.1. Difficultés

Lorsque l'on examine du point de vue des mathématiques la stratégie des physiciens, on se heurte immédiatement à un obstacle de taille : *il est a priori impossible d'exclure l'apparition de singularités lors du flot.* Un exemple simple (sur lequel nous reviendrons plus tard) permet déjà de s'en convaincre : le flot de la courbure moyenne inverse appliqué à une sphère ronde S_0 dans $\mathbb{R}^3$ produit une famille de sphères rondes concentriques S_t, paramétrées de telle sorte que $\mathrm{Aire}\,(S_t) = \mathrm{e}^t \mathrm{Aire}\,(S_0)$. Prenons

maintenant comme donnée initiale deux sphères disjointes : chacune évolue indépendamment tant qu'elles restent disjointes et une singularité apparaît au premier point de contact !

L'accident qui survient ici montre qu'il est crucial de ne pas restreindre le type topologique des surfaces qui apparaissent. Dès lors, la formulation lisse du flot (2.6) de la section 2.2 doit être remplacée par une formulation *faible*, exprimée dans le langage de la théorie géométrique de la mesure. G. Huisken et T. Ilmanen procèdent alors en trois étapes :

(a) La récriture du flot lisse comme une équation aux dérivées partielles portant sur une fonction u dont les surfaces S_t sont les *surfaces de niveau*. Cette idée, inspirée par les travaux de L.C. Evans et J. Spruck [17], conduit ici à l'équation équivalente

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = |\nabla u|. \tag{3.1}$$

(b) Il serait alors agréable de voir l'EDP (3.1) précédente comme l'équation d'Euler-Lagrange d'une fonctionnelle portant sur u et sur ∇u. Malheureusement, ce n'est pas le cas. Pour contourner cette difficulté, G. Huisken et T. Ilmanen s'inspirent de travaux de R. Hardt et X. Zhou [20], S. Luckhaus [38], A. Lichnewsky et R. Temam [35] et A. Visintin [50]. Si Ω est un ouvert de M, K un compact de Ω et u une fonction lipschitzienne fixée de Ω, ils introduisent la fonctionnelle

$$J_u^K(v) = \int_K |\nabla v| + v\,|\nabla u| \tag{3.2}$$

portant sur toutes les fonctions v de $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ qui diffèrent de u sur K. Une fonction u lisse et sans points critiques vérifie l'équation (3.1) dans Ω si et seulement si $J_u^K(u) \leqslant J_u^K(v)$ pour tout K et tout v. L'introduction des compacts K est destinée à compenser le manque de compacité des niveaux de u, une difficulté inhérente à la théorie.

(c) On peut alors remplacer la formulation variationnelle (3.2) par une nouvelle fonctionnelle portant sur les parties de $\mathbb{R}^n$. Pour une partie F et un compact K de $\mathbb{R}^n$,

$$\widetilde{J}_u^K(F) = \operatorname{Aire}(\partial F \cap K) - \int_{F\cap K} |\nabla u|, \tag{3.3}$$

où le bord ∂F doit être pris ici au sens de la théorie géométrique de la mesure (on prendra donc F parmi les courants de *périmètre fini*, voir par exemple [48, sections 14, 26, 27]). On dit alors qu'une partie E minimise $\widetilde{J}_u$ si et seulement si $\widetilde{J}_u^K(E) \leqslant \widetilde{J}_u^K(F)$ pour toute partie F de M telle que la différence symétrique de E et F soit relativement compacte et pour tout choix de compact K qui contienne cette différence symétrique. Suivant le contexte, il sera commode d'utiliser l'une ou l'autre des fonctionnelles J_u ou $\widetilde{J}_u$. Ces allers-retours (incessants dans [26]) sont justifiés par le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. — *Soit Ω un ouvert de M et $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Alors u minimise la fonctionnelle J_u sur Ω si et seulement si, pour tout t, l'ensemble de niveau $E_t(u) = \{u < t\}$ minimise $\widetilde{J}_u$ sur Ω.*

Esquisse de preuve. — Un sens est immédiat en remarquant que, pour tout v différant de u sur un compact K, la formule de la coaire [48, §12.6] fournit, si l'on note $E_t(v) = \{v < t\}$:

(3.4)
$$\begin{aligned} J_u^K(v) &= \int_{\inf v}^{\sup v} \mathrm{Aire}(\partial E_t(v)) - \int_K \int_{\inf v}^{\sup v} \chi_{\{v(x)<t\}} |\nabla u| \, dt \, d\mathrm{vol}_g + (\sup v) \int_K |\nabla u| \\ &= \int_{\inf v}^{\sup v} \widetilde{J}_u^K(E_t(v)) + (\sup v) \int_K |\nabla u|. \end{aligned}$$

L'autre sens se démontre par l'absurde. Soit F, qu'on suppose d'abord inclus dans un E_{t_0}, tel que $\widetilde{J}_u^K(F) < \widetilde{J}_u^K(E_{t_0})$ (les théorèmes généraux de théorie géométrique de la mesure permettent de le choisir minimal pour cette propriété). On définit alors v telle que $E_t(v) = \{v < t\} = E_t \cap F$ et on compare $J_u^K(u)$ à $J_u^K(v)$ à l'aide de la formule précédente (3.4) et de l'inégalité très générale

$$\widetilde{J}_u(A \cap B) + \widetilde{J}_u(A \cup B) \leqslant \widetilde{J}_u(A) + \widetilde{J}_u(B). \tag{3.5}$$

Il s'ensuit que $\widetilde{J}_u^K(E_t) = \widetilde{J}_u^K(E_t \cap F)$ pour presque tout t et finalement, pour une suite $\{t_i\}$ croissante vers t_0, $\widetilde{J}_u^K(E_{t_0}) \leqslant \underline{\lim}\, \widetilde{J}_u^K(E_{t_i} \cup F) \leqslant \widetilde{J}_u^K(F)$, en utilisant une deuxième fois l'inégalité (3.5). On procède alors de manière analogue pour un F contenant E_{t_0} et le cas général (F quelconque) est alors une conséquence de (3.5). □

Nous dénotons maintenant par E_0 la condition initiale, qui est un ouvert arbitraire de M (dans le cas de l'inégalité de Penrose, il s'agit de la partie compacte de M délimitée par la surface minimale la plus extérieure). Le problème de minimisation (avec obstacle) de G. Huisken et T. Ilmanen peut donc être récrit de la manière suivante :

Problème 3.2. — *Trouver une famille $(E_t)_{t>0}$ de parties de $\mathbb{R}^3$, croissante pour l'inclusion, telle que*

1) *E_0 est contenu dans tous les E_t ;*

2) *si l'on définit une fonction u, qui est lipschitzienne, par $E_t = \{u < t\}$, alors E_t minimise la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$ dans $M - E_0$, pour tout $t > 0$.*

Il n'y a aucune raison pour que l'équation soit *a priori* satisfaite en $t = 0$: E_0 est choisi de manière arbitraire et n'a donc aucune raison de minimiser la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$. En effet, les conditions précédentes impliquent au mieux que $F_0 = \{u \leqslant 0\}$ minimise $\widetilde{J}_u$ dans $M - E_0$, mais rien n'empêche $\{u = 0\}$ de contribuer à la fonctionnelle (Figure 1). De manière générale, il faut donc imposer des conditions supplémentaires pour relier la condition initiale à l'évolution future du flot.

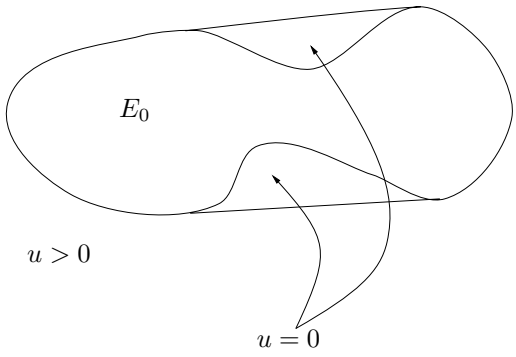


FIGURE 1. Une mauvaise condition initiale.

3.2. Régularité

La régularité des solutions éventuelles au flot reformulé est la conséquence de théorèmes classiques de théorie géométrique de la mesure, issus des travaux de W. Allard, F. Almgren et H. Federer. Leur application à la situation étudiée ici se trouve essentiellement contenue dans les travaux de U. Massari et M. Miranda [40] et P. Sternberg, G. Williams et W. Ziemer [49].

THÉORÈME 3.3. — *On suppose que la dimension est inférieure ou égale à* 7. *Soit* f *une fonction de* $L^\infty(M)$ *et* U *une partie de* M *de bord de classe* C^1 (*resp.* $C^{1,\alpha}$ *pour* $0 < \alpha < 1$, *resp.* C^2 *et* $f = 0$). *Si* E *minimise la fonctionnelle* $\mathrm{Aire}\,(\partial E) + \int_E f$ (*parmi toutes les parties de* M *qui contiennent l'obstacle* U), *alors* ∂E *est une sous-variété de classe* C^1 (*resp.* $C^{1,\alpha}$, *resp.* $C^{1,1}$ *et* C^∞ *en dehors des points de contact avec l'obstacle*).

3.3. Comportement lors des sauts

Le principal intérêt de la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$ introduite au paragraphe précédent est de gérer au mieux le comportement des surfaces de niveau lorsque se produit un changement de topologie ou *saut* (ce qui est inévitable, comme nous l'avons déjà vu, si l'on souhaite que le flot soit défini pour tout temps).

Soit u une solution du Problème 3.2. Les ensembles de niveau $E_t = \{u < t\}$ minimisent donc la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$. Comme le second terme dans la définition (3.2) de $\widetilde{J}_u$ est toujours négatif et décroissant pour l'inclusion, leur bord est de périmètre minimum parmi toutes les parties de M qui les contiennent. Les parties $F_t = \{u \leqslant s\}$ sont la limite des E_s pour $s \to t^+$ et il est aisé de montrer qu'ils vérifient la même propriété de minimisation. On a ainsi $\mathrm{Aire}\,(\partial E_t) = \mathrm{Aire}\,(\partial F_t)$ dès qu'ils sont compacts. Nous dirons alors qu'une partie de M est une enveloppe minimisante (stricte) si elle est de périmètre minimum (strict) parmi toutes les parties qui la contiennent.

Comme F_t minimise non seulement le périmètre (du bord) mais aussi $\widetilde{J}_u$ et que ∇u doit être non nul au moins quelque part sur toute partie contenant strictement F_t (et qui en diffère d'un ensemble de mesure non-nulle), on en déduit que les F_t sont toujours des enveloppes minimisantes strictes. Le comportement d'une solution donnée du flot faible est maintenant intuitivement clair : tant que E_t reste une enveloppe minimisante stricte, le flot évolue de manière classique ; dès que E_t n'est plus strictement minimisant, le flot saute à F_t, qui est la plus petite envelopppe minimisante stricte contenant E_t.

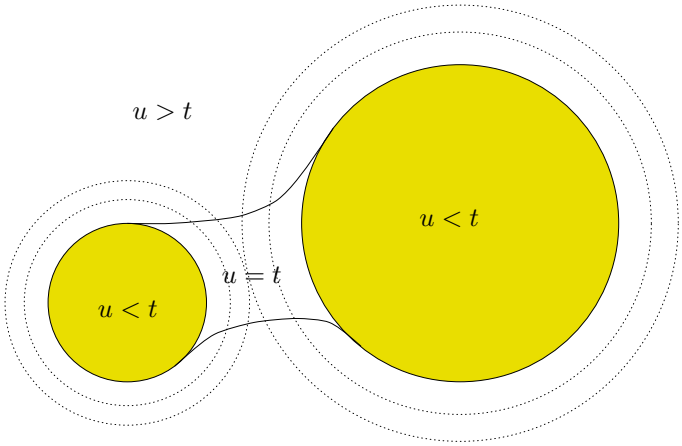


FIGURE 2. Il est temps de sauter...

La figure 2 donne une idée du phénomène pour l'évolution de deux sphères disjointes évoquée dans la section 3.1. Les sphères en pointillés représentent l'évolution ultérieure du flot classique, qui aboutit à une singularité au premier point de contact. Le flot faible « saute » à la région formée des deux sphères reliées par un collier caténoïdal dès que la réunion des deux sphères peut être entourée par une autre partie de même périmètre. Cette situation est réminiscente d'un autre phénomène, bien connu, concernant les surfaces minimales : la solution du problème de Plateau (c'est-à-dire de la recherche de la surface d'aire minimale de bord prescrit dans $\mathbb{R}^3$) pour deux cercles parallèles est un tronc de caténoïde si la distance des deux cercles est faible et deux disques sinon.

Une propriété étrange de ce comportement est qu'il est impossible d'exclure la possibilité d'un saut jusqu'à l'infini. En effet, si u est une solution du problème, alors $u_t = \min(u, t)$ est également une solution, *et ce pour tout* t ! On voit ici que, prises sans précautions, les solutions du flot faible souffrent d'une forme particulièrement brutale de non unicité (Figure 3).

Il peut même arriver que le saut jusqu'à l'infini soit le seul comportement possible. Si M est par exemple formée d'un bout cylindrique recollé à une demi-sphère et si

l'on prend l'équateur comme condition initiale, la seule solution du flot faible est la fonction nulle sur la partie cylindrique puisqu'il est impossible de trouver une enveloppe minimisante stricte qui contienne l'équateur !

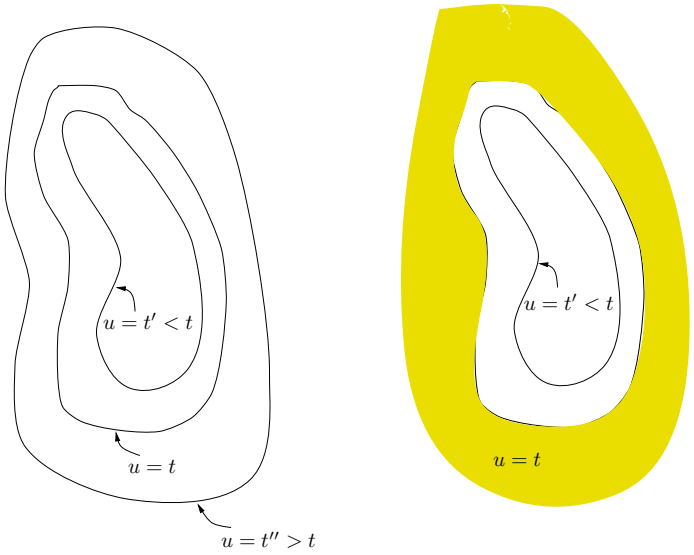


FIGURE 3. Un saut jusqu'à l'infini...

L'étude du comportement lors des sauts permet néanmoins de répondre à une question laissée auparavant en suspens : celle du comportement à $t = 0$. Puisque la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$ sur $M - E_0$ se réduit ici au périmètre du bord, on obtient

PROPOSITION 3.4. — *Soit $(E_t)_{t>0}$ une solution du Problème 3.2 de donnée initiale E_0. Alors E_0 vérifie l'équation à $t = 0$ si et seulement si E_0 est une enveloppe minimisante.*

Rappelons que tous les E_t minimisent $\widetilde{J}_u$, qui doit donc être constante en t. Dès lors, la formule de la coaire et les considérations précédentes assurent :

PROPOSITION 3.5. — *Soit $(E_t)_{t>0}$ une solution du Problème 3.2. Si tous les E_t sont relativement compacts, alors $e^{-t}\,\mathrm{Aire}\,(\partial E_t)$ est une fonction constante en t, égale à $\mathrm{Aire}\,(\partial F_0)$. Si E_0 est une enveloppe minimisante, alors $\mathrm{Aire}\,(\partial E_0) = \mathrm{Aire}\,(\partial F_0)$.*

3.4. Propriétés d'unicité

Comme on vient de le voir, elles sont nécessairement subtiles. L'énoncé suivant, où aucune hypothèse n'est innocente, donne une idée de ce que l'on peut quand même obtenir.

PROPOSITION 3.6. — *Soit Ω un ouvert de M dont aucune composante connexe n'est compacte. Alors :*

(i) *si u et v minimisent les fonctionnelles associées J_u et J_v dans Ω et si $\{v > u\}$ est relativement compact dans Ω, alors $u \geqslant v$ dans l'ouvert ;*

(ii) *si $(E_t)_{t>0}$ et $(F_t)_{t>0}$ sont deux solutions du Problème 3.2 dans Ω de données initiales $E_0 \subset F_0$ et* si E_t est relativement compact dans Ω *pour tout t, alors $E_t \subset F_t$ pour tout t.*

Compte tenu de ce qui précède et de l'équivalence entre le flot classique (2.6) de la section 2.2 et sa formulation faible (étapes **a)**–**c)** de la section 3.1), on a alors

PROPOSITION 3.7. — *Soit $(E_t)_{t>0}$ une solution du Problème 3.2. Si à t_0 donné ∂E_{t_0} est une sous-variété lisse, compacte, à courbure moyenne strictement positive et est une enveloppe minimisante, alors le flot faible et le flot classique coïncident sur un petit intervalle de temps après t_0.*

Toutes les hypothèses sont nécessaires. La non annulation de la courbure moyenne donne un sens à l'équation classique, son signe assure son caractère parabolique, il existe donc une solution au flot classique sur un voisinage tubulaire de la donnée initiale. On utilise ensuite le résultat de comparaison 3.6(ii) dans ce voisinage, à la condition expresse que l'intersection de chaque ensemble de niveau $E_t = \{u < t\}$ du flot faible avec ce voisinage y soit relativement compacte (l'exemple des deux sphères montre la nécessité de cette hypothèse). D'après la discussion sur les sauts de la section précédente, la condition d'enveloppe assure que $E_{t_0} = \{u < t_0\}$ est l'intérieur de $F_{t_0} = \{u \leqslant t_0\}$, qui est la limite pour $t \to t_0^+$ (pour la distance de Hausdorff) des E_t $(t > t_0)$.

3.5. Existence de solutions convenables

G. Huisken et T. Ilmanen obtiennent une solution u, lipschitzienne et surtout *propre*, du flot faible formulé à l'aide de la fonctionnelle J_u, par un procédé de *régularisation elliptique* (voir [17, 28]), c'est-à-dire comme limite d'une suite de fonctions lisses solutions d'équations régularisées.

Il est illusoire de prétendre donner une idée précise des arguments tout en conservant une taille raisonnable à ce rapport. Nous nous contenterons donc de décrire rapidement la méthode. Pour tout $\varepsilon > 0$, G. Huisken et T. Ilmanen montrent d'abord l'existence de solutions particulières u^ε aux *équations régularisées*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u^\varepsilon}{\sqrt{|\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2}}\right) = \sqrt{|\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2} \tag{3.6}$$

sur des domaines Ω_ε, compris entre la donnée initiale E_0 et des hypersurfaces A_ε qui s'enfuient à l'infini si ε tend vers 0. Cette procédure peut être interprétée géométriquement si l'on remarque que la fonction $(z, x) \longmapsto u^\varepsilon(x) - \varepsilon\, z$ fournit une solution au flot classique dans $\mathbb{R} \times \Omega_\varepsilon$.

Les solutions souhaitées des équations régularisées sont obtenues par application répétée de la méthode de continuité. Il reste alors un long travail pour mettre à jour les estimées vérifiées par la suite des solutions et qui assurent sa convergence dans $C^{0,1}_{\text{loc}}$, modulo extraction d'une sous-suite, vers la solution du flot faible souhaitée.

La mise en œuvre de ce schéma de preuve requiert un contrôle fin de la géométrie à l'infini. C'est en effet celle-ci qui assure qu'il existe des solutions propres, qui donc résistent à la tentation de « sauter jusqu'à l'infini » comme dans la figure 3. Plutôt que d'imposer des contraintes particulières au comportement asymptotique de la variété, G. Huisken et T. Ilmanen préfèrent faire une hypothèse équivalente mais de nature analytique : l'existence d'une fonction, lipschitzienne et propre, sous-solution (en un sens qui est précisé dans [26]) au flot faible en dehors d'un compact (arbitraire, éventuellement très grand). L'existence de cette sous-solution est l'ingrédient essentiel de toutes les estimées portant sur la suite des solutions des équations régularisées : elles sont toutes obtenues par comparaison avec la sous-solution et application de formes variées et parfois raffinées du principe du maximum. Le résultat de ces efforts est le

THÉORÈME 3.8 (Existence de solutions). — *Soit M une variété connexe, complète et E_0 une condition initiale au sens du Problème 3.2. S'il existe une sous-solution v dans $C^{0,1}_{\text{loc}}$ du flot faible à l'extérieur d'un compact et qui est* propre*, alors il existe une unique solution u* propre *dans $C^{0,1}_{\text{loc}}(M - E_0)$, de donnée initiale E_0.*

3.6. Région extérieure, formule de monotonie et inégalité de Penrose

Plaçons-nous dans la situation de la conjecture de Penrose : une variété asymptotiquement plate de dimension 3 contenant une surface minimale. Nous commençons, comme promis, par quelques préliminaires sur les régions extérieures de M, c'est-à-dire les composantes de ce qui reste lorsque l'on ôte de M toutes les surfaces minimales compactes plongées ainsi que toutes les parties compactes de M délimitées par ces mêmes surfaces. Des arguments relativement élémentaires de géométrie et topologie de dimension 3 montrent alors [26] :

LEMME 3.9. — *Chaque* région extérieure *M_e a la topologie de $\mathbb{R}^3$ privé d'un nombre fini de sphères, minimales et stables. Le bout unique de M_e est asymptotiquement plat et ∂M_e est un nombre fini de surfaces minimales stables.*

Nous supposerons désormais que M_e est difféomorphe à $\mathbb{R}^3 - B_0$. L'unique composante du bord, notée S_0, est donc la sphère minimale *la plus extérieure* de l'inégalité de Penrose, telle qu'énoncée au Théorème 1.5. On procède alors comme suit.

(a) la géométrie à l'infini étant bien maîtrisée, le Théorème 3.8 fournit une fonction propre et lipschitzienne u dont les ensembles de niveau $E_t = \{u < t\}$ sont solution du Problème 3.2 avec comme condition initiale la partie de M délimitée par S_0, qui est une sphère minimale et stable. Selon le principe exposé à la Proposition 3.4, l'équation est vérifiée en $t = 0$.

(b) *monotonie de la masse de Hawking* : Comme les solutions u^ε des équations régularisées de la section 3.5 sont des solutions du flot classique sur le cylindre $\mathbb{R} \times M$ (associées aux $N_t^\varepsilon = \{(u^\varepsilon(x) - \varepsilon z) = t\}$), la preuve de la monotonie (Lemme 2.2) fournit, pour $r \leqslant s$,

$$\int_{N_s^\varepsilon} \varphi H^2 - \int_{N_r^\varepsilon} \varphi H^2 \leqslant \int_r^s \int_{N_t^\varepsilon} \varphi \left(H^2 - 2|A|^2 - 2\mathrm{Ric}(\nu,\nu)\right) + \langle d\varphi, H\nu - 2\frac{dH}{H}\rangle, \tag{3.7}$$

où φ est une fonction plateau en la variable z (son introduction est nécessaire car les N_t^ε convergent vers les cylindres $\mathbb{R} \times \partial E_t$ qui ne sont pas compacts !) Faire converger les inégalités 3.7 lorsque ε tend vers 0 est une des parties les plus techniques du travail. Les termes les plus délicats sont ceux en la courbure moyenne H^2 (le lemme de Fatou est insuffisant car incompatible avec l'inégalité voulue) et en la seconde forme $|A|^2$. Une version faible de ces deux notions doit être utilisée (voir [48, §16]) et leur comportement lors des convergences bien contrôlé (au passage, G. Huisken et T. Ilmanen montrent et utilisent un théorème de Gauss-Bonnet pour ces notions faibles). On conclut que la masse de Hawking (faible) des niveaux de la solution fournie par la section 3.5 est croissante.

(c) *comportement asymptotique de* $E_t = \{u < t\}$: il est gouverné par les propriétés d'unicité du flot faible. Considérons la solution précédente du flot de la courbure moyenne inverse restreinte au complémentaire d'une grande boule B fixée de $\mathbb{R}^3$, munie de la famille des métriques rééchelonnées $g_R = R^{-2}g$. Elles convergent vers la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ lorsque R tend vers l'infini ; de plus, il est possible d'exhiber une suite de solutions qui converge vers une solution du flot dans $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Il reste à s'assurer que la seule solution du flot sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ dont tous les ensembles de niveau sont relativement compacts est donnée par les sphères concentriques en l'origine. Ce point est vraisemblable si l'on relit la Proposition 3.6 mais nécessite une preuve *ad hoc*. Les bords ∂E_t sont donc, asymptotiquement, de plus en plus sphériques.

Nous avons alors en main tous les instruments nécessaires : l'existence globale du flot faible à partir de l'horizon et la monotonie de la masse de Hawking. Sa valeur à l'origine est la racine carrée de l'aire de l'horizon (convenablement renormalisée) et elle tend à l'infini vers la masse. L'inégalité de Penrose est donc démontrée.

Remarque 3.10. — L'étape **(b)**, en particulier par l'usage du théorème de Gauss-Bonnet, ne vaut que si les surfaces ∂E_t, et donc l'horizon, sont connexes. La preuve

s'étend au cas général en démarrant le flot sur la composante d'aire maximale de l'horizon, l'interrompant dès que les surfaces de niveau approchent de trop près d'autres composantes ; on construit alors « à la main » un saut qui englobe les nouvelles composantes et qui préserve la monotonie de la masse de Hawking, avant de reprendre l'évolution normale du flot. On minore ainsi la masse en fonction de l'aire de la composante la plus grande, ce qui est moins précis que la conjecture initiale de Penrose, qui est le résultat de H. Bray décrit dans les paragraphes suivants.

4. LA PREUVE DE H. BRAY

La démonstration de H. Bray est complètement originale et emploie une stratégie inédite dans l'étude de la masse. Son point de départ s'inspire néanmoins des premiers travaux de R. Schoen et S.T. Yau [44].

LEMME 4.1. — *Pour toute variété asymptotiquement plate (M, g) avec un horizon Σ, il existe une suite de métriques g_σ à courbure scalaire nulle, asymptotiquement plates et* globalement conformes *à la métrique euclidienne en dehors de la boule $B(\sigma)$, qui tend (uniformément) vers g lorsque σ tend vers l'infini. De plus $m(g_\sigma) - m(g) \leqslant C\,\sigma^{-1}$ (où $C > 0$) et chaque métrique g_σ possède un horizon Σ_σ extérieur à Σ et dont l'aire tend vers* $\mathrm{Aire}_g(\Sigma)$ *lorsque σ tend vers l'infini.*

4.1. Le flot conforme

Le lemme 4.1 montre qu'il suffit de démontrer l'inégalité de Penrose dans la classe des métriques asymptotiquement plates et *harmoniquement plates*, c'est-à-dire à courbure scalaire nulle et globalement conformes à l'espace euclidien en dehors d'un compact.

Nous nous plaçons désormais dans ce cadre et, pour fixer les notations, nous notons $g(x) = \mathcal{U}^4(x)\,\mathrm{eucl}$ pour tout x de $M_e - K$, où M_e est toujours la région extérieure au sens de la section 3.6, de bord Σ (non nécessairement connexe) et où la fonction $\mathcal{U}$ est harmonique ($\mathrm{Scal}^g = 0$) et tend vers 1 à l'infini. On se trouve donc ramené à une situation semblable aux métriques de Schwarzschild (qui peuvent donc guider l'intuition plus efficacement que dans le cas général) et où l'essentiel de l'information (au moins au voisinage de l'infini) est contenu dans une fonction. Partant d'une métrique harmoniquement plate, il est alors naturel de chercher à diminuer le quotient de Penrose en restant à l'intérieur de cette classe de métriques.

PROPOSITION 4.2. — *Il existe une fonction $(t, x) \longmapsto v_t(x)$ sur $\mathbb{R} \times M_e$ et des hypersurfaces lisses (non nécessairement connexes) $\Sigma(t)$ telles que*

$$\Delta_g v_t = 0 \text{ à l'extérieur de } \Sigma(t), \quad v_t = 0 \text{ à l'intérieur de } \Sigma(t), \quad \lim_\infty v_t = -\mathrm{e}^{-t} \tag{4.1}$$

et de plus $\Sigma(t)$ *est la surface minimale la plus extérieure pour*

$$g_t = u_t^4\, g = \left(1 + \int_0^t v_t dt\right)^4 g. \tag{4.2}$$

La fonction v *est lipschitzienne en* t *et lisse en* x *sauf sur* $\Sigma(t)$ *où elle est* C^1.

Le cas d'égalité est assez éclairant et mérite donc d'être détaillé. Partant de la métrique de Schwarzschild $g^S = (1 + \frac{m}{2r})^4$ eucl de masse m, le flot conforme défini par H. Bray produit la famille $g_t^S = \mathcal{U}_t^4$ eucl avec

$$\mathcal{U}_t(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} + \frac{m\mathrm{e}^{2t}}{2r} & \text{si } \ r > \frac{m\mathrm{e}^{2t}}{2}, \\ \sqrt{\frac{2m}{r}} & \text{si } \ r \leqslant \frac{m\mathrm{e}^{2t}}{2}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Il s'agit donc d'une famille de métriques de Schwarzschild de masse constante m, donc toutes isométriques, mais définies à l'extérieur d'horizons $S(g_t) = \{r = \frac{m\mathrm{e}^{2t}}{2}\}$ qui « filent à l'infini ». La formulation générale du flot est obtenue en recherchant des facteurs conformes qui vérifient dans la métrique initiale g les mêmes équations que celles vérifiées par les fonctions (4.3) dans le modèle de Schwarschild g^S.

Les conditions portant sur g_t doivent être comprises comme analogues à une *équation différentielle* : la fonction v_t est la dérivée de u_t (le facteur conforme apparaissant dans la définition de g_t) et est déterminée par les équations (4.1). L'existence du flot et ses propriétés de régularité sont d'ailleurs obtenues par un procédé de discrétisation fort semblable à la méthode d'Euler pour les équations différentielles ordinaires.

LEMME 4.3. — *L'aire (totale) de* $\Sigma(t)$ *est constante, égale à* $\mathrm{Aire}\,(\Sigma)$.

Esquisse (*très rapide*) *de preuve.* — L'horizon initial Σ est de courbure moyenne strictement négative pour la normale extérieure dans g_t dès que $t > 0$. Dès lors, $\Sigma(t)$, surface minimale la plus extérieure pour g_t, est à l'extérieur de Σ et $\mathrm{Aire}\,(\Sigma(t)) \leqslant \mathrm{Aire}\,(\Sigma)$.

L'inégalité dans l'autre sens est nettement plus délicate et repose sur une étude fine du comportement des approximations qui sont utilisées dans la méthode d'Euler. Pour un pas $\varepsilon > 0$ petit, les approximations g_t^ε sont en effet suffisamment explicites pour que l'on puisse contrôler l'aire de leurs surfaces minimales les plus extérieures et surtout leur taux de variation. On en déduit alors que la surface minimale la plus extérieure pour g_t^ε est d'aire égale à $\mathrm{Aire}(\Sigma) + o(1)$ lorsque le pas ε tend vers 0. □

4.2. Masse et fonctions de Green

La partie la plus originale du travail de H. Bray est celle consacrée au comportement de la masse lors de l'évolution. Elle fait intervenir, de manière assez inattendue, le théorème de la masse positive.

Il met en évidence une relation (très générale) entre la masse de la variété et un objet classique de théorie du potentiel, la capacité de l'horizon, définie par

$$\mathcal{E}(\Sigma, g) = \frac{1}{2\pi} \inf_{\mathcal{D}} \int_{M_e} |d\psi|^2 \quad \text{où} \quad \mathcal{D} = \{\psi \in C_c^\infty(M),\ \psi = 1 \text{ sur } \Sigma\}. \tag{4.4}$$

La borne inférieure est bien sûre atteinte pour une fonction ψ_0 harmonique hors de Σ, nulle à l'infini et valant 1 sur l'horizon. Si la métrique est asymptotiquement plate, une telle fonction s'écrit toujours $\psi_0 = \frac{c}{2|x|} + O\left(|x|^{-2}\right)$ (voir [4]) et la formule de Green assure que $\mathcal{E}(\Sigma, g) = c$.

THÉORÈME 4.4. — *Dans les conditions précédentes,* $m(g) \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{E}(\Sigma, g)$.

Esquisse de preuve. — Soit ψ_0 une fonction minimisante pour la capacité. On considère alors le double $\bar{M} = M_e \cup (-M_e)$ (obtenu par réflexion le long de Σ) muni de la fonction harmonique φ_0 définie par $\varphi_0(x) = 1 - \frac{\psi_0(x)}{2}$ si x est dans M_e et $\varphi_0(x) = \frac{\psi_0(-x)}{2}$ si x est dans $(-M_e)$, et de la métrique $\bar{g} = \varphi_0^4\, g$. La variété $\bar{M}$ semble avoir deux bouts mais, en réalité, il n'en est rien : compte tenu du comportement asymptotique de la fonction ψ_0, l'infini de $(-M_e)$ se comporte comme un voisinage épointé de l'origine dans $\mathbb{R}^3$; la métrique s'y étend de manière C^∞ car $\bar{g}$ est de la forme $\mathcal{V}^4$ eucl avec $\mathcal{V}$ harmonique (théorème d'élimination des singularités). Un calcul direct montre de plus que la masse de $(\bar{M}, \bar{g})$ (en l'infini de M_e, qui est le seul vrai bout de $\bar{M}$) vaut $m(g) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(\Sigma, g)$. Si $\bar{g}$ était lisse sur Σ, elle serait redevable du théorème de la masse positive puisqu'elle est à courbure scalaire positive. Dans le cas présent, il faut régulariser astucieusement la métrique au voisinage de Σ et appliquer une version faible de la masse positive démontrée par H. Bray et F. Finster [10]. □

LEMME 4.5. — *La masse* $m(g_t)$ *est une fonction décroissante en* t.

Preuve. — Le calcul de la masse est effectué à l'infini : l'hypothèse de platitude harmonique assure donc qu'à l'extérieur d'un compact $g_t = u_t^4\, g_0 = (u_t \mathcal{U})^4$ eucl. De plus la fonction $u_t = 1 + \int_0^t v_t dt$ est dérivable presque partout car monotone.

Imaginons (pour simplifier) que ce soit le cas à $t = 0$. Comme $1 + \mathrm{e}^t\, v_t$ est harmonique, tend vers 0 à l'infini et vaut 1 sur l'horizon $\Sigma(t)$, $v_t = \mathrm{e}^{-t}\left(-1 + \frac{\mathcal{E}(\Sigma(t), g_t)}{2|x|}\right) + O\left(|x|^{-2}\right)$ et, de manière analogue, $\mathcal{U}(x) = \left(1 + \frac{m(g)}{2|x|}\right) + O\left(|x|^{-2}\right)$. La masse $m(t)$ se déduit directement du produit $u_t \mathcal{U}$ et on calcule $m'(0) = \mathcal{E}(\Sigma, g) - 2m(0)$, qui est négatif d'après le Théorème 4.4. La situation à $t > 0$ se traite exactement de la même façon. □

La relation entre masse et capacité n'est pas réellement nouvelle mais elle n'apparaissait jusque-là qu'en filigrane dans plusieurs travaux antérieurs [12]. En l'isolant du contexte, le travail de H. Bray souligne le rôle central du Théorème 4.4 et fournit par là des preuves beaucoup plus conceptuelles à des résultats plus anciens.

4.3. Comportement asymptotique du flot et conclusion

Il reste à comprendre le comportement des métriques g_t lorsque t devient grand. Pris un à un, les arguments employés par H. Bray ne sont pas tous difficiles, mais impliquent des estimées souvent longues, techniques, calculatoires, et l'ensemble demande une grande virtuosité. Tout le travail est néanmoins facilité par l'hypothèse de platitude harmonique : à partir d'un certain moment, tout se passe à l'extérieur d'une boule de $\mathbb{R}^3$ et l'étude des métriques g_t s'y résume à l'étude des fonctions harmoniques $\mathcal{U}_t = u_t\,\mathcal{U}$. Nous nous contentons de décrire succinctement les différentes étapes.

(a) *les surfaces $\Sigma(t)$ sont comprises entre les deux sphères $S(a\mathrm{e}^{2t})$ et $S(b\mathrm{e}^{2t})$.* Ce point est la partie la plus difficile du travail de H. Bray. Très schématiquement, il est acquis en montrant que toute autre situation conduirait à ce que l'aire de $\Sigma(t)$ ne soit pas égale à celle de Σ, en contradiction avec le Lemme 4.3. Interviennent dans la preuve de longues estimations explicites de l'aire de surfaces dans l'espace euclidien, en fonction de l'intégrale de Willmore $\int_{\Sigma(t)} H^2$. Tout ceci utilise profondément l'invariance conforme de l'intégrale de Willmore et donc l'hypothèse de platitude harmonique. En procédant avec un peu de soin, on obtient un contrôle explicite des constantes a et b.

(b) *contraction des coordonnées* : compte tenu de **(a)**, il est commode de rééchelonner toute la situation d'un facteur e^{2t}. On dispose donc de deux familles de métriques :

$$\begin{aligned} G_t &= \left(\mathrm{e}^t\,\mathcal{U}_t(x\mathrm{e}^{2t})\right)^4 \,\mathrm{eucl} = U_t^4\,\mathrm{eucl} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3 - B(\mathrm{e}^{-2t}) \\ \widetilde{G}_t &= W_t^4\,\mathrm{eucl} = (\varphi_0\,U_t)^4\,\mathrm{eucl} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{4.5}$$

où φ_0 est définie comme dans la preuve du Théorème 4.4. Elles sont asymptotiquement plates, et la première est bien sûr isométrique au bout harmoniquement plat de (M_e, g_t).

D'après le Lemme 4.5, leurs masses (avec des notations évidentes) sont donc reliées par $m'(t) = -2\widetilde{m}(t)$. Compte tenu du théorème de la masse positive et de sa décroissance, $m(t)$ converge, lorsque t tend vers l'infini, vers un $\mathrm{M} \geqslant 0$ et $\int^\infty \widetilde{m}(t) < \infty$.

(c) La fin de la preuve repose sur une *étude précise de l'espace $\mathcal{H}$ des métriques harmoniquement plates* en dehors d'une boule fixée de $\mathbb{R}^3$. Cette étude a un intérêt qui dépasse largement le cadre strict de l'inégalité de Penrose. Il n'est pas impossible qu'elle permette de préciser la structure de *l'espace des modules des métriques asymptotiquement plates.* Une clef de la démonstration est fournie par la

PROPOSITION 4.6. — *La masse est continue sur $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $m(U^4\,\mathrm{eucl}) \leqslant \delta$, alors $|U - 1|$ est uniformément bornée par ε.*

On en déduit (presque) immédiatement que $\widetilde{G}$ tend uniformément vers la métrique euclidienne. Les fonctions U_t et W_t n'étant pas indépendantes (leurs valeurs sont gouvernées, à l'origine, par le choix du flot conforme), la suite de métriques $\{G_t\}$ tend vers une métrique de Schwarzschild : la suite de fonctions U_t tend uniformément vers $1 + \frac{\mathrm{M}}{2r}$.

(d) La preuve est achevée si l'on sait montrer que *les surfaces* $\Sigma(t)$ *convergent vers l'horizon de Schwarzschild* (au sens, bien sûr, de la théorie géométrique de la mesure). Ce point découle en fait du **(c)**, car une connaissance suffisamment fine des fonctions U_t suffit, avec un peu de travail, à contrôler le comportement des horizons $\Sigma(t)$.

Contrairement à la preuve de G. Huisken et T. Ilmanen, celle de H. Bray ne suppose à aucun moment que l'horizon d'origine Σ est connexe. L'énoncé vaut donc pour toutes les régions extérieures décrites à la section 3.6, ce qui constitue la version la plus générale connue à ce jour de l'inégalité de Penrose :

THÉORÈME 4.7. — *Soit* (M, g) *une variété asymptotiquement plate de dimension* 3 *à courbure scalaire positive, ayant pour bord* (*intérieur*) *une famille finie* Σ *de sphères minimales et ne contenant pas d'autres surfaces minimales. Alors*

$$m(M, g) \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\text{Aire}\,(\Sigma)}{\pi}}. \tag{4.6}$$

En cas d'égalité, Σ *est connexe et* $M = (\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}), (1 + \frac{m}{2r})^4\,\text{eucl})$.

5. QUELQUES IDÉES POUR ALLER PLUS LOIN...

Pour les spécialistes des aspects mathématiques de la relativité générale, la preuve de l'inégalité de Penrose ne constitue qu'une première étape dans un programme beaucoup plus vaste. Il reste en effet à comprendre le cas où la variété M est une hypersurface asymptotiquement plate arbitraire (non nécessairement totalement géodésique) d'un espace-temps lorentzien. Tel est en effet le cadre originel du travail de R. Penrose, passage obligé lorsque l'on s'intéresse à la conjecture de la censure cosmique déjà évoquée. La masse doit alors être complétée par trois autres quantités $\{p_1, p_2, p_3\}$ dépendant de la géométrie extrinsèque de l'hypersurface et l'horizon n'est plus une collection de surfaces minimales mais de surfaces *piégées* [41, page 435]. Sous les conditions d'énergie les plus générales, l'ensemble (m, p_1, p_2, p_3), qui est habituellement vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique de Minkowski et porte le nom de *vecteur de moment-énergie*, vérifie une généralisation de la masse positive [46, 52] :

$$m^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 \ \geqslant\ 0.$$

Il est difficile de citer ici une conjecture précise et la forme mathématique exacte de ce que devrait être l'inégalité de Penrose dans ce cadre général est encore un sujet de débat. Avant de passer à la situation lorentzienne, une étape intermédiaire possible est d'étudier la situation *asymptotiquement hyperbolique* où l'espace euclidien modèle est remplacé par l'espace hyperbolique de dimension 3, qui est une autre hypersurface naturelle de l'espace de Minkowski. Cet objectif ne paraît pas déraisonnable à l'heure actuelle et pourrait être atteint avec les techniques de G. Huisken et T. Ilmanen.

Les résultats et les techniques de H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen permettent aussi d'ouvrir quelques perspectives pour un autre problème de grande ampleur, tant en relativité qu'en géométrie des variétés asymptotiquement plates. Comme nous l'avons signalé, il n'existe pas de notion locale de masse en relativité. Une question majeure de la recherche actuelle est donc de définir une quantité « quasi-locale » de masse. La proposition la plus géométrique est celle de R. Bartnik [5] qui suggère de définir la masse d'un ouvert Ω de M comme l'infimum des masses des variétés asymptotiquement plates à courbure scalaire positive qui contiennent Ω isométriquement. Cette définition séduisante manquait jusqu'à présent de bases solides : ainsi, il n'était nullement assuré qu'un ouvert non localement isométrique à $\mathbb{R}^3$ avait une masse de Bartnik strictement positive. Les outils développés par G. Huisken et T. Ilmanen permettent de répondre affirmativement à cette question. Ils précisent également que les masses de Bartnik d'une exhaustion Ω_i d'une variété M asymptotiquement plate à courbure scalaire positive convergent vers la masse (usuelle) de M [26]. De leur côté, les techniques de H. Bray laissent entrevoir des liens intéressants entre la masse de Bartnik (ou d'autres masses quasi-locales) et la théorie du potentiel [9], dans l'esprit du Théorème 4.4.

Tous ces résultats permettent d'envisager maintenant une étude plus approfondie de la masse de Bartnik, ou d'autres masses quasi-locales, qui pourraient être des outils puissants pour une meilleure compréhension de la géométrie des variétés asymptotiquement plates.

Remerciements. — Ce texte n'aurait pu exister sans de nombreuses conversations avec Tom Ilmanen et Hubert Bray, ni sans la lecture assidue et ô combien précieuse qu'en a faite Gilles Carron. J'ai aussi apprécié les remarques utiles de Jean-Pierre Bourguignon, Piotr Chruściel, Hélène Davaux, Zindine Djadli, Paul Gauduchon et Jacques Lafontaine. Qu'ils en soient tous chaleureusement remerciés.

RÉFÉRENCES

[1] R. Arnowitt, S. Deser & C. W. Misner – « Coordinate invariance and energy expressions in General Relativity », *Phys. Rev.* **122** (1961), p. 997–1006.

[2] S. Bando, A. Kasue & H. Nakajima – « On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth », *Invent. math.* **97** (1989), p. 313–349.

[3] C. Bär – « Lower eigenvalues estimates for Dirac operators », *Math. Ann.* **293** (1992), p. 39–46.

[4] R. Bartnik – « The mass of an asymptotically flat manifold », *Commun. Pure. Appl. Math.* **39** (1986), p. 661–693.

[5] ———, « New definition of quasi-local mass », *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989), p. 2346–2348.

[6] ———, « Quasi-spherical metrics and prescribed scalar curvature », *J. Diff. Geom.* **37** (1993), p. 31–71.

[7] R. Bishop & R. Crittenden – *Geometry of manifolds*, Pure Appl. Math., vol. XV, Acad. Press, New York, 1964.

[8] J.-P. Bourguignon – « Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski », Sém. Bourbaki n° 740, Astérisque, vol. 201-202-203, Soc. math. France, 1991, p. 321–358.

[9] H. Bray – « Proof of the Riemannian Penrose conjecture using the positive mass theorem », *J. Diff. Geom.*, **59** (2001), p. 177–267.

[10] H. Bray & F. Finster – « Curvature estimates and the positive mass theorem », *Commun. Anal. Geom.*, **10** (2002), p. 291–306.

[11] H. Bray & R. Schoen – « Recent proofs of the Riemannian Penrose inequality », *Current Developments in Mathematics*, Harvard Univ., 1999.

[12] G. L. Bunting & A. K. Masood-Ul-Alam – « Non-existence of multiple black holes in asymptotically euclidean vacuum spacetimes », *Gen. Rel. Grav.* **19** (1987), p. 147–154.

[13] Y. Choquet-Bruhat – « Positive energy theorems », Relativity, groups and topology II, Les Houches XL, 1983 (B. De Witt & R. Stora, éds.), Elsevier, Amsterdam, 1984, p. 740–785.

[14] P. T. Chruściel – « Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view », Topological properties and global structure of spacetime, Erice 1985 (P. Bergmann & V. de Sabbata, éds.), Plenum, New York, 1986, p. 49–59.

[15] ———, « On the invariant mass conjecture in General Relativity », *Commun. Math. Phys* **120** (1988), p. 233–248.

[16] V. Denisov & O. Solovev – « The energy determined in General Relativity on the basis of the traditional Hamiltonian approach does not have physical meaning », *Theor. Math. Phys.* **56** (1983), p. 832–838, english translation.

[17] L. C. Evans & J. Spruck – « Motion of level sets by mean curvature », *J. Diff. Geom.* **33** (1991), p. 635–681.

[18] R. Geroch – « Energy extraction », *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **224** (1973), p. 108–117.

[19] ———, « General Relativity », in Differential geometry, Proc. Symp. Pure Math., vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

[20] R. Hardt & X.Zhou – « An evolution problem for linear growth functionals », *Comm. Partial Differential Equations* **19** (1994), p. 1879–1907.

[21] S. Hawking – « Gravitational radiation in an expanding universe », *J. Math. Phys.* **9** (1968), p. 598–604.

[22] S. W. Hawking & G. Ellis – *The large-scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[23] M. Herzlich – « Compactification conforme des variétés asymptotiquement plates », *Bull. Soc. math. France* **125** (1997), p. 55–92.

[24] ———, « A Penrose-like inequality for the mass of Riemannian asymptotically flat manifolds », *Commun. Math. Phys.* **188** (1997), p. 121–133.

[25] O. Hijazi – « Première valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe », *C. R. Acad. Sci. Paris* **313** (1991), p. 865–868.

[26] G. Huisken & T. Ilmanen – « The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality », *J. Diff. Geom.*, **59** (2001), p. 353–437.

[27] ———, « Proof of the Penrose inequality », *Int. Math. Res. Not.* **20** (1997), p. 1045–1058, annonce.

[28] T. Ilmanen – *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 520, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[29] P. S. Jang & R. Wald – « The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis », *J. Math. Phys.* **18** (1977), p. 41–44.

[30] J. Kazdan – « Positive energy in General Relativity », Sém. Bourbaki n° 593, Astérisque, vol. 92-93, Soc. math. France, 1982, p. 315–330.

[31] M. Kruskal – « Maximal extension of the Schwarzschild metric », *Phys. Rev.* **119** (1960), p. 1743–1745.

[32] J. Lee & T. H. Parker – « The Yamabe problem », *Bull. Amer. Math. Soc.* **17** (1987), p. 37–91.

[33] A. Lichnerowicz – *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

[34] ———, « Spineurs harmoniques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **257** (1963), p. 7–9.

[35] A. Lichnewsky & R. Temam – « Pseudosolutions of the time-dependant minimal surface problem », *J. Diff. Eq.* **30** (1978), p. 340–363.

[36] R. B. Lockhart – « Fredholm properties of a class of elliptic operators on non-compact manifolds », *Duke Math. J.* **48** (1983), p. 289–312.

[37] R. B. Lockhart & R. McOwen – « Elliptic differential operators on non-compact manifolds », *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa* **12** (1985), p. 409–447.

[38] S. Luckhaus – « Solutions for the two-phase Stefan problem with the Gibbs-Thompson law for the melting temperature », *Eur. J. Appl. Math.* **1** (1990), p. 101–111.

[39] E. Malec & N. O'Murchadha – « Trapped surfaces and the Penrose inequality in spherically symmetric geometries », *Phys. Rev.* **D 49** (1994), p. 6931–6934.

[40] U. Massari & M. Miranda – *Minimal surfaces of codimension one*, North-Holland Math. Stud., vol. 91, Elsevier, 1984.

[41] B. O'Neill – *Semi-Riemannian geometry*, Acad. Press, San Diego, 1983.

[42] R. Penrose – « Conformal treatment of infinity », *Relativity, groups and topology* (C. de Witt & B. de Witt, éds.), École d'été de Physique Théorique, Les Houches 1963, Gordon and Breach, 1963, p. 563–584.

[43] ———, « Naked singularities », *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **224** (1973), p. 125–134.

[44] R. Schoen & S. T. Yau – « On the proof of the positive mass conjecture in General Relativity », *Commun. Math. Phys* **65** (1979), p. 45–76.

[45] ———, « On the structure of manifolds with positive scalar curvature », *Manuscripta math.* **28** (1979), p. 159–183.

[46] ———, « The energy and linear-momentum of spacetimes in general relativity », *Commun. Math. Phys.* **79** (1981), p. 47–51.

[47] K. Schwarzschild – « Über das Gravitationsfeld eines Masses nach der Einsteinschen Theorie », *Sitz. König. Preuss. Akad. Wiss.* (1916), p. 189–196.

[48] L. Simon – *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Anal., vol. 3, Austr. Nat. Univ., 1983.

[49] P. Sternberg, G. Williams & W. P. Ziemer – « Regularity of constrained area minimizing hypersurfaces », *J. Diff. Eq.* **94** (1991), p. 83–94.

[50] A. Visintin – « Nucleation and mean curvature flow », *Comm. Partial Differential Equations* **23** (1998), p. 17–53.

[51] R. Wald – *General Relativity*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1984.

[52] E. Witten – « A new proof of the positive energy theorem », *Commun. Math. Phys.* **80** (1981), p. 381–402.

Marc HERZLICH

Institut de Mathématiques
et Modélisation de Montpellier
UMR 5030 du CNRS
Université Montpellier II
F-34095 Montpellier Cedex 5
E-mail : herzlich@math.univ-montp2.fr

Séminaire BOURBAKI Mars 2001
53e année, 2000-2001, nO 884, p. 113 à 135

INTÉGRABILITÉ ET NON-INTÉGRABILITÉ DE SYSTÈMES HAMILTONIENS
[d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...]

par **Michèle AUDIN**

Les systèmes hamiltoniens sont les équations différentielles qui décrivent le mouvement des systèmes mécaniques dont l'énergie est conservée : ce sont les équations de Hamilton

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}. \tag{1}$$

Un système hamiltonien est dit « intégrable » s'il a beaucoup de quantités conservées, d'intégrales premières ; c'est le cas par exemple des toupies, des particules libres sur une surface de révolution ou sur une quadrique. Les systèmes intégrables ont des propriétés très spécifiques : le mouvement a lieu sur des sous-variétés invariantes, souvent des tores, les équations sont intégrables par quadratures (c'est le théorème d'Arnold-Liouville [1]).

Il y a aussi beaucoup de systèmes hamiltoniens qui ne sont pas intégrables : le problème de la Lune (problème de trois corps en interaction gravitationnelle), par exemple. Il y a des systèmes hamiltoniens dont on soupçonne qu'ils ne sont pas intégrables, parce qu'on n'a pas été capable de trouver assez d'intégrales premières, et surtout parce que des expériences ou simulations numériques montrent un comportement chaotique incompatible avec le théorème d'Arnold-Liouville.

Comment démontrer qu'ils ne sont pas intégrables ? C'est la question à laquelle est consacré cet exposé.

Les résultats présentés ici reposent sur une approche due à Poincaré [29] : on linéarise le système le long d'une solution particulière. Si les données sont analytiques, on peut complexifier l'espace de phases et le système, obtenant (donc) un système différentiel linéaire le long d'une surface de Riemann. Dans une première étude [37, 38], Ziglin a donné, au début des années 80, un critère de non-intégrabilité basé sur la non-commutation de certains éléments du groupe de monodromie de cette équation. Plus récemment, Morales et Ramis ont considéré le groupe de Galois différentiel de celle-ci et montré que, si le système est intégrable, l'algèbre de Lie de ce groupe est abélienne [26, 24]. Leur démonstration repose sur un lemme de géométrie symplectique, qui

s'applique au groupe de Galois parce que celui-ci est un groupe de Lie[1]. Comme le groupe de Galois différentiel contient le groupe de monodromie[2], le théorème de Morales et Ramis permet de retrouver les applications du théorème de Ziglin, mais il va au-delà, puisqu'il s'applique dans des cas où la monodromie est triviale.

Ces résultats ont d'assez nombreuses applications. Pour ne pas allonger démesurément ce texte, j'ai choisi de ne présenter qu'une famille d'exemples. On en trouvera de nombreux autres dans les articles originaux de Ziglin, Morales & Ramis, *etc.* (voir les références au § 3.3)[3].

Jean-Pierre Ramis a répondu avec beaucoup de gentillesse à toutes mes questions en accompagnant ses réponses de commentaires toujours éclairants. Claude Sabbah m'a suggéré d'innombrables améliorations. Pierre Baumann et Claudine Mitschi ont lu et critiqué une version préliminaire de ce texte. Que tous soient remerciés.

1. PRÉLIMINAIRES EN GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

1.1. Systèmes hamiltoniens

Les coordonnées[4] $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ de l'espace de phases $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ qui interviennent dans les équations (1) de Hamilton se globalisent : l'espace de phase sera une variété W munie d'une forme symplectique[5] ω. À toute fonction $H : W \to \mathbf{R}$ est associé un champ de vecteurs X_H, son *champ hamiltonien*, par la règle

$$(dH)_x(Y) = \omega_x(Y, X_H(x)) \qquad \forall\, x \in W, \quad \forall\, Y \in T_xW. \tag{2}$$

Le *système hamiltonien* associé à H est simplement le système différentiel défini par X_H, c'est-à-dire

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)). \tag{3}$$

Le système (1) n'est autre que le système (3) quand $W = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, cas où

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

[1] C'est même un groupe algébrique, comme l'affirme un théorème de Kolchin [16] ; voir, dans ce séminaire, [7].
[2] Toujours dans ce séminaire, voir l'exposé [5] où des résultats plus récents de méthodes de calculs de groupes de Galois sont présentés.
[3] Il existe d'autres approches à la non-intgrabilité, notamment dynamiques (voir [18, 19]) ou paramétriques (voir [14] et la remarque 2.4) mais je ne les aborderai pas ici.
[4] On peut remplacer $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$ dans cette partie. Il faudra le faire pour les applications (voir les §§ 3.1 et 3.4).
[5] c'est-à-dire d'une 2-forme fermée non dégénérée

Les mouvements des systèmes mécaniques dont l'énergie est conservée — par exemple tous les flots géodésiques — sont susceptibles d'une telle description. Je donne ici les familles d'exemples que j'utiliserai pour les applications, on en trouvera de nombreux autres dans [28, 3].

Exemple (Système de Hénon-Heiles — à suivre). — C'est le système sur la variété symplectique $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ défini par le hamiltonien[(6)]

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(Aq_1^2 + Bq_2^2) - q_1^2 q_2 - \frac{\lambda}{3} q_2^3 \tag{4}$$

où A, B et λ sont des paramètres à préciser (on considérera particulièrement le cas où $A = B \neq 0$ et celui où $B = 0$).

Le système différentiel (1) est

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_1 = -Aq_1 + 2q_1 q_2, \quad \dot{p}_2 = -Bq_2 + q_1^2 + \lambda q_2^2. \tag{5}$$

Exemple (Le solide pesant — à suivre). — On considère un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant. Dans un repère lié au solide, l'énergie totale s'écrit :

$$H(\gamma, M) = \frac{1}{2} M \cdot \Omega - \gamma \cdot L$$

où γ désigne la pesanteur, M est le moment angulaire, lié à la rotation instantanée Ω par la relation $M = \mathcal{J}(\Omega)$ pour un endomorphisme symétrique $\mathcal{J}$, l'inertie et enfin L désigne le vecteur $\overrightarrow{OG}$ liant le point fixe O au centre de gravité G. Le système différentiel est, lui,

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \gamma \wedge \Omega \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + \gamma \wedge L. \end{cases} \tag{6}$$

On considère comme espace de phases la variété (difféomorphe au fibré tangent de la sphère S^2) :

$$W_a = \left\{ (\gamma, M) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|\gamma\|^2 = 1 \text{ et } \gamma \cdot M = a \right\},$$

qui peut être munie d'une structure symplectique[(7)] telle que le système (6) soit le système hamiltonien associé à H.

[(6)] Ce hamiltonien sert notamment à modéliser le mouvement d'une étoile dans une galaxie cylindrique.
[(7)] Voir, dans ce séminaire, [32].

1.2. Systèmes intégrables

La règle (2) a pour première vertu d'obliger H à être constante sur les solutions du système hamiltonien :

$$X_H \cdot H = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0,$$

comme on l'a déjà dit, l'énergie est conservée. Toute fonction f satisfaisant à la propriété $X_H \cdot f = 0$ est une *intégrale première*. On dit que le système hamiltonien associé à la fonction H sur la variété W de dimension $2n$ est *intégrable* s'il possède n intégrales premières fonctionnellement indépendantes en involution.

Rappelons que deux fonctions f et g sont dites « en involution » quand leur *crochet de Poisson* $\{f, g\} = X_g \cdot f$ est nul, c'est-à-dire quand chacune est constante sur les solutions du système hamiltonien associé à l'autre. Comme $\{f, g\} = X_g \cdot f = \omega(X_g, X_f)$, le sous-espace de l'espace tangent T_xW engendré par les champs hamiltoniens en x de fonctions en involution est isotrope et donc de dimension au plus égale à n. L'hypothèse d'indépendance fonctionnelle dit que, pour x dans un ouvert dense de W, ces vecteurs sont indépendants. L'espace qu'ils engendrent est donc de dimension maximale n et on a « autant d'intégrales premières en involution que possible ».

La physique peut fournir des intégrales premières, comme le moment par rapport à un axe de révolution (toupie, pendule sphérique, particule libre sur une surface de révolution,...).

Exemple (Le solide pesant — suite). — Si le point fixe du solide est son centre de gravité (cas d'Euler-Poinsot), le moment $K = \|M\|^2$ est une intégrale première. Si $\overrightarrow{OG}$ est un axe de révolution (cas de Lagrange, dit « toupie »), le moment $K = M \cdot L$ par rapport à cet axe est une intégrale première.

Il y a parfois aussi des intégrales premières « évidentes ».

Exemple (Hénon-Heiles — suite). — Quand $A = B$ et $\lambda = 1$, le hamiltonien (4) s'écrit

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + Ax_1^2 - \frac{4}{3}x_1^3 + Ax_2^2 + \frac{4}{3}x_2^3$$

(où $x_1 + x_2 = q_1$, $x_1 - x_2 = q_2$ et les y_i sont les moments correspondants) de sorte que la fonction

$$K = \frac{1}{2}y_1^2 + Ax_1^2 - \frac{4}{3}x_1^3$$

est une intégrale première.

Plus mystérieusement, la fonction K définie sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, dans [10] et par

$$K = q_1^4 + 4q_1^2q_2^2 + 4p_1(p_1q_2 - p_2q_1) - 4Aq_1^2q_2 + (4A - B)(p_1^2 + Aq_1^2)$$

est une intégrale première pour le hamiltonien (4) de Hénon-Heiles quand $\lambda = 6$.

Dans ces deux familles d'exemples, la variété symplectique étant de dimension 4, l'existence d'une « deuxième » (c'est-à-dire autre que l'énergie) intégrale première suffit pour que le système soit intégrable.

Les champs hamiltoniens des intégrales commutent et définissent donc une action (locale) de $\mathbf{R}^n$ sur l'ouvert où les intégrales premières sont indépendantes. Si les champs sont complets, on voit que cet ouvert est feuilleté par des espaces homogènes de $\mathbf{R}^n$, souvent des tores, sur lesquels le mouvement a lieu. On peut montrer que le système hamiltonien se linéarise sur ces tores, c'est le théorème d'Arnold-Liouville, qui montre un comportement très régulier (« non chaotique ») des solutions.

1.3. Un lemme de géométrie symplectique

Le lemme suivant est le cœur de la démonstration du théorème de Morales & Ramis.

LEMME 1.1 ([26]). — *Soit (E,ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ et soient $F_1,\dots,F_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de E, fonctionnellement indépendantes et en involution. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sp}(E)$ qui préserve les F_i. Alors $\mathfrak{g}$ est abélienne.*

Démonstration. — Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(E)$ s'identifie à celle des formes quadratiques sur E (avec le crochet de Poisson). Un élément Z de $\mathfrak{sp}(E)$ peut être considéré comme un endomorphisme de E ou comme un champ de vecteurs linéaire sur E. Dire que Z préserve la forme symplectique ($\mathcal{L}_Z\omega = di_Z\omega = 0$), c'est dire que Z est un champ hamiltonien, ici celui d'une forme quadratique g sur E.

Dire que Z préserve les F_i, c'est dire que $Z\cdot F_i = 0$, c'est-à-dire que la forme quadratique g commute avec les F_i puisque $Z\cdot F_i = \{F_i, g\}$, donc qu'elle est constante sur les composantes connexes des niveaux communs des F_i.

Si x est un point de l'ouvert U de E sur lequel les F_i sont indépendantes, on a

$$Z(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(dF_i)_x = \bigcap_{i=1}^{n} X_i(x)^\circ = \langle X_1(x),\dots,X_n(x)\rangle^\circ = \langle X_1(x),\dots,X_n(x)\rangle$$

(en appelant X_i le champ hamiltonien X_{F_i} et en notant $^\circ$ l'orthogonalité pour ω). Ainsi Z s'écrit $Z = \sum \lambda_j X_j$ pour certaines fonctions $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ localement constantes sur les niveaux communs des F_i.

Si Z et Z' sont deux éléments de $\mathfrak{g}$, écrits

$$Z = \sum \lambda_j X_j, \qquad Z' = \sum \lambda'_j X_j,$$

on a, toujours pour x dans U,

$$[Z,Z'](x) = \left[X_g, \sum \lambda'_j X_j\right](x) = \sum \left(X_g(x)\cdot\lambda'_j(V)\right) X_j(x) + \sum \lambda'_j(x)[Z,X_j](x).$$

Le champ $[Z,X_j]$ est le champ hamiltonien de $\{g,F_j\}$, il est donc nul. On a de plus, $X_g(x)\cdot\lambda'_j = 0$ puisque λ'_j est constante sur le niveau de x, auquel X_g est tangent.

On en déduit que le crochet $[Z, Z']$ est nul sur U, donc aussi sur E. Le crochet des endomorphismes Z et Z' est donc nul lui aussi. □

2. PRÉLIMINAIRES EN THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce paragraphe on considère le cas général du système différentiel associé à un champ de vecteurs X sur une variété W. On suppose ici que tout est analytique complexe. La dimension de W est m.

2.1. Équation aux variations

Pour tout point x_0 de W, il existe un ouvert U de $\mathbf{C}$ et un voisinage V de x_0 tels que le flot de X soit défini sur $U \times V$:

$$\begin{aligned} U \times V &\longrightarrow W \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x). \end{aligned}$$

On munit (provisoirement) W de la topologie dont une base est formée des ensembles $\{\varphi_t(x)\}_{t\in U}$ et on définit la trajectoire Γ passant par x_0 comme la composante connexe de x_0 pour cette topologie. Si X ne s'annule pas en x_0, la courbe Γ est une surface de Riemann et le temps t est une coordonnée locale au voisinage de chacun de ses points. L'injection naturelle i de Γ dans W (munie de sa topologie naturelle) est une immersion injective.

Selon une tradition remontant à Poincaré [29], on considère l'équation aux variations, décrivant les solutions « infinitésimalement proches » d'une solution donnée. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des solutions proches, écrivons $y(t) = x(t) + Y(t)$ dans une carte. On a alors, à l'ordre 1,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = X(y(t)) - X(x(t)) = (dX)_{x(t)}(Y(t)).$$

Cette équation différentielle *linéaire* en Y est l'équation aux variations, que je vais décrire maintenant de façon plus intrinsèque. Le vecteur $Y(t)$ est un champ de vecteurs tangents à W le long de Γ, c'est-à-dire une section du fibré vectoriel $i^\star TW \to \Gamma$.

La dérivée de Lie $\pounds_X$ définit un opérateur D sur les sections locales de $i^\star TW$: on définit DY en prolongeant Y en $\widetilde{Y}$ sur un voisinage de Γ, calculant $\pounds_X \widetilde{Y}$ $(= [X, \widetilde{Y}])$ et restreignant ce champ de vecteurs à Γ. Le résultat ne dépend pas du choix de $\widetilde{Y}$. L'opérateur D ainsi défini satisfait, pour toute fonction f sur Γ, à la relation

$$D(fY) = \dot{f}Y + fDY.$$

Remarque 2.1. — En d'autres termes, $\nabla = D \otimes dt$ est une connexion sur le fibré $i^\star TW$.

On appelle *équation aux variations* l'équation linéaire

$$DY = 0 \qquad \text{ou} \qquad \nabla Y = 0.$$

On aura remarqué que X lui-même en est une solution. Écrivons cette équation en coordonnées. Si $(e_1(t), \dots, e_m(t))$ est une base de sections locales du fibré $i^\star TW \to \Gamma$, une section Y de $i^\star TW$ s'écrit $Y(t) = \sum y_i(t) e_i(t)$ et

$$DY = \sum_{i=1}^{m} (\dot{y}_i e_i + y_i De_i) = \sum_{i=1}^{m} \left(\dot{y}_i + \sum_{k=1}^{m} a_{k,i} y_k \right) e_i,$$

ce qui donne, en appelant y le vecteur colonne des y_i et $A(t)$ la matrice des $A(t)_{i,j} = a_{j,i}(t)$:

$$\dot{y} + A(t)y = 0.$$

Dans le cas où W est un ouvert de $\mathbf{C}^m$ et où on utilise la base $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_m} \right)$ de $\mathbf{C}^m$ restreinte à la trajectoire, on a

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = -\frac{\partial X}{\partial x_i} \text{ de sorte que } A(t) = -(dX)_{x(t)}.$$

L'équation aux variations est la *linéarisée* $\dot{y} = (dX)_{x(t)} y$ de l'équation différentielle originelle. On retrouve l'équation aux variations « à la Poincaré » évoquée ci-dessus.

L'exemple le plus classique est celui de l'équation des champs de Jacobi le long d'une géodésique d'une variété riemannienne, équation aux variations pour le flot géodésique.

Exemple (Hénon-Heiles — suite). — Considérons à nouveau l'exemple du système de Hénon-Heiles. Les solutions contenues dans le plan $q_1 = p_1 = 0$ ont pour supports les courbes Γ_h d'équations

$$p_2^2 = \frac{2\lambda}{3} q_2^3 - B q_2^2 + 2h.$$

Si $\lambda \neq 0$, la courbe Γ_h est le complémentaire d'un point dans une courbe elliptique lisse pour $h \neq 0$ (et $|h|$ assez petit). Un paramétrage d'une solution par le temps t est donné par la fonction $\wp$ associée à la courbe elliptique correspondante équivalente

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \qquad \text{avec } g_2 = \frac{B^2}{12} \text{ et } g_3 = \frac{B^3}{216} - \frac{h\lambda^2}{18} \tag{7}$$

par

$$q_2(t) = \frac{1}{2\lambda} \left(12\wp(t) + B \right), \qquad p_2(t) = \frac{6}{\lambda} \wp'(t). \tag{8}$$

Si $B = 0$ et $\lambda \neq 0$, on utilisera aussi les courbes rationnelles (cubiques cuspidales)

$$p_2^2 = \frac{2\lambda}{3} q_2^3 \tag{9}$$

correspondant à $h = 0$ et paramétrées par

$$q_2 = \frac{6}{\lambda t^2}, \qquad p_2 = -\frac{12}{\lambda t^3}.$$

Si $B = 0$ et $\lambda = 0$, on utilisera tout simplement les droites paramétrées par

$$q_2(t) = at - b, \qquad p_2(t) = a \text{ avec } a^2 = 2h. \tag{10}$$

L'équation aux variations le long d'une de ces solutions est le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = P_1 \\ \dot{Q}_2 = P_2 \\ \dot{P}_1 = -AQ_1 + 2q_2(t)Q_1 \\ \dot{P}_2 = -BQ_2 + 2\lambda q_2(t)Q_2 \end{cases}$$

obtenu en linéarisant le système hamiltonien (5).

2.2. Formes initiales et intégrales premières

On considère maintenant une fonction holomorphe f sur W. Appelons $f_x^\circ(Y)$ le terme homogène de plus bas degré dans la série de Taylor de f au point x, calculé sur le vecteur Y. Rappelons que si les $k-1$ premières dérivées de f en x sont nulles, la k-ième $(d^k f)_x$ est bien définie et est un polynôme homogène de degré k sur $T_x W$.

Supposons que la fonction f soit une intégrale première holomorphe du champ X. On vérifie sans mal qu'alors la valuation de f en x est constante sur la trajectoire Γ de x. On définit donc bien une fonction

$$f^\circ : i^\star TW \longrightarrow \mathbf{C}$$

en posant, pour $x \in \Gamma$ et $Y \in T_x W$,

$$f^\circ(Y) = \frac{1}{k!}(d^k f)_x(Y) \text{ pour } k = v_x(f).$$

Cette fonction est appelée *forme initiale* de f. Si la fonction f est seulement *méromorphe*, on l'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes et on définit sa forme initiale comme quotient des formes initiales, c'est une fraction rationnelle en Y à coefficients méromorphes en x.

Lemme 2.2 ([29, 37]). — *Si f est une intégrale première du champ X, alors f° est une intégrale première de l'équation aux variations.*

Démonstration. — Utilisons au voisinage de $x \in \Gamma$ des coordonnées (t, y) sur W dans lesquelles $X = \partial/\partial t$ et Γ est l'axe des t. La fonction holomorphe f est alors une fonction de y seul et f° est son terme homogène de plus bas degré. L'équation aux variations a pour solutions les vecteurs Y constants, sur lesquels f° est constante. Le cas où f est méromorphe est laissé en exercice. □

Rien ne garantit que les formes initiales de k fonctions indépendantes soient encore indépendantes, mais dans l'algèbre que ces fonctions engendrent, il y a effectivement k fonctions dont les formes initiales en x sont indépendantes. C'est ce qu'affirme le théorème suivant, pour une démonstration duquel je renvoie à [37, 4, 3] :

THÉORÈME 2.3 (Lemme de Ziglin [37]). — *Soient $f_1, \dots, f_k$ des (germes de) fonctions méromorphes fonctionnellement indépendantes sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^m$. Alors il existe des polynômes $P_1, \dots, P_k$, où $P_i \in \mathbf{C}[z_1, \dots, z_i]$, tels que les formes initiales à l'origine des k fonctions $g_i = P_i(f_1, \dots, f_i)$ soient des fractions rationnelles algébriquement indépendantes dans $\mathbf{C}(x_1, \dots, x_m)$.* □

Remarque 2.4. — En adaptant la démonstration de ce lemme, E. Juliard Tosel a pu démontrer un très original théorème « paramétrique » de non-intégrabilité méromorphe [14].

2.3. Groupe de Galois, groupe de monodromie

Dans une trivialisation méromorphe du fibré $i^\star TW \to \Gamma$, l'équation aux variations est un système différentiel linéaire dont les coefficients sont des fonctions méromorphes sur la courbe Γ. Avec la dérivation par rapport à la variable temporelle t, le corps des fonctions méromorphes $\mathcal{M}(\Gamma)$ est un corps différentiel dont le corps des constantes est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On peut aussi en considérer des versions locale (le corps des fractions de l'anneau des germes de fonctions analytiques en un point) ou formelle. La théorie de Galois différentielle (existence et unicité de l'extension de Picard-Vessiot, plus petite extension « qui contient toutes les solutions » de l'équation différentielle) s'applique à l'équation différentielle linéaire, qui est donc munie d'un groupe de Galois[(8)], lequel peut se représenter comme un sous-groupe *algébrique* de $\mathrm{GL}(m; \mathbf{C})$. Le point de vue des « fibrés avec connexion » évoqué dans la remarque 2.1 mène à la construction tannakienne du groupe de Galois (voir [22]).

Les intégrales premières du champ X sont, par définition, constantes le long de Γ. On vérifie sans mal :

LEMME 2.5 ([26]). — *Le groupe de Galois de l'équation aux variations laisse invariante la forme initiale f° de l'intégrale première méromorphe f.* □

Le groupe de Galois contient notamment le groupe de monodromie de l'équation différentielle, représentation du groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, x)$ dans $\mathrm{GL}(T_x W)$ — identifié à $\mathrm{GL}(m; \mathbf{C})$ — obtenue en prolongeant analytiquement une base des solutions en x le long des lacets basés en x.

Supposons que les points singuliers de l'équation différentielle linéaire (pôles des coefficients) soient *réguliers*, c'est-à-dire que les solutions soient à croissance modérée

(8) Pour les bases de la théorie de Galois différentielle, dont le premier paragraphe de [5] est un résumé impressionnant d'efficacité (voir aussi [6]), je renvoie à [15, 22, 21, 30].

au voisinage de ces points. Le groupe de Galois est alors l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie.

Si au contraire le point $a \in \Gamma$ est un point singulier irrégulier, le groupe de Galois prend en compte le phénomène de Stokes au voisinage de a et contient le *groupe de Stokes*, obtenu en comparant les développements asymptotiques des solutions dans les différents secteurs au voisinage de a (voir [22]).

Un remarquable théorème de Ramis ([23, théorème 6], voir aussi [5]) affirme que le groupe de Galois analytique local en a est topologiquement engendré par le groupe de Galois formel en a (qui contient aussi la monodromie formelle et le *tore exponentiel*, dont nous n'aurons pas besoin ici) et le groupe de Stokes.

Cette richesse locale du groupe de Galois contribue à faire sa force dans les applications, comme on le verra aux §§ 3.3.2 et 3.4.

2.4. Points singuliers de l'équation aux variations

Pour que l'équation aux variations le long de la trajectoire Γ ait des points singuliers, on aura besoin

– de « points à l'infini » sur Γ et donc aussi sur W. On supposera que le champ de vecteurs X, de même que les intégrales premières, est méromorphe,

– et plus généralement, de points singuliers sur la trajectoire. On s'autorisera donc à appeler « trajectoire » de X la réunion d'une authentique trajectoire et de certains de ses points d'accumulation, et Γ la surface de Riemann normalisée.

Par exemple, on pourra considérer la courbe cuspidale (9) *avec* son point singulier ($q_2 = p_2 = 0$, $t = \infty$) — la surface de Riemann Γ est $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{0\}$ — ou la droite (10) *avec* son point à l'infini — la surface de Riemann est $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

2.5. Cas d'un système hamiltonien

Pour appliquer, au § 3, les constructions précédentes au cas d'un système hamiltonien, on supposera que la variété W est analytique complexe, que la forme symplectique ω est une forme (symplectique complexe) méromorphe sur W et que le hamiltonien H, tout comme les autres intégrales premières, est une fonction méromorphe.

Remarquons que, dans le cas d'un système hamiltonien, le groupe de Galois (et donc aussi le groupe de monodromie) est symplectique :

LEMME 2.6. — *Si X est un champ de vecteurs hamiltonien sur une variété symplectique W, le groupe de Galois de l'équation aux variations le long d'une trajectoire Γ, vu comme sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(T_xW)$, est un sous-groupe du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(T_xW)$.*

C'est facile, aussi bien du point de vue tannakien, qui est particulièrement bien adapté à ce type de propriété qu'à partir d'une construction directe de l'extension de Picard-Vessiot. □

3. THÉORÈMES DE NON-INTÉGRABILITÉ

La toute première approche à la non-intégrabilité est due à S. Kowalevskaya [17] : pour étudier l'intégrabilité du système décrivant le mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant, elle s'est demandé à quelle condition les solutions du système hamiltonien sont des fonctions *méromorphes*[9], c'est-à-dire sans ramifications, logarithmes, singularités mobiles autres que des pôles. Elle a démontré que cette propriété n'est satisfaite que dans trois cas (ce sont les cas où l'on sait maintenant que le système est intégrable au sens utilisé dans ce texte), mettant ainsi notamment en évidence le cas qui porte son nom et dans lequel elle a exhibé l'intégrale première manquante. La relation entre l'intégrabilité au sens (dit « de Liouville ») considéré ici et la douceur des singularités des solutions n'est pas complètement élucidée (voir par exemple [36]). Les méthodes d'algèbre différentielle exposées ici s'en approchent — à l'ordre 1.

3.1. Deux théorèmes

Dans le cas d'une trajectoire générique d'un système intégrable, on vérifie facilement [3] que le groupe de Galois est « très petit » (pour un groupe algébrique !), il est notamment connexe et abélien. Dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a toujours :

THÉORÈME 3.1 ([26]). — *Soit* Γ *une trajectoire non stationnaire du champ hamiltonien méromorphe* X *sur la variété symplectique analytique* W *de dimension* $2n$*. Si* X *possède* n *intégrales premières méromorphes indépendantes en involution, alors le groupe de Galois de l'équation aux variations le long de* Γ *est virtuellement*[10] *abélien.*

Démonstration. — Fixons un point x sur Γ. Sur l'espace vectoriel T_xW muni de la forme symplectique (constante) ω_x, le lemme de Ziglin (théorème 2.3) fournit n fonctions indépendantes : les formes initiales en x de n intégrales premières indépendantes du champ X. Appelons-les $F_1, \ldots, F_n$. On a bien sûr :

[9] C'est ce qu'on appelle aujourd'hui la « propriété de Painlevé » ou le « test » de Painlevé (sans doute un *plagiat par anticipation* [20] de la part de Kowalevskaya).
[10] Un groupe algébrique est dit *virtuellement* truc si sa composante neutre est truque.

LEMME 3.2. — *Si f et g sont des fonctions méromorphes sur W qui commutent pour le crochet de Poisson défini par ω, leurs formes initiales en x sont des fonctions sur T_xW qui commutent pour le crochet de Poisson défini sur cet espace vectoriel par ω_x.* □

Les fonctions $F_1, \dots, F_n$ sont donc en involution et invariantes par le groupe de Galois (lemme 2.5), lequel groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symplectique (lemme 2.6). Le théorème est alors conséquence du lemme de géométrie symplectique 1.1. □

La même démonstration donne :

THÉORÈME 3.3. — *Soit Γ une trajectoire non stationnaire du champ hamiltonien méromorphe X sur la variété symplectique analytique W de dimension $2n$. Si X possède n intégrales premières méromorphes indépendantes en involution, alors l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie de l'équation aux variations le long de Γ est un groupe algébrique virtuellement abélien.* □

COROLLAIRE 3.4 ([37]). — *Soit Γ une trajectoire non stationnaire du champ hamiltonien méromorphe X sur la variété symplectique analytique W de dimension $2n$. Supposons que X possède n intégrales premières méromorphes indépendantes en involution. Si g et g' sont deux éléments non résonants du groupe de monodromie le long de Γ, ils commutent.*

Démonstration. — Appelons H l'adhérence de Zariski du sous-groupe de $\mathrm{Sp}(E)$ engendré par g. Dire que g n'est pas résonant, c'est dire que H est un tore maximal. En particulier, ce groupe est connexe. De même pour l'adhérence de Zariski du sous-groupe engendré par g'. Les deux éléments g et g' sont donc dans la composante neutre de l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie, qui est commutative grâce au théorème 3.3. □

Remarque 3.5. — Si la démonstration proposée ici est beaucoup plus simple que la démonstration de Ziglin, le théorème de Ziglin est en fait un peu plus fort que l'énoncé présenté ici, il s'applique à des intégrales premières qui ne commutent pas nécessairement entre elles. Dans le cas de deux degrés de liberté ($2n = 4$), une deuxième intégrale première est toujours en involution avec le hamiltonien et il n'y a pas de différence entre l'énoncé originel de Ziglin et le corollaire 3.4.

3.2. Vers les applications

Le groupe de Galois est souvent difficile à calculer. Pour les applications, il est parfois pratique de le « réduire ». Précisément, la géométrie symplectique dispose d'un procédé, la *réduction symplectique*, qui peut être utilisé ici pour abaisser l'ordre de l'équation linéarisée $DY = 0$.

Considérons un sous-fibré isotrope $E \subset i^\star TW$ et son orthogonal (pour ω) E°, de sorte que $E \subset E^\circ$. On vérifie sans difficulté :

LEMME 3.6. — *Le fibré E est invariant par l'opérateur D si et seulement si le fibré E° l'est.* □

Ainsi D définit-il un opérateur, noté D_N, sur le fibré symplectique E°/E. Comme la trajectoire Γ n'est pas stationnaire, le fibré $i^\star TW$ contient toujours un sous-fibré isotrope, le fibré tangent $T\Gamma$, engendré par X. Appelons Q le niveau de la fonction H dans lequel se trouve la trajectoire Γ. L'orthogonal du fibré tangent $T\Gamma$ n'est autre que $i^\star TQ$: comme $\omega(X,Y) = -dH(Y)$, l'orthogonal de X est le noyau de dH. Il est bien clair que le sous-fibré $T\Gamma$ de $i^\star TW$ est invariant par D : si X et Y sont tangents à Γ, alors $\pounds_X Y = [X,Y]$ est tangent à Γ. Donc le lemme s'applique à

$$T\Gamma \subset i^\star TQ \subset i^\star TW.$$

Le fibré réduit $i^\star TQ/T\Gamma$ est noté N (pour « normal » : c'est le fibré symplectique normal à Γ). Il est muni de l'opérateur D_N. L'équation $D_N Z = 0$ est dite équation aux variations *normales*. Comme pour l'équation aux variations, il est parfois agréable de considérer la connexion $\nabla_N = D_N \otimes dt$.

Dans le cas d'un flot géodésique, l'équation aux variations normales est simplement celle des champs de Jacobi orthogonaux à la géodésique considérée.

Exemple (Hénon-Heiles — suite). — Revenons au système linéaire obtenu en linéarisant le système de Hénon-Heiles le long d'une solution Γ contenue dans le plan $q_1 = p_1 = 0$. Le fibré symplectique normal à Γ s'identifie au fibré trivial de fibre le plan des (Q_1, P_1). L'équation aux variations normales est

$$\dot{Q}_1 = P_1, \qquad \dot{P}_1 = (-A + 2q_2(t))Q_1$$

système équivalent à l'équation linéaire du second ordre

$$\ddot{Q} + (A - 2q_2(t))Q = 0 \tag{11}$$

(où $Q = Q_1$).

C'est la proposition suivante qui va permettre les applications.

PROPOSITION 3.7. — *Le groupe de Galois de D_N est un quotient du groupe de Galois de D (par un sous-groupe abélien).*

Ici aussi le point de vue tannakien est sans doute le mieux adapté. Du point de vue de la théorie de Picard-Vessiot, la proposition n'est pas très difficile à démontrer, on vérifie qu'on peut construire les solutions de D à partir de celles de D_N, de sorte que l'extension de Picard-Vessiot de D est une extension de celle de D_N (voir les articles originaux [26, 24] ou par exemple [3]). □

COROLLAIRE 3.8. — *Pour qu'un système soit intégrable, il est nécessaire que le groupe de Galois de l'équation aux variations normales le long d'une trajectoire non stationnaire soit virtuellement abélien.* □

3.3. Application aux hamiltoniens de Hénon-Heiles

Les résultats de Ziglin et de Morales & Ramis ont trouvé des applications à la non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens variés :

- solide pesant [38],
- champ de Yang-Mills avec groupe de jauge SU(2) [38],
- différents cas de systèmes à n corps dans divers potentiels,
  - en $1/r^2$ [13]
  - ou newtoniens,
    - par le groupe de Galois [8][(11)]
    - ou par le groupe de monodromie [31],
- système de Hénon-Heiles [12],
- toute une classe de potentiels homogènes [35, 25],
- modèle cosmologique dit « Bianchi IX » [27, 24],
- pendule à ressort [27, 24].

Ziglin applique notamment son théorème dans [38] pour démontrer que le mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant n'est pas intégrable avec des intégrales premières méromorphes, sauf dans les cas où précisément, on sait qu'il est intégrable[(12)]. Suite à l'indication donnée par la méthode de Kowalevskaya évoquée ci-dessus, un résultat plus faible (pas d'intégrale supplémentaire holomorphe) avait été démontré par Husson [11]. La méthode qu'utilise Ziglin pour le solide est semblable à celle qu'il utilise pour le système de Hénon-Heiles et que je vais expliquer ici (courbes elliptiques), mais un peu plus lourde (il y a plus de paramètres), c'est pourquoi je ne présente ici que des applications à la non-intégrabilité du système de Hénon-Heiles pour certaines valeurs des paramètres.

Dans la première série, essentiellement due à Ziglin, la surface de Riemann Γ est le complémentaire d'un point dans une courbe elliptique, l'équation aux variations normales a une singularité régulière, le groupe de Galois est simplement l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie, une représentation linéaire d'un groupe libre à deux générateurs, qui a une forte tendance à la non-commutativité.

(11) Le fait que le groupe de Galois soit *algébrique* permet parfois de l'évaluer par des méthodes algébriques, en particulier à l'aide du calcul formel.

(12) les trois cas déjà mentionnés : le point fixe est le centre de gravité, le solide a un axe de révolution, le cas de Kowalevskaya, voir par exemple [2] ou [32]

Dans la deuxième série, la surface de Riemann est rationnelle, la monodromie ne donne aucun résultat mais l'équation a une singularité irrégulière et le groupe de Galois contient, grâce au phénomène de Stokes[13], assez de non-commutativité.

Ici le système a deux degrés de liberté, l'équation aux variations normales est d'ordre 2 — c'est l'équation (11) — et son groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symplectique (lemme 2.6), ici de $\mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$.

3.3.1. Le cas elliptique, preuve par la monodromie. — L'équation aux variations normales (11) le long de la solution (8) est[14]

$$\ddot{Q} - \left(\frac{B}{\lambda} - A + \frac{12}{\lambda}\wp(t)\right) Q = 0.$$

Étudions les solutions au voisinage de $t = 0$. La fonction $\wp$ a un pôle double en 0, qui correspond au point $q_2 = p_2 = \infty$ sur Γ_h. Les solutions de l'équation aux variations normales s'obtiennent, au voisinage de 0, par la méthode de Frobenius, en écrivant cette équation $t^2\ddot{Q} + f(t)Q = 0$ et en cherchant les solutions de la forme

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\rho+k}, \qquad c_0 \neq 0.$$

Le nombre ρ doit être solution de l'équation indicielle

$$\rho(\rho-1) + f(0) = 0, \text{ avec ici } f(0) = -\frac{12}{\lambda},$$

qui a deux racines distinctes ρ_1 et ρ_2 pour $\lambda \neq -48$. Si la différence $\rho_1 - \rho_2$ n'est pas un entier, l'équation a alors deux solutions indépendantes de la forme

$$t^{\rho_1}\alpha_1(t), \qquad t^{\rho_2}\alpha_2(t)$$

où α_1 et α_2 sont analytiques[15] au voisinage de 0. Le prolongement analytique d'une détermination de t^{ρ_i} le long d'un petit lacet γ faisant le tour de 0 donne la monodromie $\widetilde{\gamma}$ de ce lacet. Elle est diagonale dans la base considérée et ses valeurs propres sont $\exp(2i\pi\rho_1)$ et $\exp(2i\pi\rho_2)$ (elle est bien dans $\mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$, puisque $\rho_1 + \rho_2 = 1$).

Étudions maintenant le groupe de Galois de l'équation aux variations normales. Comme celle-ci est à singularité régulière, ce groupe est l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie, sous-groupe de $\mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$ engendré par la monodromie le long de deux générateurs α et β du groupe fondamental de Γ_h, que je vais choisir ici comme venant d'une base d'un parallélogramme de périodes. Par exemple, le lacet γ dont je viens d'évaluer la monodromie est le commutateur $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Si ρ_1 et ρ_2 ne sont

[13] Rappelons que le groupe de Stokes est engendré par des matrices unipotentes, ce qui explique sa forte tendance à la non-commutativité.

[14] C'est une « équation de Lamé » (voir [34])... mais j'ai essayé de ne pas trop utiliser la botanique des équations différentielles.

[15] ce qui montre en particulier que la singularité en 0 est régulière

pas rationnels, $\widetilde{\gamma}$ n'est pas d'ordre fini et le groupe de Galois contient un sous-groupe conjugué au groupe des matrices diagonales.

PROPOSITION 3.9 ([38]). — *Si $A \neq (2k+1)^2\pi^2/4$, $B \neq 0$ et si $\rho^2 - \rho - \dfrac{12}{\lambda}$ n'a pas de racine rationnelle, le système de Hénon-Heiles n'a pas de deuxième intégrale première méromorphe sur $\mathbf{C}^4$.*

Démonstration. — Supposons au contraire le système intégrable. Alors la composante neutre du groupe de Galois doit être un sous-groupe abélien. Comme nous venons de remarquer que ce groupe n'est pas fini, les seules possibilités[(16)] sont

– que tous ses éléments soient triangulaires dans la même base ; ici, comme $\widetilde{\gamma}$ est un commutateur, ses valeurs propres devraient être égales à 1, ce que nous avons exclu,

– qu'il contienne un sous-groupe d'indice 2 dont tous les éléments sont diagonalisables dans la base de vecteurs propres de $\widetilde{\gamma}$ et un élément qui échange les directions propres de $\widetilde{\gamma}$, ce que je vais exclure maintenant.

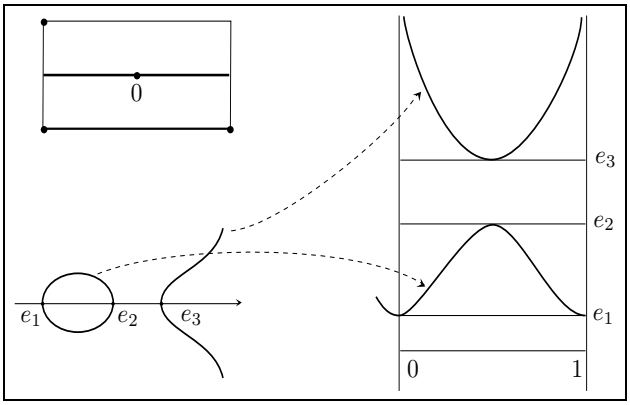
En effet, dans ce cas, la matrice de cet élément dans une base de vecteurs propres de $\widetilde{\gamma}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ et ses valeurs propres sont } \pm i.$$

On regarde ce qui se passe quand h tend vers 0. La courbe elliptique (7), qui a pour équation

$$y^2 = 4\left(x + \frac{B}{12}\right)^2\left(x - \frac{B}{6}\right) + \frac{h\lambda^2}{18} \tag{12}$$

tend vers une cubique à point double (il est important ici que B ne soit pas nul) :



La courbe elliptique et sa fonction $\wp$

(16) Voir par exemple [15] pour les propriétés des sous-groupes algébriques de $\mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$ utilisées ici.

e_1 et e_2 tendent vers $-B/12$ (notation de la figure[17]). On peut choisir pour α un cycle paramétré par $[0,1]$ qui est contracté à la limite (cycle évanescent), l'ovale réel de la figure, par exemple, de sorte que la fonction $\wp$ tend vers une constante (ici $-B/12$) le long de α (voir la figure). Pour h proche de 0, l'équation aux variations normales le long de α est proche de

$$\ddot{Q} + AQ = 0$$

où la fonction constante A est considérée comme périodique de période 1. Pour $A \leq 0$, les valeurs propres de la monodromie de cette équation sont réelles. Pour $A > 0$, ce sont $e^{\pm i\sqrt{A}}$, qui ne peuvent être égales à $\pm i$ que si A est de la forme exclue. Quand h est assez proche de 0, elles ne peuvent donc être égales à $\pm i$. □

Pour montrer que les valeurs propres de $\widetilde{\alpha}$ ne sont pas égales à $\pm i$ pour tout h, il suffit de montrer qu'elles dépendent *effectivement* de h. Si c'est le cas, il est clair que $\widetilde{\alpha}$ n'est pas résonant pour les valeurs générales de h et il n'est pas nécessaire de supposer que $\widetilde{\gamma}$ est d'ordre infini, autrement dit, on peut remplacer « rationnelle » par « entière » dans l'énoncé de la proposition 3.9. Dans [12], Ito montre que les valeurs propres sont des fonctions analytiques non constantes de h. En plus, il exhibe une autre solution particulière, encore une courbe elliptique, qui donne des résultats analogues, mais avec une autre valeur de λ, de quoi il peut déduire :

PROPOSITION 3.10 ([12, 38]). — *Supposons $A = B \neq 0$. Pour λ différent de 1, 2 et 6, le hamiltonien de Hénon-Heiles n'a pas de deuxième intégrale méromorphe sur $\mathbf{C}^4$.* □

Pour $\lambda = 1$ ou 6, nous avons vu au § 1.2 que le système est intégrable. Le cas $\lambda = 2$ reste ouvert (voir le § 4).

3.3.2. Le cas rationnel, preuve par le groupe de Galois. — On considère maintenant le cas où $B = 0$. L'exemple le plus simple d'application du théorème 3.1 est celui où $\lambda = 0$.

PROPOSITION 3.11 ([3]). — *Pour $\lambda = B = 0$, le hamiltonien de Hénon-Heiles n'a pas de deuxième intégrale rationnelle sur $\mathbf{C}^4$.*

Démonstration. — Le hamiltonien (4) est ici

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \left(\frac{A}{2} - q_2\right) q_1^2.$$

On choisit une solution particulière

$$q_1 = p_1 = 0 \qquad q_2 = -\frac{1}{2}(t - A), \qquad p_2 = -\frac{1}{2}.$$

L'équation aux variations normales (11) est tout simplement $\ddot{Q} + tQ = 0$. C'est un bel exemple (académique !) menant à une équation d'Airy, équation dont toutes les

[17] Cette figure a été dessinée par Raymond Seroul.

solutions sont des fonctions entières (c'est clair) mais aucune n'est algébrique sur $\mathbf{C}(t)$ (c'est presque aussi clair). On se débrouille donc pour que $\mathbf{C}(t)$ soit le corps des fonctions de Γ, il suffit pour cela d'ajouter un point à l'infini à la droite (jusque-là) affine Γ en ajoutant un hyperplan à l'infini à $\mathbf{C}^4$. On se restreint ainsi à des intégrales premières rationnelles en les coordonnées q_i, p_i. Il est classique (mais pas trivial, voir une démonstration algébrique dans [15] ou par le phénomène de Stokes dans [22]) que le groupe de Galois de l'équation d'Airy sur $\mathbf{C}(t)$ est le groupe $\mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$ tout entier. □

Remarque 3.12. — La courbe Γ complétée reste simplement connexe, le groupe de Galois obtenu ne contient donc pas de monodromie (dit autrement, les solutions sont entières). Cet exemple, tout académique qu'il soit, n'est pas justiciable des méthodes de [37].

Avec $B = 0$ mais $\lambda \neq 0$, on utilise toujours une courbe singulière, la cubique cuspidale correspondant à la valeur 0 du hamiltonien

$$p_2^2 = \frac{2\lambda}{3} q_2^3, \text{ paramétrée par } q_2 = \frac{6}{\lambda t^2}, \quad p_2 = -\frac{12}{\lambda t^3}.$$

L'équation aux variations normales (11) est maintenant

$$\ddot{Q} + \left(A - \frac{12}{\lambda t^2} \right) Q = 0.$$

Depuis que B est nul, la singularité de la courbe elliptique considérée au § 3.3.1 (ici pour $t = \infty$) a acquis de l'épaisseur, c'est une singularité irrégulière, elle va porter toute l'information que portait la monodromie dans l'exemple étudié au § 3.3.1. Quand A n'est pas nul, l'équation est une équation « de Whittaker », dont le groupe de Galois n'est virtuellement abélien que si $\lambda = 12/k(k+1)$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Si λ n'est pas de cette forme, on montre, comme dans le cas de l'équation d'Airy, que le groupe de Galois est $\mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$ — toujours le phénomène de Stokes [22][(18)].

Proposition 3.13 ([26]). — *Supposons $B = 0$ et $A \neq 0$. Si λ n'est pas de la forme $12/k(k+1)$ pour un k entier, le hamiltonien de Hénon-Heiles n'a pas de deuxième intégrale première méromorphe sur $\mathbf{C}^4$.* □

(18) On peut aussi démontrer que le groupe de Galois n'est pas virtuellement abélien en étudiant la factorisation de l'opérateur $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + \left(A - \frac{12}{\lambda t^2}\right)$, ce que fait D. Boucher dans [9] — une illustration de la remarque exprimée dans la note 11.

3.4. Non-intégrabilité réelle

Les systèmes de la mécanique hamiltonienne sont des systèmes différentiels réels sur des variétés symplectiques réelles. Les théorèmes de non-intégrabilité dont il est question ici s'appliquent à une situation analytique complexe. Par exemple, les résultats du § 3.3 interdisent au système de Hénon-Heiles d'avoir une intégrale première méromorphe complexe sur $\mathbf{C}^4$ mais pas d'avoir une intégrale première méromorphe réelle sur $\mathbf{R}^4$ (avec des singularités essentielles non réelles).

Considérons donc un hamiltonien analytique réel H sur une variété symplectique analytique réelle W. On peut bien sûr complexifier W et H. Rappelons toutefois que, si la complexification existe, elle n'est pas unique. Seul le germe de la complexifiée $W^\star$ le long de W est uniquement défini (voir par exemple [33] pour une démonstration de l'existence et de l'unicité de ce germe).

La stratégie pour appliquer les théorèmes du § 3.1 est la suivante : choisir une trajectoire (réelle) $\Gamma_{\mathbf{R}}$ du champ hamiltonien et considérer l'équation aux variations le long de la trajectoire complexe $\Gamma^\star \subset W^\star$.

Ici aussi, le théorème de Morales et Ramis s'applique beaucoup plus facilement que celui de Ziglin à cause de sa nature *locale*. Si l'équation aux variations a un point singulier *irrégulier*, le groupe de Galois local en ce point peut déjà être assez gros, puisqu'il contient en particulier tout le groupe de Stokes (voir le § 2.3). Par exemple, les résultats du § 3.3.2 sont obtenus en considérant un groupe de Galois qui est identique au groupe de Galois local en $t = \infty$. Ils s'appliquent donc dans un voisinage arbitrairement petit de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{C}^4$, c'est-à-dire au germe de la complexification de $\mathbf{R}^4$. Ils donnent directement les énoncés analogues en remplaçant $\mathbf{C}^4$ par $\mathbf{R}^4$.

Avec le théorème de Ziglin, c'est un peu plus délicat : le groupe fondamental d'une trajectoire réelle est incapable de produire des éléments du groupe de monodromie qui ne commutent pas ! Pour obtenir des énoncés réels de non-intégrabilité en utilisant la monodromie, il faut être capable de trouver, pour toute complexification $W^\star$ de W, une trajectoire réelle $\Gamma_{\mathbf{R}}$ du champ hamiltonien telle que la trajectoire complexe correspondante $\Gamma^\star$ ait un groupe fondamental non abélien... et des éléments non résonants qui ne commutent pas dans le groupe de monodromie.

Dans [39], Ziglin revient sur les aspects réels des exemples étudiés dans [38]. Considérons à nouveau l'exemple de Hénon-Heiles comme au § 3.3.1. Fixons un voisinage $W^\star_\varepsilon$

$$|\operatorname{Im} q_i| < \varepsilon, \qquad |\operatorname{Im} p_i| < \varepsilon$$

de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{C}^4$. On vérifie qu'il existe une courbe elliptique (12) avec deux cycles qui engendrent le groupe fondamental et sont contenus dans $W^\star_\varepsilon$. Par exemple, pour B et h strictement positifs, la partie réelle de la courbe (12) a deux composantes connexes. Choisissons pour $\Gamma_{\mathbf{R}}$ la composante compacte (« ovale ») et appelons $\Gamma^\star_\varepsilon$ l'intersection de la courbe complexe avec l'ouvert $W^\star_\varepsilon$. Le groupe fondamental de la courbe complexe Γ est engendré par l'ovale $\Gamma_{\mathbf{R}}$ et le cycle de support $y \in i\mathbf{R}$,

$x \in [e_2, e_3]$ (notations de la figure page 128) dont on vérifie sans mal qu'il est contenu dans $W_\varepsilon^\star$ pour $h\lambda^2 \in \left]\dfrac{B^3}{6} - 18\varepsilon, \dfrac{B^3}{6}\right[$. Grâce à l'argument d'Ito sur la variation des valeurs propres, on en déduit qu'il existe des valeurs de h dans cet intervalle pour lesquelles le groupe de monodromie contient deux éléments non résonants qui ne commutent pas. C'est ainsi que Ziglin peut conclure à la non-existence d'une deuxième intégrale première méromorphe sur $\mathbf{R}^4$.

Remarque 3.14. — La théorie de Picard-Vessiot et la monodromie utilisent de façon essentielle le caractère *analytique* du hamiltonien. Le lemme de Ziglin, lui, utilise l'analyticité des éventuelles intégrales premières. Ces méthodes ne permettent donc pas, ou pas encore, de montrer la non-intégrabilité au sens $\mathcal{C}^\infty$ d'un système hamiltonien (même analytique).

4. VARIATIONS SUPÉRIEURES

Après le grand déballage de l'équation de Hénon-Heiles rapporté au § 3.3.1, le cas où $A = B \neq 0$ et $\lambda = 2$ reste en suspens. Dans ce cas, les simulations numériques comme le « test de Painlevé » indiquent que le système ne devrait pas être intégrable [10][(19)]. L'équation aux variations normales (11) est

$$\ddot{Q} + \left(\frac{1}{2} - 6\wp\right) Q = 0$$

dont $Q = \wp + \dfrac{1}{12}$ est solution, mais celle-là est conservée par le groupe de Galois, de sorte que celui-ci est un sous-groupe du groupe (abélien !) des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbf{C}$).

Dans un travail en préparation, Morales, Ramis et Simó proposent de mieux approcher le système hamiltonien par des équations différentielles linéaires en utilisant des équations aux variations d'ordre supérieur. L'équation aux variations (ordinaire, à l'ordre 1) porte sur une variation à l'ordre 1, un champ de vecteurs Y tangent à W le long de la trajectoire Γ. Morales, Ramis et Simó définissent l'équation aux variations d'ordre k comme une équation différentielle *linéaire* portant sur le jet d'ordre k du flot. En tant qu'équation différentielle linéaire, elle arrive accompagnée d'un groupe de Galois G_k. La troncature des jets induit des morphismes surjectifs $G_k \to G_{k-1}$. L'application du lemme 1.1 dans cette situation donne la commutativité virtuelle de tous les groupes G_k quand le système est intégrable.

Évidemment, ce nouveau théorème serait plus fort que le théorème 3.1, mais aussi plus difficile à appliquer : l'ordre de l'équation aux variations devient rapidement très

(19) Dans cet article, il est montré que toutes les solutions du système de Hénon-Heiles ne sont méromorphes que si $\lambda = 1$ ou 6.

grand, ce qui rend le groupe de Galois difficile à calculer. Notons toutefois qu'on n'a pas vraiment besoin de calculer ce groupe, mais seulement d'exclure la commutativité de sa composante neutre. Nos auteurs pensent ainsi pouvoir régler le cas de Hénon-Heiles en suspens en utilisant le groupe de Galois de la troisième équation aux variations.

RÉFÉRENCES

[1] V. I. Arnold – *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.

[2] M. Audin – *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999, traduction en japonais, Kyoritsu, 2000.

[3] ———, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.

[4] A. Baider, R. C. Churchill, D. L. Rod & M. F. Singer – « On the infinitesimal geometry of integrable systems », *Fields Institute communications, American Math. Soc.* **7** (1996), p. 5–56.

[5] D. Bertrand – « Groupes algébriques et équations différentielles linéaires », *Séminaire Bourbaki, 1991-92, Astérisque* **206** (1992), p. 183–204.

[6] ———, « Lectures on differential Galois theory, by Andy R. Magid (review) », *Bull. Amer. Math. Soc.* **33** (1996), p. 289–294.

[7] A. Blanchard – « Groupes algébriques et équations différentielles linéaires [d'après E. Kolchin] », *Séminaire Bourbaki* (1949-50), Réédition, Collection Hors Série Astérisque, Société Mathématique de France, **1** (1995), 103–109.

[8] D. Boucher – « Sur la non-intégrabilité du problème plan des trois corps de masses égales », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 5, p. 391–394.

[9] ———, « Sur les équations différentielles linéaires paramétrées, une application aux systèmes hamiltoniens », *Thèse, Université de Limoges* (2000).

[10] T. Bountis, H. Segur & F. Vivaldi – « Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property », *Phys. Rev. A (3)* **25** (1982), p. 1257–1264.

[11] E. Husson – « Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** (1906), p. 73–152.

[12] H. Ito – « Non-integrability of Hénon-Heiles system and a theorem of Ziglin », *Kodai Math. J.* **8** (1985), p. 120–138.

[13] E. Julliard Tosel – « Un résultat de non-intégrabilité pour le potentiel en $1/r^2$ », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), no. 4, p. 387–392.

[14] ———, « Meromorphic parametric non-integrability ; the inverse square potential », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **152** (2000), no. 3, p. 187–205.

[15] I. Kaplansky – *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1976, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1251, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, no. V.

[16] E. Kolchin – *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York, 1973.

[17] S. Kowalevski – « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177–232.

[18] V. V. Kozlov – « Integrability and nonintegrability in Hamiltonian mechanics », *Uspekhi Mat. Nauk* **38** (1983), no. 1(229), p. 3–67, 240.

[19] ———, *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Translated from the Russian manuscript by S. V. Bolotin, D. Treshchev and Yuri Fedorov.

[20] F. Le Lionnais – « Le second manifeste (1973) », La bibliothèque oulipienne 2, Ramsay, Paris, 1987, p. vii–xi.

[21] A. Magid – *Lectures on differential Galois theory*, University lecture series, 7, American Mathematical Society, 1994.

[22] J. Martinet & J.-P. Ramis – « Théorie de Galois différentielle et resommation », *Computer algebra and differential equations* (E. Tournier, éd.), Academic Press, 1989, p. 117–214.

[23] ———, « Elementary acceleration and multisummability », *Ann. I.H.P., Phys. Th.* **54** (1991), p. 331–401.

[24] J. Morales-Ruiz – *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.

[25] J. Morales-Ruiz & J.-P. Ramis – « A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001).

[26] ———, « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001).

[27] ———, « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, II », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001).

[28] A. M. Perelomov – *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras. Vol. I*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990, Translated from the Russian by A. G. Reyman.

[29] H. Poincaré – *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987, Réimpression de l'édition originale de 1899.

[30] M. van der Put – « Recent work on differential Galois theory », *Séminaire Bourbaki, 1997-98, Astérisque* **252** (1998), p. 341–367.

[31] A. Tsygvintsev – « La non-intégrabilité méromorphe du problème plan des trois corps », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), p. 241–244.

[32] J.-L. Verdier – « Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques [d'après M. Adler et P. van Moerbeke] », Séminaire Bourbaki, 1980-81, Springer, Berlin, 1981, p. 85–94.

[33] H. Whitney & F. Bruhat – « Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels », *Comment. Math. Helv.* **33** (1959), p. 132–160.

[34] E. T. Whittaker & G. N. Watson – *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions ; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.

[35] H. Yoshida – « A criterion for the nonexistence of first integrals in Hamiltonian systems with a homogeneous potential », *Physica D* **29** (1987), p. 128–142.

[36] V. E. Zakharov (éd.) – *What is integrability ?*, Springer, Berlin, 1991.

[37] S. L. Ziglin – « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I », *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982), p. 181–189.

[38] ———, « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II », *Funct. Anal. Appl.* **17** (1983), p. 6–17.

[39] ———, « The absence of an additional real-analytic first integral in some problems of dynamics », *Funct. Anal. Appl.* **31** (1997), p. 3–9.

Michèle AUDIN

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex
France
E-mail : maudin@math.u-strasbg.fr

Séminaire BOURBAKI Mars 2001
53e année, 2000-2001, nO 885, p. 137 à 173

FONCTIONS POLYLOGARITHMES, NOMBRES POLYZÊTAS ET GROUPES PRO-UNIPOTENTS

par **Pierre CARTIER**

INTRODUCTION

La fonction zêta de Riemann est une vieille connaissance. Ce n'est que très récemment qu'on s'est intéressé à une généralisation à r variables $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ et aux fonctions polylogarithmiques $Li_{k_1,\ldots,k_r}(z)$ à plusieurs indices. Il y a de profondes relations, non toutes explorées, avec la théorie des nombres, la géométrie algébrique, la théorie des nœuds, et même la physique mathématique. C'est aussi un domaine où l'expérience numérique à grande échelle est possible et a été faite. Il y en a pour tous les goûts.

Dans la première partie, nous donnerons un exposé semi-historique de tout ce qui tourne autour de la fonction $\zeta(s)$. La deuxième partie est élémentaire au sens de Nielsen et de son « Traité élémentaire des nombres de Bernoulli » ; nous avons autant que possible calqué les méthodes de la première partie, mais beaucoup reste à faire. La troisième partie introduit les puissantes méthodes combinatoires de séries formelles non commutatives, et donne les théorèmes de structure sur les algèbres de fonctions polylogarithmes et des nombres « polyzêtas formels ». Enfin, dans la conclusion, on décrit rapidement quelques-unes des voies plus profondes, où se développera la théorie.

Remerciements. — Ils vont à tous les participants du groupe de travail de l'I.H.P. (lundi matin) sur les polylogarithmes, qu'ils viennent de Paris, d'Orsay ou de Lille, et particulièrement G. Racinet, M. Waldschmidt, L. Boutet de Monvel, M. Petitot, G. Jacob et Hoang Ngoc Minh. Je remercie également D. Broadhurst, J. Écalle et D. Kreimer pour toutes les discussions et la documentation fournie. Merci aussi à J. Oesterlé et G. Vigeral pour une relecture très soignée.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2002

1. PRÉLUDE : « THROUGH THE LOOKING-GLASS AND WHAT EULER FOUND THERE »

1.1. C'est à visiter le jardin des merveilles mathématiques qu'Euler nous convie dans son ouvrage « Introductio in Analysin Infinitorum », publié à Lausanne en 1748. À la page 134 (de l'édition française [A5]), on trouve une table dont voici le début[(1)]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ etc} \tag{A}$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ etc} \tag{B}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{ etc} \tag{C}$$

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{ etc.} \tag{D}$$

La première formule est due à Leibniz (1680), et constitue ce qu'il appelait la « quadrature arithmétique du cercle » et dont il tirait une gloire légitime. Dans la même veine, on trouve la formule d'Euler

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc} \tag{1}$$

pour le logarithme népérien (qu'il appelle « hyperbolique ») de 2 (*ibid.* p. 90).

Depuis 1680 environ, le calcul des séries est d'actualité. Introduit par Leibniz, Johann Bernoulli et Newton, il intervient surtout par les développements en séries de puissances, mais c'est Euler qui en fera un instrument performant pour le calcul numérique. Il donne la formule fondamentale

$$\log(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \cdots, \tag{2}$$

dont la formule (1) est le cas particulier $s = 1$. Pour nous, le moyen le plus simple d'obtenir (2) est de partir de la formule intégrale

$$\log(1+s) = \int_0^s \frac{dt}{1+t}, \tag{3}$$

d'utiliser la série géométrique

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots, \tag{4}$$

et d'intégrer terme à terme. La formule (A) pour π s'obtient de manière analogue, avec les deux étapes

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad , \quad \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots. \tag{5}$$

(1) Noter $\pi\pi$ écrit pour π^2 ; c'est un usage courant, de Descartes à Gauß.

Jusque là , nous sommes dans le domaine « algorithmique » de l'Analyse. J'entends par là (*cf.* [A4]) que les fonctions fondamentales (logarithme, exponentielle, ...) sont données par des formules utilisant séries, intégrales,... et que l'on utilise les règles de calcul standard (intégration par parties, échange des opérations de sommation, d'intégration, dérivation, etc.) auxquelles il faudrait ajouter (après Riemann) la caractérisation des fonctions comme solutions d'équations différentielles, et (après Cauchy) les règles du calcul des résidus et de l'intégration complexe. Tout ceci sans le moindre ε.

Du point de vue algorithmique, voici une démonstration de la (première) formule (5). Définissons[(2)] géométriquement le nombre π comme l'aire d'un disque de rayon 1. Utilisant les propriétés de symétrie du cercle, $\frac{\pi}{4}$ est l'aire du domaine D défini par les inéquations $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$ (fig. 1). On obtient une représentation paramétrique de D par

$$x = r\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad y = r\frac{2t}{1+t^2} \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1\,,\, 0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{6}$$

et le calcul du déterminant jacobien (algorithmique !) donne $dx\,dy = \frac{2r}{1+t^2}\,dr\,dt$, d'où

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1\int_0^1 dr\,dt\,\frac{2r}{1+t^2} = \int_0^1 2r\,dr \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

(utiliser Fubini et $2rdr = dr^2$). La formule (3) s'interprète aussi en termes d'aire, justifiant le terme « hyperbolique » (fig. 2).

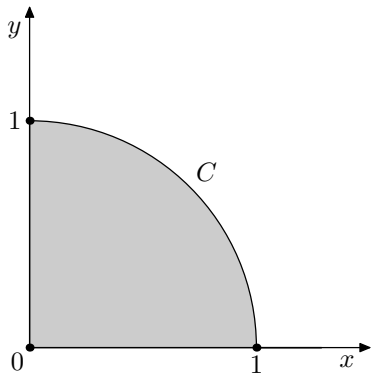


FIGURE 1. Le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$

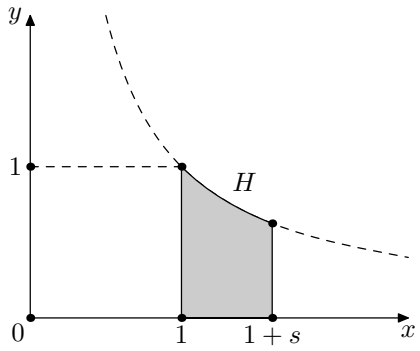


FIGURE 2. L'hyperbole H d'équation $xy = 1$

1.2. Les formules (B), (C), (D) d'Euler sont autrement difficiles à établir. En notation moderne, la série (B) s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; par séparation des termes avec n pair ou

(2) C'est dans l'ouvrage cité qu'Euler introduit les notations classiques pour les nombres e et π, ainsi que le facteur de conversion $k = \log 10 = 2,30258...$ entre logarithmes décimaux et naturels.

impair dans la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, on obtient l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,, \tag{7}$$

de sorte que la formule (B) est équivalente à la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \tag{8}$$

une des plus belles trouvailles d'Euler. Une série très voisine (connue de Leibniz et Johann Bernoulli) est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; comme on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, c'est une « série télescopique », de la forme

$$\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots$$

dont la somme vaut 1, par compensation des termes adjacents $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$,...

Pour la sommation de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (que je désignerai désormais par la notation moderne $\zeta(2)$), Daniel Bernoulli donne en 1728 l'approximation numérique 8/5 suivi, la même année, de Goldbach qui indique $1,6445 \pm 0,0008$. En 1731, Euler obtient 6 décimales exactes $\zeta(2) = 1,644934...$ par la méthode suivante : considérons l'intégrale double

$$I = \iint_T \frac{dx\,dy}{xy} \tag{9}$$

étendue au triangle T défini par $x \leqslant 1$, $y \leqslant 1$, $x + y \geqslant 1$. Elle se réécrit

$$I = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_{1-y}^1 \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{y}(-\log(1-y))\,, \tag{10}$$

puis, par utilisation de la formule (2) et intégration terme à terme

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dy}{y} \cdot y^n/n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 y^{n-1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,; \tag{11}$$

finalement, on a $I = \zeta(2)$. Euler utilise alors un argument d'intégration par parties, dont je donne une version géométrique : décomposer le triangle T en deux triangles T', T'' et un carré C (voir figure 3).

Les deux triangles donnent la même contribution (par raison de symétrie), que l'on peut évaluer comme plus haut

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{y}(-\log(1-y)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2.2^n}\,; \tag{12}$$

le carré contribue $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dy}{y} = (\log 2)^2$, d'où

$$I = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2.2^n} + (\log 2)^2. \tag{13}$$

Tronquant la série à $\sum_{n=1}^{14} \frac{1}{n^2.2^n}$, et utilisant le logarithme népérien de 2 (donné avec 25 décimales par Euler à la page 90 de [A5]), Euler obtient la valeur annoncée[3].

La démonstration précédente est la première apparition connue du *dilogarithme*, donné pour $0 \leqslant z \leqslant 1$ par les trois expressions équivalentes

$$Li_2(z) = \iint_D \frac{dx\,dy}{xy} = \int_0^z \frac{dy}{y}(-\log(1-y)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{14}$$

(*cf.* calcul précédent), où le domaine D est défini par les inégalités (fig. 4)

$$x \leqslant 1 \quad , \quad y \leqslant z \quad , \quad x + y \geqslant 1.$$

L'argument géométrique précédent fournit l'équation fonctionnelle

$$Li_2(z) + Li_2(1-z) = Li_2(1) - (\log\, z)\ \log(1-z)\,, \tag{15}$$

dont Euler utilise le cas particulier $z = \frac{1}{2}$. Évidemment, on a $Li_2(1) = \zeta(2)$.

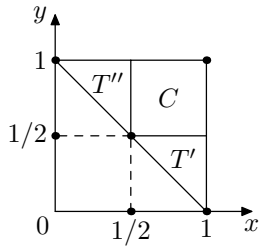


FIGURE 3

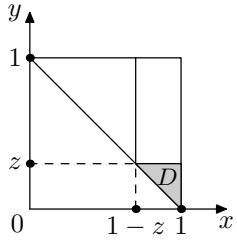


FIGURE 4

La formule (B) admet une démonstration directe, avec une intégrale double analogue à celle de (9) ; Euler connaissait une telle méthode, mais nous donnons la variante de Calabi. Posons

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1 - x^2y^2}. \tag{16}$$

Comme on a $\frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}y^{2n}$, l'intégration terme à terme donne immédiatement $J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Par ailleurs, le changement de variables[4]

$$x = \frac{\sin\, u}{\cos\, v} \quad , \quad y = \frac{\sin\, v}{\cos\, u} \tag{17}$$

transforme $\frac{dx\,dy}{1-x^2y^2}$ en $du\ dv$, et le domaine $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ en le domaine $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$, $u + v \leqslant \frac{\pi}{2}$, d'où $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$ par un argument géométrique.

[3] Euler a-t-il reconnu la valeur numérique de $\pi^2/6$?

[4] Si l'on tient à se limiter aux fonctions algébriques, poser $\xi = \mathrm{tg}\, u$, $\eta = \mathrm{tg}\, v$, comme le font Kontsevich et Zagier.

1.3. Les arguments fondés sur les représentations intégrales seront développés au n° 2.6 en utilisant la théorie des intégrales itérées [A12]. Pour calculer $\zeta(2)$, Euler utilise la théorie des fonctions symétriques. Considérons une suite infinie de variables $t_1, t_2, \ldots$, les fonctions symétriques élémentaires

$$\lambda_r = \sum_{n_1>\cdots>n_r>0} t_{n_1} \ldots t_{n_r} \tag{18}$$

(avec la convention $\lambda_0 = 1$) et les sommes de puissances

$$\psi_r = \sum_{n>0} t_n^r \qquad (r \geqslant 1). \tag{19}$$

La substitution $t_n \leftarrow 1/n^2$ donne respectivement la série[(5)]

$$\zeta(\underbrace{2, \ldots, 2}_{r}) = \sum_{(n)} \frac{1}{n_1^2 \ldots n_r^2} \tag{20}$$

pour λ_r et

$$\zeta(2r) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^{2r}} \tag{21}$$

pour ψ_r. On dispose des relations bien connues de Newton

$$\psi_r = \lambda_1\psi_{r-1} - \lambda_2\psi_{r-2} + \cdots + (-1)^r\lambda_{r-1}\psi_1 + (-1)^{r+1}r\lambda_r\,, \tag{22}$$

permettant le calcul par récurrence des ψ_r en fonction des λ_r, et donc de $\zeta(2r)$ en fonction de $\zeta(2)$, $\zeta(2,2), \ldots, \zeta(\underbrace{2, \ldots, 2}_{r})$. Par exemple

$$\zeta(4) = \zeta(2)^2 - 2\zeta(2,2)\ ,\ \zeta(6) = \zeta(2)^3 - 3\zeta(2)\zeta(2,2) + 3\zeta(2,2,2). \tag{23}$$

Il reste à calculer les nombres $\zeta(2, \ldots, 2)$; mais l'identité classique

$$\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\lambda_r t^r = \prod_{n>0}(1 - tt_n) \tag{24}$$

se spécialise en la série génératrice

$$\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\zeta(\underbrace{2, \ldots, 2}_{r})t^r = \prod_{n>0}\Big(1 - \frac{t}{n^2}\Big). \tag{25}$$

Un polynôme $P(t)$, qui satisfait à $P(0) = 1$ et dont les racines sont $z_1, \ldots, z_m$, s'écrit sous la forme

$$P(t) = \prod_{n=1}^{m}\Big(1 - \frac{t}{z_n}\Big). \tag{26}$$

[(5)] On désigne désormais par $\sum_{(n)}$ une sommation sur toutes les suites d'entiers $n_1 > \cdots > n_r > 0$, où r est fixé (et implicite dans la notation).

Dans un premier temps, Euler admet que ceci reste valable dans le cas $m = \infty$ et l'applique à la fonction $P(t) = \frac{\sin \pi\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$ qui satisfait à $P(0) = 1$, s'annulant pour $t = 1^2, 2^2, \dots$ mais pour nulle autre valeur de t. Après la substitution $t = z^2/\pi^2$, on obtient la formule-clé suivante

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\Big)\,; \tag{27}$$

par comparaison avec (25), on obtient l'évaluation

$$\zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_{r}) = \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}. \tag{28}$$

Utilisant les formules (23), on trouve de suite

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad , \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}\,, \tag{29}$$

d'où en particulier les formules (B) et (D) d'Euler. Des formules (22) et (28), il résulte immédiatement que $\zeta(2r)/\pi^{2r}$ est un nombre rationnel.

Les contemporains d'Euler ne manquèrent pas de signaler que la formule de produit (27) ne va pas de soi. Dans son « Introductio » (voir [A5] à la page 117), Euler revient sur ce point, et donne une démonstration conforme aux standards de rigueur de l'époque, et reprise, avec les ε nécessaires, dans les ouvrages plus récents. J'ai proposé, dans mon « Mathémagique » [A10], une démonstration pratiquement sans calcul et s'appuyant sur le théorème de Liouville, selon lequel toute fonction entière et bornée est constante.

Nous revenons plus loin sur le calcul des nombres rationnels $\zeta(2r)/\pi^{2r}$ (formule (38)).

1.4. On doit aussi à Euler le calcul des sommes divergentes $S_r = 1^r - 2^r + 3^r - 4^r + \cdots$. A peu de choses près, il utilise la sommation d'Abel, en introduisant les séries $\Phi_r(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r z^n$ (pour $r = 0, 1, 2, \dots$) et en régularisant S_r par $S_r = -\lim_{z\to -1} \Phi_r(z)$. Les séries $\Phi_r(z)$ ont un rayon de convergence égal à 1, et représentent des fonctions rationnelles

$$\Phi_r(z) = \Big(z\frac{d}{dz}\Big)^r \frac{z}{1-z}. \tag{30}$$

Le calcul peut se faire de manière combinatoire au moyen des nombres de Stirling ; il est plus simple de poser $z = -e^{-t}$, de sorte que la limite $z \to -1$, $|z| < 1$, soit réalisée par $t \to 0$, $0 < t$. On trouve alors

$$S_r = (-1)^r \Big(\frac{d}{dt}\Big)^r \frac{1}{1+e^t}\Big|_{t=0}\,; \tag{31}$$

la relation

$$\frac{1}{1+e^t} = -\frac{1}{t}\Big[\frac{2t}{e^{2t}-1} - \frac{t}{e^t-1}\Big], \tag{32}$$

jointe à la définition des nombres de Bernoulli

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{r=0}^{\infty}B_r t^r/r! \tag{33}$$

donne le résultat

$$S_r=(-1)^{r+1}(2^{r+1}-1)\frac{B_{r+1}}{r+1}. \tag{34}$$

Par ailleurs, une manipulation formelle, connue d'Euler, donne

$$1^r-2^r+3^r-4^r+\cdots=(1-2^{r+1})(1^r+2^r+3^r+4^r+\cdots), \tag{35}$$

d'où notre auteur conclut (pour $r=1,2,3,...$)

$$1^r+2^r+3^r+4^r+\cdots=-\frac{B_{r+1}}{r+1} \tag{36}$$

(car B_{r+1} est nul si $r\geqslant 2$ est pair, d'où la disparition du signe $(-1)^{r+1}$).

1.5. Si l'on introduit (enfin !) la fonction de Riemann $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ en toute généralité, la formule précédente s'écrit

$$\zeta(-r)=-\frac{B_{r+1}}{r+1}\qquad(\text{pour } r=1,2,\dots), \tag{37}$$

alors que la formule (29) se généralise en

$$\zeta(2r)=(-1)^{r+1}\frac{2^{2r-1}B_{2r}}{(2r)!}\pi^{2r}\qquad(\text{pour } r=1,2,\dots). \tag{38}$$

Pour pouvoir définir correctement $\zeta(-r)$, il faut faire le prolongement analytique de $\zeta(s)$, que la série ne définit que pour Re $s>1$. La méthode standard part de la représentation intégrale de la fonction Γ ; lorsque Re $s>0$, on a

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt, \tag{39}$$

et le prolongement analytique de Γ se fait par la formule

$$\Gamma(s)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{n!(s+n)}+\int_0^{\infty}t^{s+N-1}R_N(t)dt \tag{40}$$

dans le demi-plan Re $s>-N$; on a défini la fonction $R_N(t)$, continue sur $[0,+\infty[$ sauf un saut en $t=1$, par

$$R_N(t)=\begin{cases}[e^{-t}-\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n t^n/n!].t^{-N} & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant 1\\ e^{-t}t^{-N} & \text{pour } 1<t.\end{cases} \tag{41}$$

La représentation intégrale

$$\Gamma(s)\,\zeta(s)=\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt \tag{42}$$

est valable dans le demi-plan Re $s > 1$. Le prolongement analytique se fait par

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \sum_{n=-1}^{N-1} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!(s+n)} + \int_0^\infty t^{s+N-1} S_N(t)\,dt \tag{43}$$

dans le demi-plan Re $s > -N$; on a défini la fonction $S_N(t)$, continue sur $[0, +\infty[$, sauf un saut en $t = 1$, par

$$S_N(t) = \begin{cases} [(e^t-1)^{-1} - \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1}t^n/(n+1)!].t^{-N} & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (e^t-1)^{-1}t^{-N} & \text{pour } 1 < t. \end{cases} \tag{44}$$

D'après ce qui précède, $\Gamma(s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples pour $s = 0, -1, -2, \ldots$ et $\Gamma(s)\,\zeta(s)$ a, lui, au plus des pôles simples pour $s = 1, 0, -1, -2, \ldots$. Par division, $\zeta(s)$ n'a plus qu'un pôle pour $s = 1$, et l'on retrouve la valeur $\zeta(-r) = -B_{r+1}/(r+1)$, pour $r \geqslant 1$, à partir de (40) et (43), ainsi que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. La formule (35) suggère l'introduction de la fonction $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$, égale à $1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \ldots$ pour Re $s > 1$, qui n'a plus de pôle en $s = 1$. C'est donc une fonction entière.

Voici une autre méthode pour faire le prolongement analytique de $\eta(s)$, donc de $\zeta(s) = \eta(s)/(1 - 2^{1-s})$. Tout d'abord, le dilogarithme (14) se généralise en un *polylogarithme*

$$Li_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}\,; \tag{45}$$

cette série converge absolument pour tout s complexe, et tout z avec $|z| < 1$. On réalise le prolongement analytique de $Li_s(z)$ pour (s, z) dans $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[)$ en deux étapes :

a) Lorsque Re $s > 0$, on utilise la formule intégrale

$$\Gamma(s)\,Li_s(z) = \int_0^\infty \frac{z\,t^{s-1}}{e^t - z}\,dt.$$

b) Lorsque Re $s > -N$, avec $N \geqslant 1$ entier, on utilise la formule de dérivation

$$Li_s(z) = \big(z\,\frac{d}{dz}\big)^N Li_{s+N}(z).$$

On a alors

$$\eta(s) = -Li_s(-1) = -\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} Li_s(-z) \tag{46}$$

pour tout s complexe. Autrement dit, *la série* $1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \ldots$ *converge, au sens d'Abel, pour tout* s*, vers la somme* $\eta(s)$. Le calcul de $\eta(-r) = 1^r - 2^r + 3^r - \ldots$, fait dans 1.4 selon la méthode d'Euler, est donc justifié.

1.6. Jusqu'ici, nous n'avons pas commenté la formule (C) d'Euler. En fait, les formules (A) à (D) ont une même source ; les séries s'écrivent toutes sous la forme $L(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nr}}{(2n+1)^r}$, et le résultat s'exprime par le fait que les nombres $L(r)/\pi^r$

sont rationnels (et calculables). C'est la première apparition du phénomène du *poids* : le poids de la série $L(r)$ est l'exposant r avec lequel n apparaît au dénominateur du n^e terme ; on sait que $\pi = 4L(1)$ est de poids 1, donc en admettant que le poids d'un produit est la somme des poids, le nombre $L(r)/\pi^r$ est de poids 0. *La philosophie de base est que les nombres de poids* 0 *ont une chance d'être rationnels* (ou algébriques), *mais non ceux de poids non nul.*

Une manipulation simple donne

$$L(r) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(4m+1)^r}\,, \tag{47}$$

et cette série est donc le prototype de séries de la forme

$$L_{a,b}(r) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(ma+b)^r} \qquad (a\neq 0\ ,\ b/a\notin\mathbb{Z})\,, \tag{48}$$

sommées par Euler. Voici une démonstration simple, qui n'est pas celle d'Euler. La factorisation (27) du sinus s'écrit

$$\sin \pi v = \pi v \prod_{m\neq 0}\Big(1-\frac{v}{m}\Big) \tag{49}$$

(m parcourant $\mathbb{Z}$, et $m\neq 0$). La dérivée logarithmique donne

$$\pi \operatorname{cotg} \pi v = \frac{1}{v} + \sum_{m\neq 0} \frac{1}{v-m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m+v}\,, \tag{50}$$

où la sommation est effectuée symétriquement :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} = \lim_{M\to\infty} \sum_{|m|\leqslant M}\,.$$

En dérivant $r-1$ fois par rapport à v, on obtient

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+v)^r} = \pi^r F_r(\operatorname{cotg}\pi v)/(r-1)!\,, \tag{51}$$

où F_r est un polynôme à coefficients entiers, d'où immédiatement

$$L_{a,b}(r) = \frac{\pi^r}{a^r} F_r\Big(\operatorname{cotg}\pi\frac{b}{a}\Big)/(r-1)!. \tag{52}$$

Supposons a et b entiers et b non multiple de a ; alors $\operatorname{cotg}\pi\frac{b}{a}$ est un nombre algébrique, et il en est donc de même de $L_{a,b}(r)/\pi^r$ (qui est de poids 0 !). Comme conséquence, on peut sommer les séries de Dirichlet $L(f,s) = \sum_{m\neq 0} f(m)m^{-s}$, pourvu que $f(0)=0$ et que f soit périodique[6] ; si $f(m+a)=f(m)$ pour tout m, avec $a>0$ entier, on a

$$L(f,r) = \sum_{b=1}^{a-1} f(b) L_{a,b}(r)\,, \tag{53}$$

[6] Dans le cas particulier où $f(0)=0$ et $f(-m)=(-1)^r f(m)$, la série $L(f,r)$ peut s'écrire $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^r}$.

donc $L(f,r)/\pi^r$ *est un nombre algébrique si* f *prend des valeurs algébriques. La substance de tout ceci est dans Euler, un siècle avant Dirichlet.*

La formule (50) fournit une série génératrice pour les valeurs $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$, à savoir

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi v} = \frac{1}{v} - 2\sum_{r=1}^{\infty} \zeta(2r)\, v^{2r-1}\,; \tag{54}$$

on a par ailleurs

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi v} = \pi i\Big[\frac{2}{e^{2\pi i v}-1}+1\Big] = \pi i + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\pi i)^r B_r}{r!} v^{r-1} \tag{55}$$

d'après la série génératrice (33). La formule (38) pour $\zeta(2r)$ découle immédiatement de là, ainsi que le fait que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et $B_r = 0$ pour $r \geqslant 3$, r impair.

1.7. Les calculs précédents suggèrent d'introduire la série

$$\zeta(s;v) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+v)^{-s}\,, \tag{56}$$

connue sous le nom de *fonction zêta d'Hurwitz*. Naturellement, pour $v = 1$, on retrouve la fonction zêta de Riemann.

La série (56) converge pourvu que l'on ait $\operatorname{Re} s > 1$, et que v appartienne au plan complexe $\mathbb{C}_+$, coupé le long de $]-\infty, 0]$. Pour faire le prolongement analytique en s, on se ramène au cas où $\operatorname{Re} v > 0$ en supprimant un nombre fini de termes de (56), puis on utilise la formule intégrale

$$\Gamma(s)\zeta(s;v) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}e^{-t(v-1)}}{e^t-1} dt \tag{57}$$

(valable pour $\operatorname{Re} s > 0$, $\operatorname{Re} v > 0$) et le développement limité de $\frac{e^{-t(v-1)}}{e^t-1}$ comme au n° 1.5. Le résultat est que $\zeta(s;v)$ est holomorphe pourvu que $s \neq 1$ et que v ne soit pas réel négatif. De plus on a deux équations fonctionnelles[7]

$$\zeta(s;v+1) = \zeta(s;v) - v^{-s} \tag{58}$$

$$\zeta(s+1;v) = -\partial_v \zeta(s;v)/s. \tag{59}$$

Au n° 1.5, on a introduit le polylogarithme $Li_s(z)$ pour s dans $\mathbb{C}$ et z dans le plan $\mathbb{C}$ coupé le long de $[1, +\infty[$. La formule suivante est due à Jonquière et donne une autre méthode pour définir le prolongement analytique[8] de $\zeta(s;v)$ lorsque $0 < \operatorname{Re} v \leqslant 1$:

$$\zeta(s;v) = i(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\big[e^{-\pi i s/2} Li_{1-s}(e^{-2\pi i v}) - e^{\pi i s/2} Li_s(e^{2\pi i v})\big]. \tag{60}$$

[7] Sous forme intégrale, l'équation (59) s'écrit

$$\zeta(s;v) = s\int_0^{\infty} \zeta(s+1; v+p)\, dp\,;$$

le prolongement analytique de $\zeta(s;v)$ pour $\operatorname{Re} v > 0$, $s \in \mathbb{C}$ peut se faire au moyen de cette formule.

[8] La formule (58) permet de se débarrasser de la restriction $0 < \operatorname{Re} v < 1$.

L'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ et des séries de Dirichlet $L(f,s)$ (avec f périodique) peut se déduire de là. Signalons que la *fonction de Lerch*

$$\Phi(z,s,v)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+v)^s} \tag{61}$$

englobe la fonction de Hurwitz $\zeta(s;v)=\Phi(1,s,v)$ et les polylogarithmes $Li_s(z)=z\Phi(z,s,1)$. La fonction de Lerch satisfait à une relation de symétrie ([A3], page 29, formule (7)) qui généralise la relation (60).

1.8. Par généralisation de la formule (37), on obtient

$$\zeta(-r;v)=-\frac{B_{r+1}(v)}{r+1}\qquad(\text{pour } r=0,1,2,\dots), \tag{62}$$

où les polynômes de Bernoulli sont définis par la série génératrice usuelle

$$\frac{te^{vt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(v)\frac{t^n}{n!}. \tag{63}$$

En particulier, on a $\zeta(0;v)=\frac{1}{2}-v$ et plus précisément

$$\zeta(s;v)=\frac{1}{2}-v+s\,\log\frac{\Gamma(v)}{\sqrt{2\pi}}+O(s^2) \tag{64}$$

pour s voisin de 0. Par dérivation en v, et compte tenu de la relation $\zeta(s;v)=-\partial_v\zeta(s-1;v)/(s-1)$ (formule (59)), on obtient

$$\zeta(s;v)=\frac{1}{s-1}-\psi(v)+O(s-1) \tag{65}$$

pour s voisin de 1. On a posé

$$\psi(v)=\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}. \tag{66}$$

La formule (64) s'écrit aussi

$$\partial_s\zeta(s;v)\Big|_{s=0}=\log\frac{\Gamma(v)}{\sqrt{2\pi}} \tag{67}$$

et se relie à la théorie des *produits infinis régularisés*. Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^{-N}<+\infty$ pour $N>0$ assez grand ; on considère la série de Dirichlet $Z(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-s}$, convergente pour $\operatorname{Re} s$ assez grand[(9)]. Si elle admet un prolongement analytique jusqu'au voisinage de 0, on pose

$$\prod_{n\geqslant 0}{}^{\text{reg}}\lambda_n:=\exp -Z'(0). \tag{68}$$

[(9)] En supposant, pour simplifier, qu'aucun des nombres λ_n n'est réel négatif, on a défini

$$\lambda_n^{-s}:=\exp -s\operatorname{Log}\lambda_n,$$

avec la branche principale du logarithme.

Avec ces notations, la formule (67) s'écrit

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(v)} = \prod_{n\geqslant 0}{}^{\mathrm{reg}}(v+n). \tag{69}$$

On peut fonder la théorie de la fonction gamma sur la base des formules (67) et (69). En particulier, comme le suggère la formule (69), la fonction $1/\Gamma(v)$ est entière et s'annule aux points $v = 0, -1, -2, \ldots$ à l'ordre 1. On peut comparer (69) à la *formule de Weierstrass*[10]

$$1/\Gamma(v) = ve^{\gamma v}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{v}{n}\Big)e^{-v/n}\,, \tag{70}$$

qui donne par dérivation

$$\psi(v) = -\gamma - \frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+v}\Big]. \tag{71}$$

Continuant à dériver, on obtient les fonctions polygammas

$$\psi^{(r)}(v) = \partial_v^{r+1}\log\,\Gamma(v), \tag{72}$$

d'où

$$\zeta(r;v) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\psi^{(r-1)}(v) \qquad \text{pour } r = 2,3,\ldots\,. \tag{73}$$

La fonction ψ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\psi(v+1) = \psi(v) + \frac{1}{v} \tag{74}$$

(reflet de $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$), mais aussi

$$\psi(1-v) - \psi(v) = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi v}\,, \tag{75}$$

reflet de la formule des compléments

$$\Gamma(v)\Gamma(1-v) = \frac{\pi}{\sin\pi v}\,. \tag{76}$$

En fait, la fonction $\psi(v)$ sert de série génératrice aux nombres $\zeta(2), \zeta(3), \ldots$; de la formule (73), on déduit en effet[11]

$$-\psi(1-v) = \gamma + \sum_{r=2}^{\infty}\zeta(r)v^{r-1}. \tag{77}$$

Sous forme exponentielle, on a

$$\Gamma(v+1) = \exp\Big[-\gamma v + \frac{\zeta(2)}{2}v^2 - \frac{\zeta(3)}{3}v^3 + \cdots\Big]. \tag{78}$$

[10] On note γ la constante d'Euler, égale à la limite de $\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\Big) - \log N$ pour $N\to\infty$. En un certain sens, c'est la valeur régularisée de la série divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \zeta(1)$.
[11] Noter qu'ici aussi γ joue le rôle de $\zeta(1)$.

Exercice. — Retrouver la formule (54) à partir de (74), (75) et (77).

En conclusion, un exposé complet et détaillé pourrait partir des fonctions polylogarithmes $Li_s(z)$, puis en déduire la fonction d'Hurwitz par la formule (60), la fonction gamma $\Gamma(v)$ par (67), et enfin les fonctions polygammas $\psi^{(r)}(v)$ par (73).

2. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES POLYZÊTAS

2.1. L'histoire racontée jusqu'à présent est ancienne, puisque nous avons voulu montrer qu'elle était essentiellement connue d'Euler. Ce que nous décrivons maintenant a à peine dix ans d'âge. Les séries polylogarithmiques les plus générales, et les constantes associées, étaient connues de Jean Écalle [B1] vers 1980, dans sa théorie des « moules », bien avant que les spécialistes de théorie des nombres ne s'intéressent activement au dilogarithme, puis aux polylogarithmes $Li_k(z)$ (voir [B9]). Les constantes $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ remontent sans aucun doute à Euler dans le cas $r = 2$, mais sont mentionnées explicitement par Hoffman [B6] et Zagier [B4] vers 1990. Pour les contacts avec la physique mathématique, voir la conclusion. Je citerai les autres contributions au cours du développement.

Une remarque sur la terminologie. Les nombres $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ sont appelés diversement : « nombres multizêtas » (Écalle), « multiple zeta values » (en abrégé MZV) par Zagier, « nombres d'Euler-Zagier » par les frères Borwein, « multiple harmonic sums » par Hoffman. À la suggestion de Christophe Soulé, et pour satisfaire aux principes d'André Weil[(12)], nous les appelons « polyzêtas » (pour ajouter à la confusion !).

2.2. Voici leur définition. Pour une suite $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ d'entiers, on pose

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{(n)} \frac{1}{n_1^{k_1} \ldots n_r^{k_r}}, \tag{79}$$

où la sommation est étendue aux systèmes (n) d'entiers satisfaisant à $n_1 > \cdots > n_r > 0$ (convention d'Hoffman, opposée à celle de Zagier). Les entiers $k_1, \ldots, k_r$ satisfont à

$$k_1 \geqslant 2 \ , \ k_2 \geqslant 1, \ldots, k_r \geqslant 1 \, ,$$

la restriction sur k_1 étant nécessaire pour la convergence de la série. Le nombre $r \geqslant 1$ est la *longueur* (ou profondeur) et le *poids* est l'entier $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_r$. En combinatoire, une suite $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ d'entiers strictement positifs s'appelle une « composition » de $|\mathbf{k}|$, le mot « partition » étant réservé aux suites telles que $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r$.

(12) André Weil, à la suite de Dumézil, refusait les mélanges abusifs de racines grecques et latines, et fit appliquer strictement ce principe par Bourbaki.

On peut chercher à interpoler au moyen d'une fonction polyzêta

$$\zeta(s_1,\dots,s_r)=\sum_{(n)} n_1^{-s_1}\dots n_r^{-s_r}, \tag{80}$$

la série étant absolument convergente si et seulement si l'on a

$$\mathrm{Re}(s_1+\cdots+s_i)>i \qquad \text{pour } 1\leqslant i\leqslant r.$$

Pour étendre le domaine d'analyticité, un calcul analogue à celui qui donne $\Gamma(s)\zeta(s)$ (*cf.* (42)) conduit à

$$\Gamma(s_1)\dots\Gamma(s_r)\zeta(s_1,\dots,s_r)=\int_0^\infty\dots\int_0^\infty t_1^{s_1-1}\dots t_r^{s_r-1}F(t_1,\dots,t_r)\,dt_1\dots dt_r\,; \tag{81}$$

la fonction $F(t_1,\dots,t_r)$ vaut $\sum_{(n)} u_1^{n_1}\dots u_r^{n_r}$ avec $u_i=e^{-t_i}$, d'où

$$F(t_1,\dots,t_r)=\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{e^{t_1+\cdots+t_i}-1}. \tag{82}$$

Par la méthode de développement limité utilisée au n° 1.5, on peut montrer que $\zeta(s_1,\dots,s_r)$ est une fonction méromorphe des variables $s_1,\dots,s_r$ et trouver ses pôles[(13)].

De manière précise, soit K un entier positif ; la fonction

$$H_K(s_1,\dots,s_r)= \tag{83}$$
$$\zeta(s_1,\dots,s_r)-\sum_{k=0}^{K}\frac{B_k}{k!}\frac{\Gamma(s_1+k+1)}{\Gamma(s_1)}\zeta(s_1+s_2+k-1,s_3,\dots,s_r)$$

est holomorphe là où l'on a $\mathrm{Re}(s_1+\cdots+s_i)>i-K-1$ pour $2\leqslant i\leqslant r$. Les pôles de $\zeta(s_1,\dots,s_r)$ sont donc situés le long des hyperplans $s_1=1$ et $s_1+\cdots+s_i=i-n$, avec $2\leqslant i\leqslant r$ et $n\geqslant 0$.

On peut se demander ce qu'ont de spécial les sommes définissant $\zeta(k_1,\dots,k_r)$. Reformulons leur définition en

$$\zeta(k_1,\dots,k_r)=\sum_{\mathfrak{m}}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(m_i+\cdots+m_r)^{k_i}}, \tag{84}$$

la sommation étant étendue aux suites d'entiers strictement positifs $\mathfrak{m}=(m_1,\dots,m_r)$. Le type le plus général serait une série

$$S=\sum_{\mathfrak{m}}\frac{1}{P(m_1,\dots,m_r)}, \tag{85}$$

où le polynôme $P(x_1,\dots,x_r)$ est le produit de polynômes de degré 1 à coefficients rationnels, et où la sommation porte sur les entiers $m_1>0,\dots,m_r>0$ n'annulant pas $P(m_1,\dots,m_r)$. Dans certains cas, des propriétés de symétrie permettent de remplacer

(13) Résultat dû à Jean Écalle (non publié). Pour une preuve détaillée, voir Goncharov [C17], th. 2.25.

dans S la sommation par une sommation sur $\mathbb{Z}^r$; c'est le cas des séries (A) à (D) d'Euler données au n° 1.1, qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(4m+1)^k}$$

pour $k = 1, 2, 3, 4$ respectivement. Dans ce cas, Zagier [B4] suggère d'introduire la série de Fourier multiple

$$\sum_{\substack{\mathfrak{m}\in\mathbb{Z}^r \\ P(\mathfrak{m})\neq 0}} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_rx_r)}}{P(m_1,\ldots,m_r)},$$

qui est une fonction sur $\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r$ rationnelle par morceaux[(14)] et d'y faire $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Le résultat est que $\pi^{-k}\sum_{\mathfrak{m}\in\mathbb{Z}^r} P(\mathfrak{m})^{-1}$ est un nombre rationnel si P est de degré $k > r$ (voir aussi les exemples donnés par Zagier [B4], page 507).

2.3. On a déjà défini les *fonctions polylogarithmes d'exposant complexe s* par la série

$$Li_s(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^s}, \tag{86}$$

de rayon de convergence 1. Une manipulation simple donne la formule

$$Li_s(z) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \frac{(\log\, u)^{s-1}du}{u(u-z)}, \tag{87}$$

qui est la forme standard d'une fonction holomorphe dans le plan complexe P coupé le long de $[1, +\infty[$. On récupère ensuite la fonction ζ par $\zeta(s) = Li_s(1)$, en passant à la limite $z \in P$, $z \to 1$.

Pour les sommes multiples, on pose par analogie

$$Li_{s_1,\ldots,s_r}(z_1,\ldots,z_r) = \sum_{\mathfrak{m}} \prod_{i=1}^r \frac{z_i^{m_i}}{(m_i+\cdots+m_r)^{s_i}} \tag{88}$$

avec la représentation intégrale

$$\begin{aligned} &Li_{s_1,\ldots,s_r}(z_1,\ldots,z_r) \\ &\quad = \Gamma(s_1)^{-1}\ldots\Gamma(s_r)^{-1} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty t_1^{s_1-1}\ldots t_r^{s_r-1}\,\Phi(t_1,\ldots,t_r)dt_1\ldots dt_r, \end{aligned} \tag{89}$$

la fonction Φ étant donnée par

$$\Phi(t_1,\ldots,t_r) = \prod_{i=1}^r \frac{z_i}{e^{t_1+\cdots+t_i} - z_i}. \tag{90}$$

(14) Exemple classique : les polynômes de Bernoulli ($k \geqslant 1$)

$$B_k(x) = -(2\pi i)^{-k}k! \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0}} \frac{e^{2\pi imx}}{m^k} \qquad \text{pour } 0 < x < 1.$$

Le prolongement analytique en les variables $s_1, \dots, s_r$ se fait par la méthode classique (M. Riesz, J. Hadamard) d'intégration par parties dans l'intégrale (89). On en déduit que $Li_{s_1,\dots,s_r}(z_1, \dots, z_r)$ est définie pour toutes les valeurs complexes des s_i, et les z_i dans le plan P coupé le long de $[1, +\infty[$. Bien entendu, on a formellement

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = Li_{s_1,\dots,s_r}(1, \dots, 1)\,; \tag{91}$$

le point $z_1 = \cdots = z_r = 1$ n'est pas dans le domaine d'holomorphie, mais dans son adhérence. Dans la suite, nous considérerons le cas particulier $z_1 = \cdots = z_r = z$, d'où

$$Li_{s_1,\dots,s_r}(z) = \sum_{(n)} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \tag{92}$$

et donc $\zeta(s_1, \dots, s_r) = Li_{s_1,\dots,s_r}(1)$ (avec le passage à la limite usuel).

2.4. Faisons le lien avec les *fonctions symétriques*. Rappelons que celles-ci sont interprétées comme des séries formelles[15] en une infinité de variables $t_1, t_2, \dots$, et qu'une base est formée des fonctions monomiales $M(a_1, \dots, a_r)$ (pour toutes les partitions $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_r > 0$). Cette dernière est la somme de tous les monômes *distincts* qui sont de la forme $t_{n_1}^{a_1} \dots t_{n_r}^{a_r}$, avec $n_1, \dots, n_r$ *distincts* ; en particulier, on a $\lambda_r = M(\underbrace{1, \dots, 1}_{r})$ et $\psi_r = M(r)$ avec les notations du n° 1.3.

Soit maintenant $(k_1, \dots, k_r) = \mathbf{k}$ une composition, et posons

$$QM(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0} t_{n_1}^{k_1} \dots t_{n_r}^{k_r}. \tag{93}$$

Alors $M(a_1, \dots, a_r)$ est la somme de tous les $QM(k_1, \dots, k_r)$ correspondant à toutes les compositions $k_1, \dots, k_r$ distinctes obtenues par permutation de $a_1, \dots, a_r$. Les $QM(\mathbf{k})$ forment une base d'une algèbre QSym, plus large que l'algèbre Sym des fonctions symétriques[16].

Pour exprimer de manière commode la multiplication dans QSym, nous introduisons l'algèbre unifère associative libre $A\langle y_1, y_2, \dots\rangle$ des polynômes non commutatifs en une autre série de variables $y_1, y_2, \dots$. Selon Hoffman, on note $\mathfrak{h}^1$ le module correspondant, ayant pour base les « mots » $w = y_{k_1} \dots y_{k_r}$. Par récurrence, on définit la multiplication $*$ dans $\mathfrak{h}^1$ par le fait que 1 est élément unité et que

$$y_k w * y_{k'} w' = y_{k+k'}(w * w') + y_k(w * y_{k'} w') + y_{k'}(y_k w * w'). \tag{94}$$

Elle est associative et commutative, et l'on note $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}$ l'algèbre correspondante. La correspondance

$$y_{k_1} \dots y_{k_r} \longleftrightarrow QM(k_1, \dots, k_r)$$

sur les bases se prolonge en un *isomorphisme d'algèbres de* $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}$ sur QSym.

[15] Voir Bourbaki, Algèbre, chapitre 4, § 6, pour un exposé « moderne » (en 1981 !) de cette théorie.
[16] Nous prenons les coefficients dans un anneau commutatif A contenant le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels comme sous-anneau. Le plus souvent, on prendra A égal à $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Les mots 1 et $y_{k_1} \dots y_{k_r}$ avec $k_1 \geqslant 2$ forment une base d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}^0_{\text{har}}$ de $\mathfrak{h}^1_{\text{har}}$. Le nombre polyzêta $\zeta(k_1, \dots, k_r)$ résulte alors de la substitution $t_n \longleftarrow \frac{1}{n}$ dans la fonction quasi-symétrique $QM(k_1, \dots, k_r)$. On en déduit (pour $A = \mathbb{R}$) un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres

$$\widehat{\zeta} : \mathfrak{h}^0_{\text{har}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

défini par

$$\widehat{\zeta}(y_{k_1} \dots y_{k_r}) = \zeta(k_1, \dots, k_r).$$

On veut prolonger $\widehat{\zeta}$ à tout $\mathfrak{h}^1_{\text{har}}$. Pour cela, on définit une dérivation D de $\mathfrak{h}^1_{\text{har}}$ par $D(1) = 0$ et

$$D(y_{k_1} \dots y_{k_r}) = \begin{cases} y_{k_2} \dots y_{k_r} & \text{si } k_1 = 1 \\ 0 & \text{si } k_1 \geqslant 2. \end{cases} \tag{95}$$

Alors, $\mathfrak{h}^0_{\text{har}}$ est le noyau de D, on a $D(y_1) = 1$ et tout élément de $\mathfrak{h}^1_{\text{har}}$ est annulé par une puissance de D. On en déduit un homomorphisme reg_* de $\mathfrak{h}^1_{\text{har}}$ sur $\mathfrak{h}^0_{\text{har}}$ par

$$\text{reg}_*(u) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{(-1)^i}{i!} y_1^{*i} * D^i(u) \tag{96}$$

pour $u \in \mathfrak{h}^1_{\text{har}}$. On a $\text{reg}_*(u) = u$ pour u dans $\mathfrak{h}^0_{\text{har}}$, $\text{reg}_*(y_1) = 0$ et la formule de Taylor

$$u = \sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{i!} y_1^{*i} * \text{reg}_*(D^i u) \tag{97}$$

pour tout u dans $\mathfrak{h}^1_{\text{har}}$. On prolonge $\widehat{\zeta}$ en l'homomorphisme $\widehat{\zeta}_* = \widehat{\zeta} \circ \text{reg}_*$ de $\mathfrak{h}^1_{\text{har}}$ dans $\mathbb{R}$, et l'on pose

$$\zeta_*(k_1, \dots, k_r) = \widehat{\zeta}_*(y_{k_1} \dots y_{k_r}). \tag{98}$$

Il revient au même de dire que $\mathfrak{h}^1_{\text{har}}$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $\mathfrak{h}^0_{\text{har}}[y_1]$, et que $\widehat{\zeta}_*$ est l'unique homomorphisme d'algèbres prolongeant $\widehat{\zeta}$ qui s'annule sur y_1.

Concrètement, le fait que $\widehat{\zeta}$ soit un homomorphisme d'algèbres se traduit par des identités telles que

$$\zeta(a)\zeta(b) = \zeta(a+b) + \zeta(a,b) + \zeta(b,a) \tag{99}$$

$$\zeta(a)\zeta(b,c) = \zeta(a+b,c) + \zeta(b,a+c) + \zeta(a,b,c) + \zeta(b,a,c) + \zeta(b,c,a). \tag{100}$$

On doit exclure les cas où l'on a $a = 1$ ou $b = 1$ dans ces formules. Les polyzêtas régularisés $\zeta_*(a)$, $\zeta_*(a,b)$,... satisfont sans restriction aux relations précédentes avec la convention $\zeta_*(1) = 0$. Par exemple de (99), on déduit pour $a = b = 1$

$$0 = \zeta_*(1)^2 = \zeta_*(2) + 2\zeta_*(1,1) \tag{101}$$

et comme $\zeta_*(2) = \zeta(2)$, on a

$$\zeta_*(1,1) = -\frac{1}{2}\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{12}. \tag{102}$$

Utilisant la relation (22) de Newton sous la forme

$$\sum_{r\geqslant 0}\lambda_r t^r=\exp\Big(\sum_{r\geqslant 1}(-1)^{r-1}\psi_r\, t^r/r\Big), \tag{103}$$

on obtient la série génératrice

$$\sum_{r\geqslant 0}\zeta_*(\underbrace{1,\dots,1}_{r})t^r=\exp\Big(\sum_{r\geqslant 2}(-1)^{r-1}\zeta(r)\,t^r/r\Big)=e^{-\gamma t}/\Gamma(1+t). \tag{104}$$

Par un calcul analogue, on obtient, pour $k\geqslant 2$, la relation

$$\sum_{r\geqslant 0}\zeta(\underbrace{k,\dots,k}_{r})t^r=\exp\Big(\sum_{r\geqslant 1}(-1)^{r-1}\zeta(kr)\,t^r/r\Big)\,; \tag{105}$$

le cas particulier $k=2$ était substantiellement connu d'Euler (voir le n° 1.3). Donnons aussi une série génératrice due à Zagier, et démontrée par d'autres méthodes

$$\sum_{r\geqslant 0}\zeta(\underbrace{3,1,3,1,\dots,3,1}_{r})t^{4r}=\Big|{}_2F_1\Big(\frac{t}{1+i},\frac{-t}{1+i};1;1\Big)\Big|^2=\frac{\mathrm{ch}(\pi t)-\cos\pi t}{\pi^2t^2}, \tag{106}$$

avec la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$de Gauß. On en déduit la formule

$$\zeta(\underbrace{3,1,\dots,3,1}_{r})=\frac{2\pi^{4r}}{(4r+2)!}\,, \tag{107}$$

découverte expérimentalement par Zagier [B4] et prouvée par Broadhurst en 1996.

2.5. Pour tout entier $k\geqslant 0$, notons $\mathcal{Z}_k$ le sous-espace $\mathbb{Q}$-vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les polyzêtas de poids k. Les formules de multiplication décrites au n° 2.4 entraînent $\mathcal{Z}_k\,.\,\mathcal{Z}_{k'}\subset\mathcal{Z}_{k+k'}$. En particulier, on a $\mathcal{Z}_0=\mathbb{Q}$, $\mathcal{Z}_1=0$, $\mathcal{Z}_2=\mathbb{Q}\pi^2$. On introduit une algèbre graduée

$$\mathcal{Z}=\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathcal{Z}_k.$$

Zagier a fait les deux conjectures suivantes :

(C1) *La somme des sous-espaces $\mathcal{Z}_k$ de $\mathbb{R}$ est directe, c'est-à-dire que $\mathcal{Z}$ se plonge dans $\mathbb{R}$.*

Noter que ceci entraîne que les nombres $\zeta(2),\zeta(3),\dots$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, que $\zeta(3)$ est irrationnel, que π est transcendant,...

(C2) *Soit d_k la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathcal{Z}_k$. On a la relation de récurrence*

$$d_k=d_{k-2}+d_{k-3} \tag{108}$$

pour $k\geqslant 3$.

Vu les conditions initiales $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, ceci se traduit par la série génératrice

$$\sum_{k\geqslant 0} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}. \tag{109}$$

Soit c l'unique nombre réel tel que $c^3 = c+1$, d'où $c = 1,32...$ Sous l'hypothèse précédente, on aurait $d_k \sim 0,41 \times (1,32)^k$, alors que le nombre de compositions admissibles de poids k est 2^{k-2}. Voici une table :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4.

On peut préciser la formule (109). L'algèbre $\mathcal{Z}$ est graduée par le poids, mais filtrée par la longueur, $F^\ell \mathcal{Z}_k$ désignant le sous-espace engendré sur $\mathbb{Q}$ par les polyzêtas de poids k et longueur $\leqslant \ell$. Notons $d_{k,\ell}$ la dimension de l'espace $F^\ell \mathcal{Z}_k / F^{\ell-1}\mathcal{Z}_k$; selon Broadhurst, on conjecture

$$\Big(\sum d_{k,\ell} t^k u^\ell\Big)^{-1} = (1-t^2u)\Big(1 - \frac{t^3u}{1-t^2} + \frac{t^{12}u^2(1-u^2)}{(1-t^4)(1-t^6)}\Big), \tag{110}$$

formule dont Écalle a donné une interprétation dans [B3]. Toutes ces conjectures sont fondées sur une vaste exploration numérique. On calcule les valeurs des polyzêtas avec plusieurs centaines de décimales, puis on teste les possibles relations linéaires à coefficients entiers par l'algorithme LLL [B22] ou ses variantes plus modernes.

2.6. Un autre type de relations s'obtient au moyen d'une représentation intégrale des polyzêtas. À partir de la définition (92) des fonctions polylogarithmes, on obtient les formules de différentiation

$$dLi_{k_1,\dots,k_r} = \begin{cases} \omega_0\, Li_{k_1-1,k_2,\dots,k_r} & \text{si } k_1 \geqslant 2 \\ \omega_1\, Li_{k_2,\dots,k_r} & \text{si } k_1 = 1 \end{cases} \tag{111}$$

avec les formes différentielles

$$\omega_0 = dz/z \qquad \omega_1 = dz/(1-z). \tag{112}$$

Pour simplifier l'écriture, nous évaluerons les fonctions polylogarithmes sur l'intervalle réel $[0,1[$. Rappelons la définition des intégrales itérées de Chen [A12]. Si α et β sont deux formes différentielles sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, et x_0 un point de J, on pose $\alpha \circ \beta = \alpha\,.\,f$, où f est la primitive de β, i.e. $df = \beta$, telle que $f(x_0) = 0$. Les intégrales de Chen sont de la forme $\int_{x_0}^{x_1} \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_r$ (produit associé de droite à gauche $\alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ (\alpha_3 \circ \cdots \circ (\alpha_{r-1} \circ \alpha_r)\dots))$) et s'évaluent par l'intégrale de $\alpha_1(t_1)\dots\alpha_r(t_r)$ sur le simplexe Δ^r défini dans $\mathbb{R}^r$ par

$$x_1 > t_1 > \cdots > t_r > x_0$$

(au moins si $x_0 < x_1$).

La formule (111) s'interprète alors sous la forme

$$Li_{k_1,\dots,k_r}(x) = \int_0^x \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k \qquad (k = k_1 + \cdots + k_r), \tag{113}$$

avec la règle suivante : si i est l'une des sommes partielles $k_1, k_1+k_2, \dots, k_1+\cdots+k_r$, on pose $\alpha_i = \omega_1$ et sinon on pose $\alpha_i = \omega_0$. Interprétation combinatoire : notons $\mathfrak{h}$ l'espace des polynômes non commutatifs en deux variables x_0 et x_1 ; on peut alors plonger $\mathfrak{h}^1$ dans $\mathfrak{h}$ en remplaçant y_k par $x_0^{k-1}x_1$, c'est-à-dire

$$y_{k_1} \dots y_{k_r} = x_0^{k_1-1}x_1 \dots x_0^{k_r-1}x_1. \tag{114}$$

Si l'on écrit ce mot sous la forme $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ on aura

$$Li_{k_1,\dots,k_r}(x) = \int_0^x \omega_{i_1} \circ \cdots \circ \omega_{i_k}. \tag{115}$$

Mais on dispose d'une formule de multiplication des intégrales itérées sous la forme

$$\Big(\int_0^x \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k\Big)\Big(\int_0^x \alpha_{k+1} \circ \cdots \circ \alpha_{k+\ell}\Big) = \sum_{\omega \in S_{k,\ell}} \int_0^x \alpha_{\omega^{-1}(1)} \circ \cdots \circ \alpha_{\omega^{-1}(k+\ell)}, \tag{116}$$

en notant $S_{k,\ell}$ l'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $1, 2, \dots, k+\ell$ qui sont strictement croissantes sur les sous-intervalles $1, 2, \dots, k$ et $k+1, k+2, \dots, k+\ell$. Cela suggère l'introduction d'un produit de mélange (appelé aussi « shuffle » en anglais) sur $\mathfrak{h}$ par

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} \sqcup\!\sqcup x_{i_{k+1}} \dots x_{i_{k+\ell}} = \sum_{\omega \in S_{k,\ell}} x_{i_{\omega^{-1}(1)}} \dots x_{i_{\omega^{-1}(k+\ell)}}. \tag{117}$$

On obtient ainsi une algèbre associative et commutative, notée $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$, dont $\mathfrak{h}^0$ et $\mathfrak{h}^1$ sont des sous-algèbres notées $\mathfrak{h}^0_{\mathrm{sh}}$ et $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}$ respectivement. On peut résumer la discussion comme suit : *il existe un homomorphisme d'algèbres*[17] $Li : \mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}} \to \mathcal{H}$, *où* $\mathcal{H}$ *désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur le plan* $\mathbb{C}$ *coupé le long de* $]-\infty, 0]$ *et* $[1, +\infty[$, *qui transforme* $y_{k_1} \dots y_{k_r}$ en $Li_{k_1,\dots,k_r}$.

Par un argument analogue à celui du n° 2.4, on montre que $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$ est l'algèbre de polynômes $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}[x_0]$ et l'on étend Li en un homomorphisme de $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$ dans $\mathcal{H}$ qui applique x_0 sur la primitive $\log z$ de $\omega_0 = dz/z$. Noter que Li applique x_1 sur

$$\int_0^z \omega_1 = -\log(1-z) = Li_1(z).$$

Or il se trouve que l'opérateur D défini par (95) est une dérivation pour le produit $\sqcup\!\sqcup$, d'où une projection $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ de $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}$ sur $\mathfrak{h}^0_{\mathrm{sh}}$. Comme on a $\widehat{\zeta}(u) = Li(u)(1)$ pour $u \in \mathfrak{h}^0$, on peut prolonger $\widehat{\zeta}$ en un homomorphisme $\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup} = \widehat{\zeta} \circ \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ de $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}$ dans $\mathbb{R}$, d'où une

[17] On peut prendre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour anneau des scalaires.

régularisation $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(k_1,\dots,k_r)$ des polyzêtas divergents (i.e. avec $k_1=1$). La projection $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ annule $y_1=x_1$, d'où $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1)=0$; mais on a $x_1\sqcup\!\sqcup\dots\sqcup\!\sqcup x_1=r!\,x_1^r$, d'où

$$\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1,\dots,1)=0, \tag{118}$$

et en particulier $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1,1)=0$, alors qu'on a $\zeta_*(1,1)=-\pi^2/12$.

2.7. Résumons la situation. Sur l'espace $\mathfrak{h}^1$, nous avons défini deux produits $*$ et $\sqcup\!\sqcup$, et $\mathfrak{h}^0$ est stable pour chacun d'eux. De plus, l'application linéaire $\widehat{\zeta}$ de $\mathfrak{h}^0$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\widehat{\zeta}(y_{k_1}\dots y_{k_r})=\zeta(k_1,\dots,k_r)$ (prendre $\mathbb{R}$ pour anneau des scalaires) est un homomorphisme pour les deux produits $*$ et $\sqcup\!\sqcup$ sur $\mathfrak{h}^0$, d'où deux familles de relations quadratiques satisfaites par les polyzêtas $\zeta(k_1,\dots,k_r)$. On étend ensuite $\widehat{\zeta}$ en deux homomorphismes

$$\widehat{\zeta}_*:\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}\longrightarrow\mathbb{R}\quad,\quad\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}:\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}\longrightarrow\mathbb{R} \tag{119}$$

caractérisés par $\widehat{\zeta}_*(y_1)=\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}(y_1)=0$, c'est-à-dire $\zeta_*(1)=\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1)=0$.

On a vu que $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1,1)$ et $\zeta_*(1,1)$ sont différents, et il s'agit de déterminer la relation exacte entre $\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}$ et $\widehat{\zeta}_*$. Par définition, on a

$$\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}=\varepsilon\circ Z_{\sqcup\!\sqcup}\quad,\quad\widehat{\zeta}_*=\varepsilon\circ Z_*, \tag{120}$$

où $\varepsilon:\mathbb{R}[T]\to\mathbb{R}$ est l'homomorphisme $\varepsilon(P)=P(0)$, et où $Z_{\sqcup\!\sqcup}:\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}\to\mathbb{R}[T]$ et $Z_*:\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}\to\mathbb{R}[T]$ sont les homomorphismes d'algèbres prolongeant $\widehat{\zeta}$ et appliquant y_1 sur T. Le résultat principal[18] est le suivant : *il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire bijective ρ de $\mathbb{R}[T]$ dans lui-même telle que $Z_{\sqcup\!\sqcup}=\rho\circ Z_*$*. Il revient au même de dire que le noyau I de $\widehat{\zeta}$, qui est un idéal à la fois dans $\mathfrak{h}^0_{\mathrm{sh}}$ et $\mathfrak{h}^0_{\mathrm{har}}$, engendre le même idéal dans les algèbres $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}$ et $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}$.

Pour la démonstration, on utilisera l'homomorphisme $Li:\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}\to\mathcal{H}$, qui transforme u en la fonction $Li(u|z)$. Identifiant $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}$ à $Q\mathrm{Sym}$, soit $\widehat{\zeta}_N$ l'homomorphisme

$$u\longmapsto u\Big(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{N},0,0,0\dots\Big)$$

de $Q\mathrm{Sym}$ dans $\mathbb{R}$. Si $Li(u|z)=\sum_{n\geqslant 0}a_n(u)z^n$, on a $\widehat{\zeta}_N(u)=\sum_{n=0}^N a_n(u)$. Par la formule d'Euler-MacLaurin, on établit un développement asymptotique

$$\widehat{\zeta}_N(u)\sim\sum_{i\geqslant 0}P_{i,u}(\log N)N^{-i} \tag{121}$$

avec des polynômes $P_{0,u},P_{1,u},\dots$ On a $\widehat{\zeta}_N(y_1)=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}\sim\gamma+\log N$ (γ est la constante d'Euler), et l'on en déduit

$$Z_*(u)=P_{0,u}(T-\gamma). \tag{122}$$

[18] Dû à Zagier et Boutet de Monvel. On en trouvera une démonstration détaillée dans l'article d'Ihara et Kaneko [B20] et dans la thèse de Racinet [C8].

On calcule de même $Z_{ш}$ par la formule

$$Z_{ш}(u) = Q_{0,u}(T)\,, \tag{123}$$

où $Q_{0,u}(T)$ apparaît dans le développement asymptotique

$$Li(u|1-\varepsilon) \sim \sum_{i\geqslant 0} Q_{i,u}(-\log\,\varepsilon)\varepsilon^i \tag{124}$$

pour $\varepsilon > 0$ tendant vers 0. Par suite, le noyau de Z_* se compose des u tels que la série $Li(u|z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(u)z^n$ satisfasse à $\lim_{N\to\infty}(a_0(u) + \cdots + a_N(u)) = 0$ et le noyau de $Z_{ш}$ est caractérisé par $\lim_{z\to 1} Li(u|z) = 0$. Par le lemme d'Abel, le noyau de Z_* est contenu dans celui de $Z_{ш}$, et l'on peut factoriser $Z_{ш}$ en $\rho \circ Z_*$.

Explicitons ρ. On a

$$\exp_{ш}(ay_1) = \sum_{r\geqslant 0} a^r\, y_1^r\,, \tag{125}$$

où l'exponentielle $\exp_{ш}$ est calculée pour le produit ш. Appliquant $Z_{ш}$, on obtient

$$\exp\,(aT) = Z_{ш}\Big(\sum_{r\geqslant 0} a^r\, y_1^r\Big). \tag{126}$$

Interprétons maintenant les éléments de $\mathfrak{h}^1_{\rm har}$ en termes de fonctions quasi-symétriques ; alors y_1^r correspond à λ_r et y_r à ψ_r. D'après la formule de Newton (103), on a

$$\sum_{r\geqslant 0} a^r\, y_1^r = \exp_*(ay_1) \,*\, \exp_*\Big(\sum_{r\geqslant 2}(-1)^{r-1}\, a^r y_r/r\Big) \tag{127}$$

($\exp_*$ calculée pour le produit $*$). Appliquant Z_* qui transforme y_1 en T et y_r en $\zeta(r)$ pour $r \geqslant 2$, on trouve

$$Z_*\Big(\sum_{r\geqslant 0} a^r\, y_1^r\Big) = \exp\,(aT)\,.\,\exp\Big(\sum_{r\geqslant 2}(-1)^{r-1}\zeta(r)a^r/r\Big)\,. \tag{128}$$

Comparant les formules (126) et (128), on conclut

$$\rho(\exp\,(aT)) = \exp\,(aT)\,.\,\exp\Big(\sum_{r\geqslant 2}(-1)^r\zeta(r)a^r/r\Big)\,, \tag{129}$$

ou, ce qui revient au même, *ρ est l'opérateur différentiel d'ordre infini*

$$\exp\Big(\sum_{r\geqslant 2}(-1)^r\zeta(r)\partial_T^r/r\Big).$$

En particulier, ρ est inversible, ce qu'il fallait prouver.

2.8. La comparaison des deux régularisations conduit à de *nouvelles relations* entre les polyzêtas. Par exemple, pour tout u dans $\mathfrak{h}^0$, l'élément $u - \widehat{\zeta}(u)\,.\,1$ de $\mathfrak{h}^0$ appartient au noyau I de $\widehat{\zeta}$. Comme I engendre le même idéal J dans les algèbres $\mathfrak{h}^1_{\rm har}$ et $\mathfrak{h}^1_{sh}$, les

éléments $y_1 * u - \widehat{\zeta}(u)y_1$ et $y_1 \sqcup\!\sqcup u - \widehat{\zeta}(u)y_1$ de $\mathfrak{h}^1$ appartiennent tous deux à J. Leur différence appartient donc à $J \cap \mathfrak{h}^0 = I$, d'où

$$\widehat{\zeta}(y_1 * u - y_1 \sqcup\!\sqcup u) = 0 \qquad (\text{pour } u \in \mathfrak{h}^0). \tag{130}$$

En explicitant, on trouve la relation d'Hoffman [B6]

$$\sum_{i=1}^{r} \zeta(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_r) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=2}^{k_i} \zeta(k_1, \dots, k_{i-1}, j, k_i + 1 - j, k_{i+1}, \dots, k_r)\,, \tag{131}$$

où une somme de polyzêtas de longueur r est égale à une somme de polyzêtas de longueur $r+1$.

Cette formule est le cas particulier $n = 1$ d'une formule générale qui s'écrit sous forme compacte $\widehat{\zeta}(\partial_n(u)) = 0$ pour tout u dans $\mathfrak{h}^0$; l'opérateur ∂_n est défini (pour $n \geqslant 1$) par

$$\partial_n(x_0) = \sum_{|w|=n-1} x_0\, w\, x_1 = -\partial_n(x_1) \tag{132}$$

(somme étendue à tous les mots w de poids $n-1$), et

$$\partial_n(x_{i_1} \dots x_{i_r}) = \sum_{j=1}^{r} x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} \partial_n\Big(x_{i_j}\Big) x_{i_{j+1}} \dots x_{i_r}. \tag{133}$$

Kaneko, Ohno, Ihara et Hoffman ont prouvé récemment de nombreuses relations linéaires entre polyzêtas. La plus générale est celle d'Ohno [B21]. Pour une composition $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$, la composition duale $\mathbf{k}' = (k'_1, \dots, k'_{r'})$ est décrite ainsi : si

$$\mathbf{k} = \Big(a_1 + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_1 - 1}, a_2 + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_2 - 1}, \dots\Big)$$

avec $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s, b_s$ strictement positifs, on obtient $\mathbf{k}'$ en remplaçant $a_1, b_1, \dots, a_s, b_s$ par $b_s, a_s, b_{s-1}, a_{s-1}, \dots, b_1, a_1$. On a

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta^{2s}} \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{(a_i - 1)!} \log^{a_i - 1}\left(\frac{t_{2i-2}}{t_{2i-1}}\right) \frac{1}{(b_i - 1)!} \log^{b_i - 1}\left(\frac{1 - t_{2i}}{1 - t_{2i-1}}\right) \frac{dt_{2i-1}}{t_{2i-1}} \frac{dt_{2i}}{1 - t_{2i}}, \tag{134}$$

où le domaine d'intégration Δ^{2s} est défini par les inégalités $1 = t_0 > t_1 > \dots > t_{2s} > 0$; c'est le cas particulier $x = 1$ de la formule (115). *La formule de dualité* $\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}')$ se déduit de (134) par le changement de variables

$$t'_1 = 1 - t_{2s}\,,\ t'_2 = 1 - t_{2s-1}\,, \dots\ t'_{2s} = 1 - t_1.$$

La formule d'Ohno s'écrit

$$\sum_{e_1+\cdots+e_r=\ell} \zeta(k_1+e_1,\ldots,k_r+e_r) = \sum_{e'_1+\cdots+e'_{r'}=\ell} \zeta(k'_1+e'_1,\ldots,k'_{r'}+e_{r'}) \tag{135}$$

pour $\ell \geqslant 0$. La formule de dualité est le cas particulier $\ell = 0$ et la formule d'Hoffman (131) résulte des cas $\ell = 0$ et $\ell = 1$. On déduit aussi de (135) que pour k et r fixés, avec $2 \leqslant r < k$, la somme des polyzêtas $\zeta(\mathbf{k})$, avec $\mathbf{k}$ de poids k et de longueur r, est égale à $\zeta(k)$; par exemple

$$\zeta(3) = \zeta(2,1)\ ,\ \ \zeta(4) = \zeta(3,1) + \zeta(2,2) = \zeta(2,1,1).$$

Il est généralement postulé, sur la base d'expériences numériques, que nous connaissons déjà toutes les relations à coefficients entiers entre polyzêtas de même poids, mais l'analyse des implications logiques entre les identités connues n'est pas achevée. Nous reviendrons là-dessus au n° 3.6.

3. SÉRIES GÉNÉRATRICES NON COMMUTATIVES

3.1. Nous voulons maintenant étudier plus en profondeur les relations entre les polyzêtas qui sont polynomiales sur $\mathbb{Q}$. L'outil utilisé est celui des séries formelles non commutatives et des algèbres de Hopf.

Soit $H = \oplus_{n\geqslant 0} H_n$ une algèbre (associative et unifère) graduée sur le corps $\mathbb{Q}$. On suppose qu'on a $H_0 = \mathbb{Q}$ et que chaque espace H_n est de dimension finie[19]. Un coproduit est un homomorphisme d'algèbres graduées Δ de H dans $H \otimes H$; on le suppose *coassociatif*, c'est-à-dire que les homomorphismes $(H\otimes\Delta)\circ\Delta$ et $(\Delta\otimes H)\circ\Delta$ de H dans $H\otimes H\otimes H$ sont égaux. On note ε la projection de H sur $\mathbb{Q} = H_0$ et l'on suppose que c'est une counité pour Δ. Alors (H, Δ, ε) est une algèbre de Hopf graduée.

Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre. Sur l'ensemble $L = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H, A)$ des applications $\mathbb{Q}$-linéaires de H dans A, on définit classiquement le produit de convolution $f * f' = m_A \circ (f \otimes f') \circ \Delta$, où $m_A : A \otimes A \to A$ est la multiplication de A. Ce produit est bilinéaire et associatif et admet ε pour unité. Supposons désormais les algèbres H et A *commutatives*. Dans L, l'ensemble des homomorphismes (unifères) d'algèbres de H dans A est un groupe $G(A)$ pour le produit $*$. De même, l'ensemble $\mathcal{G}(A)$ des $\xi \in L$ satisfaisant à $\xi(xy) = \varepsilon(x)\xi(y) + \xi(x)\varepsilon(y)$ est une algèbre de Lie pour le crochet

$$[\xi, \eta] = \xi * \eta - \eta * \xi. \tag{136}$$

[19] On peut remplacer $\mathbb{Q}$ par un corps de caractéristique 0, disons $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $H^+ = \oplus_{n\geqslant 1} H_n$ le noyau de ε ; c'est un idéal gradué de H. Notons aussi $Q(H)$ l'espace vectoriel gradué $H^+/H^+ \,.\, H^+$, d'où un isomorphisme d'espaces $\mathbb{Q}$-vectoriels de $\mathcal{G}(A)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Q(H), A)$. L'exponentielle $\exp_*$ définie par

$$\exp_*(\xi) = \sum_{r\geqslant 0} \underbrace{\xi * \cdots * \xi}_{r} / r! \tag{137}$$

est une bijection de $\mathcal{G}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Q(H), A)$ sur $G(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{alg}}(H, A)$. Comme elle est fonctorielle par rapport à A, on en déduit un *isomorphisme d'algèbres commutatives graduées de* $\mathrm{Sym}(Q(H))$ *sur* H. En d'autres termes, H *est isomorphe à une algèbre de polynômes* (« théorème de Milnor-Moore »).

3.2. Faisons de l'algèbre de mélange $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$ une algèbre de Hopf graduée. Comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, elle admet pour base les mots $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ en deux lettres x_0 et x_1. On introduit deux autres variables non commutatives X_0 et X_1 et l'on suppose qu'on a $x_i X_j = X_j x_i$. On fait la convention que, pour $w = x_{i_1} \dots x_{i_k}$, on a $W = X_{i_1} \dots X_{i_k}$ (« passage en majuscules »). On introduit la « série double »

$$\Phi = \sum_w wW = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{i_1,\dots,i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} X_{i_1} \dots X_{i_k}. \tag{138}$$

Soit alors $f : \mathfrak{h} \to A$ une application $\mathbb{Q}$-linéaire, où A est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative ; on lui associe la série génératrice $D^f_{\sqcup\!\sqcup} = \sum_w f(w)W$ dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$.

Considérons maintenant le produit $\sqcup\!\sqcup$ dans $\mathfrak{h}$; on peut définir un coproduit $\Delta : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ par

$$\Delta\Big(x_{i_1} \dots x_{i_k}\Big) = \sum_{\ell=1}^{k-1} x_{i_1} \dots x_{i_\ell} \otimes x_{i_{\ell+1}} \dots x_{i_k} + 1 \otimes x_{i_1} \dots x_{i_k} + x_{i_1} \dots x_{i_k} \otimes 1. \tag{139}$$

Il est compatible avec le produit $\sqcup\!\sqcup$, d'où une algèbre de Hopf commutative graduée [20] $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$. L'algèbre $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ des polynômes non commutatifs en X_0 et X_1 est graduée, X_0 et X_1 étant de degré 1. On considère $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ comme le dual gradué de $\mathfrak{h}$, les bases $\{w\}$ et $\{W\}$ étant en dualité. Le coproduit dans $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$ est dual du produit usuel (concaténation) dans $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ et le produit $\sqcup\!\sqcup$ se dualise en un coproduit $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$. Le coproduit $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$ est l'unique homomorphisme d'algèbres de $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ dans $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ qui envoie X_i sur $X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i$ pour $i = 1, 2$; on l'étend par linéarité à $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$. Appliquons les constructions du n° 3.1 à l'algèbre de Hopf graduée commutative $H = \mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$. Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre commutative A, le groupe $G(A)$ se compose des séries formelles non commutatives g dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ qui satisfont à $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(g) = g \otimes g$; l'algèbre de Lie $\mathcal{G}(A)$ est la complétée de l'algèbre de Lie libre sur A engendrée par X_0 et X_1, et l'exponentielle définie par (137) est l'exponentielle usuelle des séries formelles. On écrit $G_{\sqcup\!\sqcup}$ et $\mathcal{G}_{\sqcup\!\sqcup}$ pour G et $\mathcal{G}$ respectivement.

[20] Le mot $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ est homogène de degré k.

3.3. Nous reformulons la définition des fonctions polylogarithmes donnée au n° 2.6. On note P le plan $\mathbb{C}$ coupé le long de $]-\infty,0]$ et de $[1,+\infty[$. Comme c'est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, l'intégrale de Cauchy $\int_{z_0}^{z_1}\alpha$ d'une forme différentielle $\alpha = F(z)dz$ est bien définie, et l'on peut reprendre la définition des intégrales itérées $\int_{z_0}^{z_1}\alpha_1\circ\cdots\circ\alpha_k$ (voir [A12]). À chaque mot w en x_0, x_1, on associe de manière unique la fonction polylogarithme $Li(w|z)$ par

$$Li(x_0^m|z) = \frac{1}{m!}\log^m z \tag{140}$$

$$Li(x_i w|z) = \int_0^z \omega_i\, Li(w|.) \tag{141}$$

pour tout mot $x_i w$ qui n'est pas une puissance de x_0 ; voir (112) pour la définition de ω_0 et ω_1.

On introduit maintenant les séries génératrices

$$Li(z) = \sum_w Li(w|z)W \tag{142}$$

et

$$\Gamma = \omega_0 X_0 + \omega_1 X_1. \tag{143}$$

La série $Li(z)$ est caractérisée par les propriétés suivantes :

a) *Li est une application holomorphe (coefficient par coefficient) de P dans $\mathbb{C}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$;*

b) *on a l'équation différentielle $d\,Li = \Gamma\,.\,Li$;*

c) *l'application $z \mapsto Li(z)\,.\,e^{-X_0\log z}$ a un prolongement holomorphe au voisinage de $z = 0$, avec la valeur 1 en ce point.*

Le lien avec les intégrales itérées s'écrit sous la forme

$$Li(z_1)\,.\,Li(z_0)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0}\int_{z_0}^{z_1}\underbrace{\Gamma\circ\cdots\circ\Gamma}_{k}, \tag{144}$$

avec l'interprétation évidente

$$\Gamma\circ\Gamma = \sum_{i,j}\omega_i\circ\omega_j\, X_iX_j$$

$$\Gamma\circ\Gamma\circ\Gamma = \sum_{i,j,k}\omega_i\circ\omega_j\circ\omega_k\, X_iX_jX_k, etc.$$

(voir la thèse de Gonzales-Lorca [C2]). On définit les évaluations $\alpha_{z_0}^{z_1}:\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$ par

$$\alpha_{z_0}^{z_1}(x_{i_1}\ldots x_{i_k}) = \int_{z_0}^{z_1}\omega_{i_1}\circ\cdots\circ\omega_{i_k} \tag{145}$$

et le second membre de (144) s'écrit sous la forme $\sum_w \alpha_{z_0}^{z_1}(w)W$. Les formes linéaires $\alpha_{z_0}^{z_1}$ sont des homomorphismes d'algèbres de $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$ dans $\mathbb{C}$, qui permettent souvent de ramener un calcul analytique à un calcul dans l'algèbre $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$ avec le produit de mélange. Ceci est d'autant plus important que Minh et Petitot ont démontré dans [C7] que

l'application Li de $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$ dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur P est injective, c'est-à-dire que *les fonctions $Li(w|z)$ sont linéairement indépendantes sur le corps $\mathbb{C}$ des constantes.*

3.4. Il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ de $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$ sur $\mathfrak{h}^0_{\mathrm{sh}}$ qui induit l'identité sur $\mathfrak{h}^0_{\mathrm{sh}}$ et annule x_0 et x_1. Il prolonge l'homomorphisme $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ de $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{sh}}$ sur $\mathfrak{h}^0_{\mathrm{sh}}$ défini au n° 2.6. On pose aussi $\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup} = \widehat{\zeta} \circ \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$. On peut construire explicitement $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ par la formule

$$\sum_w \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(w)\,.\,W = e^{-x_1X_1}\,.\,\sum_w wW\,.\,e^{-x_0X_0} \tag{146}$$

dans l'algèbre $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$. On définit la série génératrice des polyzêtas par

$$\Phi_{KZ} = \sum_w \widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}(w)\,.\,W\,; \tag{147}$$

elle appartient à $\mathbb{R}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ et elle est obtenue en appliquant l'homomorphisme $\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}$ aux coefficients de la série double $\Phi = \sum_w wW$ appartenant à $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$. Comme on a $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(\Phi) = \Phi \otimes \Phi$, on a donc

$$\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(\Phi_{KZ}) = \Phi_{KZ} \otimes \Phi_{KZ}\,, \tag{148}$$

c'est-à-dire que $\log \Phi_{KZ}$ *appartient à l'algèbre de Lie libre complétée sur X_0 et X_1* (notée $\mathrm{Lie}(X_0, X_1)\widehat{\ }$). La série Φ_{KZ} n'est autre que l'associateur de Knizhnik-Zamolodchikov défini par Drinfeld dans [C4] (voir aussi [A13]). On a

$$\lim_{z\to 0} Li(z)\,.\,e^{-X_0\,\log\,z} = \lim_{z\to 0} e^{-X_0\log\,z} Li(z) = 1. \tag{149}$$

Il résulte aussi de la formule (146) que l'on a

$$\lim_{z\to 1} e^{X_1\,\log\,(1-z)}\,.\,Li(z) = \Phi_{KZ}. \tag{150}$$

L'application $z \mapsto 1 - z$ de P dans P est holomorphe et involutive et transforme ω_0 en $-\omega_1$ et ω_1 en $-\omega_0$. Vu la caractérisation de Li par l'équation différentielle $d\,Li = \Gamma\,.\,Li$, on obtient

$$Li(1 - z, X_0, X_1) = Li(z, -X_1, -X_0)\Phi_{KZ}(X_0, X_1) \tag{151}$$

en indiquant explicitement la dépendance des séries formelles non commutatives en X_0 et X_1. Vu les propriétés élémentaires du logarithme

$$\log(x + i0) = \log(x - i0) + 2\pi i \tag{152}$$

pour x réel strictement négatif, on obtient les formules de monodromie pour les polylogarithmes

$$Li(x + i0) = Li(x - i0)e^{2\pi i X_0} \qquad (x < 0) \tag{153}$$

$$Li(x + i0) = Li(x - i0)e^{2\pi i \mathfrak{m}} \qquad (x > 1) \tag{154}$$

avec

$$\mathfrak{m} = \Phi_{KZ}(X_0, X_1)^{-1} X_1 \Phi_{KZ}(X_0, X_1). \tag{155}$$

On retrouve en particulier les résultats classiques sur la monodromie des polylogarithmes $Li_k(z)$ (voir [B9]).

3.5. On peut répéter pour l'algèbre $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}$ ce qui a été dit au n° 3.2 pour $\mathfrak{h}_{\mathrm{sh}}$. On introduit donc la série double

$$D_* = \sum_{r \geqslant 0} \sum_{k_1, \ldots, k_r} y_{k_1} \ldots y_{k_r}\ Y_{k_1} \ldots Y_{k_r} \tag{156}$$

avec les définitions $y_k = x_0^{k-1} x_1$, $Y_k = X_0^{k-1} X_1$ pour $k \geqslant 1$. La régularisation $\mathrm{reg}_* : \mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}} \to \mathfrak{h}^0_{\mathrm{har}}$ est donnée par la formule

$$\sum \mathrm{reg}_*(y_{k_1} \ldots y_{k_r})\ Y_{k_1} \ldots Y_{k_r} = e^{-y_1 Y_1} D_* \tag{157}$$

dans l'algèbre $\mathfrak{h}_{\mathrm{har}} \langle\langle Y_1, Y_2 \ldots \rangle\rangle$. Appliquant aux coefficients de D_* l'homomorphisme $\widehat{\zeta}_*$ de $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}$ dans $\mathbb{R}$, on trouve la série génératrice

$$\Phi_* = \sum \zeta_*(k_1, \ldots, k_r)\ Y_{k_1} \ldots Y_{k_r} \tag{158}$$

dans $\mathbb{R}\langle\langle Y_1, Y_2, \ldots \rangle\rangle$. Il existe un coproduit Δ dans $\mathfrak{h}$ compatible avec le produit $*$. On a donc une algèbre de Hopf commutative graduée $\mathfrak{h}^1_{\mathrm{har}}$. On identifie son dual gradué à $\mathbb{Q}\langle \mathbf{Y} \rangle = \mathbb{Q}\langle Y_1, Y_2, \ldots \rangle$ comme algèbre, avec le coproduit Δ_* caractérisé par

$$\Delta_*(Y_k) = Y_k \otimes 1 + 1 \otimes Y_k + \sum_{j=1}^{k-1} Y_j \otimes Y_{k-j} \quad \text{pour } k \geqslant 1. \tag{159}$$

Comme $\widehat{\zeta}_*$ est un homomorphisme d'algèbres, on a

$$\Delta_*(\Phi_*) = \Phi_* \otimes \Phi_*. \tag{160}$$

Si l'on définit les éléments $U_1, U_2, \ldots$ de $\mathbb{Q}\langle \mathbf{Y} \rangle$ comme les composantes homogènes de

$$U = \log(1 + Y_1 + Y_2 + \cdots), \tag{161}$$

la relation (160) signifie que $\log \Phi_*$ appartient à la sous-algèbre de Lie libre complétée construite sur les U_k (avec $\mathbb{R}$ pour anneau de coefficients).

Enfin, la comparaison des deux régularisations se traduit par la formule

$$\Phi_* = \exp\left\{ \sum_{n \geqslant 2} (-1)^{n-1} \zeta(n)\, Y_1^n / n \right\} . \Pi_Y(\Phi_{KZ})\,, \tag{162}$$

où la projection Π_Y de $\mathbb{R}\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ sur $\mathbb{R}\langle\langle \mathbf{Y} \rangle\rangle$ annule tous les mots en X_0 et X_1 se terminant par X_0.

3.6. La conjecture la plus forte dans le sujet s'exprime en disant que *toutes les relations polynomiales sur* $\mathbb{Q}$ *entre les polyzêtas sont conséquence des relations établies*

précédemment (148), (160) *et* (162), *et le fait que la série* $\Phi_{KZ} - 1$ *ne contient que des termes de degré* $\geqslant 2$ *en* X_0, X_1.

De manière plus précise, pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre commutative A, on note $DM(A)$ l'ensemble des séries formelles $\Phi \in A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$, de terme constant 1 et sans termes linéaires en X_0, X_1, satisfaisant aux relations

$$\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(\Phi) = \Phi \otimes \Phi \quad , \quad \Delta_*(\Phi_*) = \Phi_* \otimes \Phi_* \,, \tag{163}$$

où Φ_* est donnée par[21]

$$\Phi_* = \exp\left\{\sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n-1}(\Phi|Y_n)Y_1^n/n\right\}.\Pi_Y(\Phi). \tag{164}$$

Alors Φ_{KZ} appartient à $DM(\mathbb{R})$ et même plus précisément peut être considérée comme un élément de $DM(\mathcal{Z})$ (voir le n° 2.5 pour la définition de $\mathcal{Z}$). La conjecture équivaut à la conjonction de (C1), énoncée au n° 2.5, et de ce qui suit :

(C3) *Pour toute* $\mathbb{Q}$*-algèbre commutative* A*, et pour toute série* Φ *dans* $DM(A)$*, il existe un homomorphisme d'algèbres* $\varphi : \mathcal{Z} \to A$ *et un seul tel que* Φ *se déduise de* Φ_{KZ} *en appliquant* φ *à chaque coefficient.*

3.7. Racinet vient de décrire en détail les ensembles $DM(A)$ dans sa thèse [C8]. Sa méthode est la suivante. On note $MT(A)$ le groupe formé des séries dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ dont le terme constant vaut 1, avec la multiplication

$$F_1 \circledast F_2 = F_1(F_2(X_0, X_1)X_0\, F_2(X_0, X_1)^{-1}, X_1)\, F_2(X_0, X_1). \tag{165}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{mt}(A)$ correspondante se compose des séries ψ sans terme constant dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$, avec le crochet défini par Ihara

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle = d_{\psi_1}(\psi_2) - d_{\psi_2}(\psi_1) - [\psi_1, \psi_2] \tag{166}$$

(on a noté d_ψ la dérivation continue de l'algèbre $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ qui applique X_0 sur 0 et X_1 sur $[\psi, X_1]$). Introduisons aussi l'application linéaire s_ψ dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ par

$$s_\psi(u) = \psi u - d_\psi(u). \tag{167}$$

On a alors les relations

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle = s_{\psi_2}(\psi_1) - s_{\psi_1}(\psi_2) \tag{168}$$

$$s_{\langle\psi_1,\psi_2\rangle} = \big[s_{\psi_2}, s_{\psi_1}\big]. \tag{169}$$

Ces propriétés traduisent une situation bien connue en géométrie différentielle, celle des algèbres de Vinberg. L'application exponentielle de $\mathfrak{mt}(A)$ dans $MT(A)$ est la bijection donnée par

$$\exp^*\,\psi = (\exp\, s_\psi)(1). \tag{170}$$

[21] On note $(\Phi|Y_n)$ le coefficient de $Y_n = X_0^{n-1}X_1$ dans la série $\Phi(X_0, X_1)$.

Bien entendu, on pourrait décrire une algèbre de Hopf commutative graduée définissant, comme au n° 3.1, la famille des groupes $MT(A)$ et des algèbres de Lie $\mathfrak{mt}(A)$[22].

Notons $DM_0(A)$ l'ensemble des éléments de $DM(A)$ sans terme en $Y_2 = X_0X_1$ (de toute façon, un élément de $DM(A)$ n'a pas de termes linéaires en X_0, X_1). Le théorème principal de Racinet est le suivant :

a) *L'ensemble $DM_0(A)$ est un sous-groupe de $MT(A)$.*

b) *Pour Φ dans $DM(A)$ et H dans $DM_0(A)$, on a $\Phi \circledast H \in DM(A)$.*

On prouve ensuite qu'il existe un élément Φ dans $DM(\mathbb{Q})$ qui est pair, c'est-à-dire de la forme

$$\Phi = 1 + \Phi_2 + \Phi_4 + \cdots \tag{171}$$

où Φ_{2r} est un polynôme non commutatif de degré pair $2r$ en X_0 et X_1. Posons

$$\Phi(t) = 1 + t\Phi_2 + t^2\Phi_4 + \cdots . \tag{172}$$

Par ailleurs, soit $\mathfrak{dm}_0(A)$ l'algèbre de Lie correspondant à $DM_0(A)$. On peut la caractériser comme l'ensemble des séries formelles ψ appartenant à l'algèbre de Lie libre complétée $\mathrm{Lie}_A(X_0, X_1)\widehat{\ }$et telles que $\Pi_Y(\psi)$ soit somme d'une série $\psi_{\mathrm{corr}}(Y_1)$ en Y_1, et d'un élément de l'algèbre de Lie libre complétée $\mathrm{Lie}_A(U_1, U_2, \dots)\widehat{\ }$; on impose enfin que le coefficient de Y_2 dans ψ soit nul. Le point technique le plus important de la démonstration consiste à prouver que $\mathfrak{dm}_0(A)$ décrit comme ci-dessus est stable par le crochet $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ d'Ihara. Voici la dernière assertion du théorème de Racinet :

c) *L'application $(t, \psi) \mapsto (\exp s_\psi)(\Phi(t))$ de $A \times \mathfrak{dm}_0(A)$ dans $DM(A)$ est bijective.*

3.8. Nous terminons par une série de *problèmes ouverts.* Tout d'abord, le foncteur DM_0 qui à une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative A associe le groupe $DM_0(A)$ est un schéma en groupes pro-unipotent sur $\mathbb{Q}$. Cela signifie qu'il existe une algèbre de Hopf commutative graduée H sur le corps $\mathbb{Q}$, comme au n° 3.1, telle que $DM_0(A)$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres de H dans A. D'après le théorème de Milnor-Moore, l'algèbre H est isomorphe à $\mathrm{Sym}(Q(H))$, le dual gradué de $Q(H)$ est une algèbre de Lie graduée $\mathfrak{d}_0$ et l'algèbre de Hopf graduée duale de H est l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{d}_0)$. La série Φ_{KZ} permet de définir un homomorphisme d'algèbres $\tau : H \to \mathcal{Z}/\pi^2\mathcal{Z}$ (voir au n° 2.5 la définition de $\mathcal{Z}$) et la conjecture (C1)+(C3) équivaut à l'affirmation[23] que τ est un isomorphisme et qu'il existe une dérivation D de degré -2 dans l'anneau gradué $\mathcal{Z}$, telle que $D(\zeta(2)) = 1$. La démonstration de Racinet permet en principe de construire D à partir d'un élément pair Φ de $DM(\mathbb{Q})$. *La construction explicite d'un tel Φ est un problème important.*

[22] Le groupe $MT(A)$ est, à peu de choses près, le même que le groupe GARI d'Écalle, et l'algèbre de Lie $\mathfrak{mt}(A)$ s'identifie à l'algèbre ARI d'Écalle.

[23] De manière plus vague, il s'agit de prouver que $\mathcal{Z}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes sur le corps $\mathbb{Q}$.

La conjecture de Zagier sur la dimension d_k de $\mathcal{Z}_k$ est conséquence d'une conjecture, due à Ihara et Deligne, qui affirme que l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}_0$ est libre avec un générateur ψ_{2r+1} pour chacun des degrés impairs $2r+1 = 3, 5, 7, \ldots$. La *construction explicite de tels éléments* $\psi_3, \psi_5, \ldots$ est un premier problème, *avant de prouver qu'ils engendrent librement* $\mathfrak{d}_0$.

On dispose d'une filtration par la longueur sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}_0$. Le gradué associé $\operatorname{gr}\mathfrak{d}_0$ est une algèbre de Lie bigraduée. Les travaux d'Écalle et Goncharov suggèrent que la composante de poids k et de longueur r de $\operatorname{gr}\mathfrak{d}_0$ s'identifie à l'espace des polynômes bialternaux : il s'agit des polynômes $P(v_1, \ldots, v_r)$ homogènes de degré $k-r$ qui satisfont à l'identité d'alternalité

$$\sum_{\omega \in S_{j,r-j}} P(v_{\omega(1)}, \ldots, v_{\omega(r)}) = 0 \tag{173}$$

pour $1 \leqslant j \leqslant r-1$, ainsi que l'identité analogue pour le polynôme $P(v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{r-1} - v_r, v_r)$. La conjecture de Broadhurst (voir n° 2.5) prévoit la dimension $D_{k,r}$ de l'espace de ces polynômes bialternaux. La mise au point de tout ceci permettra d'expliciter $\mathcal{Z}$ comme une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Q}$ (la « décomposition canonico-explicite des multizêtas » selon Écalle).

Enfin, Drinfeld a introduit le groupe de Grothendieck-Teichmüller GRT_1 avec son algèbre de Lie $\mathfrak{grt}_1$. Les algèbres de Lie $\mathfrak{d}_0$ et $\mathfrak{grt}_1$ sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre $\mathfrak{mt}$ avec le crochet $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ d'Ihara. Il y a toutes les raisons de postuler l'*égalité* $\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{grt}_1$, d'autant que Racinet exhibe une suite d'éléments appartenant aux deux algèbres de Lie, et qui sont de bons candidats pour les générateurs demandés $\psi_3, \psi_5, \ldots$.

CONCLUSION

Nous n'avons considéré ici que les polyzêtas ordinaires. On peut aussi considérer les polyzêtas colorés de la forme

$$\zeta \begin{pmatrix} \omega_1 \ldots \omega_r \\ k_1 \ldots k_r \end{pmatrix} = Li_{k_1,\ldots,k_r}(\omega_1, \ldots, \omega_r),$$

où $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sont des racines de l'unité. Racinet a étendu la plupart de ses résultats à ce cadre, ainsi qu'Écalle, et Goncharov et Wojtkowiak ont étudié à fond ce cas. Mentionnons aussi les résultats de Bigotte [D2].

Si les conjectures énoncées dans cet exposé sont correctes, les nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \ldots$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Que π soit transcendant est classique (Lindemann vers 1890), et R. Apéry a démontré en 1979 que $\zeta(3)$ est irrationnel. Très récemment, Rivoal [D1] a fait progresser énormément la question en prouvant que le rang sur $\mathbb{Q}$ de l'ensemble des nombres $\zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2N+1)$ est au moins égal à $\frac{1}{3}\log N$, pour tout entier $N \geqslant 1$. En combinant ses méthodes avec la machine algébrique décrite ici, on doit pouvoir beaucoup avancer.

Les polyzêtas sont donnés par un type d'intégrales que Kontsevich [D5] appelle « périodes ». Il donne aussi une définition élémentaire des « motifs mixtes » et de leurs matrices de périodes. À ma connaissance, personne n'a explicité une telle matrice de périodes contenant les polyzêtas. Il y a une algèbre de Hopf associée aux périodes, et il serait bon d'en élucider le lien avec les constructions de Racinet, qui exhibe le schéma DM comme un fibré principal de base $\mathbb{A}^1$.

Enfin, il faudrait éclaircir la signification des polyzêtas en physique mathématique. Dans le calcul explicite des intégrales associées aux diagrammes de Feynman, les constantes rencontrées sont presque toujours des polyzêtas (colorés) [D3]. De plus, on dispose d'un modèle-jouet de théorie quantique des champs dont les intégrales associées aux diagrammes de Feynman sont les polyzêtas [D6]. Enfin, comme je l'ai mentionné dans un article précédent [D4], les ressemblances entre les algèbres de Lie telles que $\mathfrak{dm}_0$ et $\mathfrak{grt}$ et celles que Connes et Kreimer ont introduites dans la théorie de la renormalisation sont trop frappantes pour être fortuites.

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

A. Ouvrages généraux, ou de caractère historique

Voici d'abord quelques traités d'Analyse, présentant les fonctions spéciales dans une optique eulérienne

[A1] G.E. Andrews, R. Askey & R. Roy – *Special Functions*, Cambridge University Press, 1999 [tout à fait à jour, par des experts].

[A2] N. Bourbaki – *Fonctions d'une Variable Réelle*, Hermann, 1976 [voir surtout les chapitres VI et VII ; nombreuses coquilles, hélas !].

[A3] A. Erdelyi (éditeur) – *Higher Transcendental Functions*, vol. 1, McGraw-Hill, 1953 [« la » référence pour les fonctions spéciales].

[A4] E.T. Whittaker & G.N. Watson – *A Course of Modern Analysis*, 4e édition, Cambridge University Press, 1940 [le complément obligatoire au Bourbaki cité là-dessus, et qui l'a inspiré].

Voici Euler dans le texte, et ses commentateurs

[A5] L. Euler – *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, 2 volumes, réimpression de l'édition de 1796, par ACL-éditions, 1987 [voir surtout les chapitres VIII à XI du premier Tome].

[A6] W. Dunham – *Euler, the master of us all*, Dolciani Math. Expos. **22**, Math. Assoc. of America, 1999.

[A7] A. Weil – *Number Theory, An Approach through History*, Birkhäuser, 1984 [le chapitre 3 traite d'Euler].

Pour quelques exemples de mathématiques « eulériennes », on peut consulter mes travaux suivants

[A8] P. Cartier & A. Voros – Une nouvelle interprétation de la formule des traces de Selberg, *in « The Grothendieck Festschrift »*, vol. II, pp. 1-67, Birkhäuser, 1990.

[A9] P. Cartier – An Introduction to zeta functions, *in « From Number Theory to Physics »* (Waldschmidt & *al.*, éditeurs), pp. 1-63, Springer, 1995.

[A10] P. Cartier – Mathemagics (A Tribute to L. Euler and R. Feynman), *in « Noise, Oscillators and Algebraic Randomness »* (M. Plana, éditeur), pp. 6-67, Springer, 2000.

Certains de mes exposés précédents au Séminaire Bourbaki traitent de sujets connexes

[A11] P. Cartier – *Décomposition des polyèdres : le point sur le 3e problème de Hilbert*, Sém. Bourbaki 1984-85, exp. n° 646, Astérisque **133-134** (1986), 261-288.

[A12] P. Cartier – *Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées*, Sém. Bourbaki 1987-88, exp. n° 687, Astérisque **161-162** (1988), 31-52.

[A13] P. Cartier – *Développements récents sur les groupes de tresses. Application à l'algèbre et à la topologie*, Sém. Bourbaki 1989-90, exp. n° 716, Astérisque **189-190** (1990), 17-67.

[A14] P. Cartier – *Démonstration « automatique » d'identités et fonctions hypergéométriques (d'après D. Zeilberger)*, Sém. Bourbaki 1991-92, exp. n° 746, Astérisque **206** (1992), 41-91.

Voici la référence à la démonstration de Calabi de la formule $\zeta(2) = \pi^2/6$ (section 1.2)

[A15] F. Beukers, E. Calabi & J. Kolk – *Sums of generalized harmonic series and volumes*, Nieuw Arch. v. Wiskunde **11** (1993), 217-224.

B. Introduction aux fonctions polylogarithmes et nombres polyzêtas

Voici d'abord les principales publications d'Écalle

[B1] J. Écalle – *Théorie des moules*, 3 vol., prépublications mathématiques d'Orsay, 1981, 1982, 1985.

[B2] J. Écalle – *La libre génération des multizêtas et leur décomposition canonico-explicite en irréductibles* (automne 1999).

[B3] J. Écalle – *Ari/gari et la décomposition des multizêtas en irréductibles*, prépublication, avril 2000.
[Plus divers documents, incomplets, qu'il a fait circuler depuis un an et demi ; il prépare un ouvrage exhaustif sur les polylogarithmes].

Au tour de Zagier

[B4] D. Zagier – Values of zeta functions and their applications, *in « First European Congress of Mathematics »*, vol. II, pp. 497-512, Birkhäuser, 1994.

[B5] D. Zagier – *Multiple zeta values* [manuscrit inachevé, et non publié].

Puis du troisième découvreur

[B6] M.E. Hoffman – *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992), 275-290.

[B7] M.E. Hoffman – *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477-495.

[B8] M.E. Hoffman & Y. Ohno – *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, preprint QA/0010140, à paraître.

Pour une introduction aux polylogarithmes $Li_k(z)$, voir

[B9] J. Oesterlé – *Polylogarithmes*, Sém. Bourbaki 1992-93, exp. n° 762, Astérisque **216** (1993), 49-67.

Pour un exposé approfondi, les deux références classiques

[B10] L. Lewin – *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, 1981.

[B11] L. Lewin (éditeur) – *Structural properties of polylogarithms*, Math. Surveys and Monographs, vol. 37, Amer. Math. Soc., 1991.

Pour les fonctions quasi-symétriques, on se reportera à

[B12] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh & J.-Y. Thibon – *Non-commutative symmetric functions*, Adv. Math. **112** (1995), 218-348.

[B13] C. Malvenuto & C. Reutenauer – *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, J. Algebra **177** (1995), 967-982.

[B14] C. Reutenauer – *Free Lie algebras*, London Mathematical Society Monographs, New series, n°7, Oxford Univ. Press, 1993.

Voici quelques références sur les identités entre polyzêtas

[B15] T. Arakawa & M. Kaneko – *Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189-209.

[B16] D. Borwein, J. Borwein & R. Girgensohn – *Explicit evaluation of Euler sums*, Proc. Edin. Math. Soc. **38** (1995), 277-294.

[B17] J. Borwein & R. Girgensohn – *Evaluation of triple Euler sums*, Electron. J. Combin. **3** (1996), n°1, 27 p.

[B18] J. Borwein, D. Bradley & D. Broadhurst – *Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums ; a compendium of results for arbitrary k*, hep-th/9611004.

[B19] A. Granville – *A decomposition of Riemann zeta function*, London Math. Soc. **247** (1997), 95-101.

[B20] K. Ihara & M. Kaneko – *Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values*, à paraître, 2001.

[B21] Y. Ohno – *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Th. **74** (1999), 39-43.

Pour les méthodes algorithmiques, voir le manuel

[B22] H. Cohen – *A course in computational algebraic number theory*, GTM 138, Springer, 1993.

et l'article original

[LLL] A. Lenstra, H. Lenstra & L. Lovacz – *Factoring polynomials with rational coefficients*, Math. Ann. **261** (1982), 315-334.

C. Sur la structure de l'algèbre des polyzêtas

Sur la structure des algèbres de Hopf, le classique

[C1] J. Milnor & J. Moore – *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211-264.

Pour une mise au point sur la série Φ_{KZ}

[C2] J. González-Lorca – *Série de Drinfel'd, monodromie et algèbres de Hecke*, Thèse, École Normale Supérieure, 1998, Rapport du LMENS n° 98-31.

[C3] T.T.Q. Le & J. Murakami – *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 30-65.

et pour l'introduction originale de cette série

[C4] V.G. Drinfel'd – *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related to* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829-860.

L'équipe de Lille a une longue suite de travaux combinatoires et informatiques

[C5] M. Bigotte, G. Jacob, N. Oussous & M. Petitot – *Tables des relations de la fonction zêta colorée*, prépublication du LIFL, Université de Lille I, 1998.

[C6] M. Hoang Ngoc & M. Petitot – *Lyndon words, polylogarithms and the Riemann zeta function*, Discrete Math. **217** (2000), 273-292.

[C7] M. Hoang Ngoc, M. Petitot & J. van den Hoeven – *Polylogarithms and shuffle algebra*, FPSAC'98, Toronto, Canada, Juin 1998.

Pour les résultats de Racinet, voir sa thèse

[C8] G. Racinet – *Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfeld*, Amiens, 2000 ; `http://www.dma.ens.fr/~racinet`

Ihara a longuement étudié les algèbres de Lie liées aux groupes de tresses, et introduit le crochet $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$. Voir

[C9] Y. Ihara – The Galois representation arising from $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ and Tate twists of even degree, *in* « *Galois groups over* **Q** », pp. 299-313, Springer, 1989.

[C10] Y. Ihara – Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations, *in* « *The Grothendieck Festschrift* », Vol. II, pp. 353-373, Birkhäuser, 1990.

[C11] Y. Ihara – *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, pp. 99-120, Math. Soc. Japan, 1991.

[C12] Y. Ihara – *On the stable derivation algebra associated with some braid groups*, Israel J. Math. **80** (1992), 135-153.

[C13] Y. Ihara – *Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro-p-fundamental group of* $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$, preprint R.I.M.S., Kyoto University, 1999.

De manière parallèle, Goncharov a poursuivi une longue réflexion sur les aspects arithmétiques

[C14] A. Goncharov – *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math. Res. Letters **5** (1998), 497-516.

[C15] A. Goncharov – *Multiple ζ-values, Galois groups and geometry of modular varieties*, Proceedings of the third European Congress of Mathematics, Progr. Math., Vol. I, pp. 361–392, Birkhäuser, Basel, 2001.

[C16] A. Goncharov – *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(\ell)}(\mathbb{P}^1\backslash(\{0,\infty\}\cup\mu_N))$, Duke Math. J. **110** (2001), n° 3, 397–487.

[C17] A. Goncharov – *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, `arXiv:math.AG/0103059`.

D. Ouvertures

[D1] K. Ball & T. Rivoal – *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), 193-207.

[D2] M. Bigotte – *Étude symbolique et algorithmique des fonctions polylogarithmes et des nombres d'Euler-Zagier colorés*, Thèse, USTL (Lille), décembre 2000.

[D3] D. Broadhurst – *Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams*, preprint, 1996, hep-th/9612012.

[D4] P. Cartier – *La folle journée ; évolution des idées de point et de symétrie, de Grothendieck à Connes et Kontsevich*, n° spécial des Publ. Math. IHES (nov. 1998) (traduction anglaise dans le Bull. Amer. Math. Soc. **38** (2001), 389-408).

[D5] M. Kontsevich & D. Zagier – Periods, *in* « *Mathematics unlimited – 2001 and beyond* » (B. Engquist & W. Schmidt ed.), pp. 771-808, Springer, 2001.

[D6] U. Müller & C. Schubert – *A quantum field theoretical representation of Euler-Zagier sums*, `arXiv:math.QA/9908067`.

Pierre CARTIER

Institut Mathématique
de Jussieu
175 rue du Chevaleret
F-75013 Paris
et
I.H.E.S.
35 route de Chartres
F-91440 Bures-sur-Yvette
Mél : `cartier@ihes.fr`

Séminaire BOURBAKI Mars 2001
53e année, 2000-2001, nO 886, p. 175 à 209

THÉORÈMES D'ALGÉBRICITÉ EN GÉOMÉTRIE DIOPHANTIENNE [d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky]

par **Antoine CHAMBERT-LOIR**

1. INTRODUCTION

1.1. Certains problèmes géométriques ou arithmétiques se ramènent parfois à décider si une fonction analytique, voire une série formelle, est en fait une fonction algébrique, voire même une fraction rationnelle. On peut notamment penser à deux exemples :

1°) le problème de Schwarz (cf. [41]) consistant à déterminer les équations différentielles hypergéométriques de Gauß ayant une base de solutions formée de fonctions algébriques ;

2°) le théorème de É. Borel [15] affirmant qu'une série entière $f \in \mathbf{Z}[[x]]$ est le développement en série d'une fraction rationnelle si et seulement si c'est le développement de Taylor en l'origine d'une fonction *méromorphe* sur un disque de centre 0 et rayon strictement supérieur à 1. Une généralisation de ce critère a été utilisée par Dwork [21] dans sa démonstration de la rationalité de la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini.

Les travaux de D.V. et G.V. Chudnovsky [18] ont montré que les méthodes de transcendance fournissent une approche à ce genre de questions, en même temps qu'à d'autres problèmes a priori plus éloignés telle la conjecture d'isogénie. C'est là le sujet de notre exposé. Nous en donnerons de nombreuses applications, dont certaines remontent d'ailleurs à ces auteurs. Cette technique a toutefois été perfectionnée, notamment par Y. André ([3] et [4]) et, plus récemment, par un article de J.-B. Bost [17] qui fournit un critère permettant d'affirmer que certaines sous-variétés formelles d'une variété algébrique (c'est-à-dire « définies » par des séries formelles plutôt que des polynômes) sont en fait des sous-variétés algébriques. Celui-ci est écrit dans le langage de la géométrie d'Arakelov et j'espère convaincre le lecteur qu'elle fournit un cadre géométrique efficace pour les démonstrations d'approximation diophantienne.

Les théorèmes antérieurs des Chudnovsky et André (voir notamment [18, 3, 4]) établissaient l'algébricité d'une série formelle et les conséquences géométriques étaient

alors obtenues après dévissage. Les résultats de Bost généralisent aussi un théorème de Graftieaux (voir [27, 28]) concernant les sous-groupes formels d'une variété abélienne, tout en en simplifiant notablement la démonstration.

1.2. Quel que soit le langage utilisé (approximation diophantienne classique, géométrie d'Arakelov,...), la « méthode de Chudnovsky » repose sur des techniques utilisées en théorie des nombres transcendants ; elle combine en effet des hypothèses de type arithmétique (contrôle des dénominateurs) et des hypothèses de type analytique (uniformisation).

L'irruption de l'arithmétique dans ces questions n'est pas nouvelle mais remonte — au moins — à la communication [23] d'Eisenstein où ce dernier établit le théorème suivant : *soit* $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$ *le développement en série de Taylor en l'origine d'une fonction algébrique. Alors, il existe un entier* $A \geqslant 1$ *tel que, pour tout entier* $n \geqslant 0$, $a_n A^{n+1}$ *est entier.* En particulier, les nombres premiers qui divisent les dénominateurs des rationnels a_n sont en nombre fini. Une conséquence immédiate de ce résultat, citée d'ailleurs par Eisenstein, est la transcendence des fonctions logarithme ou exponentielle, « mais aussi de beaucoup d'autres. »

1.3. Comme il m'est impossible de donner un aperçu des méthodes et des résultats en théorie des nombres transcendants, je me vois obligé de renvoyer le lecteur à l'immense littérature sur le sujet, à laquelle le petit ouvrage collectif [8] peut être une bonne introduction, quoiqu'un peu ancienne. Rappelons simplement que, classiquement, une « démonstration de transcendance » met successivement en jeu quatre ingrédients : on raisonne par l'absurde, puis

1°) on construit une *fonction auxiliaire* à l'aide du *lemme de Siegel* : celui-ci fournit à un système sous-déterminé d'équations linéaires à coefficients entiers une solution entière de petite taille, mais *non nulle*. L'*évaluation* de cette fonction auxiliaire fournit un entier ξ sur lequel va porter la contradiction ;

2°) un certain nombre d'estimations de nature analytique, telles que le *lemme de Schwarz* et l'inégalité d'Hadamard majorent $|\xi|$;

3°) le fait (trivial) qu'un entier non nul est de valeur absolue supérieure ou égale à 1 implique, si la majoration précédente est assez bonne, que $\xi = 0$. Dans les corps de nombres, ce principe est remplacé par la *formule du produit* ;

4°) un *lemme de zéros*, de nature généralement algébro-géométrique, montre qu'alors la fonction auxiliaire initiale est nulle, d'où la contradiction.

Cependant, la méthode des *déterminants d'interpolation* introduite par M. Laurent, cf. [36], ne fait pas intervenir le lemme de Siegel. En fait, plutôt que sur une solution du système linéaire, on peut raisonner directement sur les mineurs de sa matrice.

1.4. La *méthode des pentes*, introduite par Bost à propos d'un théorème de Masser et Wüstholz (voir l'exposé [16] à ce séminaire) est une version géométrique « intrinsèque » des déterminants d'interpolation. Sa formulation nécessite le langage de la géométrie d'Arakelov.

Plaçons-nous pour l'instant dans le cas le plus simple où les objets sont des réseaux euclidiens $\overline{E} = (E, q_E)$, où E est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini et q_E une forme quadratique définie positive sur $E_{\mathbf{R}} = E \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. À un tel objet, on peut associer un nombre réel $\widehat{\deg}\,\overline{E}$, son *degré arithmétique*, qui n'est autre que l'opposé du logarithme du covolume de E dans $E_{\mathbf{R}}$. En d'autres termes, $(e_1, \dots, e_d)$ est une $\mathbf{Z}$-base de E,

$$\widehat{\deg}\,\overline{E} = -\frac{1}{2}\log\det\big(q_E(e_i, e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}. \tag{1.4.1}$$

On définit ensuite sa *pente* qui est tout simplement son degré divisé par son rang :

$$\mu(\overline{E}) = \widehat{\deg}\,\overline{E}/\operatorname{rang} E.$$

Dans ce contexte, on a aussi une notion de polygone de Harder-Narasimhan (cf. [46, 29, 16]) mais ne nous intéressera ici que sa *plus grande pente*, $\mu_{\max}(\overline{E})$: c'est le maximum des pentes des sous-réseaux de $\overline{E}$, c'est-à-dire des réseaux $\overline{F} = (F, q_E|_F)$ où F est un sous-$\mathbf{Z}$-module non nul de E.

Étant donnés deux tels réseaux euclidiens $\overline{E}$ et $\overline{F}$, un homomorphisme $\varphi\colon E \to F$ possède une *hauteur*, le logarithme de la norme de l'homomorphisme d'espaces euclidiens induit :

$$h(\varphi) = \log\|\varphi\| = \frac{1}{2}\log \sup_{e\in E_{\mathbf{R}}\setminus\{0\}} \frac{q_F(\varphi(e))}{q_E(e)}.$$

Si φ est *injectif*, on a alors une inégalité, dite *inégalité de pentes* :

$$\mu(\overline{E}) \leqslant \mu_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi). \tag{1.4.2}$$

C'est essentiellement une reformulation de l'inégalité d'Hadamard. Le mérite de cette inégalité est de synthétiser les différentes étapes d'une preuve de transcendance : si le lemme de Siegel disparaît (en apparence seulement, voir plus bas), les estimées analytiques interviennent dans la majoration de $h(\varphi)$. Quand l'inégalité obtenue est absurde, le morphisme φ ne peut pas être injectif, et là intervient éventuellement le lemme de zéros.

1.5. Expliquons maintenant pourquoi, joint au théorème de Minkowski, le lemme de Siegel est, à des facteurs numériques près, un corollaire de l'inégalité de pentes (1.4.2). *Soit donc $\Phi = (a_{ij})$ une matrice à coefficients entiers à r lignes et n colonnes, avec $n > r$. Si $A = \max|a_{i,j}|$, le lemme de Siegel classique affirme qu'il existe un élément non nul $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n$ tel que $\Phi\cdot\mathbf{x} = 0$ et $|x_i| \leqslant (nA)^{r/(n-r)}$ pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$.*

Soit alors $\overline{E}$ le réseau $\mathbf{Z}^n$ muni de la forme quadratique $q_E(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, soit $\overline{F}$ le réseau analogue de rang r, et soit $\varphi\colon E \to F$ l'homomorphisme défini par la matrice Φ. Comme $n > r$, il n'est pas injectif et son noyau, muni de la norme

euclidienne induite, est un sous-réseau saturé $\overline{E}_1$. On définit alors $\overline{E}_2 = \overline{E}/\overline{E}_1$ le réseau quotient, muni de la norme euclidienne quotient. Alors, φ induit un homomorphisme injectif $\varphi_2 \colon \overline{E}_2 \to \overline{F}$, si bien que l'inégalité de pentes (1.4.2) s'écrit

$$\mu(\overline{E}_2) \leqslant \mu_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi_2). \tag{1.5.1}$$

Par construction,

$$h(\varphi_2) = h(\varphi) = \frac{1}{2}\log \sup_{\mathbf{x}\in E_{\mathbf{R}}\setminus\{0\}} \frac{q_F(\varphi(\mathbf{x}))}{q_E(\mathbf{x})} \leqslant \log(\sqrt{r}A). \tag{1.5.2}$$

De plus, les covolumes de réseaux sont multiplicatifs dans les suites exactes, donc les degrés arithmétiques sont additifs et

(1.5.3)
$$\mu(\overline{E}_2) = \operatorname{rang}(E_2)^{-1}\,\widehat{\deg}\,E_2 = \operatorname{rang}(E_2)^{-1}(\widehat{\deg}\,\overline{E} - \widehat{\deg}\,\overline{E}_1) = -\frac{\operatorname{rang}(E_1)}{\operatorname{rang}(E_2)}\mu(\overline{E}_1)$$

car $\widehat{\deg}\,\overline{E} = r\,\widehat{\deg}(\mathbf{Z}, \|\cdot\|) = 0$. De même, $\widehat{\deg}\,\overline{F} = 0$ et, plus généralement, le degré de tout sous-réseau de $\overline{F}$ est négatif ou nul : d'après la formule de Gram (cf. la formule (1.4.1)), le carré du covolume d'un tel sous-réseau de $\mathbf{Z}^n$ est en effet un entier non nul, si bien que $\mu_{\max}(\overline{F}) = 0$. Ainsi, utilisant que $d = \operatorname{rang} E_1 \geqslant n - r$, on a

$$\mu(\overline{E}_1) \geqslant -\frac{r}{n-r}\log(A\sqrt{r}) \tag{1.5.4}$$

Écrivons maintenant le théorème de Minkowski : il affirme que *si le volume (dans $E_{1,\mathbf{R}}$) de la boule B_t de rayon t est supérieur ou égal à 2^d fois le covolume de E_1, alors B_t contient au moins un point non nul de E_1.* Notons $\beta_d = \pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ le volume de la boule unité euclidienne en dimension d. Retranscrit en termes de pentes, le théorème de Minkowski affirme l'existence d'un point non nul $\mathbf{x} \in E_1$ tel que $q_E(\mathbf{x}) \leqslant t^2$ dès que

$$\mu(\overline{E}_1) \geqslant -\log t + \log(2\beta_d^{-1/d}). \tag{1.5.5}$$

Ainsi, il existe une solution non nulle $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n$ au système $\Phi \cdot \mathbf{x} = 0$ vérifiant

$$\|\mathbf{x}\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} \leqslant \big(A\sqrt{r}\big)^{r/(n-r)} 2\beta_d^{-1/d}. \tag{1.5.6}$$

De plus, la formule de Stirling montre que lorsque d tend vers $+\infty$,

$$2\beta_d^{-1/d} \simeq \sqrt{2d/e}.$$

1.6. Dans le même volume que celui où est publié [18], les Chudnovsky utilisent des techniques similaires pour débuter la théorie arithmétique des G-fonctions de Siegel, introduites dans [43]. Faute de place, nous ne dirons rien de cette théorie qui pourtant a vu récemment quelques développement majeurs, suite notamment aux travaux de Bombieri [13] et André. Citons ainsi une théorie géométrique des opérateurs différentiels de type G (André, Baldassarri [7]) ainsi que la généralisation en dimension supérieure, due à L. Di Vizio [20], du théorème des Chudnovsky affirmant qu'un opérateur différentiel minimal annulant une G-fonction est un G-opérateur. Enfin, signalons deux articles récents d'André [5, 6] consacrés à une « théorie Gevrey arithmétique » dont le théorème de Chudnovsky évoqué est un outil essentiel. Il en déduit de remarquables applications, par exemple une nouvelle preuve du théorème de Siegel-Shidlovsky et, inspiré par la preuve de Bézivin-Robba [10], deux (!) du théorème de Lindemann-Weierstraß.

Je remercie Y. André, D. Bertrand, J.-B. Bost et Y. Laszlo pour l'aide qu'ils m'ont apportée pendant la préparation de cet exposé. Je remercie aussi C. Gasbarri et A. Thuillier pour leur lecture attentive.

2. QUATRE THÉORÈMES

2.1. Les énoncés que nous présentons maintenant font intervenir des objets algébro-géométriques définis sur un corps de nombres (nombres, variétés algébriques, équations différentielles, sous-algèbres de Lie, etc.) vérifiant une propriété modulo p pour presque tout nombre premier p. Le sens de ce genre d'hypothèses est le suivant. Soit K un corps de nombres et soit $\mathfrak{o}_K$ son anneau d'entiers. Un objet algébro-géométrique sur K « de type fini » est défini par une famille finie d'éléments de K (par exemple, dans le cas d'une variété algébrique, les coefficients des équations polynomiales qui la définissent) ; ces éléments ont un dénominateur commun $D \in \mathbf{Z}$, si bien qu'en fait l'objet initial « vit » naturellement sur l'anneau $\mathfrak{o}_K[1/D]$. Il y a bien sûr des choix mais étant données deux structures entières sur $\mathfrak{o}_K[1/D]$ et $\mathfrak{o}_K[1/D']$, il existera un multiple commun à D et D', soit D'', tel que les structures entières coïncident, une fois regardées sur $\mathfrak{o}_K[1/D'']$. C'est bien sûr dans le langage des *schémas* que de telles considérations trouvent leur place naturelle.

Les idéaux maximaux d'un tel anneau $\mathfrak{o}_K[1/D]$ s'identifient naturellement à une partie de complémentaire fini de l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathfrak{o}_K$ (ceux qui ne contiennent pas D). Réduire modulo p pour presque tout p signifie que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_K[1/D]$ (sauf peut-être un nombre fini d'entre eux), on considère la structure entière modulo l'idéal $\mathfrak{p}$. On obtient ainsi une structure algébrique analogue à celle de départ, mais sur un corps fini. C'est sur ces structures « modulo p » que portent les hypothèses des théorèmes.

Nous donnerons volontairement les énoncés dans ce style informel, en en indiquant juste après la signification précise.

2.2. Théorème. — *Soit α un nombre algébrique tel que pour presque tout nombre premier p, la réduction modulo p de α est dans le sous-corps premier $\mathbf{F}_p$. Alors, α est un nombre rationnel.*

Autrement dit, α est un élément d'un corps de nombres K. Écrivons le β/D où D est un entier $\geqslant 1$ et β un entier algébrique. L'hypothèse signifie que pour presque tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_K$, il existe un élément $n_\mathfrak{p} \in \mathbf{Z}$ tel que $\beta \equiv n_\mathfrak{p} D \pmod{\mathfrak{p}}$. La conclusion est alors que $\beta \in \mathbf{Z}$.

Ce résultat apparaît dans l'article [35] de Kronecker qui le dérive du comportement du logarithme de la fonction zêta de Dedekind du corps $\mathbf{Q}(\alpha)$ en $s = 1$.[(1)] Aujourd'hui, il apparaît souvent comme une conséquence du théorème de densité de Čebotarev. En lien avec le théorème 2.6 ci-dessous, les Chudnovsky en fournissent une démonstration « diophantienne » dans [18], c'est-à-dire fondée sur les méthodes introduites par la théorie des nombres transcendants.

2.3. Théorème. — *Soit E et E' deux courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$. Alors, E et E' sont isogènes sur $\mathbf{Q}$ si et seulement si, pour presque tout nombre premier p, E et E' ont le même nombre de points sur $\mathbf{F}_p$.*

Donnons là encore une interprétation naïve : partant de deux courbes elliptiques E et E' sur $\mathbf{Q}$ on peut en trouver des équations (affines, sous forme de Weierstraß) $y^2 = 4x^3 + ax + b$ et $y^2 = 4x^3 + a'x + b'$, avec a, b, a', b' dans $\mathbf{Z}$. Pour tout nombre premier p sauf 2, 3 et ceux qui divisent le produit des discriminants $4a^3 + 27b^2$ et $4a'^3 + 27b'^2$, ces équations définissent des courbes elliptiques E_p et E'_p sur le corps fini $\mathbf{F}_p$.

Une $\mathbf{Q}$-isogénie entre E et E', c'est-à-dire en l'occurrence un morphisme non constant défini sur $\mathbf{Q}$ fournira pour tous ces nombres premiers (sauf quelques-uns, peut-être) une isogénie entre les courbes elliptiques E_p et E'_p. Il est alors connu que E_p et E'_p ont même nombre de points sur $\mathbf{F}_p$. La réciproque est le point difficile.

Démontré par Serre [42] si l'un des invariants $j(E)$ et $j(E')$ n'est pas entier, c'est un cas particulier du « théorème d'isogénie de Faltings », cf. [25], lequel fournit un énoncé analogue pour deux variétés abéliennes définies sur un corps de nombres. Dans [18], les Chudnovsky avaient donné une démonstration diophantienne du théorème 2.3. Cependant, leur démonstration nécessitait en outre le théorème de Cartier et Honda [30] reliant la fonction zêta de Hasse-Weil d'une $\mathbf{Q}$-courbe elliptique et le groupe formel de son modèle de Néron sur $\mathbf{Z}$. Dans [27], Graftieaux a donné une démonstration

(1) L'argument de Kronecker semble cependant incomplet. L'existence d'une densité de certains ensembles de nombres premiers, aujourd'hui conséquence du théorème de Čebotarev, est en effet utilisée sans justification.

analogue du théorème d'isogénie pour les variétés abéliennes à multiplication réelle définies sur $\mathbf{Q}$. Cette preuve nécessite une généralisation du théorème de Cartier et Honda, démontrée par Deninger et Nart dans [19], qui fournit un isomorphisme entre les groupes formels des variétés abéliennes en question. Graftieaux démontre ensuite l'algébricité de cet isomorphisme, autrement dit l'algébricité du graphe, lequel est un sous-groupe formel du produit des deux variétés abéliennes. Graftieaux a ensuite établi dans [28] un critère général d'algébricité de sous-groupes formels d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres. Ses résultats sont de plus effectifs : les hypothèses ne font intervenir qu'un nombre fini explicite de nombres premiers.

Plus généralement, on a le théorème suivant, dû à Bost.

2.4. THÉORÈME. — *Soit G un groupe algébrique défini sur un corps de nombres K, soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-K-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ vérifiant la propriété suivante : pour presque tout nombre premier p, la réduction de $\mathfrak{h}$ modulo p est une p-algèbre de Lie. Alors, il existe un sous-groupe algébrique H de G, défini sur K, dont $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie.*

L'ingrédient nouveau est la notion de p-algèbre de Lie. Si G est un groupe algébrique lisse sur un corps k, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est par définition le k-espace vectoriel des dérivations invariantes par translations sur G, muni du crochet $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$. En effet, si D_1 et D_2 sont deux dérivations invariantes, leur commutateur en est encore une. De plus, si k est de caractéristique $p > 0$ et si D est une dérivation invariante, la formule du binôme montre que, pour tous germes de fonctions f et g, on a

$$D^p(fg) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} D^i(f)D^{p-i}(g) = gD^p(f) + fD^p(g),$$

si bien que D^p est encore une dérivation. Cette opération de puissance p-ième donne naissance à la notion de p-algèbre de Lie, cf. [31], 5.7, [14], 1.3 ainsi que l'exposé [37] à ce séminaire. Étant donnée une telle p-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, une sous-p-algèbre de Lie est alors une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ telle que pour tout $D \in \mathfrak{h}$, $D^p \in \mathfrak{h}$.

L'explicitation du « modulo p » se fait alors comme précédemment. Si $\mathfrak{o}_K$ est l'anneau des entiers de K, il existe un entier $N \geqslant 1$ et un schéma en groupes lisse $\mathscr{G}$ sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K[1/N]$ dont la fibre générique $\mathscr{G} \otimes K$ est G. Son algèbre de Lie $\operatorname{Lie}(\mathscr{G})$ est une $\mathfrak{o}_K[1/N]$-algèbre de Lie telle que $\operatorname{Lie}(\mathscr{G}) \otimes K = \mathfrak{g}$. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_K$ ne contenant pas N, on dispose alors d'un groupe algébrique lisse sur le corps fini $\mathbf{F}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}$ dont l'algèbre de Lie n'est autre que $\operatorname{Lie}(\mathscr{G}) \otimes \mathbf{F}_\mathfrak{p}$. Si l'on note p la caractéristique du corps $F_\mathfrak{p}$, c'est en particulier une p-algèbre de Lie.

Quitte à remplacer l'entier N par un multiple, une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ définit de même une sous-algèbre de Lie de $\operatorname{Lie}(\mathscr{G})$, et par conséquent, par réduction modulo $\mathfrak{p}$, des sous-algèbres de Lie de $\operatorname{Lie}(\mathscr{G}) \otimes \mathbf{F}_\mathfrak{p}$. L'hypothèse est donc que pour presque tout idéal maximal $\mathfrak{p}$, ces sous-algèbres de Lie sont des sous-p-algèbres de Lie.

2.5. Le théorème 2.4 est démontré par Bost dans [17]. Il avait été indépendamment conjecturé par Ekedahl et Shepherd-Barron dans leur article [24]. Il n'est peut-être pas inutile d'expliquer en quoi les deux théorèmes 2.2 et 2.3 en sont des cas particuliers.

2.5.1. Théorème de Kronecker. — Considérons le groupe algébrique $G_k = \mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$ sur un corps k. On note x et y les coordonnées sur les deux produits, l'élément neutre étant $(1,1)$. Alors, une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_k$ de G_k est constituée des champs de vecteurs $x\frac{\partial}{\partial x}$ et $y\frac{\partial}{\partial y}$. et $\mathfrak{g}_k$ est la k-algèbre de Lie commutative k^2.

Si k est de caractéristique positive p, déterminons l'opération de puissance p-ième sur $\mathfrak{g}_k$. Il suffit de la calculer dans le cas de $\mathbf{G}_m$, auquel cas on a

$$\big(x\frac{\partial}{\partial x}\big)^p = x\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.5.2}$$

En effet, $x\frac{\partial}{\partial x}$ est l'unique dérivation invariante sur $\mathbf{G}_m$ qui envoie sur elle-même la fonction régulière x. Ainsi, utilisant le fait que l'algèbre de Lie de $(\mathbf{G}_m)^2$ est commutative,

$$\big(ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}\big)^p = a^p x\frac{\partial}{\partial x} + b^p y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pour établir le théorème 2.2, considérons un élément α d'un corps de nombres K et soit G le groupe $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$ sur K, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = K^2$. La droite $\mathfrak{h} = (1,\alpha)K$ est une sous-algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathfrak{o}_K$ tel que α soit $\mathfrak{p}$-entier. La réduction modulo $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{h}$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$ engendrée par $(1, \alpha \mod \mathfrak{p})$ dans $(\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p})^2$. C'est une sous-$p$-algèbre de Lie si et seulement si $(1^p, (\alpha \mod \mathfrak{p})^p)$ est colinéaire à $(1, \alpha \mod \mathfrak{p})$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha^p = \alpha \pmod{\mathfrak{p}}$, ou encore si $\alpha \mod \mathfrak{p}$ est dans le corps premier $\mathbf{F}_p$. Par suite, sous l'hypothèse du théorème de Kronecker, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie d'un K-sous-groupe algébrique H de $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$. Or, ceux-ci sont définis par une équation de la forme $x^m = y^n$ pour deux entiers m et n. L'algèbre de Lie d'un tel H est la droite d'équation $m\xi = n\eta$ dans le plan K^2 de coordonnées (ξ,η), donc est engendrée par le vecteur (n,m). On a ainsi $\alpha = m/n$.

2.5.3. Théorème d'isogénie. — Pour commencer, soit E une courbe elliptique sur un corps k. Son algèbre de Lie est une k-algèbre de Lie de dimension 1, bien entendu commutative. De plus, on a une identification canonique $\mathrm{Lie}(E) = H^1(E, \mathscr{O}_E)$. Si k est de caractéristique positive p, l'opération de puissance p-ième sur $\mathrm{Lie}(E)$ se confond alors avec l'action du morphisme dit « Frobenius absolu » $F\colon E \to E$. Supposons de plus que k est le corps premier $\mathbf{F}_p$. Alors, F induit un endomorphisme p-linéaire, donc linéaire, de $H^1(E, \mathscr{O}_E)$; c'est ainsi une homothétie dont nous noterons $A \in \mathbf{F}_p$ le rapport (*invariant de Hasse*). On sait d'autre part depuis Hasse qu'il existe deux entiers algébriques α et β tels que $\#E(\mathbf{F}_p) = p + 1 - (\alpha + \beta)$ et $\alpha\beta = p$. De plus, modulo p, l'un des deux, disons α, s'interprète comme l'action de l'endomorphisme F sur $\mathrm{Lie}\, E$, tandis que β correspond à l'action du Verschiebung (défini par $FV = p$), c'est-à-dire A. Par suite $\#E(\mathbf{F}_p) \equiv 1 - A$ modulo p.

Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses du théorème 2.3 et considérons le groupe algébrique $G = E \times E'$ sur $\mathbf{Q}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(E) \oplus \mathrm{Lie}(E')$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une droite arbitraire se projetant surjectivement sur les deux facteurs. L'hypothèse que E et E' ont, pour presque tout nombre premier p, même nombre de points modulo p implique que, modulo p pour presque tout p, $\mathfrak{h}$ définit une sous-p-algèbre de Lie de la réduction modulo p de $\mathfrak{g}$. C'est ainsi l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique $H \subset E \times E'$ défini sur $\mathbf{Q}$. Or, un tel sous-groupe fournit automatiquement une isogénie entre E et E' (considérer par exemple H comme une correspondance).

2.6. THÉORÈME. — *Soit X une variété algébrique lisse définie sur un corps de nombres et soit ω une forme différentielle sur X. On suppose que pour presque tout nombre premier p, ω est modulo p une forme différentielle exacte ($\omega = \mathrm{d}f$). Alors, ω est une forme différentielle exacte.*

On a un résultat similaire dans le cas logarithmique : si pour presque tout nombre premier p, ω est modulo p une forme logarithmique exacte ($\omega = \mathrm{d}\log f = \mathrm{d}f/f$), alors, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $n\omega$ est une forme différentielle logarithmiquement exacte.

Ce théorème est démontré par André [3] dans le premier cas et par les Chudnovsky dans [18] dans le cas logarithmique. Il était conjecturé dans le premier cas par Ogus dans [39, §2] et, en liaison avec la conjecture de Grothendieck, par Katz dans [33, p. 2] pour le cas logarithmique.

Comme exemple d'application, montrons comment en déduire le théorème 2.2. Considérons la courbe $X = \mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}\, K[x, x^{-1}]$ sur un corps de nombres K, et, si $\alpha \in K$, posons $\omega = \alpha x^{-1}\mathrm{d}x$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathfrak{o}_K$ et $n_\mathfrak{p} \in \mathbf{Z}$ un entier tel que $\alpha - n_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}$, ω modulo $\mathfrak{p}$ est égale à $n_\mathfrak{p} x^{-1}\mathrm{d}x$, donc est la différentielle logarithmique de $x^{n_\mathfrak{p}}$. D'après le théorème 2.6, il existe $n \geqslant 1$ tel que $n\alpha x^{-1}\mathrm{d}x$ est une forme différentielle logarithmiquement exacte, c'est-à-dire $n\alpha \in \mathbf{Z}$, d'où $\alpha \in \mathbf{Q}$.

Sur la droite projective, le théorème 2.6 admet le corollaire suivant : *soit $y \in \mathbf{Z}[[x]]$ une série formelle à coefficients entiers dont la dérivée est une fonction algébrique, alors y est une fonction algébrique.* La variante de cet énoncé où algébrique est remplacé par *rationnelle* a été démontrée par Pólya ; c'est une application classique du théorème de Borel [15]. Signalons d'ailleurs que ce critère a été généralisé par Bézivin et Robba dans [11] au cas d'opérateurs différentiels d'ordre supérieur. Cette généralisation leur a permis d'en déduire une nouvelle démonstration du théorème de Lindemann-Weierstrass.

F. Caligari en a donné une application aux courbes modulaires : joint au théorème de Manin-Drinfel'd, il implique en effet qu'une forme modulaire (non nécessairement cuspidale) de poids 2 qui pour presque tout nombre premier p est fixée par l'opérateur T_p modulo p est une combinaison linéaire de séries d'Eisenstein.

3. LA CONJECTURE DE GROTHENDIECK

3.1. La *conjecture de Grothendieck* est un critère arithmétique qui prédit qu'un système différentiel linéaire, disons de la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}Y = A(z)Y, \qquad A(z) \in M_d(\mathbf{Q}(z)) \tag{3.1.1}$$

possède une base de solutions algébriques, c'est-à-dire dont les solutions holomorphes au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbf{Q}$ qui n'est pas un pôle de A sont algébriques sur $\mathbf{Q}(z)$. La condition, conjecturalement suffisante, est que pour presque tout nombre premier p, le système différentiel obtenu par réduction modulo p ait une base de solutions algébriques sur $\mathbf{F}_p(z)$.

Le point fondamental, dû à Cartier et Honda, est que cette dernière condition est, pour p un nombre premier fixé, effectivement vérifiable. Pour rester élémentaire, définissons une suite (A_n) de matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{Q}(z)$ par

$$A_0(z) = I_d, \quad A_1(z) = A(z), \quad A_{n+1}(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_n(z) + A_n(z)A(z). \tag{3.1.2}$$

Si l'on peut réduire A modulo p, alors on a l'équivalence des propositions suivantes :

– le système différentiel (3.1.1) modulo p admet une base de solutions algébriques sur $\mathbf{F}_p(z)$;
– il admet une base de solutions dans $\mathbf{F}_p(z)$;
– il admet une base de solutions dans $\mathbf{F}_p((z))$;
– la matrice de « p-courbure » A_p est nulle modulo p.

Sous cette forme, cet énoncé est assez élémentaire. Si $Y(z)$ est une solution du système (3.1.1), on vérifie par récurrence que pour tout n, $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}Y(z) = A_n(z)Y(z)$. Si Y est une solution de ce système, par exemple dans $\mathbf{F}_p((z))$, on a $(\mathrm{d}^p/\mathrm{d}z^p)Y(z) = 0$. L'existence d'une *base* de solutions dans $\mathbf{F}_p((z))$ implique alors que $A_p(z) = 0$ modulo p. Dans l'autre sens, supposant pour simplifier que 0 n'est pas une singularité de A, on constate que la formule (de Taylor !)

$$Y(z) = \Big(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-z)^i}{i!}A_i(z)\Big)^{-1} \tag{3.1.3}$$

fournit une matrice fondamentale de solutions dans $\mathbf{F}_p(z)$.

3.2. Ces considérations s'étendent à un contexte plus général que nous présentons maintenant. Soit X une variété algébrique lisse sur un corps de nombres K et soit E un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini. Une connexion sur E est une application K-linéaire

$$\nabla \colon E \to E \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_X \tag{3.2.1}$$

vérifiant $\nabla(fe) = f\nabla(e) + e \otimes \mathrm{d}f$ pour toutes sections locales f de $\mathscr{O}_X$ et e de E. Il sera pratique de considérer l'homomorphisme dual

$$\mathrm{T}X \to \mathit{End}(E), \qquad \partial \mapsto \nabla(\partial), \tag{3.2.2}$$

$\mathrm{T}X$ désignant le fibré tangent de X. On notera aussi E^{∇} le faisceau des *sections horizontales* de E, c'est-à-dire des germes de sections locales e de E telles que $\nabla(e) = 0$. Par définition, E est *trivial* s'il est engendré par E^{∇} comme $\mathscr{O}_X$-module. On dit aussi que la connexion ∇ est *intégrable* si l'homomorphisme (3.2.2) est un homomorphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire si pour tous champs de vecteurs locaux ∂_1 et ∂_2,

$$[\nabla(\partial_1), \nabla(\partial_2)] = \nabla([\partial_1, \partial_2]). \tag{3.2.3}$$

C'est bien sûr équivalent au fait que la *courbure* $\psi(E, \nabla) = \nabla^2 \in \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^2_X$ soit nulle.

Supposons ∇ intégrable. Si K est un corps de caractéristique positive p, $\mathrm{T}X$ et $\mathit{End}(E)$ sont des p-algèbres de Lie et on définit une *p-courbure* qui mesure le défaut pour l'homomorphisme (3.2.2) d'être un homomorphisme de p-algèbres de Lie :

$$\psi_p \colon \mathrm{T}_X \to \mathit{End}(E), \qquad \partial \mapsto \nabla(\partial)^p - \nabla(\partial^p). \tag{3.2.4}$$

C'est une application additive, p-linéaire :

$$\psi_p(f_1\partial_1 + f_2\partial_2) = f_1^p\psi_p(\partial_1) + f_2^p\psi_p(\partial_2).$$

Le théorème de Cartier affirme alors l'équivalence des propriétés suivantes (cf. [32], théorème 5.1) :

- pour toute section locale ∂ de $\mathrm{T}X$, $\psi_p(\partial) = 0$;
- l'homomorphisme (3.2.2) est un homomorphisme de p-algèbres de Lie ;
- le faisceau E est trivial.

3.3. Conjecture (Grothendieck). — *Soit X une variété lisse sur un corps de nombres K et (E, ∇) un module à connexion intégrable sur X. On suppose que pour presque tout nombre premier p, la réduction modulo p de (E, ∇) est à p-courbure nulle. Alors, il existe un revêtement étale $f \colon Y \to X$ tel que f^*E soit trivial.*

La condition pour un module à connexion intégrable (E, ∇) d'avoir (presque toutes) ses p-courbures nulles a été étudiée de manière approfondie par Katz. En particulier, il est établi dans [32] qu'alors, (E, ∇) est à singularités régulières et ses exposants sont des nombres rationnels, ce qui n'est d'ailleurs pas sans rapport avec le théorème 2.2 (voir aussi [22], III.6.1).

Il y a eu essentiellement deux approches de cette conjecture, l'une géométrique, l'autre arithmétique. Rappelons que les périodes d'une famille de variétés algébriques lisses sont gouvernées par une équation différentielle, dite de Picard-Fuchs. Pour celles-ci, et plus généralement, pour leurs facteurs, Katz [33] puis André [4] relient les p-courbures à la réduction modulo p de l'application de Kodaira-Spencer. C'est ainsi qu'est établie la conjecture de Grothendieck pour les équations hypergéométriques de

Gauß (on retrouve la liste de Schwarz) ou les facteurs des connexions de Knizhnik-Zamolodchikov. L'approche arithmétique est au cœur de cet exposé. Elle a permis d'établir la conjecture pour les fibrés de rang 1 sur une courbe (Chudnovsky [18], le cas où E est trivial a été vu plus haut), lorsque (E, ∇) est extension de deux modules à connexion isotriviaux (André, [4]), et plus généralement, lorsque le *groupe de Galois différentiel* de (E, ∇) a une composante neutre résoluble (André, voir plus bas).

Le groupe de Galois différentiel « générique » d'un module à connexion (E, ∇) est défini par Katz dans [34] (voir aussi l'exposé [9] de Bertrand à ce séminaire). Sa définition la plus élégante est tannakienne et fournit un groupe algébrique sur le corps $K(X)$ des fonctions de X : c'est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E \otimes K(X))$ qui stabilise tout sous-module horizontal de toute construction tensorielle sur (E, ∇). Dans le cas singulier régulier, qui est en fin de compte celui qui nous importe le plus pour la conjecture de Grothendieck, on peut décrire peut-être plus concrètement une $\mathbf{C}$-forme de ce groupe. Étant donné un plongement de K dans $\mathbf{C}$, on peut considérer (E, ∇) comme un module à connexion intégrable sur la variété analytique $X(\mathbf{C})$. Le groupe de Galois différentiel « est » alors l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie usuel de (E, ∇) ([34], Prop. 5.2). Dans tous les cas ([34], Prop. 4.5), la finitude du groupe de Galois différentiel de (E, ∇) équivaut à l'isotrivialité de (E, ∇), soit encore à l'existence d'une base de solutions algébriques.

Katz a proposé ([34], Conj. 9.2) une généralisation de la conjecture de Grothendieck et prédit que l'algèbre de Lie du groupe de groupe de Galois différentiel de (E, ∇) est la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(E)$ qui « contient », pour presque tout p, les p-courbures $\psi_p(\partial)$. En fait, et c'est là l'objet principal de l'article [34], cette généralisation et la conjecture de Grothendieck sont équivalentes : la véracité de la conjecture de Grothendieck pour tout fibré à connexion intégrable implique celle de Katz.

Enfin, signalons qu'un « q-analogue » de la conjecture de Grothendieck-Katz (pour les équations aux q-différences) a été démontré par L. Di Vizio dans sa thèse (décembre 2000). La démonstration utilise le théorème 6.2 ci-dessous, l'un des R_v étant infini.

3.4. Exemples. — Revenons maintenant sur le théorème 2.6 concernant l'exactitude de formes différentielles. Soit X une courbe algébrique lisse sur un corps de nombres K et soit $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$ une forme différentielle régulière sur X. On peut considérer deux modules à connexion (nécessairement intégrables puisque X est une courbe) :

$$E_1 = \mathscr{O}_X, \qquad \nabla f = \mathrm{d}f - f\omega \tag{3.4.1}$$

$$E_2 = \mathscr{O}_X^2, \qquad \nabla(f, g) = (\mathrm{d}f - \omega g, \mathrm{d}g). \tag{3.4.2}$$

L'existence d'une section horizontale non nulle de E_1 signifie ainsi exactement que ω est une différentielle logarithmiquement exacte. Si E_2 est engendré par ses sections horizontales, il existe une telle section (f, g) avec $g \neq 0$, donc g constante que l'on

peut supposer égale à 1, et alors $\mathrm{d}f = \omega$, ce qui signifie que ω est une différentielle exacte. Dans les deux cas, l'hypothèse du théorème 2.6 sur la réduction modulo p de ω pour presque tout nombre premier p est, d'après le théorème de Cartier, équivalente à la nullité des p-courbures.

D'autre part, la définition même du groupe de Galois différentiel montre que c'est un sous-groupe de $\mathbf{G}_m$ dans le cas de (E_1, ∇), tandis que (E_2, ∇) ayant un sous-fibré horizontal (défini par $q = 0$), son groupe de Galois différentiel est un sous-groupe du groupe de Borel $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$. Ces deux groupes algébriques sont en particulier résolubles et résoudre la conjecture de Grothendieck pour les modules à connexion intégrable dont le groupe de Galois est résoluble démontre le théorème 2.6. Réciproquement, si le groupe de Galois différentiel est résoluble, des dévissages ramènent la conjecture de Grothendieck au cas du théorème 2.6, d'où le théorème ([4], §3, voir aussi [17], théorème 2.9) :

3.5. Théorème (André). — *Soit X une variété algébrique lisse sur un corps de nombre et (E, ∇) un fibré vectoriel à connexion intégrable sur X. Si la composante neutre du groupe de Galois différentiel de (E, ∇) est résoluble, alors (E, ∇) vérifie la conjecture de Grothendieck-Katz.*

4. FEUILLETAGES

4.1. Soit X une variété algébrique lisse sur un corps K et soit $F \subset T_X$ un sous-fibré vectoriel de son fibré tangent qui est *involutif*, c'est-à-dire stable par le crochet de Lie sur T_X. Si $K \subset \mathbf{C}$, un tel fibré involutif définit un feuilletage holomorphe sur la variété analytique $X(\mathbf{C})$: il existe dans un voisinage U_x de tout point $x \in X(\mathbf{C})$ une sous-variété analytique $Y \subset U_x$ telle que pour tout $y \in Y$, l'espace tangent $T_y Y$ à Y en y soit égal à $F_y \subset T_y X$ (théorème de Frobenius). Cependant, une telle *feuille* n'est en général pas un germe de sous-variété algébrique.

Si K est de caractéristique 0 et $x \in X(K)$ un point rationnel, la variante formelle du théorème de Frobenius fournit cependant une sous-variété formelle lisse de X complété le long de x, la *feuille formelle de F en x*.

Si K est de caractéristique p, on dira que F est *p-intégrable* si c'est un sous-fibré de $\mathrm{T}X$ stable par puissance p-ième.

Pour motiver cette définition, supposons maintenant que K soit un corps de nombres et que la feuille formelle $\widehat{Y}$ passant par un point rationnel $x \in X(K)$ soit le germe d'une sous-variété algébrique Y. Pour presque tout nombre premier p, on obtient par réduction modulo p une situation analogue (X, F, Y) sur un corps fini de caractéristique p. Comme les opérations de puissance p-ième sur T_Y et sur T_X sont compatibles, il en résulte que F est clos par puissance p-ième aux points de Y.

Réciproquement, la généralisation de la conjecture de Grothendieck aux feuilletages (formulée par Ekedahl et Shepherd-Barron dans [24], conjecture F) prédit que les feuilles formelles d'un tel sous-fibré involutif $F \subset T_X$ qui pour presque tout nombre premier p est p-intégrable sont des sous-variétés algébriques.

Avant d'énoncer le théorème de Bost, quelques rappels d'analyse complexe s'imposent.

4.2. Il est bien connu que toute fonction holomorphe bornée sur l'espace affine $\mathbf{C}^n$ est constante : c'est le théorème de Liouville. Plus généralement, toute fonction *plurisousharmonique* majorée sur $\mathbf{C}^n$ est constante. Rappelons qu'une fonction ψ sur une variété analytique complexe M à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique si :

– elle est semicontinue supérieurement ;
– elle n'est identiquement $-\infty$ sur aucune composante connexe de M ;
– pour toute fonction holomorphe $f\colon D(0,1) \to M$ du disque unité fermé de $\mathbf{C}$ dans M, on a l'inégalité

$$\psi(f(0)) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(f(e^{\mathrm{i}\theta}))\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.2.1}$$

Par exemple, pour toute fonction holomorphe φ non nulle, $\log|\varphi|$ est une fonction plurisousharmonique.

Suivant la terminologie de [17], nous dirons ainsi qu'une variété analytique complexe connexe M vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction plurisousharmonique majorée sur M est constante. Si X est une variété algébrique complexe connexe lisse, on peut démontrer que $X(\mathbf{C})$ satisfait la propriété de Liouville. Dans le cas compact, cela résulte du principe du maximum ; dans le cas général, on peut par exemple remarquer que le complémentaire d'un fermé analytique (strict) dans une variété qui satisfait la propriété de Liouville le satisfait aussi. Tout groupe de Lie complexe connexe vérifie la propriété de Liouville.

4.3. Théorème (Bost). — *Soit X une variété algébrique lisse sur un corps de nombres K contenu dans $\mathbf{C}$, soit F un sous-fibré involutif de $\mathrm{T}X$ et soit $x \in X(K)$ un point rationnel. Supposons que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

– pour presque tout nombre premier p, la réduction modulo p de F est un sous-fibré p-intégrable ;

– il existe une variété analytique complexe M satisfaisant la propriété de Liouville, un point $O \in M$, une application holomorphe ψ de M vers la feuille en x du feuilletage holomorphe induit par F sur $X(\mathbf{C})$ telle que $\psi(O) = x$ et telle que ψ soit biholomorphe d'un voisinage de O vers un voisinage de x dans cette feuille.

Alors, la feuille formelle de F passant par x est algébrique.

4.4. Les équations différentielles issues de fibrés vectoriels à connexion fournissent naturellement des feuilletages. Plus généralement, si G est un groupe algébrique sur un corps de nombres K, un G-fibré principal à connexion sur une K-variété algébrique lisse B est un G-fibré principal $X \to B$ (c'est-à-dire un G-torseur sur B) muni d'un scindage G-équivariant de la suite exacte de G-fibrés vectoriels sur X,

$$0 \to \mathrm{T}_{X/B} \to \mathrm{T}X \to \mathrm{T}B \to 0. \tag{4.4.1}$$

Dans ce cas, l'image de $\mathrm{T}B$ par la section fournit un feuilletage G-équivariant sur X.

À l'aide du théorème 4.3, on peut alors démontrer certains cas de la conjecture de Grothendieck, par exemple le théorème 2.6 ou le théorème 3.5, si l'on établit que la condition d'uniformisation est automatiquement remplie. Après dévissages, le théorème 3.5 se ramène au cas où la base B est une courbe et le groupe G connexe commutatif. Utilisant le morphisme d'addition $G^d \to G$, on peut alors étendre le G-fibré à connexion (X, ∇) sur B, en un autre (X_d, ∇) sur la puissance symétrique d-ième de B (qui contient B une fois fixé un point base). Le point est que pour d assez grand, le revêtement universel d'une telle puissance symétrique vérifie la propriété de Liouville.

4.5. Proposition. — *Soit C une courbe algébrique complexe lisse connexe. Pour tout entier d assez grand, le revêtement universel du produit symétrique* $\mathrm{Sym}^d C$ *satisfait la propriété de Liouville.*

Soit $\overline{C}$ la complétion projective lisse de C, g son genre et s le cardinal de $S = \overline{C} \setminus C$. Il est démontré dans [17] qu'il suffit de prendre $d \geqslant \max(2, g, g + s - 1)$. Cependant, si $d > 2g - 2 + s$, $\mathrm{Sym}^d C$ est un fibré en espaces affines (projectifs si $s = 0$) au-dessus de la jacobienne généralisée $\mathrm{Jac}_S \overline{C}$ définie par le module S. Son revêtement universel est l'image réciproque par l'application exponentielle $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Jac}_S \overline{C} \to \mathrm{Jac}_S \overline{C}$ de ce fibré affine (resp. projectif). Il vérifie la condition de Liouville. Si $S \neq \varnothing$, c'est même l'espace affine de dimension d.

4.6. Dans [38], Miyaoka démontre un théorème d'algébricité pour les feuilles de certains feuilletages algébriques. Il procède essentiellement en *construisant* des courbes rationnelles tangentes au feuilletage. Le point de départ de la démonstration est ainsi l'existence d'une famille dense de courbes le long desquelles le fibré involutif définissant le feuilletage a un degré strictement positif. Les feuilles obtenues sont faiblement rationnellement connexes : deux points quelconques peuvent être reliés par une suite de courbes rationnelles.

Le théorème 4.3 admet un analogue géométrique, découvert très récemment de manière indépendante par Bogomolov et McQuillan [12] d'une part, en liaison avec les travaux de Miyaoka, et par Bost, d'autre part. L'énoncé en est le suivant.

4.7. Théorème. — *Soit k un corps, disons algébriquement clos et soit V_0 une sous-variété connexe projective lisse d'une variété quasi-projective X définie sur k. On*

suppose que V_0 n'est pas réduite à un point. Soit $\widehat{V}$ une sous-variété formelle lisse du complété formel de X le long de V_0 et contenant V_0.[(2)] *On suppose que le fibré normal de V_0 dans $\widehat{V}$, $N_{V_0}\widehat{V}$ est ample. Alors, $\widehat{V}$ est algébrique : l'adhérence de Zariski de $\widehat{V}$ dans X a même dimension que $\widehat{V}$.*

Autrement dit, il existe une sous-variété algébrique Y de X contenant V_0 dont $\widehat{V}$ est l'une des « branches » le long de V_0.

La démonstration est étonnamment simple et, après tout, l'idée n'est pas si différente de celle qui conduira à la démonstration du théorème 4.3. Précisons un peu les analogies entre ces deux théorèmes. Dans le théorème 4.3, il faut interpréter la variété X sur le corps de nombres K comme un germe de variété $\mathscr{X}$ au-dessus de la « courbe arithmétique » $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_K$. Le point rationnel x fournit alors une section, c'est-à-dire quelque chose comme une courbe tracée sur $\mathscr{X}$ qui est l'analogue arithmétique de la sous-variété V_0 du théorème 4.7. Dans le théorème 4.3, l'algébricité de la feuille est plus simple à concevoir : dans ce cas, il existe effectivement une variété algébrique dont le complété formel en x s'identifie à la feuille formelle passant par x.

Remplaçons X par l'adhérence de Zariski de $\widehat{V}$, c'est-à-dire la plus petite sous-variété algébrique contenant V_0 et dont le complété formel le long de V_0 contient $\widehat{V}$. Notons $N = N_{V_0}\widehat{V}$, $v_0 = \dim V_0$ et $v = \dim \widehat{V} = v_0 + \operatorname{rang} N$, de sorte que la conclusion du théorème est que $v = \dim X$. Soit L la restriction à X du fibré en droites $\mathscr{O}(1)$ sur l'espace projectif. L'hypothèse que X est l'adhérence de Zariski de $\widehat{V}$ signifie que pour tout entier $D \geqslant 0$, l'opération de restriction des sections de L^D de X à $\widehat{V}$ définit une injection de k-espaces vectoriels

$$\Gamma(X, L^D) \hookrightarrow \Gamma(\widehat{V}, L^D). \tag{4.7.1}$$

Nous allons filtrer l'espace vectoriel $E_D = \Gamma(\widehat{V}, L^D)$ par l'ordre d'annulation le long de V_0. Si n est un entier $\geqslant 1$, notons V_n le voisinage infinitésimal d'ordre n de V_0 dans $\widehat{V}$. Notons $E_0^D = E^D$ et, si $n \geqslant 1$, soit E_n^D l'ensemble des sections de E_0^D dont la restriction à V_{n-1} est nulle. Une section s de E_n^D possède un *jet d'ordre* n le long de V_0 ; c'est une section sur V_0 de $L_{V_0}^D \otimes \operatorname{Sym}^n N^\vee$, nulle si et seulement si s appartient à E_{n+1}^D. Par passage aux sous-quotients, on déduit de l'injection (4.7.1) des injections, pour tous n et D,

$$E_n^D/E_{n+1}^D \hookrightarrow \Gamma(V_0, L|_{V_0}^D \otimes \operatorname{Sym}^n N^\vee) = \Gamma(\mathbf{P}(N^\vee), \pi^* L|_{V_0}^D \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}(N^\vee)}(n)), \tag{4.7.2}$$

où l'on a noté $\pi\colon \mathbf{P}(N^\vee) \to V_0$ le fibré projectif associé à $N^\vee$ au-dessus de V_0. Comme $\mathbf{P}(N^\vee)$ est une variété projective sur k de dimension $v-1$, il existe une constante c telle que pour tous D et n, on ait la majoration

$$\dim_k \Gamma(\mathbf{P}(N^\vee), \pi^* L^D \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}(N^\vee)}(n)) \leqslant c(1+n+D)^{v-1}. \tag{4.7.3}$$

(2) Lorsque $k = \mathbf{C}$ est le corps des nombres complexes, une sous-variété analytique V d'un voisinage ouvert U de $V_0(\mathbf{C})$ dans $X(\mathbf{C})$ contenant $V_0(\mathbf{C}) \cap U$ en fournit un excellent exemple.

D'autre part, l'hypothèse d'amplitude sur N et le théorème d'annulation de Serre impliquent qu'il existe un entier $\lambda \geqslant 1$ tel que si $n \geqslant \lambda D$ et $D \geqslant \lambda$,

$$\Gamma(V_0, L|_{V_0}^D \otimes \mathrm{Sym}^n N^\vee) = 0. \tag{4.7.4}$$

Il en résulte que pour tout entier $D \geqslant \lambda$, on a l'inégalité

(4.7.5)

$$\dim_k \Gamma(X, L^D) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_n E_n^D/E_{n+1}^D \leqslant \sum_{n=0}^{\lambda D-1} c_1(1+n+D)^{v-1} \leqslant c\lambda(1+\lambda)^{v-1} D^v.$$

Par suite, $\dim_k \Gamma(X, L^D) = \mathrm{O}(D^v)$. D'après le théorème de Hilbert, on a $\dim X = v$, ainsi qu'il fallait démontrer.

5. FRAGMENTS DE THÉORIE D'ARAKELOV

Nous résumons maintenant les quelques définitions et résultats de théorie d'Arakelov dont nous aurons besoin. Le lecteur intéressé trouvera des compléments importants dans les références [47, 45, 16, 44].

5.1. Soit K un corps de nombres ; notons $\mathfrak{o}_K$ son anneau d'entiers. Les valeurs absolues sur K sont de deux types. Celles qui sont non-archimédiennes (on dit aussi finies) sont associées à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_K$; on note $v_\mathfrak{p} : K^\times \to \mathbf{Z}$, la valuation associée et $|\cdot|_\mathfrak{p}$ la valeur absolue correspondante, normalisées de sorte que, si π est une uniformisante, $v_\mathfrak{p}(\pi) = 1$ et $\log|\pi|_\mathfrak{p} = -\log \#(\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p})$. Si $K_\mathfrak{p}$ désigne le complété $\mathfrak{p}$-adique de K et p la caractéristique du corps résiduel $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}$, on a ainsi

$$\log|p|_\mathfrak{p} = -[K_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p] \log p. \tag{5.1.1}$$

Les valeurs absolues archimédiennes (ou infinies) sont associées à un plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$, mais deux plongements conjugués fournissent la même valeur absolue. Si $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ est un tel plongement, on définit $\varepsilon_\sigma = 1$ si σ est réel et 2 sinon, et on a, si $x \in K$,

$$\log|x|_\sigma = \varepsilon_\sigma \log|\sigma(x)|\,. \tag{5.1.2}$$

On notera aussi $K_\sigma = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ suivant que σ est réel ou complexe. On a ainsi $\varepsilon_\sigma = [K_\sigma : \mathbf{R}]$.

Notons Σ_K l'ensemble des valuations sur K ainsi définies ; on notera aussi $\Sigma_{K,f}$ et $\Sigma_{K,\infty}$ les ensembles de valuations non-archimédiennes et archimédiennes respectivement. Avec ces normalisations, on a la *formule du produit* :

$$\text{si } x \in K \setminus \{0\}, \qquad \prod_{v \in \Sigma_K} |x|_v = 1. \tag{5.1.3}$$

DÉFINITION 5.1. — *Un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien $\overline{E} = (E, \|\sigma\|)$ est la donnée d'un $\mathfrak{o}_K$-module projectif de rang fini E, ainsi que pour tout $\sigma \in \Sigma_{K,\infty}$, d'une norme hermitienne sur l'espace vectoriel $E_\sigma = \mathbf{C} \otimes_{\mathfrak{o}_K,\sigma} E$, invariante par la conjugaison complexe si σ est réelle.*

Il revient au même de considérer une norme hermitienne invariante par conjugaison sur l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} E$.

Soit $\overline{E}$ un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathfrak{o}_K$, on peut aussi définir une norme $\mathfrak{p}$-adique sur l'espace vectoriel $E_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p} \otimes_{\mathfrak{o}_K} E$: par définition, si $e \in E_\mathfrak{p}$,

$$\|e\|_\mathfrak{p} = \inf\{|a|_\mathfrak{p} \ ; \ a \in K_\mathfrak{p}^\times, \quad ae \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \otimes_{\mathfrak{o}_K} E\}. \tag{5.1.4}$$

5.2. Plus généralement, si $\mathscr{X}$ est un $\mathbf{Z}$-schéma de type fini et plat, un *fibré vectoriel hermitien* $\overline{E} = (E, \|\|)$ sur $\mathscr{X}$ est la donnée d'un fibré vectoriel E sur $\mathscr{X}$ ainsi que d'une *métrique hermitienne* sur le fibré vectoriel holomorphe $E_\mathbf{C}$ sur l'espace analytique complexe $\mathscr{X}(\mathbf{C})$, supposée invariante par conjugaison complexe.

On peut effectuer, sur ces fibrés vectoriels hermitiens, un certain nombre de constructions standard : image réciproque par un morphisme $\mathscr{X}' \to \mathscr{X}$; somme directe, munie de la norme somme directe orthogonale ; sous-fibré, muni de la norme induite ; fibré quotient, muni de la norme quotient ; modules d'homomorphismes, en particulier duaux ; produit tensoriel, puissances symétriques et extérieures (toutes deux *quotients* du produit tensoriel).

5.3. Soit $\mathscr{X}$ un $\mathfrak{o}_K$-schéma de type fini et plat. Si σ est un plongement de K dans $\mathbf{C}$, notons $\mathscr{X}_\sigma(\mathbf{C}) = \mathscr{X} \otimes_{\mathfrak{o}_K,\sigma} \mathbf{C}$, de sorte que $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ est la réunion disjointe des $\mathscr{X}_\sigma(\mathbf{C})$. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$ et si $\mathscr{X}$ est propre, $\Gamma(\mathscr{X}, E)$ est un $\mathfrak{o}_K$-module projectif de rang fini. On peut le munir d'une structure de $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien comme suit. Fixons μ une mesure « de Lebesgue » sur $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ (voir [17] pour la définition précise ; quand $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ est lisse de dimension complexe d c'est une mesure qui, en coordonnées locales $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, s'écrit $\omega(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}x_d\mathrm{d}y_d$ où ω est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ strictement positive). Alors, on définit pour tout $e \in \Gamma(\mathscr{X}, E)$ et tout plongement complexe $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$,

$$\|e\|_\sigma = \left(\int_{\mathscr{X}_\sigma(\mathbf{C})} \|e(x)\|_\sigma^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^{1/2}. \tag{5.3.1}$$

On définit aussi une *norme sup.* :

$$\|e\|_{\infty,\sigma} = \sup_{x \in \mathscr{X}_\sigma(\mathbf{C})} \|e(x)\|_\sigma . \tag{5.3.2}$$

Un lemme élémentaire relie ces deux normes.

5.4. Lemme. — *Si de plus $\overline{E}$ est un fibré en droites hermitien sur $\mathscr{X}$, il existe une constante C telle que pour tout $\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}$, tout entier $D\geqslant 1$ et tout $e\in\Gamma(\mathscr{X},E^D)$, on ait l'encadrement*

$$\|e\|_\sigma\leqslant C\,\|e\|_{\infty,\sigma}\leqslant C^D\,\|e\|_\sigma\,. \tag{5.4.1}$$

5.5. Un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ de rang 1 possède un *degré*, défini par

$$\widehat{\deg}\,\overline{E}=\log\#(E/\mathfrak{o}_K e)-\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}}\log\|e\|_\sigma\,, \tag{5.5.1}$$

e étant un élément non nul quelconque de E ; le fait que la formule n'en dépende pas résulte de la formule du produit. Plus généralement, pour tout élément non nul $e\in E_K$, on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{E}=-\sum_{v\in\Sigma_K}\log\|e\|_v\,. \tag{5.5.2}$$

On définit plus généralement le degré d'un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ de rang $d\geqslant 1$ comme celui de sa puissance extérieure maximale $\bigwedge^d\overline{E}$. On définit aussi la *pente* de $\overline{E}$, notée $\widehat{\mu}(\overline{E})$, comme le quotient de son degré par son rang.

Si $\overline{E}$, $\overline{E}'$ et $\overline{F}$ sont trois $\mathfrak{o}_K$-fibrés vectoriels hermitiens, $\overline{F}$ étant un sous-fibré de $\overline{E}$, on a les formules

$$\widehat{\deg}\,\overline{E}^\vee=-\widehat{\deg}\,\overline{E}, \tag{5.5.3}$$

$$\widehat{\deg}\,\overline{E}=\widehat{\deg}\,\overline{F}+\widehat{\deg}(\overline{E}/\overline{F}), \tag{5.5.4}$$

$$\widehat{\mu}(\overline{E}\otimes\overline{E}')=\widehat{\mu}(\overline{E})+\widehat{\mu}(\overline{E}'). \tag{5.5.5}$$

D'après le théorème des facteurs invariants et la théorie des déterminants de Gram, si $(e_1,\dots,e_d)$ est une famille linéairement indépendante d'éléments de E, on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{E}=\log\#(E/(\mathfrak{o}_K e_1+\cdots+\mathfrak{o}_K e_d))-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}}\log\det\big(\langle e_j,e_k\rangle_\sigma\big). \tag{5.5.6}$$

En utilisant l'inégalité d'Hadamard, on en déduit que pour toute famille génératrice $(e_1,\dots,e_r)$ de $K\otimes E$,

$$\widehat{\mu}(\overline{E})\geqslant-\sum_{v\in\Sigma_K}\log\max_{1\leqslant j\leqslant r}\|e_j\|_v\,. \tag{5.5.7}$$

5.6. Proposition. — *Soit $\mathscr{X}$ un $\mathfrak{o}_K$-schéma propre et plat et soit $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur $\mathscr{X}$. Si D est un entier $\geqslant 0$, notons $\overline{E}_D$ le $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien défini par $\Gamma(\mathscr{X},L^D)$. Si L est ample, il existe une constante $c\in\mathbf{R}$ telle que pour tout entier $D\geqslant 0$, on ait*

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_D)\geqslant -cD. \tag{5.6.1}$$

Pour la démonstration, combiner l'inégalité (5.5.7), le lemme 5.4 et le fait que la K-algèbre graduée $\bigoplus_D \Gamma(\mathscr{X}_K, L^D)$ est de type fini.

En appliquant l'inégalité (5.5.7) au fibré dual $\overline{E}^\vee$, on démontre que lorsque $\overline{F}$ parcourt les sous-fibrés vectoriels hermitiens de $\overline{E}$, l'ensemble des pentes $\widehat{\mu}(\overline{F})$ est majoré. La borne supérieure (en fait, un maximum) est la *plus grande pente* de $\overline{E}$ et est notée $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. Le comportement précis de $\widehat{\mu}_{\max}$ par produit tensoriel est délicat. Si $\overline{E}$ et $\overline{L}$ sont deux $\mathfrak{o}_K$-fibrés vectoriels hermitiens, $\overline{L}$ étant de rang 1, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E} \otimes \overline{L}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \widehat{\deg}\,\overline{L} \tag{5.6.2}$$

Pour des puissances symétriques, on établit le comportement asymptotique :

5.7. Lemme. — *Soit $\overline{E}$ un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien. Il existe une constante $c \in \mathbf{R}$ telle que pour tout entier $k \geqslant 0$,*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\mathrm{Sym}^k \overline{E}) \leqslant ck. \tag{5.7.1}$$

Soit $\overline{F}$ un sous-fibré de $\mathrm{Sym}^k \overline{E}$. Il correspond par dualité à un quotient $\overline{G}$ du fibré hermitien $(\mathrm{Sym}^k \overline{E})^\vee$, lequel s'identifie au sous-fibré hermitien $\Gamma^k \overline{E}^\vee$ de $(\overline{E}^\vee)^{\otimes k}$ fixé par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $E_K^\vee$. Si $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}^r$ avec $\sum_{i=1}^r n_i = k$, soit $f_\mathbf{n}$ l'orbite du tenseur $e_1^{n_1} \otimes \cdots \otimes e_r^{n_r}$ sous l'action de $\mathfrak{S}_k$. Pour toute place finie v de K, on a ainsi

$$\|f_\mathbf{n}\|_v \leqslant \max(\|e_1\|_v, \dots, \|e_r\|_v)^k$$

tandis que pour toute place archimédienne v,

$$\|f_\mathbf{n}\|_v \leqslant \frac{k!}{n_1! \dots n_r!} \max(\|e_1\|_v, \dots, \|e_r\|_v)^k \leqslant r^k \max(\|e_1\|_v, \dots, \|e_r\|_v)^k.$$

Les $f_\mathbf{n}$ forment une base de $\Gamma^k E_K^\vee$. L'inégalité (5.5.7) appliquée à leurs images dans $\overline{G}$ jointe à l'égalité $\widehat{\mu}(\overline{G}) = -\widehat{\mu}(\overline{F})$ implique ainsi que

$$\widehat{\mu}(\overline{F}) \leqslant k \left([K : \mathbf{Q}] \log r + \sum_{v \in \Sigma_K} \log \max(\|e_1\|_v, \dots, \|e_r\|_v) \right),$$

comme il fallait démontrer.

5.8. Remarque. — En utilisant les résultats de Zhang [48] qui fournissent une « presque-base orthonormée » de $\overline{E}$, Bost a donné une version explicite du lemme 5.7, cf. [27]. Par ailleurs, dans la situation de la proposition 5.6, l'existence et le calcul de la limite de $\widehat{\mu}(\overline{E}_D)/D$, lorsque $D \to +\infty$, est le *théorème de Hilbert-Samuel arithmétique*, cf. [26, 1, 40].

5.9. Soit $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux $\mathfrak{o}_K$-fibrés vectoriels hermitiens et soit $\varphi\colon E_K \to F_K$ une application K-linéaire injective. Pour toute valuation $v \in \Sigma_K$, définissons la *hauteur de φ en v* par

$$h_v(\varphi) = \log \|\varphi\|_v = \log \sup_{e \in E_v \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(e)\|_v}{\|e\|_v}. \tag{5.9.1}$$

Pour tout v sauf pour un nombre fini, $h_v(\varphi) = 0$, si bien qu'on peut définir la *hauteur* (globale) de φ par la formule

$$h(\varphi) = \sum_{v \in \Sigma_K} h_v(\varphi). \tag{5.9.2}$$

En combinant les définitions et l'inégalité de Hadamard, on établit alors *l'inégalité de pentes* sur laquelle toute l'histoire qui va suivre est fondée :

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi). \tag{5.9.3}$$

Plus précisément, nous aurons besoin de la variante « filtrée » de cette inégalité de pentes, dont la démonstration est immédiate à partir de l'inégalité précédente et de la formule (5.5.4).

5.10. Proposition. — *Soit $\overline{E}$ et $(\overline{G}^{(n)})_{n\geqslant 0}$ des $\mathfrak{o}_K$-fibrés vectoriels hermitiens. Soit F_K un K-espace vectoriel muni d'une filtration décroissante séparée $(F_K^{(n)})_{n\geqslant 0}$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, un isomorphisme $F_K^{(n)}/F_K^{(n+1)} \simeq G_K^{(n)}$.*

Soit $\varphi\colon E_K \to F_K$ une application linéaire injective. Pour tout $n \geqslant 0$, soit $\overline{E}^{(n)}$ le $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien défini par $E^{(n)} = \varphi^{-1}(F_K^{(n)})$, muni des normes induites par $\overline{E}$ et soit $\varphi_K^{(n)}$ l'application linéaire induite $E_K^{(n)} \to G_K^{(n)}$.

Alors, on a l'inégalité

$$\widehat{\deg}\,\overline{E} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}^{(n)}) + h(\varphi^{(n)})\right). \tag{5.10.1}$$

(C'est une somme finie si l'on convient que l'expression entre parenthèses est nulle lorsque que $E^{(n)} = E^{(n+1)}$.)

6. UN PREMIER THÉORÈME D'ALGÉBRICITÉ

L'article d'André [4] (voir aussi [3]) repose sur un théorème d'algébricité d'une série formelle, sorte d'analogue du théorème de Borel-Dwork. Nous donnons ici une démonstration de ce théorème qui utilise le formalisme introduit au chapitre précédent. Pour alléger les notations, nous nous contentons d'une variable quoique la généralisation du critère de Pólya cité à la fin du chapitre 2 en nécessite plusieurs.

6.1. Soit K un corps de nombres et soit $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série formelle à coefficients dans K. On définit trois invariants, ρ, σ et τ :

$$\rho(y) = \sum_{v\in\Sigma_K} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{m\leqslant n} \log^+ |a_m|_v \,, \tag{6.1.1}$$

$$\sigma(y) = \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{v\in\Sigma_K} \frac{1}{n} \sup_{m\leqslant n} \log^+ |a_m|_v \,, \tag{6.1.2}$$

$$\tau(y) = \inf_{\substack{S\subset\Sigma_K\\ S \text{ finie}}} \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{v\in\Sigma_K\setminus S} \frac{1}{n} \sup_{m\leqslant n} \log^+ |a_m|_v \,. \tag{6.1.3}$$

(Si $x \in \mathbf{R}$, $\log^+(x) = \log\max(1,x)$.) Si S est une partie de Σ_K, $\rho_S(y)$ et $\sigma_S(y)$ désigneront les quantités analogues à $\rho(y)$ et $\sigma(y)$ où seules les places de S sont prises en compte. Par exemple, il vient ainsi $\tau(y) = \inf_S \sigma_S(y)$. Notons de plus $R_v(y)$ le rayon de convergence v-adique de la série y ; on a pour toute ensemble S de places l'égalité $\rho_S(y) = \sum_{v\in S} \log^+ R_v(y)^{-1}$.

S'il existe un ensemble fini de places $S \subset \Sigma_K$ telles que les coefficients de y soient S-entiers, on a $\tau(y) = 0$. Dans ce cas, $\rho(y) < \infty$ si et seulement si pour toute place $v \in S$, le rayon de convergence v-adique de la série y n'est pas nul.

Soit v une place de K. Une *uniformisation v-adique simultanée* de x et y dans le disque « ouvert » $D(0,R_v) \subset \overline{K}_v$ est la donnée de deux fonctions méromorphes v-adiques φ et ψ vérifiant

– $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$;
– $y(\varphi(z))$ est le germe en l'origine de la fonction méromorphe $\psi(z)$.

C'est ainsi, en quelque sorte, une uniformisation (méromorphe) du graphe de y par le disque $D(0,R_v)$. (Par définition, une fonction méromorphe sur $D(0,R_v)$ est le quotient de deux fonctions analytiques sur ce disque.)

On parle d'*uniformisation triviale* si de plus φ est l'identité.

La première partie du théorème suivant est due à André ([4], théorème 2.3.1), la seconde est essentiellement le critère de Borel-Dwork.

6.2. Théorème. — *Soit $y \in K[[x]]$ telle que $\tau(y) = 0$ et $\rho(y) < \infty$. On suppose que pour toute place v de K, il existe une uniformisation v-adique simultanée de x et y dans un disque $D(0,R_v)$. Si $\prod R_v > 1$, alors y est une fonction algébrique.*

Si de plus les uniformisations sont triviales pour tout v, alors y est une fonction rationnelle.

La fin de ce chapitre est consacrée à la démonstration du théorème 6.2.

6.3. Soit d et D deux entiers $\geqslant 1$ et soit $E_{d,D} \subset \mathfrak{o}_K[X,Y]$ le $\mathfrak{o}_K$-module libre des polynômes de degrés $\leqslant d$ en X et $\leqslant D$ en Y. On le munit des normes hermitiennes induites par la base standard aux places archimédiennes, d'où un $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien $\overline{E}_{d,D}$ de rang $(d+1)(D+1)$ et de degré arithmétique nul.

Soit $F_K = K[[x]]$ et soit $\varphi\colon E_{d,D;K} \to F_K$ l'application linéaire définie par $P \mapsto P(x,y(x))$. En filtrant $K[[x]]$ par l'ordre d'annulation en l'origine, soit $F_K^{(k)} = x^k K[[x]]$, on est dans la situation de la proposition 5.10, où pour tout $k \geqslant 0$, $\overline{G}^{(k)} = \mathfrak{o}_K$ muni de la norme triviale $\|1\|_\sigma = 1$; en particulier, $\widehat{\deg}\,\overline{G}^{(k)} = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}^{(k)}) = 0$.

On raisonne par l'absurde. Supposons que y n'est pas une fonction algébrique. Alors, pour tous d et D, l'application linéaire φ est injective. Si y n'est pas une fonction rationnelle, l'application φ est injective pour $D = 1$ et tout entier $d \geqslant 1$. L'inégalité de pentes de la proposition 5.10 s'écrit ainsi

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{rang}(E_{d,D}^{(n)}/E_{d,D}^{(n+1)}) h(\varphi^{(n)}). \tag{6.3.1}$$

Le reste de la démonstration consiste à majorer convenablement $h(\varphi^{(n)})$ de sorte à contredire l'inégalité précédente. Pour cela, on utilise deux types d'estimations : 1°) pour presque toute place, une majoration « triviale » (lemme 6.7) qui repose sur les hypothèses $\tau(y) = 0$ et $\rho(y) < \infty$, et 2°) pour un nombre fini de places, une majoration fondée sur le lemme de Schwarz, sous la forme :

6.4. Lemme. — *Soit v une place de K et soit f une fonction analytique bornée sur le disque $D(0,R_v) \subset \overline{K}_v$. Si f s'annule à l'ordre n en 0, on a*

$$\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\right|_v \leqslant R_v^{-n} \|f\|_{R_v}.$$

6.5. Plaçons-nous dans le cas d'une uniformisation triviale en une place v de K et supposons qu'il existe une fonction méromorphe φ sur le disque $D(0,R_v)$ dont y soit le développement de Taylor en l'origine. Si $R_v' < R_v$, il existe alors des fonctions analytiques bornées sur le disque $D(0,R_v')$ telles que $\varphi = f/g$ et $g(0) = 1$. Soit $n \geqslant 0$ et soit $P \in E_{d,D}^{(n)}$. Si $P = \sum_{i=0}^{D} P_i(X) Y^i$, où pour tout i, $\deg P_i \leqslant d$, définissons une fonction analytique bornée h sur $D(0,R_v')$ par

$$h(x) = g(x)^D P(x,y(x)) = \sum_{i=0}^{D} P_i(x) f(x)^i g(x)^{D-i}.$$

Comme $g(0) = 1$ et comme $P(x,y(x))$ est supposé être d'ordre au moins n en l'origine, on a

$$\varphi^{(n)}(P) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n} P(x,y(x))|_{x=0} = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n} h(x)|_{x=0}.$$

D'après le lemme de Schwarz, on a alors

$$\left|\varphi^{(n)}(P)\right|_v \leqslant R_v'^{-n} R_v'^{d} \max(\|f\|_{R_v'}, \|g\|_{R_v'})^D \|P\|_v$$

multiplié par $\operatorname{rang} E_{d,D}$ si v est une place archimédienne. On en déduit qu'il existe une constante C_v telle que l'on ait pour tous n, d, D, l'inégalité

$$h_v(\varphi^{(n)}) \leqslant (d-n)\log R_v' + DC_v \tag{6.5.1}$$

auquel il faut ajouter $\log \operatorname{rang} E_{d,D}$ si v est archimédienne.

6.6. Dans le cas d'une uniformisation simultanée générale, le même raisonnement fournit l'existence pour tout réel $R_v' < R_v$ d'une constante C_v telle que l'on ait pour tous n, d, D, l'inégalité

$$h_v(\varphi^{(n)}) \leqslant -n\log R_v' + (d+D)C_v \tag{6.6.1}$$

auquel il faut encore ajouter $\log \operatorname{rang} E_{d,D}$ si v est archimédienne.

6.7. Lemme. — *Pour tout ensemble de places $T \subset \Sigma_K$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_T(\varepsilon)$ telle que l'on ait la majoration*

$$\sum_{v\in T} h_v(\varphi^{(n)}) \leqslant n\big(\rho_T(y) + \varepsilon(1+\log D)\big) + C_T(\varepsilon) + [K:\mathbf{Q}]\log \operatorname{rang} E_{d,D} + [K:\mathbf{Q}](D+1)\log n.$$

(On peut omettre les deux derniers termes si T ne contient pas de places archimédiennes.)

Si $j \geqslant 0$, introduisons le développement en série de y^j, $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(j)} x^m$, où les $a_m^{(j)}$ sont dans K. Constatons que l'application $\varphi^{(n)}$ associe à un polynôme $P \in E_{d,D;K}$ tel que $P(x, y(x)) \in x^n K[[x]]$ le coefficient de x^n dans $P(x, y(x))$. Ainsi, si v est une place finie, on a l'estimée évidente :

$$h_v(\varphi^{(n)}) \leqslant \sup_{\substack{m\leqslant n\\ j\leqslant D}} \log^+ \left|a_m^{(j)}\right|_v. \tag{6.7.1}$$

Lorsque v est une place archimédienne, il faut rajouter $\log \operatorname{rang} E_{d,D} + (D+1)\log n$.

Par suite, pour toute place v de K,

$$\varlimsup \frac{1}{n} h_v(\varphi^{(n)}) \leqslant \sup_{j\leqslant D} \varlimsup_n \sup_{m\leqslant n} \frac{1}{n}\log^+ \left|a_m^{(j)}\right|_v \leqslant \sup_{j\leqslant D} \log^+ R_v(y^j)^{-1},$$

$R_v(y^j)$ désignant le rayon de convergence v-adique de la série y^j. Mais ce rayon n'est autre que celui de y, si bien que

$$\varlimsup \frac{1}{n} h_v(\varphi^{(n)}) \leqslant \log^+ R_v(y)^{-1}.$$

D'autre part, si v est une place finie de K et si $j \leqslant D$, $a_m^{(j)}$ est majoré par le maximum des produits $a_{m_1}\dots a_{m_j}$, pour $m_1 + \dots + m_j = j$. Si ce maximum est

atteint en $(m_1,\dots,m_j)$, on peut supposer $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_j$, si bien que pour tout $i \leqslant j$, $m_i \leqslant j/i$. On en déduit la majoration

$$\sup_{\substack{m\leqslant n\\ j\leqslant D}} \log^+ \left|a_m^{(j)}\right|_v \leqslant \sum_{j=1}^{D} \sup_{r\leqslant n/j} \log^+ |a_r|_v \,.$$

d'où finalement

$$\frac{1}{n} h_v(\varphi^{(n)} \leqslant \sum_{j=1}^{D} \frac{1}{n} \sup_{m\leqslant n/j} \log^+ |a_m|_v \,. \tag{6.7.2}$$

Soit T_1 une partie finie de T contenant les places archimédiennes. En décomposant la somme sur les places $v \in T$ suivant T_1 et son complémentaire, on obtient

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \sum_{v\in T} h_v(\varphi^{(n)}) \leqslant \sum_{v\in T_1} \log^+ R_v(y)^{-1} + \sum_{j=1}^{D} \frac{1}{j} \overline{\lim}\, \frac{1}{n} \sum_{v\in T\setminus T_1} \sup_{m\leqslant n} \log^+ |a_m|_v \,,$$

c'est-à-dire

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \sum_{v\in T} h_v(\varphi^{(n)}) \leqslant \rho_{T_1}(y) + \left(\sum_{j=1}^{D} \frac{1}{j}\right) \sigma_{T\setminus T_1}(y).$$

Prenant T_1 arbitrairement grand et utilisant le fait que $\tau(y) = \inf_S \sigma_S(y) = 0$, on obtient la majoration voulue.

6.8. Démontrons maintenant le théorème d'algébricité. Soit $S \subset \Sigma_K$ un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes. Par souci d'allègement, on note $E = E_{d,D}$. On note aussi $C'_v = \log \operatorname{rang} E$ pour v archimédienne et $C'_v = 0$ pour v finie.

Compte tenu du lemme 6.7 et de la majoration (6.6.1) pour toute place $v \in S$, l'inégalité de pentes (6.3.1) entraîne

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{v\in S} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \,&(-n \log R'_v + (d+D)C_v + C'_v) \\ &+ C_S(\varepsilon) \operatorname{rang} E + \sum_{n=0}^{\infty} n \operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)})(\rho_S(y) + \varepsilon(1+\log D)), \end{aligned}$$

d'où, utilisant que $\sum_n \operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) = \operatorname{rang} E$,

$$\begin{aligned}(6.8.1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n \operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \log \prod_{v\in S} R'_v \\ \leqslant \left((d+D)\sum_{v\in S} C_v + C_S(\varepsilon) + [K:\mathbf{Q}]\log\operatorname{rang} E\right)\operatorname{rang} E \\ + \sum_{n=0}^{\infty} n\operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)})(\rho_S(y) + \varepsilon(1+\log D)).\end{aligned}$$

Nous pouvons minorer $\Delta = \sum n \operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)})$ de la façon suivante. Par construction, $\operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \leqslant \operatorname{rang} G^{(n)} = 1$. Il en résulte que $\operatorname{rang} E^{(n)} \geqslant \operatorname{rang} E - n$ et par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n \operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{rang} E^{(n)} \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\operatorname{rang} E} (\operatorname{rang} E - n) = \frac{1}{2}\operatorname{rang} E(\operatorname{rang} E - 1).\end{aligned} \tag{6.8.2}$$

Faisons maintenant tendre d vers $+\infty$, D restant fixe. On a ainsi $\Delta \gg d^2D^2$, si bien que $\operatorname{rang} E \log \operatorname{rang} E = \mathrm{o}(\Delta)$ et

$$\overline{\lim}\ \frac{(d+D)\operatorname{rang} E}{\Delta} \leqslant \frac{2}{D+1}.$$

En divisant les deux membres de l'inégalité (6.8.1) par $\sum n \operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)})$, on obtient l'inégalité

$$\log \prod_{v\in S} R'_v \leqslant \rho_S(y) + \varepsilon(1+\log D) + \frac{1}{D}\sum_{v\in S} C_v.$$

On peut alors faire tendre ε vers 0, puis D vers l'infini, et enfin R'_v vers R_v dans cette inégalité et l'on obtient

$$\log \prod_{v\in S} R_v \leqslant \rho_S(y). \tag{6.8.3}$$

Comme $\rho(y) < \infty$, le membre de droite peut être rendu arbitrairement petit quitte à augmenter S, mais ceci contredit alors l'hypothèse que $\prod_{v\in\Sigma_K} R_v > 1$.

6.9. Pour démontrer la seconde partie du théorème, on fixe encore un ensemble fini $S \subset \Sigma_K$ contenant les places archimédiennes. On raisonne par l'absurde en supposant que y n'est pas rationnelle. Si $D = 1$, l'application linéaire φ est donc injective pour tout entier $d \geqslant 1$. On introduit un nouveau paramètre N et on utilise la majoration

de $h_v(\varphi^{(n)})$ fournie par le lemme 6.7 si $v \notin S$ ou si $n < N$ et par l'estimée (6.5.1) sinon. On obtient ainsi l'inégalité

$$\begin{aligned} 0 \leqslant{}& C_{\complement S}(\varepsilon)\operatorname{rang} E + (\rho_{\complement S}(y)+\varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty} n\operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \\ &+ \sum_{v\in S}\sum_{n\geqslant N}((d-n)\log R'_v + DC_v + C'_v)\operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \\ &+ \sum_{n<N}\operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)})(C_S(\varepsilon) + [K:\mathbf{Q}]\log\operatorname{rang} E + 2[K:\mathbf{Q}]\log n) \\ &+ (\rho_S(y)+\varepsilon)\sum_{n<N} n\operatorname{rang} E^{(n)}/E(n+1). \end{aligned} \tag{6.9.1}$$

Compte tenu de la majoration $\operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \leqslant 1$, on a la majoration

$$\Delta_N = \sum_{n<N} n\operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \leqslant \sum_{n<N} n = N(N-1)/2.$$

On fixe un paramètre λ et on pose $N = \lfloor 2\lambda d\rfloor$. Lorsque d tend vers l'infini, mais bien sûr, $D = 1$, de sorte que $\operatorname{rang} E = 2(d+1)$ et $N \sim \lambda \operatorname{rang} E$. Puisque

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} n\operatorname{rang}(E^{(n)}/E^{(n+1)}) \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{rang} E(\operatorname{rang} E - 1),$$

on a $\overline{\lim}\,(\Delta_N/\Delta) \leqslant \lambda^2$. De plus, si $\lambda \leqslant 1/2$, on a $N \leqslant d$ et on constate que $\operatorname{rang} E^{(N)} = \operatorname{rang} E - N$, si bien que

$$\overline{\lim_{d\to+\infty}}\ \frac{d\operatorname{rang} E^{(N)}}{\Delta} \leqslant 1-\lambda.$$

Après division des deux membres par Δ et passage à la limite, l'inégalité (6.9.1) devient

$$0 \leqslant (\rho_{\complement S}(y)+\varepsilon) + \lambda^2(\rho_S(y)+\varepsilon) + (\lambda^2-\lambda)\log\prod_{v\in S} R'_v,$$

d'où, si ε tend vers 0 et R'_v vers R_v,

$$\lambda(1-\lambda)\log\prod_{v\in S} R_v \leqslant \rho_{\complement S}(y) + \lambda^2\rho_S(y).$$

Comme $\rho_S(y) \leqslant \rho(y)$, cette inégalité contredit l'hypothèse $\prod_{v\in\Sigma_K} R_v > 1$, lorsque S est assez grand.

(Il n'est pas certain que cette démonstration du théorème de Borel-Dwork soit plus simple que la démonstration originelle, cf. [15], [21] ou [2].)

7. ALGÉBRICITÉ DE SOUS-VARIÉTÉS FORMELLES

7.1. Nous voulons maintenant indiquer la démonstration du théorème 4.3. Rappelons la situation : X est une variété algébrique lisse sur un corps de nombres K, P est un point de $X(K)$ et F est un sous-fibré involutif de $\mathrm{T}X$ qui, modulo p pour presque tout nombre premier p, est stable par puissance p-ième. On suppose de plus qu'il existe un plongement $\sigma_0 \colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$ tel que la feuille passant par P du feuilletage holomorphe de $X_{\sigma_0}(\mathbf{C})$ induit par F est « uniformisée par l'espace affine ». C'est une hypothèse plus contraignante que celle du théorème 4.3 mais suffisante pour établir le théorème 2.4.

On veut alors en déduire que ladite feuille est une sous-variété algébrique de X, ou encore, si $\widehat{V}$ désigne la feuille formelle de F en P, qu'il existe une sous-variété algébrique V de X dont $\widehat{V}$ est le complété en P.

Soit Y l'adhérence de Zariski de $\widehat{V}$ dans X, c'est-à-dire la plus petite sous-variété algébrique de X dont le complété en P contient $\widehat{V}$. Il suffit de démontrer que $\dim Y = \dim \widehat{V}$ car cette hypothèse implique que Y est automatiquement lisse et une feuille du flot F. On peut aussi supposer que X est projective (mais X n'est alors lisse que dans un voisinage de P) ; Y est alors projective. Soit L un fibré inversible ample sur X. L'hypothèse que Y est l'adhérence de $\widehat{V}$ signifie que pour tout entier $D \geqslant 0$, l'homomorphisme de restriction à $\widehat{V}$,

$$\varphi_D \colon \Gamma(Y, L^D) \to \Gamma(\widehat{V}, L^D) \tag{7.1.1}$$

est injectif.

Sous l'hypothèse que $\widehat{V}$ n'est pas algébrique, c'est-à-dire que $\dim Y > \dim \widehat{V}$, nous voulons contredire cette injectivité. Nous allons pour cela utiliser l'inégalité de pentes (prop. 5.10). Plaçons-nous ainsi dans le contexte du chapitre 5. Choisissons des modèles entiers de toute la situation :

- un $\mathfrak{o}_K$-schéma propre et plat $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{X} \otimes K = X$;
- une section $\varepsilon_P \colon \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K \to \mathscr{X}$ prolongeant $P \in X(K)$;
- l'adhérence schématique $\mathscr{Y}$ de $\widehat{V}$ (ou de Y) dans $\mathscr{X}$;
- un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{X}$ dont la restriction à X est égale à L.

On note $\mathrm{t}^\vee$ l'image de $\varepsilon_P^* \Omega^1_{\mathscr{Y}/\mathfrak{o}_K}$ dans $\Omega^1_{Y/K,P}$; c'est un $\mathfrak{o}_K$-module projectif de rang $\dim Y$. Choisissons aussi

- une métrique hermitienne sur le fibré holomorphe induit par L sur $X(\mathbf{C})$;
- une mesure de Lebesgue positive sur $Y(\mathbf{C})$;
- une métrique hermitienne sur l'espace tangent en P à $\widehat{V}$, ou par dualité, sur $\mathrm{t}^\vee$;

toutes invariantes par la conjugaison complexe.

7.2. Pour tout entier $D \geqslant 1$, on notera $\overline{E}_D = \Gamma(\mathscr{Y}, L^D)$, muni de sa structure naturelle de $\mathfrak{o}_K$-fibré vectoriel hermitien définie comme au paragraphe 5.3. Le K-espace vectoriel $\Gamma(\widehat{V}, L^D)$ est filtré par l'ordre d'annulation en P, les sous-quotients successifs s'identifient aux fibres génériques des $\mathfrak{o}_K$-fibrés vectoriels hermitiens

$$\operatorname{Sym}^n \overline{\mathrm{t}}^\vee \otimes_{\mathfrak{o}_K} \varepsilon_P^* \overline{\mathscr{L}}^D. \tag{7.2.1}$$

Si $\overline{E}_D^{(n)}$ désigne l'image inverse de cette filtration par l'homomorphisme d'évaluation φ_D, l'application

$$\varphi_D^{(n)} \colon E_D^{(n)}/E_D^{(n+1)} \to \operatorname{Sym}^n \mathrm{t}_K^\vee \otimes L_P^D \tag{7.2.2}$$

s'identifie à l'application « jet d'ordre n en P ». L'homomorphisme $\overline{E}_D \to \Gamma(\widehat{V}, L^D)$ est injectif par construction. L'inégalité de pentes de la proposition 5.10 s'écrit alors

$$\widehat{\deg}\, \overline{E}_D \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \operatorname{rang}(E_D^{(n)}/E_D^{(n+1)}) \left(\widehat{\mu}_{\max}(\operatorname{Sym}^n \overline{\mathrm{t}}^\vee \otimes_{\mathfrak{o}_K} \varepsilon_P^* \overline{\mathscr{L}}^D) + h(\varphi_D^{(n)}) \right). \tag{7.2.3}$$

Dans [17], $h(\varphi_D^{(n)})$ est majorée par la proposition suivante.

7.3. Proposition. — *Rappelons l'hypothèse :*

– *pour presque tout nombre premier p, la réduction de F modulo p est stable par puissance p-ième ;*

– *il existe une variété complexe M vérifiant la propriété de Liouville, un point $O \in M$, un plongement complexe $\sigma_0 \colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$ et une application holomorphe ψ de M vers la feuille en P du feuilletage holomorphe induit par F sur $X_{\sigma_0}(\mathbf{C})$ telle que $\psi(O) = P$ et telle que ψ soit biholomorphe d'un voisinage de O vers un voisinage de P dans cette feuille.*

Alors, pour tout $\rho > 0$, il existe un réel $C(\rho)$ tel que pour tous les entiers D et $n \geqslant 1$, on ait

$$h(\varphi_D^{(n)}) \leqslant -n\rho + DC(\rho). \tag{7.3.1}$$

Pour démontrer le théorème 2.4, il suffit de traiter le cas où $M = \mathbf{C}^d$ dans lequel l'analyse aux places archimédiennes peut être présentée de façon relativement élémentaire (voir le paragraphe 7.5).

7.4. Tirons maintenant la contradiction de ces estimations. En insérant dans l'inégalité (7.2.3) la majoration (7.3.1), les conclusions de la proposition 5.6 et du lemme 5.7 ainsi que la formule (5.6.2), on obtient l'inégalité, valable pour tout $\rho > 0$,

$$-c_1 D \operatorname{rang} E_D \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \operatorname{rang}(E_D^{(n)}/E_D^{(n+1)}) \, (nc_2 + Dc_3 + DC(\rho) - n\rho), \tag{7.4.1}$$

soit encore

$$(\rho - c_2) \sum n \operatorname{rang}(E_D^{(n)}/E_D^{(n+1)}) \leqslant (c_3 + c_1 + C(\rho)) D \operatorname{rang} E_D. \tag{7.4.2}$$

Or, d'après l'algèbre linéaire, si $d = \dim \widehat{V}$,

$$\operatorname{rang}(E_D^{(n)}/E_D^{(n+1)}) \leqslant \operatorname{rang} \operatorname{Sym}^n \mathrm{t}^\vee = \binom{n+d-1}{d-1} \tag{7.4.3}$$

$$\operatorname{rang} E_D^{(n)} \geqslant \operatorname{rang} E_D - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+d-1}{d-1} = \operatorname{rang} E_D - \binom{n+d-1}{d} \tag{7.4.4}$$

tandis que le théorème de Hilbert garantit que

$$\operatorname{rang} E_D \simeq c_4 D^{\dim Y}. \tag{7.4.5}$$

Il en résulte que, si N est un entier $\geqslant 1$ arbitraire,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n \operatorname{rang}(E_D^{(n)}/E_D^{(n+1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{rang} E_D^{(n)} &\geqslant \sum_{n=1}^{N} \operatorname{rang} E_D^{(n)} \\ &\geqslant N \operatorname{rang} E_D - \binom{N+d}{d+1}.\end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que $\dim Y > d$ et choisissons $N = \lfloor D^\alpha \rfloor$ pour un réel α tel que $1 < \alpha < \dim Y/d$. Il en résulte que $D = \mathrm{o}(N)$ et $N^d = \mathrm{o}(D^{\dim Y})$. Par suite, $\binom{N+d}{d+1} = \mathrm{o}(N \operatorname{rang} E_D)$. En passant à la limite dans l'inégalité (7.4.2), on obtient alors

$$\rho - c_2 \leqslant 0. \tag{7.4.6}$$

Comme ρ est arbitraire, on a une contradiction.

7.5. Il reste à établir l'inégalité (7.3.1), et pour cela, nous allons majorer $h_v(\varphi_D^{(n)})$ pour toute place v de Σ_K. Lorsque v est une place finie, il s'agit essentiellement de « contrôler les dénominateurs » qui apparaissent dans le théorème de Frobenius.

Notons s la dimension de X et fixons des coordonnées locales (pour la topologie étale) $x_1, \dots, x_s$ sur X au point P, de sorte qu'autour de P, $\mathrm{T}X$ est libre de base $\frac{\partial}{\partial x_1}$, …, $\frac{\partial}{\partial x_s}$. Les x_i définissent aussi un isomorphisme formel $\widehat{\alpha}_0 \colon \widehat{X}_P \simeq \widehat{\mathbf{A}}^s$. Quitte à renuméroter les x_i, il est possible de trouver une base $D_1, \dots, D_d$ des sections de F dans un voisinage de P de la forme

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=d+1}^{s} a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{7.5.1}$$

où les $a_{i,j}$ sont des séries formelles. Soit $\widehat{\alpha} \colon \widehat{X}_P \to \widehat{\mathbf{A}}^d$ le morphisme déduit de $\widehat{\alpha}_0$ par projection sur les d premières coordonnées. On a ainsi $\widehat{\alpha}_*(D_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et

$$\widehat{\alpha}_*([D_i, D_j]) = [\widehat{\alpha}_*(D_i), \widehat{\alpha}_*(D_j)] = [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$$

si bien que $[D_i, D_j]$ est une combinaison linéaire des $\frac{\partial}{\partial x_k}$ pour $k > d$. Comme F est involutif, $[D_i, D_j] \in F$. Il en résulte que $[D_i, D_j] = 0$: les champs de vecteurs $D_1, \dots, D_d$ commutent.

Ainsi, $\widehat{V}$ est la feuille passant par $P=(0,\dots,0)$ du « flot formel », $\Phi\colon \widehat{\mathbf{A}}^d\times\widehat{\mathbf{A}}^s\to\widehat{\mathbf{A}}^s$,

$$(7.5.2)\quad ((t_1,\dots,t_d),(x_1,\dots,x_s))\mapsto \exp\Big(\sum_{i=1}^d t_ie_i\Big)\cdot(x_1,\dots,x_s)$$
$$=\sum_{n_1,\dots,n_d\geqslant 0}\frac{{t_1}^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{t_d^{n_d}}{n_d!}{e_1}^{n_1}\cdots e_d^{n_d}\cdot(x_1,\dots,x_s).$$

Pour tout multi-indice $n=(n_1;\dots;n_d)$ et tout entier $i\in\{1;\dots;s\}$, notons $P_{n,i}$ la série formelle $\frac{1}{n_1!\dots n_d!}e_1^{n_1}\cdots e_d^{n_d}(x_i)$, de sorte que $\widehat{V}$ admet la paramétrisation formelle

$$(t_1,\dots,t_d)\mapsto\sum_{n\in\mathbf{N}^d}t_1^{n_1}\cdots t_d^{n_d}(P_{n,1}(0),\dots,P_{n,s}(0)).$$

7.6. Lemme. — *Pour toute place finie v de K, de caractéristique résiduelle p, il existe un réel $C_v\geqslant 0$ tel que pour tous $n\in\mathbf{N}^d$ et tout $i\in\{1;\dots;s\}$,*

$$-\log|P_{n,i}(0)|_v\leqslant(n_1+\cdots+n_d)C_v.$$

De plus, pour presque tout v, on peut choisir

$$C_v=[K:\mathbf{Q}]\frac{\log p}{p(p-1)}.$$

L'existence d'un tel C_v équivaut à la convergence v-adique du flot formel dans un polydisque.

De plus, pour presque toute place finie v, les coordonnées locales x_i s'étendent en des coordonnées locales sur $\mathscr{X}\otimes\mathfrak{o}_v$, ainsi que les champs de vecteurs locaux $D_1,\dots,D_d$. Si de plus la réduction modulo l'idéal premier $\mathfrak{p}_v$ est stable par puissance p-ième, on constate que pour tout i, en réduction modulo $\mathfrak{p}_v$,

$$\widehat{\alpha}_*(D_i^p)=\widehat{\alpha}_*(D_i)^p=\frac{\partial^p}{\partial x_i^p}=0.$$

Comme la réduction modulo $\mathfrak{p}_v$ de F est supposée stable par puissance p-ième, il en résulte que $D_i^p=0$ modulo $\mathfrak{p}_v$. Si de plus p ne divise pas le discriminant de K, on a alors $v(p)=1$ et

$$v(e_1^{n_1}\dots e_d^{n_d}\cdot x_i)\geqslant\lfloor n_1/p\rfloor+\cdots+\lfloor n_d/p\rfloor$$

et

$$v(P_{n,i}(0))\geqslant-\sum_{j=1}^d(v(n_j!)-\lfloor n_j/p\rfloor)\geqslant-\frac{n_1+\cdots+n_d}{p(p-1)}$$

d'où l'on déduit le lemme.

De ces estimées découle facilement (lemme de Schwarz v-adique) une majoration, valable pour toute place v finie,

$$(7.6.1)\qquad h_v(\varphi_D^{(n)})\leqslant nC_v$$

et de plus,

$$\sum_{v\in\Sigma_{K,f}} C_v < +\infty. \tag{7.6.2}$$

Pour tout plongement complexe $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$, soit $M_\sigma = B(0,R_\sigma)^d$ le polydisque ouvert de centre O et de rayon $R_\sigma \in \mathbf{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et soit $\psi_\sigma\colon M_\sigma \to \mathscr{Y}_\sigma(\mathbf{C})$ une application holomorphe induisant un isomorphisme d'un voisinage de O dans M_σ avec un voisinage de P dans la feuille holomorphe passant par P du feuilletage défini par F. Par hypothèse, de telles applications existent pour tout σ, et pour la place σ_0, on a $R_{\sigma_0} = +\infty$.

Fixons une section globale sans zéro ε_σ de $\psi_\sigma^* L$. Si $s \in E_D^n$, on écrit $\psi_\sigma^* s = f\varepsilon_\sigma^D$ où f est une fonction holomorphe sur M_σ s'annulant à l'ordre n en l'origine.

Soit pour tout σ un réel R'_σ tel que $0 < R'_\sigma < R_\sigma$. Soit $j^n f$ le jet d'ordre n de f en l'origine : c'est l'application polynomiale homogène de degré n :

$$\mathbf{C}^d \to \mathbf{C}, \qquad (a_1,\dots,a_d) \mapsto \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \frac{a_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{a_d^{n_d}}{n_d!}\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}}\cdots\frac{\partial^{n_d}}{\partial z_d^{n_d}} f(0).$$

D'après le lemme de Schwarz usuel, on a pour tout $(a_1,\dots,a_d) \in \mathbf{C}^d$ l'inégalité

$$|j^n f(a_1,\dots,a_d)| \leqslant \max(|a_i|)^n \, \|f\|_{R'_\sigma} \, (R'_\sigma)^{-n},$$

$\|f\|_{R'_\sigma}$ désignant le sup de $|f|$ sur le polydisque $\overline{B}(0,R'_\sigma)^d$ et la norme du jet de s est majorée par

$$\|j^n s\| \leqslant \left\|\mathrm{d}\psi_\sigma^{-1}\right\|^n (R'_\sigma)^{-n} \, \|\psi^* s\|_{R'_\sigma} \left\|\varepsilon_\sigma^{-1}\right\|_{R'_\sigma}^D .$$

Finalement, compte tenu de l'inégalité (5.4), il existe deux constantes A et $B(R'_\sigma)$ telles que

$$\|j^n s\| \leqslant (R'_\sigma/A)^{-n} B(R'_\sigma)^D$$

et

$$h_\sigma(\varphi_D^{(n)}) \leqslant D\log B(R'_\sigma) - n\log(R'_\sigma/A). \tag{7.6.3}$$

L'inégalité (7.3.1) découle alors immédiatement des inégalités (7.6.1), (7.6.2) et (7.6.3) et du fait que R'_{σ_0} puisse être pris arbitrairement grand.

7.7. Remarque. — La majoration (7.6.2) est un analogue de la condition $\tau = 0$ du chapitre 6. Ce n'est d'ailleurs pas surprenant : dans le contexte de la conjecture de Grothendieck, la condition $\tau = 0$ provient justement de l'hypothèse d'annulation des p-courbures, de même que l'inégalité (7.6.2) a été établie en utilisant la p-intégrabilité du feuilletage.

RÉFÉRENCES

[1] A. Abbes & T. Bouche – « Théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique" », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995), no. 2, p. 375–401.

[2] Y. Amice – *Les nombres p-adiques*, Collection SUP : Le Mathématicien, vol. 14, Presses Universitaires de France, Paris, 1975.

[3] Y. André – *G-functions and geometry*, Vieweg, Braunschweig, 1989.

[4] ———, « Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck et Katz », Prépublication 134, Institut de mathématiques de Jussieu, 1997.

[5] ———, « Séries Gevrey de type arithmétique, I. Théorèmes de pureté et de dualité », *Ann. of Math.* **151** (2000), p. 705–740.

[6] ———, « Séries Gevrey de type arithmétique, II. Transcendance sans transcendance », *Ann. of Math.* **151** (2000), p. 741–756.

[7] Y. André & F. Baldassarri – « Geometric theory of G-functions », in *Arithmetic geometry (Cortona, 1994)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 1–22.

[8] D. Bertrand, M. Emsalem, F. Gramain, M. Huttner, M. Langevin, M. Laurent, M. Mignotte, J.-C. Moreau, P. Philippon, É. Reyssat & M. Waldschmidt – « Les nombres transcendants », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, vol. 13, 1984.

[9] D. Bertrand – « Groupes algébriques et équations différentielles linéaires », in *Séminaire Bourbaki, 1991/92*, Exp. 750, Astérisque, vol. 206, 1992, p. 183–204.

[10] J.-P. Bézivin & P. Robba – « A new p-adic method for proving irrationality and transcendence results », *Ann. of Math.* **129** (1989), no. 1, p. 151–160.

[11] ———, « Rational solutions of linear differential equations », *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **46** (1989), no. 2, p. 184–196.

[12] F. A. Bogomolov & M. L. McQuillan – « Rational curves on foliated varieties », prépublication M/01/07, I.H.É.S., 2001.

[13] E. Bombieri – « On G-functions », in *Recent progress in analytic number theory, Vol. 2 (Durham, 1979)*, Academic Press, London, 1981, p. 1–67.

[14] A. Borel – *Linear algebraic groups*, second éd., Springer-Verlag, New York, 1991.

[15] É. Borel – « Sur une application d'un théorème de M. Hadamard », *Bulletin des sciences mathématiques* (1894).

[16] J.-B. Bost – « Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) », in *Séminaire Bourbaki, 1994/95*, Exp. 795, Astérisque, vol. 237, 1996, p. 115–161.

[17] ———, « Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **93** (2001), p. 161–221.

[18] D. V. Chudnovsky & G. V. Chudnovsky – « Applications of Padé approximations to the Grothendieck conjecture on linear differential equations », in *Number theory* (New York, 1983–84), Lect. Notes Math., vol. 1135, 1985, p. 52–100.

[19] C. Deninger & E. Nart – « Formal groups and L-series », *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), no. 2, p. 318–333.

[20] L. Di Vizio – « Sur la théorie géométrique des G-fonctions. Le théorème de Chudnovsky à plusieurs variables », *Math. Ann.* **319** (2001), p. 181–213.

[21] B. Dwork – « On the rationality of the zeta function of an algebraic variety », *Amer. J. Math.* **82** (1960), p. 631–648.

[22] B. Dwork, G. Gerotto & F. J. Sullivan – *An introduction to G-functions*, Annals of Math. Studies, no. 133, Princeton Univ. Press, 1994.

[23] G. Eisenstein – « Über eine allgemeine Eigenschaft der Reihen-Entwicklungen aller algebraischen Functionen (1852) », in *Mathematische Gesammelte Werke, Band II*, Chelsea Publishing Co., New York, 1975, p. 765–767.

[24] T. Ekedahl & N. Shepherd-Barron – « A conjecture on the existence of compact leaves of algebraic foliations », prépublication, 1999, disponible sur `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~nisb/`.

[25] G. Faltings – « Endlichkeitsätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern », *Invent. Math.* **73** (1983), no. 3, p. 349–366.

[26] H. Gillet & C. Soulé – « Amplitude arithmétique », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), p. 887–890.

[27] P. Graftieaux – « Formal groups and the isogeny theorem », *Duke Math. J.* **106** (2001), no. 1, p. 81–121.

[28] ———, « Formal subgroups of abelian varieties », *Invent. Math.* **145** (2001), no. 1, p. 1–17.

[29] D. R. Grayson – « Reduction theory using semistability », *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), p. 600–634.

[30] T. Honda – « On the theory of commutative formal groups », *J. Math. Soc. Japan* **22** (1970), p. 213–246.

[31] N. Jacobson – *Lie algebras*, Dover Publications Inc., New York, 1979, republication of the 1962 original.

[32] N. M. Katz – « Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **39** (1970), p. 175–232.

[33] ———, « Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration) », *Invent. Math.* **18** (1972), p. 1–118.

[34] ———, « A conjecture in the arithmetic theory of differential equations », *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), no. 2, p. 203–239, Erratum, p. 347–348.

[35] L. Kronecker – « Über die Irreductibilität von Gleichungen », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1880).

[36] M. Laurent – « Sur quelques résultats récents de transcendance », in *Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy, 1989)*, Astérisque, vol. 198-200, 1991, p. 209–230.

[37] O. Mathieu – « Classification des algèbres de Lie simples », in *Séminaire Bourbaki, 1998/99*, Exp. 858, Astérisque, vol. 266, 2000, p. 245–286.

[38] Y. Miyaoka – « Deformations of a morphism along a foliation and applications », in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 245–268.

[39] A. Ogus – « Hodge cycles and crystalline cohomology », ch. 6 in *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lect. Notes Math., vol. 900, Springer Verlag, 1982, p. 357–414.

[40] R. Rumely, C. F. Lau & R. Varley – « Existence of the sectional capacity », *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 145 no. 690, 2000.

[41] H. A. Schwarz – « Ueber diejenigen Fälle in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt », *J. Reine Angew. Math.* **75** (1873), p. 292–335.

[42] J.-P. Serre – *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[43] C. L. Siegel – « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen (1929) », in *Gesammelte Abhandlungen, Band I*, 1966, p. 209–266.

[44] C. Soulé – « Hermitian vector bundles on arithmetic varieties », in *Algebraic Geometry (Santa Cruz, 1995)*, vol. 62, Part 1, 1997, p. 383–419.

[45] C. Soulé, D. Abramovich, J.-F. Burnol & J. Kramer – *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 33, Cambridge University Press, 1992.

[46] U. Stuhler – « Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischer Formen », *Arch. Math.* **27** (1976), p. 604–610.

[47] L. Szpiro – « Degrés, intersections, hauteurs », in *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell* (L. Szpiro, éd.), Astérisque, vol. 127, Soc. Math. France, 1985, p. 11–28.

[48] S.-W. Zhang – « Positive line bundles on arithmetic varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), p. 187–221.

Antoine CHAMBERT-LOIR

Centre de Mathématiques
École polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex
E-mail : chambert@math.polytechnique.fr

Séminaire BOURBAKI Mars 2001
53e année, 2000-2001, nO 887, p. 211 à 248

RÉPARTITION DES ZÉROS DES FONCTIONS L ET MATRICES ALÉATOIRES

par **Philippe MICHEL**

INTRODUCTION

La fonction ζ de Riemann est la série $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ pour $\Re es > 1$. Elle admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et vérifie une équation fonctionnelle de la forme $\xi(1-s) = \xi(s)$ où $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et a tous ses zéros dans la bande critique $0 < \Re es < 1$. Depuis 1995, le problème le plus fameux des mathématiques est sans doute de montrer l'hypothèse de Riemann qui prédit que tous les zéros de ξ sont sur la droite critique $\Re es = 1/2$. Pour aborder cette question, une idée qui remonte à Polya et Hilbert consiste à donner une réalisation non-tautologique de l'ensemble des zéros de ξ comme spectre d'un opérateur de Hilbert possédant certaines symétries dont on déduirait l'hypothèse de Riemann (notons que cette approche fonctionne pour les fonctions L de courbes sur les corps finis et que A. Connes a donné une telle réalisation pour les zéros critiques[(1)] et plus généralement une condition équivalente à la validité de l'Hypothèse de Riemann Généralisée aux fonctions L de caractères de Hecke [Co]). Dans les années 1970, Montgomery [Mo] montre une coïncidence troublante entre les valeurs propres de matrices aléatoires de grand rang et les zéros de ξ, ce qui semble confirmer leur nature spectrale. Pour énoncer son résultat, on note $\{\rho_n := 1/2 + i\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$ la suite des zéros de ξ comptés avec leur multiplicité : ceux-ci sont indexés de sorte que $\rho_{-n} = \overline{\rho_n}$ et que la suite $\{\Im m\rho_n\}_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$ soit une suite croissante. Pour $T > 0$, on note $N(T) = |\{\rho_i,\ 0 < |\gamma_i| \leqslant T\}|$ le nombre de zéros de hauteur inférieure à T. On a $N(T) = \frac{T}{2\pi}\log T(1+o(1))$ (pour $T \to +\infty$), de sorte que si l'on normalise γ_i en posant $\widehat{\gamma}_i = \frac{\gamma_i \log|\gamma_i|}{2\pi}$, l'espacement moyen $\widehat{\delta}_i := \Re e(\widehat{\gamma}_{i+1} - \widehat{\gamma}_i)$ vaut 1. Montgomery montre alors le

(1) Ceux situés sur l'axe critique $\Re es = 1/2$.

THÉORÈME 0.1 (Montgomery). — *Sous l'hypothèse de Riemann ($\gamma_i \in \mathbb{R}$), pour toute fonction ϕ lisse sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est à support compact dans $]-1,1[$ on a*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant N} \phi(\widehat{\gamma}_i - \widehat{\gamma}_j) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) r_2(\mathrm{GUE})(x)dx \tag{1}$$

avec $r_2(\mathrm{GUE}, x) = 1 - (\frac{\sin \pi x}{\pi x})^2$.

Dyson a remarqué que la densité $r_2(\mathrm{GUE})(x)$ coïncide avec la densité limite de la distribution de corrélation normalisée des paires de valeurs propres de matrices aléatoires hermitiennes de rang N (relativement à une certaine mesure gaussienne) pour $N \to +\infty$: la famille de ces espaces ainsi probabilisés est appelée l'ensemble « GUE »[(2)] (voir ci-dessous pour des définitions plus précises). Montgomery a aussi conjecturé que l'égalité (1) est valable sans restriction sur le support de $\widehat{\phi}$; cette conjecture a des conséquence mirifiques sur des questions fines concernant la répartition des nombres premiers (ce qui n'est guère surprenant), mais aussi sur des fonctions L autres que ζ (ainsi elle implique qu'il n'y a pas de zéro de Siegel pour les fonctions L de caractères de Dirichlet quadratiques : c'est cette impliquation qui est à l'origine des investigations de Montgomery). En 1995, Rudnick et Sarnak [RS] ont montré que cette coïncidence n'est pas fortuite en généralisant l'énoncé précédent aux zéros de fonctions L de formes automorphes cuspidales sur $GL_d(\mathbb{Q})$ (cette fois sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée et avec le même type de restrictions sur la fonction test ϕ). Plus généralement, ils montrent que la distribution de corrélation des k-uples de ces zéros coïncide avec celle des k-uples de valeurs propres de matrices aléatoires de l'ensemble GUE (au moins pour une certaine classe de fonctions tests). Ainsi conjecturent-ils que la répartition locale des *écarts* entre les zéros de toute fonction L de forme automorphe cuspidale est régie par une loi universelle provenant des matrices aléatoires (ce que nous appellerons la *Conjecture GUE*). Il va sans dire qu'on est extrêmement loin de prouver cette conjecture qui déborde largement du cadre de l'hypothèse de Riemann ; mais au moins elle est confortée par des résultats expérimentaux, fruits des calculs numériques intensifs sur les zéros de ζ ou d'autres fonctions L [Od, Ru].

La question de la répartition locale des zéros eux-mêmes se pose alors naturellement. Des travaux ultérieurs de Katz et Sarnak [KSa] montrent que la situation est encore plus riche ; en étudiant la répartition des zéros de familles de fonctions L sur les corps finis (pour ces fonctions on dispose de l'analogue de l'Hypothèse de Riemann [De2]), ils montrent d'une part que la conjecture GUE est vraie dans ce contexte, mais aussi en testant des statistiques liées à la répartition des zéros (et non à leurs écarts), que des lois différentes (de celle provenant de GUE) apparaissent. Ces lois qui correspondent à celles des valeurs propres de matrices aléatoires appartenant

(2) Pour « Gaussian Unitary Ensemble ».

à des groupes compacts classiques (unitaires, symplectiques, ou orthogonaux), s'expliquent naturellement en terme du groupe de monodromie géométrique attaché à chaque famille.

Reste le cas beaucoup plus mystérieux des familles de fonctions L sur les corps de nombres. Dans l'article [ILS], Iwaniec, Luo et Sarnak étudient la répartition des zéros au voisinage du point critique pour des familles de fonctions L liées aux formes modulaires holomorphes paramétrées par leur poids ou leur niveau, et montrent que celles-ci sont distribués suivant une loi qui dépend de chaque famille mais qui provient encore d'un des groupes compacts de matrices aléatoires rencontrées pour les corps finis. Cette fois, on ne dispose pas encore d'une interprétation permettant de d'expliquer *a priori* pourquoi telle loi est associée à telle famille et on se borne plutôt à des constatations. À leur suite d'autres familles de fonctions L ont été explorées et l'on n'a toujours pas pu exhiber de loi de répartition différente des quatre rencontrées précédemment.

C'est l'ensemble de ces constatations que nous allons exposer. Il peut sembler étonnant de consacrer un exposé à un domaine encore très *expérimental*, où beaucoup des résultats obtenus dépendent de conjectures inaccessibles (les Hypothèses de Riemann Généralisées, voire plus). Mais il faut dire que les matrices aléatoires fournissent un modèle probabiliste remarquablement cohérent pour décrire des fonctions L et leurs zéros : de nombreux phénomènes nouveaux et anciens rencontrés en théorie analytique des fonctions L, ainsi que de nombreuses conjectures faites dans le passé, trouvent une explication simple dans ce modèle (par exemple les résultats de Selberg sur la répartitiontion gaussienne des valeurs de $\log|\zeta(1/2+it)|/\sqrt{\log\log t}$, cf. [Ti, KSn1]) ; d'autre part, on n'a pas encore trouvé de fait qui le remette en cause (la question de trouver les limites du modèle motive une grande partie du travail effectué dans ce domaine). Sur le plan méthodologique le modèle met au premier plan l'étude analytique des fonctions L *en familles* plutôt qu'individuellement (rappelons que la preuve par Deligne des conjectures de Weil, il y a trente ans, utilisait déjà de façon cruciale la notion de famille de fonctions L [De1]) ; enfin il fournit, pour le futur, des conjectures très fines sur les fonctions L, par exemple sur la question de leur annulation aux points critiques.

Le modèle des matrices aléatoires a suscité un certain nombre d'applications frappantes et nous terminons cette introduction par trois exemples : le premier exemple est dans l'esprit du Théorème 0.1 et est dû à Conrey et Iwaniec [CI2].

THÉORÈME 0.2 (Conrey-Iwaniec). — *Soient* $0 < a, \Delta$. *On considère l'hypothèse* $H(a,\Delta)$ *ci-dessous :*

Il existe T_0 (*dépendant explicitement de* a *et* Δ) *tel que, pour tout* $T \geqslant T_0$, *au moins* $T/(\log T)^a$ *paires de zéros distincts* (ρ,ρ') *sont telles que*

$$|\Im m(\rho)| \leqslant T \text{ et } 0 < |\Im m(\rho-\rho')| \leqslant \Delta\frac{2\pi}{\log|\rho|}.$$

Si l'hypothèse $H(a,\Delta)$ est vérifiée pour $0<a<5$ et $0<\Delta<1/2$, on a l'énoncé suivant :

pour tout caractère quadratique χ de conducteur D, la fonction $L(s,\chi)$ ne s'annule pas sur le segment $[1-1/(\log D)^b,1]$ avec une constante b qui ne dépend (explicitement) que de a.

Ce théorème dit que s'il existe suffisamment de paires de zéros de ξ distincts et dont l'écart est strictement inférieur à la moitié de l'écart moyen, alors les caractères quadratiques n'ont (essentiellement) pas de zéro de Siegel. Il va sans dire que la conjecture de Montgomery sur la corrélation des paires implique que l'hypothèse principale de cet énoncé est vraie (et de loin). Notons que ce critère est analogue à un autre critère dû à Iwaniec et Sarnak [IS1] :

THÉORÈME 0.3 (Iwaniec-Sarnak). — *Supposons qu'il existe $\Delta>1/4$ et $A\geqslant 0$ tels que pour tout q assez grand (dépendant explicitement de Δ et de A), la proportion des formes modulaires primitives de poids 2 et de niveau q vérifiant $L(f,1/2)\geqslant(\log q)^{-A}$ est supérieure à Δ.*

Alors, pour tout caractère primitif χ de conducteur D assez grand (dépendant explicitement de A,Δ) la fonction $L(s,\chi)$ ne s'annule pas sur le segment $[1-1/(\log D)^{A+2},1]$.

Le deuxième exemple peut-être plus frappant encore (parce qu'il touche à l'Hypothèse de Riemann Généralisée) est le suivant : on considère l'hypothèse

HYPOTHÈSE S. — *Il existe des constantes $A\geqslant 0$ et $1/2\leqslant\alpha<3/4$ telles que, pour tous x, $c\geqslant 1$, et a entier premier avec c, on a la majoration*

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a(\mathrm{mod}c)}} e(\frac{2\sqrt{p}}{c})\ll c^A x^\alpha,$$

où la somme porte sur les nombres premiers et la constante impliquée est absolue.

THÉORÈME 0.4 (Iwaniec-Luo-Sarnak, [ILS]). — *Supposons l'hypothèse S vérifiée pour un certain A et une constante $1/2\leqslant\alpha<3/4$. Il existe alors k_0 qui dépend explicitement de α,A tel que*

– si les zéros de toutes les fonctions $L(f,s)$ des formes modulaires holomorphes de niveau 1 et de poids $k\geqslant k_0$ sont situés sur l'axe réel ou sur la droite critique $\Re es=1/2$,

alors ces zéros sont tous de partie réelle inférieure à

$$1-\frac{3-4\alpha}{11+4A}\ (<1).$$

Ces trois énoncés relient entre elles des propriétés de zéros de fonction L qui sont de nature différentes : les deux premiers connectent l'existence d'un zéro de Landau-Siegel pour les fonctions des caractères quadratiques à la répartition des zéros de ζ ou à la non-annulation de fonctions L de formes modulaires au point critique. Pour le troisième énoncé, on peut montrer que l'hypothèse S peut être convertie en une conjecture sur la bonne répartition modulo 1 des parties imaginaires des zéros des fonctions L de caractères de Dirichlet (il faut noter que malheureusement l'hypothèse de Riemann pour ces fonctions L n'implique l'hypothèse S que pour $\alpha = 3/4$) ; or cette hypothèse implique une quasi-hypothèse de Riemann pour des fonctions L de degré 2. La condition demandée sur localisation des zéros des fonctions $L(f, s)$ des formes modulaires peut paraître très (trop ?) forte, mais les auteurs ont annoncé que cette condition peut être supprimée en remplaçant l'hypothèse S par une autre plus élaborée mais qui ne dépend encore que des fonctions L de caractères de Dirichlet.

Notre troisième exemple est dû à Conrey et Soundararajan [CS], et est complètement inconditionnel.

THÉORÈME 0.5 (Conrey-Soundararajan). — *Il existe une infinité de caractères de Dirichlet quadratiques primitifs χ dont la fonction L, $L(\chi, s) = \sum_n \chi(n)n^{-s}$ ne s'annule pas sur le segment critique $[0, 1]$. Plus précisément, si on désigne par $\mathcal{F}_D$ l'ensemble des caractères de Dirichlet primitifs réels de conducteur $\leqslant D$, et $\mathcal{F}_D^*$ ceux dont la fonction L ne s'annule pas sur $[0, 1]$, on a*

$$\liminf_{D\to+\infty} \frac{|\mathcal{F}_D^*|}{|\mathcal{F}_D|} \geqslant 0.20.$$

Il semble que ce soit la première fois qu'on montre l'existence d'une infinité de fonctions L n'ayant aucun zéro réel (en dehors des zéros triviaux). Un point remarquable de ce résultat est qu'il est inspiré directement par le modèle des matrices aléatoires : le modèle explique pourquoi la méthode utilisée avait des chances de fonctionner pour la famille des caractères quadratiques, pourquoi elle ne fonctionnera pas pour certaines familles (par exemple pour la famille des caractères complexes) et prédit à quelles autres familles leur méthode est susceptible de s'appliquer.

Remerciements. — Au cours de la rédaction de cet exposé, j'ai bénéficié de discussions et d'explications de la part de B. Conrey, K. Soundararajan et surtout de P. Sarnak qui m'a prodigué de nombreuses références et commentaires, notamment sur ses travaux en cours. Je remercie bien amicalement toutes ces personnes, ainsi que Régis du Moulin de la Bretèche pour sa relecture attentive et critique du manuscrit.

1. CERTAINS ENSEMBLES DE MATRICES ALÉATOIRES

La théorie des matrices aléatoires remonte aux travaux de Wigner en physique nucléaire : il suggérait de modéliser les lignes de résonance d'un noyau lourd par les valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne (ou réelle symétrique) de grand rang. C'est un domaine extrêmement développé de la physique mathématique dont une référence classique est le livre de Mehta [Me]. Rappelons les principes de base de la théorie : on se donne une suite d'espaces de matrices $G(N) \subset GL_N(\mathbb{C})$, $N \geqslant 1$, chacun étant muni d'une mesure de probabilité dA, et on considère une suite $A \to V_N(A)$ de variables aléatoires (qui peuvent prendre leurs valeurs dans un espace de distributions). La question principale de la théorie est l'étude du comportement limite quand $N \to +\infty$ de l'espérance $E(V_N) = \int_{G(N)} V_N(A) dA$. La motivation principale de l'introduction de ces matrices est de fournir des modèles probabilistes pour des espaces vectoriels de dimension infinie possédant certaines symétries (et en particulier des systèmes physiques complexes). Les ensembles de matrices aléatoires considérés originellement par Wigner sont les ensembles dits GUE (resp. GOE) formés par les espaces des matrices inversibles, $N \times N$, hermitiennes (resp. symétriques réelles) munis de la mesure de probabilité gaussienne $dA = c_N e^{-\beta N \mathrm{tr}(A^2)} dx(A)$, où $dx(A)$ désigne la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes (resp. symétriques) et $\beta = 1$ (resp. 2). Incidemment on peut noter que ces espaces sont les réalisations matricielles des espaces symétriques non-compacts $GL_N(\mathbb{C})/U(N)$ (resp. $GL_N(\mathbb{R})/O(N)$) via les identifications $B \to A := B\overline{B}^t$. D'autres espaces compacts de matrices ont ensuite été introduits pour modéliser d'autres problèmes de la physique mathématique [Zi]. Ces espaces sont les réalisations matricielles des onze espaces symétriques classiques, compacts et irréductibles dans la classification de Cartan [He]. Parmi ceux-ci, les seuls espaces qui apparaissent (jusqu'à présent) dans la répartition des zéros des fonctions L sont les quatre types d'espaces compacts de type II ([He] Chap. X) :

– le type unitaire $G = U$, $G(N) = U(N)$ le groupe des matrices unitaires ;

– le type symplectique $G = Sp$, $G(N) = USp(2N)$ le groupe des matrices symplectiques unitaires ;

– le type (non-irréductible) orthogonal $G = O$, $G(N) = O(N)$ formé des matrices orthogonales qui se scinde en deux sous-types correspondant aux deux composantes irréductibles de $O(N)$

  – le type orthogonal pair $G = SO^+$, $G(N) = SO(2N)$, le groupe des matrices orthogonales de rang pair.

  – le type orthogonal impair $G = SO^-$, $G(N) = SO(2N+1)$, le groupe des matrices orthogonales de rang impair (en particulier 1 est valeur propre triviale).

Chacun de ces groupes est équipé de sa mesure de Haar.

1.1. Distributions associées aux valeurs propres

Pour $G(N)$ l'un des groupes précédents, on associe à $A \in G(N)$ diverses statistiques portant sur ses valeurs propres. On note $\{e(\theta_1), \dots, e(\theta_N)\}$ l'ensemble des valeurs propres de A *à symétries évidentes près* : pour $G = Sp$, SO^+, SO^-, l'ensemble des valeurs propres est de la forme

$$\{e(\theta_1), \dots, e(\theta_N), e(\theta_1 + 1/2), \dots, e(\theta_N + 1/2)\}$$

et

$$\{1, e(\theta_1), \dots, e(\theta_N), e(\theta_1 + 1/2), \dots, e(\theta_N + 1/2)\},$$

et on ordonne ces valeurs propres par leur argument :

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_N \leqslant 1 \text{ (ou } \leqslant 1/2 \text{ si } G(N) = USp(2N) \text{ ou } SO(N)).$$

On souhaite étudier la répartition des valeurs propres des matrices de $G(N)$ localement dans des intervalles de longueur $\approx 1/N$, aussi on renormalise les θ_i en posant $\widehat{\theta}_i := \frac{N}{\sigma}\theta_i$ avec $\sigma = 1$ (resp. $\sigma = 1/2$) si $G(N) = U(N)$, $O(N)$ (resp. $G = USp(N)$, $SO(2N)$, $SO(2N+1)$) (de sorte que l'écart $\widehat{\theta}_{i+1} - \widehat{\theta}_i$ vaut 1 en moyenne). On associe alors à chaque matrice A diverses statistiques construites à partir des $\widehat{\theta}_i$, et on forme leurs espérances en faisant la moyenne sur le groupe tout entier, on construit ainsi :

– *La distribution de répartition d'ordre* k définie pour toute fonction ϕ sur $\mathbb{R}^k$ symétrique et à décroissance rapide :

$$(2) \quad W_k(A, \phi) := \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k),\\ i_j \leqslant N,\, i_j \neq i_{j'}}} \phi(\widehat{\theta}_{i_1}, \dots, \widehat{\theta}_{i_k}), \text{ et } W_k(G(N), \phi) := \int_{G(N)} W_k(A, \phi) dA$$

– Pour $k = 1$, une variante plus symétrique de cette distribution nous sera utile : pour $A \in U(N')$ on note $\{e(\theta'_1), \dots, e(\theta'_{N'})\}$ l'ensemble des valeurs propres de A avec $\theta'_i \in]-1, 1]$ et on pose pour $A \in G(N) \subset U(N')$ et ϕ symétrique :

$$(3) \qquad W(A, \phi) := \sum_{1 \leqslant i \leqslant N'} \phi(\widehat{\theta}'_i), \quad \text{et} \quad W(G(N), \phi) := \int_{G(N)} W(A, \phi) dA$$

Quand N est grand, $W_k(A)$ et $W(A)$ décrivent la répartition des valeurs propres de A dans un $1/N$-voisinage du point 1.

– *La mesure de répartition de la* k*-ième valeur propre* définie pour toute fonction sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ à décroissance rapide :

$$(4) \qquad \nu_k(A, \phi) := \phi(\widehat{\theta}_k), \quad \text{et} \quad \nu_k(G(N), \phi) := \int_{G(N)} \phi(\widehat{\theta}_k(A)) dA.$$

Quand N est grand, $\nu_k(A)$ décrit la répartition de la k-ième valeur propre dans un $1/N$-voisinage du point 1.

– *La distribution de corrélation d'ordre* k définie pour toute fonction ϕ sur $\mathbb{R}^k$, symétrique en toutes les variables, invariante par la translation de vecteurs $u(1,\dots,1)$, $u \in \mathbb{R}$ (ϕ ne dépend que des différences entre les variables) et à décroissance rapide modulo $\mathbb{R}(1,\dots,1)$ par

$$(5)\quad R_k(A,\phi) := \frac{k!}{N} \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant N} \phi(\widehat{\theta}_{i_1},\dots,\widehat{\theta}_{i_k}),\ \text{et}\ R_k(G(N),\phi) := \int_{G(N)} R_k(A,\phi)dA.$$

Quand N est grand $R_k(A)$ « compte » le nombre de « paquets » de k valeurs propres concentrées dans des petits intervalles de longueur $\approx 1/N$ du cercle.

– *la mesure d'espacement d'indice* k définie pour toute fonction ϕ continue sur $\mathbb{R}^+$ à décroissance rapide :

$$(6)\quad \mu_k(A,\phi) := \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} \phi(\widehat{\theta}_{i+k}-\widehat{\theta}_i),\quad \text{et}\quad \mu_k(G(N),\phi) := \int_{G(N)} \mu_k(A,\phi)dA.$$

Quand N est grand $\mu_k(A)$ « compte » le nombre de suites de k valeurs propres consécutives concentrées dans des petits intervalles de longueur $\approx 1/N$ du cercle.

Dans [KSa], Katz et Sarnak étudient le comportement de ces distributions lorsque $G(N)$ décrit l'une des familles de groupes compacts précédentes et $N \to +\infty$:

THÉORÈME 1.1. — *Pour* $G = U, Sp, O, SO^+, SO^-$ *l'une des familles de groupes compacts ci-dessus, quand* $N \to +\infty$, *les distributions* $W(G(N))$, $W_k(G(N))$, $\nu_k(G(N))$, $R_k(G(N))$, $\mu_k(G(N))$ *convergent faiblement vers des distributions limites* $W(G)$, $W_k(G)$, $\nu_k(G)$, $R_k(G)$, $\mu_k(G)$, *et les quatre dernières ont des densités continues par rapport à la mesure de Lebesgue (de plus* $\mu_k(G)$ *et* $\nu_k(G)$ *sont encore des mesures de probabilité) : pour toute fonction test* ϕ *de l'espace approprié on a*

$$\lim_{N\to+\infty} W(G(N),\phi) = W(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)W(G)(x)dx$$

$$\lim_{N\to+\infty} W_k(G(N),\phi) = W_k(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}^k_{\geqslant 0}} \phi(\boldsymbol{x})W_k(G)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \nu_k(G(N),\phi) = \nu_k(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}} \phi(x)\nu_k(G)(x)dx$$

$$\lim_{N\to+\infty} R_k(G(N),\phi) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \phi(\boldsymbol{x},-\sum_{i=1}^{k-1} x_i)R_k(G,\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \mu_k(G(N),\phi) = \mu_k(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}} \phi(x)\mu_k(G)(x)dx.$$

De plus on a une « loi des grands nombres » avec une estimation explicite de la vitesse de convergence : pour tout $\varepsilon > 0$

$$(7)\qquad \int_{G(N)} \sup_{f,\ |f|\leqslant 1} |D(A,\phi)-D(G,\phi)|dA \ll_\varepsilon N^{\varepsilon-1/6},\ D = \mu_k, \nu_k,$$

où le supremum est pris sur les fonctions continues à décroissance rapide et bornées par 1.

On peut calculer assez explicitement les densités de ces distributions. En particulier on trouve que les distributions d'espacement $\mu_k(G)$ et $R_k(G)$ sont égales entre elles et à celles trouvées pour les ensembles GUE et GOE ([KSa], Theorem 1.2.1) ; ainsi la densité de $R_k(G)$ en $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{k-1}$ vaut (voir (10))

$$R_k(G)(\boldsymbol{x}) = R_k(U)(\boldsymbol{x}) = W_k(U)((\boldsymbol{x}, -\sum_i x_i)) \quad \text{et} \quad R_2(G)(x) = 1 - (\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x})^2.$$

En revanche, les distributions décrivant la répartition des valeurs propres au voisinage de 1, $\nu_k(G)$, $W_k(G)$, $W(G)$ ne sont pas universelles et dépendent de G : pour $\nu_k(G)$ et $W_k(G)$, on trouve trois limites possibles :

- le cas unitaire : $\nu_k(U) =: \nu_k$, $W_k(U) =: W_k$,
- le cas orthogonal pair : $\nu_k(SO^+) =: \nu_{k,+}$, $\quad W_k(SO^+) =: W_{k,+}$,
- le cas symplectique et le cas orthogonal impair donnent les mêmes distributions

$$\nu_k(Sp) = \nu_k(SO^-) =: \nu_{k,-}, \qquad W_k(Sp) = W_k(SO^-) =: \nu_{k,-}.$$

Cette dernière égalité signifie que les valeurs propres d'une matrice unitaire symplectique générique et de grand rang et les valeurs propres *non-triviales* d'une matrice orthogonale de déterminant 1, générique et de grand rang impair ont la même répartition au voisinage de 1.

Enfin les distributions $W(G)$ sont distinctes pour tous les G et on a

$$\begin{aligned} W(U,\phi) &= \frac{1}{2}(W_1(\phi) + W_1(\phi(-x)), \\ W(SO^+,\phi) &= \frac{1}{2}(W_{1,+}(\phi) + W_{1,+}(\phi(-x)), \\ W(Sp,\phi) &= \frac{1}{2}(W_{1,-}(\phi) + W_{1,-}(\phi(-x)), \\ W(SO^-,\phi) &= \phi(0) + \frac{1}{2}(W_{1,-}(\phi) + W_{1,-}(\phi(-x)), \\ W(O,\phi) &= \frac{1}{2}(W(SO^+,\phi) + W(SO^-,\phi)). \end{aligned} \tag{8}$$

1.2. Formules pour les densités

Les densités limites des distributions précédentes sont calculées dans [KSa] en généralisant aux autres groupes compacts la méthode des polynômes orthogonaux de Gaudin et les méthodes de Mehta. Le point de départ est la formule d'intégration de Weyl qui exprime l'intégrale d'une fonction centrale de $G(N)$ comme une intégrale explicite sur le tore maximal de $G(N)$.

On décrit ici certains de ces calculs pour les groupes unitaires, les autres sont assez similaires. Soit $\phi(A) = \phi(\theta_1, \ldots, \theta_N)$. La formule d'intégration de Weyl fournit

$$\int_{U(N)} \phi(A)dA = \frac{1}{N!} \int_{[0,1[^N} \phi(\theta_1, \ldots, \theta_N) \prod_{i<j} |e(\theta_i) - e(\theta_j)|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_N. \tag{9}$$

On reconnaît dans le produit $\prod_{i<j}|e(\theta_i)-e(\theta_j)|^2$ le carré du module d'un déterminant de Vandermonde ; c'est aussi le déterminant $\det_{N\times N} K_N(\theta_i-\theta_j)$ où $K_N(\theta)$ est le noyau

$$K_N(\theta)=\sum_{j=0}^{N-1} e(j\theta)=e((N-1)\theta/2)\frac{\sin\pi N\theta}{\sin\pi\theta}.$$

Pour T une indéterminée et $s\geqslant 0$, on prend pour fonction $\phi(A)$ le polynôme $P_s(A,T)=\prod_{i=1}^N(1+T\chi_{[0,s]}(N\theta_i))$ où $\chi_{[0,s]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,s]$. D'une part, on a

$$P_s(U(N),T)=\int_{U(N)}\phi(A)dA=\sum_{k\geqslant 0}W_k(U(N),\chi_{[0,s]})T^k=\sum_{k\geqslant 0}(1+T)^kE(k,U(N),s),$$

où $E(k,U(N),s)=\int_{U(N)}\chi_{[0,s]}(N\theta_{k(A)})dA=\nu_k(U(N),\chi_{[0,s]})$ est la mesure de l'ensemble des matrices tel que l'angle de la k-ième valeur propre est dans $[0,s/N]$. D'autre part, la formule d'intégration de Weyl (9) et la méthode des polynômes orthogonaux de Gaudin ([KSa], Key Lemma 5.1.3, et Theorems 6.3.5, 6.3.6) permettent de montrer que $P_s(U(N),T)$ est le déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral (de rang fini égal à N) de noyau $K_N(\theta,\theta')$ sur $L^2([0,s/N],d\theta)$. C'est aussi par le changement de variable $x=N\theta$, le déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral de noyau $\frac{1}{N}K_N(x/N,y/N)\chi_{[0,s]}(y)$ sur $L^2([0,s],dx)$. Quand $N\to+\infty$, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}K_N(x/N,y/N)\chi_{[0,s]}(y)=K_s(x,y):=e((x-y)/2)\frac{\sin(\pi(x-y))}{\pi(x-y)}\chi_{[0,s]}(y)$$

uniformément et les coefficients de $P_s(U(N),T)$ convergent vers ceux du déterminant de Fredholm $P_s(U,T)=\det(1+TK_s|L^2([0,s],dx))$. On en déduit la convergence des distributions $W_k(U(N))$ et $\nu_k(U(N))$ vers des limites $W_k(U)$ et $\nu_k(U)$. On voit ainsi que la densité de $W_k(U)$ en $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^k$ vaut

$$W_k(U)(\boldsymbol{x})=\frac{1}{k!}\det_{k\times k}(K(x_i-x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k},\ K(x-y)=\frac{\sin(\pi(x-y))}{\pi(x-y)}. \tag{10}$$

Enfin, notant $1\geqslant\lambda_0(s)\geqslant\lambda_1(s)\geqslant\cdots$ les valeurs propres de K_s, on a

$$\lambda_j(s)f(y)=\int_0^s f(x)K_s(x,y)dx.$$

L'égalité

$$\det(1+TK_s|L^2([0,s],dx))=\prod_{j\geqslant 0}(1+T\lambda_j(s))$$

permet de calculer les densités $\nu_k(U)(x)$ et de tracer leur graphe, par exemple

$$\nu_1(U)(x)=-\frac{d}{dx}\prod_{j\geqslant 0}(1-\lambda_j(x)).$$

Des calculs similaires sont faits pour les autres groupes dans [KSa].

On obtient par exemple, pour $k = 1$ et ϕ bornée mesurable à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$ (cf. (8))

$$W(U,\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)\delta_0(x)dx,$$

$$W(SO^+,\phi)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)(1+\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x})dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)(\delta_0(x)+\chi_{[-1,1]}(x))dx, \tag{11}$$

$$W(Sp,\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)(1-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x})dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)(\delta_0(x)-\chi_{[-1,1]}(x))dx,$$

$$W(SO^-,\phi) = \phi(0) + \int_{\mathbb{R}} \phi(x)(1-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x})dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)(1+\delta_0(x)-\chi_{[-1,1]}(x))dx.$$

$$W(O,\phi) = \frac{\phi(0)}{2} + \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)(\frac{1}{2}+\delta_0(x))dx.$$

D'autre part les développements de Taylor en 0 des densités ν_1 sont

$$\nu_1(x) = 1-\frac{\pi^2}{9}s^3+O(s^5),\ \nu_{1,+}(x) = 2-\frac{2\pi^2}{3}s^2+O(s^4),\ \nu_{1,-}(x) = \frac{2\pi^2}{3}s^2+O(s^4). \tag{12}$$

Remarque 1.2. — L'annulation à l'ordre 2 du dernier développement montre que le point « critique » 1 tend à « repousser » (quadratiquement) les valeurs propres (non triviales) des matrices orthogonales impaires ou symplectiques. Comme on le verra, c'est ce phénomène de répulsion dans le cas symplectique qui est à la base du théorème de Conrey–Soundararajan. Dans le cas unitaire ou orthogonal pair, un tel phénomène n'existe pas et les matrices de ce type peuvent avoir des valeurs propres très proches de 1 ; de plus les matrices orthogonales paires tendent à avoir (deux fois) « plus » de zéros au voisinage de 1 que les matrices unitaires.

1.3. Les moments du polynôme caractéristique d'une matrice aléatoire

Motivés par les conjectures de Conrey et Ghosh ([CG]) sur les moments de la fonction ζ de Riemann (voir ci-dessous), Keating et Snaith [KSn1, KSn2] ont étudié le comportement quand $N \to +\infty$ d'une autre variable aléatoire de $G(N)$: la valeur au point *critique* 1 de son polynôme caractéristique ; plus précisément ils ont calculé les « moments », pour $k \in \mathbb{C}$

$$M(G(N),s) := \int_{G(N)} |\det(I-A)|^k dA$$

(parallèlement, Brezin et Hikami [BH] ont étudié ces moments pour d'autres ensembles (non-compacts) dont les ensembles GUE et GOE), le résultat de leur calcul est donné dans le

THÉORÈME 1.3. — *Soit $k \in \mathbb{C}$ fixé. Lorsque $N \to +\infty$, on a les identités*

$$M(U(N),k) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma(j)\Gamma(j+k)}{\Gamma(j+k)^2} = g_U(k) N^{(k/2)^2}(1+o_k(1)),$$

$$\begin{aligned} M(USp(2N),k) &= 2^{2Nk} \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma(N+j+1)\Gamma(j+k+1/2)}{\Gamma(j+1/2)\Gamma(N+j+k+1)} \\ &= g_{Sp}(k) N^{k(k+1)/2}(1+o_k(1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(SO(2N),k) &= 2^{2Nk} \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma(N+j-1)\Gamma(j+k-1/2)}{\Gamma(j-1/2)\Gamma(N+j+k-1)} \\ &= g_{SO^+}(k) N^{k(k-1)/2}(1+o_k(1)), \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_U(k) = (k/2)^2,\ \gamma_{Sp}(k) = k(k+1)/2,\ \gamma_{SO^+}(k) = k(k-1)/2 \tag{13}$$

$$g_U(k) = \frac{G(1+k/2)^2}{G(1+k)},$$

$$g_{Sp}(k) = 2^{k^2/2} \frac{G(1+k)\sqrt{\Gamma(1+k)}}{\sqrt{G(1+2k)\Gamma(1+2k)}},$$

$$g_{SO^+}(k) = 2^{k^2/2} \frac{G(1+k)\sqrt{\Gamma(1+2k)}}{\sqrt{G(1+2k)\Gamma(1+k)}},$$

où $G(\ .\ )$ est la fonction G de Barnes [EMOT] *définie par*

$$G(1+z) = (2\pi)^{z/2} e^{-[(1+\gamma)z^2+z]/2} \prod_{n=1}^{\infty} [(1+z/n)^n e^{-z+z^2/(2n)}];$$

elle vérifie $G(1) = 1$ et $G(z+1) = G(z)\Gamma(z)$. En particulier si $k \geqslant 1$ est un entier, $g_U(2k)$, $g_{Sp}(k)$, $g_{SO^+}(k)$ sont des rationnels positifs,

$$g_U(2k) = \prod_{j=0}^{k} \frac{j!}{(k+j)!},\quad g_{Sp}(k) = \big(\prod_{j=1}^{k} (2j-1)!!\big)^{-1},\quad g_{SO^+}(k) = 2^k \big(\prod_{j=1}^{k-1} (2j-1)!!\big)^{-1}.$$

Remarque 1.4. — On a évidemment $M(SO(2N+1),k) = 0$. Dans ce cas, il est naturel de calculer les moments de la dérivée en 1 du polynôme caractéristique, on trouve

$$M'(SO(2N+1),k) = \int_{SO(2N+1)} |\frac{d}{dT} \det(T-A)_{|T=1}|^k dA = \frac{1}{2} M(SO(2N),k+1).$$

De même, on trouve que

$$M(O^-(2N+1),k) = \int_{SO(2N+1)} |\det(I+A)|^k dA = 2^k M(USp(2N),k-1).$$

On pourra se reporter à [KSn1, KSn2] pour la preuve de ces énoncés. Disons simplement que le calcul utilise à nouveau la forme explicite des formules d'intégration de Weyl et l'évaluation exacte des intégrales de Selberg dont une version est l'identité

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}|x_i-x_j|^{2\gamma}\prod_j(1-x_j)^{\alpha-1}(1+x_j)^{\beta-1}dx_1\cdots dx_N$$

$$=2^{\gamma N(N-1)+N(\alpha+\beta-1)}\prod_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(1+\gamma+j\gamma)\Gamma(\alpha+j\gamma)\Gamma(\beta+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma(N+j-1))}$$

pour

$$\Re e\alpha>0,\quad \Re e\beta>0,\quad \Re e\gamma>-\min\Big(\frac{1}{N},\frac{\Re e\alpha}{N-1},\frac{\Re e\beta}{N-1}\Big).$$

2. FAMILLES DE FONCTIONS L SUR LES CORPS FINIS

Le cas où le lien entre les zéros des matrices aléatoires et ceux des fonctions L est particulièrement transparent est celui des familles de fonctions L sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. L'exemple le plus simple est celui des courbes : soit $C/\mathbb{F}_q$ une courbe projective lisse définie sur $\mathbb{F}_q$, sa fonction L est la série formelle en q^{-s} définie par

$$L(C,s)=\exp\Big(\sum_n\frac{|C(\mathbb{F}_{q^n})|}{n}q^{-ns}\Big)=P(C,s)/(1-q^{-s})(1-q^{1-s})$$

et l'on sait que $P(C,s)$ est un polynôme unitaire en q^{-s} de degré $2g$ à coefficients entiers qui vérifie l'équation fonctionnelle $q^{g(1-s)}P(C,1-s)=q^{gs}P(C,s)$. D'après Weil (l'hypothèse de Riemann pour $L(C,s)$), les zéros de $P(C,s)$ sont sur la droite $\Re es=1/2$ (et sont répartis symétriquement sur cette droite). On note $0\leqslant\frac{2\pi\theta_1}{\log q}\leqslant\cdots\leqslant\frac{2\pi\theta_g}{\log q}\leqslant\frac{\pi}{\log q}$ les parties imaginaires des g « premiers » zéros de $P(C,s)$. En posant $\widehat{\theta}_i=2g\theta_i$, on définit de manière analogue aux équations $(2),\dots,(6)$ et après des distributions $\mu_k(C,\phi)$, $R_k(C,\phi)$, $\nu_k(C,\phi)$, $W_k(C,\phi)$. On note alors $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des classes de $\mathbb{F}_q$ isomorphismes de courbes de genre g définies sur $\mathbb{F}_q$; c'est un ensemble fini de cardinal $q^{3g-3}(1+O_g(q^{-1/2}))$ ([KSa], 10.6.9–26). Katz et Sarnak considèrent alors la famille $\{L(C,s)\}_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)}$, et les distributions obtenues par moyenne sur $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)$ (pour $D=\mu_k,R_k,\nu_k,W_k$) :

$$D(\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q),\phi)=\frac{1}{|\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)|}\sum_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)}D(C,\phi)$$

THÉORÈME 2.1 ([KSa], 12.2). — *Pour $D=\mu_k,R_k,\nu_k,W_k$ on a*

$$\lim_{g\to+\infty}\lim_{q\to+\infty}D(\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q),\phi)=D(Sp,\phi),$$

où q décrit l'ensemble de toutes les puissances des nombres premiers. De plus, pour $D = \mu_k, \nu_k$, on a une loi des grands nombres : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{q\to+\infty} \frac{1}{|\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)|} \sum_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)} \sup_{|f|\leqslant 1} |D(C,\phi) - D(Sp,\phi)| \ll_\varepsilon g^{\varepsilon-1/6}.$$

Remarque 2.2. — Ce théorème dit donc que les zéros de la fonction L d'une courbe « générique » (au sens de la mesure) de grand genre se répartissent au voisinage de 1 comme les zéros d'une matrice unitaire symplectique de grand rang. On peut également remarquer que la caractéristique des corps finis n'est pas fixée.

2.1. Familles de fonctions L sur les corps finis et $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux

Ce résultat est un cas particulier d'un principe beaucoup plus général qui combine le Théorème 1.1, avec le théorème d'équirépartition de Deligne pour les classes de conjugaisons de Frobenius des $\overline{\mathbb{Q}}$-faisceaux (Théorème 2.3). Soient k un corps fini et S un schéma sur k lisse et géométriquement connexe ; soient $\overline{\eta}$ le point géométrique générique et $\pi := \pi_1(S,\overline{\eta})$ le groupe fondamental de S. On note également $\pi^{\mathrm{geom}} = \pi_1(S\otimes_k \overline{k},\overline{\eta})$ le groupe fondamental géométrique. On rappelle également que tout point fermé $x \in S(k')$ (k' une extension finie de k) définit dans π, une classe de conjugaison de Frobenius qu'on note Frob_x.

Reste à définir la notion de famille de fonctions L dans ce contexte : elle provient de celle des $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux. Soient $\ell \neq \mathrm{car}(k)$ un premier, et $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \subset \mathbb{C}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$ plongée contenue dans $\mathbb{C}$. Un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau $\mathcal{F}$ de rang $N' \geqslant 1$ est par définition une représentation continue ρ de π dans un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-vectoriel de dimension N' noté $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$. On note G^{arith} (resp. G^{geom}) la clôture de Zariski de l'image $\rho(\pi)$ (resp. $\rho(\pi^{\mathrm{geom}})$) dans $GL(\mathcal{F}_{\overline{\eta}})\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}\mathbb{C} \simeq GL_{N'}(\mathbb{C})$, c'est le *groupe de monodromie arithmétique* (resp. *géométrique*). $\mathcal{F}$ est dit pur de poids 0 si pour tout point fermé x, les valeurs propres de $\rho(\mathrm{Frob}_x)$ sont de module 1. Un résultat fondamental de [De2] est que si $\mathcal{F}$ est pur de poids zéro (ce que nous supposerons dans toute la suite), le groupe G^{geom} est semi-simple. La famille des fonctions L que nous considérons est celle des polynômes caractéristiques des Frobenius $\rho(\mathrm{Frob}_x)$ quand x parcourt l'ensemble des points fermés de S et plus précisément on considère les familles indexées par les extensions finies de k

$$\{L(x,s) := \det(I - |k'|^{-s}\mathrm{Frob}_x|\mathcal{F}_{\overline{\eta}})\}_{x\in S(k')}.$$

À ce stade on fait deux hypothèses supplémentaires :

– *On a égalité des groupes de monodromie géométrique et arithmétique* $G^{\mathrm{arith}} = G^{\mathrm{geom}}$. Cette hypothèse (et le fait que $\mathcal{F}$ est pur de poids 0) implique que pour tout point fermé x, $\rho(\mathrm{Frob}_x)$ définit une unique K-classe de conjugaison dans K. Le théorème d'équirépartition de Deligne est que ses classes de conjugaisons sont équiréparties relativement à la mesure de Sato-Tate :

THÉORÈME 2.3 (Deligne, [De2]). — *Pour toute fonction* Φ *sur* K*, centrale et continue, on a*

$$\lim_{[k':k]\to+\infty} \frac{1}{|S(k')|} \sum_{x\in S(k')} \Phi(\rho(\mathrm{Frob}_x)) = \int_K \Phi(A)dA.$$

– *Un compact maximal* K *de* $G^{\mathrm{geom}}(\mathbb{C})$ *est isomorphe à l'un des groupes* $U(N)$*,* $USp(2N)$ *ou* $O(N)$*.* Pour tout point fermé x, on peut alors considérer les parties imaginaires des r premiers zéros

$$0 \leqslant \frac{2\pi\theta_1(x)}{\log q} \leqslant \cdots \leqslant \frac{2\pi\theta_r(x)}{\log q} \leqslant \frac{2\pi}{\log q},$$

et former les distributions $\mu_k(x,\phi), R_k(x,\phi), \nu_k(x,\phi), W_k(x,\phi)$.

Puisque les distributions $D(x,\phi)$ proviennent de fonctions centrales sur K, on déduit de l'énoncé précédent la limite

$$\lim_{[k':k]\to+\infty} \frac{1}{|S(k')|} \sum_{x\in S(k')} D(x,\phi) = D(G(N),\phi),$$

et pour $D = \mu_k, \nu_k$, en utilisant (7) on obtient la majoration : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{[k':k]\to+\infty} \frac{1}{|S(k')|} \sum_{x\in S(k')} |D(x,\phi) - D(G,\phi)| \ll_\varepsilon N^{\varepsilon-1/6}. \tag{14}$$

Finalement si on dispose d'une suite $\mathcal{F}_N$ de faisceaux lisses sur S purs de poids zéro et vérifiant les hypothèses précédentes, on déduit du Théorème 1.1

$$\lim_{N\to+\infty} \lim_{[k':k]\to+\infty} \frac{1}{|S(k')|} \sum_{x\in S(k')} D(x,\phi) = D(G,\phi). \tag{15}$$

Preuve (du Théorème 2.1). — Pour obtenir le théorème 2.1, on ne peut utiliser directement le formalisme précédent car $\mathcal{M}_g(k)$ ne correspond pas à l'ensemble des points fermés d'un schéma (le foncteur correspondant n'est pas représentable) et pour contourner ce problème, Katz et Sarnak utilisent plutôt l'ensemble $\mathcal{M}_{g,3K}(k)$ qui paramétrise les paires (C,α) de classes de k-isomorphismes de courbes munies d'un plongement tricanonique qui correspond à un foncteur représentable. En fait $\mathcal{M}_{g,3K}(k)$ est l'ensemble des k-points d'un schéma lisse défini sur $Spec(\mathbb{Z})$ et à fibres géométriquement connexes ; on peut alors former à partir de la courbe universelle $(\mathcal{C},\alpha) \to \mathcal{M}_{g,3K}$ un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau $\mathcal{F}_g$ de rang $2g$, pur de poids 0, tel que pour tout point $x = (C,\alpha)$ on ait

$$L(x,s) = L(C, s+1/2).$$

De plus pour ce faisceau on a $G^{\mathrm{geom}} = G^{\mathrm{arith}} = Sp(\mathbb{C})$ et on en déduit (14) et (15). Enfin pour passer de $\mathcal{M}_{g,3K}(k)$ à $\mathcal{M}_g(k)$ on note que la flèche ensembliste d'oubli des structures $(C,\alpha) \to C$ est à fibres de cardinal constant $GL_{5g-5}(k)$ en dehors du sous-ensemble constitué des courbes C ayant des automorphismes non-triviaux. On

achève la preuve en constatant que ce sous-ensemble est négligeable quand $|k|$ devient grand.

D'autre part l'uniformité suivant la caractéristique dans l'énoncé du Théorème 2.1 provient du fait que $\mathcal{M}_{g,3K}$ et $\mathcal{F}_g$ sont définis sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$ et qu'on dispose d'une version uniforme du Théorème d'équirépartition de Deligne. □

On renvoie à [KSa], Chap. 9 et 10, pour plus de détails et d'autres exemples de faisceaux qui réalisent les autres lois, par exemple le faisceau de Kloosterman $\mathcal{K}l_r$ associé aux sommes de Kloosterman en r variables vérifie les hypothèses H.1 et H.2 : si la caractéristique du corps n'est pas 2, $G^{\mathrm{geom}}(\mathcal{K}l_r)$ vaut Sp_r ou SL_r suivant que r est pair ou non et les lois obtenues sont celles de Sp ou de U ; en caractéristique 2, $G^{\mathrm{geom}}(\mathcal{K}l_r)$ vaut SO_r et les lois rencontrées sont celles de SO^+ ou SO^- suivant la parité de r (voir [Ka] pour une étude détaillée des faisceaux de Kloosterman).

Le point important à retenir de cette section est que la répartition des zéros des familles algébriques de fonctions L sur les corps finis a une interprétation très simple : les lois de répartition sont données par la nature du groupe de monodromie géométrique.

3. FAMILLES DE FONCTIONS L SUR LES CORPS DE NOMBRES

Dans cette section nous introduisons diverses familles (notées $\mathcal{F}$) de fonctions L attachées aux formes automorphes cuspidales de $GL_d(\mathbf{A}_{\mathbb{Q}})$. On rappelle que pour une normalisation convenable (si le caractère central est unitaire) une telle fonction $L(f,s)$ est une série de Dirichlet qui admet une factorisation en produit eulérien de facteurs locaux en chaque premier p

$$L(f,s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(n)}{n^s}=\prod_p L_p(f,s).$$

Pour chaque premier p, $L_p(f,s)^{-1}$ est un polynôme en p^{-s} de degré $\leqslant d$ (et de degré $=d$ à un nombre fini de p près) ; ce polynôme est de la forme

$$L_p(f,s)^{-1}=\prod_{i=1}^{d}(1-\alpha_{f,i}(p)p^{-s})$$

où les $\alpha_{f,i}(p)$ sont des complexes qu'on appelle les paramètres locaux de f en p. Pour la place à l'infini, on a également un facteur local de la forme

$$L_\infty(f,s)=\prod_{i=1}^{d}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\mu_{f,i}),\ \text{avec}\ \ \Gamma_{\mathbb{R}}(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\ \text{et}\ \Re e\mu_{f,i}>-1/2.$$

On sait alors [GoJ] que la fonction L complète $\Lambda(f,s)=L_\infty(f,s)L(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ (sauf si $L(f,s)$ est la fonction ζ) et qu'elle vérifie une

équation fonctionnelle de la forme

$$q_f^{s/2}\Lambda(f,s) = \varepsilon_f q_f^{(1-s)/2}\Lambda(\overline{f},1-s)(= \varepsilon_f q_f^{(1-s)/2}\overline{\Lambda(f,1-\overline{s})}) \tag{16}$$

où q_f est un entier (appelé le conducteur de f), $\overline{f}$ désigne la contragrédiente de f et ε_f est un nombre complexe de module 1 (le « signe » de l'équation fonctionnelle). Par la théorie de Rankin-Selberg [JS, JPPS], on sait également que le produit eulérien $L(f,s)$ converge absolument pour $\Re es > 1$ et donc que $\Lambda(f,s)$ a tous ces zéros dans la bande critique $0 \leqslant \Re es \leqslant 1$ (on sait même que ces inégalités sont strictes). Comme $\Lambda(f,s)$ est une fonction d'ordre 1, on a la factorisation en produit de Hadamard

$$\Lambda(f,s) = \Lambda(f,0)\exp(\frac{\Lambda'(f,0)}{\Lambda(f,0)}s)\prod_\rho(1-\frac{s}{\rho})e^{s/\rho}, \tag{17}$$

où ρ que l'on note $\rho = 1/2+i\gamma$ parcours l'ensemble des zéros de $\Lambda(f,s)$ ($|\Im m\gamma| < 1/2$). On suppose là aussi l' Hypothèse de Riemann Généralisée.

Hypothèse de Riemann Généralisée (HRG). — *Pour tout ρ, on a $\Im m\gamma = 0$.*

Un outil fondamental pour l'étude des zéros de $\Lambda(f,s)$ est la formule explicite de Riemann-Weil. On la donne sous la forme « localisée » suivante [ILS] (4.11), (4.13) (dans la formule (4.13) de [ILS], le $2\pi ix$ devrait être πix) :

Proposition 3.1. — *Soient $Q > 1$ et ϕ une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ à décroissance rapide dont la transformée de Fourier $\widehat{\phi}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)e^{ixy}dy$ est à support compact (en particulier ϕ se prolonge en une fonction lisse sur $\mathbb{C}$) ; on a, si $L(f,s) \neq \zeta(s)$*

$$\sum_\rho \phi(\frac{\gamma}{2\pi}\log Q) = \frac{A_f}{\log Q} - \sum_p\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{1}{p^{\nu/2}\log Q}\Big(\Lambda_f(p^\nu)\widehat{\phi}(\frac{\nu\log p}{\log Q}) + \overline{\Lambda_f}(p^\nu)\widehat{\phi}(-\frac{\nu\log p}{\log Q})\Big). \tag{18}$$

avec

$$A_f = \widehat{\phi}(0)\log q_f + A_f(\infty), \tag{19}$$

$$A_f(\infty) = \int_{\mathbb{R}}\phi(x)\sum_{i=1}^d(\frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}(\mu_{f,i}+\frac{1}{2}+\frac{2\pi ix}{\log Q}) + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}(\overline{\mu_{f,i}}+\frac{1}{2}-\frac{2\pi ix}{\log Q})dx,$$

et

$$\Lambda_f(p^\nu) = \log p\sum_{i=1}^d\alpha_{f,i}^\nu(p)$$

qui est le p^ν-ième coefficient de la série de Dirichlet $-\frac{L'(f,s)}{L(f,s)} = -\sum_p\frac{L'_p(f,s)}{L_p(f,s)}$. Si $L(f,s) = \zeta(s)$ on doit ajouter au membre de gauche le terme $\phi(\frac{1}{4\pi i}\log Q) + \phi(-\frac{1}{4\pi i}\log Q)$.

Preuve. — On pose $G(s) = \phi((s-\frac{1}{2})\frac{\log Q}{2\pi i})$ et on considère l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} G(s)\frac{\Lambda'(f,s)}{\Lambda(f,s)}ds$$

où l'intégration est le long de la droite verticale $\Re es = 2$; on décale le contour d'intégration à $\Re es = -1$ en passant des pôles en $s = \rho$ de résidu $G(\rho)$ (et éventuellement en $s = 0, 1$ de résidu $-G(0),\ -G(1)$), on fait le changement de variable $s \to 1-s$ et on utilise l'équation fonctionnelle

$$-\frac{\Lambda'(\overline{f}, 1-s)}{\Lambda(\overline{f}, 1-s)} = \log q_f + \frac{\Lambda'(f,s)}{\Lambda(f,s)}.$$ □

3.1. Répartition des zéros de grande hauteur

À propos de la répartition des zéros des fonctions $L(f,s)$, on peut considérer deux types de problèmes.

Le premier consiste à fixer f et à étudier la répartition des zéros non triviaux $\rho = 1/2 + i\gamma$ de $L(f,s)$ de grande hauteur, par exemple tels que $|\gamma| \approx T$ pour $T \to +\infty$. Dans ce cadre, étendant le résultat de Montgomery aux fonctions $L(f,s)$, Rudnick et Sarnak [RS] ont établi un résultat très général sur la répartition des écarts entre ces zéros : tout d'abord si on note $N(T,f)$ le nombre de zéros non triviaux de f de hauteur $\leqslant T$, on a quand $T \to +\infty$

$$N(f,T) = |\{\rho,\ L(f,\rho) = 0,\ |\Re\rho - 1/2| < 1/2,\ 0 \leqslant \Im\rho \leqslant T\}| = \frac{d}{2\pi}T\log T(1+o(1)),$$

de sorte que l'écart moyen entre les parties imaginaires de deux zéros consécutifs de cet ensemble est $\sim 2\pi/d\log T$. On peut former, à l'aide des γ, des répartitions analogues à celles construites dans les sections précédentes. Par exemple, fixons h une fonction sur $\mathbb{R}$ lisse et à décroissance rapide, on définit $R^h_{2,f}(T,\phi)$ la distribution de corrélation des paires normalisées

$$\phi \to R^h_{2,f}(T,\phi) = \frac{2\pi}{dT\log T}\sum_{i\neq j} h(\frac{\gamma_i}{T})h(\frac{\gamma_j}{T})\phi(\frac{m}{2\pi}\log T(\gamma_i - \gamma_j))$$

pour toute fonction lisse ϕ et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2. — On remarque que, même si les γ_i ne sont pas réels, cette somme est bien définie par les prolongements à $\mathbb{C}$ de h et ϕ obtenus par transformée de Fourier inverse. L'introduction du facteur $h(\frac{\gamma_i}{T})h(\frac{\gamma_j}{T})$ est une manière lisse de localiser la sommation sur les zéros de hauteur $\approx T$. On peut définir de manière analogue des distributions $R^h_{k,f}(T,\phi), \mu^h_{k,f}(T,\phi), W^h_{k,f}(T,\phi), \nu^h_{2,f}(T,\phi)$

Le résultat suivant est un analogue « lisse » du Théorème 0.1. Pour $L(f,s)$, on remarque que la première partie de l'énoncé n'utilise pas d'Hypothèse de Riemann :

THÉORÈME 3.3 (Rudnick-Sarnak [RS]). — *Soit f une forme automorphe cuspidale sur $GL_d(\mathbf{A}_{\mathbb{Q}})$ satisfaisant la condition technique*

$$\forall\, \nu \geqslant 2, \quad \sum_{\nu \geqslant 2} \sum_{p} \frac{|\Lambda_f(p^\nu)|^2}{p^\nu} < +\infty$$

(*cette condition est vérifiée pour $d \leqslant 3$ et est une conséquence faible de la conjecture de Ramanujan-Petersson en général*). *Soit h la transformée de Fourier d'une fonction lisse à support compact sur $\mathbb{R}$. Alors pour toute fonction ϕ lisse sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ est à support compact dans $]-1/d, 1/d[$, on a l'égalité*

$$\lim_{T \to +\infty} R^h_{2,f}(T, \phi) = \widehat{h^2}(0) \int_{Rr} \phi(x) r_2(\mathrm{GUE})(x) dx \tag{20}$$

avec $r_2(\mathrm{GUE})(x) = 1 - (\frac{\sin \pi x}{\pi x})^2$. De plus si l'on admet HRG pour $L(f,s)$ on peut remplacer h par la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$.

En fait leur résultat est valable pour les distributions de corrélation supérieures $R^h_{k,f}(T,\phi)$ avec une condition similaire sur le support de la transformée de Fourier de ϕ. Grossièrement la méthode comporte une première étape combinatoire qui dans le cas $k = 2$ revient simplement à évaluer le membre de gauche sans la contrainte $i \neq j$, puis à soustraire la diagonale qui vaut essentiellement $\phi(0)\widehat{h^2}(0)$. Dans la double somme, on sépare les variables dans le facteur $\phi(\frac{d}{2\pi} \log T(\gamma_i - \gamma_j))$ par transformée de Fourier, et on applique aux deux sommes résultantes la formule explicite pour se ramener à une double somme sur les nombres premiers p, p'. On montre ensuite que sous la contrainte $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \subset]-1, 1[$ seule la diagonale $p = p'$ fournit un terme principal provenant du pôle en 1 de la dérivée logarithmique $L'(f \times f, s)/L(f \times f, s)$, de la convolution de Rankin-Selberg de f avec elle même.

3.2. Répartition des « petits » zéros dans les familles

Le problème dual du précédent consiste à étudier les zéros de $L(f,s)$ au voisinage des *points critiques*[3] quand on fait varier certains des paramètres q_f ou $\mu_{f,i}$. Ici on se restreint au cas où les $\mu_{f,i}$ sont réels et $\geqslant 0$; il n'y a alors qu'un seul point critique $1/2$ (voir [P] pour l'étude des zéros des fonctions L de formes de Maass et de leur convolution de Rankin-Selberg pour le cas de points critiques non-réels). Dans ce cas on peut montrer sous HRG que le nombre de zéros de $L(f,s)$ à distance $\leqslant 1$ de $1/2$ est

$$N(f,1) = \frac{\log(q_f \prod_i (1 + \mu_{f,i}))}{\pi}(1 + o(1)),$$

quand $Q_f := q_f \prod_i (1 + \mu_{f,i}) \to +\infty$ (on appellera Q_f le conducteur analytique de $L(f,s)$) ; ainsi l'espacement moyen entre deux zéros est de l'ordre de $2\pi/\log(Q_f)$. On

[3] Dans cet exposé, on appellera point critique l'intersection de $\Re es = 1/2$ avec les droites horizontales portant les pôles de $L_\infty(f,s) = \prod_{i=1}^d \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu_{f,i})$; autrement dit les droites $\Im ms = -\Im m \mu_{f,i} \quad (i = 1, \ldots, d)$.

souhaite étudier la répartition locale des zéros dans un $1/\log Q_f$ voisinage du point critique $1/2$ et pour cela on peut former des distributions $R_{k,f}, W_{k,f}$ analogues à celles construites précédemment. La plus simple est la distribution de répartition W que nous considérerons dorénavant

$$W(f,\phi) := \sum_{\gamma_f} \phi(\frac{\log Q_f}{2\pi}\gamma_f)$$

pour ϕ lisse et dont la transformée de Fourier est à support compact. Notons que pour ϕ fixée la somme précédente n'a essentiellement qu'un nombre borné de termes quand $Q_f \to +\infty$; on est donc conduit à faire la moyenne de cette distribution sur une famille $\mathcal{F}$. Plus précisément, on considérera des familles $\mathcal{F} = \bigcup_{Q>0} \mathcal{F}_Q$ qui sont réunions de sous-familles $\mathcal{F}_Q$ indexées par des $Q > 0$ telles que, pour $f \in \mathcal{F}_Q$, on a $Q_f \approx Q$. Un paramètre important des familles $\mathcal{F}$ considérées est

$$\kappa := \kappa(\mathcal{F}) = \lim_{Q\to+\infty} \frac{\log|\mathcal{F}_Q|}{\log Q},$$

il mesure la taille de $\mathcal{F}_Q$ relativement au conducteur, et plus ce paramètre est grand plus le problème est facile.

On définit alors

$$W(\mathcal{F}_Q,\phi) = \frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_{f\in\mathcal{F}_Q} W_Q(f,\phi)$$

où $W_Q(f,\phi)$ est défini comme $W(f,\phi)$ en remplaçant Q_f par Q. On étudie alors le comportement de $W(\mathcal{F}_Q,\phi)$ quand $Q \to +\infty$.

On donnera ci-dessous quelques exemples de familles considérées, les résultats que l'on obtient sont tous de la forme :

Énoncé de Densité. — *Il existe une constante $v > 0$ telle que, pour toute fonction ϕ lisse à décroissance rapide et dont la transformée de Fourier est à support compact dans l'intervalle $]-v, v[$, on a*

$$\lim_{Q\to+\infty} W(\mathcal{F}_Q,\phi) = W(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}} W(G)(x)\phi(x)dx \tag{21}$$

où G représente l'une des cinq familles U, Sp, O, SO^+ ou SO^-.

Un fait remarquable, qui montre la nécessité de considérer le point critique, est que si l'on considère la même question en un point non critique, on ne trouve que la distribution limite des groupes unitaire $W(U)$.

Enfin on fait des conjectures de la forme

Hypothèse de Densité. — *Le paramètre v peut être pris arbitrairement grand.*

Remarque 3.4. — Notons que pour l'énoncé de densité précédent la valeur $v = 1$ est critique. Pour le voir, on note que (par Parseval) $\int_{\mathbb{R}} W(G)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{W(G)}(x)\widehat{\phi}(x)dx$, et pour $G = Sp, O, SO^+, SO^-$, $\widehat{W(G)}(x)$ admet une singularité en $x = \pm 1$ (voir (11)). Dans la pratique cette singularité se traduira par l'apparition d'un autre terme principal qui n'était pas présent avant de franchir ce cap. D'autre part, on voit que pour $G = O, SO^+, SO^-$, les distributions $W(G, \phi)$ coïncident pour les fonctions test ϕ dont la transformée de Fourier a son support contenu dans l'intervalle $]-1, 1[$; ainsi pour pouvoir faire la distinction parmi l'un des types orthogonaux, on doit utiliser les transformées de Fourier de support dépassant 1. Ainsi quand on parvient à obtenir l'énoncé type pour $v > 1$, on dira alors que le type de symétrie de $\mathcal{F}$ est U, Sp, O, SO^+ ou SO^- suivant le cas.

Bien entendu plus la valeur de v obtenue dans un énoncé de densité ci-dessus est grande, meilleur est le résultat; mais en pratique la meilleure manière d'évaluer la qualité d'un tel énoncé est de considérer plutôt le quotient v/κ.

Parmi les familles qui ont été étudiées on trouve

• $\mathcal{F}_q^{\pm}$ la famille des caractères de Dirichlet primitifs de module q pairs (resp. impairs). Pour χ un caractère, la fonction $L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$ est de degré 1. De plus, on a $\mu_\chi = 0$ ou 1 suivant la parité de χ. On prend $Q = q$ et $\kappa = 1$. Sous HRG, on obtient la formule (21) pour tout $v < 2$ avec $G = U$.

Les autres exemples qui suivent sont associés à des formes autoduales :

• $\mathcal{F}_D^{\pm}$ est l'ensemble des caractères primitifs quadratiques de module $\leqslant D$ pairs (resp. impairs) : le signe de l'équation fonctionnelle est toujours 1 et on prend $Q = D$, et on a $\kappa = 1$. Sous HGR, on obtient la formule (21) avec $G = Sp$ pour tout $v < 2$ [OS].

L'exemple suivant est l'un de ceux traités par Iwaniec, Luo et Sarnak dans [ILS]. Il réalise les autres types de symétrie (O, SO^+, SO^-) considérés dans cet exposé.

• Pour $k \geqslant 2$ pair et $q \geqslant 1$, on note $S_k^p(q)$ l'ensemble des formes modulaires holomorphes primitives pour le groupe $\Gamma_0(q) \subset SL_2(\mathbb{Z})$. La fonction L d'une telle forme est définie à partir de son développement de Fourier à l'infini :

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz), \text{ tel que } L(f, s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon_q(p)}{p^{2s}})^{-1},$$

ε_q désignant le caractère trivial modulo q. Les paramètres à l'infini sont $\mu_1 = (k-1)/2$, $\mu_2 = (k+1)/2$ et $q_f = q$, ainsi $Q_f \approx qk^2$. Le signe de l'équation fonctionnelle vaut $\varepsilon_f = i^k w_f$ où w_f est la valeur propre de l'involution d'Atkin–Lehner $W_q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Pour tout q sans facteur carré et $K \geqslant 2$, on note $S^{\pm}(K, q)$ l'ensemble des formes primitives f de poids $k \in [K, 2K[$ et de niveau q telles que $\varepsilon_f = \pm 1$. Pour cette famille $Q \approx qK^2$ et on note $S^p(K, q)$ la réunion des deux familles. On a $|S^{\pm}(K, q)| \approx K^2\varphi(q)$ de sorte que $\kappa \sim 1$

THÉORÈME 3.5 ([ILS]). — *On suppose l'hypothèse HRG vraie pour les fonctions $L(\chi, s)$ des caractères de Dirichlet, les fonctions $L(f, s)$ et les fonctions L des carrés*

symétriques $L(\mathrm{sym}^2 f, s)$; alors quand $qK \to +\infty$, q parcourant les entiers sans facteur carré, on a l'égalité (21) avec $v < 2$ pour les familles $S^p(K,q)$, $S^+(K,q)$ et $S^-(K,q)$ avec $G = O,\ SO^+,\ SO^-$ respectivement.

Remarque 3.6. — Certaines hypothèses de Riemann sont moins importantes que d'autres : en utilisant la technique décrite par exemple dans [KM1] Sect. 3., on peut supprimer les HGR pour les $L(f,s)$ et les $L(\mathrm{sym}^2 f, s)$ au prix d'une légère hypothèse supplémentaire sur q : *il existe $\varepsilon > 0$ tel que q n'a pas de facteur premier $\leqslant q^\varepsilon$*. Comme le remarquent les auteurs de [ILS], l'HRG pour les fonctions L de caractères de Dirichlet est apparemment nécessaire « pour briser la parité », ie. pour établir le résultat pour les sous-familles $S^+(K,q)$ et $S^-(K,q)$ avec $v > 1$ et ainsi séparer les deux types de symétrie. En revanche si l'on ne considère que l'ensemble $S^*(K,q)$ cette HGR peut être supprimée au moins si q est fixé. Enfin pour $v < 1$ l'énoncé précédent est complètement inconditionnel : il permet au moins de distinguer les types orthogonaux des types unitaires et symplectiques.

E. Royer a établi une variante du Théorème 3.5 : il considère pour k fixé et q sans facteur carré, n'ayant pas de petits facteurs premiers, la même distribution $W(\mathcal{F}, \phi)$ restreinte aux sous-familles de $S_k^p(q)$ dont on a imposé préalablement les valeurs propres des involutions d'Atkin–Lehner W_p pour tout p premier divisant q. Son résultat est que sous les HRG faites dans le Théorème 3.5, l'énoncé de densité est vérifié pour $v = 2$ avec les types de symétrie SO^+ et SO^- suivant le signe de l'équation fonctionnelle $i^k w_f$ qui est fixe dans chacune de ces sous-familles.

On peut aussi considérer des familles telles que $\kappa < 1$.

• De telles familles sont obtenues en prenant l'ensemble des formes modulaires primitives $S_k^p(q)$ avec k fixé et en associant à f, $L(\mathrm{sym}^2 f, s)$, la fonction L de son carré symétrique de f, ou bien $L(f \otimes g, s)$, la fonction L de la convolution de Rankin-Selberg de f avec une forme primitive autoduale fixée g de niveau premier à q. Pour ces familles on a $\kappa = 1/2$. On obtient dans le premier cas le type de symétrie Sp (cf [ILS], Thm. 1.4 et Remarks B et C) dans le second, soit Sp, soit SO^- suivant le signe de l'équation fonctionnelle (qui ne dépend que de q et de g).

• Un autre exemple de ce type a été considéré récemment par Fouvry et Iwaniec [FI] : soit K un corps quadratique imaginaire de discriminant $-D$, et soit $\mathcal{F}_D = \{\psi\}$ la famille des caractères du groupe des classes d'idéaux de O_K, les fonctions L définies par $L(\psi, s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset O_K} \psi(\mathfrak{a})$ sont de degré 2 avec $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1$ et $q_\psi = D$. Sous HRG, pour les caractères de Dirichlet, les auteurs montrent l'égalité (21) pour $v = 1$ et $G = Sp$; ils montrent également qu'elle est vraie pour presque tout D, pourvu que $v < 4/3$. Pour cette famille $\log |\mathcal{F}_D| = \log h_K \sim 1/2 \log D$ et donc $\kappa = 1/2$.

Il n'est pas raisonnable d'essayer de décrire avec précision la preuve des résultats de [ILS]. Ceci dit, elle suit le schéma général suivant :

– La première étape consiste à transformer les sommes sur les zéros $W(f,\phi)$ en somme sur les nombres premiers grâce aux formules explicites (18) ; intervertissant les sommations, on est ramené à des moyennes de la forme

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_{f\in\mathcal{F}_Q}\Lambda_f(p^\nu),\ p^\nu\leqslant Q^v. \tag{22}$$

– On analyse les moyennes (22) à l'aide d'une formule de « traces », propre à chaque famille[(4)], qui en général donne une expression plus « accessible » de la moyenne

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_{f\in\mathcal{F}_Q}\lambda_f(n),$$

(d'autant plus « accessible » que n est petit) : pour les caractères de Dirichlet les relations d'orthogonalités jouent ce rôle ; pour les familles des formes modulaires on utilise la formule des traces de Selberg ou la formule de Petersson (qui est en pratique plus efficace) :

PROPOSITION 3.7 (Formule de Petersson). — *Soit $\mathcal{B}_k(q)$ une base orthonormée de $S_k(q)$, on a*

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}}\sum_{f\in\mathcal{B}}\lambda_f(m)\lambda_f(n)=\delta_{m,n}-2\pi i^k\sum_{c\geqslant 1}\frac{S(m,n;cq)}{cq}J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{cq})$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker et,

$$S(m,n;c)=\sum_{\substack{a \bmod c\\(a,c)=1}}e\Big(\frac{ma+n\overline{a}}{c}\Big)$$

est la somme de Kloosterman, et $J_{k-1}(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre $k-1$.

Quelques contorsions sont nécessaires pour passer d'une base orthonormée $\mathcal{B}_k(q)$ à l'ensemble des formes primitives $S_k^p(q)$ (il s'agit d'éliminer les formes anciennes ce qui est fait dans [ILS] par des arguments de crible qui sont simplifiés par le fait que q est sans facteur carré) ; appliquant la formule de Petersson, on trouve d'abord des termes principaux faciles à estimer (les termes dits diagonaux) qui fournissent une contribution principale. Les termes non-diagonaux se ramènent essentiellement à des sommes de la forme

$$T_1=\sum_{k\in[K,2K[}\sum_c\frac{1}{cq}\sum_p\frac{\log p}{p^{1/2}\log R}\widehat{\phi}(\frac{\log p}{\log R})S(p,1;cq)i^kJ_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{p}}{cq})$$

et

$$T_2^{\pm}=\pm\sum_{k\in[K,2K[}\sum_c\frac{1}{cq}\sum_p\frac{\log p}{p^{1/2}\log R}\widehat{\phi}(\frac{\log p}{\log R})\sqrt{q}S(pq,1;cq)J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{pq}}{cq})$$

(4) Pour les fonctions L sur les corps finis, ce rôle est joué par la formule des traces de Lefschetz qui est implicite dans le Théorème d'équirépartition 2.3.

(quand q vaut 1 ou est premier on obtient exactement ces termes à des quantités négligeables près ; le cas plus général où q est sans facteur carré est traité dans [ILS] au prix de grandes difficultés techniques et conduit à des sommes de ce type). On note que le second terme $T_2^{\pm}$ n'est présent que si l'on désire étudier les sous-familles $S^{\pm}(K,q)$. La majoration de Weil pour les sommes de Kloosterman montre que $T_1, T_2^{\pm}$ sont négligeables devant les termes diagonaux tant que $v < 1$. Quand $v > 1$ une analyse plus fine est nécessaire. On trouve que T_1 reste négligeable dans la zone $1 \leqslant v < 2$; le second terme $T_2^{\pm}$ en revanche n'est plus négligeable dans cette zone et fournit un nouveau terme principal (un terme hors-diagonal) qui est responsable de la discontinuité en 1 des densités $W\widehat{(SO^+)}(x)$ et $W\widehat{(SO^-)}(x)$ (en revanche $W\widehat{(O)}(x)$ n'a pas de discontinuité en 1). Heuristiquement, il n'est pas difficile de voir la différence de comportement de ces deux termes :

– Si K est fixé et q varie (rappelons qu'alors $Q \approx q$), le comportement de la fonction de Bessel $J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{p}}{cq})$ et la condition $p < Q^v < q^2$ imposent à c de valoir essentiellement 1, le premier terme vaut donc essentiellement

$$T_1 \approx \sum_p \frac{\log p}{p^{1/2}\log R}\widehat{\phi}(\frac{\log p}{\log R})J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{p}}{cq})S(p,1;q).$$

On montre que les sommes de Kloosterman $S(p,1;q)$ sommées sur les p « oscillent » et donc que T_1 est négligeable (pour le voir, il suffit de sommer les nombres premiers p sur les classes de congruences modulo q, ce qui requiert HRG pour les caractères de Dirichlet). Dans T_2, la somme de Kloosterman $S(p,1;q)$ est remplacée par $\sqrt{q}S(pq,1;q) = \sqrt{q}S(0,1;q) = \sqrt{q}\mu(q)$ qui est constante ; il n'y a ici pas d'oscillation possible et on trouve un nouveau terme principal.

– Quand q est fixé (disons $q = 1$) et que l'on somme sur les poids $k \in [K, 2K[$ pairs ($Q \approx K^2$), la différence de comportement entre T_1 et $T_2^{\pm}$ est expliquée par la différence entre les deux formules sommatoires suivantes pour les séries de Neumann :

LEMME 3.8 ([ILS] Cor. 8.2). — *Soit h lisse à support compact dans $\mathbb{R}_{>0}$, on a*

$$2\sum_{k\equiv 0(2)} i^k h(\frac{k-1}{K})J_{k-1}(x) = -\frac{K}{\sqrt{x}}\Im m(\zeta_8 e^{ix}\widetilde{h}(\frac{K^2}{2x})) + O(x/K^4), \tag{23}$$

$$2\sum_{k\equiv 0(2)} h(\frac{k-1}{K})J_{k-1}(x) = h(\frac{x}{K}) + O(\frac{x}{K^3}),$$

avec

$$\widetilde{h}(x) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \frac{h(\sqrt{u})}{\sqrt{2\pi u}} e^{iux} du$$

La première formule sommatoire correspond essentiellement à T_1 : puisque h est lisse et à support compact, le terme oscillant principal

$$-\frac{K}{\sqrt{x}}\Im m(\zeta_8 e^{ix}\widetilde{h}(\frac{K^2}{2x})) \tag{24}$$

est très petit tant que $x \ll K^2$, et dans notre cas cela se traduit par la condition $\sqrt{p} < K^2 : v < 2$ (incidemment cela indique que $v = 2$ est une autre barrière naturelle au-delà de laquelle un nouveau phénomène devrait apparaître.)

La deuxième formule sommatoire correspond à $T_2^{\pm}$: on a cette fois-ci un terme principal $h(x/K)$ qui fait que $T_2^{\pm}$ s'écrit comme somme d'un terme principal et d'un terme d'erreur qui est bien contrôlé dès que $v < 3$.

3.3. Au-delà de 2κ, l'Hypothèse de Riemann

La preuve du Théorème 0.4 vient du fait remarqué par Iwaniec, Luo et Sarnak que la valeur $v = 2\kappa$ est une valeur critique : supposons donnée une famille $\mathcal{F} = \cup_{Q>0}\mathcal{F}_Q$ et supposons que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, les zéros de $L(f,s)$ sont tous réels ou situés sur la droite $\Re es = 1/2$. On considère (une version lisse de) la fonction test $\phi_v(x) = (\frac{\sin \pi v x}{\pi v x})^2$; sa transformée de Fourier $\widehat{\phi}_v(x) = \max(0, \frac{1}{v}(1 - \frac{|x|}{v}))$ est à support dans $[-v, v]$. Alors l'égalité (21) donne

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|} \sum_{f \in \mathcal{F}_Q} \sum_{\gamma_f} (\frac{\sin(v \log Q\gamma_f/2)}{(v \log Q\gamma_f/2)})^2 = W(G, \phi_v)(1 + o(1)).$$

Sous l'hypothèse que γ_f est réel ou imaginaire pur, chaque terme du membre de gauche est positif ou nul. On a donc pour chaque $f \in \mathcal{F}_Q$ la majoration

$$(\frac{\sin(v \log Q\gamma_f/2)}{(v \log Q\gamma_f/2)})^2 \ll |\mathcal{F}_Q| \ll_\varepsilon Q^{(\kappa+\varepsilon)v}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Si $\rho_f = 1/2 + i\gamma_f$ est réel cela implique que

$$\rho_f \leqslant 1/2 + \kappa/v + \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, d'ou l'intérêt de pouvoir prendre $v > 2\kappa$.

Nous pouvons passer à la preuve du Théorème 0.4. Quand q est fixé ($q = 1$) et $K \to +\infty$, on peut montrer que (21) est valide *sans aucune hypothèse supplémentaire* pour la famille $S^p(K, 1)$ pour $G = O$ et pour tout $v < 2 = 2\kappa$. Motivés par le franchissement de cette barrière, les auteurs de [ILS] ont montré que l'hypothèse S avec $\alpha < 3/4$ suffit pour pouvoir prendre $v > 2$. Le sel de leur preuve se trouve dans le terme principal (24) de (23) : ce terme est non-nul dès que $v > 2$ mais puisque $\widehat{W(G)}(x)$ n'a pas de singularité en 2, le terme T_1 doit rester négligeable, c'est-à-dire que le terme provenant de (24) devrait osciller. C'est précisément ce qu'assure l'hypothèse S pour $\alpha < 3/4$. L'appendice C de [ILS] contient une discussion critique et détaillée sur la validité de l'Hypothèse S (rappelons que HRG pour les caractères de Dirichlet ne fournit apparemment cette hypothèse que pour $\alpha = 3/4$). Il y est notamment expliqué de quelle manière elle découle d'une Hypothèse (notée A) très naturelle (et certainement très difficile à démontrer) sur le caractère aléatoire des oscillations de la fonction de Möbius μ. Ils montrent également qu'une variante très proche de l'hypothèse S devient fausse si on croit à la variante de l'hypothèse A correspondante.

3.4. Application au rang analytique

Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $r_f = \mathrm{ord}_{s=1/2} L(f,s)$ le rang analytique de f (cette terminologie est motivée par la conjecture de Birch–Swinnerton-Dyer) et on souhaite analyser le rang analytique moyen

$$r(\mathcal{F}_Q) = \frac{1}{|\mathcal{F}_Q|} \sum_{f \in \mathcal{F}_Q} r_f = \sum_{r=0}^{+\infty} r p(\mathcal{F}_Q, r),$$

avec

$$p(\mathcal{F}_Q, r) = \frac{|f \in \mathcal{F}_Q,\ r_f = r|}{|\mathcal{F}_Q|} \tag{25}$$

est la proportion des fonctions L de $\mathcal{F}_Q$ de rang analytique égal à r. Par l'analogie entre les fonctions L et les polynômes de matrices aléatoires, on est amené à conjecturer

Hypothèse du rang. — *On a* $\lim_{Q\to+\infty} r(\mathcal{F}_Q) = 1/2,\ 1$ *ou* 0 *suivant que* $\mathcal{F}$ *a pour type de symétrie* O, SO^- *ou* U, Sp, SO^+. *Plus précisément* $\lim_{Q\to+\infty} p(\mathcal{F}_Q, r) = 0$ *pour tout* $r \geqslant 2$; $\lim_{Q\to+\infty} p(\mathcal{F}_Q, 0) = 1 - \lim_{Q\to+\infty} p(\mathcal{F}_Q, 1) = 1/2, 0$ *ou* 1 *suivant que* $\mathcal{F}$ *a pour type de symétrie* O, SO^- *ou* U, Sp, SO^+.

Cette conjecture très naturelle regroupe toute les conjectures connues sur le rang moyen des fonctions L, notamment celles de Brumer [Br], Goldfeld et Murty [Mu]. D'autre part il n'est pas difficile de voir que l'Hypothèse de Densité l'implique, si l'on admet HRG pour les fonctions $L(f,s)$ de $\mathcal{F}$ (il suffit de choisir la fonction $\phi = \phi_v$ ci-dessus). D'autre part tout énoncé de densité de type (21) fournit des résultats partiels en direction de l'hypothèse du rang : une majoration de $r(\mathcal{F}_Q)$ et des minorations de $p(\mathcal{F}_Q, 0)$ et (ou éventuellement de $p(\mathcal{F}_Q, 1)$ si $G = SO^-$). Ainsi dans [ILS], les résultats (avec $v = 2$) du Théorème 3.5 fournissent pour la famille $S_2^p(q)$, la majoration $r(S_2^p(q)) \leqslant 1 + o(1)$; d'autre part les auteurs montrent qu'en exploitant la différence de répartition entre $S_2^+(q)$ et $S_2^-(q)$ on peut améliorer cette borne et passer sous la barrière 1 (toujours avec $v = 2$) :

$$r(S_2^p(q)) \leqslant 99/100 + o(1). \tag{26}$$

Cette majoration jointe à la conjecture de Birch–Swinnerton-Dyer donne une majoration du rang de la partie nouvelle de la jacobienne de la courbe modulaire $X_0(q)$.

3.5. Les moments des fonctions L

Le modèle des matrices aléatoires jette un nouvel éclairage sur un thème classique de la théorie analytique des nombres : l'évaluation des moments des fonctions L au point critique. Les moments sont définis (pour $1/2$ point critique) par

$$M_k(\mathcal{F}_Q) = \frac{1}{|\mathcal{F}_Q|} \sum_f L(f, 1/2)^k$$

si tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont autoduaux, sinon on remplace $L(f,1/2)^k$ par $|L(f,1/2)|^k$ dans l'expression précédente. Si $\mathcal{F}$ a pour type de symétrie G, on modélise $L(f,s)$ par une matrice alétoire de rang $N = [\frac{\log Q}{2\pi}]$, les calculs de la section1.3, ont conduit Conrey–Farmer [CF] et Keating–Snaith [KSn1, KSn2] à la conjecture

HYPOTHÈSE DES MOMENTS. — *Si $\mathcal{F}$ a pour type de symétrie G, on a*

$$\lim_{Q\to+\infty} M_k(\mathcal{F}_Q) = a_k(\mathcal{F}) g_G(k) (\frac{\log Q}{2\pi})^{\gamma_G(k)}$$

où $g_G(k)$ est la constante explicitée au théorème 1.3, *$\gamma_G(k)$ est l'exposant de N correspondant*

$$\gamma_U(k) = (k/2)^2, \quad \gamma_{Sp}(k) = k(k+1)/2,$$

$$\gamma_O(k) = \gamma_{SO^+}(k) = k(k-1)/2, \quad \gamma_{SO^-}(k) = k(k+1)/2,$$

et $a_k(\mathcal{F}_Q)$ est une constante non-nulle de nature arithmétique (donnée par un produit Eulérien) dépendant de la famille et que l'on peut calculer explicitement pour chaque cas.

Remarque 3.9. — Pour cette hypothèse, la seule quantité qui n'est pas explicitement définie est la constante $a_k(\mathcal{F})$. Elle peut être calculée explicitement pour chaque famille étudiée et pour chaque k et on trouve à chaque fois un produit eulérien absoluement convergent, mais on ne dispose pas pour l'instant d'une définition intrisèque de cette quantité. Il est possible qu'elle soit liée aux moments de la variable aléatoire (cf. (17))

$$f \to \Lambda(f,0)\exp(\frac{\Lambda'(f,0)}{\Lambda(f,0)}\frac{1}{2}) = \varepsilon_f \Lambda(\overline{f},1)\exp(-\frac{\Lambda'(\overline{f},1)}{\Lambda(\overline{f},1)}\frac{1}{2})$$

qui peuvent tous être évalués par des techniques liées au grand crible.

Il est assez remarquable que cette conjecture n'a toujours pas encore été prise en défaut. Cependant très peu de moments d'ordre élevé sont connus à ce jour et aucun d'ordre $> 4\kappa$: on peut citer les moments de

$$\{\zeta(1/2+it)\}_{t\leqslant T},\ k=2,4,\ G=U \text{ (Ingham)},$$

$$\{L(\chi,1/2)\}_{\chi(q)},\ \chi \text{ primitif complexe},\ k=2,4,\ G=U \text{ [HB]},$$

$$\{L(\chi,1/2)\}_{\chi(D)}, \chi \text{ primitif réel } k=1,2,3,\ G=Sp,\ \text{[So]}$$

$$\{L(f,1/2)\}_{f\in S_k^p(q)},\ q \text{ premier},\ k=1,2,3,4,\ G=SO^+,\ \text{[KMV3]},$$

$$\{L(f\otimes\chi,1/2)\}_{f\in S_k^p(q)},\ q \text{ premier}, \chi \text{ un caractère complexe fixé},\ k=2,4\ G=U\ \text{[MV]},$$

$$\{L(\psi,1/2)\}_{\psi\in\widehat{h_K}},\ K=\mathbb{Q}(\sqrt{-D}),\ k=1,2\ G=Sp,\ \text{[DFI3]}.$$

L'évaluation des moments est assez similaire à l'évaluation des distributions de densité $W(\mathcal{F}_Q,\phi)$.

– L'analogue de la formule explicite (Prop. 3.1) est donné par une formule représentant $L(f,1/2)$ sous la forme d'une série rapidement convergente : par exemple pour f autoduale, on a

$$L(f,1/2)=(1+\varepsilon_f)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(n)}{n^{1/2}}V(n)$$

avec

$$V(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{L_\infty(f,s+1/2)}{L_\infty(f,1/2)}(y/q_f^{1/2})^{-s}\frac{ds}{s}.$$

Cette fonction est à décroissance rapide dès que $y\gg Q_f^{1/2}\approx Q^{1/2}$. Plus généralement on voit que $L(f,1/2)^k$ peut se représenter comme une série rapidement convergente de la forme

$$(1+\varepsilon_f)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_{f_k}(n)}{n^{1/2}}V_k(n)$$

où

$$V(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\Big(\frac{L_\infty(f,s+1/2)}{L_\infty(f,1/2)}\Big)^k(y/q_f^{k/2})^{-s}\frac{ds}{s}$$

est à décroissance rapide pour $y\gg Q_f^{k/2}\approx Q^{k/2}$ et

$$\lambda_{f_k}(n)=\sum_{n_1\cdots n_k=n}\lambda_f(n_1)\cdots\lambda_f(n_k)$$

est la convolution de λ_f avec elle-même k fois (dans la pratique cette fonction arithmétique multiplicative vaut « essentiellement » $\lambda_f(n)\tau_k(n)$ où $\tau_k(n)=\sum_{n_1\cdots n_k=n}1$ compte le nombre de représentations de n en produit de k entiers).

– Ensuite les moyennes

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_f\lambda_{f_k}(n),\ n\ll Q^{k/2+\varepsilon}$$

analogues aux moyennes (22) sont évaluées l'aide d'une formule de traces (après des arguments combinatoires qui peuvent être compliqués si $d>1$) ainsi le paramètre v dans section précédente correspond au paramètre $k/2$. Comme dans la section précédente des termes non-diagonaux apparaissent quand k augmente, ainsi les premiers termes non-diagonaux apparaissent pour $k/2=\kappa$ et le moment d'ordre $k=4\kappa$ voit apparaître des termes hors diagonaux supplémentaires fort délicats à estimer (cf [DFI3], [KMV2] par exemple). La grande différence avec la section précédente est que l'évaluation des termes non-diagonaux supplémentaires est possible inconditionnellement (sans avoir recours à HGR), la raison étant que la fonction arithmétique $\tau_k(n)$ se contrôle bien mieux que la fonction caractéristique des nombres premiers.

L'Hypothèse des moments est un outil très puissant pour prédire le comportement en moyenne des fonctions L. En effet le Théorème de la section 1.3 permet d'étudier le comportement des variables aléatoires $A\to\frac{\log|\det(1-A)|}{\log N}$, $A\to\det(1-A)$ quand

$N \to +\infty$ (notons que la deuxième variable n'admet pas de distribution limite). De là, on peut extrapoler aux valeurs critiques de fonctions L avec l'identification $N = \log Q/2\pi$ et faire des conjectures très fines sur ces valeurs critiques. Par exemple utilisant ce modèle Conrey, Keating, Rubinstein et Snaith font des conjectures très précises sur la fréquence *d'annulation* en $1/2$ des twists quadratiques de la fonction L d'une courbe elliptique. Si E est une courbe elliptique, pour tout p premier on note $E \otimes \chi_p$ le twist de E par p, alors la famille $\{L(E \otimes \chi_p, s)\}_{p \leqslant X}$ est de type O et se scinde en deux sous-classes de type SO^+ et SO^+ indexées par les p tels que $\varepsilon_{E\otimes\chi_p} = 1$, l'hypothèse du rang donne ici que

$$|\{p \leqslant X,\ \varepsilon_{E\otimes\chi_p} = 1,\ L(E \otimes \chi_p, 1/2) \neq 0\}| = \frac{1}{2}|\{p \leqslant X\ \varepsilon_{E\otimes\chi_p} = 1\}|(1 + o(1)) \simeq \frac{1}{2}|\{p \leqslant X\},\ X \to +\infty.$$

La conjecture suivante raffine l'hypothèse en prédisant la taille de l'ensemble exceptionnel complémentaire

CONJECTURE 3.10 (CKRS). — *Soit $E/\mathbb{Q}$ une courbe elliptique ; il existe une constante $c_E > 0$ telle que*

$$|\{p \leqslant X,\ \varepsilon_{E\otimes\chi_p} = 1,\ L(E \otimes \chi_p, 1/2) = 0\}| \simeq c_E X^{3/4} (\log X)^{-5/8}.$$

Leur heuristique consiste à combiner le modèle des matrices aléatoires et la formule de Waldspurger sur la correspondance de Shimura : cette formule implique que $p \to \sqrt{p} L(E \otimes \chi_p, 1/2)$ prend des valeurs entières (à une constante multiplicative fixée près).

4. ÉPILOGUE : MÉTHODES INCONDITIONNELLES

Au cours de cet exposé nous avons évoqué un grand nombre de conjectures et autres hypothèses toutes certainement très difficiles. Dans cette dernière section nous voulons rappeler que des méthodes existent pour montrer inconditionellement certaines conséquences de ces hypothèses.

Ainsi, le problème d'évaluer les moments des fonctions L (qui est très antérieur à l'arrivée des matrices aléatoires en théorie des nombres) est lié à tout un ensemble de techniques permettant de trouver des substituts efficaces aux hypothèses de Riemann.

Ces méthodes sont liées à l'évaluation des moments « partiels »

$$M(\mathcal{F}, \boldsymbol{x}, s) := \frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_f L(f, s) M(f, s)$$

ou

$$M_k(\mathcal{F}, \boldsymbol{x}, s) := \frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_f |L(f, s)|^k |M(f, s)|^2 \tag{27}$$

où s est dans la bande critique, $\boldsymbol{x} = (x_l)_{l\leqslant L} \in \mathbb{C}^L$ et $M(f,s)$ est le polynôme de Dirichlet

$$M(f,s) = \sum_{\ell\leqslant L} x_\ell \frac{\lambda_f(\ell)}{\ell^s},\ x_\ell \in \mathbb{C}. \tag{28}$$

En pratique on choisira les coefficients x_l de manière appropriée suivant le type d'application qu'on a en vue. Un paramètre important du polynôme est sa longueur L et on la mesure en général à travers le coefficient $\Delta = \log L/\log Q$ (la qualité des résultats obtenus en est une fonction croissante).

Il y a essentiellement deux types d'utilisation de ce polynôme que nous allons évoquer à travers des exemples : la *mollification* et l'*amplification*

4.1. La mollification : Sur les zéros réels des fonctions L

La mollification est une technique inventée par Bohr et Landau au début du siècle dernier. Ils l'utilisèrent pour étudier la répartition des zéros de la fonction ζ sur la droite critique. On pourra se reporter à l'exposé de Bombieri [B] de ce séminaire pour une description détaillée des techniques de mollification dans le contexte de ζ.

Une première application de la méthode de mollification est l'obtention de minorations non triviales pour la proportion $p(\mathcal{F}_Q, 0)$ des fonctions L de $\mathcal{F}_Q$ qui ne s'annulent pas au point critique $1/2$ (cf (25)).

Le principe général est le suivant : on part de la minoration (pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^L$ non nul) et Q assez grand $p(\mathcal{F}_Q, 0) \geqslant |M(\mathcal{F}, \boldsymbol{x}, 1/2)|^2/M_2(\mathcal{F}, \boldsymbol{x}, 1/2)$. On utilise les formules de traces permettent d'obtenir des formules asymptotiques pour les quantités $M(\mathcal{F}, \boldsymbol{x}, 1/2)$ et $M_2(\mathcal{F}, \boldsymbol{x}, 1/2)$. On montre alors que le vecteur $\boldsymbol{x}$ peut être choisi de manière « optimale » (afin de minimiser la forme quadratique $M_2(\mathcal{F}, \boldsymbol{x}, 1/2)$ sous la contrainte linéaire $M(\mathcal{F}, \boldsymbol{x}, 1/2) = 1$) ; avec de choix, on obtient

$$p(\mathcal{F}_Q, 0) \geqslant F_G(\Delta)(1 + o(1)),\ Q \to +\infty \tag{29}$$

où $F_G(\Delta)$ est une fraction à coefficients rationnels nulle pour $\Delta = 0$, strictement croissante et qui ne dépend que du type de symétrie G de la famille (on pourra consulter [IS1, So, KMV1] pour une application de ce principe pour diverses familles).

Notons que si l'on choisit le mollifieur « trivial » $M(f,s) = 1$, on obtient une minoration plus faible de la forme (cf. l'Hypothèse des Moments) $p(\mathcal{F}_Q, 0) \gg 1/\log Q \to 0,\ Q \to +\infty$ (cf. [Du]).

Remarque 4.1. — Les familles de fonctions L que nous avons rencontrées jusquà présent sont toutes relativement classiques. Pourtant on pourrait imaginer étudier le même type de problème pour d'autre familles plus « exotiques » de fonctions L de formes automorphes (par exemple sur les corps de nombres autres que $\mathbb{Q}$). La principale limitation à l'extension de ces résultats tient au fait que les formules de traces dont on dispose (formules d'Arthur-Selberg) sont beaucoup moins maniables du point

de vue analytique. Récemment Vanderkam [Va] a montré que l'on peut étendre la formule des traces de Selberg (sous la forme explicite qu'a donnée Shimizu) (29) (et (30) (31) ci-dessous) aux familles de formes modulaires de Hilbert sur un corps totalement réel, quand le poids est fixé et le niveau varie.

Une deuxième application possible concerne l'étude des zéros non triviaux réels dans des fonctions L d'une famille $\mathcal{F}$. Pour f appartenant à une famille $\mathcal{F}$, on note $N(f,[0,1])$ le nombre de zéros réels contenus dans la bande critique de la fonction $L(f,s)$ comptés avec multiplicité et $N(\mathcal{F}_Q,[0,1])$ la valeur moyenne de cette variable. Pour connaître le comportement de $N(\mathcal{F}_Q,[0,1])$, on note que la majoration triviale $N(\mathcal{F}_Q,[0,1]) \geqslant r(\mathcal{F}_Q)$ qui est une égalité sous HRG ; d'autre part l'hypothèse du rang prédit la limite $\lim_{Q\to+\infty} r(\mathcal{F}_Q)$ en fonction du type de symétrie de $\mathcal{F}$; on peut noter que pour la famille $\{\chi\}$ des caractères de Dirichlet (qui est de type unitaire), Chowla avait déjà fait la conjecture plus forte $N(\mathcal{F},[0,1]) = 0$!

Les méthodes de mollification permettent d'obtenir de résultats non triviaux et inconditionnels sur les quantités $N(\mathcal{F},[0,1])$ et $r(\mathcal{F})$. Ainsi dans [KM1], il était montré, dans les formules explicites combinées avec une ancienne technique de mollification due à Selberg [Se], que pour q premier

$$N(S_2^p(q),[0,1]) \leqslant C \tag{30}$$

où C est une constante absolue (dans [KM1], la majoration était donnée pour le rang analytique $r(S_2^p(q))$, mais la méthode utilisée fournit en fait la majoration plus forte). Il s'agissait alors du premier résultat inconditionnel de ce type.

Cette méthode qui fonctionne *mutatis mutandis* pour une grande classe de familles de fonction L, a été raffinée pour fournir la majoration beaucoup plus forte

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_f \exp(AN(f,[0,1])) \leqslant C \tag{31}$$

où $A>0$ et C sont des constantes absolues ([HM], là encore l'inégalité n'est donnée que pour le rang analytique mais elle est vraie en général) : cette majoration dit que la proportion des éléments $L(f,s)$ de la famille ayant au moins r zéros sur $[0,1]$ décroît exponentiellement vite avec r. Cette majoration combinée avec la première application de la mollification décrite ci-dessus conduit à une version inconditionnelle de l'inégalité (26) ([KMV1]) : pour q premier

$$r(S_2(q)) \leqslant (1.2 + o(1)).$$

Dans [CS], cette technique a été considérablement simplifiée, améliorée et optimisée par Conrey et Soundararajan afin d'obtenir des formes précises de (30) : leur Théorème 0.5 est conséquence de l'inégalité

$$N(\mathcal{F}_D,[0,1]) \leqslant 0.79 + o(1) \qquad (D\to+\infty). \tag{32}$$

Pour obtenir (30), (31), ou (32), la méthode consiste à majorer le nombre de zéros positifs ou nuls par le nombre de ceux contenus dans un $1/\log Q$-voisinage du demi-axe $[0,+\infty[$. D'après l'équation fonctionnelle, on peut se limiter à un $1/\log Q$-voisinage du demi-axe $[1/2,+\infty[$. Pour compter les zéros dans ce voisinage, on utilise le lemme suivant dû à Selberg qui permet de compter les zéros dans des bandes étroites [Se] (Lemma 14)

LEMME 4.2 (Selberg). — *Soit h une fonction holomorphe dans le domaine*

$$\{s\in\mathbb{C}\mid \Re e s\geqslant\alpha,\ t_1\leqslant\Im m s\leqslant t_2\}$$

telle que

$$h(s)=1+o\Big(\exp(-\frac{\pi}{t_2-t_1}\Re e s)\Big) \tag{33}$$

uniformément dans ce domaine quand $\Re e s\to+\infty$. Soient $\rho=\beta+i\gamma$ les zéros de h dans l'intérieur de ce domaine. On a l'égalité

$$2(t_2-t_1)\sum_\rho \sin\Big(\pi\frac{\gamma-t_1}{t_2-t_1}\Big)\sinh\Big(\pi\frac{\beta-\alpha}{t_2-t_1}\Big)=\int_{t_1}^{t_2}\sin\Big(\pi\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\Big)\log|h(\alpha+it)|dt$$
$$+\int_\alpha^{+\infty}\sinh\Big(\pi\frac{\sigma-\alpha}{t_2-t_1}\Big)(\log|h(\sigma+it_1)|+\log|h(\sigma+it_2)|)d\sigma$$

Dans leur preuve, Conrey et Soundararajan choisissent $\alpha=1/2-a/\log D$, $t_1=-b/\log D$, $t_2=b/\log D$ où a,b sont des paramètres à optimiser. Ainsi dans la somme de gauche ci-dessus, les zéros du demi-axe $[1/2,+\infty[$ sont comptés avec le poids

$$\frac{4b}{\log D}\sinh\Big(\pi\frac{(\beta-1/2)\log D}{2}\Big)\geqslant\frac{4b}{\log D}\sinh\Big(\pi\frac{a}{2b}\Big).$$

On voudrait appliquer le lemme 4.2 à $h(s)=\prod_{\chi\in\mathcal{F}_D}L(\chi,s)$, mais l'hypothèse de décroissance rapide à l'infini (33) n'est pas valable pour cette fonction. La méthode de mollification intervient à ce niveau : on considère plutôt une fonction de la forme $h(s)=\prod_{\chi\in\mathcal{F}_D}L(\chi,s)M(\chi,s)$ (ce qui ne fait qu'augmenter le nombre de zéros). On prend pour $M(\chi,s)$ une version tronquée de $L(\chi,s)^{-1}$ (un mollifieur) de la forme (28), avec

$$x_l=\mu(l),\quad 1\leqslant l\leqslant L^{1-\delta},\quad x_l=\mu(l)P(\log(L/l)/\log L),\quad L^{1-\delta}\leqslant l\leqslant L$$

où $0<\delta<1$ et P est un certain polynôme tel que $P(0)=P'(0)=0$, $P(\delta)=1$, $P'(\delta)=0$. Par construction on a pour $\Re e s>2$

$$h(s)=\prod_{\chi\in\mathcal{F}_D}(1+\sum_{n\geqslant L^{1-\delta}}\frac{a_\chi(n)}{n^s}),$$

ainsi si le produit $(1-\delta)\Delta$ est suffisamment grand par rapport à b, l'hypothèse (33) est vérifiée. Appliquant le Lemme 4.2, on est ramené au problème de majorer $\log|h(s)|$ le long du contour

$$[\alpha+it_1,+\infty+it_1[\cup[\alpha+it_2,+\infty+it_2[\cup[\alpha+it_1,\alpha+it_2[.$$

On se ramène au moment partiel $M_2(\mathcal{F}_D,\boldsymbol{x},s)$ par l'inégalité arithmético-géométrique

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_D)|}\log|h(s)|\leqslant\frac{1}{2}\log(M_2(\mathcal{F}_D,\boldsymbol{x},s)).$$

Le point technique de la preuve est l'évaluation de $M_2(\mathcal{F}_D,\boldsymbol{x},s)$. Pour cette famille, elle est faite à l'aide de techniques développées dans [So] et fournit la formule asymptotique suivante qui est uniforme (au moins) pour $1/\log D\ll|s|\ll\log\log D/\log D$

$$M_2(\mathcal{F}_D,\boldsymbol{x},1/2+s)\sim 1+\Big(\frac{1-D^{-2\Re es}}{2\Re es\log L}+\frac{D^{-s}-D^{-\overline{s}}}{2\Im ms\log L}\Big)+\int_0^\delta L^{-2\Re es(1-y)}\Big(P'(y)+\frac{P''(y)}{2s\log L}\Big)\Big(P'(y)+\frac{P''(y)}{2\overline{s}\log L}\Big)dy,$$

ce qui permet d'évaluer l'intégrale. Pour conclure la preuve, il reste à optimiser les valeurs des paramètres a,b,δ,P et Δ. Les auteurs choisissent $a=6.8$ $b=\pi/(2(1-\delta))$, $\delta=0.64$, $P(y)=3(y/\delta)^2-2(y/\delta)^3$ et on peut prendre Δ arbitrairement proche de $1/2$.

Remarque 4.3. — Le point crucial de la majoration (32) est le fait que $0.79<1$. Or du point de vue du comptage des zéros, la méthode suivie n'est pas optimale en apparence : premièrement on compte les zéros éventuels des mollifieurs $M(\chi,s)$; deuxièmement, on compte les zéros contenus dans un $1/\log D$ voisinage de $[1/2,+\infty[$: ainsi même si on croit à l'Hypothèse de Riemann Généralisée, on n'évitera jamais, en suivant cette méthode, le comptage des zéros des fonctions $L(\chi,s)$ qui se trouvent sur le segment $[1/2-ib/\log D,1/2+ib/\log D]$. Le modèle des matrices aléatoire intervient sur ce dernier point : d'après ce modèle, la famille $\mathcal{F}_D$ est de type symplectique, aussi les fonctions L de cette famille ne doivent pas « en général » avoir beaucoup de zéros proches de $1/2$ (cf. la Remarque 1.2) ; ainsi, par la technique utilisée, on ne devrait pas compter trop de zéros supplémentaires. Pour la même raison il est raisonnable d'espérer que les fonctions $L(f,s)$ pour $f\in S_k^-(q)$ n'ont pas de zéros proches de $1/2$ autres que le zéro trivial $1/2$ puisque le type de symétrie de cette famille est SO^- et que les distributions locales au voisinage de 1 des valeurs propres de matrices symplectiques et des valeurs propres non triviales de matrices orthogonales de rang impair coïncident. Il est donc raisonnable d'espérer montrer qu'il y a une proportion positive des formes modulaires impaires qui ont exactement 1 zéro sur l'axe réel. En revanche pour les caractères complexes (ayant une symétrie de type unitaire) ou pour les formes modulaires paires (ayant symétrie de type orthogonal pair) il peut y avoir des zéros très proches de

1/2, et il est vraisemblable qu'on ne pourra pas obtenir une proportion positive de fonctions L ne s'annulant pas sur $[0,1]$.

4.2. Briser la convexité

Une autre application de l'évaluation des moments est le problème de majorer $|L(f,1/2)|$ en fonction de Q_f. Rappelons que l' Hypothèse HRG implique l'

Hypothèse de Lindelöf Généralisée (HLG). — *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$|L(f,1/2)| \ll_{\varepsilon,d} Q_f^{\varepsilon}, \tag{34}$$

la constante impliquée ne dépendant que de ε et de d.

D'autre part l'équation fonctionnelle (16) et le principe de convexité de Phragmen-Lindelöf permettent de montrer la majoration (34) avec l'exposant ε remplacé par $1/4+\varepsilon$ (qu'on appelle exposant de convexité).

Un premier pas vers HGL consisterait à obtenir la majoration (34) avec un exposant $< 1/4$ (problème qu'on appellera quasi-HLG). Il est remarquable que la résolution de quasi-HGL est suffisante pour résoudre complètement des problèmes profonds : pour des applications frappantes, on pourra se reporter à l'excellent survol [IS2].

Pour améliorer l'exposant de convexité, la méthode des moments est assez bien adaptée : si f fait partie d'une famille $\mathcal{F}_Q$ et qu'on dispose de l'hypothèse des moments pour le k-ième moment, on a trivialement

$$|L(f,1/2)| \leqslant (|\mathcal{F}_Q| M_k(\mathcal{F}_Q))^{1/k} \ll_{\varepsilon} Q^{\kappa/k+\varepsilon}.$$

Ainsi l'Hypothèse des Moments implique trivialement HLG. Pour ce qui est de quasi-HLG, on voit que le moment d'ordre $k = 4\kappa$ est critique, puisqu'il fournit l'exposant de convexité (tout comme $v = 2\kappa$ était critique pour quasi-HRG). Notons qu'en pratique on n'utilise la méthode des moments que pour les moments d'ordre pair sauf si l'on sait *a priori* que les $L(f,1/2)$ sont positifs ou nuls (c'est un résultat profond qui a été montré pour certaines fonctions L de formes autoduales [GZ, Wa]). Souvent, on obtient une majoration correcte du moment d'ordre $k = 4\kappa$ assez naturellement (par une inégalité de grand crible) et pour le dépasser on a plusieurs possibilités :

• la première consiste à réduire la taille de la famille (plus précisément réduire κ) tout en conservant la même qualité d'estimation pour le moment d'ordre k, par exemple cette méthode a été utilisée par Sarnak [Sa] pour les fonctions L de convolutions de Rankin-Selberg :

$$|L(f \otimes g, 1/2)| \ll_{\varepsilon,q} k^{1-1/28+\varepsilon}$$

pour g une forme primitive fixée et $f \in S_k^p(q)$ une forme primitive de poids k.

• Une deuxième possibilité est d'obtenir une bonne majoration pour le moment d'ordre $k+2$ si k est pair (ou éventuellement $k+1$ si l'on sait que les $L(f,1/2)$ sont tous positifs ou nuls, c'est cette dernière approche qui a été utilisée avec succès par Conrey et Iwaniec dans [CI1]).

• Une troisième possibilité est la méthode d'*amplification* inventée par Iwaniec et developpée avec Duke et Friedlander [DFI1, DFI2, DFI4]. Cette dernière méthode est en quelque sorte un cas intermédiaire de la deuxième ; elle consiste à obtenir pour le moment partiel (27) (« d'ordre » $k+2\Delta$) une majoration de la forme

$$M_k(\mathcal{F}_Q, \boldsymbol{x}, 1/2) \ll_\varepsilon Q^\varepsilon \sum_{l\leqslant L} |x_l|^2, \tag{35}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, puis à choisir les coefficients $(x_l)_{l\leqslant L}$ des polynômes $M(f, 1/2)$ de sorte que la contribution d'un $f_0 \in \mathcal{F}_Q$ donné soit *amplifiée* (ainsi on appellera $M(f_0, 1/2)$ un *amplificateur*) : on demande que l'on ait

$$|M(f_0, 1/2)| \gg L^{\delta-\varepsilon} \text{ et } \sum_{l\leqslant L} |x_l|^2 \ll_\varepsilon L^{\delta+\varepsilon} \tag{36}$$

pour un certain $\delta > 0$ et tout $\varepsilon > 0$. On déduit de (35) et de (36) la majoration

$$|L(f_0, 1/2)| \ll_\varepsilon Q^{\kappa/k+\varepsilon} L^{-\delta/k} \ll_\varepsilon Q^{1/4+\varepsilon} L^{-\delta/k},$$

qui suffit à obtenir quasi-HLG pour f_0 dès que $\log L \gg \log Q_f$. Ainsi, pour $f_0 = \chi_0$ un caractère de Dirichlet on choisit $x_l = \overline{\chi}_0(l)$; on obtient alors (36) avec $\delta = 1$. Pour $f \in S_k(q)$ on choisit l'amplificateur de Iwaniec basé sur l'identité $\lambda_f(p)^2 - \lambda_f(p^2) = 1$ valable dès que $(p, q) = 1$: on prend $x_{p^2} = -1$ si $p^2 \leqslant L$, $x_p = \lambda_{f_0}(p)$ si $p^2 \leqslant L$, et $x_l = 0$ sinon ; avec ce choix on obtient (36) pour $\delta = 1/2$.

Cette technique a été utilisée avec succès dans un certain nombre de cas comme par exemple [DFI1, DFI2, DFI4, KMV3]. La principale difficulté pour obtenir (35) réside dans le contrôle de la contribution des termes non-diagonaux (qui apparaissent car $k = 4\kappa$). Par exemple Duke, Friedlander et Iwaniec ont obtenu les majorations [DFI2, DFI4] pour les fonctions L de formes modulaires

$$|L(f, 1/2)| \ll_\varepsilon q^{1/4-1/160+\varepsilon}$$

et pour le cas (beaucoup plus difficile) de ψ un caractère du groupe des classes d'idéaux d'un corps quadratique imaginaire de discriminant $-D$,

$$|L(\psi, 1/2)| \ll_\varepsilon q^{1/4-1/23\,041+\varepsilon}.$$

RÉFÉRENCES

[B] E. Bombieri – *A lower bound for the zeros of Riemann's zeta function on the critical line* (*following N. Levinson*). Séminaire Bourbaki, Exp. n° 465, Lecture Notes in Math. **514** (1976), 176–182.

[BH] E. Brézin, S. Hikami – *Characteristic polynomials of random matrices.* Comm. Math. Phys. **214**, no. 1 (2000), 111–135.

[Br] A. Brumer – *The rank of $J_0(N)$*, Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992), Astérisque **228**, 3 (1995), 41–68.

[Co] A. Connes – *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function.* Selecta Math. (N.S.) **5**, no. 1 (1999), 29–106.

[CF] J.B. Conrey, D.W. Farmer – *Mean values of L-functions and symmetry,* Internat. Math. Res. Notices **17** (2000), 883–908.

[CG] J.B. Conrey, A. Ghosh – *A conjecture for the sixth power moment of the Riemann zeta-function,* Internat. Math. Res. Notices **15** (1998), 775–780.

[CI1] B. Conrey, H. Iwaniec – *The cubic moment of central values of automorphic L-functions* Ann. Math, **151**, no. 3 (2000), 1175-1216 .

[CI2] B. Conrey, H. Iwaniec – *Spacing of zeros of Hecke L-functions and the class number problem.* Acta Arith. **103**, no. 3 (2002), 259–312.

[CKRS] J.B. Conrey, J.P. Keating, M. Rubinstein, N. C. Snaith – *On the frequency of vanishing of quadratic twists of modular L-functions.* Preprint (2000).

[CS] J.B. Conrey, K. Soundararajan – *Real zeros of quadratic Dirichlet L-functions.* Invent. Math. **150**, no. 1 (2002), 1–44.

[De1] P. Deligne – *La conjecture de Weil*, I, Publ. Math. IHES **43** (1974), 273-308.

[De2] P. Deligne – *La conjecture de Weil*, II, Publ. Math. IHES **52** (1981), 313-428.

[Du] W. Duke – *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with high level,* Invent. Math. **119** (1995), 165–174.

[DFI1] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec – *Bounds for automorphic L-functions.* Invent. Math. **112**, no. 1 (1993), 1–8.

[DFI2] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec – *Bounds for automorphic L-functions.* II, Invent. Math. **115** (1994).

[DFI3] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec – *Class group L-functions.* Duke Math. J. **79**, no. 1 (1995), 1–56.

[DFI4] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec – *Bounds for automorphic L-functions.* III, Invent. Math. **143**, 2 (2001), 221-248.

[EMOT] A. Erdeilyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi – *Higher Transcendental functions*, Vol. I, II, III. Based, in part, on notes left by Harry Bateman. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[FI] E. Fouvry, H. Iwaniec – *Low lying zeros of dihedral L functions.* Preprint.

[GoJ] R. Godement, H. Jacquet – *Zeta functions of simple algebras.* Lecture Notes in Math. **260** (1972).

[GZ] W. Gross, D. Zagier – Heegner points and derivatives of L-series. Invent. Math. **84**, no. 2 (1986), 225–320.

[HB] D.R. Heath-Brown – *The fourth power mean of Dirichlet's L-functions*, Analysis **1**, no. 1 (1981), 25–32.

[HM] D.R. Heath-Brown, P. Michel – *Exponential decays for the frequency of the analytic rank of Automorphic L-functions,* Duke Math. J. **102**, no. 3 (2000), 475–484.

[He] S. HELGASON – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Pure and Appl. Math. **80**, Academic Press (1978).

[ILS] H. IWANIEC, W. LUO, P. SARNAK – *Low Lying Zeros of families of L-functions*, Publ. IHES. **91** (2001), 55–131.

[IS1] H. IWANIEC, P. SARNAK – *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Siegel-Landau zeros*, Israel J. Math. **120**, Part A (2000), 155–177.

[IS2] H. IWANIEC, P. SARNAK – *Perspectives in the Analytic Theory of L functions*. Preprint (2000).

[JS] H. JACQUET, J. A. SHALIKA – *On Euler products and the classification of automorphic representations.* I, Amer. J. Math. **103**, no. 3 (1981), 499–558.

[JPPS] H. JACQUET, I.I. PIATETSKII-SHAPIRO, J.A. SHALIKA – *Rankin–Selberg convolutions,* Amer. J. Math. **105**, no. 2 (1983), 367–464.

[Ka] N.M. KATZ – *Gauss Sums, Kloosterman Sums and Monodromy Groups,* Annals of Maths. Studies **116**, PUP.

[KSa] N.M. KATZ, P. SARNAK – *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy.* American Math. Soc. Colloquium Publications **45** (1999).

[KSn1] J.P. KEATING, N.C. SNAITH – *Random matrix theory and L-functions at* $s = 1/2$. Comm. Math. Phys. **214**, no. 1 (2000), 91–110.

[KSn2] J.P. KEATING, N.C. SNAITH – *Random matrix theory and* $\zeta(1/2 + it)$. Comm. Math. Phys. **214**, no. 1 (2000), 57–89.

[KM1] E. KOWALSKI, P. MICHEL – *The analytic rank of* $J_0(q)$ *and zeros of automorphic L-functions*, Duke Math. J. **100**, 503-547.

[KMV1] E. KOWALSKI, P. MICHEL, J. VANDERKAM – *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, Journ. Reine Angew. Math. **526** (2000), 1-34.

[KMV2] E. KOWALSKI, P. MICHEL, J. VANDERKAM – *Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications*, Invent. Math. **142**, 1 (2000), 95-151.

[KMV3] E. KOWALSKI, P. MICHEL, J. VANDERKAM – *Rankin-Selberg L functions in the level aspect*, Duke Math. J. **114**, no. 1 (2002), 123–191.

[Me] M.L. MEHTA – *Random matrices.* Second edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1991.

[MV] P. MICHEL, J. VANDERKAM – *Simultaneous non-vanishing of twists of automorphic L-functions.* Preprint 2001.

[Mo] H.L. MONTGOMERY – *The pair correlation of zeros of the zeta function.* Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV),(1972), 181–193.

[Mu] R. MURTY – *The analytic rank of* $J_0(N)(Q)$, Number theory (Halifax, NS, 1994), 263–277, CMS Conf. Proc., 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[Od] A.M. ODLYZKO – *The* 10^{20th} *zero of the Riemann zeta function and 70 millions of its neighbors.* Preprint ATT, 1989.

[OS] A. Ozluk, C. Snider – *Small zeros of quadratic L functions*, Bull. Aust. Math. Soc. **47** (1993), 307-319.

[P] A. Peng – Ph. D. Thesis, Princeton University 2001.

[Ro] E. Royer – *Petits zéros de fonctions L de formes modulaires*, Acta Arith. **99**, no. 2 (2001), 147–172..

[Ru] M. Rubinstein – *Evidence for a spectral interpretation of the zéros of L-functions*, PhD Thesis, Princeton University, 1998.

[RS] Z. Rudnick, P. Sarnak – *Zeros of principal L-functions and random matrix theory,* A celebration of John F. Nash, Jr. Duke Math. J. **81**, no. 2 (1996), 269–322.

[Sa] P. Sarnak – *Estimates for Rankin-Selberg L-functions and quantum unique ergodicity*, J. Funct. Anal. **184**, no. 2 (2001), 419–453.

[Se] A. Selberg – *Contributions to the theory of Dirichlet's L functions*, Skr. utg. av Det Norske Videnskaps-Akademi, Mat. Nat. Kl., No. 3 (1946), 1–62.

[So] K. Soundararajan – *Non-vanishing of quadratic Dirichlet L-functions at* $s = 1/2$, Ann. of Math. **152**, No. 2, 447-488.

[Ti] E.C. Titchmarsh – *The theory of the Riemann zeta-function.* Second edition. Edited and with a preface by D.R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[Va] J. VanderKam – *Non-vanishing of Hilbert modular L-functions at the center of the critical strip.* Preprint (1998).

[Wa] J.-L. Waldspurger – *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier*, J. Math. Pures et Appl. **60** (1981), 375-484.

[Zi] M. Zirnbauer – *Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory.* J. Math. Phys. **37**, no. 10 (1996), 4986–5018.

Philippe MICHEL

Université de Montpellier II
Département de Mathématiques
Case 051
F-34095 Montpellier Cedex
E-mail : michel@math.univ-montp2.fr

Séminaire BOURBAKI Mars 2001
53e année, 2000-2001, no 888, p. 249 à 278

QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE ET RÉDUCTION SYMPLECTIQUE

par **Michèle VERGNE**

INTRODUCTION

Soit M une variété différentiable munie d'une 2-forme symplectique Ω. On se donne de plus un fibré en droites complexes L (appelé *fibré de Kostant-Souriau*) muni d'une connexion ∇ dont la courbure est $-i\Omega$. On dira que M est une *variété symplectique préquantifiée*, et on sous-entendra souvent le fibré L (dont la première classe de Chern est fixée). Par exemple, si M est l'espace projectif, le fibré L est le fibré $\mathcal{O}(1)$. Peut-on construire canoniquement un espace de Hilbert $Q(M)$ associé à la variété préquantifiée M ? De plus, si ϕ est une fonction réelle sur M, peut-on lui associer un opérateur auto-adjoint $Q(\phi)$ opérant sur $Q(M)$ tel que toute valeur λ du spectre de l'opérateur $Q(\phi)$ appartienne à l'intervalle $\phi(M) \subset \mathbb{R}$? Notons G le flot hamiltonien engendré par ϕ et notons $\mathrm{red}_\lambda(M)$ l'espace des orbites de G dans l'hypersurface $\phi = \lambda$. C'est

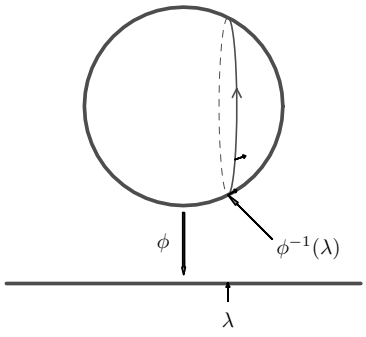


FIGURE 1. Espace réduit : $\phi^{-1}(\lambda)/S^1 = \bullet$

(dans les bons cas) une variété symplectique de dimension $\dim M - 2$, appelée *l'espace réduit de M au niveau λ*.

Si ϕ est propre, les espaces réduits sont compacts. On désire alors que le spectre de $Q(\phi)$ soit un sous-ensemble discret de $\phi(M)$ et que les multiplicités de toute valeur propre λ soient finies et en rapport étroit avec le volume symplectique de la fibre réduite en λ. Des procédés pour construire $Q(M)$ et $Q(\phi)$ n'existent que sous certaines conditions. Mais certains cas sont bien cernés, notamment celui des variétés symplectiques compactes. On sait alors associer à une variété symplectique compacte préquantifiée M un espace vectoriel canonique $Q(M)$. Si ϕ engendre un flot hamiltonien circulaire $G = \{e^{it}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$, ce flot G opère sur $Q(M)$ et on pose $Q(\phi) = -i\mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal de l'action du flot sur $Q(M)$. Le but de cet exposé est de décrire la multiplicité de la valeur propre λ de $Q(\phi)$ grâce à la variété réduite en λ.

Donnons dès à présent la description de cette relation dans le cadre d'une variété kählérienne compacte, et pour la valeur propre 0 dont l'espace propre est le sous-espace $Q(M)^G$ des éléments G-invariants de $Q(M)$. L'espace quotient symplectique naturel de M par G est l'espace réduit $\mathrm{red}_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$. En effet, cet espace – du moins s'il est lisse – est encore une variété kählérienne compacte (de dimension complexe $\dim_{\mathbb{C}} M - 1$) et c'est « grosso modo » le quotient de M par l'action complexifiée de $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ sur M.

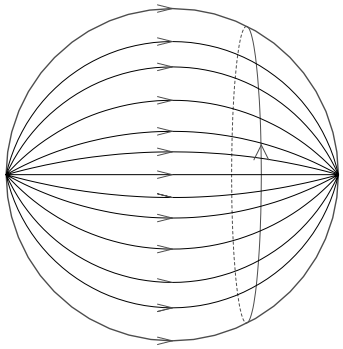


FIGURE 2. Action de $\mathbb{C}^*$: $M/\mathbb{C}^* = \bullet$

Si L est un fibré de Kostant-Souriau holomorphe sur M, alors $Q(M)$ est – dans les bons cas – l'espace des sections holomorphes du fibré L. Guillemin-Sternberg [16] ont démontré qu'alors l'espace des invariants $Q(M)^G$ s'identifie à l'espace des sections holomorphes du fibré de Kostant-Souriau sur la variété réduite (tout au moins lorsque celle-ci est lisse), comme dans le cas projectif, où $Q(M)$ est l'anneau des coordonnées homogènes sur M et $Q(M)^G$ l'anneau des coordonnées homogènes sur le quotient géométrique « $M/G_{\mathbb{C}}$ ». Lorsque M est seulement symplectique, on peut, grâce à une structure presque complexe, définir un espace $Q(M)$ analogue. Guillemin et Sternberg [16] ont alors formulé une conjecture qui généralise au cas symplectique la construction

de Mumford [32] en géométrie algébrique, construction clef de la théorie géométrique des invariants.

Il est utile de replacer ces thèmes de réflexion dans le contexte de la méthode des orbites, où ils sont naturels. Si G est un groupe de Lie connexe, on note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. Une orbite O de G dans $\mathfrak{g}^*$ est appelée *orbite coadjointe*; c'est une variété symplectique. Si cette orbite O est préquantifiable, on espère lui associer une représentation unitaire irréductible $Q(O)$ de G. En particulier, soient N un groupe nilpotent simplement connexe et G un sous-groupe connexe de N. Soit $\Phi : \mathfrak{n}^* \to \mathfrak{g}^*$ la projection canonique. Grâce aux résultats de Kirillov (voir [20]), toute orbite coadjointe $O \subset \mathfrak{n}^*$ est quantifiable en une représentation unitaire irréductible $Q(O)$ de N. On sait étudier (voir [10]) la décomposition de la restriction de la représentation irréductible $Q(O)$ au sous-groupe G de N, à l'aide de l'ensemble des G-orbites contenues dans $\Phi(O)$.

Dans cet exposé, on traite un problème similaire pour le cas où G est compact connexe. En fait, on traite la situation suivante. Soit G un groupe de Lie compact, agissant de manière hamiltonienne sur une variété symplectique compacte M préquantifiée. Soit $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ l'application moment. On peut construire canoniquement (voir section 3) un espace $Q(M)$ sur lequel opère G; c'est l'espace des solutions d'un opérateur de Dirac tordu sur M. Si X_M est le champ hamiltonien associé à $X \in \mathfrak{g}$, la fonction $\langle \Phi, X\rangle$ a pour opérateur associé $Q(\langle \Phi, X\rangle) = -i\mathcal{L}^Q(X)$, où $\mathcal{L}^Q(X)$ est le générateur infinitésimal pour l'action unitaire de G dans $Q(M)$. On montrera dans cet exposé que l'on peut « voir » la décomposition de $Q(M)$ en représentations irréductibles de G en regardant la décomposition de l'image de $\Phi(M)$ en orbites coadjointes de G. Le cas primordial est le suivant. Considérons une orbite coadjointe préquantifiable $O_\lambda = G \cdot \lambda$ de G. D'après le théorème de Borel-Weil-Bott, la représentation $\tau_G(\lambda) = Q(O_\lambda)$ est irréductible, c'est la représentation dite *de plus haut poids* $\Lambda = i\lambda$. L'application Φ étant l'injection canonique, c'est ce qui est attendu. Si M est une variété préquantifiée obtenue par produit direct d'une orbite préquantifiée O_λ par une variété symplectique compacte N préquantifiée avec action triviale de G, alors $Q(M) = Q(N) \otimes Q(O_\lambda)$ et G agit trivialement sur $Q(N)$. Ici, l'application Φ est la projection de $M = N \times O_\lambda$ sur le deuxième facteur, et seule la représentation $\tau_G(\Lambda) = Q(O_\lambda)$ intervient dans la décomposition de $Q(M)$, mais cette fois avec multiplicité $\dim Q(N)$.

V. Guillemin et S. Sternberg ont formulé une conjecture précise qui permet de décrire entièrement l'espace de représentation $Q(M)$ du groupe G grâce à l'application Φ, pour toute action hamiltonienne de G sur M. On introduit l'espace réduit de Marsden-Weinstein $\mathrm{red}_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$. C'est dans les bons cas une variété symplectique lisse compacte préquantifiable (avec action triviale de G). La *conjecture de Guillemin-Sternberg* s'énonce

$$Q(M)^G = Q(\mathrm{red}_0(M)).$$

Leur conjecture est connue sous la forme du slogan : « La quantification commute à la réduction ! » ou du sigle $[Q, R] = 0$. Ce slogan a aussi influencé les recherches de relations précises entre représentations d'un groupe G opérant de manière hamiltonienne sur M et la géométrie de l'application moment également pour beaucoup de situations non compactes. Ces thèmes de recherches étaient présents depuis longtemps, en particulier depuis les résultats de Duistermaat-Heckman [12] sur le comportement localement polynomial des volumes des fibres réduites. De nombreux résultats qualitatifs ou asymptotiques pour les multiplicités découlent des formules de caractères établies pour ces représentations $Q(M)$ quantifiées d'une variété symplectique M, mais rien de nickel comme la conjecture de Guillemin-Sternberg n'était démontré. La formule de localisation dite non abélienne de Witten [46], et les démonstrations de Jeffrey-Kirwan [17] de cette formule, ont aiguillonné une nouvelle recherche plus insistante dans ce domaine. Ainsi, vers 1994, au moins cinq démonstrations différentes de la conjecture de Guillemin-Sternberg étaient simultanément proposées pour le cas du groupe $G = S^1$, par Duistermaat-Guillemin-Meinrenken-Wu, Guillemin, Jeffrey-Kirwan, Meinrenken, et Vergne [11, 14, 18, 28, 45]. Puis, E. Meinrenken et E. Meinrenken-R. Sjamaar l'ont démontré dans le cas général beaucoup plus difficile d'un groupe de Lie compact connexe quelconque [29],[30]. L'article de Sjamaar [36] est une excellente introduction à ces résultats. Enfin, Y. Tian-W. Zhang, W. Zhang, puis P.-E. Paradan ont produit d'autres démonstrations plus directes du cas général, s'adaptant à certaines situations nouvelles : variétés à bord, variétés non compactes, application moment abstraite, familles, indices de fibrés positifs [39, 40, 41, 42, 43, 49, 50, 33, 34].

Avant d'entreprendre une description (un peu technique) du procédé de quantification utilisé dans la conjecture de Guillemin-Sternberg, puis des résultats, expliquons la signification de cette conjecture dans l'exemple fondamental de la quantification d'un espace vectoriel symplectique.

Soit $M = \mathbb{R}^{2n}$, muni des coordonnées symplectiques $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$. On considère le fibré de Kostant-Souriau ; c'est le fibré trivial, mais avec connexion

$$\nabla = d - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(p_k dq_k - q_k dp_k).$$

Alors $Q(M)$ est l'espace de la représentation unitaire irréductible du groupe de Heisenberg. Cet espace $Q(M)$ est muni d'opérateurs auto-adjoints P_k, Q_ℓ vérifiant $P_kQ_\ell - Q_\ell P_k = i\delta_k^\ell$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant \ell \leqslant n$. Voici la réalisation « concrète » de $Q(M)$: considérons M comme un espace vectoriel complexe avec coordonnées complexes $z_k = p_k + iq_k$. On construit $Q(M)$ comme l'espace des solutions L^2 de l'opérateur elliptique D, qui est par construction l'opérateur $\overline{\partial}$ tordu par ∇ :

$$D = \sum_k \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} + z_k\Big) d\overline{z}_k.$$

On obtient la réalisation de Fock de $Q(M)$:

$$Q(M) = \{F(z) = e^{-|z|^2} f(z)\ ;\ f \text{ holomorphe}\,;\, \int_M |F|^2 dpdq < \infty\},$$

muni des opérateurs

$$P_k = \frac{i}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k\Big) \quad \text{et} \quad Q_\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial}{\partial z_\ell} + z_\ell\Big).$$

Considérons la fonction $\phi(z) = |z|^2/2$. L'image de M par ϕ est l'intervalle $[0, \infty[$. La fibre au point $\lambda \geqslant 0$ de ϕ est la sphère $S = \{z, |z|^2/2 = \lambda\}$ de dimension $2n-1$ et de rayon $\sqrt{2\lambda}$.

Soit X_ϕ le champ de vecteurs hamiltonien de ϕ ; alors

$$X_\phi = \sum_{k=1}^{n} \Big(q_k \frac{\partial}{\partial p_k} - p_k \frac{\partial}{\partial q_k}\Big).$$

Le flot engendré par X_ϕ est le groupe à un paramètre de rotations $g(t) = e^{-it}\,\mathrm{Id}$. Il laisse stable la surface de niveau $\phi = \lambda$, et l'espace réduit (si $\lambda > 0$) est l'espace projectif $P_{n-1}(\mathbb{C})$ qui hérite d'une structure symplectique Ω_λ dépendant linéairement de λ. Le volume de $P_{n-1}(\mathbb{C})$ pour la mesure de Liouville correspondante est $\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$. Cette structure symplectique est préquantifiable si et seulement si λ est un entier k positif ou nul auquel cas le fibré de Kostant-Souriau pour la structure symplectique induite est le fibré $\mathcal{O}(k)$. L'opérateur de Kostant $Q(\phi)$ canoniquement associé à ϕ et ∇ est l'opérateur différentiel

$$Q(\phi) = \phi - i\nabla_{X_\phi} = -iX_\phi.$$

Les valeurs propres de l'action sur l'espace $Q(M)$ de cet opérateur, générateur infinitésimal de la rotation complexe, sont obtenues pour $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$. L'espace vectoriel $Q(M)_k$ formé des vecteurs propres pour $Q(\phi)$ de valeur propre k est isomorphe à l'espace des polynômes homogènes de degré k en n variables, par l'application

$$f(z) \mapsto F(z) = e^{-|z|^2} f(z).$$

Par restriction à la surface de niveau k, nous obtenons un isomorphisme de $Q(M)_k$ avec l'espace $H^0(P_{n-1}(\mathbb{C}), \mathcal{O}(k))$ des sections holomorphes du fibré $\mathcal{O}(k)$. La formule pour la dimension de $Q(M)_k$ est remarquable ; en effet, nous avons

$$\dim Q(M)_k = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+(n-1))}{(n-1)!}.$$

Cette formule polynomiale en k est un analogue « entier » de la formule $\frac{k^{n-1}}{(n-1)!}$ pour le volume de la fibre réduite. Pour $k = 0$, on obtient $\dim Q(M)_0 = 1$, ce qui correspond bien au fait que la fibre de ϕ devient un point pour $k = 0$.

Remarquons que l'exemple que nous venons de traiter est le cas d'une variété non compacte : $\mathbb{R}^{2n}$. Pour cet exemple, le modèle de quantification géométrique par l'espace de Fock $Q(M)$ est clair. Cependant la conjecture de Guillemin-Sternberg n'est démontrée de manière générale que dans le cas de variétés hamiltoniennes compactes. Son énoncé demande d'ailleurs à être précisé dans le cas des variétés hamiltoniennes non compactes lorsque le modèle de quantification n'est pas clair. Nous donnerons cependant l'exemple des séries discrètes, où dans une situation non compacte, le slogan : « la quantification commute à la réduction » est encore vrai.

1. NOTATIONS

La notation x ou t désigne une variable réelle, z une variable complexe. La notation M désigne une variété différentiable. Les points de M sont notés m. La notation U est aussi employée pour une variété différentiable, mais M sera le plus souvent compacte tandis que U sera généralement non compacte. Si $\mathcal{V} \to M$ est un fibré vectoriel (de rang fini) sur M, on note $\Gamma(M, \mathcal{V})$ l'espace vectoriel des sections différentiables du fibré $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{A}(M)$ l'algèbre des formes extérieures sur M. La contraction par un champ de vecteurs $\boldsymbol{V}$ est notée $i(\boldsymbol{V}) : \mathcal{A}^\bullet(M) \to \mathcal{A}^{\bullet-1}(M)$; ainsi si Ω est une 2-forme, la 1-forme $i(\boldsymbol{V})\Omega$ est donnée par $(i(\boldsymbol{V})\Omega)(\xi) := \Omega(\boldsymbol{V} \wedge \xi)$, pour tout champ de vecteurs ξ.

Notons S^1 le groupe $\{e^{it}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$. Un tore est un groupe de Lie compact connexe abélien, c'est-à-dire un produit de groupes S^1. On notera T un tore, $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{t}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{t}$. Les symboles $\mu, \ldots, \lambda$ désignent des éléments de $\mathfrak{t}^*$.

Dans tout le reste de cet exposé, G désigne un groupe de Lie compact connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Un élément de $\mathfrak{g}$ est noté en général X. La notation a désigne des éléments de $\mathfrak{g}^*$. L'orbite coadjointe $G \cdot a$ est souvent notée O_a.

Soit G agissant à gauche sur M. Si $X \in \mathfrak{g}$, on note $\boldsymbol{X}_M$ (ou simplement $\boldsymbol{X}$) le champ de vecteurs sur M donné au point $m \in M$ par $\boldsymbol{X}_m = \frac{d}{d\varepsilon} \exp(-\varepsilon X) \cdot m|_{\varepsilon=0}$. On note $\mathfrak{g}_m \subset T_m M$ le sous-espace vectoriel de $T_m M$ formé des vecteurs tangents $\boldsymbol{X}_m$. Désignons par M^G l'ensemble des points fixes de l'action ; c'est une sous-variété de M. On note $G(m)$ le stabilisateur du point $m \in M$ dans G, et $\mathfrak{g}(m)$ son algèbre de Lie. Si $\mathcal{V}$ est un fibré G-équivariant sur M, on note $\mathcal{L}^{\mathcal{V}}(X)$ l'action infinitésimale de $X \in \mathfrak{g}$ sur $\Gamma(M, \mathcal{V})$.

Rappelons la description de l'espace des orbites coadjointes de G dans $\mathfrak{g}^*$. Choisissons un tore maximal T de G. Soit $W_G = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl. On identifie l'espace vectoriel $\mathfrak{t}^*$ au sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$ fixe par l'action coadjointe de T. Fixons un système de racines positif Δ^+. On note ρ la demi-somme des racines positives. On peut paramétrer l'ensemble $\mathfrak{t}^*/W_G$ par la chambre de Weyl positive (fermée) $\mathfrak{c}_G \subset \mathfrak{t}^*$. Si M est une orbite coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$, elle rencontre le cône $\mathfrak{c}_G$ en un

point et un seul. Ceci établit une bijection entre $\mathfrak{c}_G$ et l'ensemble des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/G$. Lorsque G est fixé, on écrit W, $\mathfrak{c}$, etc., au lieu de W_G, $\mathfrak{c}_G$, etc. Si $G = T$ est un tore, alors $\mathfrak{c} = \mathfrak{g}^*$.

On note $\widehat{G}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de G. Une représentation R de dimension finie de G se décompose en somme directe de représentations irréductibles : $R = \oplus_{\tau\in\widehat{G}} n_\tau \tau$. On dit que n_τ est *la multiplicité de la représentation* τ dans R. L'ensemble des τ pour lesquels n_τ est non nul est appelé le *support* de R. On identifiera souvent une représentation R de G avec son caractère $\operatorname{Tr} R(g)$ sur G. Ce caractère est déterminé par sa restriction à T. On note $\mathrm{Poids} \subset i\mathfrak{t}^*$ le réseau des différentielles des caractères de T. Un poids est en général noté Λ, et on écrit $\Lambda = i\lambda$ avec $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. On note $e^\Lambda \in \widehat{T}$ le caractère de T associé à Λ. On note $R(G)$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\widehat{G}$. Un élément R de $R(G)$ est appelé *représentation virtuelle* de G ; il s'écrit comme différence de deux représentations de dimension finie de G.

Si $\Lambda \in \mathrm{Poids} \cap i\mathfrak{c}$, on dit que Λ est un *poids dominant*. On associe à tout poids dominant Λ la représentation irréductible $\tau_G(\Lambda)$ de G de plus haut poids Λ. On identifiera donc $\widehat{T}$ au réseau des poids et $\widehat{G}$ au cône des poids dominants.

2. DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

2.1. Fibrés positifs

La définition suivante est due à P.-E. Paradan ; elle s'inspire des critères de positivité de Y. Tian-W. Zhang. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel hermitien G-équivariant sur M. Si $X \in \mathfrak{g}$ et si $m \in M$ est un zéro du champ $\boldsymbol{X}_M$, alors le groupe à un paramètre $\exp tX$ opère dans la fibre $\mathcal{E}_m$ du fibré $\mathcal{E}$ au point m. On note $\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_m(X)$ l'application infinitésimale de X dans $\mathcal{E}_m$. Alors $i\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_m(X)$ est un endomorphisme hermitien de $\mathcal{E}_m$.

Définition 2.1. — *Soit $\mathcal{E}$ un fibré hermitien G-équivariant sur M et Φ une application G-invariante de M dans $\mathfrak{g}^*$.*

– On dit que $\mathcal{E}$ est Φ-positif si, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout zéro m du champ $\boldsymbol{X}_M$, l'opérateur $-i\langle\Phi(m), X\rangle\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_m(X)$ a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.

– On dit que $\mathcal{E}$ est strictement Φ-positif si, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout zéro m du champ $\boldsymbol{X}_M$ tel que $\langle\Phi(m), X\rangle \neq 0$, l'opérateur $-i\langle\Phi(m), X\rangle\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_m(X)$ a toutes ses valeurs propres strictement positives.

Noter que cette définition ne dépend pas de la structure hermitienne G-invariante sur $\mathcal{E}$. Un exemple simple mais important est le cas du fibré trivial $M \times V$ (avec action triviale de G sur V) qui est Φ-positif pour toute application Φ.

Si L est un fibré linéaire G-équivariant, on peut construire une application $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ telle que $\langle \Phi(m), X\rangle = -i\mathcal{L}^L_m(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(m)$. En effet, on choisit une connexion G-invariante ∇ sur L, et on définit

$$\langle \Phi, X\rangle = -i\mathcal{L}^L(X) + i\nabla_{\boldsymbol{X}}.$$

On dit ([7], ch.7) que Φ est le *moment de la connexion* ∇ (c'est une application moment abstraite au sens de Karshon [13]).

2.2. Action hamiltonienne d'un groupe et réduction

Soit (M, Ω) une variété symplectique : Ω est une 2-forme fermée sur M et Ω_m est en tout point m de M une forme alternée non dégénérée sur l'espace tangent T_mM. Si ϕ est une fonction réelle sur M, alors il existe un champ de vecteurs H_ϕ sur M tel que $\Omega(H_\phi, \xi) = \xi \cdot \phi$ pour tout champ de vecteurs ξ sur M ; ce champ H_ϕ est appelé *champ hamiltonien* de ϕ. Le groupe de transformations locales engendré par H_ϕ est appelé *flot hamiltonien*. Il conserve les lignes de niveau $\phi = cste$. Le flot est dit *circulaire* s'il s'intègre en une action de S^1.

Si (M, Ω) est une variété symplectique, notons M^- la variété M munie de la forme $-\Omega$.

Voici la définition d'espace G-hamiltonien (G, M, Ω, Φ_G) : La variété (M, Ω) est une variété symplectique munie d'une action symplectique de G. Notre convention de signes est la suivante : l'application $\Phi_G : M \to \mathfrak{g}^*$ est une application commutant à l'action de G et vérifiant l'équation de Hamilton

$$d\langle \Phi_G, X\rangle + \iota(\boldsymbol{X}_M)\Omega = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Autrement dit, le champ $-\boldsymbol{X}_M$ est le champ hamiltonien de la fonction $\langle \Phi_G, X\rangle$. L'application Φ_G est appelée *l'application moment.* Il est facile de voir que l'application Φ_G est localement constante sur M^G. En particulier, l'image d'une composante connexe de M^G est un point de $\mathfrak{g}^*$.

Si K est un sous-groupe de G, alors l'action de K sur M est hamiltonienne, et l'application moment Φ_K est la composée de Φ_G avec la projection naturelle de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{k}^*$. Si G est fixé, on dénote Φ_G simplement par Φ.

Voici la définition d'espace G-hamiltonien préquantifié : La variété hamiltonienne (G, M, Ω, Φ) est préquantifiée, si elle est pourvue d'un fibré en droites G-équivariant L sur M muni d'une connexion G-invariante ∇ dont la courbure soit $-i\Omega$. On veut de plus la condition de Kostant ([25])

$$\mathcal{L}^L(X) = \nabla_{\boldsymbol{X}} + i\langle \Phi, X\rangle. \tag{1}$$

On appelle L *un fibré de Kostant-Souriau.* Sa première classe de Chern est la classe de $\frac{\Omega}{2\pi}$. D'après l'équation (1), si m est un zéro de $\boldsymbol{X}_m$, l'action $\mathcal{L}^L_m(X)$ de X dans L_m est simplement la multiplication par $i\langle \Phi(m), X\rangle$.

Un cas très important de fibré Φ-positif sur une variété hamiltonienne (M,Φ) est le fibré de Kostant-Souriau $L \to M$, car en un zéro de $\boldsymbol{X}_m$, l'action de $-i\langle\Phi(m),X\rangle\mathcal{L}^L_m(X)$ est la multiplication par $|\langle\Phi(m),X\rangle|^2$. Ainsi *le fibré de Kostant-Souriau est strictement Φ-positif.*

On notera souvent seulement (M,Φ) une variété G-hamiltonienne, en sous-entendant Ω et G, et (M,L) une variété G-hamiltonienne préquantifiée, ou simplement M, et toutes ces données sont sous-entendues.

Soit M une variété G-hamiltonienne ayant une application moment Φ propre. Considérons la fibre en 0 de Φ ; c'est un G-espace. On peut donc former l'espace topologique quotient $\mathrm{red}_0(M)=\Phi^{-1}(0)/G$, appelé *espace réduit de M en* 0. Plaçons-nous dans la situation idéale, lorsque G agit librement dans $\Phi^{-1}(0)$. Alors 0 est une valeur régulière de Φ et $\Phi^{-1}(0)$ est une variété. De plus, l'espace topologique $\mathrm{red}_0(M)$ hérite d'une structure de variété symplectique compacte. Si (M,L) est préquantifiée, le fibré $L|_{\Phi^{-1}(0)}/G$ est un fibré de Kostant-Souriau sur $\mathrm{red}_0(M)$ noté $\mathrm{red}_0(L)$. Réciproquement, si 0 est une valeur régulière de Φ, alors $\Phi^{-1}(0)$ est une variété, et on voit grâce à l'équation de Hamilton que toutes les orbites de G dans $\Phi^{-1}(0)$ sont de dimension $\dim G$. Alors $\mathrm{red}_0(M)=\Phi^{-1}(0)/G$ est une variété qui n'est pas nécessairement lisse, mais dont les singularités sont de type quotient par un groupe fini (une V-variété) et $\mathrm{red}_0(L)=L|_{\Phi^{-1}(0)}/G$ est un V-fibré sur $\mathrm{red}_0(M)$.

2.3. Un exemple fondamental : les orbites coadjointes

Une orbite coadjointe $O_a = G\cdot a$ est munie d'une unique structure d'espace G-hamiltonien pour laquelle l'application moment est *l'injection canonique* de O_a dans $\mathfrak{g}^*$. L'orbite $G\cdot(-a)$ est isomorphe à l'espace opposé O_a^-.

On dit qu'une forme $a\in\mathfrak{g}^*$ est *entière* s'il existe un caractère χ de $G(a)$ de différentielle ia sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}(a)$. Comme $G(a)$ est connexe, ce caractère – s'il existe – est unique. On note $\mathbb{C}_\chi$ la représentation de $G(a)$ dans $\mathbb{C}$ par multiplication par χ. On fait agir $u\in G(a)$ à droite sur $(g,z)\in G\times\mathbb{C}_\chi$ par $(g,z)\cdot u=(gu,\chi(u^{-1})z)$ et $G\times_{G(a)}\mathbb{C}_\chi=(G\times\mathbb{C}_\chi)/G(a)$ est l'unique fibré de Kostant-Souriau sur $G/G(a)=O_a$. Si $\lambda\in\mathfrak{t}^*$, l'orbite coadjointe $O_\lambda\subset\mathfrak{g}^*$ de λ par le groupe G est entière si et seulement si $\Lambda=i\lambda$ est un poids. Désignons par L_λ son fibré de Kostant-Souriau. Les orbites préquantifiables (ou entières) paramétrisent donc les représentations irréductibles de G.

Soit (M,Φ) une variété hamiltonienne d'application moment propre et soit O_a l'orbite coadjointe de $a\in\mathfrak{g}^*$. L'image réciproque $\Phi^{-1}(O_a)$ est stable par G. On peut donc former l'espace topologique quotient $\mathrm{red}_a(M)=\Phi^{-1}(O_a)/G=\Phi^{-1}(a)/G(a)$. L'espace $M\times O_a^-$ est une variété symplectique avec moment $\Phi_a(m,f)=\Phi(m)-f$ si $m\in M$ et $f\in O_a^-$. On a $\mathrm{red}_0(M\times O_a^-)=\mathrm{red}_a(M)$. On dit que $\mathrm{red}_a(M)$ est *l'espace réduit de M au point a.*

En suivant Meinrenken-Sjamaar, on dit que $a\in\mathfrak{g}^*$ est une *valeur quasi régulière*, si les orbites de $G(a)$ dans $\Phi^{-1}(a)$ sont toutes de même dimension. L'équation de Hamilton implique que $\Phi^{-1}(a)$ est une sous-variété de M et que $\mathrm{red}_a(M)=\Phi^{-1}(a)/G(a)$

est une V-variété. Si O_λ est entière et (M, L) préquantifiée, alors $M \times O_\lambda^-$ est préquantifiée par $L \otimes L_{-\lambda}$. On obtient alors un fibré de Kostant-Souriau sur $\mathrm{red}_0(M \times O_\lambda^-) = \mathrm{red}_\lambda(M)$.

2.4. Le polytope de Kirwan

Soit (M, Φ_G) une variété G-hamiltonienne compacte et connexe. D'après le théorème de Kirwan [22] (qui généralise le théorème de Atiyah-Guillemin-Sternberg) l'ensemble $\mathrm{Kir}_G(M) := \Phi_G(M) \cap \mathfrak{c}$ est un polytope convexe. Il est appelé *le polytope de Kirwan*. Le polytope $\mathrm{Kir}_G(M) \subset \mathfrak{c}$ est contenu dans le polytope $\mathrm{Kir}_T(M) \subset \mathfrak{t}^*$ pour l'action de T, et $\mathrm{Kir}_T(M)$ est l'enveloppe convexe de l'union des transformées de $\mathrm{Kir}_G(M)$ par W_G .

On note $\mathrm{Kir}(M)$ le polytope de Kirwan de M, si le groupe G est fixé.

Considérons le cas où $G = T$ est un tore. Écrivons $M^T = \bigcup_{P \in F} P$ où F est l'ensemble fini des composantes connexes de M^T. Alors le polytope $\mathrm{Kir}(M) = \Phi(M)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble fini $\{\Phi(P), P \in F\}$. C'est le théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg [2], [15]. De plus, si s est un sommet de $\mathrm{Kir}(M)$, alors $\Phi^{-1}(s)$ est une composante connexe de M^T. Dans ce cas, l'espace réduit de M au point s est simplement cette composante connexe.

Il est difficile de décrire le polytope $\mathrm{Kir}(M) = \Phi(M) \cap \mathfrak{c}$ lorsque G n'est pas un tore (et encore plus difficile de décrire les espaces réduits). Par exemple, ce n'est que récemment que Klyachko [23] a montré que les inégalités de Horn décrivaient effectivement le polytope de Kirwan d'un produit de deux orbites coadjointes de $U(r)$. Voici un exemple pour $G = U(3)$. On identifie $\mathfrak{g}^*$ à l'espace des matrices hermitiennes. L'action de G est par conjugaison. Soient

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \text{ et } \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_3.$$

Par définition, le polytope de Kirwan de $O_\alpha \times O_\beta$ est l'ensemble de tous les éléments

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3,$$

tels qu' il existe deux matrices hermitiennes A, B conjuguées respectivement à α et β avec $\gamma = A + B$. Naturellement, on a

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

Le polytope de Kirwan est l'intersection de la chambre de Weyl $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3$ avec le polytope défini par les 6 inégalités :

$$\gamma_1 \leqslant \alpha_1 + \beta_1,$$
$$\gamma_2 \leqslant \min(\alpha_2 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_2),$$

$$\gamma_3 \leqslant \min(\alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_1, \alpha_1+\beta_3),$$
$$\gamma_1+\gamma_2 \leqslant \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2,$$
$$\gamma_1+\gamma_3 \leqslant \min(\alpha_1+\alpha_3+\beta_1+\beta_2, \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_3),$$
$$\gamma_2+\gamma_3 \leqslant \min(\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2, \alpha_1+\alpha_2+\beta_2+\beta_3, \alpha_1+\alpha_3+\beta_1+\beta_3),$$

et l'égalité

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3.$$

Voici le dessin de ce polytope, dans le plan $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$ pour $\alpha=(4,2,-6)$, et $\beta=(5,-1,-4)$:

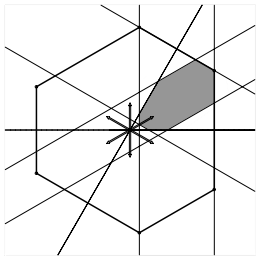


FIGURE 3. Les deux polytopes de Kirwan pour T et pour G

3. QUANTIFICATION

3.1. Indice d'opérateurs elliptiques

Soient U une variété (non nécessairement compacte) et $\mathcal{S}$ un fibré vectoriel complexe gradué $\mathcal{S} := \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^-$ sur U. Notons p la projection de l'espace cotangent T^*U sur U. Soit σ un homomorphisme C^∞ entre les fibrés vectoriels $p^*\mathcal{S}^+$ et $p^*\mathcal{S}^-$. En d'autres termes, c'est la donnée pour tous $m \in U$ et $\xi \in T^*_mU$ d'une application linéaire $\sigma(m,\xi) : \mathcal{S}^+_m \to \mathcal{S}^-_m$ (variant différentiablement en (m,ξ)). On dit brièvement que σ est *un symbole sur* U. On note $\mathrm{Char}(\sigma)$ l'ensemble constitué des (m,ξ) tels que $\sigma(m,\xi)$ ne soit pas inversible. On dit que σ est *un symbole elliptique* si l'ensemble $\mathrm{Char}(\sigma)$ est *compact* ; par exemple U est compacte et σ inversible en dehors de la section nulle de T^*U. L'indice $\mathrm{Indice}_U(\sigma)$ d'un symbole elliptique σ est défini par Atiyah-Singer [6]. C'est un entier relatif qui ne dépend que de la classe d'homotopie stable de σ, autrement dit de la classe de σ dans le $\mathbb{Z}$-module $K(T^*U)$.

Soit G un groupe compact opérant sur U. Notons T^*_GU le sous-ensemble de T^*U formé des éléments (m,ξ) tels que $\langle \xi, \mathfrak{g}_m \rangle = 0$. On dit qu'un symbole σ est G-*transversalement elliptique*, si σ est G-invariant et si $\mathrm{Char}(\sigma) \cap T^*_GU$ est compact. L'indice $\mathrm{Indice}^G_U(\sigma)$ d'un symbole transversalement elliptique σ est alors défini par

Atiyah [1] ; c'est une représentation à trace de G qui ne dépend que de la classe d'homotopie stable de σ, autrement dit de la classe de σ dans $K(T^*_G U)$.

Voici la définition de l'indice pour les symboles polynomiaux homogènes et pour *une variété compacte* M : si $\sigma(m,\xi)$ est un polynôme homogène en ξ et inversible en dehors de la section nulle, on peut trouver un opérateur différentiel $D(\sigma) : \Gamma(M,\mathcal{S}^+) \to \Gamma(M,\mathcal{S}^-)$ dont le symbole principal est σ. D'après la théorie des opérateurs elliptiques, la dimension du noyau de $D(\sigma)$ est finie, ainsi que la codimension dans $\Gamma(M,\mathcal{S}^-)$ de l'image de $\Gamma(M,\mathcal{S}^+)$ par $D(\sigma)$. L'indice de σ est alors défini par

$$\mathrm{Indice}_M(\sigma) = \dim \mathrm{Ker}(D(\sigma)) - \dim \mathrm{Coker}(D(\sigma)).$$

Si G est un groupe compact agissant sur M et σ un symbole transversalement elliptique G-invariant, alors l'indice de σ est la représentation virtuelle

$$\mathrm{Indice}_{M,G}(\sigma) = \mathrm{Ker}(D(\sigma)) - \mathrm{Coker}(D(\sigma))$$

du groupe G. Plus précisément, considérons, pour chaque $\tau \in \widehat{G}$, l'espace vectoriel $\Gamma(M,\mathcal{S}^\pm)_\tau$ des sections de $\mathcal{S}^\pm$ engendrant une représentation de type τ. Considérons l'opérateur $D(\sigma)_\tau : \Gamma(M,\mathcal{S}^+)_\tau \to \Gamma(M,\mathcal{S}^-)_\tau$. Alors $\mathrm{Ker}(D(\sigma)_\tau)$ et $\mathrm{Coker}(D(\sigma)_\tau)$ sont des espaces de dimension finie. Ainsi, $\mathrm{Ker}(D(\sigma)_\tau) = n^+_\tau \tau$ et $\mathrm{Coker}(D(\sigma)_\tau) = n^-_\tau \tau$, avec n^+_τ et n^-_τ finis. On définit

$$\mathrm{Indice}_{M,G}(\sigma) := \oplus_{\tau\in\widehat{G}}(n^+_\tau - n^-_\tau)\tau.$$

C'est une représentation (virtuelle) à trace de G. (Dans le cas elliptique, seul un nombre fini de représentations τ peuvent apparaître avec multiplicités non nulles n^+_τ et n^-_τ dans la somme ci-dessus.)

Si G est fixé, on écrit $\mathrm{Indice}_M(\sigma)$ au lieu de $\mathrm{Indice}_{M,G}(\sigma)$. Chaque représentation irréductible de G intervient avec une multiplicité finie dans $\mathrm{Indice}_{M,G}(\sigma)$. En particulier, $[\mathrm{Indice}_M(\sigma)]^G$ est la multiplicité de la représentation triviale. C'est donc un nombre entier, positif ou négatif. Si un groupe compact H commute avec G, et laisse invariant tout ce qui est nécessaire, alors $[\mathrm{Indice}_M(\sigma)]^G$ est une représentation virtuelle (de dimension finie) de H.

Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel complexe G-équivariant sur M et σ un symbole elliptique G-invariant sur M, alors $\sigma_{\mathcal{E}}(m,\xi)\otimes \mathrm{Id} : \mathcal{S}^+_m \otimes \mathcal{E}_m \to \mathcal{S}^-_m \otimes \mathcal{E}_m$ est aussi un symbole elliptique G-invariant. On dit que $\sigma\otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est *le symbole* σ *tordu par* $\mathcal{E}$. Supposons pour simplifier que M admette une structure $\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}$. Il existe alors un symbole elliptique $c \in K_G(T^*M)$ tel que tout autre symbole elliptique σ soit équivalent à $c \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. En d'autres termes, c est un générateur de $K_G(T^*M)$ sur $K_G(M)$. Un générateur n'est défini qu'à tensorisation par un fibré linéaire près. Considérons un instant le cas d'une variété compacte complexe M et notons J l'endomorphisme de TM donné par la multiplication par i. On définit $\mathcal{S} = \Lambda T^*M$, que l'on considère comme un fibré vectoriel *complexe* gradué en formes paires et impaires. Choisissons une structure

hermitienne G-invariante sur T^*M. Pour $\xi \in T^*M$, notons $\varepsilon(\xi)$ la multiplication par ξ. Finalement

$$c^{J,M}(m,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_m(\xi) + \varepsilon_m(\xi)^*) : \Lambda^{\text{pair}}T^*_mM \to \Lambda^{\text{impair}}T^*_mM \tag{2}$$

définit un symbole générateur $c^{J,M}$ de $K_G(T^*M)$ sur $K_G(M)$ (le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ici est inutile, mais il est traditionnellement là pour que le carré de $c^{J,M}$ soit égal à $-\|\xi\|^2$). On note $c^J := c^{J,M}$ si M est fixée. L'opérateur $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ (considéré comme opérateur de $\Gamma(M, \Lambda^{\text{pair}}T^*M)$ dans $\Gamma(M, \Lambda^{\text{impair}}T^*M)$) est un opérateur de symbole $c^{J,M}$. Si $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe G-équivariant sur M, alors l'espace virtuel $\text{Indice}_M(c^J \otimes I_{\mathcal{E}})$ coïncide avec la représentation virtuelle $\sum_{k=0}^{\dim_{\mathbb{C}} M}(-1)^k H^k(M, \mathcal{O}(\mathcal{E}))$ dont la dimension virtuelle est donnée par le théorème de Riemann-Roch. Pour cette raison nous notons

$$RR^J(M,\mathcal{E}) = \text{Indice}_M(c^J \otimes I_{\mathcal{E}}).$$

Soit M une G-variété compacte de dimension paire, pourvue d'une structure presque-complexe G-invariante. Ceci veut dire qu'il existe $J \in \Gamma(M, \text{End}(TM))$ tel que $J^2 = -1$, et G-invariant, mais J n'est pas forcément associée à des cartes complexes de M (qui peut-être n'a aucune structure complexe). On peut quand même définir c^J par la formule (2). On note encore

$$RR^J(M,\mathcal{E}) = \text{Indice}_M(c^J \otimes I_{\mathcal{E}}).$$

C'est une représentation virtuelle de dimension finie de G.

3.2. Quantification d'une variété symplectique compacte

Soit (M, Ω, Φ) une variété symplectique compacte munie d'une action hamiltonienne de G. Si $E_1, \ldots, E_N$ est une base de $\mathfrak{g}$, les flots hamiltoniens des fonctions $\phi_k = \langle \Phi, E_k \rangle$ engendrent l'action de G sur M. On peut choisir une structure J presque complexe et G-invariante. Grâce à un choix de J, nous obtenons un générateur c^J de $K_G(TM)$ et une application $RR^J(M,.) : K_G(TM) \to R(G)$ associant à tout fibré vectoriel G-équivariant $\mathcal{E}$ sur M la représentation $RR^J(M,\mathcal{E})$. Cette application ne dépend que de la classe d'homotopie de J. Un choix particulièrement heureux par la suite sera celui d'une *structure J adaptée à Ω*, c'est-à-dire vérifiant $\Omega(Jv, Jw) = \Omega(v,w)$ et $\Omega(v, Jv) \geqslant 0$ pour tous $v, w \in T_mM$. Nous écrivons J_h pour la structure adaptée, h comme heureux. Elle est bien définie à homotopie près.

DÉFINITION 3.1. — *Soit (G, M, Ω, Φ) une variété hamiltonienne compacte munie d'un fibré de Kostant-Souriau L. Soient $\phi_1 = \langle \Phi, E_1 \rangle, \ldots, \phi_N = \langle \Phi, E_N \rangle$ les fonctions dont les flots hamiltoniens engendrent l'action de G. Soit J_h une structure presque-complexe G-invariante et adaptée. Posons*

$$Q(M) := RR^{J_h}(M, L).$$

Le groupe G agit sur $Q(M)$. Notons $\mathcal{L}^Q(X)$ l'action infinitésimale de $X \in \mathfrak{g}$ dans $Q(M)$. On définit :

$$Q(\phi_k) := -i\mathcal{L}^Q(X_k).$$

Comprendre les valeurs propres des opérateurs $Q(\phi_k)$ et leurs multiplicités revient donc à décomposer $Q(M)$ en représentations irréductibles de G, puis à étudier le même problème pour une représentation de G.

Remarque 3.2. — Nous sous-entendons le fibré L dans la notation. En effet, comme la classe de Chern (équivariante) de L est fixée, le résultat $Q(M)$ ne dépend que de M.

Remarque 3.3. — Ici, nous prenons pour la quantification une convention « holomorphe », en suivant Guillemin-Sternberg, en choisissant une structure presque-complexe adaptée. Mes propres préférences pour la quantification vont à la convention Spin. Les orbites quantifiables sont alors les formes admissibles au sens de Duflo. Cependant, bien que le formalisme Spin soit plus intrinsèque, il est aussi plus lourd, et les résultats sont, pour le moment, moins plaisants. On donnera cependant un résultat dans ce cadre dans la section 7.

Voyons ce que donne la quantification pour une orbite coadjointe. Soit $\Lambda = i\lambda$ un poids dominant. Alors pour la structure complexe J_λ adaptée à la structure symplectique de O_λ, et pour le fibré de Kostant-Souriau canonique L_λ sur O_λ, nous avons

$$Q(O_\lambda) = RR^{J_\lambda}(O_\lambda, L_\lambda) = \tau_G(\Lambda) \tag{3}$$

et

$$Q(O_\lambda^-) = \tau_G(\Lambda)^*. \tag{4}$$

Notre travail consiste à comprendre la décomposition de $Q(M) = RR^{J_h}(M, L)$ en représentations irréductibles de G en fonction de l'application moment Φ. On note m la fonction sur le support de $RR^{J_h}(M, L)$ telle que $Q(M) = \oplus_{\tau \in \widehat{G}} m(\tau)\tau$. Pour analyser géométriquement toutes les multiplicités, il suffit de comprendre géométriquement la fonction $\dim Q(M)^G$ pour toute variété préquantifiée M. En effet, on a $m(\tau) = \dim(RR^{J_h}(M, L) \otimes \tau^*)^G$. En utilisant le modèle donné en (4), on voit que

$$m(\tau_G(\Lambda)) = Q(M \times O_\lambda^-)^G.$$

3.3. Comportement des multiplicités et conjecture de Guillemin-Sternberg

Soient (G, M, Ω, Φ) une variété hamiltonienne compacte préquantifiable et L un fibré de Kostant-Souriau sur M. Alors, pour tout $n > 0$, la variété $(M, n\Omega, n\Phi)$ est hamiltonienne, avec fibré de Kostant-Souriau L^n et polytope de Kirwan $n \operatorname{Kir}_G(M)$.

Une fonction c sur $\mathbb{Z}$ est dite *périodique*, s'il existe un entier N tel que $c(n + N) = c(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Une fonction f sur $\mathbb{Z}$ est appelée *un polynôme de degré d à coefficients périodiques*, si $f(n) = \sum_{j=0}^d c_j(n) n^j$, les fonctions $c_j(n)$ étant des fonctions périodiques sur $\mathbb{Z}$. Meinrenken et Sjamaar ont établi le beau théorème suivant, qui est une profonde généralisation du théorème d'Ehrhart pour les polytopes à sommets entiers.

THÉORÈME 3.4 (Meinrenken-Sjamaar). — *La fonction* $n \mapsto \dim RR^{J_h}(M, L^n)^G$ *sur l'ensemble* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *est la restriction à* $\mathbb{N}$ *d' un polynôme sur* $\mathbb{Z}$ *à coefficients périodiques. Le degré de ce polynôme est égal à* $\dim M/2 - \dim G$.

Ce résultat s'obtiendra non pas directement mais comme conséquence d'une réalisation géométrique de $RR^{J_h}(M, L)^G$ en tant qu'espace de fonctions sur l'espace réduit $\mathrm{red}_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$. Autrement dit, Meinrenken-Sjamar démontrent la

CONJECTURE DE GUILLEMIN-STERNBERG. — $Q(M)^G = Q(\mathrm{red}_0(M))$.

Nous expliquerons en détail la signification du deuxième membre de cette égalité dans la sous-section 5.1, car en général l'espace topologique $\mathrm{red}_0(M)$ n'est pas lisse. Par cette voie géométrique, on identifiera $RR^{J_h}(M, L^n)^G$ à l'espace vectoriel $RR^{J_h}(M_G, L_G^n)$ où M_G est une V-variété et L_G un V-fibré. La formule de Riemann-Roch-Kawasaki nous assurera alors le comportement « polynôme à coefficients périodiques » de la fonction $n \mapsto \dim RR^{J_h}(M, L^n)^G$.

4. PREMIÈRES TENTATIVES DANS LE CAS D'UN TORE T

Soit T un tore agissant de manière hamiltonienne sur une variété symplectique compacte M. On suppose M préquantifiée. Écrivons $Q(M) = \oplus_{\Lambda \in \widehat{T}} m(\lambda) e^{\Lambda}$. Ici $\Lambda = i\lambda$ est dans le réseau des poids. La conjecture de Guillemin-Sternberg dans le cas d'un tore affirme que $m(\lambda) = Q(\Phi^{-1}(\lambda)/T)$. La première idée qui vienne à l'esprit de tout un chacun pour calculer les multiplicités $m(\lambda)$ est d'utiliser la formule d'Atiyah-Bott-Segal-Singer [3],[4],[5] pour l'indice équivariant. On verra que, en dehors de situations très particulières, cette formule n'entraîne pas immédiatement un calcul des multiplicités $m(\lambda)$ en fonction de la fibre $\Phi^{-1}(\lambda)$. On peut cependant obtenir rapidement quelques résultats qualitatifs sur le support de la représentation $Q(M)$.

Considérons plus généralement la représentation $RR^J(M, \mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel T-équivariant et J une structure presque complexe T-invariante quelconque. Décomposons $RR^J(M, \mathcal{E}) = \oplus_{\Lambda \in \widehat{T}} n(\lambda) e^{\Lambda}$. Notons F l'ensemble des composantes connexes P de M^T. Chacune d'entre elles est une sous-variété symplectique connexe de M. Les poids de T sur $\mathcal{E}|_p$ ne varient pas lorsque p parcourt P ; notons $\mathrm{Poids}(P, \mathcal{E}) \subset i\mathfrak{t}^*$ leur ensemble. On note $\mathrm{Poids}(\mathcal{E}) = \bigcup_{P \in F} \mathrm{Poids}(P, \mathcal{E})$. On note $\mathrm{Poids}(P, J)$ les poids de T dans l'espace complexe normal $(TM_p, J)/(TP_p, J)$ pour un $p \in P$ (i.e. les poids non nuls dans l'espace complexe (TM_p, J)). La formule de l'indice d'Atiyah-Bott-Segal-Singer s'écrit sous la forme

$$\mathrm{Tr}_{RR^J(M,\mathcal{E})} = \sum_{P \in F} \chi_P$$

d'une somme de fonctions rationnelles χ_P sur T, attachées à chaque composante irréductible P de la variété fixe M^T. Le dénominateur de χ_P est un produit d'éléments

$(1-e^{\alpha})$ avec $\alpha \in \mathrm{Poids}(P,J)$. Le numérateur est une combinaison linéaire de e^{ν_k} où les ν_k sont des poids appartenant à $\mathrm{Poids}(P,\mathcal{E})$. La fonction χ_P ne dépend que de P, du fibré normal à P dans M et de $\mathcal{E}|_P$. Par exemple, si P est un point $\{p\}$, on a

$$\chi_P(\exp X) = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}_p}(\exp X)}{\prod_{\alpha\in\mathrm{Poids}(p,J)}(1-e^{\langle\alpha,X\rangle})}.$$

Pour tirer des informations de cette formule, il est nécessaire de prendre des développements compatibles de chaque fonction rationnelle

$$\frac{1}{\prod_{\alpha\in\mathrm{Poids}(p,J)}(1-e^{\langle\alpha,X\rangle})}$$

en une série infinie de caractères. Ce n'est qu'après addition des contributions de tous les points fixes que l'on obtient une somme finie de caractères. Le seul cas où il est facile d'utiliser ce développement en séries de la formule de l'indice pour calculer $n(\lambda)$ est celui où Λ est un élément extrémal.

Définition 4.1. — *Un poids $\Lambda \in \mathrm{Poids}(\mathcal{E})$ est dit extrémal s'il existe $\xi \in \mathfrak{t}^*$ tel que $i\langle\xi, \mu-\Lambda\rangle > 0$ pour tout μ poids de $\mathcal{E}$ différent de Λ.*

En particulier, si $\mathrm{Poids}(\mathcal{E}) = \{\Lambda\}$, alors le point Λ est extrémal. Notons $\mathrm{Kir}(\mathcal{E}) \subset i\mathfrak{t}^*$ l'enveloppe convexe des poids de $\mathcal{E}$.

Proposition 4.2. — *Soient $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel T-équivariant sur M et J une structure presque-complexe G-invariante sur M. Alors le support de la représentation $RR^J(M,\mathcal{E})$ est contenu dans* $\mathrm{Kir}(\mathcal{E})$.

Preuve (esquisse). — Démontrons par exemple que si $\mathrm{Poids}(\mathcal{E}) = \{0\}$, et si les points fixes sont isolés, alors notre représentation $RR^J(M,\mathcal{E})$ est un multiple de la représentation triviale. L'espace $RR^J(M,\mathcal{E})$ s'écrit comme une somme finie de poids :

$$RR^J(M,\mathcal{E}) = \oplus_{\Lambda\in\widehat{T}} n(\lambda) e^{\Lambda}.$$

La fonction $\mathrm{Tr}_{RR^J(M,\mathcal{E})}$ s'étend à $\exp\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Nous calculons $\mathrm{Tr}_{RR^J(M,\mathcal{E})}(\exp itX)$ par la formule des points fixes, pour un $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\langle\alpha, X\rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in \bigcup_P \mathrm{Poids}(P,J)$. La fonction $1/(1-e^{-x})$ est bornée par 1 si x tend vers $+\infty$, tandis que $1/(1-e^{x})$ tend vers 0 si x tend vers $+\infty$. Si $\mathrm{Poids}(\mathcal{E}) = \{0\}$, on voit donc que la fonction $t \mapsto \mathrm{Tr}_{RR^J(M,\mathcal{E})}(\exp itX)$, avec X générique, reste bornée lorsque t tend vers $\pm\infty$. Ceci n'est possible que si $RR^J(M,\mathcal{E})$ est un multiple de la représentation triviale.

En particulier, si $[\mathbb{C}]$ est le fibré trivial, la représentation $RR^J(M,[\mathbb{C}])$ est un multiple de la représentation triviale.

Définition 4.3. — *Notons*

$$\mathrm{Todd}^J(M) = \dim RR^J(M,[\mathbb{C}]).$$

C'est un entier positif ou négatif, qu'on appellera le J-genre de Todd.

Revenons à la décomposition de $RR^J(M,L) = \oplus_{\Lambda\in\widehat{T}} m(\lambda)e^\Lambda$ dans le cas d'un tore et du fibré de Kostant-Souriau. On voit d'après la proposition 4.2 que si L est un fibré de Kostant-Souriau sur une variété symplectique compacte (M,Ω) et si 0 n'est pas dans $\mathrm{Kir}(M)$, alors $m(0) = 0$, *quelle que soit la structure presque complexe* J. Par contre, cette proposition est beaucoup plus délicate dans le cas d'un groupe compact non abélien, et elle n'est d'ailleurs vraie que si J est adaptée. Par exemple, soient $G = SU(2)$ et $O_{-i\alpha}$ l'orbite coadjointe de $-i\alpha$ où α est la racine. Dans ce cas, le polytope de Kirwan $\mathrm{Kir}(O_{-i\alpha})$ est égal à $\{-i\alpha\}$. Soit L le fibré de Kostant-Souriau sur $O_{-i\alpha}$. Il y a deux structures presque-complexes G-invariantes sur $O_{-i\alpha}$, à savoir J_h qui est adaptée et $-J_h$ qui ne l'est pas. On a

$$\mathrm{Tr}_{RR^{-J_h}(O_{-i\alpha},L)} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \frac{e^{2i\theta}}{1-e^{2i\theta}} + \frac{e^{-2i\theta}}{1-e^{-2i\theta}} = -1$$

et donc la multiplicité de la représentation triviale dans $RR^{-J_h}(O_{-i\alpha},L)$ est -1. Par contre, comme nous l'avons déjà fait remarquer, $RR^{J_h}(O_{-i\alpha},L)$ est irréductible (c'est la représentation adjointe) et, comme il se doit, la multiplicité de la représentation triviale dans $RR^{J_h}(O_{-i\alpha},L)$ est égale à 0.

Résumons ce qui découle de ces premières observations de la formule des points fixes.

PROPOSITION 4.4. — *Soit (M,Φ) une variété symplectique compacte, munie d'une action hamiltonienne d'un tore T.*

– Si $\mathcal{E}$ est un fibré sur M tel que $\mathrm{Poids}(\mathcal{E}) = \{0\}$*, alors $RR^J(M,\mathcal{E})$ est un multiple de la représentation triviale, quel que soit J.*

– Si L est un fibré de Kostant-Souriau sur M, alors les poids dans le support de la représentation $Q(M) = RR^J(M,L)$ appartiennent tous au polytope $i\Phi(M)$, quel que soit J. Si J_h est adaptée et si λ est un sommet de $\Phi(M)$, alors $m(\lambda) = Q(\Phi^{-1}(\lambda))$.

– Si J_h est adaptée, les poids dans le support de la représentation $RR^{-J_h}(M,L)$ appartiennent tous à l'intérieur du polytope $i\Phi(M)$.

5. LA QUANTIFICATION COMMUTE À LA RÉDUCTION !

5.1. Définition de $RR^{J_h}(\mathrm{red}_a M, \mathrm{red}_a \mathcal{E})$, pour a quasi-régulière

Soient (M,Φ) une G-variété hamiltonienne compacte et $\mathcal{E}$ un fibré G-équivariant sur M. Soit J_h la structure presque-complexe adaptée et G-équivariante.

Plaçons-nous dans la situation idéale où G agit librement sur $\Phi^{-1}(0)$. Restreignons le fibré $\mathcal{E}$ à $\Phi^{-1}(0)$. Alors le groupe G agit librement sur $\mathcal{E}|_{\Phi^{-1}(0)}$ et $\mathcal{E}|_{\Phi^{-1}(0)}/G$ est un fibré vectoriel sur $\mathrm{red}_0(M)$, noté $\mathrm{red}_0\mathcal{E}$. De plus $\mathrm{red}_0(M)$ hérite naturellement d'une forme symplectique provenant de $\Omega|_{\Phi^{-1}(0)}$, elle a donc sa structure presque-complexe adaptée que l'on note encore J_h ; on peut alors définir $RR^{J_h}(\mathrm{red}_0(M), \mathrm{red}_0(\mathcal{E}))$. En

particulier, si L est un fibré de Kostant-Souriau sur M, l'espace $Q(\mathrm{red}_0\, M)$ est défini : c'est l'espace $RR^{J_h}(\mathrm{red}_0(M), \mathrm{red}_0\, L)$.

Dans le cadre algébrique, l'espace $\Phi^{-1}(0)/G$ a toujours une structure de variété algébrique éventuellement singulière et on peut donc définir $RR^{J_h}(\mathrm{red}_0(M), \mathrm{red}_0(\mathcal{E}))$ grâce au théorème de Riemann-Roch. Dans ce cas, R. Sjamaar [35] avait étendu le théorème de Guillemin-Sternberg [16] aux fibres singulières. Dans le cas général d'une variété hamiltonienne compacte, comme montré par Sjamaar-Lerman [37], l'espace $\Phi^{-1}(0)/G$ est toujours un espace symplectique stratifié, on peut donc définir sa dimension comme la dimension de sa plus grande strate. On peut aussi définir son volume symplectique $\mathrm{vol}(\mathrm{red}_0\, M)$. Mais il est plus difficile de définir le nombre $Q(\mathrm{red}_0\, M)$. Nous allons le faire par déformation.

Donnons tout d'abord une construction d'un espace virtuel $RR^{J_h}(\mathrm{red}_0\, M, \mathrm{red}_0\, \mathcal{E})$ dans le cas où 0 est valeur quasi-régulière et le fibré $\mathcal{E}$ est un fibré G-équivariant quelconque sur M.

Comme J_h est adaptée, nous avons $\mathfrak{g}_m \cap J_h(\mathfrak{g}_m) = \{0\}$. Notons $\mathrm{red}_0(T^*_m M)$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}_m \oplus J_h\mathfrak{g}_m$ dans $T^*_m M$. C'est un sous-espace vectoriel complexe de $(T^*_m M, J_h)$ de rang constant. On forme le *fibré complexe* $\mathrm{red}_0(T^*M)$ sur $\Phi^{-1}(0)$ de fibre $\mathrm{red}_0(T^*_m M)$. On note P_0 une projection G-équivariante de ΛT^*M sur $\Lambda(\mathrm{red}_0(T^*M))$. Alors

$$\mathrm{red}_0(c^{J_h})(m,\xi) : \Lambda^{\mathrm{pair}}(\mathrm{red}_0(T^*M)) \otimes \mathcal{E}_m \to \Lambda^{\mathrm{impair}}(\mathrm{red}_0(T^*M)) \otimes \mathcal{E}_m,$$

défini par

$$\mathrm{red}_0(c^{J_h})(m,\xi) := (P_0 \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_m}) c^{J_h}(m,\xi),$$

est un symbole transversalement elliptique sur la variété $\Phi^{-1}(0)$. La propriété suivante résulte presque immédiatement des définitions.

Proposition 5.1. — *Si* 0 *est une valeur régulière et si* G *opère librement dans* $\Phi^{-1}(0)$*, on a*

$$RR^{J_h}(\mathrm{red}_0(M), \mathrm{red}_0(\mathcal{E})) = [\mathrm{Indice}_{\Phi^{-1}(0)}(\mathrm{red}_0(c^{J_h}))]^G.$$

Remarquons maintenant que l'on peut toujours définir $\mathrm{Indice}_{\Phi^{-1}(0)}(\mathrm{red}_0(c^{J_h}))$ du moment que 0 est une valeur quasi-régulière de Φ. Dans ce cas $\Phi^{-1}(0)$ est une variété compacte et le symbole $\mathrm{red}_0(c^{J_h})$ est un symbole transversalement elliptique sur $\Phi^{-1}(0)$, ce qui assure que $\mathrm{Indice}_{\Phi^{-1}(0)}(\mathrm{red}_0(c^{J_h}))$ est une représentation virtuelle de G, avec multiplicité finie de chaque représentation de G. En fait, l'espace des orbites $\mathrm{red}_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$ est « presque » une variété symplectique compacte (une variété à singularités quotients) et on pourrait définir intrinsèquement l'entier relatif $RR^{J_h}(\mathrm{red}_0(M), \mathrm{red}_0(\mathcal{E}))$. Toutefois, nous éludons ici cette question délicate et nous posons la

DÉFINITION 5.2. — *Si* 0 *est une valeur quasi-régulière de* Φ*, on définit*

$$RR^{J_h}(\mathrm{red}_0(M), \mathrm{red}_0(\mathcal{E})) = [\mathrm{Indice}_{\Phi^{-1}(0)}(\mathrm{red}_0(c^{J_h}))]^G.$$

Soit $a \in \mathfrak{g}^*$ une valeur quasi-régulière. Considérons sur $M \times O_a^-$ le fibré vectoriel $\mathcal{E} \otimes [\mathbb{C}]$ produit extérieur du fibré $\mathcal{E} \to M$ et du fibré *trivial* $[\mathbb{C}] \to O_a^-$. Alors 0 est une valeur quasi-régulière pour l'application moment de $M \times O_a^-$.

DÉFINITION 5.3. — *Soit* a *une valeur quasi-régulière de* Φ*. On définit*

$$RR^{J_h}(\mathrm{red}_a(M), \mathrm{red}_a(\mathcal{E})) = RR^{J_h}(\mathrm{red}_0(M \times O_a^-), \mathrm{red}_0(\mathcal{E} \otimes [\mathbb{C}])).$$

5.2. Les théorèmes

Nous avons maintenant introduit les notations nécessaires aux énoncés des théorèmes.

THÉORÈME 5.4 (Meinrenken-Sjamaar). — *Soit* (M, Φ) *une variété* G*-hamiltonienne compacte. Supposons que le fibré* $\mathcal{E}$ *soit le fibré de Kostant-Souriau ou le fibré trivial. Alors, pour toute valeur* $a \in \Phi(M)$*, quasi-régulière et proche de* 0*, le nombre* $\dim RR^{J_h}(\mathrm{red}_a(M), \mathrm{red}_a(\mathcal{E}))$ *est indépendant de* a*.*

Ceci permet de donner la

DÉFINITION 5.5. — *Soit* L *un fibré de Kostant-Souriau. On pose*

$$Q(\mathrm{red}_0 M) = \dim RR^{J_h}(\mathrm{red}_a(M), \mathrm{red}_a(L))$$

pour $a \in \Phi(M)$ *quasi-régulière et suffisamment proche de* 0*.*

On pose

$$\mathrm{Todd}(\mathrm{red}_0(M)) = \dim RR^{J_h}(\mathrm{red}_a(M), \mathbb{C})$$

pour $a \in \Phi(M)$ *quasi-régulière et suffisamment proche de* 0*.*

La conjecture de Guillemin-Sternberg est précisée et démontrée :

THÉORÈME 5.6 (Meinrenken-Sjamaar). — *Soit* (M, Φ) *une variété* G*-hamiltonienne compacte. Alors*

$$Q(M)^G = Q(\mathrm{red}_0 M).$$

De plus, le genre de Todd est invariant par réduction :

$$\mathrm{Todd}^{J_h}(M) = \mathrm{Todd}^{J_h}(\mathrm{red}_0 M).$$

Si l'on est effectivement dans le cas d'une variété compacte complexe, alors

$$Q(M) = \sum_{k=0}^{\dim M/2} (-1)^k H^k(M, \mathcal{O}(L)).$$

Braverman [8], Zhang [49], Wu [48] (dans le cas kählérien) et Teleman [38] (dans le cas algébrique) obtiennent l'égalité $H^k(M, \mathcal{O}(L))^G = H^k(\mathrm{red}_0(M), \mathcal{O}(\mathrm{red}_0 L))$ en chaque degré.

On peut aussi démontrer une réalisation des solutions invariantes d'indices d'opérateurs de Dirac tordus, dans le cas de fibrés Φ-positifs comme solution sur le « quotient » $\mathrm{red}_0(M)$, ou bien prouver la non existence de solutions invariantes.

THÉORÈME 5.7 (Tian-Zhang, Paradan). — *Soit (M, Φ) une variété G-hamiltonienne compacte.*

– *Soit $\mathcal{E}$ un fibré strictement Φ-positif . Si $0 \notin \Phi(M)$, nous avons*

$$[RR^{J_h}(M, \mathcal{E})]^G = 0.$$

– *Supposons que 0 soit une valeur régulière de Φ et soit $\mathcal{E}$ un fibré Φ-positif. Alors*

$$[RR^{J_h}(M, \mathcal{E})]^G = RR^{J_h}(\mathrm{red}_0 M, \mathrm{red}_0 \mathcal{E}).$$

Remarque 5.8. — Si J n'est pas adaptée à Ω, nous avons vu que le théorème 5.7 est faux. Il est cependant encore vrai dans le cas de structures $\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}$ quelconques invariantes par un tore T, comme le montrent Canas-Karshon-Tolman [9] et Paradan [33], dans le cadre d'une application moment abstraite au sens de Karshon [13].

5.3. La fonction multiplicité et les fibres de l'application moment

Soit M une variété compacte préquantifiée. Donnons maintenant une signification géométrique à la fonction $m(\tau)$ telle que $Q(M) = RR^{J_h}(M, L) = \oplus_{\tau \in \widehat{G}} m(\tau)\tau$. On obtient tout d'abord le

THÉORÈME 5.9. — *Soit G un groupe compact connexe. Le support de $Q(M)$ est contenu dans $i\,\mathrm{Kir}(M) \cap \mathrm{Poids}$.*

On paramètre $\widehat{G}$ par les représentations $Q(O_\lambda)$ associées aux orbites entières, c'est-à-dire par les représentations de plus haut poids Λ. La variété $M \times O_\lambda^-$ est préquantifiée ; on pose $Q(\mathrm{red}_\lambda(M)) = Q(\mathrm{red}_0(M \times O_\lambda^-))$.

THÉORÈME 5.10 (Meinrenken-Sjamaar). — *Soit (G, M, Ω, Φ) une variété G-hamiltonienne compacte préquantifiable munie d'un fibré de Kostant-Souriau L. Alors*

$$Q(M) = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Kir}(M), \Lambda \in \mathrm{Poids}} Q(\mathrm{red}_\lambda M) Q(O_\lambda).$$

Dans cette expression, $Q(\mathrm{red}_\lambda M)$ est un nombre (positif ou négatif) tandis que $Q(O_\lambda)$ est une représentation irréductible de G.

Remarquons que cette expression ne détermine pas le support de $Q(M)$, car les entiers $Q(\mathrm{red}_\lambda M)$ peuvent être nuls.

Il est utile de rajouter un paramètre pour comparer multiplicités et volumes. On note M_n la variété M munie de la forme symplectique $n\Omega$; l'application moment est $n\Phi$. Elle est préquantifiée et de polytope $n\,\mathrm{Kir}(M)$. On a

$$Q(M_n) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in n\,\mathrm{Kir}(M) \\ \Lambda \in \mathrm{Poids}}} q(n,\lambda) Q(O_\lambda)$$

avec $q(n,\lambda) = Q(\mathrm{red}_\lambda(M_n))$. Considérons la fonction $q(n,n\lambda)$. Remarquons que $\mathrm{red}_{n\lambda}(M_n)$ est toujours le même espace topologique stratifié $\Phi^{-1}(\lambda)/G(\lambda)$; cependant la structure symplectique sur la plus grande strate est multipliée par n. La formule de Kawasaki [19], [44] montre que $q(n,n\lambda)$ est un quasi-polynôme en n. De plus le terme de degré maximal de ce quasi-polynôme est $\mathrm{vol}(\mathrm{red}_\lambda M) n^{\dim \mathrm{red}_\lambda M/2}$.

Le polytope $\mathrm{Kir}(M)$ est l'adhérence de ses points rationnels. Les points rationnels dans $\mathrm{Kir}(M)$ sont caractérisés comme dans le cas algébrique [31] : un point rationnel λ est dans $\mathrm{Kir}(M)$ si et seulement si il existe un entier N tel que $\tau_G(n\Lambda)$ soit dans le support de $Q(M_n)$, pour tout $n \geqslant N$. Par contre, il n'est pas en général vrai que le support de $Q(M)$ consiste exactement en $i\,\mathrm{Kir}(M) \cap \mathrm{Poids}$. Un cas où ceci est vrai est le cas où M est le produit de deux orbites coadjointes avec action diagonale de $U(r)$ (dans ce cas $Q(M)$ est le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $U(r)$). C'est le théorème de saturation prouvé récemment par Knutson et Tao [24]. La formule théorique donnée ici n'est d'aucune utilité pour la démonstration de ce résultat ! Le théorème 5.10 est tout de même très beau philosophiquement. On « voit » la décomposition de $Q(M)$ comme une somme de représentations associées aux images réciproques des orbites entières de G dans $\mathfrak{g}^*$.

Exemple. La compactification de De Concini-Procesi. — Considérons d'abord le cas de $PGL(2,\mathbb{C})$. On considère l'espace $M(2,\mathbb{C})$ des matrices 2×2 complexes. Soit $M = \mathrm{Proj}(M(2,\mathbb{C})) = (M(2,\mathbb{C}) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ l'espace projectif. C'est la compactification de $PGL(2,\mathbb{C})$: on a rajouté à $PGL(2,\mathbb{C})$ l'hypersurface $\det = 0$. La variété M est munie d'une action à droite et à gauche de $SU(2) \times SU(2)$. Le fibré $\mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif de $M(2,\mathbb{C})$ est le fibré de Kostant-Souriau. Nous calculons le caractère R_k de la représentation $RR^{J_h}(M, \mathcal{O}(k))$ comme une fonction sur $T \times T$. Il y a 4 points fixes par l'action de $T \times T$, de représentants dans $M(2,\mathbb{C})$ les 4 matrices avec un seul

coefficient non nul. Il est facile de calculer la formule d'Atiyah-Bott :

$$R_k\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}\Big)$$
$$= \frac{a^{2k}b^{2k}}{(1-a^{-2})(1-b^{-2})(1-a^{-2}b^{-2})} + \frac{a^{-2k}b^{2k}}{(1-a^{2})(1-b^{-2})(1-a^{2}b^{-2})}$$
$$+ \frac{a^{2k}b^{-2k}}{(1-a^{-2})(1-b^{2})(1-a^{-2}b^{2})} + \frac{a^{-2k}b^{-2k}}{(1-a^{2})(1-b^{2})(1-a^{2}b^{2})}\,.$$

On calcule sans difficulté que comme représentation de $G \times G = SU(2) \times SU(2)$, on a

$$RR^{J_h}(M, L^k) = \oplus_{m=0}^{k} \tau_G(m\alpha) \otimes \tau_G(m\alpha)$$

comme l'indique le polytope de Kirwan pour l'action de $G \times G$. On indique ci-dessous le polytope de Kirwan pour l'action de $T \times T$, celui pour $G \times G$, et les représentations apparaissant dans RR^k.

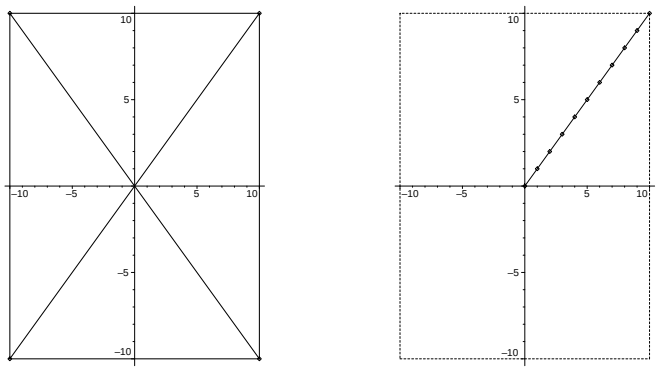


FIGURE 4

Plus généralement, considérons la compactification « magnifique » d'un groupe semi-simple adjoint quelconque.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie compacte semi-simple de groupe adjoint G, et soit $G_{\mathbb{C}}$ la complexification de G. La compactification $C(G)$ de De Concini-Procesi de $G_{\mathbb{C}}$ est une variété algébrique projective lisse, dans laquelle $G_{\mathbb{C}}$ est un ouvert de Zariski. De plus, l'action de $G_{\mathbb{C}}$ par multiplication à droite et à gauche se prolonge en une action à droite et à gauche sur $C(G)$. Soit $\Lambda = i\lambda$ un poids régulier dominant. Il existe alors une forme symplectique Ω_λ sur $C(G)$ pour laquelle l'action de $G \times G$ est hamiltonienne. Considérons le cône $C(\Pi)$ engendré par la base de racines simples Π et le cône affine $\lambda + iC(\Pi)$ dans $\mathfrak{t}^*$ de sommet λ. L'ensemble $K(\lambda) := \mathfrak{c} \cap (\lambda + iC(\Pi))$ est un polytope ; c'est un prisme : Soit w_0 l'élément le plus long du groupe de Weyl. Alors le polytope de Kirwan pour l'action hamiltonienne de $G \times G$ sur la variété symplectique $(C(G), \Omega_\lambda)$ est le polytope $(f, -w_0(f))$ avec $f \in K(\lambda)$. De plus, il existe

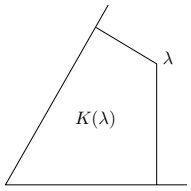


FIGURE 5

un fibré de Kostant-Souriau L_λ pour cette structure $G\times G$-hamiltonienne. La formule d'Atiyah-Bott donne

$$RR^{J_h}(C(G),L_\lambda)(\exp H_1,\exp H_2)=\sum_{w_1,w_2\in W\times W}(w_1,w_2)\cdot$$
$$\cdot\Big[\frac{e^{\langle\Lambda,H_1\rangle}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\langle\alpha,H_1\rangle})}\frac{e^{-\langle\Lambda,H_2\rangle}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{\langle\alpha,H_2\rangle})}\frac{1}{\prod_{\gamma\in\Pi}(1-e^{-\langle\gamma,(H_1-H_2)\rangle})}\Big].$$

On vérifie en utilisant des propriétés d'antisymétrie que

$$RR^{J_h}(C(G),L_\lambda)=\oplus_{\nu\in iK(\lambda)\cap\mathrm{Poids}}\tau_G(\nu)\otimes\tau_G(\nu)^*.$$

6. ESQUISSES DE DÉMONSTRATIONS

6.1. Démonstration par coupure symplectique

Le théorème 5.6 dans le cas d'un tore $T=\{u\in\mathbb{C},|u|=1\}$ à une dimension n'est déjà pas immédiat ; on peut le démontrer en forçant la valeur 0 à être un sommet de $\Phi(M)$ (cas où la conjecture est résolue grâce à la Proposition 4.4) à l'aide des coupures symplectiques, introduites par E. Lerman [26].

Considérons la variété $\widetilde{M}=M\times\mathbb{C}$ munie de l'action diagonale de H : ici H est un autre exemplaire de T et agit par $h\cdot(m,z)=(h\cdot m,hz)$, $(h\in H,m\in M,z\in\mathbb{C})$.

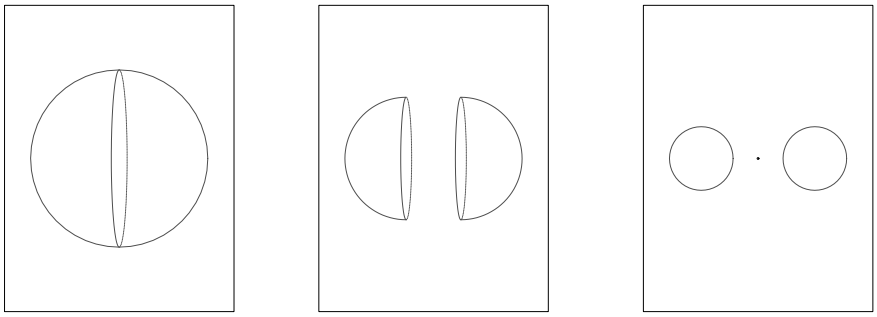
Soit Z une base de $\mathfrak{t}^*$. Munissons $\mathbb{C}$ de la structure symplectique pour laquelle le moment de l'action $z\mapsto hz$ soit $-|z|^2Z$. Si on remplace Z par $-Z$, la structure symplectique est changée en son opposée. L'application moment $\widetilde{\Phi}:\widetilde{M}\to\mathbb{R}Z$ est donnée par $\widetilde{\Phi}(m,z)=\Phi(m)-|z|^2Z$. On suppose pour simplifier que $0\in\Phi(M)$ est une valeur régulière. Alors $\widetilde{\Phi}^{-1}(0)=\{(m,z),\Phi(m)-|z|^2Z=0\}$ est une variété et $M_Z=\widetilde{\Phi}^{-1}(0)/H$ est une V-variété. Analysons cette V-variété. Elle est encore munie d'une action de T, en écrivant $g\cdot[m,z]=[m,g^{-1}z]=[gm,z]$, $(g\in T,m\in M,z\in\mathbb{C})$. On note $M_{>0}=\Phi^{-1}(]0,\infty[Z)$; c'est un ouvert de M. En regardant $z\neq0$ ou $z=0$, on voit sans difficulté que M_Z est réunion de l'ouvert $M_{>0}$ et de l'ensemble compact $\mathrm{red}_0(M)=\Phi^{-1}(0)/T$, qui devient variété de points fixes pour l'action résiduelle de T.

Soit $\mathcal{E}$ un fibré T-équivariant sur M. Notons $\mathcal{E}_Z$ le fibré sur M_Z déduit par quotient de $\mathcal{E}\otimes\mathbb{C}$ sur $\widetilde{M}$. On démontre alors à partir de la formule de l'indice équivariant (prolongé au cas de V-variétés dans [19], [44]) la formule de recollement suivante :

THÉORÈME 6.1 (Duistermaat-Guillemin-Meinrenken-Wu). — *Pour tout fibré T-équivariant $\mathcal{E}$ sur M, et toute structure presque-complexe J, on a l'égalité*

$$RR^J(M,\mathcal{E}) = RR^J(M_Z,\mathcal{E}_Z) + RR^J(M_{-Z},\mathcal{E}_{-Z}) - RR^J(\mathrm{red}_0(M),\mathrm{red}_0(\mathcal{E}))$$

dans $R(T)$.



M $\qquad$ $M<0\ \cup\ M>0$ $\qquad$ $M_{-Z}\ \cup\ \mathrm{red}_0(M)\cup M_Z$

FIGURE 6

Preuve (esquisse). — Supposons, pour simplifier, que $\mathrm{red}_0(M)$ soit une variété lisse. On applique tout d'abord la formule de l'indice d'Atiyah-Segal-Singer [6] : il existe une forme caractéristique κ sur $\mathrm{red}_0(M)$ telle que le nombre $RR^J(\mathrm{red}_0(M),\mathrm{red}_0(\mathcal{E}))$ soit égal à $\int_{\mathrm{red}_0(M)}\kappa$.

Soit $g\in T$. On a rajouté une composante connexe de points fixes pour l'action de T isomorphe à $\mathrm{red}_0(M)$ simultanément à M_Z et à M_{-Z}. La formule de l'indice équivariant d'Atiyah-Segal-Singer [5] pour $\mathrm{Tr}_{RR^J(M_Z,\mathcal{E}_Z)}(g)$ a une contribution de la composante $\mathrm{red}_0(M)$ du type $\int_{\mathrm{red}_0(M)}\frac{\kappa}{1-ge^C}$, où C est la courbure du fibré normal à $\mathrm{red}_0(M)$ dans M_Z. L'autre contribution simultanée est de la forme $\int_{\mathrm{red}_0(M)}\frac{\kappa}{1-g^{-1}e^{-C}}$. L'identité du théorème découle alors de l'identité $\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-z^{-1}}=1$.

Comme on s'y attend, la démonstration est beaucoup plus délicate dans le cas d'un groupe non abélien. Cependant, la même belle idée de découper le polytope $\mathrm{Kir}(M)$ en morceaux et de fabrication de variétés reliées à chaque morceau peut être réalisée, en utilisant les idées de Woodward [47]. Il faut des découpages spéciaux (dits admissibles) lorsqu'une face du polytope intersecte un mur de la chambre de Weyl.

6.2. Démonstration par déformation du symbole

La démonstration de Paradan par déformation du symbole est plus directe, mais utilise le gros outil des opérateurs transversalement elliptiques. Cette démonstration peut être considérée comme une version en K-théorie de la démonstration analytique de Tian-Zhang [39]. Au lieu de s'appuyer sur la méthode de localisation de Bismut-Lebeau, elle s'appuie sur l'excision en K-théorie. Ces deux démonstrations développent une idée de déformation due à Witten [46], pour la localisation non abélienne.

Soit (M,Φ) une G-variété hamiltonienne compacte et $\mathcal{E}$ un fibré G-équivariant. On identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ grâce à un produit scalaire G-invariant. L'application Φ nous permet alors de fabriquer un champ de vecteurs G-invariant canonique sur M : le champ de vecteurs $\boldsymbol{V}_\Phi$ égal en $m\in M$ à $2\Phi(m)_m$. On le note $\boldsymbol{V}$ si (M,Φ) est fixée. Ce champ va nous permettre de déformer le symbole donné par la formule (2) en un symbole transversalement elliptique.

La variété M est munie d'une structure riemannienne par $g(v,w)=\Omega(v,J_hw)$. On identifie TM et T^*M en utilisant cette forme, et on considère le symbole sur T^*M donné pour tous $m\in M,\xi\in T_mM$ par

$$c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,M}(m,\xi)=c^{J_h,M}(m,\xi-\boldsymbol{V}_m).$$

On note ce symbole $c_{\boldsymbol{V}}^{J_h}$ si la variété M est fixée. L'indice ne change pas par déformation, d'où $\mathrm{Indice}_M(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h}\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})=RR^{J_h}(M,\mathcal{E})$ grâce à la déformation $c^{J_h}(m,\xi-t\boldsymbol{V}_m)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

L'ensemble $\mathrm{Char}(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h})$ est l'ensemble constitué des $(m,\xi), m\in M,\xi\in T_mM$ tels que $\xi=-\boldsymbol{V}_m$. Cherchons son intersection avec T^*_GM. Dans cette même équation, le vecteur ξ est de plus orthogonal à $\mathfrak{g}_m$, il est donc nécessaire que le champ de vecteurs $\boldsymbol{V}$ s'annule en m, puisque $\boldsymbol{V}_m$ est dans $\mathfrak{g}_m$. On obtient donc par cette méthode de « pousser un symbole en dehors de la section nulle » un ensemble beaucoup plus petit que la section nulle : l'ensemble C des zéros du champ $\boldsymbol{V}$. Cet ensemble de zéros contient évidemment $\Phi^{-1}(0)$. Il contient aussi $G\cdot M^T$, car si $m\in M^T$, alors $\Phi(m)\in\mathfrak{t}$ et $\Phi(m)_m$ s'annule en m. L'équation de Hamilton implique que C est l'ensemble des points critiques de la fonction $\|\Phi(m)\|^2$. La propriété suivante s'ensuit.

PROPOSITION 6.2. — *L'ensemble $\Phi(C)$ est une réunion finie d'orbites de G dans $\mathfrak{g}$.*

Notons $\Phi(C)=\bigcup_{\beta\in B_G}O_\beta$, où B_G est un ensemble fini de points de $\mathfrak{c}$. Soit $\bigcup_{\beta\in B_G}\mathcal{U}_\beta$ une collection disjointe de voisinages ouverts $\mathcal{U}_\beta$ des fermés $\Phi^{-1}(O_\beta)$. Par excision, on obtient

$$RR^{J_h}(M,\mathcal{E})=\sum_{\beta\in B_G}\mathrm{Indice}_{\mathcal{U}_\beta}(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,\mathcal{U}_\beta}\otimes I_{\mathcal{E}}).$$

On est donc ramené à étudier les symboles $(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,\mathcal{U}_\beta} \otimes I_{\mathcal{E}})$ sur chaque ouvert $\mathcal{U}_\beta$. Le théorème 5.7 résultera donc des deux propositions suivantes qui illustrent la dichotomie entre les cas $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$.

PROPOSITION 6.3. — *Si* 0 *est une valeur régulière, alors pour tout fibré G-équivariant $\mathcal{E}$ sur M, on a*

$$[\mathrm{Indice}_{\mathcal{U}_0}(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,\mathcal{U}_0} \otimes I_{\mathcal{E}})]^G = RR^{J_h}(\mathrm{red}_0\, M, \mathrm{red}_0\, \mathcal{E}).$$

Preuve (esquisse). — Si 0 est une valeur régulière, un voisinage $\mathcal{U}_0$ de $\Phi^{-1}(0)$ est isomorphe à $\Phi^{-1}(0) \times \mathfrak{g}^*$. Le symbole $c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,\mathcal{U}_0}$ se déforme en le produit du symbole elliptique de Bott d'indice 1 sur $\mathfrak{g}^*$ et du symbole transversalement elliptique $\mathrm{red}_0(c^{J_h})$ sur $\Phi^{-1}(0)$, qui nous a servi à obtenir une définition de $RR^{J_h}(\mathrm{red}_0\, M, \mathrm{red}_0\, \mathcal{E})$.

PROPOSITION 6.4. — *Soit $\beta \in B_G$ non nul. Si $\mathcal{E}$ est un fibré strictement Φ-positif, alors on a*

$$[\mathrm{Indice}_{\mathcal{U}_\beta}(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,\mathcal{U}_\beta} \otimes I_{\mathcal{E}})]^G = 0.$$

Preuve (esquisse). — Fixons $\beta \neq 0$. Considérons un voisinage $G(\beta)$-invariant N de β dans $\mathfrak{g}(\beta)$ tel que l'ouvert $G \cdot N$ soit fibré sur $G \cdot \beta$. Posons $\mathcal{U} = \Phi^{-1}(G \cdot N)$ et $U = \Phi^{-1}(N)$. Alors U est une sous-variété fermée de l'ouvert $\mathcal{U}$ et l'on a

$$\mathcal{U} = G \times_{G(\beta)} U.$$

La variété U est une variété symplectique et $G(\beta)$-invariante. On obtient donc un espace $G(\beta)$-hamiltonien $(U, \Phi|_U)$. Le champ $\boldsymbol{V}_{\Phi|_U}$ coïncide sur U avec le champ $\boldsymbol{V}_\Phi$. On le notera donc encore $\boldsymbol{V}$. Remarquons qu'alors $c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,U}(m,\xi) = c^{J_h,U}(m, \xi - \boldsymbol{V}_m)$ définit un symbole $G(\beta)$-transversalement elliptique sur la variété (non compacte) U. La représentation $[\mathrm{Indice}_U(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,U} \otimes I_{\mathcal{E}})]$ est une représentation à trace de $G(\beta)$. Le procédé d'induction holomorphe de $G(\beta)$ à G transforme toute représentation à trace de $G(\beta)$ en une représentation à trace de G. On montre alors que $[\mathrm{Indice}_{\mathcal{U}}(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,\mathcal{U}} \otimes I_{\mathcal{E}})]$ est obtenue par induction holomorphe de la représentation $[\mathrm{Indice}_U(c_{\boldsymbol{V}}^{J_h,U} \otimes I_{\mathcal{E}})]$ de $G(\beta)$ à G. Le champ $\boldsymbol{V}$ sur U est proche du champ de vecteurs produit par β sur U. En localisant en deux étapes, on peut se ramener à un calcul d'un indice d'un symbole du type $c_{\boldsymbol{V}}^{J_h}$ pour un voisinage de $\Phi^{-1}(\beta)$ dans la variété $\{\beta_M = 0\}$ des zéros du champ de vecteurs β_M. Le fait que $\mathcal{E}$ soit strictement positif assure une inégalité pour l'action de β sur les fibres de $\mathcal{E}$ en un zéro de β_M. Ceci implique la proposition.

7. DÉCOMPOSITION DE LA SÉRIE DISCRÈTE

7.1. Quantisation de variétés non compactes

Si U est une variété symplectique non nécessairement compacte, munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie S et si L est un fibré de Kostant-Souriau, on ne sait pas en général construire un espace canonique $Q(U)$ où opère le groupe S, ni a fortiori

si la quantification commute à la réduction. Toutefois cette construction existe lorsque U est une orbite coadjointe quantifiable générique d'un groupe de Lie de type I. Ainsi pour les orbites U régulières et elliptiques d'un groupe de Lie semi-simple réel S, P. Paradan a démontré le théorème $[Q, R] = 0$. Dans le cadre de la méthode des orbites, on utilisera le formalisme Spin qui diffère légèrement du formalisme presque-complexe que nous avons employé jusqu'ici.

7.2. **Formalisme** Spin

Soit K un groupe compact connexe. Nous suivrons le formalisme de Harish-Chandra pour paramétriser $\widehat{K}$. Notons $\mathcal{H}_K$ l'ensemble des points $\mu \in \mathfrak{c}_K$ tels que μ soit régulière et $i\mu - \rho$ un poids de T. Les orbites O_μ correspondantes sont alors admissibles au sens de Duflo. L'ensemble $\widehat{K}$ est paramétrisé par $\mathcal{H}_K$ comme suit. Pour simplifier, nous supposons que ρ est un poids. Si $\mu \in \mathcal{H}_K$, l'orbite O_μ est aussi entière. Elle a de plus une structure Spin canonique. L'opérateur de Dirac sur O_μ tordu par L_μ a un indice $\Theta(K \cdot \mu)$ qui est la représentation de plus haut poids $i\mu - \rho$ de K. Ceci paramètre $\widehat{K}$ grâce aux orbites admissibles régulières.

Si M est une K-variété compacte de dimension paire avec structure Spin, et si $\mathcal{E}$ est un fibré K-équivariant sur M, on note $\Theta(M, \mathcal{E})$ l'indice de l'opérateur de Dirac tordu par $\mathcal{E}$. Si M est symplectique et munie d'un fibré L de Kostant-Souriau, posons

$$\Theta(M) := \Theta(M, L).$$

On a $\Theta(M) = RR^{J_h}(M, L \otimes \kappa)$ où κ^2 est le fibré canonique associé à la structure presque-complexe J^h.

Si U est une variété riemannienne non nécessairement compacte de dimension paire avec structure Spin, et si $\mathcal{E}$ est un fibré K-équivariant hermitien sur M, on note $\Theta(U, \mathcal{E})$ l'indice L^2 de l'opérateur de Dirac tordu par $\mathcal{E}$. Si U est de plus symplectique et munie d'un fibré L de Kostant-Souriau, on pose encore $\Theta(U) = \Theta(U, L)$. Il n'est pas vrai que $\Theta(U, L)$ ne dépend que de la structure symplectique de U et dans cette notation, on sous-entend cette fois toutes les données supplémentaires (structures riemannienne et hermitienne).

7.3. K**-types de la série discrète et application moment**

Soit S un groupe réel semi-simple connexe de centre fini, admettant une série discrète. Soient K un sous-groupe compact maximal de S et T un tore maximal de K. Alors T est aussi un sous-groupe de Cartan de S. D'après Harish-Chandra, la série discrète de S est paramétrée par l'ensemble des orbites régulières admissibles et elliptiques, ensemble qu'on paramètre par un sous-ensemble $\widehat{S}_d$ du dual $\mathfrak{t}^*$ de l'algèbre de Lie de T. Pour chaque $\lambda \in \widehat{S}_d$, notons $\Theta(S \cdot \lambda)$ la représentation de S associée à $S \cdot \lambda$: elle est réalisée comme l'espace des solutions L^2 de l'opérateur de Dirac tordu par le fibré de Kostant-Souriau. Notons $\Theta_S(S \cdot \lambda)$ la trace de la représentation $\Theta(S \cdot \lambda)$. C'est une fonction généralisée sur S, invariante par conjugaison, et qui admet une restriction à K notée $\Theta_S(S \cdot \lambda)|_K$.

Fixons $\lambda \in \widehat{S}_d$ et considérons l'orbite coadjointe $U := S \cdot \lambda$ munie de sa 2-forme canonique Ω. C'est une orbite de dimension maximale. L'action de K sur U est hamiltonienne. La variété $U = S \cdot \lambda$ n'est pas compacte, mais l'application moment correspondante $\Phi : M \to \mathfrak{k}^*$ est propre. Elle est induite par la projection : ainsi les espaces réduits $\mathrm{red}_\mu M = \Phi^{-1}(K \cdot \mu)/K$ sont compacts pour tout $\mu \in \mathfrak{k}^*$. On peut définir l'entier relatif $\Theta(\Phi^{-1}(K \cdot \mu)/K)$ directement dans le cas d'une valeur régulière et par déformation dans le cas général.

THÉORÈME 7.1 (Paradan, [34]). — *Soit Φ la projection de $S \cdot \Lambda$ sur $\mathfrak{k}^*$. On a la décomposition*

$$\Theta_S(S \cdot \lambda)|_K = (-1)^{\frac{\dim(S/K)}{2}} \oplus_{\mu \in \mathcal{H}_K} \Theta(\Phi^{-1}(K \cdot \mu)/K)\Theta_K(K \cdot \mu) \ .$$

Dans cette formule, $\Theta(\Phi^{-1}(K \cdot \mu)/K)$ est un nombre entier et $\Theta_K(K \cdot \mu)$ est la représentation irréductible de K de plus haut poids $i\mu - \rho$. La démonstration de cette formule utilise la formule de Blattner pour $\Theta_S(S \cdot \lambda)|_K$.

Autrement dit, bien que la variété $S \cdot \lambda$ soit non compacte, le slogan : « la quantification commute à la réduction » est encore vrai.

RÉFÉRENCES

[1] M.F. ATIYAH – *Elliptic operators and compact groups.* Lecture Notes in Math. **401**, Springer, Berlin, 1974.

[2] M.F. ATIYAH – *Convexity and commuting Hamiltonians.* Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 1–15.

[3] M.F. ATIYAH & R. BOTT – *A Lefschetz fixed-point formula for elliptic complexes,* I. Ann. of Math. **86** (1967), 374–407.

[4] M.F. ATIYAH & R. BOTT – *A Lefschetz fixed-point formula for elliptic complexes,* II. Ann. of Math. **88** (1968), 451–491.

[5] M.F. ATIYAH & G.B. SEGAL – *The index of elliptic operators II.* Ann. of Math. **87** (1968), 531–545.

[6] M.F. ATIYAH & I.M. SINGER – *The index of ellipic operators. I.* Ann. of Math. **87** (1968), 484–530.

[7] N. BERLINE, E. GETZLER & M. VERGNE – *Heat kernels and Dirac operators.* Collection Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 298, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 1991.

[8] M. BRAVERMAN – *Cohomology of the Mumford quotient.* math-sg/9809146.

[9] A. CANAS DA SILVA, Y. KARSHON & S. TOLMAN – *Quantization of presymplectic manifolds and circle actions.* Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 525–552.

[10] L. CORWIN & F.P. GREENLEAF – *A canonical approach to multiplicity formulas for induced and restricted representations of nilpotent Lie groups.* Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 1051–1088.

[11] J.J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN, E. MEINRENKEN & S. WU – *Symplectic reduction and Riemann-Roch for circle actions.* Math. Res. Lett. **2** (1995), 259–266.

[12] J.J. Duistermaat & G. Heckman – *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space.* Invent. Math. **69** (1982), 259–268.

[13] V. L. Ginzburg, V. Guillemin & Y. Karshon – *Assignments and abstract moment maps.* J. Differential geom. **52** (1999), 259–301.

[14] V. Guillemin – *Reduced phase spaces and Riemann-Roch.* in Proceedings : Lie Groups and Geometry in honor of B. Kostant (Massachusets of Technology, 1994. Progress in Math. **123**, Birkhäuser, Boston (1995), 305–334.

[15] V. Guillemin & S. Sternberg – *Convexity properties of the moment mapping.* Invent. Math. **67** (1982), 491–513.

[16] V. Guillemin & S. Sternberg – *Geometric Quantization and Multiplicities of group representations.* Invent. Math. **67** (1982), 515–538.

[17] L.C. Jeffrey & F.C. Kirwan – *Localization for non abelian group actions.* Topology **34** (1995), 291–327.

[18] L.C. Jeffrey & F.C. Kirwan – *Localization and quantization conjecture.* Topology **36** (1997), 647–693.

[19] T. Kawasaki – *The index of elliptic operators over V-manifolds.* Nagoya Math. J. **84** (1981), 135–157.

[20] A.A. Kirillov – *Éléments de la théorie des représentations.* Traduit du russe. Éditions Mir. Moscou, 1974.

[21] F.C. Kirwan – *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.

[22] F.C. Kirwan – *Convexity properties of the moment mapping*, III. Invent. Math. **77** (1984), 547–552.

[23] Klyachko – *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators.* Selecta Math. **4** (1998), 419–445.

[24] A. Knutson & T. Tao – *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products* I *: proof of the saturation conjecture.* J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 1055-1090.

[25] B. Kostant – *Quantization and unitary representations.* In *Modern analysis and applications.* Lecture Notes in Math. **39** (1970), 87–207.

[26] E. Lerman – *Symplectic cuts.* Mathematical Research Letters, 1995, **2**, 247–258.

[27] J. Marsden & A. Weinstein – *Reduction of symplectic manifolds with symmetry.* Reports in Math. Phys. **5** (1974), 121–130.

[28] E. Meinrenken – *On Riemann-Roch formulas for multiplicities.* J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 373–389.

[29] E. Meinrenken – *Symplectic surgery and the Spin^c-Dirac operator*, Advances in Math. **134** (1998), 240–277.

[30] E. Meinrenken & R. Sjamaar – *Singular reduction and quantization.* Topology, **38** (1999), 699–762.

[31] D. Mumford – *Proof of the convexity theorem.* Appendix to : Stratification of the null cone via the moment map, by L. Ness. Amer. J. Math. **106** (1984), 1280–1329.

[32] D. Mumford, J. Fogarty & F. Kirwan – *Geometric invariant theory. 3d edition.* Springer, Berlin, 1993.

[33] P.-E. Paradan – *Localization of the Riemann-Roch character.* Journal of Functional Analysis **187** (2001), 442–509.
[34] P.-E. Paradan – Spin^c *quantization and the K-multiplicities of the discrete series.* math.DG/0103222, à paraître.
[35] R. Sjamaar – *Holomorphic slices, symplectic reduction and multiplicities of group representations.* Annals of Mathematics **141** (1995), 87–129.
[36] R. Sjamaar – *Symplectic reduction and Riemann-Roch formulas for multiplicities.* American Mathematical society Bulletin **33** (1996), 327–338.
[37] R. Sjamaar & E. Lerman – *Stratified symplectic spaces and reduction.* Annals of Mathematics **134** (1991), 375–422.
[38] C. Teleman – *The quantization conjecture revisited.* Ann. of Math. **152** (2000), 1-43.
[39] Y. Tian & W. Zhang – *An analytic proof of the geometric quantization conjecture of Guillemin-Sternberg.* Invent. Math. **132** (1998), 229–259.
[40] Y. Tian & W. Zhang – *Quantization formula for singular reduction.* Prépublication dg-ga/9706010.
[41] Y. Tian & W. Zhang – *Symplectic reduction and a weighted multiplicity formula for twisted* Spin$_{\mathbb{C}}$*-Dirac operators.* Asian Journal of Math. **2** (1998), 591–608.
[42] Y. Tian & W. Zhang – *Holomorphic Morse inequalities in symplectic reduction.* Math. Res. Lett **5** (1998), 345–352.
[43] Y. Tian & W. Zhang – *Quantization formula for symplectic manifolds with boundary.* Geom. Funct. Anal **9** (1999), 596–640.
[44] M. Vergne – *Equivariant index formulas for orbifolds.* Duke Math. J. **82** (1996), 637–652.
[45] M. Vergne – *Multiplicities formulas for geometric quantization.* Parts I and I, Duke Math. J. **82** (1996), 143–179, 181–194.
[46] E. Witten – *Two dimensional gauge theories revisited.* J. Geom. Phys. **9** (1992), 303–368.
[47] C. Woodward – *The classification of transversal multiplicity-free group actions.* Annals of Global Analysis and Geometry **14** (1996), 3–42.
[48] S. Wu – *A note on higher cohomology groups of Kähler quotients.* Annals of Global Analysis and Geometry **18** (2000), 569–576.
[49] W. Zhang – *Holomorphic quantization formula in singular reduction.* Commun. Contemp. Math. **1** (1999), 281-293.
[50] W. Zhang – *Symplectic reduction and Family quantization.* International Mathematics Research Notices **19** (1999), 1043-1056.

Michèle VERGNE

École Polytechnique
Département de Mathématiques
F-91128 Palaiseau Cedex
E-mail : vergne@math.polytechnique.fr

Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53e année, 2000-2001, nO 889, p. 279 à 300

ENTROPIE LIBRE ET ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

par **Philippe BIANE**

La théorie des probabilités libres est née dans les années 80 quand D. Voiculescu a commencé à utiliser des idées probabilistes pour étudier les facteurs de type II_1 associés aux groupes libres. Des progrès importants ont été faits grâce à l'introduction de la notion d'entropie libre. Ainsi les facteurs de groupes libres sont les premiers exemples de facteurs de type II_1 (à prédual séparable) dont on sait démontrer qu'ils n'ont pas de sous-algèbre de Cartan. De plus ces facteurs sont « premiers », ce qui signifie qu'ils ne sont pas isomorphes à un produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ où M_1 et M_2 sont deux facteurs de type II_1, et ils ne possèdent pas de sous-algèbre abélienne maximale simple.

On expliquera ces notions, ainsi que d'autres applications aux numéros 6 et suivants, mais auparavant on commence par introduire les éléments de théorie des algèbres de von Neumann et de probabilités libres nécessaires.

Je remercie Liming Ge, Gilles Pisier, Sorin Popa et Dan Voiculescu pour leurs explications et leurs commentaires lors de la préparation de cet exposé.

1. ALGÈBRES DE VON NEUMANN ET FACTEURS

Soit H un espace de Hilbert complexe, que l'on supposera séparable dans la suite de l'exposé, l'algèbre $B(H)$ des opérateurs bornés sur H est un espace de Banach, dual de l'espace $L^1(H)$, formé des opérateurs à trace et muni de la norme $\|T\|_1 = \mathrm{Tr}(|T|)$. Une sous-algèbre de $B(H)$, contenant l'unité, stable par passage à l'adjoint, et fermée pour la topologie faible correspondant à cette dualité, est appelée algèbre de von Neumann. Une telle algèbre est stable par le calcul fonctionnel borélien ; si $x \in B(H)$ est un élément auto-adjoint de l'algèbre, alors pour toute fonction f, borélienne bornée, $f(x)$ est encore dans l'algèbre. Ainsi les éléments de $L^\infty(S, m)$ où (S, m) est un espace mesuré, agissant par multiplication sur $L^2(S, m)$, forment une sous-algèbre de von Neumann de $B(L^2(S, m))$, et le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints

entraîne que toute algèbre de von Neumann abélienne est isomorphe à une algèbre de ce type.

Ces deux propriétés font de la théorie des algèbres de von Neumann un candidat naturel au titre de théorie non commutative de la mesure. La théorie de la réduction [vN2], [Di] permet de ramener le problème de la classification des algèbres de von Neumann à celui de la classification des facteurs, c'est-à-dire des algèbres de von Neumann dont le centre est de dimension 1. Parmi ces facteurs, Murray et von Neumann dans leurs articles fondateurs, distinguaient une classe particulièrement intéressante, les facteurs de type II_1, auxquels finalement on peut se ramener, grâce aux travaux de Tomita, Takesaki et Connes [C3]. Un facteur de type II_1 est un facteur de dimension infinie sur lequel est définie une trace τ qui est une forme linéaire, continue pour la topologie $\sigma(B(H), L^1(H))$, telle que, pour tous x, y dans l'algèbre, on ait

$$\tau(1) = 1\,; \quad \tau(x^*) = \overline{\tau(x)}\,; \quad \tau(x^*x) \geqslant 0\,; \quad \tau(xy) = \tau(yx).$$

Appliquée à un projecteur orthogonal, la trace donne un nombre compris entre 0 et 1 que l'on interprète comme la « dimension continue » de l'image du projecteur. Il existe une seule trace sur un facteur de type II_1, et la dimension continue y prend toutes les valeurs réelles comprises entre 0 et 1. Pour Murray et von Neumann les facteurs de type II_1 devaient fournir un cadre naturel pour développer la théorie des probabilités utilisées en mécanique quantique. Ils mettaient particulièrement l'accent sur la structure de treillis des projections, et sur la dimension continue, alors que le point de vue moderne met au premier plan la trace τ qui tient le rôle de l'espérance en probabilités classiques.

Les articles [vN1] et [MvN] donnent deux constructions de facteurs de type II_1. La première [vN1] utilise une action libre, ergodique, d'un groupe dénombrable G sur un espace mesuré (S, m). L'algèbre de von Neumann agit sur $L^2(S, m)$, elle est engendrée par les opérateurs de multiplication par les fonctions de $L^\infty(S, m)$ et par des opérateurs unitaires déduits de l'action de G sur S. La seconde construction associe à un groupe dénombrable G l'algèbre de von Neumann $L(G)$, engendrée par la représentation régulière gauche, c'est-à-dire les opérateurs unitaires $\lambda_g : l^2(G) \to l^2(G)$ définis par $\lambda_g f(h) = f(g^{-1}h)$. Elle fournit un facteur de type II_1 si et seulement si toutes les classes de conjugaison non triviales de G sont infinies, condition que l'on désigne en général par CCI. La trace est donnée par la formule

$$\tau(x) = \langle x\delta_e, \delta_e \rangle_{l^2(G)},$$

où δ_e est la fonction qui vaut 1 sur l'identité de G et 0 ailleurs.

Dans [MvN] Murray et von Neumann montrent que tous les groupes CCI qui sont limite inductive de sous-groupes finis donnent le même facteur, appelé facteur hyperfini (de type II_1). En fait tout facteur de type II_1 dans lequel il existe une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie, dont la réunion est faiblement dense, est isomorphe à ce facteur, d'où le nom hyperfini. De plus ils démontrent que

le facteur hyperfini n'est pas isomorphe au facteur engendré par un groupe libre à deux générateurs.

En 1969, Dusa Mac Duff [McD] a exhibé une infinité non dénombrable de facteurs de type II_1 deux à deux non isomorphes. Il semble peu probable que l'on parvienne un jour à classifier tous les facteurs de type II_1 à isomorphisme près, mais on peut espérer dégager des familles intéressantes de tels facteurs, en particulier parmi ceux obtenus par les constructions évoquées plus haut. Ainsi un résultat fondamental d'Alain Connes [C1] entraîne que, pour un groupe CCI, le facteur $L(G)$ est isomorphe au facteur hyperfini si et seulement si ce groupe est moyennable. En ce qui concerne les facteurs associés aux groupes non moyennables, on connaît ([C2], [GN]) quelques propriétés des facteurs associés aux groupes ayant la propriété T, mais c'est surtout sur les facteurs associés aux groupes libres que des résultats substantiels ont été obtenus. En particulier, si on note $L(F_n)$ le facteur engendré par un groupe libre à n générateurs ($n \geqslant 2$, et $n = \infty$ est permis), Rădulescu ([R], voir aussi [Sk]) a montré que l'un des termes de l'alternative suivante est vrai : soit les facteurs $L(F_n)$ sont deux à deux non isomorphes, soit ils sont tous isomorphes.

2. PROBABILITÉS NON COMMUTATIVES ET LIBERTÉ

2.1. Espace de probabilités non commutatif

Comme on l'a vu plus haut, il est naturel d'utiliser un langage probabiliste pour étudier les algèbres de von Neumann. Dans la suite de l'exposé on appellera espace de probabilités non commutatif un couple (A, φ) formé d'une algèbre de von Neumann A et d'une trace fidèle φ. La trace φ vérifie donc les propriétés énoncées au numéro 1, et le qualificatif de fidèle signifie que pour tout $x \in A$, l'égalité $\varphi(x^*x) = 0$ entraîne que $x = 0$.

Bien sûr si $A = L^\infty(\Omega, P)$ et $\varphi(f) = \int_\Omega f(\omega)P(d\omega)$ où (Ω, P) est un espace de probabilités, on retrouve la situation classique. L'exemple réellement non commutatif le plus simple est celui où $A = M_N(\mathbb{C})$ et $\varphi = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}$ est la trace normalisée, et celui qui nous intéressera principalement est le cas où A est un facteur de type II_1 et $\varphi = \tau$ est sa trace.

La trace permet de définir des normes L^p non commutatives

$$|x|_p = \tau((x^*x)^{p/2})^{1/p}$$

et par complétion des espaces L^p qui sont des analogues non commutatifs des espaces L^p ordinaires.

Soit X un élément auto-adjoint dans A ; il existe une unique mesure μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx)$ pour tout $n \geqslant 0$. De plus on a $\varphi(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$ pour toute fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$, et l'algèbre de von Neumann (abélienne)

engendrée par X est isométriquement isomorphe à $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$. Comme dans la théorie des probabilités, on appelle variable aléatoire un élément auto-adjoint de A et la mesure μ est appelée la distribution, ou la loi, de X. Plus généralement, il existe une version non commutative de la méthode des moments. Soient $(X_1, \ldots, X_d)$ des variables aléatoires dans A, engendrant une sous-algèbre de von Neumann B. On appelle moments non commutatifs de $(X_1, \ldots, X_d)$ les nombres complexes

$$\varphi(X_{i_1} \ldots X_{i_p})$$

où l'on parcourt l'ensemble des monômes non commutatifs en les X_i. La donnée de ces moments détermine complètement la forme linéaire

$$P \mapsto \varphi(P(X_1, \ldots, X_d))$$

définie sur l'espace $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ des polynômes non commutatifs en n variables. La construction GNS (pour Gelfand, Naimark et Segal) permet, à partir de la donnée de cette forme linéaire, de reconstruire une algèbre de von Neumann isomorphe à B. Pour cela on sépare et complète l'espace $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$ pour le produit hermitien

$$\langle P, Q\rangle = \varphi(Q(X_1, \ldots, X_d)^* \, P(X_1, \ldots, X_d))$$

ce qui donne un espace de Hilbert H. Les opérateurs de multiplication à gauche par les x_i définis sur $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ passent au quotient et induisent des opérateurs bornés sur H, qui engendrent une algèbre de von Neumann isomorphe à B. La trace sur B est la restriction de la forme linéaire $X \mapsto \langle X1, 1\rangle$ sur $B(H)$. On voit donc que la donnée d'un espace de probabilités non commutatif engendré par un nombre fini de variables aléatoires se ramène à celle de la famille des moments associés.

3. LIBERTÉ

3.1. Définition de la liberté

Soit G un groupe qui peut se décomposer comme le produit libre de sous-groupes $G = *_{i\in I} G_i$. L'idée initiale de Voiculescu a été d'utiliser la trace τ pour caractériser les positions relatives des sous-algèbres $L(G_i)$ dans $L(G)$, d'une manière qui rappelle la notion d'indépendance en théorie des probabilités.

DÉFINITION 3.1 (Voiculescu [V1]). — *Soient A une algèbre unifère, φ une forme linéaire sur A, normalisée (i.e. $\varphi(1) = 1$), et $B_i; i \in I$ des sous-algèbres de A, contenant l'unité, on dit que les B_i sont libres dans (A, φ) si pour tout choix de $b_1, \ldots, b_n \in A$ tels que $\varphi(b_k) = 0$ et $b_k \in B_{i_k}$ avec $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$ on a*

$$\varphi(b_1 \ldots b_n) = 0.$$

Ainsi dans l'exemple du produit libre les $L(G_i)$ sont libres dans $(L(G), \tau)$.

Remarque 3.2. — La définition donnée ci-dessus est purement algébrique et se prête à un traitement combinatoire. R. Speicher a découvert que l'on pouvait fonder cette combinatoire sur la notion de partition non croisée, ce qui a donné lieu à des développements algébriques intéressants, que l'on trouvera exposés par exemple dans [Sp1], [Sp2].

On dira qu'une famille de variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ dans (A,φ) est libre, si les sous-algèbres de von Neumann engendrées par les X_i sont libres. Il existe beaucoup d'exemples de familles libres, la situation de ce point de vue est même optimale puisque si on se donne des espaces de probabilités non commutatifs (B_i,φ_i), alors il existe un espace de probabilités non commutatif (A,φ), unique à isomorphisme près, et des injections fortement continues $\iota_i : B_i \to A$, préservant l'unité, telles que $\varphi_i = \varphi\circ\iota_i$, les algèbres $\iota_i(B_i)$ engendrent A comme algèbre de von Neumann, et elles sont libres dans (A,φ). L'espace de probabilités non commutatif (A,φ) est appelé produit libre réduit des $(B_i,\varphi_i)_{i\in I}$.

Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires libres, de distributions non atomiques ; alors elles engendrent une algèbre de von Neumann isomorphe au facteur $L(F_n)$. En effet pour chaque i on peut trouver une fonction mesurable $f_i : supp(\mu_i) \to U(1)$, inversible hors d'un ensemble négligeable sur $U(1)$ et telle que $f_i(\mu_i)$ soit la mesure de Haar. Les opérateurs $f_i(X_i)$ sont unitaires, et ils engendrent la même algèbre de von Neumann que les X_i. Soit G un groupe libre de générateurs $g_i; i = 1,\dots,n$, la propriété de liberté entraîne que l'application $G \to A : g_i \mapsto f_i(X_i)$ se prolonge en un isomorphisme d'algèbres de von Neumann de $L(G)$ sur A.

3.2. Modèles matriciels pour la liberté

L'ingrédient essentiel dans la compréhension de la notion de liberté a été la découverte que les variables libres pouvaient être modélisées par des matrices aléatoires de grande taille. Ainsi le résultat suivant permet de relier la notion de liberté à celle d'indépendance en probabilités.

PROPOSITION 3.3. — *Soient n et k deux entiers, ε et δ deux réels >0 ; il existe N_0 tel que pour tout $N \geqslant N_0$ on ait la propriété suivante :*

pour tout n-uplet $(A_1,\dots,A_n)$ de matrices $N\times N$, hermitiennes, de normes inférieures à 1, on a

$$P\Big[\,\big|\tfrac{1}{N}\mathrm{Tr}(B_{i_1}\dots B_{i_m}) - \varphi(Y_{i_1}\dots Y_{i_m})\big| < \varepsilon;\ \forall\, m\leqslant k \text{ et } (i_1,\dots,i_m)\in[1,n]^m\Big] \geqslant 1-\delta,$$

où $B_i = U_iA_iU_i^*$, les U_i étant des matrices aléatoires unitaires, indépendantes, choisies avec la mesure de Haar sur $U(N)$, et les $Y_i \in (A,\varphi)$ sont des variables libres telles que, pour tout entier $l\leqslant k$,

$$\varphi(Y_i^l) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_i^l).$$

Remarque 3.4. — Le choix de la borne $\|A_i\| < 1$ n'a évidemment rien de fondamental, on aurait pu prendre une autre valeur, mais une restriction de ce type est nécessaire, sinon on peut infirmer l'énoncé en multipliant les A_i par une constante assez grande.

Ce résultat, dont il existe de nombreuses variantes, est dû à Voiculescu [V2], [V7], et une démonstration simple peut se trouver dans [PV].

La proposition 3.3 montre que des matrices de grande taille choisies au hasard vont se comporter, avec une grande probabilité, comme des variables libres. On peut donc s'attendre à ce que des variables aléatoires non commutatives qui sont très éloignées d'être des variables libres ne puissent être approchées, en distribution, que par des n-uplets de matrices de mesure petite. C'est ce que la notion d'entropie libre que nous verrons au numéro 5 permet de quantifier. Mais d'abord on va faire quelques rappels sur l'entropie en mécanique statistique.

4. ENTROPIE DE BOLTZMANN ET THÉORÈME DE SANOV

En mécanique statistique l'état d'un système est caractérisé par les valeurs de plusieurs quantités macroscopiques, par exemple le volume, la température et la pression pour un gaz. Un tel système est constitué d'un grand nombre de petites particules, et à chaque état macroscopique correspondent de nombreux états microscopiques qui le réalisent. On a donc une fonction

$$\text{États microscopiques} \to \text{États macroscopiques.}$$

Boltzmann définit l'entropie du système par la formule

$$S = k \log \Omega,$$

où S est l'entropie de l'état macroscopique et Ω le nombre d'états microscopiques correspondant, k étant une constante de proportionnalité (la constante de Boltzmann). Cette définition suppose que l'on a discrétisé l'espace des phases, c'est-à-dire l'ensemble des états microscopiques. Pour des systèmes continus on remplace le nombre Ω par un volume.

Considérons un système constitué de N points $X_1, \ldots, X_N$ dans $\mathbb{R}^d$. Ici d est fixé et N est très grand. Convenons que les états macroscopiques sont déterminés par les valeurs des moments de cette distribution de points, c'est-à-dire les nombres

$$\int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} \widehat{\mu}_X(dx),$$

où

$$\widehat{\mu}_X = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{X_j}$$

est la distribution empirique des $X_j; j = 1, \ldots, N$. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ à support compact. Notons $\Gamma_{\mu,N,\varepsilon,k}$ l'ensemble des états microscopiques qui réalisent l'état μ à k, ε près i.e. les N-uplets de points tels que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} \widehat{\mu}_X(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} \mu(dx) \right| < \varepsilon$$

pour tout monôme de degré inférieur à k. Utilisons la formule de Boltzmann pour définir l'entropie par particule

$$S(\mu, N, \varepsilon, k) = \frac{1}{N} \log |\Gamma_{\mu,N,\varepsilon,k}|$$

où $|.|$ désigne la mesure de Lebesgue.

On peut alors montrer que la quantité $S(\mu, N, \varepsilon, k)$ admet une limite quand $N \to \infty$. Cette limite est une fonction décroissante de k et croissante de ε, on peut donc à nouveau en prendre la limite quand $k \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$. On obtient ainsi la quantité

$$E(\mu) = -\int_{R^d} f(t) \log f(t) dt$$

si $\mu = f(t)dt$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et

$$E(\mu) = -\infty$$

sinon. C'est cette quantité que l'on désigne habituellement sous le nom d'entropie de la mesure μ.

Les énoncés qui précèdent peuvent se déduire du théorème de Sanov, un résultat classique de la théorie des grandes déviations ; voir par exemple [DS], [DZ].

5. ENTROPIE LIBRE

5.1. Définition

Pour définir l'entropie libre, nous allons reprendre l'idée précédente, en utilisant cette fois-ci des moments non commutatifs, et en prenant pour états microscopiques des états matriciels. On considère donc $(X_1, \ldots, X_d)$ des opérateurs auto-adjoints dans un espace de probabilités non commutatif (A, φ). On note $\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}$ l'ensemble de tous les d-uplets $(M_1, \ldots M_d)$ de matrices hermitiennes de taille $N \times N$ qui satisfont

$$\left| \frac{1}{N} \mathrm{Tr}(M_{i_1} \ldots M_{i_m}) - \varphi(X_{i_1} \ldots X_{i_m}) \right| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $m \leqslant k$ et tout choix d'indices $1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant d$. Munissons l'espace H_N des matrices hermitiennes de taille $N \times N$ de la structure euclidienne associée à la forme quadratique $\mathrm{Tr}(M^2)$. L'inégalité $\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(M_i^2) \leqslant \varphi(X_i^2) + \varepsilon$ entraîne que l'ensemble $\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}$ est inclus dans un produit de d boules euclidiennes de rayons $\sqrt{(\varphi(X_i^2) + \varepsilon)N}$. Lorsque $N \to \infty$, le logarithme du volume de ce produit de boules

est de l'ordre de $-\frac{dN^2}{2}\log N$. Cela nous amène à renormaliser la formule de Boltzmann en posant

$$S(X_1,\dots,X_d,N,\varepsilon,k)=\frac{1}{N^2}\log|\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,\varepsilon,k}|+\frac{d}{2}\log N.$$

Contrairement au cas classique traité dans le numéro précédent, on ne sait pas montrer en général que $S(X_1,\dots,X_d,N,\varepsilon,k)$ admet une limite quand $N\to\infty$, on se contente de prendre la limite sup, puis on fait tendre k vers ∞ et ε vers 0. On obtient ainsi la quantité

$$\chi(X_1,\dots,X_d)=\inf_{\varepsilon>0}\inf_{k\geqslant 0}\limsup_{N\to\infty}S(X_1,\dots,X_d,N,\varepsilon,k).$$

Définition 5.1. — *L'entropie libre du d-uplet* $(X_1,\dots,X_d)$ *est la quantité*

$$\chi(X_1,\dots,X_d).$$

Remarquons qu'elle ne dépend que des moments de $(X_1,\dots,X_d)$.

La définition ci-dessus n'est pas tout à fait celle de Voiculescu [V3] ; il effectue une troncature supplémentaire qui disparaît à la fin du calcul. J'ai ignoré ce raffinement pour simplifier l'exposé, mais il faudrait le rétablir pour être entièrement correct.

L'entropie libre est une quantité intéressante en elle-même, j'y reviendrai à la fin de l'exposé, mais d'abord je voudrais expliquer comment on l'utilise pour étudier les facteurs associés aux groupes libres. Pour cela on commence par montrer que cette quantité n'est pas triviale.

5.2. Entropie d'une variable

Soit X un élément auto-adjoint de A, son entropie ne dépend que de sa distribution. Soit μ une mesure à support compact sur $\mathbb{R}$, on va donner une formule explicite pour l'entropie d'une variable aléatoire non commutative de loi μ. On cherche à estimer la mesure de l'ensemble des matrices $N\times N$ dont la mesure spectrale approche μ. Toute matrice hermitienne peut se diagonaliser dans une base orthonormale ; on a donc une application surjective

$$D(N)\times U(N)\to H_N;\quad (\Lambda,U)\mapsto U\Lambda U^*,$$

où H_N est l'espace des matrices hermitiennes $N\times N$ et $D(N)$ celui des matrices diagonales réelles. On vérifie (cf. [Me]) que la mesure de Lebesgue sur H_N est l'image de la mesure

$$\frac{1}{Z_N}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}(\lambda_i-\lambda_j)^2 d\Lambda\, dU$$

par cette application. On a noté $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ l'élément générique de D, et $d\Lambda$ est la mesure de Lebesgue sur D tandis que dU est la mesure de Haar sur $U(N)$ et

Z_N une constante de normalisation. En faisant intervenir la distribution de Λ,

$$\mu_\Lambda = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i}$$

cette mesure se met sous la forme

$$\frac{1}{Z_N}\exp\left(N^2 \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\Delta} \log|x-y|\mu_\Lambda(dx)\mu_\Lambda(dy)\right) d\Lambda\, dU,$$

où Δ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$. On peut en déduire, en traitant soigneusement la diagonale et en évaluant Z_N, une expression explicite de l'entropie libre de X en fonction de sa distribution,

$$\chi(X) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \log|x-y|\,\mu(dx)\mu(dy) \;+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\log(2\pi).$$

À une constante additive près, c'est l'énergie logarithmique de la mesure μ, une quantité qui intervient dans la théorie du potentiel dans le plan complexe. En particulier, on voit que cette expression n'est pas triviale, et qu'elle peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[-\infty,+\infty[$, ce qui justifie a posteriori la renormalisation effectuée dans la définition de l'entropie libre.

Ce calcul peut également s'interpréter comme un résultat de grandes déviations pour le théorème de Wigner sur la distribution limite du spectre de grandes matrices gaussiennes [BG].

5.3. Entropie libre et liberté

Il est clair d'après leur définition que les ensembles $\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,\varepsilon,k}$ vérifient

$$\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,\varepsilon,k} \subset \Gamma_{X_1,\dots,X_r,N,\varepsilon,k} \times \Gamma_{X_{r+1},\dots,X_d,N,\varepsilon,k}.$$

On en déduit les inégalités

$$\chi(X_1,\dots,X_d) \leqslant \chi(X_1,\dots,X_r)+\chi(X_{r+1},\dots,X_d)$$

pour tout r, et donc

$$\chi(X_1,\dots,X_d) \leqslant \chi(X_1)+\cdots+\chi(X_d).$$

D'autre part en utilisant la proposition 3.3, on voit que la plupart (au sens de la mesure de Lebesgue) des d-uplets dans $\Gamma_{X_1,N,\varepsilon,k}\times\cdots\times\Gamma_{X_d,N,\varepsilon,k}$ sont « presque libres », on en déduit que si $(X_1,\dots,X_d)$ est une famille libre alors

$$\chi(X_1,\dots,X_d) = \chi(X_1)+\cdots+\chi(X_d).$$

Réciproquement, Voiculescu [V5] a montré que si l'on a

$$-\infty < \chi(X_1,\dots,X_d) = \chi(X_1)+\cdots+\chi(X_d),$$

alors $(X_1,\dots,X_d)$ est une famille libre.

Ces calculs montrent que le facteur $L(F_n)$ admet un système de générateurs $(X_1, \ldots, X_n)$ dont l'entropie est $> -\infty$. En effet on a vu au numéro 3.1 qu'une famille libre de n variables de distributions non atomiques engendre $L(F_n)$. D'après le numéro 5.2, on peut choisir ces distributions de telle sorte que leur entropie libre soit finie, et alors leur somme le sera également.

6. APPLICATIONS AUX FACTEURS DE GROUPES LIBRES

Le principe général des applications de l'entropie libre à la théorie des facteurs est le suivant. On considère une propriété P, vérifiée par un espace de probabilités non commutatif (A, φ). Soit $X_1, \ldots, X_d$ un système de générateurs auto-adjoints de A, on utilise P pour obtenir des contraintes sur les ensembles $\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}$ qui permettent de majorer leur mesure de Lebesgue. Puis on fait tendre N vers l'infini et on déduit de ces majorations que l'entropie libre de $X_1, \ldots, X_d$ vaut $-\infty$. Donc tout système de d générateurs de l'algèbre doit avoir une entropie $-\infty$, or le facteur $L(F_d)$ possède un sytème de d générateurs d'entropie libre finie, par conséquent il ne peut pas satisfaire la propriété P. Le point délicat dans la démonstration est évidemment d'obtenir une estimation convenable de la mesure de l'ensemble en question.

6.1. La propriété Γ

Je vais expliquer comment cela fonctionne dans un cas relativement simple, celui de la propriété Γ.

Définition 6.1. — *Soit (A, φ) un espace de probabilités non commutatif; une suite centrale dans (A, φ) est une suite $(t_k)_{k \geqslant 0}$, bornée dans A, telle que $|[t_k, x]|_2 \to_{k\to\infty} 0$ pour tout $x \in A$. Une suite centrale est dite triviale si $|t_k - \varphi(t_k).1|_2 \to_{k\to\infty} 0$. On dit que (A, φ) a la propriété Γ s'il existe une suite centrale non triviale dans A.*

Ici $[x, y] = xy - yx$ désigne comme d'habitude le commutateur.

La propriété Γ a été introduite par Murray et von Neumann dans [MvN] pour distinguer le facteur hyperfini du facteur engendré par le groupe libre à deux éléments : en effet il est facile de construire une suite centrale non triviale dans le facteur hyperfini, mais le facteur du groupe libre à deux générateurs ne vérifie pas la propriété Γ (ni, par le même argument, n'importe quel facteur $L(F_n)$).

Théorème 6.2 ([V4]). — *Soit $(X_1, \ldots, X_d)$ un d-uplet vérifiant*

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) > -\infty,$$

alors l'algèbre de von Neumann engendrée par $X_1, \ldots, X_d$ n'a pas la propriété Γ.

En particulier, cette algèbre de von Neumann est un facteur de type II_1, non hyperfini.

Appliqué aux facteurs de groupes libres, ce résultat ne nous apporte rien de nouveau par rapport à l'article de Murray et von Neumann, mais la démonstration constitue un bon prototype pour les démonstrations des autres propriétés des facteurs de groupes libres. D'autre part, il suggère le problème suivant, toujours ouvert : soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet d'entropie libre finie, le facteur qu'ils engendrent est-il isomorphe à $L(F_n)$?

Passons à la démonstration du théorème. Une application du calcul fonctionnel borélien à une suite centrale non triviale permet de montrer que la propriété Γ entraîne l'existence de $\theta \in]0, 1/2[$ et d'une suite de projections orthogonales $(P_n)_{n \geqslant 0}$ dans A, telles que $\theta < \tau(P_n) < 1 - \theta$ et $|[x, P_n]|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $x \in A$.

LEMME 6.3. — *Soit (A, φ) un espace de probabilités non commutatif engendré par un d-uplet $(X_1, \ldots, X_d)$, vérifiant $\tau(X_i^2) \leqslant 1$, soient $\theta \in]0, 1/2[$ et $P \in A$ une projection orthogonale telle que $\theta < \tau(P) < 1 - \theta$ et $|[P, X_i]|_2 < \omega$ pour $i = 1, \ldots, d$. Alors on a*

$$\chi(X_1 \ldots, X_d) \leqslant C_1 + C_2 \log \omega$$

où C_1 et C_2 sont des constantes > 0 dépendant seulement de d et de θ.

Sous les hypothèses du lemme, pour tout $\eta > 0$ on peut trouver un polynôme Q tel que $|P - Q(X_1, \ldots, X_d)|_2 < \eta$. En choisissant η assez petit, puis k assez grand et ε assez petit, on voit que pour tout N assez grand, et tout $(M_1, \ldots, M_d) \in \Gamma_{X_1, \ldots, X_d, N, \varepsilon, k}$ on peut trouver une projection orthogonale Π dans $M_N(\mathbb{C})$, sur un sous-espace de dimension $q = [N\tau(P)]$, telle que

$$|[M_i, \Pi]|_2 < 2\omega$$

(ici la norme est prise dans l'espace de probabilités non commutatif $(M_N(\mathbb{C}), \frac{1}{N}\mathrm{Tr})$). La matrice Π s'écrit sous la forme

$$U \begin{pmatrix} I_{qq} & 0_{N-q,q} \\ 0_{q,N-q} & 0_{N-q,N-q,} \end{pmatrix} U^*$$

où la matrice U est déterminée à un facteur dans $U(q) \times U(N-q)$ près (le commutant de la matrice par blocs ci-dessus) ; on peut la considérer comme un élément de la grassmanienne $U(N)/U(q) \times U(N-q)$.

Écrivons la matrice $U^* M_i U$ sous la forme

$$U^* M_i U = \begin{pmatrix} B_i & C_i^* \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, \tag{1}$$

avec $B_i \in H_q, D_i \in H_{N-q}, C_i \in M_{q,N-q}(\mathbb{C})$. La condition

$$|[M_i, \Pi]|_2 < 2\omega$$

signifie que

$$\frac{2}{N}\mathrm{Tr}[C_i C_i^*] \leqslant 4\omega^2 ;$$

d'autre part comme $\tau(X_i^2) \leqslant 1$ on a

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(M_i^2) \leqslant 1+\varepsilon$$

donc (en supposant $\varepsilon < 1$)

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(B_i^2) \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(D_i^2) \leqslant 2.$$

La décomposition (1) permet d'identifier H_N au produit $H_q \times M_{q,N-q} \times H_{N-q}$, et en notant $B_p(R)$ la boule euclidienne de rayon R dans chacun de ces espaces, on a donc

$$\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,k,\varepsilon} \subset$$
$$\cup_{U\in U(N)/U(q)\times U(N-q)} \left(U^*(B_{q^2}(\sqrt{4N}) \times B_{2q(N-q)}(\omega\sqrt{2N}) \times B_{(N-q)^2}(\sqrt{4N}))U\right)^d.$$

Le volume du membre de droite n'est pas facile à estimer directement car on prend la réunion d'une famille continue de produits de boules. Pour faire le calcul on discrétise l'ensemble des matrices unitaires. Munissons la grassmanienne $U(N)/U(q) \times U(N-q)$ de la distance obtenue par quotient de la distance associée à la norme uniforme sur $U(N)$. Grâce à un résultat de Szarek [Sz], on sait que pour tout $\delta > 0$, on peut recouvrir $U(N)/U(q) \times U(N-q)$ par une famille de boules de rayon δ, de cardinal inférieur à $(C\delta^{-1})^{N^2-q^2-(N-q)^2}$, où C est une constante universelle. Notons $(U_s)_{s\in S}$ les centres d'une telle famille de boules. En prenant $(M_1,\ldots,M_d)$, Π, et U comme ci-dessus, il existe un $s \in S$ tel que $\|U - U_s\| \leqslant \delta$ et on a

$$\begin{aligned}|[U_s^* M_i U_s, U^*\Pi U]|_2 &\leqslant |[U_s^* M_i U_s, U_s^*\Pi U_s]|_2 + |[U_s^* M_i U_s, U_s^*\Pi U_s - U^*\Pi U]|_2 \\ &\leqslant 2\omega + 2\|U_s^*\Pi U_s - U^*\Pi U\||M_i|_2 \\ &\leqslant 2\omega + 8\delta\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,k,\varepsilon} \subset \cup_{s\in S}\left(U_s^*(B(\sqrt{4N}) \times B((2\omega+8\delta)\sqrt{N}) \times B(\sqrt{4N}))U_s\right)^d.$$

Rappelons que le volume de la boule euclidienne dans un espace de dimension p est

$$|B_p(R)| = \frac{R^p \pi^{p/2}}{\Gamma(1+\frac{p}{2})}.$$

Nous pouvons maintenant estimer le volume de $\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,k,\varepsilon}$

$$|\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,k,\varepsilon}| \leqslant$$
$$(C\delta^{-1})^{N^2-q^2-(N-q)^2}\left(\frac{(4\pi N)^{q^2/2}(2\omega+8\delta)^{2q(N-q)}(\pi N)^{q(N-q)}(4\pi N)^{(N-q)^2/2}}{\Gamma(1+\frac{q^2}{2})\Gamma(1+q(N-q))\Gamma(1+\frac{(N-q)^2}{2})}\right)^d.$$

En prenant $\delta = \omega$, on obtient après quelques calculs la majoration du lemme, le point étant que $d \geqslant 2$.

Soit maintenant $(X_1, \ldots, X_d)$ engendrant une algèbre de von Neumann avec la propriété Γ, alors pour tout $\omega > 0$ on a

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) < C_1 + C_2 \log \omega$$

et donc

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) = -\infty,$$

ce qui démontre le théorème.

6.2. Sous-algèbres de Cartan

Soit B une sous-algèbre de von Neumann de A ; son normalisateur est le groupe des unitaires u de A tels que $uBu^* = B$. Ainsi dans $M_N(\mathbb{C})$ le normalisateur de la sous-algèbre des matrices diagonales est engendré par les matrices de permutations et les matrices unitaires diagonales. La sous-algèbre engendrée par ce normalisateur est $M_N(\mathbb{C})$ tout entier. On appelle sous-algèbre de Cartan d'un facteur de type II_1, une sous-algèbre abélienne maximale dont le normalisateur engendre le facteur tout entier. On montre que le facteur hyperfini possède des sous-algèbres de Cartan. De même, dans la première construction de facteurs évoquée au numéro 2, l'algèbre $L^\infty(S, m)$ est une sous-algèbre de Cartan. Dans [FM], Feldman et Moore montrent que les facteurs de type II_1 ayant une sous-algèbre de Cartan sont exactement ceux qui sont obtenus par une généralisation appropriée de cette construction, utilisant une relation d'équivalence mesurée. Voiculescu démontre dans [V4] que les facteurs associés aux groupes libres n'ont pas de sous-algèbre de Cartan, ce qui fournit le premier exemple de tels facteurs (dans le cas non séparable, que l'on ne considère pas ici, un argument de cardinal dû à Popa [P] fournit un contre-exemple). Le résultat de Voiculescu est en fait plus fort. Pour l'énoncer, introduisons la terminologie suivante. Une algèbre de von Neumann est dite diffuse si, pour tout projecteur orthogonal non nul $P \in A$, il existe deux projecteurs orthogonaux non nuls P_1 et P_2 tels que $P = P_1 + P_2$. Dans un facteur de type II_1, une sous-algèbre de von Neumann diffuse et hyperfinie (SADH en bref) est appelée régulière si son normalisateur engendre le facteur tout entier. Ainsi, une sous-algèbre de Cartan est une SADH régulière.

THÉORÈME 6.4 ([V4]). — *Les facteurs $L(F_n)$ n'ont pas de sous-algèbre diffuse hyperfinie régulière.*

La démonstration suit le même principe que dans le cas de la propriété Γ. Soient $(X_1, \ldots, X_d)$ des variables engendrant un facteur A, de type II_1, contenant une SADH régulière B. Voiculescu montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-algèbre de dimension finie $B_0 \subset B$, des entiers $p(j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$, des éléments $X_{ij} \in A$ et des projecteurs orthogonaux P_{ij} et Q_{ij} dans B_0, pour $1 \leqslant j \leqslant d$, $1 \leqslant i \leqslant p(j)$, tels que

$$\Big| X_j - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p(j)} (X_{ij} + X_{ij}^*) \Big|_2 < \varepsilon, \qquad X_{ij} = P_{ij} X_{ij} Q_{ij}$$

$$\sum_{i,j} \tau(P_{ij}) \tau(Q_{ij}) < \varepsilon. \tag{2}$$

Ainsi les variables X_j peuvent être reconstruites, à ε près, en recollant des « petits bouts » de matrices, la petitesse de ces bouts étant mesurée par (2). À ε fixé, ces conditions sont suffisamment fortes pour permettre de majorer le volume des états matriciels qui approximent $(X_1, \ldots, X_d)$, et obtenir une estimation de l'entropie de la forme

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) \leqslant C_1 + C_2 \log \varepsilon$$

cf. [V4], Theorem 3.2.

On en déduit que l'existence d'une SADH régulière dans le facteur engendré par $(X_1, \ldots, X_d)$ entraîne que $\chi(X_1, \ldots, X_d) = -\infty$, et donc que les facteurs de groupes libres n'ont pas de SADH régulière.

6.3. Sous-algèbres abéliennes maximales simples et facteurs premiers

Soient (A, φ) et (A', φ') deux espaces de probabilités non commutatifs, la forme linéaire $\varphi \otimes \varphi'$ définie sur le produit tensoriel algébrique de A et A' est positive. En lui appliquant la construction GNS on obtient un espace de probabilités non commutatif $(A \otimes A', \varphi \otimes \varphi')$. Si A et A' sont des facteurs de type II_1, alors leur produit tensoriel est encore un facteur de type II_1. Un facteur M, de type II_1, est dit premier s'il n'existe pas d'isomorphisme $M \sim M_1 \otimes M_2$ où M_1 et M_2 sont des facteurs de type II_1. Le facteur hyperfini R est isomorphe à $R \otimes R$, il n'est pas premier. Le problème de trouver des facteurs premiers remonte à Popa [P], qui avait donné un exemple dans le cas non séparable.

Liming Ge démontre dans [G2], en utilisant les techniques d'entropie libre, que les facteurs de groupes libres sont premiers. Le point crucial de la démonstration consiste à prouver que si un facteur A, de type II_1, est engendré par $(X_1, \ldots, X_d)$ et n'est pas premier, alors pour tout $\omega > 0$ on peut trouver deux sous-facteurs hyperfinis R_1 et R_2 de A qui commutent, des projections orthogonales $P_1, \ldots, P_p$ de trace $1/2$, qui commutent avec R_1, d'autres projections orthogonales $Q_1, \ldots, Q_q$ également de trace $1/2$, qui commutent avec R_2, et des polynômes non commutatifs $(V_j)_{j=1,\ldots,d}$ tels que

$$|X_j - V_j(P_1, \ldots, P_p, Q_1, \ldots, Q_q)|_2 < \omega.$$

Cette propriété permet de majorer l'entropie libre des X_i par

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) \leqslant (d-1) \log \omega + C_2.$$

Le résultat de Liming Ge a été généralisé par Ştefan [St1], qui montre que tout sous-facteur d'indice fini d'un facteur de groupe libre est premier.

Les techniques d'entropie libre ne permettent toutefois pas de répondre à la question suivante : $L(F_2) \otimes L(F_2)$ est-il isomorphe à $L(F_2) \otimes L(F_2) \otimes L(F_2)$?

Soit (A, φ) un espace de probabilités non commutatif, l'algèbre A agit à droite et à gauche sur l'espace $L^2(A, \varphi)$ et ces deux actions commutent. Une sous-algèbre abélienne maximale B dans A est dite simple (ou de multiplicité 1) s'il existe un vecteur $\xi \in L^2(A, \varphi)$ tel que $B\xi B$ est dense dans $L^2(A, \varphi)$. Liming Ge montre dans [G1]

que les facteurs de groupes libres ne possèdent pas de sous-algèbre maximale simple. Pour cela il montre d'abord que si l'espace de probabilités non commutatif (A, φ) est engendré par les d variables $(X_1, \ldots, X_d)$ et contient une sous-algèbre abélienne maximale simple, alors il existe, pour tout ω, un opérateur autoadjoint H dans A, des projections orthogonales $P_1, \ldots, P_k$ de trace $\tau(P_i) = 1/k$ vérifiant $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$, et des nombres complexes $\lambda_{r,s}^{(j)}$ tels que

$$|X_j - \sum_{r,s} \lambda_{r,s}^{(j)} P_r H P_s|_2 < \omega.$$

Autrement dit, les X_j peuvent être reconstruits, à ω près, à partir d'un seul opérateur H, et d'une algèbre $M_k(\mathbb{C})$ (engendrée par les P_i). Cette condition peut se traduire sur les états matriciels appartenant à $\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,k,\varepsilon}$ et entraîne que leur entropie libre est majorée par $C + (d-2)\log\omega$. Si $d \geqslant 3$ on voit donc que $\chi(X_1, \ldots, X_d) = -\infty$, ce qui règle le cas des facteurs $L(F_n)$ pour $n \geqslant 3$. Pour le cas de $L(F_2)$ on utilise l'isomorphisme $L(F_2) \sim L(F_5) \otimes M_2(\mathbb{C})$ pour conclure.

Une sous-algèbre abélienne maximale est dite de multiplicté finie s'il existe un nombre fini de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_l \in L^2(A, \varphi)$ tels que $B\xi_1 B + \cdots + B\xi_l B$ soit dense dans $L^2(A, \varphi)$. En utilisant des arguments semblables à ceux de Ge, Dykema [Dy2] a montré que les facteurs de groupes libres n'ont pas de sous-algèbre abélienne maximale de multiplicité finie. Il a d'autre part établi qu'ils ne satisfont pas la propriété C de Popa.

Finalement un résultat très général dans cette direction est celui de Ştefan [St2] qui montre que, dans un facteur de groupe libre $L(F_n)$, on ne peut pas trouver un sous-ensemble fini Z formé de p éléments auto-adjoints, et des facteurs non premiers $N_1, \ldots, N_f$ tels que $\sum_t \sum_{j_1,\ldots,j_{t+1}} N_{j_1} Z N_{j_2} Z \ldots N_{j_t} Z N_{j_{t+1}}$ soit dense dans $L^2(A, \varphi)$, dès que $n \geqslant p + 2f + 2$. Le même énoncé reste valable en remplaçant les facteurs non premiers N_j par des sous-algèbres abéliennes.

Signalons aussi que Shlyakhtenko [Sh2] a utilisé les résultats des numéros 6.2 et 6.3 pour montrer que les analogues libres des facteurs d'Araki-Woods (qui sont de type III_λ, $0 < \lambda < 1$) sont premiers et n'ont pas de sous-algèbre de Cartan.

7. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ENTROPIE LIBRE

L'entropie libre jouit de nombreuses propriétés qu'il sera sans doute nécessaire d'approfondir pour obtenir de nouvelles applications aux algèbres d'opérateurs. Jusqu'à présent, nous avons rencontré la propriété de sous-additivité au numéro 5.3, qui devient l'additivité dans le cas de variables libres. Les propriétés suivantes sont des analogues de propriétés bien connues de l'entropie classique.

7.1. Semi-continuité

Si une suite de d-uplets $(X_1^{(k)}, \ldots, X_d^{(k)})$ converge en distribution vers $(X_1, \ldots, X_d)$ (ce qui signifie que les moments de $(X_1^{(k)}, \ldots, X_d^{(k)})$ convergent simplement vers ceux de $(X_1, \ldots, X_d)$), alors

$$\limsup_{k\to\infty} \chi(X_1^{(k)}, \ldots, X_d^{(k)}) \leqslant \chi(X_1, \ldots, X_d).$$

7.2. Changement de variable

Soient

$$F_j = \sum_k \sum_{i_1,\ldots,i_k} c_{i_1,\ldots,i_k} t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_k}$$

d séries entières en d indéterminées non commutatives $t_1, \ldots, t_d$. On a une formule de changement de variables

$$\chi(F_1(X_1), \ldots, F_d(X_d)) = \chi(X_1, \ldots, X_d) + \log|\det| DF(X_1, \ldots, X_d),$$

où DF est un jacobien non commutatif et $|\det|$ est son déterminant de Kadison-Fuglede, cf. [V3]. Dans le cas où $F = (F_1, \ldots, F_d)$ est une application linéaire, on a simplement $|\det| DF = |\det(F)|$. En particulier, si les X_i sont linéairement dépendants, leur entropie libre vaut $-\infty$.

7.3. Maximisation de l'entropie

Le rôle des variables gaussiennes est tenu, en probabilités libres, par les systèmes semi-circulaires. Un système semi-circulaire est une famille de variables libres, chacune ayant la loi du demi-cercle de densité $\frac{1}{4\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx$ sur l'intervalle $[-2, +2]$. Comme pour les variables gaussiennes, les systèmes semi-circulaires maximisent l'entropie, à variance fixée. Plus précisément, soient $(X_1, \ldots, X_d)$ des variables centrées telles que $\varphi(X_i^2) = 1$, et $(S_1, \ldots, S_d)$ un système semi-circulaire alors

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) \leqslant \chi(S_1, \ldots, S_d).$$

Il y a égalité si et seulement si $(X_1, \ldots, X_d)$ est un système semi-circulaire [V5]. La formule de changement de variable vue au numéro précédent, dans le cas linéaire, permet de traiter le cas où la matrice de covariance des X_i est arbitraire.

Finalement certaines inégalités valables pour l'entropie classique ont des analogues libres [BV], [V6].

8. LA DIMENSION LIBRE

8.1. Définition

On a vu au numéro 6 que l'on utilise l'entropie libre en montrant que certains d-uplets de variables ont une entropie infinie. On peut introduire une quantité, appelée dimension libre par Voiculescu, qui permet de distinguer entre eux certains d-uplets

ayant une entropie infinie. Pour cela on effectue une régularisation des variables par un système semi-circulaire, puis on évalue la croissance de l'entropie en fonction de la variance du système semi-circulaire. Plus précisément, soient $(X_1, \ldots, X_d)$ un d-uplet de variables non commutatives et $(S_1, \ldots, S_d)$ un système semi-circulaire, libre avec $(X_1, \ldots, X_d)$; on définit

$$\delta(X_1, \ldots, X_d) = d + \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\chi(X_1 + \varepsilon S_1, \ldots, X_d + \varepsilon S_d)}{\log \varepsilon^{-1}}.$$

Les principales propriétés de cette dimension libre sont les suivantes.

1) $\delta(X_1, \ldots, X_d) \leqslant d$.

2) Si $\chi(X_1, \ldots, X_d) > -\infty$ alors $\delta(X_1, \ldots, X_d) = d$.

3) Si X est une variable de loi μ, alors $\delta(X) = \sum_t \mu(\{t\})^2$.

4) $\delta(X_1, \ldots, X_d) \leqslant \delta(X_1, \ldots, X_r) + \delta(X_{r+1}, \ldots, X_d)$ et si $X_1, \ldots, X_d$ forment une famille libre, alors

$$\delta(X_1, \ldots, X_d) = \delta(X_1) + \cdots + \delta(X_d)$$

Les propriétés 3) et 4) assurent que la notion est non triviale, et la propriété 2) montre que $L(F_n)$ possède un système de n générateurs de dimension libre n.

8.2. Le problème de l'isomorphisme

On ne sait pas si les facteurs de groupes libres sont isomorphes ou non. J'ai mentionné dans l'introduction l'alternative de Rădulescu : soit ces facteurs sont deux à deux non isomorphes, soit ils sont tous isomorphes. Si ces facteurs sont isomorphes alors, étant données $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables libres d'entropie finie qui engendrent donc un facteur isomorphe à $L(F_n)$, pour tout $m > n$, il existe $(Y_1, \ldots, Y_m)$, des variables libres d'entropie finie, qui engendrent le même facteur. Par exemple, on peut prendre des systèmes semi-circulaires pour les X_i et les Y_i. Les Y_i sont des « fonctions mesurables non commutatives » des X_i. La notion de dimension libre permet de montrer que ces fonctions mesurables non commutatives ne peuvent pas être trop régulières.

THÉORÈME 8.1 ([V3]). — *Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_m)$ deux familles de variables aléatoires, chacune engendrant l'espace de probabilités non commutatif (A, φ). Supposons qu'il existe des séries entières non commutatives $F_1, \ldots, F_m$ en n variables, telles que $Y_j = F_j(X_1, \ldots, X_n)$, et que les Y_i forment une famille libre d'entropie finie alors*

$$\delta(X_1, \ldots, X_n) \geqslant m.$$

En particulier on a $n \geqslant m$.

En fait la notion de dimension libre permettrait de résoudre le problème de l'isomorphisme des facteurs de groupes libres (en montrant qu'ils ne sont pas isomorphes entre eux), si l'on parvenait à établir la propriété de semi-continuité suivante : pour

toute suite $(X_1^{(k)}, \ldots, X_d^{(k)})_{k \geqslant 0}$ telle que $X_j^{(k)} \to_{k \to \infty} X_j$ pour la topologie forte des opérateurs, alors

$$\liminf_{k \to \infty} \delta(X_1^{(k)}, \ldots, X_d^{(k)}) \geqslant \delta(X_1, \ldots, X_d).$$

Il est facile en utilisant la propriété 3) du numéro précédent de vérifier cette semi-continuité dans le cas d'une variable, i.e.

$$\liminf_{k \to \infty} \delta(X^{(k)}) \geqslant \delta(X).$$

Dans le cas de plusieurs variables, on se heurte à la difficulté suivante : la dimension libre ne dépend que des moments des X_i, mais si, dans la propriété de semi-continuité, on remplace la convergence forte par la convergence des moments, alors il est facile de trouver des contre-exemples (prendre par exemple pour $(X_1, \ldots, X_n)$ un système semi-circulaire, et des approximations par des matrices de taille finie).

Une légère modification de la notion de dimension libre (qui, dans tous les exemples où on sait la calculer, coïncide avec la notion ci-dessus), a permis à Voiculescu [V4] de donner une version renforcée de certains résultats du numéro 6. Ainsi en notant δ_0 cette dimension libre modifiée, il montre que si l'algèbre de von Neumann engendrée par $(X_1, \ldots, X_d)$ admet une SAHD régulière, ou bien si elle a la propriété Γ, alors on a $\delta_0(X_1, \ldots, X_d) \leqslant 1$.

La notion de dimension libre possède des traits communs, encore loin d'être élucidés, avec une autre notion de dimension, introduite par Dykema [Dy1], ainsi qu'avec la notion de coût d'une relation d'équivalence, due à Gaboriau [Ga], voir également [Sh1].

8.3. Groupes ayant la propriété T de Kazhdan

Les groupes ayant la propriété T de Kazhdan ont des propriétés de rigidité qui suggèrent que les facteurs associés sont très éloignés des facteurs de groupes libres. Une tentative de quantifier cet éloignement au moyen de la dimension libre a été faite par Voiculescu [V8], qui a montré que certains systèmes de générateurs de $SL(n, \mathbb{Z})$ ont une dimension libre $\leqslant 1$. Ce résultat a été généralisé par Liming Ge et Junhao Shen [GS] qui ont montré que dans une grande classe d'algèbres de von Neumann, qui inclut à la fois les facteurs non premiers (au sens du numéro 6.3) et beaucoup de facteurs associés à des groupes ayant la propriété T, tout système fini de générateurs a une dimension libre $\leqslant 1$.

THÉORÈME 8.2 ([GS]). — *Soit (A, φ) un espace de probabilités non commutatif, engendré par r sous-algèbres $B_1, \ldots, B_r$, tel que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, il existe une sous-algèbre diffuse de B_j qui commute avec B_{j+1} (en identifiant B_{r+1} et B_1). Pour tout système fini de générateurs auto-adjoints de A on a*

$$\delta_0(X_1, \ldots, X_n) \leqslant 1.$$

Si $A = A_1 \otimes A_2$, alors A_1 commute avec A_2 dans A et le théorème s'applique. On retrouve ainsi le résultat du numéro 6.3.

Le groupe $SL(n, \mathbb{Z})$ est engendré par les éléments $I + e_{ij}$, $i \neq j$. Il est possible, pour $n \geqslant 3$, de ranger ces générateurs dans une suite dont les éléments consécutifs commutent. En prenant pour B_j les algèbres de von Neumann engendrées par ces générateurs, le théorème s'applique encore (lorsque n est impair $L(SL(n, \mathbb{Z}))$ est un facteur). Rappelons que le groupe $PSL(2, \mathbb{Z})$ ne vérifie pas la propriété de Kazhdan, et que le facteur qu'il engendre est isomorphe à un facteur de groupe libre à « 7/6 générateurs » (cf. [Sk]).

9. CONCLUSION

La définition à la Boltzmann de l'entropie libre présente des difficultés, dues à la complexité des ensembles de micro-états matriciels, dont il n'est pas aisé d'estimer le volume. Cela a conduit Voiculescu [V6] à introduire une autre notion d'entropie libre, plus intrinsèque, qui passe par la définition d'une information de Fisher libre. Cette nouvelle entropie libre possède de nombreuses propriétés en commun avec la première, mais se comporte mieux sous certains aspects (cf. [NSS1], [NSS2], [Sh3]). Il serait donc important d'arriver à relier les deux notions. On a des raisons probabilistes de penser qu'une telle relation existe mais on ne dispose pas encore de résultats définitifs ([BS], [CDG]).

RÉFÉRENCES

[BG] G. Ben Arous, A. Guionnet – *Large deviations for Wigner's law and Voiculescu's non-commutative entropy.* Probab. Theory Related Fields 108, no. 4 : 517–542, 1997.

[BS] P. Biane, R. Speicher – *Free diffusions, free entropy and free Fisher information.* Ann. Inst. H. Poincaré, Prob. Stat., **37** no. 5, 581–606, 2001.

[BV] P. Biane, D. Voiculescu – *A free probability analogue of the Wasserstein metric on the trace-state space.* Geom. and Funct. Anal., **11** :1125–1138, 2001.

[C1] A. Connes – *Classification of injective factors.* Ann. Math. **104** : 73–115, 1976.

[C2] A. Connes – *A factor of type II_1 with countable fundamental group.* J. Op. Theory **4** : 151–153, 1980.

[C3] A. Connes – *Classification des facteurs.* Proc. Symp. Pure Math. *Operator algebras and applications*, **Vol 38**, Part 2 :43–110, 1982.

[CDG] T. Cabanal-Duvillard, A. Guionnet – *Large deviations upper bounds and non commutative entropies for some matrices ensembles.* Ann. Prob, à paraître.

[Di] J. Dixmier – *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien.* 2ème édition, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[Dy1] K.J. Dykema – *Free products of hyperfinite von Neumann algebras and free dimension.* Duke Math. J. **69** no. 1 : 97–119, 1993.

[Dy2] K.J. Dykema – *Two applications of free entropy.* Math. Ann. **308**, no. 3 : 547–558, 1997.

[DS] J.D. Deuschel, D.W. Stroock – *Large deviations.* Pure and Applied Mathematics, **137**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.

[DZ] A. Dembo, O. Zeitouni – *Large deviations techniques and applications.* Second edition. Applications of Mathematics, **38**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[FM] J. Feldman, C.C. Moore – *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. II.* Trans. Amer. Math. Soc. **234**, no. 2 : 325–359, 1977.

[Ga] D. Gaboriau – *Coût des relations d'équivalence et des groupes.* Invent. Math. **139**, no. 1 : 41–98,2000.

[G1] Liming Ge – *Applications of free entropy to finite von Neumann algebras I.* Amer. J. Math. **119** :467–485, 1997.

[G2] Liming Ge – *Applications of free entropy to finite von Neumann algebras II.* Ann. Math. **147** :143–157, 1998.

[GN] V. Ya. Golodets, N. I. Nessonov – *T-property and nonisomorphic full factors of types* II *and* III. J. Funct. Anal. **70** no. 1 : 80–89, 1987.

[GS] Liming Ge, Junhao Shen – *Free entropy and property T factors.* Proc. Nat. Acad. Sc. **97** no. 18 : 9881–9885, 2000.

[McD] D. Mc Duff – *Uncountably many II_1 factors*, Ann. Math. **90** :372–378, 1969.

[Me] M.L. Mehta – *Random matrices.* Second edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1991.

[MvN] F. J. Murray, J. von Neumann – *On rings of operators IV.* Ann. Math. **44** :716–708, 1943.

[vN1] J. von Neumann – *On rings of operators III.* Ann. Math. **41** :94–161, 1940.

[vN2] J. von Neumann – *On rings of operators. Reduction theory.* Ann. Math. **50** :401–485, 1949.

[NSS1] A. Nica, D. Shlyakhtenko, R. Speicher – *Maximality of the microstates free entropy for R-diagonal elements.* Pacific J. Math. **187** no. 2, 333–347, 1999.

[NSS2] A. Nica, D. Shlyakhtenko, R. Speicher – *Some minimization problems for the free analogue of the Fisher information.* Adv. Math. **141** no. 2, 282–321, 1999.

[P] S. Popa – *Orthogonal pairs of $*$-subalgebras in finite von Neumann algebras.* J. Operator theory **9**, 253–268, 1983.

[PV] L. Pastur, V. Vasilchuk – *On the law of addition of random matrices.* Comm. Math. Phys. **214** : 249–286, 2000.

[R] F. RĂDULESCU – *Random matrices, amalgamated free products and subfactors of the von Neumann algebra of a free group, of noninteger index.* Invent. Math. **115** no. 2, 347–389, 1994.

[Sh1] D. SHLYAKHTENKO – *Prime type III factors.* Proc. Nat. Acad. Sc. **97** no. 23 : 12439–12441, 2000.

[Sh2] D. SHLYAKHTENKO – *Microstates free entropy and cost of equivalence relations.* math.OA/9912224.

[Sh3] D. SHLYAKHTENKO – *Free entropy with respect to a completely positive map.* Amer. J. Math. **122** no. 1, 45–81, 2000.

[Sk] G. SKANDALIS – *Algèbres de von Neumann de groupes libres et probabilités non commutatives (d'après Voiculescu, etc.).* Séminaire Bourbaki, Exp. n° 764, Vol. 1992/93. Astérisque No. **216** (1993), 87–102.

[Sp1] R. SPEICHER – *Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability theory.* Mem. Amer. Math. Soc. **132** (1998), no. 627.

[Sp2] R. SPEICHER – *Free probability theory and non-crossing partitions.* Sém. Lothar. Combin. 39 (1997), Art. B39c, 38 pp. http ://www.mat.univie.ac.at/ slc/

[St1] M. ŞTEFAN – *The primality of subfactors of finite index in the interpolated free group factors.* Proc. Amer. Math. Soc. **126** no. 8 : 2299–2307, 1998.

[St2] M. ŞTEFAN – *The indecomposability of free group factors over nonprime subfactors and abelian subalgebras.* Preprint, 1999.

[Sz] S. SZAREK – *Nets of Grassmann manifold and orthogonal group.* Proceedings of Research Workshop on Banach space Theory, Iowa Coty, Iowa : 169–185, 1981.

[V1] D. VOICULESCU – *Symmetries of some reduced free product C^*-algebras.* Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory (Buşteni, 1983), Lecture Notes in Math., 1132 : 556–588, Springer, Berlin-New York, 1985.

[V2] D. VOICULESCU – *Limit laws for random matrices and free products.* Inv. Math. **104** :201–220, 1983.

[V3] D. VOICULESCU – *The analogue of entropy and of Fisher's information theory in free probability theory II.* Inv. Math. **118** :411–440, 1994.

[V4] D. VOICULESCU – *The analogue of entropy and of Fisher's information theory in free probability theory III : the absence of Cartan subalgebra.* Geom. And Funct. Anal. **Vol 6** No 1 :411–440, 1996.

[V5] D. VOICULESCU – *The analogue of entropy and of Fisher's information theory in free probability theory IV : maximum entropy and freeness.* in *Free probability*, D. Voiculescu, ed., Fields Inst. Communications, **Vol 12** :293–302, AMS Providence, 1997.

[V6] D. VOICULESCU – *The analogue of entropy and of Fisher's information theory in free probability theory V : non commutative Hilbert transform.* Inv. Math. **132** :182–227, 1998.

[V7] D. VOICULESCU – *A strengthened asymptotic freeness result for random matrices with applications to free entropy.* Internat. Math. Res. Notices no. 1, 41–63,1998.

[V8] D. VOICULESCU – *Free entropy dimension* $\leqslant 1$ *for some generators of property T factors of type* II_1. J. Reine Angew. Math. **514** 113–118, 1999.

Philippe BIANE

CNRS, D.M.A.
École normale supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cedex 05
E-mail : Philippe.Biane@ens.fr

Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53e année, 2000-2001, nO 890, p. 301 à 322

PROGRÈS RÉCENTS EN FONCTORIALITÉ DE LANGLANDS

par **Guy HENNIART**

1. INTRODUCTION

Les résultats que je vais exposer concernent les représentations automorphes : de nouveaux cas spectaculaires de la fonctorialité de Langlands viennent d'être établis. Pour comprendre cela, il faut introduire le langage adélique et la théorie des représentations. Mais les progrès récents ont aussi des conséquences importantes en termes plus classiques, et c'est par elles que je veux commencer.

Pour leurs conseils amicaux et leurs remarques éclairées, je remercie L. Clozel, G. Laumon, P. Sarnak, J.-P. Serre et, particulièrement, F. Shahidi.

1.1. Valeurs propres du laplacien

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit (par $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$) sur le demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H}$ formé des nombres complexes à partie imaginaire strictement positive. Si Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ – par exemple le sous-groupe $\Gamma_0(N)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où c est un multiple de N – la surface de Riemann $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ a un volume fini pour la mesure hyperbolique $dx\,dy/y^2$. L'opérateur de Laplace $\triangle = -y^2\Big(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\Big)$ définit un opérateur autoadjoint positif sur $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. On note $\lambda_1(\Gamma)$ sa plus petite valeur propre non nulle.

Pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 3\pi^2/2$ (Roelcke, 1956) et en fait $\lambda_1(\Gamma) \simeq 91,14$ (Hejhal [Hj]). Connaître l'inégalité $\lambda_1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \geqslant 2/9 \simeq 0,222$ permet déjà d'aborder le « problème du cercle hyperbolique » : pour $X \geqslant 0$ estimer le nombre $P(X)$ de matrices dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont la somme des carrés des coefficients vaut au plus X ; on obtient $P(X) = 6X + O(X^{2/3})$ quand $X \to +\infty$[(1)].

[(1)] Dans [I], les membres de droite des formules suivantes doivent être multipliés par 2 : 12.6, 12.7, 12.12, 12.14, 12.15, 12.17, 12.19. En outre, le signe − de 12.3 doit être remplacé par un signe +.

Pour un sous-groupe de congruence quelconque Γ, A. Selberg, en 1965, a établi $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 3/16 = 0,1875$, et conjecturé $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 1/4 = 0,25$. Cette dernière inégalité permet en particulier de compter les géodésiques fermées de $\mathfrak{H}/\Gamma$ selon leur longueur avec un bon terme d'erreur [I, § 11]. Mais elle n'est connue que pour peu de groupes, par exemple pour les groupes $\Gamma_0(N)$ où N est petit, $N \leqslant 18$.

On verra en 3.6 que chaque progrès en fonctorialité de Langlands peut permettre de mieux approcher la conjecture de Selberg. C'est une approche due à Langlands lui-même [La1]. H. Kim et P. Sarnak ont ainsi récemment obtenu $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 975/4096 \simeq 0,238$. L'inégalité $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 2/9$ suffit à généraliser l'estimation du problème du cercle hyperbolique de la façon suivante [KS1, § 8]. Pour z, w fixés dans $\mathfrak{H}$, notons $\rho(z,w)$ la distance hyperbolique entre z et w, et pour $X \geqslant 0$, notons $P(X)$ le nombre d'éléments γ de Γ tels que $2\mathrm{ch}\,\rho(\gamma z, w) \leqslant X$ (on a $2\mathrm{ch}\,\rho(z,w) = 2 + \frac{|z-w|^2}{\mathrm{Im}\,z\ \mathrm{Im}\,w}$). On a alors l'estimation $P(X) = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})^{-1}\pi X + O(X^{2/3})$ pour $X \to +\infty$ [I, § 12]. Pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $z = w = i$, c'est le résultat cité plus haut.

1.2. Formes modulaires

Partons d'une forme modulaire classique. Plus précisément, considérons une forme modulaire parabolique f pour le groupe $\Gamma_0(N)$, de poids $k \geqslant 1$ et de caractère $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$. Supposons que f soit nouvelle, normalisée et vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke. Ainsi f est une fonction holomorphe sur $\mathfrak{H}$ qui vérifie $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^k f(z)$ pour $z \in \mathfrak{H}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Elle a un développement de Fourier en la pointe $i\infty$ qui s'écrit $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n$, où on a posé $q = \exp(2\pi i z)$ pour $z \in \mathfrak{H}$. Ce développement commence par $a_1 = 1$ et, au moins pour les nombres premiers p ne divisant pas N, l'action de l'opérateur de Hecke T_p est donnée par $T_p f = a_p f$. La transformée de Mellin de f est sa fonction L

$$L(f,s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n\, n^{-s}.$$

Cette série de Dirichlet est donnée par un produit eulérien $L(f,s) = \prod_p L_p(f,s)$, où pour p premier ne divisant pas N, on a $L_p(f,s) = (1 - a_p\, p^{-s} + \varepsilon(p)\, p^{k-1-2s})^{-1}$.

La série de Dirichlet $L(f,s)$ converge si la partie réelle du paramètre complexe s est assez grande, et la fonction ainsi obtenue possède un prolongement holomorphe à tout le plan complexe, borné dans les bandes verticales. Si on ajoute un facteur à l'infini $L_\infty(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ et que l'on pose $\Lambda(f,s) = L_\infty(s)\, L(f,s)$, on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f,s) = \alpha\, N^{-s}\, \Lambda(\widetilde{f}, k-s),$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ et où $\Lambda(\widetilde{f}, s)$ est la fonction analogue attachée à la forme modulaire $\widetilde{f}(z) = \sum_{n\geqslant 1} \overline{a}_n q^n$.

Par ailleurs, les coefficients de f engendrent une extension finie E de $\mathbb{Q}$ et on sait que si ℓ est un nombre premier et j un plongement de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, il existe une

représentation $\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, qui est continue, irréductible, non ramifiée hors de $N\ell$, et caractérisée à isomorphisme près par le fait que, pour p premier ne divisant pas $N\ell$, on a, en appliquant j aux coefficients de $L_p(f,s)$,

$$j\, L_p(f,s) = \det\left(1 - \rho_\ell(\mathrm{Frob}_p)p^{-s}\right)^{-1},$$

Frob_p désignant ici une substitution de Frobenius géométrique en p.

Si maintenant $r : \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GL}_n$ est une représentation algébrique, on peut former la représentation $r \circ \rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et, au moins pour $p \nmid N\ell$, le facteur

$$L_p(r \circ \rho_\ell, s) = \det\left(1 - r \circ \rho_\ell(\mathrm{Frob}_p)p^{-s}\right)^{-1}.$$

On espère bien que cela définit des fonctions L ayant les mêmes propriétés que $L(f,s)$. Par exemple, on voudrait définir, pour tout nombre premier p, un facteur eulérien $L_p(f,r,s)$, à coefficients dans E, et également un facteur à l'infini $L_\infty(f,r,s)$ de sorte que, pour p ne divisant pas $N\ell$, on ait $j\, L_p(f,r,s) = L_p(r \circ \rho_\ell, s)$ et que la fonction $\Lambda(f,r,s) = L_\infty(f,r,s)\prod_p L_p(f,r,s)$ (qui, elle aussi, converge pour s de partie réelle assez grande) se prolonge à tout le plan complexe en une fonction sinon entière, du moins avec un nombre fini de pôles contrôlables, et qui en outre vérifie une équation fonctionnelle comme plus haut.

Bien sûr, on peut se limiter au cas où r est irréductible. Si $r : \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GL}_1$ est donné par le déterminant, le résultat est connu : on trouve, à un décalage de la variable près, la fonction L du caractère de Dirichlet ε. Les représentations algébriques irréductibles de GL_2 de degré supérieur sont, à torsion près par une puissance du déterminant, les représentations $\mathrm{Sym}^k : \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GL}_{k+1}$, $k \geqslant 1$, données par les produits symétriques. Pour $k = 1$, on retrouve $L(f,s)$. Jusqu'à récemment, on connaissait le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle (conformément à l'espoir énoncé plus haut) pour $k \leqslant 5$. Grâce aux travaux récents de F. Shahidi et H. Kim, on peut aller jusqu'à $k = 9$, avec un contrôle précis des pôles pour $k = 2, 3, 4$ [KS0, KS1, K3, KS2].

Mais, à vrai dire, l'espoir est bien plus profond que celui évoqué plus haut : ces propriétés analytiques devraient découler du fait que les facteurs $L_p(f,r,s)$ sont attachés à des objets généralisant les formes modulaires, les représentations automorphes : les formes modulaires correspondent à des représentations automorphes de GL_2 (sur $\mathbb{Q}$), tandis que $L_p(f, \mathrm{Sym}^k, s)$ doit provenir d'une représentation automorphe de GL_{k+1} (sur $\mathbb{Q}$). Ce passage, de GL_2 à GL_{k+1}, est un cas particulier des conjectures de fonctorialité de Langlands [La1, B]. Pour $k = 2$, il est dû à Gelbart et Jacquet [GJ]. Kim et Shahidi ont établi tout récemment [KS0, KS1, K3, KS2] les cas $k = 3$ et 4, pour les représentations automorphes de GL_2 sur tout corps de nombres F. C'est ce que nous tenterons d'expliquer dans la suite de l'exposé.

2. REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES ET FONCTORIALITÉ

2.1. Formes automorphes [BJ]

Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}$. On note $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(F)$ l'ensemble des places de F. Pour $v \in \mathcal{P}$, on note F_v le complété de F en v et, si v est finie, $\mathcal{O}_v$ est l'anneau des entiers de F_v.

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est l'union de ses sous-groupes $\prod_{v\in S} \mathrm{GL}_n(F_v) \prod_{v\notin S} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)$, où S parcourt les parties finies de $\mathcal{P}$ contenant les places à l'infini. Chacun de ces sous-groupes est muni de la topologie produit, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ de la topologie limite inductive. Plus généralement, si G est un groupe linéaire algébrique sur F, on définit de manière analogue un groupe topologique $G(\mathbb{A}_F)$. C'est un groupe localement compact. Pour $G = \mathrm{GL}_1$, on obtient le groupe $\mathbb{A}_F^\times$ des idèles de F. Pour $v \in \mathcal{P}$, on a un plongement à image dense de $G(F)$ dans $G(F_v)$, d'où un plongement diagonal de $G(F)$ dans $G(\mathbb{A}_F)$, qui fait de $G(F)$ un sous-groupe discret de $G(\mathbb{A}_F)$.

Désormais, nous prendrons G réductif, déployé, le plus souvent $G = \mathrm{GL}_n$. Les *formes automorphes* sur $G(\mathbb{A}_F)$ sont des fonctions à valeurs complexes sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ qui possèdent diverses propriétés de finitude, de lissité et de croissance. Elles forment un espace vectoriel $\mathcal{A}$ sur lequel le groupe $G(F_v)$ pour $v \in \mathcal{P}$ finie agit par translation à droite. Pour $v \in \mathcal{P}$ infinie, c'est l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_v$ de $G(F_v)$ et un sous-groupe compact maximal K_v qui agissent, de façon compatible.

2.2. Représentations automorphes [BJ]

Une *représentation automorphe* de $G(\mathbb{A}_F)$ s'obtient en prenant deux sous-espaces de $\mathcal{A}$ stables par ces actions, inclus l'un dans l'autre, de sorte que l'action sur le quotient soit irréductible. Une telle représentation Π se décompose en produit tensoriel $\Pi = \otimes_{v\in\mathcal{P}}\Pi_v$, où Π_v est un $(\mathcal{G}_v, K_v)$-module admissible irréductible si v est infinie, et une représentation lisse irréductible de $G(F_v)$ si v est finie : *lisse* signifie que tout vecteur de l'espace de Π_v est fixé par un sous-groupe ouvert de $G(F_v)$. Les composantes Π_v sont déterminées par Π, à isomorphisme près.

Étant irréductible, une représentation automorphe Π vérifie une version du lemme de Schur. Si Z est le centre de G, $Z(\mathbb{A}_F)$ agit sur l'espace de Π par un quasi-caractère, i.e. un homomorphisme continu à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$, appelé *quasi-caractère central* de π, et noté ω_Π.

Pour toute place v finie sauf un nombre fini d'entre elles (on dit « pour presque tout v »), la représentation π_v est *non ramifiée* : elle possède un vecteur non nul fixé par un sous-groupe compact maximal convenable K_v, dit hyperspécial ; pour $G = \mathrm{GL}_n$, on prend $K_v = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)$.

Les représentations lisses irréductibles non ramifiées de $G(F_v)$ ont été classifiées : il y en a une, à isomorphisme près, par classe de conjugaison semi-simple dans un certain groupe complexe attaché à G. Pour G déployé comme ici, on peut se contenter

de prendre le groupe dual $\widehat{G}$ de G. C'est le groupe réductif complexe dont les racines sont les coracines de G, et les coracines les racines de G. Pour $G = \mathrm{GL}_n$, on a donc $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; pour $G = \mathrm{Sp}_{2n}$, on a $\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et dualement $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ pour $\mathbf{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}$, tandis que $\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ pour $G = \mathrm{SO}_{2n}$. Pour $G = \mathrm{GL}_n$, se donner une représentation lisse irréductible non ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F_v)$ revient donc à se donner une matrice diagonalisable de taille n, à conjugaison près, ou encore n valeurs propres complexes, à l'ordre près.

Exemple 1. — Prenons $F = \mathbb{Q}$ et partons d'une forme modulaire f comme en 1.2. En utilisant l'application $g \mapsto g(i)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{H} \cup -\mathfrak{H}$, et en voyant $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ comme quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, on associe à f une forme automorphe sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, qui apparaît comme un vecteur caractéristique, dit « nouveau vecteur », dans une représentation automorphe $\Pi = \Pi(f)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ [Ge]. Le composant à l'infini de $\Pi(f)$ reflète le poids de f ; c'est la « série discrète » de poids k si $k \geqslant 2$. Pour p premier ne divisant pas le niveau N de f, π_p est non ramifiée et la classe de conjugaison correspondante dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a deux valeurs propres α_p et β_p vérifiant

$$a_p = p^{(k-1)/2}(\alpha_p + \beta_p), \qquad \alpha_p\,\beta_p = \varepsilon(p).$$

Remarque. — Si G est un produit $G_1 \times G_2$, le groupe dual $\widehat{G}$ s'identifie à $\widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2$, et une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_F)$ apparaît comme un produit tensoriel $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ d'une représentation automorphe de $G_1(\mathbb{A}_F)$ par une représentation automorphe de $G_2(\mathbb{A}_F)$. On a des considérations analogues pour les composants locaux, et les produits de plus de deux facteurs.

2.3. Conjecture de Ramanujan-Petersson

Pour une forme automorphe f sur $G(\mathbb{A}_F)$, on a une notion de *cuspidalité* qui, dans le cadre de l'exemple 1, traduit le fait que la forme modulaire est parabolique. On dit que f est *cuspidale* si, quel que soit le sous-groupe parabolique maximal P de G, de radical unipotent N, l'intégrale $\int f(ng)dn$, où dn désigne une mesure $N(\mathbb{A}_F)$-invariante sur $N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)$, est nulle pour tout $g \in G(\mathbb{A}_F)$.

Il faut voir cette condition comme exprimant que certains coefficients de Fourier sont nuls ; dans ce contexte, on parle de terme constant le long de N.

La théorie des séries d'Eisenstein de Selberg et Langlands permet dans une certaine mesure d'analyser les représentations automorphes non cuspidales de $G(\mathbb{A}_F)$ en termes des représentations automorphes de ses sous-groupes de Levi propres – des produits de groupes GL_r avec $r < n$ si $G = \mathrm{GL}_n$ –, de même que dans le cas classique les formes modulaires orthogonales aux formes paraboliques sont combinaisons linéaires de séries d'Eisenstein.

Une représentation automorphe est dite *unitaire* si elle possède un produit scalaire hermitien invariant, *cuspidale* si on peut la réaliser dans un espace de formes

cuspidales. La *conjecture de Ramanujan-Petersson* dit que si π est une représentation automorphe cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, alors pour chaque place v de F, le composant π_v est *tempéré*, ce qui signifie que ses coefficients matriciels[(2)] ne croissent pas trop vite à l'infini. Si v est fini et π_v non ramifiée, cela équivaut à dire que les valeurs propres de la matrice correspondante de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont toutes de module 1. Pour f comme dans l'exemple 1, c'est un résultat connu (Eichler, Shimura, Ihara, Deligne, Deligne-Serre,...). Quand f est la fonction de Ramanujan $\Delta = \sum_{n\geqslant 1}\tau(n)q^n$, de poids 12, cela donne précisément la conjecture de Ramanujan : $|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$ pour p premier.

Exemple 2. — Si Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, une fonction L^2 sur $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$, valeur propre du laplacien, peut aussi s'interpréter comme forme automorphe sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$; on donne ainsi naissance à des représentations automorphes Π. Mais le composant à l'infini Π_∞ n'est plus alors une « série discrète » mais une « série principale » dépendant de paramètres complexes s_1 et s_2. La valeur propre correspondante du laplacien est $\lambda = \frac{1}{4} - s^2$ si $s = \mathrm{Re}(s_1) = -\mathrm{Re}(s_2)$ n'est pas nul ; dire que Π_∞ est tempérée pour Π cuspidale implique précisément $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 1/4$. Les progrès récents vers la conjecture de Selberg proviennent de bornes sur $s = |\mathrm{Re}(s_1)|$ (voir 3.6).

2.4. Fonctorialité [La1, B, La3]

Plus profondes que la conjecture de Ramanujan-Petersson sont les conjectures de fonctorialité de Langlands. Sous une première forme, dite faible, on peut les énoncer ainsi. Partons d'une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A}_F)$, et donnons-nous une représentation (algébrique) irréductible r de $\widehat{G}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour presque toute place finie v de F, le composant Π_v est non ramifié et définit une classe de conjugaison semi-simple A_v dans $\widehat{G}$, d'où une matrice diagonalisable $r(A_v)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, bien définie à conjugaison près. L'espoir est qu'il existe une représentation automorphe $r(\Pi)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ paramétrée par $r(A_v)$ en toute place finie v où Π_v est non ramifiée ; on aura reconnu, dans un contexte élargi, des considérations analogues à 1.2.

Notons le phénomène de *rigidité* suivant : si $r(\Pi)$ est cuspidale, ou plus généralement si $r(\Pi)$ est *isobare* au sens de Langlands [La5], la donnée des $r(A_v)$ (presque partout) détermine $r(\Pi)$ [JS]. Si G est un produit de groupes linéaires GL_{n_i} et que Π est cuspidale, on espère que $r(\Pi)$ est isobare, et même cuspidale sauf dans des cas précis (cf. 3.7).

Cette propriété de rigidité laisse espérer, si l'on est optimiste, que pour *toute* place v de F, le composant $r(\Pi)_v$ ne dépende que de Π_v et donne une application locale $\Pi_v \mapsto r(\Pi_v)$. De telles applications locales sont connues pour les places infinies, et pour les places finies si G est un produit de groupes linéaires GL_{n_i}. Expliquons cela.

(2) Voir plus loin 3.1.

Quand v est une place infinie de F, Langlands [La3] a montré comment répartir les classes d'isomorphisme de $(\mathcal{G}_v, K_v)$-modules admissibles irréductibles en paquets finis appelés L-paquets, lesquels paquets sont paramétrés par les homomorphismes continus semi-simples du groupe de Weil W_v dans $\widehat{G}$, à conjugaison près. On peut même analyser la structure des paquets, cf. [ABV] ; pour $G = \mathrm{GL}_n$, un L-paquet n'a qu'un élément.

Le groupe de Weil W_v est une variante du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$, où $\overline{F_v}$ est une clôture algébrique de F_v, variante qui existe aussi pour v finie. Pour v finie, on conjecture que les classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $G(F_v)$ se répartissent elles aussi en L-paquets finis, paramétrés cette fois par les homomorphismes continus semi-simples de $W_v \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\widehat{G}$, à conjugaison près – on demande bien sûr une compatibilité avec la classification dans le cas non ramifié. Pour $G = \mathrm{GL}_n$, ces conjectures ont été prouvées récemment par M. Harris et R. Taylor [HT, He, Ca], et les L-paquets sont des singletons.

On définit les applications locales $\Pi_v \mapsto r(\Pi_v)$ de la façon évidente : si le L-paquet de Π_v a pour paramètre l'homomorphisme σ_v, à valeurs dans $\widehat{G}$, alors $r(\Pi_v)$ a pour paramètre l'homomorphisme $r \circ \sigma_v$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On peut alors énoncer la forme forte des conjectures de fonctorialité de Langlands, au moins si G est un produit de groupes GL_{n_i} : pour une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A}_F)$, on demande que $r(\Pi) = \otimes\, r(\Pi_v)$ soit automorphe. En pratique, on démontre souvent d'abord la forme faible ; si la représentation $r(\Pi)$ ainsi construite est isobare, alors, par rigidité, les composants $r(\Pi)_v$ aux places infinies ou finies ramifiées sont déterminés, et il s'agit pour conclure de prouver qu'on a $r(\Pi)_v = r(\Pi_v)$ en ces places.

Remarquons qu'il existe un groupe de Weil pour F lui-même, noté W_F, et qu'il est muni de plongements continus $W_v \to W_F$ pour $v \in \mathcal{P}$. Si Σ est un homomorphisme continu de W_F dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on obtient pour chaque $v \in \mathcal{P}$ un homomorphisme $W_v \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ paramétrant un composant local R_v, et on espère que $R = \otimes R_v$ est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$; on pense même que R est cuspidale si et seulement si Σ est irréductible.

En fait, le résultat de Harris et Taylor mentionné plus haut est obtenu en utilisant le phénomène de rigidité : pour Σ dans une certaine collection d'homomorphismes continus irréductibles $W_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ils prouvent qu'il existe une représentation automorphe cuspidale R de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ telle que R_v soit paramétrée par Σ_v pour presque tout v ; ils montrent ensuite que R_v en toute place ne dépend que de Σ_v et que cela donne bien la paramétrisation attendue.

Cependant, sauf pour $n = 1$ où le résultat est donné par la construction même du groupe de Weil, on ne peut espérer obtenir *toutes* les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ à partir d'homomorphismes $\Sigma : W_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; il faut postuler l'existence d'un groupe plus gros L_F dont W_F serait un quotient. L'existence de ce groupe est encore très hypothétique, mais l'heuristique est puissante : au moins pour G produit de

groupes GL_{n_i}, tout se passe comme si les représentations automorphes isobares Π de $G(\mathbb{A}_F)$ étaient paramétrées par les représentations $\Sigma : L_F \to \widehat{G}$, Σ étant irréductible exactement quand Π est cuspidale. Le composé $r \circ \Sigma : L_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ paramètre alors la représentation automorphe $r(\Pi)$. On peut de cette façon comprendre les critères pour que $r(\Pi)$ soit cuspidale, *cf.* 3.7.

Remarque. — Toutes ces conjectures de Langlands ont des analogues quand on remplace le corps de nombres F par un corps de fonctions en une variable sur un corps fini. Mais dans ce cadre la situation est bien plus satisfaisante. Laumon, Rapoport et Stuhler ont établi en 1993 que les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F_v)$ sont paramétrées par les homomorphismes $W_v \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et Laurent Lafforgue a prouvé en 2000 que les représentations automorphes cuspidales sont paramétrées par les représentations irréductibles de degré n du groupe de Weil W_F et ce de façon compatible à la paramétrisation locale[(3)] (voir [Ln] pour les détails). Ainsi, il n'y a pas besoin du groupe plus gros L_F. Pour un corps de fonctions F, les résultats de 2.5 ci-dessous sont donc automatiques.

2.5. Les principaux résultats récents

Les progrès récents portent surtout sur les groupes GL_2 et GL_3. Pour $G = \mathrm{GL}_2$, les représentations à considérer sont de la forme $r = \mathrm{Sym}^k \otimes \det^\ell$, $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Certains cas sont évidents : pour $k = 1$ et $\ell = 0$, on trouve $r(\Pi) = \Pi$; pour $k = \ell = 0$, $r(\Pi)$ est le caractère trivial de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$. Plus généralement, si Π est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, $r(\Pi)$, pour $r = \mathrm{Sym}^k \otimes \det^\ell$, s'obtient à partir de $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ par torsion par $(\omega_\Pi \circ \det)^\ell$, où $\omega_\Pi : \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ est le quasi-caractère central de Π. Il suffit donc de traiter le cas $r = \mathrm{Sym}^k$, $k \geqslant 2$.

Pour une représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, on se demande si $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est automorphe. On supposera Π cuspidale : c'est le cas difficile.

Pour $k = 2$, le résultat est dû à Gelbart et Jacquet [GJ] en 1978. Le cas $k = 3$ n'a cédé que l'an dernier aux efforts de Shahidi et Kim [KS0, KS1] ; ce dernier a peu après résolu le cas $k = 4$ [K3].

En fait, les résultats de Kim et Shahidi sont conséquences d'autres résultats de fonctorialité, qu'ils démontrent aussi. Pour $k = 3$, ils utilisent $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ et $r : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ donné par le produit tensoriel ; le cas similaire pour $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ avait été traité peu auparavant par Ramakrishnan [Ra2] ; la méthode de Kim et Shahidi redonne d'ailleurs ce résultat [K3]. Pour $k = 4$, Kim utilise $G = \mathrm{GL}_4$ et $r = \wedge^2 : \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ donné par le carré extérieur. Mais en ce dernier cas, le résultat n'est pas tout à fait complet : si Π est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_F)$, on a une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_6(\mathbb{A}_F)$ dont le

(3) Il faut cependant considérer les représentations ℓ-adiques de W_F plutôt que les représentations complexes.

composant en toute place v est $\wedge^2(\Pi_v)$ sauf peut-être, dans certains cas exceptionnels, pour des places au-dessus de 2 ou 3. Pour Sym^4 par contre, le résultat est complet.

Pour $k = 3$ ou 4, Kim et Shahidi [KS2] (Gelbart et Jacquet [GJ], déjà, pour $k = 2$) disent quand $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est cuspidale et analysent les cas où elle ne l'est pas. Voir ci-dessous, 3.7.

Dans la suite, nous expliquons le rôle omniprésent que jouent les fonctions L dans les démonstrations.

3. LE RÔLE DES FONCTIONS L

3.1. Fonctions L pour GL_n [J]

Une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$ n'est autre qu'un quasicaractère de $F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times$. Dans sa thèse, en 1955, Tate a montré comment définir la fonction $L(\chi, s)$ d'un tel quasicaractère comme produit de facteurs locaux $L(\chi_v, s)$ de sorte que l'équation fonctionnelle de $L(\chi, s)$ soit conséquence d'équations fonctionnelles locales – et d'un argument du style formule de Poisson ; en outre, la constante dans l'équation fonctionnelle se trouve décomposée en produit de constantes locales. En 1970, Godement et Jacquet [GoJ] ont généralisé la thèse de Tate au cas des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, $n \geqslant 2$. À titre d'illustration, précisons leurs résultats pour une place finie v de F. On fixe un caractère additif non trivial ψ de F_v et une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F_v)$. On considère des intégrales $Z(f, \Phi, s)$ dépendant d'un paramètre complexe s, d'un coefficient matriciel f de π et d'une fonction auxiliaire Φ sur $M_n(F)$, localement constante et à support compact. Un *coefficient matriciel* est une fonction sur $\mathrm{GL}_n(F_v)$ de la forme $g \mapsto \lambda(\pi(g)v)$ où v est un vecteur de l'espace de π et λ une forme linéaire sur cet espace qui est *lisse*, i.e. invariante par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(F_v)$; ces formes linéaires forment l'espace d'une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F_v)$, la représentation *contragédiente* $\pi^\vee$ de π. L'intégrale est définie par $Z(f, \Phi, s) = \int f(g)\,\Phi(g)\,|\det g|^{s+(n-1)/2} dg$, où dg est une mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_n(F_v)$.

Une telle intégrale converge pour s de partie réelle assez grande, vers une fonction rationnelle de q_v^{-s} où q_v est le cardinal du corps résiduel de F_v, et quand f et Φ varient ces fonctions rationnelles engendrent un idéal fractionnaire de $\mathbb{C}[q_v^{-s}, q_v^s]$ qui possède un unique générateur de la forme $P(q_v^{-s})^{-1}$, où P est un polynôme complexe de terme constant égal à 1. Ce générateur est la fonction $L(\pi, s)$.

L'équation fonctionnelle locale apparaît quand on remplace f par le coefficient $f^\vee : g \mapsto f(g^{-1})$ de $\pi^\vee$ et Φ par sa transformée de Fourier $\widehat{\Phi} : y \mapsto \int \Phi(x)\psi \circ \mathrm{tr}(xy) dx$, où dx est une mesure de Haar autoduale sur $M_n(F)$. Elle s'écrit

$$\frac{Z(f, \Phi, s)}{L(\pi, s)} = \varepsilon(\pi, s, \psi)\,\frac{Z(f^\vee, \widehat{\Phi}, 1-s)}{L(\pi^\vee, 1-s)}\,,$$

où la constante locale $\varepsilon(\pi, s, \psi)$ est un monôme en q_v^{-s} ne dépendant ni de f ni de Φ.

Si π est non ramifiée, correspondant à une matrice diagonalisable A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $L(\pi, s) = \det(1_n - Aq_v^{-s})^{-1}$. On peut alors aussi calculer facilement $\varepsilon(\pi, s, \psi)$: si par exemple ψ est non ramifié, *i.e.* trivial sur $\mathcal{O}_v$, mais non trivial sur l'inverse de son idéal maximal, $\varepsilon(\pi, s, \psi) = 1$.

Si Π est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, sa fonction L définie par $L(\Pi, s) = \Pi\, L(\Pi_v, s)$ (le produit porte sur $v \in \mathcal{P}$; il faut établir une théorie analogue pour les places infinies) converge pour s de partie réelle assez grande et se prolonge en une fonction méromorphe à tout le plan complexe – *holomorphe* si Π est cuspidale et $n \geqslant 2$ – bornée, à distance des pôles, dans les bandes verticales. La contragrédiente $\Pi^\vee = \otimes\, \Pi_v^\vee$ est encore automorphe et si Ψ est un caractère additif non trivial de $\mathbb{A}_F$ trivial sur F, de composants locaux Ψ_v, on a l'équation fonctionnelle $L(\Pi, s) = \varepsilon(\Pi, s)\, L(\Pi^\vee, 1-s)$, où $\varepsilon(\Pi, s) = \Pi_v\, \varepsilon(\Pi_v, s, \Psi_v)$: ces facteurs ε valent 1 pour presque toute place v et le produit ne dépend pas de Ψ.

3.2. L'idée des démonstrations

On suppose que G est un produit de groupes linéaires GL_n et on se donne une représentation irréductible $r : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On part d'une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A}_F)$, et on veut prouver que $r(\Pi) = \otimes\, r(\Pi_v)$, où les composants locaux $r(\Pi_v)$ sont donnés par les applications locales de 3.4, est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. Si tel est le cas, certainement la fonction $L(r(\Pi), s)$ définie par le produit sur toutes les places des facteurs locaux $L(r(\Pi_v), s)$, a toutes les propriétés citées plus haut. Mais inversement, si l'on montre ces propriétés pour $L(r(\Pi), s)$, on a fait un pas vers la preuve que $r(\Pi)$ est automorphe. En fait, pour assurer que $r(\Pi)$ soit automorphe, il *suffit* de prouver les propriétés analogues pour un ensemble de fonctions L incluant $L(r(\Pi), s)$. Il s'agit des fonctions $L(\Pi \otimes \Sigma, r \otimes \mathrm{Id}, s)$ attachées à Π et à une représentation automorphe cuspidale quelconque Σ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$, pour m un entier quelconque entre 1 et $n-1$: on voit $\Pi \otimes \Sigma$ comme une représentation automorphe de $(G \times \mathrm{GL}_m)(\mathbb{A}_F) = G(\mathbb{A}_F) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$, et $r \otimes \mathrm{Id}$ comme une représentation du groupe dual $\widehat{G \times \mathrm{GL}_m} = \widehat{G} \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{nm}(\mathbb{C})$. Ce genre de conditions suffisantes est donné par des théorèmes dits « *réciproques* », dus à Hecke, Weil et Jacquet & Langlands pour $n = 2$, à Jacquet, Piatetski-Shapiro & Shalika [JPSS1] pour $n = 3$, et à Cogdell & Piatetski-Shapiro en général [CPS1,2]. Voir 3.4 pour la version des théorèmes réciproques effectivement utilisée.

Le problème est de prouver l'existence et les propriétés de ces fonctions L, ce qui n'est pas une mince affaire. Deux grands types de méthodes existent. La première utilise des intégrales comme plus haut, la seconde la théorie des séries d'Eisenstein de Langlands. On utilise en fait les deux approches simultanément, mais les succès récents sont dus à des progrès importants (Gelbart, Kim, Shahidi) dans la seconde approche, développée par Shahidi.

3.3. Fonctions L de paires

La méthode des intégrales consiste à définir des intégrales locales comme en 3.1, dépendant éventuellement de données auxiliaires comme Φ, dont le facteur L est un « dénominateur commun ». Mais il faut deviner quelles intégrales choisir ! La première contrainte est qu'au moins pour des représentations non ramifiées on trouve bien le facteur L local $\det(1 - r(A_v)q_v^{-s})^{-1}$ donné par le paramètre A_v dans ${}^LG$; une autre contrainte est qu'on sache prouver les équations fonctionnelles locales et globales. Pour fixer les idées, prenons une place v finie. La plupart des procédés actuels demandent qu'on prenne un modèle de la représentation lisse irréductible de $G(F_v)$ dans un espace de fonctions sur $G(F_v)$, fonctions qui interviennent dans les intégrales. On utilise surtout le « modèle de Whittaker ». Pour le définir, on fixe un sous-groupe de Borel B de G et, grâce à un caractère non trivial ψ de F_v, un caractère θ_ψ du radical unipotent $U(F_v)$ de $B(F_v)$ qui est non dégénéré au sens où son stabilisateur dans $G(F_v)$ est réduit à $Z(F_v)\,U(F_v)$. Une représentation lisse irréductible π de $G(F_v)$ est dite *θ_ψ-générique* s'il existe une forme linéaire non nulle λ sur l'espace V de π telle que $\lambda(\pi(u)v) = \theta_\psi(u)\lambda(v)$ pour $v \in V$ et $u \in U(F_v)$. Une telle forme linéaire est unique à scalaire près et donne une réalisation de π dans un espace de fonctions $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ sur $G(F_v)$, le modèle de Whittaker attendu : à $v \in V$ on associe la fonction $\mathcal{W}_v : g \mapsto \lambda(\pi(g)v)$. On peut voir cette fonction comme un « coefficient de Fourier générique » de π.

Pour $G = \mathrm{GL}_n$, on prend pour B le groupe des matrices triangulaires supérieures ; alors $U = U_n$ est formé des matrices unipotentes dans B, et θ_ψ est défini par $\theta_\psi(u) = \psi\big(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1}\big)$ pour $u \in U(F_v)$. On connaît toutes les représentations lisses irréductibles génériques (cela ne dépend pas en fait du choix de ψ), et on sait qu'un composant local de représentation automorphe *cuspidale* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est toujours générique.

Si π est une représentation lisse irréductible générique de $\mathrm{GL}_m(F_v)$, Jacquet, Piatetski-Shapiro & Shalika [JPSS1] ont d'abord obtenu une définition de $L(\pi, s)$ par la méthode des intégrales, mais utilisant les modèles de Whittaker – le cas de GL_2 était dû à Jacquet & Langlands [JL]. Puis ils ont généralisé à des fonctions $L(\pi \times \pi', s)$ [JPSS2], où π et π' sont des représentations lisses irréductibles génériques de $\mathrm{GL}_n(F_v)$, $\mathrm{GL}_{n'}(F_v)$ respectivement. Ces fonctions correspondent à la représentation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{nn'}(\mathbb{C})$ donnée par le produit tensoriel. Pour $n = n' = 2$, la formule de base apparaît dans un cadre classique, dans les travaux de Rankin et Selberg à la fin des années 1930. Par cette méthode dite « de Rankin-Selberg », on obtient des facteurs locaux $L(\pi \times \pi', s)$ et $\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)$ caractérisés de manière analogue à 3.1. Pour donner un exemple, pour $n' = n - 1$, $L(\pi \times \pi', s)$ est obtenu, comme en 3.1, à partir des intégrales $Z(W, W', s) = \int W\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W'(g)\,|\det g|^s\,dg$, où dg est une mesure $\mathrm{GL}_{n'}(F_v)$-invariante sur $U_{n'}(F_v)\backslash \mathrm{GL}_{n'}(F_v)$ et où W parcourt

$\mathcal{W}(\pi,\psi)$, W' parcourant $\mathcal{W}(\pi',\overline{\psi})$. Si Π, Π' sont des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_F)$, on obtient par produit sur toutes les places une fonction $L(\Pi\times\Pi',s)$ méromorphe, mais dont on contrôle les pôles, qui sont en nombre fini ; il n'y en a pas, par exemple, si Π, Π' sont cuspidales et $n\neq n'$. La fonction L globale est bornée, à distance des pôles, dans les bandes verticales et vérifie l'équation fonctionnelle

$$L(\Pi\times\Pi',s)=\varepsilon(\Pi\times\Pi',s)\,L(\Pi^\vee\times\Pi'^\vee,1-s)\,, \tag{1}$$

où le facteur ε est produit des facteurs ε locaux.

Remarque. — 1) Des facteurs L et ε analogues s'obtiennent par la méthode de Shahidi (3.5), qui a le premier obtenu l'équation fonctionnelle globale [Sh1] et montré qu'en fait ses facteurs sont les mêmes que les précédents [Sh2].

2) Les paramétrisations, mentionnées en 2.4, par des représentations de W_v ou $W_v\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, s'expriment en termes de ces facteurs L et ε de paires ; par la paramétrisation, ils doivent correspondre exactement à des facteurs L et ε, de nature galoisienne, définis par Artin et Langlands. En particulier, si v est une place finie où Π_v et Π'_v sont non ramifiées, correspondant à des matrices A_v, A'_v, on a $L(\pi_v\times\pi'_v,s)=\det(1-A_v\otimes A'_vq_v^{-s})^{-1}$, et $\varepsilon(\pi_v\times\pi'_v,s,\psi)=1$ si ψ est non ramifié.

3.4. Utilisation des théorèmes réciproques

Donnons la version utilisée par Kim et Shahidi, qui est due à Cogdell et Piatetski-Shapiro [CPS2].

On fixe un entier $n\geqslant 3$, et on va énoncer des conditions suffisantes pour qu'une représentation R de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ donnée par ses composants irréductibles locaux R_v soit automorphe.

On fixe un ensemble *fini* S de places finies de F et, pour tout entier $m\geqslant 1$, on note $\tau^S(m)$ l'ensemble des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ *non ramifiées* en toute place finie de S. On fait les hypothèses suivantes :

1) Il existe un quasicaractère ω de $F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times$ tel que $\omega_{R_v}=\omega_v$ pour tout $v\in\mathcal{P}$.

2) Pour m entier, $1\leqslant m\leqslant n-2$, et $\Sigma\in\tau^S(m)$, la fonction $L(R\times\Sigma,s)=\Pi_v\,L(R_v\times\Sigma_v,s)$ converge pour s de partie réelle assez grande et se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction *entière*, bornée dans les bandes verticales et vérifiant l'équation fonctionnelle (1) plus haut.

Alors il existe une représentation automorphe R^* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ telle que R_v^* et R_v soient isomorphes pour $v\notin S$.

On utilise les théorèmes réciproques de la manière esquissée en 3.2. Prenons l'exemple où $G=\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_3$ et où $r:\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})\to\mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ est donné par le produit tensoriel. On part d'une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ et d'une représentation automorphe cuspidale Π' de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_F)$. Pour chaque place v de F, on dispose du composant $R_v=r(\Pi_v\otimes\Pi'_v)$, une représentation lisse

irréductible de $\mathrm{GL}_6(F_v)$ si v est finie, et on applique le critère plus haut pour prouver que $R = \otimes_v R_v$ est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_6(\mathbb{A}_F)$.

On prend pour S l'ensemble des places finies où Π_v ou Π' sont ramifiées. Pourquoi introduire un tel ensemble S, puisqu'avec S vide on saurait directement que $\otimes R_v$ est automorphe et non « presque » automorphe ? La raison est la condition 2) plus haut : on veut que pour chaque représentation automorphe cuspidale Σ dans $\tau^S(m)$, $1 \leqslant m \leqslant 4$, la fonction $L(R \times \Sigma, s)$ soit *entière* ; non seulement il est plus facile de prouver l'holomorphie quand on restreint Σ à $\tau^S(m)$ avec S comme plus haut, mais pour S vide, il arrive vraiment que $L(R \times \Sigma, s)$ ait des pôles, de sorte qu'on ne saurait appliquer alors les théorèmes réciproques.

En retour, on ne sait pas directement que R est automorphe, mais seulement qu'il existe une représentation automorphe R^* ayant les mêmes composants que R hors de S. Il faut utiliser alors divers artifices subtils pour savoir que R_v et R_v^* sont isomorphes pour $v \in S$. On doit par exemple utiliser la théorie du changement de base cyclique de Langlands pour GL_2 [La4] – élargie à GL_n par Arthur & Clozel [AC] – et aussi la théorie du changement de base cubique non cyclique de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika pour GL(2) [JPSS3]. Pour les places de S au-dessus de 2 et 3, il faut même utiliser une connaissance fine des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ et $\mathrm{GL}_3(F_v)$; des arguments de Bushnell et Henniart [BH] complètent la preuve à cet endroit.

Remarque 1. — Pour éviter les cas mentionnés plus haut où $L(R \times \Sigma, s)$ aurait effectivement un pôle, on applique les théorèmes réciproques non pas à R mais à $R \otimes (\chi \circ \det)$ où χ est un caractère de $F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times$ très ramifié aux places de S.

Remarque 2. — Dans des cas plus généraux où le groupe G de départ n'est pas un produit de groupes linéaires, il y a une autre raison pour introduire un ensemble S comme plus haut : on ne connaît pas l'application locale $\pi \mapsto r(\pi)$ en les places finies ramifiées. Au contraire, on espère l'obtenir a posteriori, en utilisant le résultat global (voir 3.8).

3.5. Méthode de Shahidi et applications

Les fonctions L à contrôler pour établir la fonctorialité $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3 \to \mathrm{GL}_6$ ne sont pas toutes accessibles, pour l'instant, à une méthode d'intégrales. On doit utiliser la méthode de Shahidi, qui a son origine dans les travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein automorphes.

Le cadre [GS1, Sh1, Sh4, Sh5] est le suivant : on considère un groupe réductif déployé H sur F (quasi-déployé suffirait) et un sous-groupe parabolique maximal P défini sur F, de radical unipotent N et de quotient de Levi M. Le groupe dual a une variante pour le groupe non réductif N, et $\widehat{M}$ agit sur le dual de l'algèbre de Lie de $\widehat{N}$. Cette représentation est somme de représentations irréductibles r_i, qui ont une indexation naturelle par des entiers $i = 1, \ldots, a$. On ne considère

que des représentations automorphes cuspidales *génériques* de $M(\mathbb{A}_F)$, mais ce n'est pas une restriction si M est un produit de groupes GL_r. *Générique* signifie ici qu'un coefficient de Fourier le long d'un sous-groupe unipotent maximal n'est pas nul. Il s'agit du coefficient relatif à un caractère « non dégénéré » θ_Ψ défini grâce à un caractère non trivial Ψ de $F\backslash\mathbb{A}_F$, et les composants locaux sont θ_{Ψ_v}-génériques au sens de 3.3. Si Π est une représentation automorphe cuspidale générique de $M(\mathbb{A}_F)$, la théorie fournit des facteurs locaux $L(\Pi_v, r_i, s)$ et $\varepsilon(\Pi_v, r_i, s, \Psi_v)$ et la fonction L globale $L(\Pi, r_i, s) = \prod_v L(\Pi_v, r_i, s)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$L(\Pi, r_i, s) = \varepsilon(\Pi, r_i, s)\, L(\Pi^\vee, r_i, 1-s)$$

où $\varepsilon(\Pi, r_i, s) = \prod_v \varepsilon(\Pi_v, r_i, s, \Psi_v)$: la représentation contragédiente $\Pi^\vee$ est aussi générique.

Un point primordial est qu'en une place finie v où Π_v est non ramifiée, les facteurs L et ε sont bien les facteurs donnés par le paramètre $A_v \in \widehat{G}$: on a $L(\Pi_v, r_i, s) = \det(1 - r_i(A_v)q_0^{-s})^{-1}$. Un autre point primordial dû à Shahidi [Sh3] est qu'en une place infinie également les facteurs locaux sont ceux attendus par la paramétrisation de Langlands mentionnée en 3.4. Par exemple, ce résultat est utilisé dans 3.4 pour contrôler la situation en les places de S.

Indiquons très brièvement le principe de la construction. À partir de fonctions dans l'espace de Π, on construit des séries d'Eisenstein, formes automorphes sur $H(\mathbb{A}_F)$ dépendant d'un paramètre complexe s. Elles convergent pour s de partie réelle assez grande et Langlands [La2] a obtenu un prolongement analytique à tout le plan complexe, avec une équation fonctionnelle en $s \mapsto -s$. En fait, les propriétés analytiques des séries d'Eisenstein dépendent de ceux du terme constant le long de N, lequel fait intervenir le produit $\prod_{i=1}^a \frac{L^S(\Pi, r_i, is)}{L^S(\Pi, r_i, 1+is)}$; ici L^S désigne le produit sur les places finies où Π_v est non ramifiée. Comme Langlands l'a montré, le terme constant n'a qu'un nombre fini de pôles pour s de partie réelle positive. Cependant, à cause de la présence de quotients de fonctions L^S, on ne peut en tirer le même résultat pour les fonctions L^S individuelles, même si cela en donne le prolongement méromorphe (par décalages successifs, comme classiquement pour la fonction Γ). Shahidi analyse plutôt le coefficient de Fourier des séries d'Eisenstein relatif au choix de Ψ, ce qui exige que Π soit générique pour ce choix – alors que les arguments de Langlands ne l'exigent pas –, mais permet le contrôle et le prolongement analytique de $\prod_{i=1}^a L^S(\Pi, r_i, 1+is)^{-1}$. Il faut encore compléter la théorie locale en les places infinies ou ramifiées, prouver les équations fonctionnelles et surtout extraire des produits précédents les fonctions L individuelles $L(\Pi, r_i, s)$, ce qui se fait en considérant toutes les situations (H, M) où r_i peut intervenir. À cause du produit sur i encore, il n'est pas évident que les fonctions L ainsi obtenues aient un nombre fini de pôles et soient bornées, à distance des pôles, dans les bandes verticales. Ce point, résolu récemment par Gelbart et Shahidi [GS2], utilise de délicates estimées analytiques. Il leur faut en outre une hypothèse d'analyse harmonique locale pour établir le résultat en général (voir [K1, K2, K4]). Mais les cas

particuliers nécessaires pour les applications récentes sont maintenant connus grâce aux travaux d'Asgari, Casselman & Shahidi, Kim, Moeglin & Waldspurger, Muič, Zampera, Zhang (voir les références dans [KS1]).

Terminons ce paragraphe en indiquant quels couples (H, M) on utilise pour les fonctions L donnant les résultats de 3.4.

1) Pour $H = \mathrm{GL}(n+n')$, $M = \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n')$, on obtient les fonctions L de paires de 3.3.

2) Pour $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_k$ et $r : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{6k}$ donné par le produit tensoriel, on obtient la fonction L en considérant un groupe H de type D_5, E_6, E_7 respectivement pour $k = 2, 3, 4$, et un sous-groupe de Levi M ayant même groupe dérivé que G.

3) Pour $G = \mathrm{GL}_4 \times \mathrm{GL}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, et r donné par $\wedge^2 \otimes \mathrm{Id}$, on utilise H de type D_{k+3}.

Remarque. — Une fois que l'on sait que $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est automorphe pour $k \leqslant 4$, on obtient les propriétés analytiques d'autres fonctions L : par exemple, pour $k \leqslant 9$, la fonction $L(\mathrm{Sym}^k(\Pi), s)$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe, avec équation fonctionnelle, et un certain contrôle des pôles, au moins pour les fonctions L incomplètes L^S obtenues en faisant le produit des facteurs locaux sur les places finies non ramifiées [KS2]. Noter que pour $L(\mathrm{Sym}^9(\Pi), s)$, on utilise un groupe H de type E_8 !(4)

3.6. Les conjectures de Ramanujan-Petersson et Selberg

Soit Π une représentation automorphe *cuspidale unitaire* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. Ses composants sont génériques et unitaires. Notons S l'ensemble des places finies où Π_v est ramifiée. Pour v finie hors de S, dire que Π_v est générique et unitaire implique que la matrice $A_v \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui paramètre Π_v a ses valeurs propres $\alpha_v^{(1)}, \ldots, \alpha_v^{(n)}$ qui vérifient

$$\left| \ell n_v \, |\alpha_v^{(i)}| \right| < 1/2 \; ;$$

ici on a posé $\ell n_v(x) = \ell n(x)/\ell n(q_v)$ pour $x \in \mathbb{R}_*^\times$. Si v est une place infinie, on dit parfois que Π_v est non ramifiée si Π_v est une « série principale » paramétrée par n caractères $x \mapsto |x|_v^{s_v^{(i)}}$ avec $s_v^{(i)} \in \mathbb{C}$; on a alors, toujours parce que Π_v est générique et unitaire, $|\mathrm{Re}\, s_v^{(i)}| \leqslant 1/2$. En fait des arguments de Luo, Rudnick et Sarnak [LRS](5) permettent de faire mieux. Si $L(\Pi, \mathrm{Sym}^2, s)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors pour v finie hors de S, on a $\left| \ell n_v \, |\alpha_v^{(i)}| \right| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}$ tandis que, pour v infinie où Π_v est non ramifiée, on a $|\mathrm{Re}\, s_v^{(i)}| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}$. Pour $F = \mathbb{Q}$, Kim et Sarnak [KSk] ont montré qu'on peut remplacer $n^2 + 1$ par $n(n+1)/2 + 1$.

(4) On manque de groupes exceptionnels plus gros et il semble bien qu'on ait atteint maintenant les limites de cette méthode.
(5) Voir aussi [Se2].

La stratégie de Langlands [La1][(6)] pour prouver la conjecture de Ramanujan-Petersson est maintenant claire : si l'on sait prouver que $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est automorphe, cuspidale et unitaire pour un entier $k \geqslant 2$, on applique le résultat précédent à $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$: pour v finie hors de S, les valeurs propres paramétrant $\mathrm{Sym}^k(\Pi_v)$ sont produits de k valeurs propres paramétrant Π_v, et on obtient la borne $1/2k$; si on a le résultat pour tout k, la conjecture de Ramanujan-Petersson est vraie.

Pour $n = 2$, on sait maintenant que $\mathrm{Sym}^4\Pi$ est automorphe ; si elle est cuspidale, elle est unitaire. On peut appliquer le résultat de Luo, Rudnick et Sarnak à $\mathrm{Sym}^4\Pi$ et on obtient $\left|\ell n_v \, |\alpha_v^{(i)}|\right| \leqslant 3/26$; mais en fait le contrôle analytique de $L(\mathrm{Sym}^9\Pi, s)$ [KS2] donne mieux : $\left|\ell n_v \, |\alpha_v^{(i)}|\right| < 1/9$ (le précédent record était dû à Shahidi [Sh4] qui obtenait[(7)] $1/5$ au lieu de $1/9$). Pour $F = \mathbb{Q}$ par contre, la borne de Kim & Sarnak [KSk] est pour l'instant la meilleure $\left|\ell n_p \, |\alpha_p^{(i)}|\right| \leqslant 7/64$. En une place infinie v où Π_v est « non ramifiée », on obtient $|\mathrm{Re}\, s_v^{(i)}| < 1/9$ sur un corps de nombres quelconque et, pour $F = \mathbb{Q}$, $|\mathrm{Re}\, s_v^{(i)}| \leqslant 7/64$, ce qui implique la borne $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 975/4096$ de 1.1.

Remarque 1. — Si $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ n'est pas cuspidale pour $k = 2, 3$ ou 4, alors Π vérifie la conjecture de Ramanujan-Petersson et celle de Selberg (*cf.* 3.7).

Remarque 2. — Ramakrishnan [Ra1] a été le premier à obtenir la conjecture de Ramanujan-Petersson pour un grand nombre de places finies non ramifiées. Suivant sa méthode, Kim et Shahidi [KS2] obtiennent que l'ensemble des places finies non ramifiées où Π_v est tempérée a une densité $\geqslant 34/35$.

3.7. Critères de cuspidalité et applications

Comme signalé plus haut, Kim et Shahidi [KS2] déterminent dans quels cas $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est cuspidale pour $k = 3, 4$ et donnent aussi les propriétés analytiques de $L(\mathrm{Sym}^k(\Pi), s)$, $k \geqslant 9$.

Pour comprendre leurs résultats, il vaut mieux repartir de l'heuristique de 1.4. La représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ devrait correspondre à un homomorphisme $\Sigma : L_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ à l'homomorphisme $\mathrm{Sym}^k \circ \Sigma : L_F \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$. Si Π est cuspidale, ce que nous supposons, Σ est irréductible, et il s'agit de savoir quand $\mathrm{Sym}^k \circ \Sigma$ est irréductible. Cela ne dépend vraiment que de l'adhérence de Zariski I de l'image de Σ. Si elle contient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sym}^k \circ \Sigma$ doit être irréductible pour tout $k \geqslant 0$. Sinon, la composante connexe I^0 de I, d'indice finie dans I, est abélienne ; pour cette raison on espère que Σ provient en fait d'une représentation du groupe de Weil W_F, conjecturalement quotient de L_F. Il existe alors un entier naturel minimal

(6) Une variante de l'idée de Langlands joue un rôle dans la preuve par Deligne des conjectures de Weil.
(7) Voir [Se1] pour le cas des formes modulaires classiques.

k_0 tel que $\mathrm{Sym}^{k_0} \circ \Sigma$ soit réductible, et k_0 s'obtient à partir de $\Sigma : W_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de la façon suivante :

1) (cas imprimitif) Si Σ est induite, $k_0 = 2$.

2) (cas tétraédral) Si l'image $\overline{I}$ de Σ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à A_4, $k_0 = 3$.

3) (cas octaédral) Si $\overline{I}$ est isomorphe à S_4, $k_0 = 4$.

4) (cas icosaédral) Si $\overline{I}$ est isomorphe à A_5, $k_0 = 6$.

Noter que si l'on part d'une représentation irréductible $\Sigma : W_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, alors on sait, dans les trois premiers cas (Weil [We], Jacquet et Langlands [JL], Langlands [La4], Tunnell [Tu]) lui associer une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ telle que Π_v soit paramétrée par Σ_v pour tout $v \in \mathcal{P}$. Voir [BDST, Ty] pour les progrès récents dans le cas icosaédral.

Grâce à [GJ] et [LL], on sait :

1) Si $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ n'est pas cuspidale, Π correspond à une représentation irréductible imprimitive de W_F.

Kim et Shahidi [KS2] établissent les résultats complémentaires suivants :

2) Si $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ est cuspidale, mais pas $\mathrm{Sym}^3(\Pi)$, Π correspond à une représentation irréductible tétraédrale de W_F.

3) Si $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ et $\mathrm{Sym}^3(\Pi)$ sont cuspidales, mais pas $\mathrm{Sym}^4(\Pi)$, Π correspond à une représentation irréductible octaédrale de W_F.

Les réciproques sont également vraies[8].

Pour établir les résultats précédents, il s'agit, à nouveau, de contrôler des fonctions L. Si $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ n'est pas cuspidale, elle correspond à une collection de représentations automorphes cuspidales $\Pi_1, \dots, \Pi_r$ de $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{A}_F), \dots, \mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{A}_F)$, avec $r \geqslant 2$ et $n_1 + \cdots + n_r = k + 1$. On détecte les représentations Π_i par le critère que $L(\mathrm{Sym}^k(\Pi) \times \Pi_i^\vee, s)$ ait un pôle en $s = 1$. Les pôles de ces fonctions L sont contrôlés surtout par la méthode de Shahidi, mais il faut parfois faire appel à la méthode des intégrales[9]. Par ces méthodes, on établit aussi que $L(\mathrm{Sym}^k(\Pi), s)$ a un prolongement analytique avec équation fonctionnelle pour $k \leqslant 9$. Pour Π unitaire, la fonction

[8] Pour traiter le cas de $\mathrm{Sym}^4 \Pi$, il faut aussi utiliser un résultat non publié de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika sur le lien entre représentations automorphes de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_F)$ et $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_F)$ (*cf.* 3.8).

[9] Les critères 1) à 3) impliquent que si l'on connaît l'ordre du pôle en $s = 1$ de $L(\Pi, \mathrm{Sym}^k, s)$ pour $k = 1, \dots, 8$, alors on peut déterminer, non pas l'homomorphisme $\Sigma : L_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ censé correspondre à Π, mais, à isomorphisme près du moins, l'adhérence de Zariski I de son image. On n'est pas obligé d'admettre l'existence de L_F et Σ : pour une représentation irréductible cuspidale unitaire Π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, Serre conjecture l'existence d'un sous-groupe de Lie $H = H(\Pi)$ de $U_n(\mathbb{C})$ tel que, pour toute représentation algébrique r de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la dimension de l'espace des points fixés par $r(H)$ soit l'ordre du pôle en $s = 1$ de la fonction $L(\Pi, r, s)$ ou, du moins, du produit des facteurs locaux sur les places non ramifiées. Cependant ces données ne déterminent pas toujours H à isomorphisme près [LP]. On peut remplacer GL_n par un groupe réductif quelconque G sur F, et Langlands propose une variante où H est un sous-groupe algébrique réductif de G.

L partielle $L^S(\mathrm{Sym}^k(\Pi), s)$, sauf dans certains cas particuliers expliqués, n'a ni zéro, ni pôle pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$.

Dans [KS2], ces résultats sont appliqués à la preuve des remarques 1 et 2 de 3.6. Une seconde application, assez inattendue, est due à P. Sarnak [Sa2]. On prend $F = \mathbb{Q}$ et on part d'une représentation automorphe cuspidale Π attachée à une fonction f de $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$, fonction propre du laplacien, comme en 1.1. Si la fonction $L(f, s)$ a ses coefficients *entiers*, alors Π est attachée à une représentation irréductible imprimitive ou tétraédrale de W_F. En particulier, la valeur propre du laplacien associée à f vaut $1/4$.

3.8. Groupes classiques

Prenons pour G le groupe (déployé) SO_{2n+1}. Son groupe dual est $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, de sorte qu'on a une représentation évidente $r : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$. Si Π est une représentation automorphe cuspidale *générique* de $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{A}_F)$ et que Π' est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$, la fonction $L(\Pi \otimes \Pi', r, s)$ attachée à $r : {}^LG \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2nr}(\mathbb{C})$, $r(g, h) = r(g) \otimes h$, existe. Ses propriétés locales et globales ont été établies tant par la méthode des intégrales (Ginzburg, Rallis, Soudry) que par celle des séries d'Eisenstein (Shahidi) : on utilise le sous-groupe de Levi $M = \mathrm{GL}_r \times \mathrm{SO}_{2n+1}$ du groupe $H = \mathrm{SO}_{2n+2r+1}$; les deux méthodes donnent les mêmes résultats (Soudry). Grâce aux deux méthodes jointes, on a assez de renseignements pour appliquer les théorèmes réciproques (Cogdell, Kim, Piatetski-Shapiro, Shahidi [CKPSS]). On obtient un transfert des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{A}_F)$ vers les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ et même en retour un résultat local (*cf.* 3.4, remarque 2) ; pour v finie, c'est un transfert des représentations lisses irréductibles *génériques* de $\mathrm{SO}_{2n+1}(F_v)$ vers les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_{2n}(F_v)$. Mais en ce cas on dispose aussi d'un transfert en sens inverse (Ginzburg, Rallis, Soudry [GRS]) qui consiste à prendre des résidus en certains pôles de séries d'Eisenstein. Ce transfert inverse ne s'applique qu'aux représentations automorphes Σ de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ pour lesquelles ces pôles existent ; si Σ est cuspidale, sa fonction $L(\Sigma, \Lambda^2, s)$ (qu'on sait étudier) doit avoir un pôle en $s = 1$. Utilisant ces applications dans les deux sens, Jiang et Soudry [JiS1] ont montré que le transfert de SO_{2n+1} à GL_n, tant globalement que localement, est injectif, et ont caractérisé son image. Pour v finie, ils obtiennent aussi, entre autres, une paramétrisation des représentations lisses irréductibles génériques et tempérées par des homomorphismes de $W_v \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ [JiS2].

Les arguments utilisés s'appliquent aux autres groupes classiques SO_{2n} et Sp_{2n} ; seule une petite étape manque. Par contre, pour traiter les représentations non génériques, il faut imaginer d'autres procédés de construction, ou de contrôle des fonctions L, ou bien utiliser la formule des traces. Des travaux récents d'Arthur sur la formule des traces donnent une analyse presque complète des transferts de SO_{2n} et SO_{2n+1} vers GL_{2n}, Sp_{2n} vers GL_{2n+1}, *pourvu que* l'on admette le « lemme fondamental », conjecture d'analyse harmonique locale qui résiste encore. Tout récemment,

Langlands [La6] a proposé d'aller au-delà de cette analyse et d'utiliser la formule des traces pour comprendre les représentations automorphes selon l'image des représentations du groupe L_F censées leur correspondre. Pour $G = \mathrm{GL}_2$, il propose d'utiliser les pôles des fonctions $L(\mathrm{Sym}^k, s)$ et la formule des traces de Selberg. Sarnak [Sa1] suggère d'utiliser une autre formule des traces, due à Kusnetzov. À suivre donc.

RÉFÉRENCES

[CORV] *Automorphic forms, Representations and L-functions*, A. Borel et W. Casselman eds, PSPM 33, Parts I & II, A.M.S., Providence (1979).

[ABV] J. Adams, D. Barbasch, D. Vogan – *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Mathematics **104**, Birkhäuser (1992).

[AC] J. Arthur, L. Clozel – *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies **120**, Princeton University Press (1989).

[B] A. Borel – *Automorphic L-functions*, in [CORV], Part II, 27-62.

[BJ] A. Borel, H. Jacquet – *Automorphic forms and automorphic representations*, in [CORV], Part I, 189-202.

[BH] C. Bushnell, G. Henniart – *On certain dyadic representations*, appendice à [KS1].

[BDST] K. Buzzard, M. Dickinson, N. Shepherd-Barron, R. Taylor – *On icosahedral Artin representations*, à paraître dans Duke Math. J.

[Ca] H. Carayol – *Preuve de la conjecture de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}(n)$ *: travaux de Harris-Taylor et Henniart*, Sém. Bourbaki, exp. n° 857, mars 1999, Astérisque **266** (2000), 11-244.

[CKPSS] J. Cogdell, H. Kim, I. Piatetski-Shapiro, F. Shahidi – *On lifting from classical groups to* GL_N, à paraître dans Publ. Math. I.H.É.S.

[CPS1] J. Cogdell, I. Piatetski-Shapiro – *Converse theorems for* GL_n, Publ. Math. I.H.É.S. **79** (1994), 157-214.

[CPS2] J. Cogdell, I. Piatetski-Shapiro – *Converse theorems for* GL_n, II J. Reine Angew. Math. **507** (1999), 165-188.

[G] S. Gelbart – *Automorphic forms on adele groups*, Annals of Math. Studies **83**, Princeton University Press (1975).

[GJ] S. Gelbart, H. Jacquet – *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **11** (1978), 471-552.

[GS1] S. Gelbart, F. Shahidi – *Analytic properties of automorphic L-functions*, Perspectives in Mathematics, vol. 6, Academic Press (1988).

[GS2] S. Gelbart, F. Shahidi – *Boundedness of automorphic L-functions in vertical strips*, J.A.M.S., **14** (2000), 79-107.

[GRS] D. Ginzburg, S. Rallis, D. Soudry – *Generic automorphic forms on* $\mathrm{SO}(2n+1)$ *: functorial lift to* $\mathrm{GL}(2n)$*, endoscopy and base change*, prépublication 2001.

[GoJ] R. Godement, H. Jacquet – *Zeta functions of simple algebras*, L.N.M. **260**, Springer-Verlag (1972).

[HaT] M. Harris, R. Taylor – *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Prépub. Institut de Math. Jussieu (1999), à paraître dans Annals of Math. Studies **151**, Princeton University Press.

[He] G. Henniart – *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), 439-455.

[Hj] D.A. Hejhal – *The Selberg trace formula for* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, Appendice C, L.N.M. **548** (1976) & **1001** (1983), Springer-Verlag.

[I] H. Iwaniec – *Introduction to the spectral theory of automorphic forms*, Biblioteca de la revista matemática iberoamericana (1995).

[IS] H. Iwaniec, P. Sarnak – *Perspectives on the analytic theory of L-functions*, G.A.F.A. **10** (2000).

[J] H. Jacquet – *Principal L-functions of the linear group*, in [CORV], Part II, 63-86.

[JL] H. Jacquet, R.P. Langlands – *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(2)$, L.N.M. **114** (1971), Springer-Verlag.

[JS] H. Jacquet, J. Shalika – *On Euler Products and the classification of automorphic forms*, II, Amer. J. Math. **103** (1981), 777-815.

[JPSS1] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika – *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(3)$, Am. J. Math. **109** (1979), 169-258.

[JPSS2] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika – *Rankin-Selberg convolutions*, Am. J. Math. **105** (1983), 367-464.

[JPSS3] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika – *Relèvement cubique non normal*, C.R.A.S. Paris **292** (1981), 567-571.

[JiS1] D. Jiang, D. Soudry – *The local converse theorem for* $\mathrm{SO}(2n+1)$ *and applications*, prépublication 2001.

[JiS2] D. Jiang, D. Soudry – *Generic representations and local Langlands reciprocity for* $\mathrm{SO}(2n+1)$, prépublication 2001.

[K1] H. Kim – *Langlands-Shahidi method and poles of automorphic L-functions : Application to exterior square L-functions*, Can. J. Math. **51** (1998), 835-849.

[K2] H. Kim – *Langlands-Shahidi method and poles of automorphic L-functions*, II, Israel J. Math. **117** (2000).

[K3] H. Kim – *Functoriality for the exterior square of* GL_4 *and symmetric fourth of* GL_2, prépublication 2000.

[K4] H. Kim – *L-functions and normalized intertwining operators*, prépublication 2000.

[KSk] H. Kim, P. Sarnak – *Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures*, appendice à [K3].

[KS0] H. Kim, F. Shahidi – *Functorial products for* $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ *and functorial symmetric cube for* GL_2, C.R.A.S. Paris **331** (2000), 539-604.

[KS1] H. Kim, F. Shahidi – *Functorial products for* $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ *and the symmetric cube for* GL_2, prépublication 2000, à paraître aux Annals of Math.

[KS2] H. Kim, F. Shahidi – *Cuspidality of symmetric powers with applications*, prépublication 2000, à paraître au Duke Math. Journal.

[LL] J.-P. Labesse, R.P. Langlands – *L-indistinguishability for* SL(2), Can. J. Math. **31** (1979), 726-785.

[La1] R.P. Langlands – *Problems in the theory of automorphic forms*, in Lectures in Modern Analysis and Applications, L.N.M. **170**, Springer-Verlag (1970), 18-86.

[La2] R.P. Langlands – *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, L.N.M. **544**, Springer-Verlag (1976).

[La3] R.P. Langlands – *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, in Representation theory and harmonic analyis on semisimple Lie groups (P.J. Sally Jr, D.A. Vogan, eds), Math. Surveys and Monographs **31**, A.M.S. (1989), 101-170.

[La4] R.P. Langlands – *Base change for* GL(2), Annals of Math. Studies **96**, Princeton University Press (1980).

[La5] R.P. Langlands – *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives : Ein Märchen*, in [CORV], Part II, 205-246.

[La6] R.P. Langlands – *Endoscopy and beyond*, Notes I.A.S., Princeton (2000).

[LP] M. Larsen, R. Pink – *Determining representations from invariant dimensions*, Invent. Math. **102** (1990), 377-398.

[Ln] G. Laumon – *La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions (d'après L. Lafforgue)*, Sém. Bourbaki, exp. n° 873, mars 2000, Astérisque **276** (2002), 207-265.

[LRS] W. Luo, Z. Rudnick, P. Sarnak – *On the generalized Ramanujan conjecture for* GL_n, P.S.P.M. **66**, Part II (1999), 301-310.

[Ra1] D. Ramakrishnan – *On the coefficients of cusp forms*, Math. Res. Letters **4** (1997), 295-307.

[Ra2] D. Ramakrishnan – *Modularity of the Rankin-Selberg L-series, and multiplicity one for* SL(2), Annals of Math. **152** (2000), 45-111.

[Sa1] P. Sarnak – Lettre à R.P. Langlands, avril 2001.

[Sa2] P. Sarnak – Lettre à H. Kim et F. Shahidi, 1er mai 2001.

[Se1] J.-P. Serre – Lettre à J.-M. Deshouillers, août 1981.

[Se2] J.-P. Serre – Lettre à H. Jacquet, mai 1982.

[Sh1] F. Shahidi – *On certain L-functions*, Amer. J. of Math. **103** (1981), 297-355.

[Sh2] F. Shahidi – *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for* $\mathrm{GL}(n)$, Amer. J. of Math. **106** (1984), 67-111.

[Sh3] F. Shahidi – *Local coefficients as Artin factors for real groups*, Duke Math. J. **52** (1985), 973-1007.

[Sh4] F. Shahidi – *On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain L-functions*, Annals of Math. **127** (1988), 547-584.

[Sh5] F. Shahidi – *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups*, Annals of Math. **132** (1990), 273-330.

[Ty] R. Taylor – *On icosahedral Artin representations*, II, prépublication Harvard University, 2001.

[Tu] J. Tunnell – *Artin's conjecture for representations of octahedral type*, B.A.M.S. **5** (1981), 173-175.

[We] A. Weil – *Dirichlet series and automorphic forms*, L.N.M. **189**, Springer-Verlag (1971).

Guy HENNIART

Département de Mathématiques
et UMR 8628 du CNRS
Université de Paris-Sud
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
E-mail : Guy.Henniart@math.u-psud.fr

Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53e année, 2000-2001, nO 891, p. 323 à 344

POINTS DE HAUTEUR BORNÉE ET GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS [d'après Y. Manin et al.]

par **Emmanuel PEYRE**

Si V est une variété algébrique projective sur $\mathbf{Q}$ et $\phi : V \to \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ un plongement, on dispose d'une hauteur exponentielle $H : V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ définie comme la composée $H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}} \circ \phi$ où $H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}}$ est la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, donnée par

$$H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}}((x_0 : \ldots : x_N)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} (|x_i|)$$

si les x_i sont des entiers et $\mathrm{pgcd}_{0 \leqslant i \leqslant N}(x_i) = 1$. Il est alors naturel de vouloir étudier de manière asymptotique les points rationnels de V dont la hauteur est bornée. De manière plus générale, si V est une variété algébrique sur un corps de nombres K, tout morphisme $\phi : V \to \mathbf{P}^N_K$ induit une hauteur $H : V(K) \to \mathbf{R}$ et, pour tout ouvert de Zariski U de V et tout nombre réel strictement positif B, on pose

$$N_{U,H}(B) = \#\{\, x \in U(K) \mid H(x) \leqslant B \,\}.$$

On souhaite alors étudier le comportement asymptotique de $N_{U,H}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$. Dans tous les cas connus de l'orateur où il a été déterminé, si $U(K) \neq \varnothing$, et si $N_{U,H}(B)$ est fini pour tout B, ce comportement est de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim C B^a (\log B)^{b-1}$$

avec $C \in \mathbf{R}_+^*$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ et $b \geqslant 1$.

L'objet des conjectures énoncées par Manin et ses coauteurs vers 1989 est de proposer une interprétation géométrique pour a et b, où n'interviennent que la classe du fibré en droites $L = \phi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_K}(1))$ dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ de V, la classe du faisceau canonique dans ce groupe et le cône des classes de diviseurs effectifs. Le but de cet exposé est de présenter ces conjectures en faisant un survol des résultats connus et des perspectives ouvertes.

Après des rappels sur les hauteurs et quelques exemples simples, nous donnerons une description plus détaillée des conjectures de Manin avant de présenter au paragraphe 4 une liste d'indices en leur faveur. Nous décrirons ensuite le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel [BT3], avant de terminer par une brève évocation d'autres aspects de la théorie que nous avons choisi de ne pas traiter en détail dans cet exposé.

1. POINT DE VUE SUR LES HAUTEURS

Parmi les nombreuses variantes de la notion de hauteur introduite par Weil [We] (cf. par exemple [Né1], [Ar], [Se], [BGS]), nous avons choisi d'utiliser, comme Batyrev et Manin dans [BM], les hauteurs exponentielles définies en termes de métriques adéliques sur un fibré en droites. Nous allons maintenant fixer les notations correspondantes.

Notations 1.1. — Dans la suite de cet exposé K désigne un corps de nombres, M_K l'ensemble des places de K. Si w est une place de K, on note K_w le complété de K pour la topologie définie par w. Si w est une place non archimédienne, on note $\mathscr{O}_w$ l'anneau des entiers de K_w. Soit v la place de $\mathbf{Q}$ obtenue par restriction de w, on note $|\cdot|_w$ la valeur absolue sur K définie par la relation

$$\forall\, x \in K_w, \quad |x|_w = |N_{K_w/\mathbf{Q}_v}(x)|_v,$$

où $|\cdot|_v$ est la valeur absolue archimédienne ou p-adique usuelle sur $\mathbf{Q}$. Ces valeurs absolues ont l'avantage de satisfaire la formule du produit :

$$\forall\, x \in K^*, \quad \prod_{w \in M_K} |x|_w = 1.$$

Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur le spectre d'un anneau A et B une A-algèbre commutative, on note $\mathscr{X}(B)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\, A}(\mathrm{Spec}\, B, \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, B$. En particulier, si X est une variété sur un corps F, de clôture algébrique $\overline{F}$, $X(F)$ est l'ensemble des points rationnels de X et on note $\overline{X}$ la variété $X_{\overline{F}}$.

Nous dirons qu'une variété algébrique V sur K est *bonne* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre. Si V est une bonne variété, et L un faisceau inversible sur V, alors pour toute extension K' de K et tout point x de $V(K')$, on note

$$L(x) = L_x \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} K',$$

où L_x désigne la fibre de L en x au sens des faisceaux ; $L(x)$ est un espace vectoriel de dimension un sur K' et peut être vu comme la fibre du fibré en droites associé à L.

Si v est une place de K, une *métrique v-adique* sur L est une application qui à tout point x de $V(K_v)$ associe une fonction

$$\|\cdot\|_v : L(x) \to \mathbf{R}_+$$

de sorte que

M1 $\forall\, x \in V(K_v), \quad \forall\, y \in L(x), \quad \|y\|_v = 0 \Leftrightarrow y = 0,$

M2 $\forall\, x \in V(K_v), \quad \forall\, y \in L(x), \quad \forall\, \lambda \in K_v, \quad \|\lambda y\|_v = |\lambda|_v \|y\|_v,$

M3 pour tout ouvert U de V, pour toute section s de L sur U, l'application de $U(K_v)$ dans $\mathbf{R}_+$ qui à x associe $\|s(x)\|_v$ est continue pour la topologie v-adique.

Donnons deux exemples importants de telles métriques.

Exemple 1.2. — Si $\mathscr{B} = (s_1, \dots, s_N)$ est une famille de sections globales de L, de sorte que le système linéaire engendré soit sans point base, on peut définir pour toute place v une métrique par la formule :

$$\forall\, x \in V(K_v), \quad \forall\, y \in L(x), \quad \|y\|_v = \inf_{\substack{0 \leqslant i \leqslant N \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{y}{s_i(x)} \right|_v .$$

On dit que $\|\cdot\|_v$ est la métrique associée à $\mathscr{B}$.

Exemple 1.3. — Si $S \subset M_K$ est un ensemble fini de places non archimédiennes, on note $\mathscr{O}_S$ l'anneau des S-entiers. Soient $\mathscr{V}$ un modèle projectif et lisse de V sur $\mathscr{O}_S$ et $\mathscr{L}$ un modèle de L sur $\mathscr{V}$. Pour toute place finie v de K en dehors de S, on définit une métrique v-adique de la façon suivante : si $x \in V(K_v)$, comme $\mathscr{V}$ est projective, il se relève en un unique élément $\widetilde{x} \in \mathscr{V}(\mathscr{O}_v)$. Le faisceau inversible $\widetilde{x}^*(\mathscr{L})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v)$ correspond à un $\mathscr{O}_v$-module libre de rang un dans $L(x)$, dont on note y_0 un générateur. La métrique cherchée est alors définie par

$$\forall\, y \in L(x), \quad \|y\|_v = \left| \frac{y}{y_0} \right|_v .$$

On dit que $\|\cdot\|_v$ est la métrique définie par le modèle $\mathscr{L}$.

Définition 1.4. — *Une famille de métriques $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ où $\|\cdot\|_v$ est une métrique v-adique sur un faisceau inversible L est dite* adélique *si et seulement s'il existe un ensemble fini S de places non archimédiennes, un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathscr{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{V}$ tels que pour toute place finie de K en dehors de S, la métrique $\|\cdot\|_v$ soit la métrique définie par $\mathscr{L}$.*

Par abus de langage, nous appellerons dans cet exposé hauteur d'Arakelov *sur une bonne variété V une paire $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ où L est un faisceau inversible sur V et $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ une métrique adélique sur L. Si x est un point rationnel de V, sa hauteur relativement à H est donnée par la formule*

$$\forall\, y \in L(x) - \{0\}, \quad H(x) = \prod_{y \in M_K} \|y\|_v^{-1}.$$

Remarques 1.5. — (i) Si $x \in V(K)$ et $y \in L(x) - \{0\}$, on a $\|y\|_v = 1$ sauf pour un nombre fini de places, ce qui donne un sens au produit ci-dessus qui, par la formule du produit, est indépendant du choix de y.

(ii) Pout tout faisceau inversible L sur une bonne variété V, il est possible de construire une métrique adélique sur L.

(iii) Si $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ et $H' = (L, (\|\cdot\|'_v)_{v \in M_K})$ sont des hauteurs relatives au même faisceau L, alors les métriques $\|\cdot\|_v$ et $\|\cdot\|'_v$ coïncident sauf pour un nombre fini de places. En outre, pour toute place v de K, l'application qui à tout x de $V(K_v)$

associe $\|y\|_v/\|y\|'_v$ où $y \in L(x)-\{0\}$ est continue et donc bornée sur l'espace compact $V(K_v)$. En conséquence, il existe des constantes C et C' telles que

$$\forall\, x \in V(K), \quad 0 < C < \frac{H(x)}{H'(x)} < C'.$$

Cela reste vrai si la différence entre les classes des fibrés est un élément de torsion dans le groupe de Picard [Se, § 2.9].

(iv) Il y a une notion évidente de produit tensoriel pour les hauteurs d'Arakelov et on a la formule

$$\forall\, x \in V(K), \quad (H_1 \otimes H_2)(x) = H_1(x)H_2(x).$$

Exemple 1.6. — Si $\mathscr{B} = (s_0, \ldots, s_N)$ est une famille de sections d'un faisceau inversible L engendrant un système linéaire sans point base, la famille de métriques $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ définie par $\mathscr{B}$ est une métrique adélique sur L. En outre, si $\phi : V \to \mathbf{P}^N_K$ est le morphisme défini par $\mathscr{B}$, on a

$$\forall\, x \in V(K), \quad H(x) = \prod_{v\in M_K} \sup_{0\leqslant i\leqslant N} |y_i|_v,$$

où $(y_0 : \cdots : y_N)$ désigne un système de coordonnées homogènes pour $\phi(x)$; autrement dit $H = H_{\mathbf{P}^N_K} \circ \phi$ où $H_{\mathbf{P}^N_K}$ est la hauteur usuelle sur l'espace projectif. En particulier, si $K = \mathbf{Q}$ et si $V \subset \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, on retrouve la hauteur classique

$$H((x_0 : \ldots : x_N)) = \sup_{0\leqslant i\leqslant N} |x_i| \quad \text{si} \quad \begin{cases} x_i \in \mathbf{Z} \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant N, \\ \mathrm{pgcd}_{0\leqslant i\leqslant N}(x_i) = 1. \end{cases}$$

Notations 1.7. — Si H est une hauteur d'Arakelov sur une bonne variété et F un sous-ensemble de $V(K)$, on note pour tout nombre réel strictement positif B

$$N_{F,H}(B) = \#\{\, x \in F \mid H(x) \leqslant B \,\}.$$

Si W est un sous-ensemble localement fermé de V, on notera $N_{W,H}(B)$ pour $N_{W(K),H}(B)$. On considérera également la fonction zêta associée définie pour $s \in \mathbf{C}$ par la série

$$\zeta_{F,H}(s) = \sum_{x\in F} \frac{1}{H(x)^s}$$

lorsque celle-ci converge. Le comportement asymptotique de $N_{F,H}(B)$ est lié par des théorèmes taubériens au domaine de convergence et aux propriétés de méromorphie de la fonction $\zeta_{F,H}(s)$.

2. PREMIERS EXEMPLES ET PHÉNOMÈNES D'ACCUMULATION

L'exemple le plus simple que l'on puisse étudier est celui de l'espace projectif. Le résultat est dû à Schanuel.

THÉORÈME 2.1 (Schanuel [Sc]). — *Soit H la hauteur usuelle sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n_K$. Il existe alors une constante explicite C_H telle que*

$$N_{\mathbf{P}^n_K,H}(B) = C_H B^{n+1} + \begin{cases} O(B\log B) \text{ si } n=1, \\ O(B^n) \text{ si } n>1. \end{cases}$$

En outre le comportement asymptotique reste le même si on remplace $\mathbf{P}^n$ par un ouvert non vide de cet espace, la contribution de tout fermé strict de $\mathbf{P}^n$ étant négligeable. On peut même obtenir un résultat plus général en utilisant la notion d'ensemble mince.

DÉFINITION 2.2. — *Un sous-ensemble F de $\mathbf{P}^n(K)$ est dit* mince *si et seulement s'il existe un morphisme de variétés algébriques sur K*

$$\pi : X \to \mathbf{P}^n_K$$

tel que $F \subset \pi(X(K))$, la fibre de π au point générique est finie et π n'a pas de section rationnelle définie sur K.

Un exemple typique de sous-ensemble mince est l'ensemble des cubes dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, image de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ par l'application envoyant $(x:y)$ sur $(x^3:y^3)$.

THÉORÈME 2.3 (Serre [Se, § 13.1.3]). — *Si F est un sous-ensemble mince de l'ensemble $\mathbf{P}^n(K)$, alors*

$$N_{F,H}(B) = O(B^{n+\frac{1}{2}}(\log B)^\gamma)$$

avec $\gamma < 1$.

Le deuxième cas classique est celui des variétés abéliennes :

THÉORÈME 2.4 (Néron [Né2]). — *Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K, soit H une hauteur exponentielle sur A relative à un faisceau inversible ample sur A, alors il existe une constante explicite C_H telle que*

$$N_{A,H}(B) = C_H(\log B)^{\rho/2} + O((\log B)^{\frac{\rho-1}{2}}),$$

où ρ désigne le rang du groupe $A(K)$.

Remarques 2.5. — (i) Les remarques faites pour l'espace projectif ne s'appliquent plus pour les variétés abéliennes. D'une part, les points rationnels ne sont pas nécessairement denses pour la topologie de Zariski, auquel cas le comportement asymptotique dépend de l'ouvert choisi. D'autre part, le groupe $A(K)/2$ étant fini, $A(K)$ est la réunion d'un nombre fini de translatés de $2A(K)$. En ce sens, les points rationnels de A forment un sous-ensemble mince.

(ii) Le cas des variétés abéliennes est, à la connaissance de l'orateur, le seul cas où on ait démontré un comportement asymptotique avec une puissance demi-entière du logarithme.

Nous allons terminer cette partie avec un exemple qui illustre différents types de phénomènes d'accumulation dont la compréhension est cruciale pour l'interprétation du comportement asymptotique.

Notations 2.6. — Soit V la variété obtenue en éclatant le plan projectif en le point $P_0 = (0 : 0 : 1)$. Les points rationnels de V peuvent être décrits par

$$V(\mathbf{Q}) = \{\, ((y_0 : y_1 : y_2), (z_0 : z_1)) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \mid z_1 y_0 = z_0 y_1 \,\}.$$

On note pr_1 (resp. pr_2) la projection sur le premier (resp. le deuxième) facteur. Soient $E = \mathrm{pr}_1^{-1}(P_0)$ le diviseur exceptionnel et U son complémentaire ; soit Λ l'image inverse par pr_1 d'une droite évitant P_0. Le groupe de Picard de V est donné par

$$\mathrm{Pic}(V) = \mathbf{Z}\Lambda \oplus \mathbf{Z}E.$$

Si r et s sont deux entiers, on considère la hauteur sur $V(\mathbf{Q})$ donnée par la formule

$$H_{r,s}((y_0 : y_1 : y_2), (z_0 : z_1)) = \sqrt{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2}^{\,r+s} \sqrt{z_0^2 + z_1^2}^{\,-s}$$

si y_0, y_1, y_2, z_0, z_1 sont des entiers tels que

$$\mathrm{pgcd}(y_0, y_1, y_2) = \mathrm{pgcd}(z_0, z_1) = 1.$$

Cette hauteur correspond à une métrique adélique sur $r\Lambda + sE$.

On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 2.7 (Batyrev-Manin [BM, § 1.6]). — *On suppose que $r > 0$ et $r+s > 0$. Il existe des constantes $C_{r,s}$ telles que le comportement asymptotique de $N_{U,H_{r,s}}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$ soit donné par les formules :*

$$N_{U,H_{r,s}}(B) \sim \begin{cases} C_{r,s} B^{3/r} \ \textit{si}\ \dfrac{3}{r} > \dfrac{2}{r+s}, \\ C_{3,-1} B^{3/r} \log(B^{3/r}) \ \textit{si}\ \dfrac{3}{r} = \dfrac{2}{r+s}, \\ C_{r,s} B^{2/(r+s)} \ \textit{si}\ \dfrac{3}{r} < \dfrac{2}{r+s}. \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$N_{E,H_{r,s}}(B) \sim C'_s B^{-2/s} \ \textit{si}\ s < 0$$

et ce dernier cardinal est infini si $s > 0$ et $B > 0$.

Remarques 2.8. — (i) On obtient donc que $N_{U,H_{r,s}}(B) = o(N_{E,H_{r,s}}(B))$ si $r+2s > 0$, comme cela apparaît dans [Se, § 2.12]. Le nombre de points de l'ouvert est négligeable devant celui du fermé E. Du point de vue de l'interprétation, le nombre de points sur la variété V tout entière est, sous la condition précédente, équivalent à celui sur E et donc s'interprète en termes de la restriction de H à E. Tout phénomène global est occulté. Une des idées cruciales des conjectures de Manin est de suggérer que la géométrie globale de la variété réapparaisse dans le comportement asymptotique si on considère le complémentaire U de E.

(ii) La symétrie apparente entre les cas $\frac{3}{r} > \frac{2}{r+s}$ et $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$ disparaît si on étudie de manière plus fine la contribution des fermés de Zariski dans le comportement asymptotique : si $\frac{3}{r} \geqslant \frac{2}{r+s}$, le comportement asymptotique n'est pas modifié si on remplace U par un ouvert non vide contenu dans U, la contribution des fermés étant négligeable. En particulier, si $(r,s) = (1,0)$ on est ramené au cas du plan projectif pour lequel tout sous-ensemble mince apporte une contribution négligeable. Par contre, si $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$, le comportement asymptotique du nombre de points sur chaque fibre de pr_2 est donné par une formule de la forme

$$\forall\, x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}), \quad N_{\mathrm{pr}_2^{-1}(x),H_{r,s}}(B) \sim C_{r,s}(x)B^{2/(r+s)}$$

et la constante $C_{r,s}$ globale est obtenue dans ce cas comme somme des constantes $C_{r,s}(x)$. Chaque fibre de pr_2 est donc faiblement accumulatrice en un sens que nous préciserons plus loin.

(iii) Pour illustrer ce résultat, nous avons représenté sur la figure 1 les ensembles

$$\{\, x = ((y_0 : y_1 : 1), (1 : z_1)) \in V(\mathbf{Q}) \;\big|\; |y_0| < 1,\, |z_1| < 1,\, H_{r,s}(x) \leqslant 4000 \,\},$$

pour $(r,s) = (3,0)$, $(3,-1)$ et $(4,-2)$, avec y_0 en abscisse et z_1 en ordonnée. Dans cette figure, le diviseur exceptionnel apparaît donc comme la droite verticale centrale et les fibres de pr_2 sont les droites horizontales.

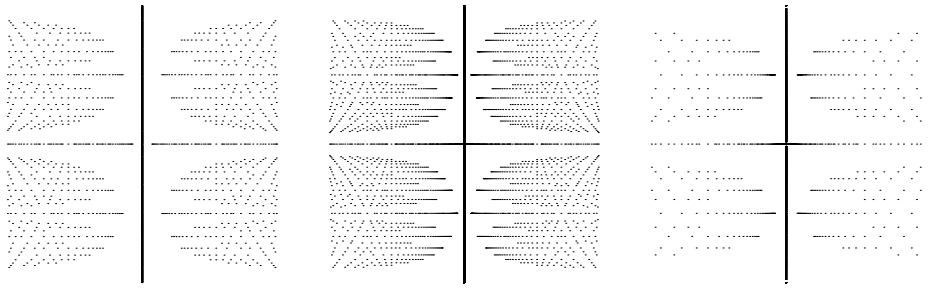


FIGURE 1. Le plan projectif éclaté en un point

3. LES CONJECTURES DE MANIN

Dans une série d'articles [FMT], [BM], [Ma] publiés entre 1989 et 1993, Manin a présenté, avec Batyrev, Franke et Tschinkel, une série de conjectures qui donnent une interprétation du terme dominant dans le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. Nous allons donner un échantillon de ces conjectures qui ont servi de fil directeur dans l'étude récente de ces phénomènes asymptotiques.

Dans [BM, § 3], Batyrev et Manin précisent que les conjectures énoncées sont à considérer plutôt comme des questions. Une remarque similaire vaut pour les conjectures de cet exposé.

3.1. Premier niveau : la puissance de B

Le premier objectif est d'interpréter la puissance de B intervenant dans le comportement asymptotique. Nous utiliserons pour cela la notation suivante :

Notation 3.1. — Soit H une hauteur d'Arakelov sur une bonne variété V et F un sous-ensemble constructible de V. On pose

$$a_F(H) = \inf\{\, \sigma \in \mathbf{R} \mid \zeta_{F,H}(s) \text{ converge pour } \mathrm{Re}(s) = \sigma \,\}.$$

Remarques 3.2. — (i) Si $a_F(H) > 0$ sa valeur peut être également décrite comme

$$a_F(H) = \varlimsup_{B \to +\infty} \log(N_{F,H}(B)) / \log B$$

et donne donc la puissance de B dans le comportement asymptotique.

(ii) La valeur de $a_F(H)$ ne dépend en fait que de la classe $[L]$ du faisceau inversible considéré dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ (cf. [BM, § 1.4]). Nous noterons donc aussi $a_F([L])$ ou $a_F(L)$ pour $a_F(H)$.

(iii) On a en outre la relation $a_F(d[L]) = \frac{1}{d} a_F([L])$.

3.1.1. Conjectures concernant une variété projective arbitraire. — La première conjecture lie l'existence d'une courbe rationnelle au fait d'avoir « beaucoup » de points rationnels :

Conjecture 3.3 (Manin [Ma]). — *Si $a_U(L) > 0$ pour un ouvert U de V et un faisceau ample L, alors U contient une courbe isomorphe à un ouvert de $\mathbf{P}^1_K$.*

Passons à l'interprétation géométrique de $a_U(L)$:

Définition 3.4. — *Si V est une bonne variété, on note $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône fermé engendré par les classes de diviseurs effectifs dans le groupe $\mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et ω_V le faisceau canonique de V, puissance extérieure maximale du fibré cotangent Ω^1_V. On pose alors*

$$a^g_V(L) = \inf\{\, \gamma \in \mathbf{R} \mid \gamma[L] \in \omega_V^{-1} + C^1_{\mathrm{eff}}(V) \,\}.$$

Remarques 3.5. — (i) On a également la relation $a^g_V(d[L]) = \frac{1}{d} a^g_V([L])$.

(ii) Si ω_V n'appartient pas à $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$, $a^g_V(\omega_V^{-1}) = 1$.

CONJECTURE 3.6 (Batyrev, Manin). — *Si L est ample, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un ouvert de Zariski dense U de V tel que*

$$a_U(L) \leqslant a_V^g(L) + \epsilon.$$

Remarques 3.7. — (i) Notons que cette conjecture est vraie pour une courbe C : en effet les valeurs de $a_U(L)$ et de $a_V^g(L)$, pour U un ouvert dense de V, sont données par le tableau :

genre g	$a_U(L)$	$a_V^g(L)$
0	$\frac{2}{\deg(L)}$ ou $-\infty$	$\frac{2}{\deg(L)}$
1	0 ou $-\infty$	0
>1	$-\infty$	<0

où le fait que $a_U(L) = -\infty$ si $g > 1$ résulte de la conjecture de Mordell montrée par Faltings [Fa].

(ii) Si V est de type général, c'est-à-dire si ω_V est pseudo-ample, alors la conjecture est équivalente à dire que $V(K)$ n'est pas dense pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire à une des conjectures de Lang [La, Chap. I, § 3].

Il est essentiel dans cette conjecture de se restreindre à des ouverts, comme cela apparaît déjà dans le cas du plan projectif éclaté en un point. Cela amène aux définitions suivantes :

DÉFINITION 3.8. — *Soit $F \subsetneq V$ un fermé irréductible de V. On dit que F est* strictement accumulateur *pour L si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que*

$$a_W(L) > a_U(L).$$

On dit que F est faiblement accumulateur *pour L si et seulement si, pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que*

$$\varinjlim_{B \to +\infty} \frac{N_{W,H}(B)}{N_{U,H}(B)} > 0$$

pour toute hauteur d'Arakelov H relative à L.

Exemple 3.9. — Dans le cas du plan projectif éclaté en un point rationnel, le diviseur exceptionnel est strictement accumulateur si $r + 2s > 0$ et toute fibre de pr_2 est faiblement accumulatrice si $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$. L'ensemble des points rationnels est donc, dans ce dernier cas, réunion d'ensembles faiblement accumulateurs.

Exemple 3.10. — Soit V une surface K3 ou une surface d'Enriques telle que le groupe d'automorphismes de V sur K soit infini. On suppose que V contient une courbe K-rationnelle, c'est-à-dire birationnelle à $\mathbf{P}^1_K$. Des exemples de telles surfaces $K3$ données sous la forme d'hypersurfaces de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ définies par une section de

$\mathscr{O}(2,2,2)$ sont étudiées par Billard dans [Bil]. Une telle surface contient une infinité de courbes rationnelles. Soit L un faisceau inversible ample sur V. Si on indexe les courbes rationnelles de V en une famille $(C_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de sorte que les degrés d'intersection avec L soient croissants, on peut poser $U_i = V - \bigcup_{j\leqslant i} C_j$. On obtient une suite décroissante d'ouverts tels que, conjecturalement, on ait que $a_{U_i}(L) > 0$ tende vers 0 quand i tend vers $+\infty$. La stratification arithmétique définie par $a_U(L)$ serait donc, dans ce cas, infinie (cf. [BM, § 3.5]).

Peu de choses ont été effectivement montrées pour ces surfaces. Billard [Bil] avait obtenu des majorations pour certaines des surfaces mentionnées ci-dessus ; plus récemment McKinnon a montré dans [Mc] que les courbes K-rationnelles de plus bas degré relativement à L sont effectivement L-accumulatrices pour certaines surfaces K3 hyperelliptiques, identifiant ainsi le premier cran de la filtration.

Une question qui reste, semble-t-il, complètement ouverte est celle des points sur le complémentaire de la réunion des droites K-rationnelles que celles-ci soient en nombre fini ou pas. Est-il possible qu'il y ait un nombre infini de tels points ? Quel est le comportement asymptotique de ces points relativement aux hauteurs ?

Pour conclure ce paragraphe, il convient de pouvoir décrire géométriquement ces variétés strictement accumulatrices. Une méthode consiste à restreindre L à une sous-variété, puis à donner un analogue de la conjecture pour celle-ci. Il faut donc étendre la définition de $a^g_V(L)$ à des sous-variétés éventuellement singulières F de V : soit F un fermé irréductible de V, soient $\widetilde{F}$ une normalisation de F, $\varphi : \widetilde{F} \to V$ le morphisme induit et $F_0 \subset \widetilde{F}$ le lieu des points lisses de $\widetilde{F}$. On pose alors

$$a^g_F(L) = \inf\{\, \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid h^0(F_0, \varphi^*(L)^p \otimes \omega^q_{F_0}) > 0 \,\}.$$

Les candidats géométriques pour les variétés strictement accumulatrices sont alors les fermés pour lesquels

$$a^g_F(L) > a^g_V(L).$$

3.1.2. Le cas des variétés presque de Fano. — Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, si V est de type général, on peut avoir, pour toute extension finie K' de K, $a_U(L) < a^g_{V_{K'}}(L)$ pour U un ouvert dense de $V_{K'}$. Ce phénomène peut encore se produire si V n'est pas de type général, il suffit pour cela que les points rationnels ne soient pas potentiellement Zariski denses, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'extension finie K' telle que $V(K')$ soit Zariski dense. En particulier, on peut considérer le produit $\mathbf{P}^1_K \times C$ où C est une courbe de genre plus grand que deux (cf. également [CTSSD] pour un autre exemple). Il convient donc de restreindre la classe des variétés considérées.

Dans ce cadre, il est assez naturel de considérer une classe un peu plus large que celle des variétés de Fano :

DÉFINITION 3.11. — *Nous dirons qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K est presque de Fano si elle vérifie les conditions suivantes :*

PF1 *le groupe de cohomologie $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ est nul pour $i = 1$ et $i = 2$,*
PF2 *la torsion dans le groupe de Picard géométrique* $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ *est réduite à* $\{0\}$,
PF3 *l'opposé du faisceau canonique ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$.*

Le théorème d'annulation de Kodaira assure qu'une variété de Fano est presque de Fano. Par ailleurs, toutes les variétés toriques sont presque de Fano.

CONJECTURE 3.12. — *Si V est presque de Fano, et si L est un faisceau à l'intérieur du cône des diviseurs effectifs, alors il existe une extension finie K_0 de K et un ouvert dense O de V_{K_0} tels que pour tout corps de nombres K' contenant K_0 et tout ouvert dense U contenu dans $O_{K'}$, on ait*

$$a_U(L) = a_V^g(L).$$

Remarque 3.13. — Cette conjecture est intermédiaire entre la conjecture B, qui se limite aux variétés de Fano, et la conjecture C de [BM].

3.2. Deuxième niveau : la puissance de $\log B$

Dans ce paragraphe nous allons faire une hypothèse supplémentaire :

HYPOTHÈSE 3.14. — *On suppose que V est une variété presque de Fano telle qu'il existe une famille finie $(n_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de classes de diviseurs effectifs dans* $\mathrm{NS}(\overline{V})$ *telle que*

$$C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{R}_+ n_i.$$

Très peu de choses semblent connues sur la structure du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ en général. Si V est une surface de Del Pezzo, l'hypothèse résulte de la théorie de Mori. Cela reste vrai si V est une variété de Fano de dimension trois [Ba]. Cette hypothèse est également vérifiée dans divers cas particuliers (variétés de drapeaux, variétés toriques,...).

DÉFINITION 3.15. — *Si V vérifie les hypothèses précédentes et si $L \in \mathrm{NS}(V)$ est tel que $a_V^g(L) > 0$, alors $a_V^g(L)[L] - [\omega_V^{-1}] \in \partial C^1_{\mathrm{eff}}(V)$, et on peut définir $b_V^g(L)$ comme la codimension de la face minimale de $\partial C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ contenant $a_V^g(L)[L] - [\omega_V^{-1}]$.*

L'interprétation de la puissance du logarithme est l'objet de l'énoncé suivant, qui, comme nous le verrons, est vérifié par de nombreuses familles de variétés. Batyrev et Tschinkel en ont toutefois donné un contre-exemple qui sera décrit au paragraphe 6.

PRINCIPE 3.16. — *Si V vérifie l'hypothèse* 3.14 *et H est une hauteur relative à un fibré en droites L tel que $a_V^g([L]) > 0$, il existe une extension finie K_0 de K et un ouvert dense O tels que pour tout corps de nombres K' contenant K_0 et tout ouvert dense U contenu dans $O_{K'}$, il existe une constante $C_H > 0$ vérifiant*

$$\text{(F)} \qquad \begin{array}{rcl} N_{U,H}(B) & \sim & C_H B^{a^g_{V'}(L)} (\log B)^{b^g_{V'}(L)-1} \\ B & \to & +\infty \end{array}$$

où $V' = V_{K'}$.

Remarques 3.17. — (i) Cet énoncé est une version affaiblie de la conjecture C′ de [BM].

(ii) Notons que $a_V^g(L)$ est stable par extension de corps, mais que cela n'est plus le cas pour $b_V^g(L)$. D'autre part, l'exemple du plan projectif éclaté en un point montre que la constante C peut dépendre de l'ouvert U choisi.

Là encore, il est possible de suggérer une piste pour la détermination des variétés faiblement accumulatrices pour un faisceau L dont la classe appartient à l'intérieur du cône $C^1_{\text{eff}}(V)$. Soit H une hauteur relative à L. Considérons tout d'abord la famille $(n_1, \dots, n_r)$ des générateurs des arêtes de $C^1_{\text{eff}}(V)$ et $(L_1, \dots, L_r)$ une famille de représentants de cette famille. Soit B la réunion des points bases des systèmes $\Gamma(V, L_i)$; on note U son complémentaire. Cet ouvert U apparaît naturellement lorsqu'on s'intéresse à la finitude de $N_{U,H}(B)$: pour toute hauteur H comme ci-dessus, on a

$$\forall\, B \in \mathbf{R}_+^*, \quad N_{U,H}(B) < +\infty.$$

Considérons σ la face fermée minimale de $C^1_{\text{eff}}(V)$ contenant $a^g(L)[L] - [\omega_V^{-1}]$. Pour tout L' de σ, quitte à remplacer L' par $L'^{\otimes n}$, on dispose d'un morphisme $\phi_{L'} : U \to \mathbf{P}(\Gamma(V, L')^\vee)$. Soit $L_0 \in \sigma$ de sorte que la fibre générique soit de dimension minimale. Pour plusieurs exemples, les variétés faiblement accumulatrices relativement à L sont alors les fibres de ϕ_{L_0} si le morphisme associé n'est pas constant. Toutefois cette première approche se révèle insuffisante. Ainsi, pour $L = \omega_V^{-1}$ le complémentaire des variétés faiblement accumulatrices devrait être un ouvert. Nous verrons que, vraisemblablement, ce n'est pas toujours le cas. Une analyse plus fine et plus approfondie des fibrations intervenant dans le comportement asymptotique se trouve dans [BT5].

4. UNE LISTE DE RÉSULTATS

Il est maintenant temps de donner une liste de cas pour lesquels la formule (F) a été démontrée.

• La formule (F) est compatible avec le produit de variétés au sens suivant : si H_1 et H_2 sont deux hauteurs d'Arakelov relatives à des fibrés L_1 et L_2 sur de bonnes

variétés V_1 et V_2 vérifiant les hypothèses 3.14 et s'il existe des ouverts U_i de V_i tels que

$$N_{U_i,H_i}(B) = C_i B^{a^g_{V_i}(L_i)} (\log B)^{b^g_{V_i}(L_i)-1} + O(B^{a^g_{V_i}(L_i)} (\log B)^{b^g_{V_i}(L_i)-2}),$$

alors une formule analogue vaut pour le produit $U_1 \times U_2$ et la hauteur H donnée par $H(x,y) = H_1(x)H_2(y)$ (Franke, Manin et Tschinkel [FMT, § 1]).

• (F) est compatible avec les résultats de la méthode du cercle pour les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$. En particulier, si V est une intersection complète lisse définie par m équations de même degré d en $N+1$ variables de sorte que

$$N > 2^{d-1} m(m+1)(d-1)$$

et si $V(\mathbf{Q}_v) \neq \varnothing$ pour toute place v de $\mathbf{Q}$, alors (F) est vérifiée pour tout ouvert U de V (Birch [Bir], cf. également [Va] pour la méthode du cercle ; Franke, Manin et Tschinkel [FMT, § 1]).

• (F) est vérifiée pour les variétés de drapeaux généralisés, c'est-à-dire pour les quotients G/P où G est un groupe algébrique linéaire et P un K-sous-groupe parabolique de G (Franke, Manin et Tschinkel [FMT, § 2]). Dans ce cas, tout ouvert dense U convient également.

• (F) a été démontrée pour les variétés toriques projectives et lisses, c'est-à-dire pour les compactifications équivariantes lisses de tores, en prenant comme ouvert U l'orbite ouverte dans V (Batyrev et Tschinkel [BT1], [BT4] et [BT2]).

• (F) est vraie pour certaines fibrations en variétés toriques au-dessus de variétés de drapeaux généralisés (Strauch et Tschinkel [ST1] et [ST2]). L'ouvert U est obtenu dans ce cas en considérant l'orbite ouverte dans chaque fibre.

• (F) est valide pour les compactifications équivariantes lisses d'espaces affines, l'ouvert U étant l'orbite ouverte dans V (Chambert-Loir et Tschinkel [CLT1], [CLT2] et [CLT3]).

• (F) est vérifiée par la surface obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, U étant donné comme complémentaire des diviseurs exceptionnels (Salberger, la Bretèche [Bre1]).

5. QUELQUES OUTILS DE DÉMONSTRATION

Il est difficile dans le cadre de cet exposé de décrire en détail la panoplie des méthodes très variées qui ont été utilisées pour montrer les résultats précédents. Nous nous contenterons de donner quelques idées de preuves illustrant deux types d'approches : la première est basée sur des techniques d'analyse harmonique et s'avère fructueuse pour des compactifications d'espaces homogènes ou des variétés apparentées ; la seconde, que nous évoquerons sans la détailler, utilise les torseurs universels introduits par Colliot-Thélène et Sansuc [CTS].

5.1. Les séries d'Eisenstein

Soit V une variété de drapeaux généralisés de la forme $V = G/P$, avec G semi-simple simplement connexe et P sous-groupe parabolique de G. Le groupe de Picard de V est alors isomorphe au groupe $X^*(P)_K$ des caractères de P sur K c'est-à-dire au groupe des K-morphismes de P dans $\mathbf{G}_{m,K}$. Soit P_0 un K-sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P et A_0 un tore déployé maximal de G contenu dans P_0. On a une injection de $X^*(P)_K$ dans $X^*(A_0)_K$. Par l'isomorphisme ci-dessus ω_V^{-1} correspond à la somme des racines de A_0 comptées avec des multiplicités égales à la dimension de leur espace propre dans l'algèbre de Lie du radical de P.

Pour certaines hauteurs H, la série zêta des hauteurs

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} \frac{1}{H(x)^s}$$

est une série d'Eisenstein relative à P à laquelle on peut appliquer les travaux de Langlands ([Lan], [Go] et [MW]).

De manière plus précise, donnons-nous une base du groupe de Picard de V et pour chaque élément de cette base donnons-nous une hauteur d'Arakelov relative à cet élément qui soit du type ci-dessus. Cela nous fournit un accouplement

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \times V(K) & \to & \mathbf{C} \\ (L, x) & \mapsto & \boldsymbol{H}(L, x), \end{array}$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et redonne, pour les éléments de la base, les hauteurs choisies. On considère alors pour tout s de $\mathrm{Pic}\, V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ la série $\zeta_{V,\boldsymbol{H}}(s) = \sum_{x \in V(K)} \boldsymbol{H}(-s, x)$. La conjecture 3.12 est donc équivalente à l'assertion que cette série converge sur l'intérieur du domaine $\omega_V^{-1} + C^1_{\mathrm{eff}}(V) + i\,\mathrm{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$.

Les résultats de Langlands impliquent cette convergence et montrent en outre que les séries d'Eisenstein s'étendent en des fonctions méromorphes (cf. [Lan, Lemme 4.1] et [MW, § II.1.5, § IV.1.8]). Il reste donc essentiellement à déterminer la nature des pôles au voisinage de $\omega_V^{-1} + i\,\mathrm{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$. On utilise pour cela les équations fonctionnelles satisfaites par les séries d'Eisenstein relatives à P_0 qui font intervenir des fonctions

$$c(w, \cdot) : X^*(A_0) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to \mathbf{C},$$

où w appartient au groupe de Weyl relatif W_K (cf., par exemple, [MW, § IV.1.10]). Ces fonctions $c(w, \cdot)$, qui sont définies à l'aide d'intégrales, ont des prolongements méromorphes [Lan, § 4] et vérifient

$$c(wv, \lambda) = c(w, v\lambda)c(v, \lambda).$$

La nature des pôles des séries d'Eisenstein relatives à P_0 est déterminée par les pôles de $c(w, \cdot)$. En décomposant w de manière minimale en les générateurs s_α donnés par la base du système de racines correspondant à P_0, les pôles de $c(w, \cdot)$ se déduisent des

pôles de $c(s_\alpha,\cdot)$, ce qui permet de se ramener au cas d'un groupe de rang relatif 1, pour lequel la méthode utilisée pour SL_2 s'applique (cf. [Lan, § 7]) : $c(s_\alpha,\cdot)$ a au plus un pôle le long d'un hyperplan au voisinage du point qui nous intéresse. Cela donne la nature des pôles des séries d'Eisenstein relatives à P_0. Pour terminer la démonstration, on exprime les séries relatives à P comme résidus de celles relatives à P_0.

Le cas où $G=\mathrm{GL}_{n,\mathbf{Q}}$ avait été considéré par Schmidt [Sch], et son résultat a été par la suite étendu au cas de $G=\mathrm{GL}_{n,K}$ par Thunder [Th].

5.2. Formule de Poisson et compactifications équivariantes

Passons au cas des variétés toriques projectives et lisses. Là encore, il nous faut d'abord décrire le groupe de Picard. Soit V une variété torique, compactification équivariante lisse d'un tore algébrique T. Soit $D(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre sur les diviseurs irréductibles équivariants de $\overline{V}$. On notera $(D_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ ces diviseurs. On a alors une suite exacte

$$0\to X^*(\overline{T})\to D(\overline{V})\xrightarrow{\pi}\mathrm{Pic}(\overline{V})\to 0,$$

le cône effectif dans $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est engendré par les images des D_i et ω_V^{-1} coïncide avec $\pi(\sum_{i=1}^r D_i)$. La description de $\mathrm{Pic}(V)$ et $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ s'obtient en considérant les invariants sous l'action du groupe de Galois.

Le groupe de Galois agit sur la famille des diviseurs D_i et on note $O_1,\dots,O_m$ les orbites de cette action. Pour chaque orbite, on se donne une métrique adélique sur le faisceau correspondant à $\sum_{D\in O_i} D$ et on obtient un accouplement

$$\begin{array}{rcl} D(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}\times V(K) & \to & \mathbf{C}\\ (L,x) & \mapsto & \boldsymbol{H}(L,x),\end{array}$$

où $D(V)$ désigne les invariants de $D(\overline{V})$ sous l'action de Galois.

Soit $\boldsymbol{s}=(s_1,\dots,s_m)\in D(V)$. Dans un premier temps Batyrev et Tschinkel montrent que la série $\zeta_{T,\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s})=\sum_{x\in T(K)}\boldsymbol{H}(-\boldsymbol{s},x)$ converge lorsque $\mathrm{Re}(s_i)>1$. Il reste donc à déterminer la nature des pôles de la série.

On utilise pour cela la formule de Poisson suivante : on fixe temporairement $\boldsymbol{s}=(s_1,\dots,s_m)\in D(V)$ avec $\mathrm{Re}(s_i)>1$ et on pose $H=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s},\cdot)$. Soit $T(\boldsymbol{A}_K)$ le groupe des adèles de T, produit restreint des $T(K_v)$. En écrivant H sous la forme

$$\forall\, x\in T(K),\quad H(x)=\prod_{v\in M_K} H_v(x),$$

où $H_v : T(K_v)\to\mathbf{R}$, on peut étendre H à $T(\boldsymbol{A}_K)$. Soit $\mathrm{d}x$ une mesure de Haar sur $T(\boldsymbol{A}_K)$. D'un point de vue formel, on souhaite écrire

$$\zeta_{T,H}(s)=\sum_{x\in T(K)} H(x)^{-s}=\int_{\chi\in(T(\boldsymbol{A}_K)/T(K))^\vee}\widehat{H}(\chi)\mathrm{d}\chi\,,$$

où $(T(\boldsymbol{A}_K)/T(K))^\vee$ désigne le groupe des caractères topologiques de $T(\boldsymbol{A}_K)$ triviaux sur $T(K)$, $\mathrm{d}\chi$ la mesure duale de la mesure $\mathrm{d}x$ et $\widehat{H}$ la transformée de Fourier de H donnée par la formule

$$\widehat{H}(\chi) = \int_{T(\boldsymbol{A}_K)} H_v(x)\chi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Cette formule de Poisson a un sens à condition que les fonctions H et $\widehat{H}$ soient L^1. Pour H cela résulte de ce qui précède. D'un autre côté $\widehat{H}$ s'exprime comme produit de termes locaux qui, en dehors de quelques mauvaises places, peuvent s'écrire explicitement. Il suffit alors de majorer ces termes locaux en les mauvaises places et en les places archimédiennes.

La dernière partie de la preuve consiste à décrire le terme principal de $\zeta_{T,\boldsymbol{H}}$ en utilisant notamment l'expression explicite des transformées de Fourier locales. On utilise également à ce niveau des majorations uniformes de fonctions L de Hecke. Pour terminer, un calcul de résidu itéré permet de passer au quotient dans la suite exacte

$$0 \to X^*(T)_K \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to D(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to \mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to 0$$

au niveau duquel cette partie principale s'obtient en multipliant un produit eulérien convergent par la fonction caractéristique du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ définie par

$$\forall\, s \in \mathrm{Pic}\, V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}, \quad \chi_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)}(s) = \int_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} \exp(-\langle s,t\rangle)\mathrm{d}t\,,$$

où $C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ est le cône dual de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$:

$$C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{\, x \in (\mathrm{Pic}\, V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R})^\vee \mid \forall\, y \in C^1_{\mathrm{eff}}(V),\ \langle x,y\rangle \geqslant 0\,\}.$$

Ceci donne la nature des pôles de la fonction zêta des hauteurs et un argument taubérien permet de conclure.

Les méthodes employées par Chambert-Loir et Tschinkel pour les compactifications d'espaces affines reposent également sur des formules de Poisson, mais de nature additive, et des calculs explicites de transformée de Fourier locale.

Le résultat de Strauch et Tschinkel sur les fibrations en variétés toriques au-dessus de variétés de drapeaux repose sur une combinaison des méthodes employées dans chacun des deux cas. Les arguments de descente utilisés dans ce cas ont été généralisés par Chambert-Loir et Tschinkel à des fibrations en variétés toriques plus générales [CLT4], [CLT5].

Les résultats de Batyrev et Tschinkel ont été redémontrés dans le cas des variétés toriques déployées sur $\mathbf{Q}$ par Salberger [Sa] avec une méthode totalement différente basée sur le fait que le torseur universel sur V considéré par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS] est un ouvert d'un espace affine (cf. également [Del], [Co] et [MP]) et par la Bretèche, avec un contrôle affiné du terme d'erreur [Bre2] (cf. également [CLT5]).

5.3. Le cas de la surface de Del Pezzo de degré 5

Dans ce cas, Salberger avait obtenu une majoration de $N_{U,H}(B)$ du type souhaité. La démonstration de la Bretèche, comme celle de Salberger, utilise la description du torseur universel comme un ouvert du cône de $\Lambda^2 K^5$ au-dessus de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,5)$ (cf. également [Sk]). Ce cône peut être décrit par les équations de Plücker. En utilisant ce fait, la Bretèche ramène la question initiale à un dénombrement de décuplets $(z_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant 5}$ vérifiant les équations de Plücker ainsi que des conditions de primalité

$$\mathrm{pgcd}(z_{i,j}, z_{i,k}) = 1 \quad \text{si} \quad j \neq k.$$

Après une réduction supplémentaire utilisant le groupe d'automorphismes de la variété, la Bretèche montre l'estimation souhaitée grâce à des techniques fines de théorie analytique des nombres.

6. LE CONTRE-EXEMPLE DE BATYREV ET TSCHINKEL

Notation 6.1. — Soient n un entier strictement positif et $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbf{Q}[X_0, \ldots, X_n]$ quatre formes linéaires linéairement indépendantes. On considère l'hypersurface V dans le produit $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3$ définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{3} l_i(x) y_i^3 = 0.$$

Théorème 6.2 (Batyrev et Tschinkel [BT3]). — *La variété de Fano V est un contre-exemple au principe* 3.16.

L'idée de la démonstration est la suivante : par le théorème de Lefschetz, on a des isomorphismes

$$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V)$$

et donc, si H est une hauteur relative au fibré anticanonique sur V, on devrait obtenir l'existence d'une extension finie K_0 de K et d'un ouvert dense O tels que pour tout $K' \supset K_0$ on ait

$$N_{O_{K'},H}(B) \sim C_{K'} B(\log B).$$

Mais le faisceau anticanonique de V est donné par $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(n,1)$. Autrement dit, on peut prendre comme hauteur

$$H((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)) = H_{\mathbf{P}^n}((x_0 : \ldots : x_n))^n H_{\mathbf{P}^3}((y_0 : y_1 : y_2 : y_3)).$$

D'un autre côté les fibres V_x de la projection pr_1 sur la première composante sont des surfaces cubiques lisses si

$$\prod_{i=0}^{3} l_i(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$$

et la restriction de H à une telle fibre est, à une constante près, la restriction de la hauteur $H_{\mathbf{P}^3}$. Or, pour tout x vérifiant la condition précédente

$$\omega_{V_x}^{-1} = \mathscr{O}_{V_x}(1).$$

Le comportement espéré pour un ouvert d'une telle fibre est donc

$$C_x B(\log B)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}(V_x)-1}.$$

Mais tout ouvert dense de V rencontre une infinité de fibres pour lesquelles $\operatorname{rg}\operatorname{Pic}(V_x) > 2$.

On peut en fait être plus précis : si K contient les racines cubiques de l'unité et si $l_i(x_0 : \ldots : x_n)$ est un cube pour $i = 0, 1, 2, 3$, alors la fibre est une surface cubique déployée contenant 27 droites rationnelles et peut être obtenue comme éclatement de $\mathbf{P}^2$ en 6 points rationnels. Soit X l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en trois de ces points, on a donc une factorisation

$$V_x \xrightarrow{\pi} X \to \mathbf{P}^2$$

et en étendant une base de $\Gamma(V_x, \omega_{V_x}^{-1})$ en une base de $\Gamma(X, \omega_X^{-1})$, on obtient une hauteur H_X sur X relative à ω_X^{-1} telle que

$$\forall\, y \in U_x(K), \quad H_{V_x}(y) \leqslant H_X(\pi(y))$$

où U_x désigne le complémentaire des 27 droites dans V_x. Donc comme la conjecture est montrée pour X, pour tout ouvert dense U de V_x, on a

$$N_{U,H}(B) \geqslant N_{\pi(U),H_X}(B) \geqslant CB(\log B)^3.$$

L'ensemble des points $(x_0 : \ldots : x_n)$ tels que les $l_i(x_0, \ldots, x_n)$ soient des cubes est Zariski dense dans $\mathbf{P}^n$. Donc pour tout ouvert U de V, on a

$$N_{U,H}(B) \geqslant CB(\log B)^3$$

en contradiction avec la formule attendue.

Plusieurs directions s'offrent pour modifier les conjectures de Manin afin de prendre en compte ce contre-exemple. Tout d'abord il est raisonnable d'espérer que chacune des fibres de pr_1 dont le rang du groupe de Picard est maximal soit faiblement accumulatrice. Une première solution consiste donc à rajouter l'hypothèse arithmétique peu pratique que pour toute hauteur relative au faisceau anticanonique, le complémentaire des sous-variétés faiblement accumulatrices forme un ouvert de Zariski de la variété. Les exemples du § 4 vérifient une telle propriété.

Une deuxième direction est de noter que pr_1 est une des fibrations associées aux arêtes de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$. Une idée est donc de raisonner par récurrence sur la dimension en utilisant des fibrations successives. Une telle démarche est notamment explorée dans [BT5].

Une troisième direction serait de noter que les points rationnels des fibres ayant un groupe de Picard non réduit à $\mathbf{Z}$ constituent un ensemble mince en un sens analogue à celui du § 2. Le terme dominant du comportement asymptotique reflèterait donc la

géométrie du revêtement X. Cet ensemble ne contenant pas tous les points rationnels, une question naturelle, qui s'inscrit dans la démarche des conjectures de Manin, serait de se demander quel est le nombre de points de hauteur bornée sur le complémentaire de cet ensemble. Si celui-ci se révélait être du type attendu, il faudrait déterminer de manière systématique comment décrire ces ensembles minces accumulateurs.

Seule l'étude de nouveaux exemples permettra de dire laquelle de ces directions est la plus fructueuse.

7. AUTRES DÉVELOPPEMENTS

D'autres exemples sont actuellement étudiés : notamment Shalika, Takloo-Bighash et Tschinkel se penchent sur des compactifications lisses de formes intérieures de groupes semi-simples de type adjoint.

D'importants progrès ont été réalisés pour les surfaces cubiques pour lesquelles différentes majorations ont été obtenues (cf. Heath-Brown [HB] et Broberg [Bro]) ainsi que des minorations (Slater et Swinnerton-Dyer [SS-D]).

Plusieurs auteurs, dont l'orateur [Pe], ont proposé une formule empirique pour décrire la constante C intervenant dans le comportement asymptotique. Cette formule, dans le cas d'une hauteur relative au faisceau anticanonique, s'exprime en termes d'une mesure de Tamagawa sur l'espace des adèles faisant intervenir les métriques locales. Cette formule est vérifiée pour au moins un choix des métriques sur le faisceau anticanonique dans les cas décrits au paragraphe 4. Nous renvoyons à [BT5] pour une description de cette interprétation dans le cas général.

Il est également possible de considérer un analogue géométrique de ces conjectures pour les variétés sur un corps global de caractéristique finie (cf. [BM, § 3.13]). Quelques résultats ont été obtenus dans cette direction notamment pour les variétés de drapeaux et certaines variétés toriques [Bo]. Cet analogue pourrait permettre de mieux cerner les conditions géométriques exactes pour lesquelles la formule (F) peut être valide.

En conclusion, ce sujet est encore en pleine éclosion, riche en questions ouvertes à la fois arithmétiques et géométriques, où les conjectures de Manin se sont révélées un fil conducteur très efficace.

Remerciements. — Je remercie chaleureusement tous ceux qui ont accepté de relire ce texte dans un délai très bref et, en particulier, L. Bonavero, R. de la Bretèche, A. Chambert-Loir, J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, G. Rémond et Y. Tschinkel.

RÉFÉRENCES

[Ar] S.J. Arakelov – *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[Ba] V.V. Batyrev – *The cone of effective divisors of threefolds*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 3 (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., vol. 131, Part 3, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, pp. 337–352.

[BM] V.V. Batyrev & Y.I. Manin – *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V.V. Batyrev & Y. Tschinkel – *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Height zeta functions of toric varieties*, J. Math. Sci. **82** (1996), n° 1, 3220–3239.

[BT3] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), 41–46.

[BT4] ———, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[BT5] ———, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[Bil] H. Billard – *Propriétés arithmétiques d'une famille de surfaces $K3$*, Compositio Math. **108** (1997), n° 3, 247–275.

[Bir] B.J. Birch – *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet, & C. Soulé – *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 903–1027.

[Bo] D. Bourqui – *Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel*, J. of Number Theory **94** (2002), 343–358.

[Bre1] R. de la Bretèche – *Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5*, Duke Math. J. **113** (2002), 421–464.

[Bre2] ———, *Compter des points d'une variété torique*, J. Number theory **87** (2001), 315–331.

[Bro] N. Broberg – *Rational points on cubic surfaces*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, 13–35.

[CLT1] A. Chambert-Loir & Y. Tschinkel – *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I*, Compositio Math. **124** (2000), n° 1, 65–93.

[CLT2] ———, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II*, J. Number Theory **85** (2000), n° 2, 172–188.

[CLT3] ———, *On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups*, Invent. Math. **148** (2002), 421–452.

[CLT4] ———, *Torseurs arithmétiques et espaces fibrés*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, 37–70.

[CLT5] ———, *Fonctions zêta des hauteurs des espaces fibrés*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, 71–115.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc – *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTSSD] J.-L. Colliot-Thélène, A.N. Skorobogatov, & H.P.F. Swinnerton-Dyer – *Double fibres and double covers : paucity of rational points*, Acta Arith. **79** (1997), n° 2, 113–135.

[Co] D. Cox – *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), n° 1, 17–50.

[Del] T. Delzant – *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), 315–339.

[Fa] G. Faltings – *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), n° 3, 349–366.

[FMT] J. Franke, Y.I. Manin, & Y. Tschinkel – *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Go] R. Godement – *Introduction à la théorie de Langlands*, Séminaire Bourbaki 19-ème année, 1966/67, n° 321. Réédition, Collection Hors Série vol. 10, Société Mathématique de France, 1995, p. 115–144.

[HB] D.R. Heath-Brown – *Counting rational points on cubic surfaces*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 13–30.

[La] S. Lang – *Number Theory III, diophantine geometry*, Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Lan] R.P. Langlands – *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[Ma] Y.I. Manin – *Notes on the arithmetic of Fano threefolds*, Compositio Math. **85** (1993), n° 1, 37–55.

[Mc] D. McKinnon – *Counting rational points on K3 surfaces*, J. of number theory **84** (2000), n° 1, 49–62.

[MP] A.S. Merkurjev & I.A. Panin – *K-theory of algebraic tori and toric varieties*, K-Theory **12** (1997), n° 2, 101–143.

[MW] C. Moeglin & J.-L. Waldspurger – *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein, une paraphrase de l'écriture*, Progress in Math., vol. 113, Birkhäuser, Basel, 1994.

[Né1] A. Néron – *L'arithmétique sur les variétés algébriques (d'après A. Weil)*, Séminaire Bourbaki 4-ème année, 1951/52, n° 66. Réédition, Collection Hors Série vol. 2, Société Mathématique de France, 1995, p. 167–173.

[Né2] ———, *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Ann. of Math. **82** (1965), 249–331.

[Pe] E. Peyre – *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Sa] P. Salberger – *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S.H. Schanuel – *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Sch] W.M. Schmidt – *Asymptotic formulae for point lattices of bounded determinant and subspaces of bounded height*, Duke Math. J. **35** (1968), 327–339.

[Se] J-P. Serre – *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Sk] A.N. Skorobogatov – *On a theorem of Enriques—Swinnerton-Dyer*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), n° 3, 429–440.

[SS-D] J.B. Slater & H.P.F. Swinnerton-Dyer – *Counting points on cubic surfaces, I*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 1–12.

[ST1] M. Strauch & Y. Tschinkel – *Height zeta functions of twisted products*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 273–282.

[ST2] ———, *Height zeta functions of toric bundles over flag varieties*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), n° 3, 325–396.

[Th] J.L. Thunder – *Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties*, Compositio Math. **88** (1993), 155–186.

[Va] R.C. Vaughan – *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.

[We] A. Weil – *Arithmetic on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **53** (1951), 412–444.

Emmanuel PEYRE

Institut Fourier
UFR de Mathématiques, UMR 5582
Université de Grenoble I et CNRS
BP 74
F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
E-mail : Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr

Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53e année, 2000-2001, nO 892, p. 345 à 364

GÉOMÉTRIE NON COMMUTATIVE, OPÉRATEUR DE SIGNATURE TRANSVERSE ET ALGÈBRES DE HOPF [d'après A. Connes et H. Moscovici]

par **Georges SKANDALIS**

L'un des thèmes de la géométrie non commutative (*cf.* [13, 27]) est de transposer les outils de la géométrie à des algèbres non commutatives naturelles, qui peuvent être considérées comme algèbres de fonctions sur des « variétés non commutatives ». L'exemple de base, qui guide les travaux dans le domaine depuis une vingtaine d'années, est celui de la « variété non commutative » V/F, espace des feuilles d'un feuilletage F sur une variété V. En se plaçant sur une transversale (ouverte) M, on est amené à considérer le produit croisé de l'algèbre $C_c^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact sur M par un (pseudo-)groupe de difféomorphismes.

Plaçons-nous donc dans le cas d'un groupe dénombrable Γ de difféomorphismes d'une variété M de dimension n de classe C^∞. Le but du travail de Connes-Moscovici dont il est question dans ce rapport est d'établir un théorème de l'indice dans ce cadre. Le premier problème que l'on rencontre est que, dans le cas général, il n'y a pas de métrique sur M invariante par Γ, de sorte qu'il n'existe aucun opérateur différentiel elliptique dont le symbole principal soit invariant par Γ. Pour cela, les auteurs se placent dans l'espace P des métriques sur M, c'est-à-dire l'ensemble des repères du fibré tangent, quotienté par l'action de $O(n)$. Ils arrivent alors à construire un opérateur pseudodifférentiel D *hypoelliptique* qui est « presque invariant » par *tous les difféomorphismes* de M.

La formule d'indice de ces opérateurs est un cocycle cyclique φ sur le produit croisé $C_c^\infty(P) \rtimes \Gamma$. On peut donner une formule de l'indice construite à l'aide de la trace d'opérateurs. Cependant, celle-ci ne dépendra pas seulement du symbole (total) de D et sera donc peu calculable car non locale. Pour remédier à cela, les auteurs démontrent une formule de l'indice locale, qui est basée sur des résidus de Wodzicki (généralisés). Cette formule s'écrit en termes de résidus de prolongements méromorphes de fonctions de la forme $z \mapsto \mathrm{Tr}(b|D|^{-z})$; elle se généralise dans un cadre abstrait, donnant une formule « locale » utile dans de nombreux cadres.

À ce stade, on n'est pas encore au bout de nos peines... La formule de l'indice ainsi obtenue comporte un nombre énorme de termes : même dans le cas où M est de dimension 1 (pour les feuilletages de codimension 1), cette formule donne lieu

à un millier de termes — dont la plupart ont une contribution nulle et qu'il faut absolument savoir supprimer pour pouvoir passer en dimension n arbitraire. Pour cela, Connes et Moscovici introduisent une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ non commutative et non cocommutative de « champs de vecteurs transverses » sur $\mathbf{R}^n$ qui joue le rôle de groupe (quantique) de symétries de la situation. Cela permet de simplifier *a priori* les calculs. Mieux : ils construisent une cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n)$ d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_n$ et un cocycle universel $\Phi \in \mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n)$; ils montrent que la formule d'indice (le cocycle cyclique φ) provient du cocycle Φ à l'aide d'une application « classifiante »

$$\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^*(C_c^\infty(P) \rtimes \Gamma).$$

De plus, ils montrent que la cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n)$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie de Gel'fand-Fuchs $H^*(WO(n))$ [(1)]. Enfin, ils calculent la classe de Φ dans la cohomologie de Gel'fand-Fuchs.

Pour faire agir l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$, on doit d'abord choisir un recouvrement de notre transversale M par des ouverts de $\mathbf{R}^n$. On peut en fait court-circuiter cette étape en construisant une nouvelle algèbre de Hopf $\mathcal{H}_M$, qui est plutôt un objet genre « groupoïde quantique » permettant de définir l'application classifiante en termes d'une connexion affine (sans torsion) quelconque.

Nous commençons cet exposé par quelques rappels, notamment sur la cohomologie cyclique, la K-homologie et le résidu de Wodzicki. Nous expliquons ensuite la formule d'indice locale abstraite. Puis, nous discutons la construction de l'opérateur de signature transverse, et plus généralement d'un calcul pseudodifférentiel « invariant par difféomorphismes ». Dans la dernière section, nous donnons la construction de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ et expliquons comment on peut en déduire le calcul du cocycle cyclique donné par la formule d'indice locale appliquée à l'opérateur de signature transverse.

Je remercie Alain Connes et Henri Moscovici ainsi que Saad Baaj pour leur aide et leurs conseils durant la préparation de ce rapport et pour leur lecture attentive d'une version préliminaire du manuscrit.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. Puissances complexes des opérateurs pseudodifférentiels. Résidu de Wodzicki (*cf.* [39], [44], [32])

Soit M une variété compacte de classe C^∞ de dimension n. Soit P un opérateur (pseudo)différentiel elliptique « classique » d'ordre $m > 0$. On suppose que P est injectif et positif (en tant qu'opérateur non borné dans L^2). L'opérateur P^s pour

(1) Plus précisément, elle est égale à une variante $H^*(WSO(n))$.

$s \in \mathbf{C}$ est le prototype d'un opérateur pseudodifférentiel d'ordre complexe ms. Si Q est un autre opérateur pseudodifférentiel « classique » d'ordre k, la fonction $s \mapsto m^{-1}\operatorname{Tr}(QP^{-s})$, définie si la partie réelle de s est assez grande (si $m\operatorname{Re}(s) > k+n$), admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec des pôles au plus simples aux points $k+n-\ell/m$, où $\ell \in \mathbf{N}$. Le résidu $\operatorname{res} Q$ en $s=0$ de cette fonction ne dépend pas du choix de P. C'est le résidu de Wodzicki de Q. Celui-ci peut être donné par une « formule locale » $\operatorname{res} Q = \int_M s_Q$ où s_Q est une densité sur M qui se calcule à l'aide du symbole (total) de Q : pour $x \in M$, $s_Q(x)$ est l'intégrale sur la sphère de l'espace cotangent en x du symbole d'ordre $-n$ de Q (dans n'importe quelle carte de M). De plus, ce résidu est une trace : si P, Q sont des opérateurs pseudodifférentiels, on a $\operatorname{res} PQ = \operatorname{res} QP$. C'est d'ailleurs l'unique trace sur l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels sur M.

1.2. Cohomologie cyclique (*cf.* [10], [42], [13], [7])

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbf{C}$ (associative et unifère). Considérons l'espace des formes multilinéaires $\mathcal{A}^{n+1} \to \mathbf{C}$ comme l'espace $C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ des n-cochaînes sur le $(\mathcal{A},\mathcal{A})$-bimodule $\mathcal{A}^*$. Le bord b de Hochschild s'écrit donc

$$(b\varphi)(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varphi(a_0, \dots, a_k a_{k+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1}\varphi(a_{n+1}a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Pour $\varphi \in C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, on note $\varphi^\lambda = \lambda(\varphi) \in C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ la forme donnée par

$$\varphi^\lambda(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^n \varphi(a_1, \dots, a_n, a_0).$$

On note $C^n_\lambda(\mathcal{A})$ le sous-espace de $C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ formé par les formes *cycliques*, *i.e.* telles que $\varphi^\lambda = \varphi$. On vérifie facilement que $b\big(C^n_\lambda(\mathcal{A})\big) \subset C^{n+1}_\lambda(\mathcal{A})$. La cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$ est la cohomologie du complexe

$$\cdots \xrightarrow{b} C^n_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{b} C^{n+1}_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{b} \cdots$$

Soient $\varphi \in C^{2n}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ un cocycle cyclique et $e \in \mathcal{A}$ un idempotent. On peut vérifier que la quantité $\varphi(e, e, \dots, e)$ ne dépend que de la classe de φ dans la cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^{2n}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ et de celle de e dans la K-théorie de $\mathcal{A}$. On obtient ainsi un accouplement entre la cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$ et sa K-théorie.

La cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$ est aussi la cohomologie du bicomplexe suivant : $(C_{p,q}, b, B)_{p,q\in\mathbf{N};\ q\leqslant p}$ où l'on pose $C_{p,q} = C^{p-q}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ et $B : C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \to C^{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ est l'application $A \circ t \circ D$ où

$$D = \mathrm{id} - \lambda : C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \to C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*),\ A = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k : C^{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \to C^{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$$

et $(t\varphi)(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \varphi(1, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

Un n-cocycle C dans ce bicomplexe est donc une suite φ_{n-2j} pour $0 \leqslant j \leqslant [n/2]$, où pour tout j, $B\varphi_{n-2j} = -b\varphi_{n-2j-2}$. Si n est pair, l'accouplement de C avec un idempotent e est

$$\langle C|e\rangle = \sum_{j=0}^{n/2} (-1)^j \frac{(2j)!}{j!}\, \varphi_{2j}\big(e - \tfrac{1}{2}, e, \dots, e\big).$$

La *cohomologie cyclique périodique* $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est la cohomologie du bicomplexe $(C_{p,q}, b, B)_{p,q\in\mathbf{Z};\ q\leqslant p}$ qui est évidemment périodique de période 2. L'accouplement de $\mathrm{HC}^*(\mathcal{A})$ avec la $\mathcal{K}$-théorie de $\mathcal{A}$ se factorise par l'homomorphisme naturel $\mathrm{HC}^*(\mathcal{A}) \to \mathrm{HC}^*_{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$.

1.3. K-homologie ; cycles p-sommables (*cf.* [1, 6, 31, 10])

Le point de départ de la géométrie non commutative est la K-homologie décrite en termes d'opérateurs pseudodifférentiels abstraits par Atiyah [1] et développée ensuite par Brown-Douglas-Fillmore en termes d'extensions de C^*-algèbres ([6]) et surtout par Kasparov ([31]).

Rappelons que les cycles de la K-homologie d'une C^*-algèbre A sont donnés par un couple (π_+, π_-) de représentations de A dans des espaces de Hilbert (H_+, H_-) et un opérateur de Fredholm $T : H_+ \to H_-$ qui entrelace les représentations $\pi_\pm$ aux opérateurs compacts près, *i.e.* tel que, pour tout $a \in A$, on ait $\pi_-(a)T - T\pi_+(a) \in \mathcal{K}(H_+, H_-)$. Ce cycle $(H_\pm, \pi_\pm, T)$ définit un homomorphisme ψ de $K_0(A)$ dans $\mathbf{Z}$ de la façon suivante : si $e \in A$ est un idempotent, l'opérateur $T_e = \pi_-(e)T\pi_+(e)$ de $\pi_+(e)H$ dans $\pi_-(e)H$ est de Fredholm ; on pose $\psi([e]) = \mathrm{ind}(T_e)$. Si e est un idempotent de $M_n(A)$, on se ramène au cas précédent en remplaçant $H_\pm$ par $H_\pm^n$ muni de la représentation naturelle de $M_n(A)$.

On a souvent besoin de supposer que T est lui-même inversible, ce qui est possible quitte à changer $H_\pm$ par des espaces de dimension finie (et à renoncer à la condition $\pi_\pm(1) = 1$). À l'aide du calcul fonctionnel, on peut aussi se ramener au cas où T est unitaire (*i.e.* satisfait $T^{-1} = T^*$).

Il est commode d'adopter des notations $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-graduées : on considère l'espace $H = H_+ \oplus H_-$, la représentation $\pi : a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \pi_+(a) & 0 \\ 0 & \pi_-(a) \end{smallmatrix}\right)$ et l'opérateur $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & T \\ T^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dans ces notations, les cycles sont donc des triplets (H, π, F), où H est un espace hilbertien $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-gradué, $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ est une représentation telle que, pour tout $a \in A$, l'opérateur $\pi(a)$ est de degré 0 pour la graduation (*i.e.* préserve la graduation), $F \in \mathcal{L}(H)$ est de degré 1 pour la graduation, $F^2 = 1$ et, pour tout $a \in A$, on a $[\pi(a), F] \in \mathcal{K}(H)$. On identifie en général A avec son image par l'homomorphisme π.

Une première observation faite par Connes au début des années 1980 est que, pour un idempotent $e \in A$, si on suppose que $[F, e]$ soit dans une classe de Schatten $\mathcal{L}^p(H)$

(*i.e.* que l'opérateur $|[F,e]|^p$ soit à trace), on peut écrire l'indice de T_e comme une trace

$$\mathrm{ind}(T_e) = \mathrm{Tr}(\gamma e[F,e]^{2k}), \tag{1}$$

où γ est l'opérateur de graduation $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $k \in \mathbf{N}$ satisfait $2k \geqslant p$. Cette formule s'écrit aussi $\mathrm{ind}(T_e) = \varphi(e,e,e,\ldots,e)$, où φ est la forme $2k+1$ linéaire sur la sous-algèbre $\mathcal{A} = \{a \in A;\ [F,a] \in \mathcal{L}^p(H)\}$ de A donnée par $\varphi(a_0,a_1,\ldots,a_{2k}) = \mathrm{Tr}(\gamma a_0[F,a_1]\cdots[F,a_{2k}])$. Il est facile de voir que φ est un cocycle cyclique. C'est en analysant les propriétés de φ qui permettent de lui associer un homomorphisme de la K-théorie de $\mathcal{A}$ vers $\mathbf{C}$ que Connes a été conduit à construire la cohomologie cyclique.

En général, la sous-algèbre $\mathcal{A}$ est distincte de A. On dit que le cycle (H,F) est *p-sommable* si $\mathcal{A}$ est dense dans A. Dans ce cas, la K-théorie de $\mathcal{A}$ est égale à celle de A.

L'exemple commutatif de base d'un cycle p-sommable est le suivant :

– $A = C(M)$ est l'ensemble des fonctions continues sur une variété M compacte de classe C^∞.

– H est l'espace de Hilbert des sections L^2 d'un fibré et F est un opérateur pseudo-différentiel « classique » elliptique d'ordre 0.

Dans ce cas, pour $f \in C(M)$ de classe C^∞, le commutateur $[f,F]$ est pseudo-différentiel, d'ordre 0 et son symbole principal est nul : il est donc d'ordre -1. Or tout opérateur d'ordre $< -n$ (où n est la dimension de M) est à trace ; on en déduit que $[f,F] \in \mathcal{L}^p(H)$ pour tout $p > n$. Le cycle (H,F) est donc p-sommable.

Il n'est pas vrai que toute classe de K-homologie peut être représentée par un cycle p-sommable. La cohomologie cyclique entière de [12] permet de donner une formule de l'indice sous forme d'une série convergente pour des cycles plus généraux (voir aussi [29]).

2. FORMULE DE L'INDICE LOCALE (*cf.* [19])

Il peut être utile de donner une autre formule de l'indice que la formule (1) ci-dessus. Dans l'exemple d'un opérateur pseudodifférentiel, celle-ci comporte plusieurs inconvénients :

(1) Les opérateurs que l'on rencontre le plus naturellement en relation avec les problèmes d'indice (opérateur de signature, opérateur de Dirac, opérateur $\overline{\partial}$,...) sont des opérateurs différentiels d'ordre 1. On peut évidemment les rendre d'ordre 0 par calcul fonctionnel, mais ce passage ajoute des difficultés de calcul. De plus, si l'opérateur pseudodifférentiel obtenu est d'ordre 0, donc borné, il a l'inconvénient de ne plus être différentiel - et cela rend plusieurs calculs plus difficiles.

(2) Cette formule invoque la trace des opérateurs : le cocycle cyclique φ est donc sensible à un changement de F en F' avec $F - F'$ régularisant — alors que sa classe dans la cohomologie cyclique ne l'est pas. En d'autres termes, cette formule ne dépend pas que du symbole total de F : elle n'est pas locale.

C'est pour ces raisons que Connes et Moscovici ont donné une formule pour ce cocycle qui, bien que plus compliquée *a priori*, est locale. Celle-ci se place dans un cadre abstrait, modelé sur les opérateurs différentiels ou pseudodifférentiels sur une variété.

DÉFINITION 1 (*cf.* [14]). — *Un* triplet spectral *est un triplet* $(H, \mathcal{A}, D)$ *où*

– H *est un espace hilbertien* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*-gradué,*

– $\mathcal{A}$ *est une sous-algèbre involutive de l'algèbre* $\mathcal{L}(H)^{(0)}$ *des opérateurs continus de* H *dans* H *préservant la graduation,*

– D *est un opérateur auto-adjoint (non borné) injectif de degré* 1 *pour la graduation, tels que :*

(1) *l'algèbre* $\mathcal{A}$ *est contenue dans le domaine de la dérivation non bornée* $x \mapsto [D, x]$ *(définie sur une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(H)$*), ainsi que de tous les itérés de la dérivation non bornée* $x \mapsto [|D|, x]$ *;*

(2) *l'opérateur* $|D|^{-1}$ *appartient à une classe de Schatten ;*

(3) *pour tout* P *dans la plus petite sous-algèbre de* $\mathcal{L}(H)$ *contenant* $\mathcal{A}$*, les éléments de la forme* $[D, a]$ *avec* $a \in \mathcal{A}$*, l'opérateur de graduation* γ*, et stable par commutateur avec* $|D|$*, la fonction* $z \mapsto \mathrm{Tr}(P|D|^{-z})$ *admet un prolongement holomorphe en dehors d'un sous-ensemble* S *de* $\mathbf{C}$ *appelé* spectre de dimension *du triplet spectral (en général* S *est une partie discrète de* $\mathbf{C}$*).*

On dit de plus que le spectre de dimension est simple *si tous les pôles apparaissant dans ces formules sont simples.*

La condition 1 ci-dessus dit que :

– tout $a \in \mathcal{A}$ laisse le domaine de D invariant et l'application $x \mapsto Dax - aDx$, définie pour $x \in H$ dans le domaine de D, se prolonge par continuité sur tout H ;

– pour tout $a \in \mathcal{A}$, l'application $t \mapsto e^{it|D|}ae^{-it|D|}$ est de classe C^∞ (en norme) de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{L}(H)$.

Si $\mathcal{A}$ n'est pas unifère, on remplace la condition (2) par la condition :

(2′) *il existe* $p \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que, pour tout* $a \in \mathcal{A}$*, l'opérateur* $a|D|^{-p}$ *soit à trace.*

Les conditions ci-dessus sont exactement modelées sur celles satisfaites par un opérateur (pseudo) différentiel elliptique d'ordre 1 sur une variété compacte. Elles sont aussi satisfaites dans des cadres plus singuliers, comme les opérateurs de Fuchs sur les variétés avec singularités coniques (*cf.* [5, 35, 36]).

Soit $(H, \mathcal{A}, D)$ un triplet spectral. On peut définir les espaces de Sobolev pour D (pour $s \geqslant 0$, H^s est le domaine de $|D|^s$; pour $s \leqslant 0$, H^s est le complété de H pour la

norme $x \mapsto \|x\|_s = \|(|D|^s x)\|$). Notons H^∞ le domaine C^∞ de D, c'est-à-dire l'intersection de tous les espaces de Sobolev et $H^{-\infty}$ la réunion de tous les H^s. Remarquons que, par la condition 1, tout élément de $\mathcal{A}$ préserve chaque H^s. Enfin, notons $\mathcal{P}$ l'algèbre des « opérateurs pseudodifférentiels », c'est-à-dire l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}, D$ et $|D|^{-1}$. Elle opère naturellement sur $H^{-\infty}$ et laisse H^∞ invariant.

Pour $a \in \mathcal{P}$ on pose $\delta(a) = [D^2, a]$ et, pour $i \in \mathbf{N}$, on note $a^{(i)} = \delta^i(a)$.

Pour $P \in \mathcal{P}$, notons $⨍ P$ le résidu en 0 de la fonction méromorphe qui, pour $\operatorname{Re} s$ assez grand, vaut $\operatorname{Tr}(\gamma P|D|^{-s})$.

THÉORÈME 1. — *Soit $(H, \mathcal{A}, D)$ un triplet spectral. On suppose que le spectre de dimension est discret et simple.*

a) *Pour $a \in \mathcal{A}$, notons $\varphi_0(a)$ le résidu en 0 de la fonction $z \mapsto z^{-1}\operatorname{Tr}(\gamma a|D|^{-z})$. Pour $n \in \mathbf{N}$ non nul, posons*

$$\varphi_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} c_{n,k} ⨍ a_0 [D, a_1]^{(k_1)} \cdots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$$

où on a posé $|k| = \sum_j k_j$ et

$$c_{n,k} = \frac{(-1)^{|k|}\, 2\, \Gamma\Big(|k| + \frac{n}{2}\Big)}{k!\,(k_1+1)(k_1+k_2+2)\cdots(k_1+\cdots+k_n+n)}.$$

La famille $\varphi = (\varphi_{2p})_{p \in \mathbf{N}}$ est un cocycle dans le bicomplexe (b, B).

Notons $F = D|D|^{-1}$ la phase de D.

b) *La classe de φ dans le bicomplexe (b, B) coïncide avec celle du cocycle cyclique $(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto \operatorname{Tr}(\gamma a_0 [F, a_1] \cdots [F, a_n])$.*

Quelques commentaires sur cette formule :

– Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathbf{N}^n$, l'opérateur $a_0 [D, a_1]^{(k_1)} \cdots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-|k|}$ est borné. Donc si $n + |k| \geqslant p$, l'opérateur $a_0 [D, a_1]^{(k_1)} \cdots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$ est à trace, donc le résidu $⨍ a_0 [D, a_1]^{(k_1)} \cdots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$ est nul. La formule d'indice comporte donc un nombre fini de termes.

– On a supposé que D est exactement inversible. Dans la pratique, il arrive que l'opérateur dont on part ne soit pas exactement inversible, mais possède un noyau de dimension finie. Dans ce cas, on interprète $|D|^{-s}$ comme étant nul sur le noyau de D. Avec cette convention, tous les termes de la formule restent inchangés - il faut juste ajouter à la forme φ_0 un terme $a \mapsto \operatorname{Tr}(\gamma a p)$ où p est le projecteur sur $\ker D$.

– Dans tous les exemples naturels construits jusqu'ici, le spectre de dimension est simple. On peut généraliser cette formule au cas où le spectre de dimension n'est pas simple : on doit juste réinterpréter les termes en changeant

$$\Gamma\Big(|k| + \frac{n}{2}\Big) ⨍ a_0 [D, a_1]^{(k_1)} \cdots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$$

en le résidu en $s = |k| + \frac{n}{2}$ de la fonction

$$z \mapsto \Gamma(z)\ \mathrm{Tr}\Big(\gamma a_0 [D, a_1]^{(k_1)} \cdots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-2z}\Big)$$

ce qui donne une somme de termes faisant apparaître des dérivées de la fonction Γ, donc des valeurs de la fonction ζ. On aurait pu espérer utiliser ces formules et l'intégralité de l'indice pour obtenir des équations algébriques invoquant $\zeta(2k+1)$. Cependant on peut utiliser un procédé de « renormalisation » et remplacer, sans changer la classe de cohomologie, tous ces termes par des termes rationnels (*cf.* [19]).

3. L'OPÉRATEUR DE SIGNATURE DIFF-INVARIANT (*cf.* [19])

Soit (V, F) une variété feuilletée. Le fibré transverse n'a pas toujours de structure hermitienne invariante par holonomie : en général il n'existe donc pas d'opérateur pseudodifférentiel transversalement elliptique d'ordre $\neq 0$ dont le symbole principal soit invariant par holonomie. Une façon équivalente de poser le problème, en se plaçant sur une transversale M du feuilletage, est de construire un opérateur elliptique invariant par un (pseudo-)groupe de difféomorphismes Γ de M. Un tel opérateur n'existe pas en général : le groupe des difféomorphismes qui fixent le symbole principal d'un tel opérateur doit fixer une métrique.

La solution de ce problème s'obtient par l'introduction du fibré des métriques sur le fibré tangent à M. Cette idée qui vient de [11] où elle a servi à construire des cocycles cycliques « prolongeables à la C^*-algèbre du feuilletage », a été utilisée aussi dans [28] pour construire des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 presque invariants.

Soit M une variété compacte orientée de dimension n. Notons R l'espace total du fibré des repères positifs de M. Le groupe $GL^+(n)$ opère naturellement sur R et l'on a $M = R/GL^+(n)$. Notons $P = R/SO(n)$ l'espace des métriques sur M.

Soit Γ un groupe de difféomorphismes de M, préservant l'orientation ; il opère naturellement sur R et sur P. Cette action préserve la fibration $p : P \to M$; le fibré tangent TP de P contient donc un sous-fibré « vertical » L invariant par Γ. De plus, le fibré L et le quotient TP/L possèdent tous deux des métriques Γ-invariantes : la métrique de L provient d'une métrique $GL^+(n)$-invariante sur $GL^+(n)/SO(n)$; le fibré TP/L est isomorphe à $p^*(TM)$; un point de P *est* une métrique sur ce fibré.

3.1. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et l'algèbre $\mathcal{A}$

Dans l'opérateur de signature sur P que nous allons construire, nous distinguerons les directions verticale (le long des fibres de la fibration $P \to M$) et horizontale (transverse à cette fibration). Cet opérateur ne va pas agir sur le fibré $\Lambda(T^*P)$ des formes sur P, mais plutôt sur le produit tensoriel $p^*(\Lambda(T^*M)) \otimes \Lambda L^*$ de l'espace des formes sur M avec l'algèbre extérieure sur le fibré dual de L. Notons que ce fibré est hermitien, contrairement au fibré $\Lambda(T^*P)$.

Les fibrés $p^*(\Lambda(T^*M))$ et ΛL^* admettent des opérateurs de graduation γ_H et γ_V donnés, comme pour l'opérateur de signature classique, par une opération $*$ définie (à une phase près) par l'égalité $\langle *\omega, \omega'\rangle v = \omega \wedge \omega'$ pour des formes réelles ω, ω' où v est la forme volume de norme 1 positive (on utilise l'orientation de ces fibrés).

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est l'espace des sections L^2 de ce fibré, relativement à la mesure Γ-invariante sur P donnée par la forme volume $v_V \otimes v_H$. L'opérateur de graduation de notre fibré, et donc de $\mathcal{H}$, est $\gamma = \gamma_H \otimes \gamma_V$.

L'algèbre $\mathcal{A}$ est le produit croisé $C_c^\infty(P) \rtimes \Gamma$: elle est engendrée par les opérateurs de la forme fU_g, où

– $f \in C_c^\infty(P)$ est une fonction C^∞ à support compact sur l'espace total P vue comme opérateur de multiplication sur $\mathcal{H}$;

– $g \in \Gamma$ et $g \mapsto U_g$ est la représentation unitaire naturelle de Γ dans $\mathcal{H}$ donnée par une formule

$$(U_g\omega)(x) = g \cdot \omega(g^{-1}x) \qquad (x \in P).$$

La principale formule algébrique que satisfont ces opérateurs est $U_g f = (g \cdot f)U_g$, où $g.f : x \mapsto f(g^{-1}(x))$.

3.2. Partie verticale de l'opérateur de signature

En un point x de M on considère l'opérateur de signature $d_V + d_V^*$ sur la variété $P_x = p^{-1}(x)$, à coefficients dans le fibré trivial $E = \Lambda(T_x^*M)$. L'opérateur ainsi obtenu est différentiel, d'ordre 1 et Γ-invariant.

Notons que le fibré E est trivial mais que sa structure hermitienne n'est pas constante ; donc l'opérateur $d_V^* + \gamma d_V \gamma$ n'est pas nul, mais est d'ordre 0. En ce sens, l'opérateur $d_V + d_V^*$ anticommute avec γ et est donc de degré 1 pour la graduation.

Pour une raison qui va apparaître ci-dessous, on a aussi besoin de considérer un opérateur de signature vertical d'ordre 2 : on prend $Q_V = d_V^* d_V - d_V d_V^*$, qui anticommute aussi avec γ et dont le symbole principal définit la même classe de K-théorie que celui de $d_V + d_V^*$.

3.3. Partie horizontale de l'opérateur de signature

Cet opérateur s'écrit $Q_H = d_H + d_H^*$. Cependant, pour le construire, on doit choisir une connexion, c'est-à-dire une section $s : TP/L \to TP$. À l'aide de celle-ci, on a un isomorphisme $T^*P \simeq L^* \oplus p^*(T^*M)$, donc un isomorphisme

$$\Lambda(T^*P) \simeq p^*(\Lambda(T^*M)) \otimes \Lambda L^*$$

dont on se sert pour construire d_H. Notons que l'action de Γ ne laisse pas la section s invariante. On en déduit que d_H n'est pas Γ-invariant. Cependant, le symbole *horizontal* de d_H, c'est-à-dire la restriction de son symbole principal à $p^*(\Lambda(T^*M)) \subset T^*P$ est invariant. En effet, le symbole principal de d_H en un point $(y, \xi) \in T^*P$ ($y \in P$, $\xi \in T_y^*P$) est

$$\omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto ({}^t(s \circ p)(\xi) \wedge \omega_1) \otimes \omega_2$$

pour $\omega_1 \in \Lambda(T^*_{p(y)}M)$ et $\omega_2 \in \Lambda(L_y^*)$.

3.4. Le triplet spectral

On pose $Q = Q_V + Q_H = (d_V^* d_V - d_V d_V^*) + \gamma_V(d_H + d_H^*)$. On démontre que cet opérateur est autoadjoint (ceci n'est pas si facile car Q n'est pas ellipique et P n'est pas compacte).

Pour $f \in C_c^\infty(P)$, l'opérateur $[f, Q_H]$ est différentiel d'ordre 0 : il est donc borné. L'opérateur $[f, Q_V]$ est différentiel d'ordre 1 mais son symbole horizontal est nul. C'est donc un opérateur « longitudinal » le long de la fibration $P \to M$.

L'opérateur Q_V est Γ-invariant, donc, pour $g \in \Gamma$, on a $[U_g, Q_V] = 0$. L'opérateur $[U_g, Q_H]U_g^{-1}$ est différentiel d'ordre 1 et son symbole horizontal est nul.

Comme Q_V est longitudinalement elliptique d'ordre 2, les opérateurs différentiels longitudinaux d'ordre 1 (à support compact) sont dominés par $|Q_V|^{1/2}$, donc par $|Q|^{1/2}$.

À l'aide du calcul fonctionnel, on définit un opérateur D tel que $Q = D|D|$. D'après les considérations qui précèdent, et en utilisant l'égalité

$$D = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} Q(Q^2 + \mu)^{-1} \mu^{-1/4} d\mu$$

on vérifie que, pour tout $h \in \mathcal{A}$, le commutateur $[h, D]$ est borné.

THÉORÈME 2 (*cf.* [19]). — *Le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est un triplet spectral.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise de façon cruciale le calcul pseudodifférentiel des variétés de Heisenberg (qui sont des variétés munies d'un sous-fibré du fibré tangent, *cf.* [5]). Le sous-fibré qui nous intéresse ici est le fibré (intégrable) tangent aux fibres de la fibration p. Notons que l'on rencontre ici plusieurs difficultés liées à la non compacité de P.

Signalons que l'on peut démontrer (à l'aide de [5]) que les opérateurs hypoelliptiques « naturels » sur une variété de Heisenberg non nécessairement intégrable donnent aussi des triplets spectraux (*cf.* [38]).

4. L'ALGÈBRE DE HOPF « TRANSVERSE » (*cf.* [20, 21])

Soient M une variété et Γ un groupe de difféomorphismes de M. Nous avons à présent à notre disposition un opérateur de signature D agissant sur l'espace total du fibré P des métriques de M. On en déduit une formule de l'indice locale. Le problème est que cette formule comporte un nombre colossal de termes : dans le cas où M est de dimension 1, l'espace P est de dimension 2 et l'ordre de sommabilité de D est 3 (*i.e.* $f|D|^{-z}$ est à trace pour $f \in C_c^\infty(P)$ si $\operatorname{Re} z > 3$) ; cette formule donne lieu à un calcul gigantesque, où il faut traiter un millier de termes. Si le traitement de chacun d'entre eux est relativement aisé, il est absolument impossible d'écrire une démonstration acceptable à l'aide de ces formules pour $n \geqslant 2$!

Pour cela, Connes et Moscovici construisent une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$, ne dépendant que de la dimension n de M, qui va tenir le rôle du groupe de symétries en permettant d'éliminer dès le début plusieurs termes inutiles. Comme de plus l'opérateur de signature transverse provient en un sens de l'action de $\mathcal{H}_n$, le cocycle cyclique donné par la formule d'indice locale associée à cet opérateur provient d'un cocycle d'une cohomologie cyclique d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_n$ à l'aide d'une application « classifiante »

$$\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^*(\mathcal{A})$$

associée à l'action de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{A}$.

La cohomologie cyclique de $\mathcal{H}_n$ se calcule à l'aide d'un théorème de type van Est : c'est la cohomologie de Gel'fand-Fuchs $H^*(WO(n))$.

Une algèbre de Hopf exactement du même type que l'algèbre $\mathcal{H}_1$ de Connes-Moscovici a été construite par Kreimer ([33]) puis améliorée par Connes-Kreimer ([16, 17, 18]).

La construction de cette algèbre de Hopf est analogue à une construction d'algèbres de Hopf qui remonte aux travaux de G.I. Kac : celle de « couple assorti » (matched pair) de groupes que nous rappelons maintenant.

4.1. Couples assortis de groupes (*cf.* [30])

Soit G un groupe (fini) et G_1, G_2 deux sous-groupes tels que l'application $(x, y) \mapsto xy$ soit une bijection de $G_1 \times G_2$ sur G. On peut alors construire une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ de la façon suivante.

– En identifiant G_2 à $G_1\backslash G$ et G_1 à G/G_2, on a des actions naturelles de G sur G_2 (à droite) et sur G_1 (à gauche).

– En tant qu'algèbre, $\mathcal{H}$ est isomorphe au produit croisé $C(G_1) \rtimes G_2$ de l'algèbre (pour le produit ponctuel) des fonctions sur G_1 par l'action de G_2.

– L'algèbre duale de la structure de cogèbre sur $\mathcal{H}$ est le produit croisé $\widehat{\mathcal{H}} = C(G_2) \rtimes G_1$. La dualité entre ces deux algèbres s'écrit

$$\langle \varphi U_s | U_g f \rangle = f(s)\varphi(g)$$

pour $s \in G_1$, $g \in G_2$, $f \in C(G_1)$ et $\varphi \in C(G_2)$.

– Le coproduit $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$ s'écrit de la manière suivante : pour $f \in C(G_1)$, $\Delta(f) \in C(G_1 \times G_1) = C(G_1) \otimes C(G_1) \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est la fonction $(s, t) \mapsto f(st)$; la formule de $\Delta(U_g)$, pour $g \in G_2$, est un peu plus compliquée : elle s'écrit

$$\Delta(U_g) = \sum_{s \in G_1} U_g \delta_s \otimes U_{p(gs)},$$

où $\delta_s \in C(G_1)$ est la fonction caractéristique de s et pour $x \in G$, on a noté $p(x) \in G_2$ l'unique élément tel que $xp(x)^{-1} \in G_1$.

– L'antipode $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est l'antihomomorphisme donné pour $s \in G_1$ et $g \in G_2$ par $S(\delta_s U_g) = U_{p(gs)} \delta_{s^{-1}}$.

Remarques. — (1) On peut aussi tordre l'exemple de « groupe quantique » ainsi construit ci-dessus par un cocycle.

(2) Cet exemple a été étudié par plusieurs auteurs, et généralisé au cas où G est un groupe localement compact et G_1, G_2 sont des sous-groupes fermés tels que l'application $(s,g) \mapsto sg$ soit un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur G, voire sur une partie ouverte et dense de G (*cf.* [41], [37], [2], [3], [43]).

Remarquons que la formule du coproduit de $\mathcal{H}$ s'étend à l'algèbre $\mathcal{R} = C(G_1) \rtimes G \supset \mathcal{H}$: on définit $\Delta_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \mathcal{R} \otimes \mathcal{H}$ en posant, pour $f \in C(G_1)$, $\Delta_{\mathcal{R}}(f) = \Delta(f) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \subset \mathcal{R} \otimes \mathcal{H}$ et, pour $g \in G$,

$$\Delta_{\mathcal{R}}(U_g) = \sum_{s \in G_1} U_g \delta_s \otimes U_{p(gs)}.$$

L'application ainsi étendue est encore un homomorphisme d'algèbres et vérifie encore la propriété d'associativité $(\Delta_{\mathcal{R}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\mathcal{R}} = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta_{\mathcal{R}}$: c'est une coaction de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ sur l'algèbre $\mathcal{R}$. Remarquons que l'on peut ici remplacer $\mathcal{R}$ par l'algèbre $C(G_1) \rtimes \Gamma$ pour tout sous-groupe Γ de G.

Une façon équivalente de voir la coaction de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$ est au travers de l'algèbre de Hopf duale $\widehat{\mathcal{H}} = C(G_2) \rtimes G_1$: pour $\alpha \in \widehat{\mathcal{H}}$ et $x \in \mathcal{R}$ on pose $\alpha \cdot x = (\mathrm{id} \otimes \alpha)\Delta_{\mathcal{R}}(x) (\in \mathcal{R})$. Puisque le produit de $\mathcal{H}'$ est dual au coproduit de $\mathcal{H}$, la propriété de co-associativité de $\Delta_{\mathcal{R}}$ donne la propriété d'action $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (pour $\alpha, \beta \in \widehat{\mathcal{H}}$ et $x \in \mathcal{R}$). Puisque le coproduit Δ' de $\mathcal{H}'$ est dual au produit de $\mathcal{H}$, le fait que $\Delta_{\mathcal{R}}$ est un homomorphisme se traduit par la formule

$$m\big(\Delta'(\alpha) \cdot (x \otimes y)\big) = \alpha \cdot (xy) \tag{2}$$

(pour $\alpha \in \widehat{\mathcal{H}}$ et $x, y \in \mathcal{R}$ - on a noté $m : \mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ la multiplication de $\mathcal{R}$).

Sur les générateurs de $\widehat{\mathcal{H}}$ on obtient les formules suivantes :

$$(U_s \varphi) \cdot (U_g f) = U_g \varphi\big(p(gs)\big) f^s \tag{3}$$

pour $s \in G_1$, $g \in G$, $f \in C(G_1)$ et $\varphi \in C(G_2)$, où l'on a noté f^s l'application $t \mapsto f(ts)$.

4.2. L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ (*cf.* [20])

L'exemple des couples assortis va surtout servir de guide pour tout ce qui concerne l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$. Ici, le groupe G est le groupe de tous les difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ préservant l'orientation ; le sous-groupe G_1 sera le groupe $\mathbf{R}^n \rtimes GL^+(n)$ des difféomorphismes affines ; le sous-groupe G_2 sera le groupe des difféomorphismes f de $\mathbf{R}^n$ tels que $f(0) = 0$ et $df_0 = \mathrm{id}$. Remarquons que G/G_2 est l'espace des repères sur $\mathbf{R}^n$.

L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ peut être considérée comme une sorte de produit croisé de l'algèbre des fonctions sur G_2, polynomiales en les jets d'ordre fini d'un difféomorphisme, par l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G_1. On va en fait la voir par son action sur l'algèbre $\mathcal{R} = C_c^\infty(G_1) \rtimes G$, en s'aidant des formules (2) et (3) pour

comprendre l'action et définir le coproduit de $\mathcal{H}_n$. Notons que l'algèbre de Hopf avait dans un premier temps été construite « à la main » au moyen de son action sur $\mathcal{R}$. Le lien avec les couples assortis de groupes clarifie plusieurs calculs.

L'action de $GL^+(n)$ commute avec celle de G : on en déduit que, si Y est un élément de l'algèbre de Lie de $GL^+(n)$, on a $\Delta(Y) = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y$. Soit X_i un générateur de l'algèbre de Lie de $\mathbf{R}^n$. Faisant agir X_i sur un produit fU_g, on trouve $X_i(fU_g) = X_i(U_g(f^g)) = U_g(X_i(f^g)) = (X_i(f^g))^{g^{-1}}U_g$. En comparant avec $X_i(f)U_g$, on voit que le coproduit de X_i va s'écrire sous la forme $\Delta(X_i) = X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i + \sum Y_{j,k} \otimes \delta_{i,j,k}$ où $\delta_{i,j,k}$ est une fonction sur G_2. Le coproduit de ces éléments donne $\Delta(\delta_{i,j,k}) = \delta_{i,j,k} \otimes 1 + 1 \otimes \delta_{i,j,k}$.

À partir des X_i, des $Y_{i,j}$ et des $\delta_{i,j,k}$ on peut engendrer toute l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$. En particulier, on construit de nouveaux éléments

$$\delta_{I,\alpha} = \Big[X_{i_1}, \big[X_{i_2}, \dots [X_{i_k}, \delta_\alpha] \dots \big]\Big], \qquad I = (k, i_1, \dots, i_k), \quad \alpha \in \{1, \dots, n\}^3.$$

Ces éléments agissent par multiplication sur $\mathcal{R}$ et forment l'algèbre commutative des fonctions sur G_2.

L'algèbre $\mathcal{H}_n$ est l'espace vectoriel engendré par les produits xy où x est un élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G_1 et y est un élément de l'algèbre des polynômes en les variables $\delta_{I,\alpha}$. Le coproduit de $\mathcal{H}_n$ se définit inductivement sur les générateurs. La co-unité ε est l'unique caractère nul sur les X_i, les $Y_{i,j}$ et les δ_α. L'antipode est l'unique antiautomorphisme S de $\mathcal{H}_n$ tel que $S(Y_{i,j}) = -Y_{i,j}$, $S(\delta_\alpha) = -\delta_\alpha$ et $S(X_i) = -X_i + \sum_{j,k} \delta_{i,j,k} Y_{j,k}$.

4.3. Cohomologie cyclique d'algèbre de Hopf (*cf.* [21, 22])

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf (au sens de [40]). Notons Δ son coproduit, $\varepsilon : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ sa co-unité et $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ son antipode. En général, on n'a pas $S^2 = \mathrm{id}$. On est donc amené à se donner une *paire modulaire* $(F, \widehat{F})$, où $F \in \mathcal{H}$ est un élément de type « group like », *i.e.* tel que $\Delta(F) = F \otimes F$ et $\widehat{F} : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ est un caractère, *i.e.* un homomorphisme d'algèbres. On pose $\widetilde{S} = (\widehat{F} \otimes S) \circ \Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. On suppose de plus que $\widehat{F}(F) = 1$ et, pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$\widetilde{S}^2(h) = FhF^{-1}. \tag{4}$$

On a alors les formules

$$\Delta \circ \widetilde{S} = (S \otimes \widetilde{S}) \circ \sigma \circ \Delta,$$

où $\sigma : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est l'application $x \otimes y \mapsto y \otimes x$,

$$\varepsilon \circ \widetilde{S} = \widehat{F} \quad \text{et} \quad \widehat{F} \circ \widetilde{S} = \varepsilon.$$

Remarque. — Une telle paire modulaire est naturellement construite dans le contexte des groupes quantiques localement compacts de [34] : dans ce cadre F et $\widehat{F}$ représentent respectivement la dérivée de Radon-Nykodym de la mesure de Haar à droite par rapport à la mesure de Haar à gauche pour $\mathcal{H}$ et son dual $\widehat{\mathcal{H}}$. Il arrive cependant dans ce cadre que $\widehat{F}(F) \neq 1$. Quelques modifications mineures sont alors nécessaires dans ce qui suit. On peut en fait toujours se ramener au cas $\widehat{F}(F) = 1$ à l'aide d'une construction de « carré modulaire ». Cependant, la paire modulaire de tout couple assorti de groupes satisfait la propriété $\widehat{F}(F) = 1$ (*cf.* [3, 43]).

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf munie de la paire modulaire $(F, \widehat{F})$. On peut naturellement lui associer une cohomologie cyclique donnée par un bicomplexe $(C_{p,q}, b, B)$ défini comme suit.

– Pour $p \geqslant q \geqslant 0$, on pose $C_{p,q} = \mathcal{H}^{\otimes p-q}$.

– On définit, pour $k \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant k+1$, des applications $b_j : \mathcal{H}^{\otimes k} \to \mathcal{H}^{\otimes k+1}$ en posant $b_0(h) = 1 \otimes h$, $b_{k+1}(h) = h \otimes F$ et, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, $b_j = \mathrm{id}_{\mathcal{H}^{\otimes j-1}} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}^{\otimes k-j}}$. On pose enfin $b = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j b_j$.

– On utilise aussi l'application $\Delta^j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\otimes j+1}$ définie par $\Delta^1 = \Delta$, $\Delta^2 = (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \circ \Delta) \circ \Delta$ (par coassociativité) et $\Delta^{j+1} = (\Delta^j \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \circ \Delta^j) \circ \Delta$.

– L'opération de permutation cyclique $\lambda : \mathcal{H}^{\otimes k} \to \mathcal{H}^{\otimes k}$ est définie par

$$\lambda(h_1 \otimes \cdots \otimes h_k) = (-1)^k \big(\Delta^{k-1} \circ \widetilde{S}(h_1)\big)\big(h_2 \otimes \cdots \otimes h_k \otimes F\big).$$

À l'aide de la formule (4), on démontre que λ^{k+1} est l'identité.

– L'application $B : \mathcal{H}^{\otimes k+1} \to \mathcal{H}^{\otimes k}$ est l'application $A \circ u \circ D$ où

$$D = \mathrm{id} - \lambda : \mathcal{H}^{\otimes k+1} \to \mathcal{H}^{\otimes k+1}, \ A = \sum_{j=0}^{k} \lambda^j : \mathcal{H}^{\otimes k} \to \mathcal{H}^{\otimes k}$$

et $u(h_1 \otimes \cdots \otimes h_{k+1}) = \big(\Delta^{k-1} \circ \widetilde{S}(h_1)\big)\big(h_2 \otimes \cdots \otimes h_{k+1}\big)$.

Définition 2 (*cf.* [21, 22] – *cf.* aussi [24]). — *La cohomologie cyclique d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}$ est la cohomologie $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H})$ du bicomplexe (b, B) défini ci-dessus.*

4.4. L'application classifiante

Les formules de b et B pour la cohomologie d'algèbre de Hopf sont exactement construites pour pouvoir définir une application classifiante. Soit donc $\mathcal{R}$ une algèbre munie d'une action de $\mathcal{H}$. On suppose donnée une *F-trace* sur $\mathcal{R}$, c'est-à-dire une application $\tau : \mathcal{R} \to \mathbf{C}$ satisfaisant $\tau(xy) = \tau\big(y(F \cdot x)\big)$ pour $x, y \in \mathcal{R}$. On dira de plus que τ est *$\widehat{F}$-invariante* si on a $\tau(h \cdot x) = \widehat{F}(h)\tau(x)$ pour $x \in \mathcal{R}$ et $h \in \mathcal{H}$. Une formulation équivalente de la $\widehat{F}$-invariance est $\tau\big((h \cdot x)y\big) = \tau\big(x(\widetilde{S}(h) \cdot y)\big)$ pour $x, y \in \mathcal{R}$ et $h \in \mathcal{H}$.

Soit τ une F-trace, $\widehat{F}$-invariante. Par construction, l'application qui à $H = h_1 \otimes \cdots \otimes h_k \in \mathcal{H}^{\otimes k}$ associe la forme $\varphi_H : (a_0, \ldots, a_k) \mapsto \tau\big(a_0(h_1 \cdot a_1) \cdots (h_k \cdot a_k)\big)$ est un morphisme de bicomplexes. On en déduit donc un homomorphisme

$$\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}) \to \mathrm{HC}^*(\mathcal{R})$$

appelé *application classifiante.*

4.5. Cohomologie cyclique de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ (*cf.* [20])

Dans le cas d'un biproduit croisé (de groupes localement compacts), la paire modulaire $(F, \widehat{F})$ est décrite en termes des modules δ_1, δ_2 et δ des groupes G_1, G_2 et G (*cf.* [3, 43]). Ce sont des éléments respectivement de $C(G_1) \subset \mathcal{H}$ et $C(G_2) \subset \widehat{\mathcal{H}}$ donnés par $F(s) = \delta_1(s)\delta(s)^{-1/2}$ et $\widehat{F}(g) = \delta_2(g)\delta(g)^{-1/2}$.

Dans le cas de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ (qui est l'algèbre $\widehat{\mathcal{H}}$ du couple assorti G_1, G_2 décrit ci-dessus), le groupe G_2 est « nilpotent » et le groupe G est simple, et donc les fonctions δ_2 et δ sont égales à 1. Il s'ensuit que $F = 1$ et $\widehat{F}$ est donné par le module de G_1. On trouve donc $\widehat{F}(X_i) = \widehat{F}(\delta_\alpha) = 0$ et $\widehat{F}(Y_{i,j}) = \mathrm{Tr}(Y_{i,j}) = \delta^j_i$.

Un théorème de type Van Est permet de calculer la cohomologie cyclique périodique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{per,Hopf}}(\mathcal{H}_n)$ d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_n$: c'est la cohomologie de Gel'fand-Fuchs de l'algèbre de Lie de dimension infinie $\mathfrak{g}$ de G.

THÉORÈME 3 (*cf.* [20]). — *Pour $j = 0, 1$, on a un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme*

$$\bigoplus_{i \in \mathbf{N}} H^{j+2i}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per,Hopf}}(\mathcal{H}_n).$$

Dans le cas de l'action de l'algèbre $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{R} = C^\infty_c(G_1) \rtimes G$, la forme linéaire définie par $f \mapsto \int_{G_1} f(s)\, ds$ et $fU_g \mapsto 0$ si $g \neq \mathrm{id}$ est une trace $\widehat{F}$-invariante. On en déduit des homomorphismes

$$\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^*(\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} H^{j+2i}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per,Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per}}(\mathcal{R}).$$

Cependant, l'algèbre qui nous intéresse n'est pas $\mathcal{R}$ mais plutôt $\mathcal{A}_n = C^\infty_c(P_n) \rtimes G$ où $P_n = G_1/SO(n)$ est l'espace des métriques. L'algèbre $\mathcal{A}_n$ est l'algèbre des points fixes de $\mathcal{R}$ sous l'action du groupe $SO(n)$. On utilise ici une application classifiante relative

$$\bigoplus_{i \in \mathbf{N}} H^{j+2i}(\mathfrak{g}; SO(n)) \simeq \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per,Hopf}}(\mathcal{H}_n; SO(n)) \to \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per}}(\mathcal{A}_n).$$

La cohomologie $H^k(\mathfrak{g}; SO(n))$ est la cohomologie de Gel'fand-Fuchs $H^*(WSO(n))$ (*cf.* [25, 26]). Elle est engendrée par des classes de Pontrjagyn et des classes secondaires.

Revenons enfin à la situation qui nous intéressait au départ : soit M une variété et Γ un pseudogroupe de difféomorphismes de M préservant une orientation. Notons

$P = P_M$ l'espace total du fibré des métriques de M. On peut remplacer M par un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M et le pseudogroupe Γ par un pseudogroupe Γ' de difféomorphismes locaux de $\Omega = \coprod_{i\in I} U_i$. L'algèbre obtenue $C_c^\infty(P_\Omega) \rtimes \Gamma'$ est équivalente à $C_c^\infty(P_M) \rtimes \Gamma$ au sens de Morita, de sorte que ces deux algèbres ont même cohomologie cyclique. Puisque Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on obtient l'homomorphisme classifiant voulu :

$$\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^{j+2i}(\mathfrak{g}; SO(n)) \to \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per}}(C_c^\infty(P_M) \rtimes \Gamma).$$

4.6. Le cocycle cyclique Φ (*cf.* [20])

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un cocycle cyclique Φ dans la cohomologie $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n; SO(n))$ dont l'image par l'application classifiante sera la cocycle cyclique φ de la formule d'indice locale associée à l'opérateur de signature transverse D. Pour cela on utilise les observations suivantes :

(1) On peut remplacer dans cette formule l'opérateur D (qui est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 dans le calcul pseudodifférentiel des variétés de Heisenberg) par l'opérateur différentiel $Q = D|D|$ d'ordre 2. La classe de cohomologie cyclique ne changera pas.

(2) L'opérateur Q provient de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ de l'algèbre de Lie de $G_1 = \mathbf{R}^n \rtimes GL^+(n)$, qui est incluse dans $\mathcal{H}_n$. C'est d'ailleurs grâce à cette observation que l'on démontre aisément que Q est autoadjoint. Le cocycle φ s'écrit donc comme combinaison de termes

$$(a_0, \dots, a_k) \mapsto \fint a_0 R_1 a_1 \cdots R_k a_k T,$$

où $R_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ et T est un opérateur pseudodifférentiel dans le calcul pseudodifférentiel de Heisenberg.

(3) En faisant commuter successivement les champs de vecteurs apparaissant dans les R_j avec des éléments de $\mathcal{A}$, on se ramène à des termes de la forme

$$(a_0, \dots, a_k) \mapsto \fint a_0 (h_1 \cdot a_1) \cdots (h_k \cdot a_k) T,$$

où T est un opérateur pseudodifférentiel dans le calcul de Heisenberg.

(4) On suppose que le (pseudo-)groupe Γ agit librement dans les repères de $\mathbf{R}^n$. On en déduit l'annulation de tous les termes $\fint (f_k U_{g_0}) \big(h_1 \cdot (f_1 U_{g_1}) \cdots (h_k \cdot (f_k U_{g_k}))T$ tels que $g_0 g_1 \cdots g_k \neq 1$.

(5) Si $f \in C_c^\infty(P)$, le résidu de Wodzicki généralisé $\fint fT$ s'écrit $\int_P f\alpha$ où α est une forme volume sur P obtenue en intégrant le symbole d'ordre $-n(n+3)/2$ de T (dans le calcul de Heisenberg ; $n(n+3)/2$ est la dimension critique) sur la « sphère ». De plus, l'opérateur Q étant invariant par l'action de G_1, l'opérateur T dans l'étape 3

est aussi invariant par l'action de G_1, donc α est la forme volume. Cela montre que φ peut s'exprimer comme somme de termes

$$(a_0, \dots, a_k) \mapsto \tau(a_0, \dots, a_k) \mapsto \tau\big(a_0(h_1 \cdot a_1) \cdots (h_k \cdot a_k)\big).$$

(6) Ce qui précède montre que φ est l'image d'un élément Φ par l'homomorphisme classifiant de bicomplexes

$$\chi : \bigoplus_k \mathcal{H}_n^{\otimes k} \to \bigoplus_k C_k(\mathcal{R}, \mathcal{R}^*).$$

Comme le morphisme χ est injectif, Φ est un cocycle cyclique.

4.7. Calcul de Φ [(2)]

Il est assez facile de calculer l'accouplement du cocycle cyclique φ avec des éléments de K-théorie de l'algèbre $C_c^\infty(P) \rtimes \Gamma$ provenant de l'application de Baum-Connes. On peut en déduire assez facilement les classes de Pontrjagyn qui apparaissent. Par ailleurs, Connes et Moscovici montrent que les classes secondaires ne peuvent pas intervenir dans cette formule.

4.8. Une variante de l'algèbre de Hopf (*cf.* [23])

Pour construire l'application classifiante $H^*(WSO(n)) \to \mathrm{HC}^*_{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$, on a d'abord dû remplacer M par un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Il est possible de modifier un peu cette étape de la manière suivante.

Pour construire l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$, on a utilisé le sous-groupe G_1 du groupe des difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ qui opère librement et transitivement sur les repères. Un tel groupe n'existe pas pour une variété M quelconque. On peut par contre considérer le groupoïde $R \times R$, où R est l'espace des repères sur M. Cela donne lieu à une algèbre de Hopf qui est plutôt un groupoïde quantique $\mathcal{H}_M$. On peut alors construire une cohomologie d'algèbre de Hopf $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_M)$, ainsi qu'une application classifiante $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_M) \to \mathrm{HC}^*(\mathcal{A})$ et un cocycle $\Phi_M \in \mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_M)$ dont l'image est φ.

On montre enfin que le morphisme canonique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_M)$ est un isomorphisme.

Remarque (*cf.* [4]). — Il n'est en fait pas difficile de construire ainsi un « groupoïde quantique » associé à une action transitive d'un groupe G sur un espace X, dans la ligne exposée en 4.1.

(2) Cette partie n'est pas encore écrite. Elle est présentée ici d'après des explications orales des auteurs.

RÉFÉRENCES

[1] M.F. Atiyah – *Global theory of elliptic operators*, Proc. Int. Conf. Functional Analysis and related topics. Univ. Tokyo Press (1970), 21–30.

[2] S. Baaj & G. Skandalis – *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e série **26** (1993), 425–488.

[3] S. Baaj & G. Skandalis – *Transformations pentagonales*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327**, no. 7 (1998), 623–628.

[4] S. Baaj & G. Skandalis – En préparation.

[5] R. Beals & P. Greiner – *Calculus on Heisenberg manifolds*, Annals of Mathematics Studies **119**, Princeton University Press, Princeton, NJ (1988).

[6] L.G. Brown, R.G. Douglas & P.A. Fillmore – *Extensions of C^*-algebras and K-homology*, Ann. of Math. **105** (1977), 265–324.

[7] P. Cartier – *Homologie cyclique : rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen...*, Sém. Bourbaki, 1983/84, Astérisque **121-122**, Soc. Math. France (1985), 123–146.

[8] J. Cheeger – *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom. **18**, no. 4 (1983), 575–657.

[9] A. Connes – *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Lect. Notes in Math. **725** (1979), 19–143.

[10] A. Connes – *Noncommutative differential geometry. Chapter I : The Chern character in K-homology. Chapter II : De Rham homology and non commutative algebra*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **62** (1985), 257–360.

[11] A. Connes – *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983), Longman Sci. Tech., Harlow, Pitman Res. Notes Math. Ser. **123** (1986), 52–144.

[12] A. Connes – *Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules*, K-Theory **1**, no. 6 (1988), 519–548.

[13] A. Connes – *Non commutative geometry*, Academic Press, Inc., San Diego, CA (1994).

[14] A. Connes – *Geometry from the spectral point of view*, Letters in Mathematical Physics **34** (1995), 203–238.

[15] A. Connes – *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) **5**, no. 1 (1999), 29–106.

[16] A. Connes & D. Kreimer – *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199**, no. 1 (1998), 203–242.

[17] A. Connes & D. Kreimer – *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Comm. Math. Phys. **210**, no. 1 (2000), 249–273.

[18] A. Connes & D. Kreimer – *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II : The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group*, Comm. Math. Phys. **216**, no. 1 (2001), 215–241.

[19] A. Connes & H. Moscovici – *The local index formula in noncommutative geometry*, Geom. Funct. Anal **5**, no. 2 (1995), 174–243.

[20] A. Connes & H. Moscovici – *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem*, Comm. Math. Phys. **198**, no. 1 (1998), 199–246.
[21] A. Connes & H. Moscovici – *Cyclic cohomology and Hopf algebras*, Letters in Mathematical Physics **48** (1999), 97–108.
[22] A. Connes & H. Moscovici – *Cyclic Cohomology and Hopf Algebra Symmetry*, Letters in Mathematical Physics **52** (2000), 1–28.
[23] A. Connes & H. Moscovici – *Differentiable cyclic cohomology and Hopf algebraic structures in transverse geometry* (preprint 2001).
[24] M. Crainic – *Cyclic Cohomology of Hopf algebras and a Noncommutative Chern-Weil Theory* (preprint 1998).
[25] I.M. Gel'fand & D.B. Fuks – *Cohomologies of the Lie algebra of formal vector fields* (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970), 322–337.
[26] G. Godbillon – *Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels*, Sém. Bourbaki, 1971/72, exp. no. 421, Lect. Notes in Math. **383** (1974), 69–87.
[27] J. Gracia-Bondía, J. Várilly & H. Figueroa – *Elements of noncommutative geometry*, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher, Boston, MA (2001).
[28] M. Hilsum & G. Skandalis – *Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e série **20** (1987), 325–390.
[29] A. Jaffe, A. Lesniewski & K. Osterwalder – *Quantum K-theory. I. The Chern character*, Comm. Math. Phys. **118**, no. 1 (1988), 1–14.
[30] G.I. Kac – *Extensions of groups to ring groups*, Math U.S.S.R. Sbornik **5** (1968), 451–474.
[31] G.G. Kasparov – *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras*, Math. USSR Izv. **16** (1981), no. 3, 513-572. *Translated from :* Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. **44** (1980), 571-636.
[32] C. Kassel – *Le résidu non commutatif (d'après M. Wodzicki)*, Sém. Bourbaki, vol. 1988/89, exp. no. 708, Astérisque **177-178** (1989), 199–229.
[33] D. Kreimer – *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, no. 2 (1998), 303–334.
[34] J. Kustermans & S. Vaes – *Locally compact quantum groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e série **33** (6) (2000), 837–934.
[35] J-M. Lescure – *Triplets spectraux pour les pseudovariétés à singularité conique isolée*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327**, no. 10 (1998), 871–874.
[36] J-M. Lescure – *Triplets spectraux pour les pseudo-variétés avec singularité conique isolée*. Thèse (preprint 1997).
[37] S. Majid – *Hopf-von Neumann algebra bicrossproducts, Kac algebra bicrossproducts, and the classical Yang-Baxter equations*, J.F.A. **95**, no. 2 (1991), 291–319.
[38] R. Ponge – *Calcul hypoelliptique sur les variétés de Heisenberg, résidu non commutatif et géométrie pseudo-hermitienne*. Thèse (preprint 2000).
[39] R. T. Seeley – *Complex powers of an elliptic operator. Singular Integrals*, Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill. (1966), Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1967), 288–307.

[40] M.E. Sweedler – *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Note Series - W. A. Benjamin, Inc., New York (1969).

[41] M. Takeuchi – *Matched pairs of groups and bismashed product of Hopf algebras*, Comm. Alg. **9** (1981), 841–882.

[42] B.L. Tsygan – *Homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology* (en russe), Uspekhi Mat. Nauk **38**, no. 2 (230) (1983), 217–218.

[43] S. Vaes & L. Vainerman – *Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction* (preprint 2001).

[44] M. Wodzicki – *Noncommutative residue. I. Fundamentals*, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984-1986), Lecture Notes in Math. **1289** (Springer, Berlin) (1987), 320–399.

Georges SKANDALIS

Université de Paris VII
U.F.R. de Mathématiques
UMR 7586 du C.N.R.S.
Case Postale 7012
2, place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
E-mail : skandal@math.jussieu.fr

Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53e année, 2000-2001, nO 893, p. 365 à 405

LIMITES HYDRODYNAMIQUES DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN [d'après C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond]

par **Cédric VILLANI**

> *« Il y aurait bien des objections à faire [au raisonnement mathématique précédent], mais on ne saurait exiger en Mécanique la même rigueur qu'en Analyse pure pour ce qui concerne l'infini. »*
>
> H. Poincaré,
> in *« Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation »*, Acta Mathematica 7 (1885), pp. 259–380.
>
> *« Le livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter du point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua. »*
>
> D. Hilbert (1900),
> *Sur les problèmes futurs des mathématiques (trad. L. Laugel)*,
> Comptes rendus du 2ème congrès international des mathématiciens, Gauthier-Villars, Paris 1902.

Le but de cet exposé est de faire le point sur des avancées récentes dans la compréhension mathématique des liens entre équation cinétique de Boltzmann et équations hydrodynamiques. Bien sûr, la citation de Poincaré ci-dessus est à prendre au second degré : l'une des difficultés essentielles du sujet est précisément de rendre parfaitement rigoureux des raisonnements dont la validité formelle semble facile à vérifier. Quant à la citation de Hilbert, malgré le contraste apparent, elle illustre tout aussi bien que celle de Poincaré l'évolution des exigences mathématiques dans ce domaine : en effet, les contributions de Hilbert sur le sujet sont aujourd'hui considérées comme parfaitement non rigoureuses.

Les travaux présentés ci-après sont dus à Bardos, Golse, Levermore, Lions, Masmoudi, Saint-Raymond [BGL2, BGL3, BGL4, BGL5, Go, GL, GLSR, GSR, LeMa, LM3, LM4, SR]. Des recherches intenses continuent à être menées sur le sujet, et les résultats décrits dans cet exposé risquent d'être nettement améliorés dans les mois qui viennent. Pour cette raison aussi bien que par souci de pédagogie, nous avons surtout cherché à dégager les méthodes et idées importantes, plutôt que le détail des preuves.

Après avoir rappelé, dans le premier paragraphe, l'origine physique, les motivations mathématiques et l'historique du problème de limite hydrodynamique, on exposera au paragraphe 2 deux programmes de recherche conçus pour mener à bien une partie de son étude. Le premier est dû à Bardos, Golse et Levermore, tandis que le second est l'adaptation par Golse d'une méthode développée par Yau dans un contexte voisin. Dans les paragraphes 3 à 5, on présentera ensuite les outils et idées qui ont permis de résoudre les principales difficultés associées à ces programmes. Enfin, dans le paragraphe 6, on fera le point sur quelques problèmes qui restent ouverts.

L'auteur remercie vivement Y. Brenier, E. Grenier, C.D. Levermore, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond, et tout particulièrement F. Golse pour leur aide durant la préparation de cet exposé.

1. LE PROBLÈME ET SES MOTIVATIONS

1.1. Équations cinétiques

Considérons la modélisation mathématique d'un gaz formé d'une assemblée de n particules identiques en interaction (où n est très grand, disons $10^6 \leqslant n \leqslant 10^{23}$), évoluant dans l'espace euclidien[(1)] $\mathbb{R}^N$ ($N = 3$ étant bien sûr le cadre le plus naturel). Si l'on suppose pour simplifier que la position et la vitesse suffisent à décrire l'état d'une particule, alors l'état du gaz est défini par un point représentatif dans l'espace des phases $(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_v)^n$ — ou plus généralement par une densité de probabilité $f_n(x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n)$ sur cet espace des phases. Une telle description est dite *microscopique*.

On peut alors écrire les lois de Newton sous la forme d'un immense système de $2n$ équations différentielles du premier ordre, faisant intervenir les positions et les vitesses de toutes les particules, ainsi que les forces d'interactions. Un exemple typique est le modèle des *sphères dures*, dans lequel les particules rebondissent les unes sur les autres comme des boules de billard ; le flot associé aux équations de Newton est alors bien défini pour presque toute condition initiale (voir [CIP, chapitre 4]) et détermine l'évolution de la densité de probabilité f_n.

Dans presque toutes les applications, on remplace ce modèle, qui contient beaucoup trop d'informations, par un modèle *macroscopique* avec un espace des phases restreint. Ainsi, dans une description *cinétique*, l'état du système à un instant donné est représenté par une densité de probabilité $f(x, v)$, densité de présence de l'ensemble

[(1)] Pour être un peu plus réaliste, on aimerait considérer des domaines à bord ; pour des raisons pédagogiques aussi bien que techniques, nous n'en parlerons pas, et mentionnons juste que les résultats ci-après ne couvrent pas ces domaines. En revanche, nous remplacerons parfois $\mathbb{R}^N$ par le tore plat.

des particules dans l'espace des phases $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_v$. Selon les forces d'interaction considérées, on aboutit à des équations cinétiques très variées, les plus connues étant celles de *Vlasov* et de *Boltzmann*. C'est cette dernière qui nous intéressera dans la suite.

1.2. L'équation de Boltzmann

Cette équation modélise un gaz suffisamment (mais pas trop !) raréfié, dans lequel les particules interagissent par des *collisions* élastiques, réversibles, localisées et instantanées[(2)]. L'hypothèse de raréfaction permet de négliger les collisions faisant intervenir plus de deux particules. On trouvera dans [C2] et les références incluses de très nombreuses applications de cette équation (ou de ses variantes) à des problèmes théoriques ou concrets. L'un des fondements conceptuels de l'équation de Boltzmann est la très subtile hypothèse du *chaos moléculaire* (voir Kac [K], Cercignani et al. [CIP], Spohn [S]).

Après adimensionnement des constantes, l'équation de Boltzmann s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{Kn} Q(f,f), \qquad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad v \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

où l'inconnue $f = f(t,x,v)$ est une fonction positive, et ∇_x est l'opérateur de gradient par rapport à la variable x. L'opérateur de *transport*, $v \cdot \nabla_x$, traduit la tendance des particules à se déplacer en ligne droite. Le paramètre Kn est le *nombre de Knudsen*, défini de manière heuristique comme l'inverse du nombre moyen de collisions subies par une même particule en une unité de temps macroscopique. Quant aux interactions, elles sont modélisées par l'opérateur quadratique Q, qui n'agit que sur la dépendance de f en la variable v : pour une fonction $f(v)$ donnée,

$$Q(f,f)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} dv_* \int_{S^{N-1}} d\omega \, B(v - v_*, \omega) \big[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \big], \tag{2}$$

$$v' = v - \langle v - v_*, \omega \rangle \, \omega, \qquad v'_* = v_* + \langle v - v_*, \omega \rangle \, \omega \qquad (\omega \in S^{N-1}). \tag{3}$$

On peut voir (v', v'_*) et (v, v_*) comme les vitesses avant et après le choc, respectivement, de deux particules qui subissent une collision. Bien sûr, $v' + v'_* = v + v_*$, et $|v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2$, ce qui traduit la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique au cours des collisions (hypothèse de chocs élastiques).

Pour finir d'expliciter l'équation (1), il reste à définir la fonction $B(v - v_*, \omega)$ qui apparaît dans (2) : c'est la *section efficace*, qui dépend de l'interaction microscopique. Dans le cas où cette interaction découle d'un potentiel radial, des formules dues à Maxwell prédisent la forme de B (voir [C1, p. 67–71]). Il existe toute une zoologie de sections efficaces : potentiels durs ou mous, sections intégrables ou singulières... qui influent de manière importante sur les propriétés qualitatives des solutions, voir [Vi].

(2) C'est-à-dire se déroulant sur des échelles de temps et d'espace très inférieures aux échelles macroscopiques.

Ici nous nous contenterons de mentionner le cas où l'interaction est de type « sphères dures » : alors,

$$B(v - v_*, \omega) = K|\langle v - v_*, \omega\rangle|, \qquad K > 0. \tag{4}$$

Cet exemple n'est pas choisi au hasard : pour diverses raisons techniques importantes, parmi toutes les sections efficaces proposées par Maxwell, c'est la seule pour laquelle on sache démontrer des résultats de limite hydrodynamique rigoureux.

Abréviations. — Pour alléger les notations, on écrira, selon l'usage, $\phi = \phi(v)$, $\phi_* = \phi(v_*)$, $\phi' = \phi(v')$, $\phi'_* = \phi(v'_*)$. Si on se donne une fonction $\Phi(v, v_*, v', v'_*)$, on notera aussi $\Phi' = \Phi(v', v'_*, v, v_*)$, et $\Phi_* = \Phi(v_*, v, v'_*, v')$. On abrègera également $B(v - v_*, \omega)$ en B.

Énonçons maintenant les deux propriétés formelles fondamentales de l'opérateur (2) ; toutes deux découlent de ce que le changement de variables $(v, v_*) \to (v', v'_*)$ est involutif et unitaire. La première est la traduction macroscopique des lois de conservation microscopiques de masse, quantité de mouvement, et énergie : si f est une fonction de $v \in \mathbb{R}^N$, vérifiant des conditions d'intégrabilité adéquates, alors pour $\xi = 1$, v_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ ou $|v|^2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f, f)\xi(v)\, dv = 0; \tag{5}$$

de là découlent les *lois de conservation locales*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int f\xi\, dv\right) + \nabla_x \cdot \left(\int f\xi v\, dv\right) = 0. \tag{6}$$

Les quantités $\int f\xi v\, dv$ sont appelées *flux* de masse ($\xi = 1$), de quantité de mouvement ($\xi = v$) ou d'énergie cinétique ($\xi = |v|^2/2$). La version globale de (6) est

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f\xi\, dv\, dx = 0.$$

La deuxième propriété importante est l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f, f)\, \log f\, dv = -D(f), \tag{7}$$

où $D(f)$ est la fonctionnelle de « *dissipation d'entropie* » ,

$$D(f) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \left(f'f'_* - ff_*\right) \log\frac{f'f'_*}{ff_*}\, B\, dv\, dv_*\, d\omega \geqslant 0. \tag{8}$$

De (7) découle formellement

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int f \log f\, dv\right) + \nabla_x \cdot \left(\int (f \log f)v\, dv\right) = -D(f) \leqslant 0. \tag{9}$$

Si l'on note $H(f) = \int f \log f \, dx \, dv$ (H est l'opposé de l'« entropie » physique), on en déduit

$$\frac{d}{dt} H(f(t,\cdot,\cdot)) = -\int_{\mathbb{R}^N} D(f(t,x,\cdot))\, dx \leqslant 0. \tag{10}$$

Il s'agit là du célèbre « Théorème H » de Boltzmann.

1.3. Équations hydrodynamiques

Dans une description macroscopique *hydrodynamique*, le gaz est représenté par quelques fonctions sur l'espace physique $\mathbb{R}^N_x$: R, U et T, qui représentent respectivement la densité de particules, leur vitesse moyenne et leur température. En termes cinétiques,

$$\begin{aligned} R(x) &= \int f(x,v)\, dv, \\ U(x) &= \frac{\displaystyle\int f(x,v) v \, dv}{R(x)}, \\ T(x) &= \frac{1}{N} \frac{\displaystyle\int f(x,v) |v - U(x)|^2 \, dv}{R(x)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Dans les applications, on rencontre une infinité de modèles différents, chacun ayant son domaine de validité. Nous ne considérerons ici que les plus simples et les plus fondamentaux[(3)], obtenus en combinant les lois de Newton et certaines hypothèses phénoménologiques (voir une présentation physique dans [Ba, LL] ; mathématique dans [CM, Li3]).

Un paramètre essentiel d'un fluide est sa *viscosité* ν, que nous considérerons comme constante même si elle dépend souvent de la température ; elle mesure l'intensité des forces de « friction » microscopiques s'exerçant au sein du fluide. Il ne fait guère de sens de parler de viscosité « grande » ou « petite » car ses effets se font sentir plus ou moins fortement selon les conditions physiques. On introduit donc le *nombre de Reynolds*,

$$Re = \frac{\mathcal{U} L}{\nu},$$

où $\mathcal{U}$ et L désignent respectivement des échelles de vitesse et de distance typiques de l'écoulement fluide. On utilise traditionnellement les équations de

– *Euler* quand le nombre de Reynolds est si grand que l'on néglige les effets visqueux ;

– *Stokes* quand le nombre de Reynolds est si petit que l'on néglige les effets convectifs ;

– *Navier-Stokes* pour des nombres de Reynolds intermédiaires.

(3) En outre nous éviterons encore le problème important des conditions aux limites.

Par exemple, après adimensionnement, le système d'Euler pour un gaz parfait monoatomique s'écrit

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial t} + \nabla_x \cdot (RU) = 0 \\ \dfrac{\partial (RU)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (RU \otimes U) + \nabla_x (RT) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\big(R|U|^2 + NRT\big) + \nabla_x \cdot \Big(R|U|^2 U + (N+2)RTU\Big) = 0, \end{cases}$$

où l'on définit la divergence d'un champ matriciel $M(x)$ par $(\nabla \cdot M)_j = \sum_i \partial_i M_{ij}$. Ici la pression prend la forme $p = RT$, loi d'état des gaz parfaits[(4)]. Dans le contexte de cet exposé, le choix de cette loi d'état se justifie aisément car c'est la seule compatible avec l'équation de Boltzmann ; mais il en existe quantité d'autres (voir [Li3]).

À l'équation (12) est associée une vitesse caractéristique de propagation des ondes, dite *vitesse du son*. Pour comprendre ce phénomène, effectuons une *linéarisation* des équations (12) près de l'état stationnaire ($R = 1$, $U = 0$, $T = 1$). Appelant ρ, u, θ les variations respectives de R, U, T au premier ordre, on trouve le système de l'*acoustique*,

$$(13)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x (\rho + \theta) = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2}{N} \nabla_x \cdot u = 0,$$

de sorte que la fluctuation de pression, $\rho + \theta$, et celle de flux de matière, $\nabla_x \cdot u$, satisfont à une *équation des ondes*,

$$(14)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho + \theta) = \frac{N+2}{N} \Delta_x (\rho + \theta), \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla_x \cdot u) = \frac{N+2}{N} \Delta_x (\nabla_x \cdot u),$$

et que leurs variations se propagent à travers l'espace avec une vitesse (adimensionnée) égale à $c = \sqrt{(N+2)/N}$. C'est un phénomène qui nous est bien sûr très familier !

Dans la suite de l'exposé, on s'intéressera au régime particulier des *écoulements incompressibles*. Sans s'embarrasser ici de définitions rigoureuses, rappelons qu'un fluide est dit incompressible si le volume occupé par un ensemble de particules est invariant au cours du temps, ce qui se traduit par la condition mathématique de divergence nulle pour le champ de vitesses. Quant à un *écoulement* incompressible, il s'agit d'un fluide compressible considéré dans des conditions physiques telles qu'il se comporte comme un fluide incompressible. Le degré d'incompressibilité d'un écoulement est mesuré par son *nombre de Mach* : $Ma = \mathcal{U}/c$. Plus ce nombre est petit, plus le comportement du fluide est proche de celui d'un fluide parfaitement incompressible. En particulier, on s'attend à ce que les *fluctuations d'un état d'équilibre global* constituent des écoulements de faible nombre de Mach, avec la relation d'incompressibilité associée, $\nabla_x \cdot u = 0$. Dans la suite nous considérerons uniquement de telles fluctuations.

(4) Que le lecteur risque de ne pas reconnaître instantanément, car R désigne d'ordinaire la constante des gaz parfaits ! ! Comme d'habitude, la cohérence des notations est un casse-tête insoluble.

En régime incompressible, une simplification majeure apparaît : l'équation du champ de vitesses se découple des autres. En fonction de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds, on choisit traditionnellement pour cette équation entre

(15) – *Euler incompressible :* $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = -\nabla_x p.$$

(16) – *Stokes incompressible :* $$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta_x u - \nabla_x p,$$

(17) – *Navier-Stokes incompressible :* $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = \nu \Delta_x u - \nabla_x p.$$

On a utilisé ici les notations suivantes : $u \cdot \nabla_x u$ désigne le vecteur dont la composante j est $u \cdot \nabla_x u_j$, et le champ de vecteurs $\Delta_x u$ est défini naturellement par l'action du Laplacien composante par composante. Du fait de l'équation $\nabla_x \cdot u = 0$, on a $u \cdot \nabla_x u = \nabla_x \cdot (u \otimes u)$. La fonction $p = p(t,x)$ est la pression ; il est inutile de lui associer une équation, on peut en fait la voir comme un *multiplicateur de Lagrange* associé à la contrainte d'incompressibilité.

À chacune de ces équations on doit associer une équation sur la température, qui est, dans les situations les plus simples,

– advectée dans le cas d'Euler :

(18) $$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \theta = 0;$$

– dissipée dans le cas de Stokes :

(19) $$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \Delta_x \theta;$$

– advectée et dissipée simultanément dans le cas de Navier-Stokes :

(20) $$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta.$$

Ici κ est un coefficient de diffusion thermique, a priori distinct de ν.

Enfin, l'évolution de la densité est déterminée par la *relation de Boussinesq* :

(21) $$\nabla_x (\rho + \theta) = 0,$$

qui implique en fait, par conservation de l'énergie totale, la relation plus forte $\rho + \theta = 0$.

Bien sûr, nous nous sommes limités aux lois les plus simples.

1.4. Approximation hydrodynamique

Une description cinétique est beaucoup plus complexe qu'une description hydrodynamique, ne serait-ce que parce que l'espace des phases est beaucoup plus grand. Dans les applications pratiques, les équations cinétiques nécessitent des calculs extrêmement coûteux — et l'équation de Boltzmann plus que tout autre, à cause de l'intégrale de collision de multiplicité élevée. On a donc intérêt, quand cela est possible, à remplacer un modèle cinétique par un modèle hydrodynamique. La base théorique de

cette simplification est l'*hypothèse d'équilibre thermodynamique local*, que nous allons préciser.

Par définition, une distribution $f(x,v)$ est appelée équilibre local pour l'équation de Boltzmann si elle est invariante par l'action de l'opérateur de collision :

$$Q(f,f) = 0. \tag{22}$$

Au vu des formules (7) et (8), on voit facilement que (22) équivaut à

$$f'f'_* = ff_* \qquad \text{pour presque tous } x, v, v_*, \omega. \tag{23}$$

Par un résultat classique, dont l'histoire remonte à Boltzmann, l'équation (23) implique

$$f(x,v) = M_{R,U,T}(x,v) \equiv R(x)\frac{e^{-|v-U(x)|^2/2T(x)}}{(2\pi T(x))^{N/2}}. \tag{24}$$

À champs hydrodynamiques R, U et T fixés, la distribution $M_{R,U,T}$, appelée *maxwellienne locale*, maximise l'entropie $-H(f)$, (lemme de Gibbs) ; c'est pourquoi on parle d'équilibre *thermodynamique*.

En vertu du Théorème H et du lemme de Gibbs, il est naturel de penser que la distribution f est proche d'un équilibre local dans un régime physique où les collisions sont très fréquentes, i.e. de *faible nombre de Knudsen*. L'étude des limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann consiste précisément à

(1) prouver une forme d'équilibre thermodynamique local dans l'asymptotique $Kn \to 0$,

(2) en déduire des équations limites pour les champs hydrodynamiques associées à f.

Les notes de cours [Go], rédigées pour des lecteurs mathématiciens, constituent une introduction très accessible à ces problèmes.

Remarque 1.1. — Une limite formelle qui semble naturelle aboutit parfois à des équations hydrodynamiques inappropriées, comme en témoignent les subtils « ghost effects » mis à jour par Sone et ses collaborateurs (voir [SATSB] ou [Go, p. 34]).

Remarque 1.2. — Bien sûr, cela n'a guère de sens physique d'introduire une *famille* de solutions dépendant d'un paramètre (Kn) qui tend vers 0 ; c'est une façon qualitative de formaliser mathématiquement la petitesse de Kn. Il serait plus satisfaisant d'établir une *estimation quantitative* de l'erreur commise en remplaçant l'équation cinétique par l'équation hydrodynamique.

1.5. Le sixième problème de Hilbert

Le sixième problème de Hilbert est une motivation théorique de l'étude de limite hydrodynamique : peut-on axiomatiser la mécanique, et en particulier (voir la citation en exergue) *peut-on établir rigoureusement les équations fondamentales de la mécanique des fluides à partir d'un modèle microscopique gouverné par les lois de Newton ?* Ce célèbre problème de physique statistique a été étudié de façon intensive, comme en témoigne l'abondance des travaux cités dans les ouvrages de synthèse [S] et [KL] ; sa solution n'est connue, à l'heure actuelle, que pour certains modèles simplifiés non réalistes.

Dans cette optique, Hilbert proposait de passer des équations de Newton à l'équation de Boltzmann, puis de l'équation de Boltzmann aux diverses équations de l'hydrodynamique. On perd ainsi de la généralité, car l'équation de Boltzmann ne peut aboutir qu'à une classe restreinte d'équations hydrodynamiques, i.e. avec loi d'état des gaz parfaits. Pour autant, chacune des deux étapes demeure extrêmement délicate.

1.6. Statut mathématique de ces équations

Pour éclairer la difficulté du problème de limite hydrodynamique, faisons le point sur l'état de la théorie mathématique des principales équations de mécanique des fluides. On se limite ici au *problème de Cauchy* : étant donnée une condition initiale, sous quelles hypothèses peut-on affirmer que l'équation admet une unique solution, physiquement réaliste[(5)] ? En outre, que dire de sa régularité, de son intégrabilité... ?

Il n'existe toujours pas de théorie satisfaisante du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann, malgré les efforts soutenus de nombreux mathématiciens, à commencer par Carleman [Cr] dans les années 30. L'alternative actuelle est entre

– des solutions fortes sous des hypothèses très restrictives (solution définie en temps petit, ou bien donnée initiale petite, ou proche d'un état d'équilibre global, ou encore indépendante de la variable x) ;

– les solutions « renormalisées » construites par la théorie de DiPerna et Lions [DPL1, DPL2, Li2] sous des hypothèses extrêmement générales. On ignore si ces solutions satisfont un théorème d'unicité[(6)], ou les lois de conservation élémentaires. En outre, on ignore tout de la formation éventuelle de singularités.

On pourra consulter [Vi, chap. 2] pour de nombreuses références sur tous ces résultats. Dans le contexte des limites hydrodynamiques, la théorie la plus étudiée a été celle des perturbations d'un état d'équilibre global, développée par Grad, Caflisch, Maslova, Ukai,... qui s'appuie sur la théorie spectrale des opérateurs linéaires.

En ce qui concerne les équations hydrodynamiques, on trouvera un état de l'art assez complet sur le problème de Cauchy, incluant des avancées très récentes, dans [Li3,

(5) Au sens où elle suit les principales lois physiques attendues : conservations, etc.

(6) On sait cependant que s'il existe une solution forte, alors c'est l'unique solution renormalisée.

Li4]. On se limitera ici à des considérations simples. Contrairement à leurs homologues cinétiques, les théories hydrodynamiques actuelles sont très sensibles à la dimension d'espace, N.

Parlons d'abord des modèles incompressibles. Si les équations de Stokes ou de l'acoustique ne posent guère de problème, il n'en va pas de même de celles d'Euler ou de Navier-Stokes, dont le terme quadratique mène à d'immenses difficultés. En dimension 2, on peut surmonter ces difficultés, et même étudier des questions très fines (dans le cas d'Euler, la régularité de « poches de tourbillon », la stabilité de solutions singulières... pour des références et explications détaillées, voir l'exposé de Gérard [Ge2]).

Pour Navier-Stokes incompressible en dimension 3, l'alternative est la même que pour Boltzmann. D'une part, on sait construire des solutions régulières en temps petit [Ld, T] ou pour une donnée initiale petite (voir par exemple [Cn]). D'autre part, la théorie de Leray [Le1, Le2, Le3] assure, sous des hypothèses très générales, l'existence de solutions faibles, dont l'unicité n'est pas garantie ; quant à leur régularité, il s'agit d'un célèbre problème ouvert (voir [CKNS]), récemment mis à prix pour une forte récompense !

Pour Euler incompressible en dimension 3, la situation est pire : on sait qu'il existe des solutions régulières en temps petit, mais on ne dispose d'aucun théorème d'existence globale, à l'exception des « solutions dissipatives » introduites par Lions [Li3]. Si Arnold a donné une interprétation séduisante de cette équation en termes de géodésiques d'un groupe de Lie de dimension infinie (voir [AK]), il semble que cette information soit insuffisante pour résoudre le problème de Cauchy (voir [EM]...).

Quant aux modèles compressibles, ils sont encore plus mal compris. Grâce au célèbre théorème de Glimm [Gl], on peut montrer l'existence de solutions faibles en temps grand pour le système d'Euler compressible, si l'état initial est une perturbation d'un état d'équilibre... en dimension 1 seulement ! Par ailleurs, la théorie générale des systèmes de lois de conservation hyperboliques assure l'existence d'une solution classique en temps petit pour des données initiales suffisamment régulières. En ce qui concerne Navier-Stokes compressible, un cas particulier important, dit isentropique, a été l'objet de nombreuses études récentes : voir [Li4].

Pour conclure, un résultat important doit être mentionné ici : Sideris [Si] a prouvé que le système d'Euler compressible peut mener à l'apparition spontanée de singularités en temps fini. Ce phénomène n'est pas encore pleinement compris ; voir cependant [Al] pour une revue synthétique et de nombreux résultats sur l'apparition de singularités.

Remarque 1.3. — Le théorème de Sideris suggère une autre motivation pour l'étude des limites hydrodynamiques (motivation qui relève encore de l'utopie très lointaine !) On pourrait imaginer que l'équation de Boltzmann, dans la limite de faible nombre de Knudsen, puisse constituer une approximation commode de l'équation d'Euler

compressible. À l'appui de cette idée, on notera que pour certains modèles hydrodynamiques simples, d'importants progrès mathématiques ont été réalisés récemment grâce à leur réinterprétation comme limites hydrodynamiques d'équations cinétiques ad hoc (non physiques), les premiers travaux du genre étant [LPT1, LPT2, LPS] (voir aussi [GM]). Comme il est évoqué dans Cercignani et al. [CIP, p. 318], on pourrait aussi imaginer que le Théorème H de Boltzmann suggère des critères physiquement réalistes d'unicité des solutions faibles de l'équation d'Euler compressible en présence de chocs, à la manière des critères d'entropie de Lax ou de Dafermos [D, paragraphes 8.5 et 9.4].

1.7. Bref historique du problème de limite hydrodynamique

Les premières études mathématiques des limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann sont dues à Hilbert [H] d'une part, Chapman et Enskog [E] d'autre part. Il s'agit dans les deux cas de travaux purement formels (ce qui n'empêcha pas Hilbert d'annoncer une solution complète du problème ! Voir les notes historiques, citations et commentaires dans [TM]). La méthode de Hilbert consiste à rechercher *une* solution formelle de la famille d'équations de Boltzmann (1), à Kn variable, sous la forme

$$f(t,x,v;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(t,x,v), \qquad \varepsilon = Kn. \tag{25}$$

En identifiant les coefficients des différentes puissances de ε, on obtient alors des systèmes d'équations pour f_0, $f_0+\varepsilon f_1$, $f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2$, etc. La méthode de Chapman-Enskog est une variante où les f_n sont des fonctions des champs hydrodynamiques $R(t,x;\varepsilon)$, $U(t,x;\varepsilon)$, $T(t,x;\varepsilon)$ associés à f_ε, et de v : pour ces deux approches consulter [Gr2, C1].

Les deux méthodes permettent de retrouver formellement les équations d'Euler et Navier-Stokes (compressibles ou non). Cependant, il faut remarquer que si l'on pousse le développement au-delà de l'ordre 2, on obtient des équations (Burnett, « super-Burnett »...) dont la validité physique est très douteuse [TM], et qui en tout état de cause se sont montrées parfaitement inutiles. En outre, ces développements asymptotiques ne sont pas convergents en général pour ε fixé (voir les discussions dans [Gr2, TM]), et ne peuvent représenter qu'une classe de solutions très particulières. En dépit de ces remarques, les méthodes de Hilbert et Chapman-Enskog sont aujourd'hui encore très utilisées en modélisation, leur succès tenant certainement à leur caractère systématique.

Grad [Gr1, Gr2] proposa une autre méthode, conceptuellement plus simple et plus sûre, dite méthode des moments : on commence par écrire, à nombre de Knudsen fixé, les équations satisfaites par les quantités $\int_{\mathbb{R}^N} f(t,x,v) v_1^{\alpha_1} \dots v_N^{\alpha_N}\, dv$, parmi lesquelles se trouvent bien sûr les quantités R, RU, $R(|U|^2 + NT)$ qui vérifient les lois de conservation locales (6). Tout le problème consiste alors à *fermer* ces équations à la

limite par une règle basée sur l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local (qu'il faut justifier !).

Que ce soit par un développement de Hilbert modifié[7], ou bien par la méthode des moments, parfois avec l'aide d'un théorème de Cauchy-Kowalevskaya, de nombreux résultats rigoureux de limites hydrodynamiques furent obtenus par divers auteurs dans un cadre perturbatif [As, AU, BU, Ca2, Ca3, DMEL, EP, ELM1, ELM2, MR, N, UA] : par exemple, notons la justification par Caflisch [Ca2] de la limite vers le système d'Euler compressible en temps petit, ou bien celle par Bardos et Ukai [BU] de la limite vers Navier-Stokes incompressible. Ces méthodes présentent plusieurs avantages : elles sont systématiques, et fournissent des solutions régulières de l'équation de Boltzmann, aussi longtemps que les équations hydrodynamiques limites sont régulières.

En contrepartie, ces démonstrations *ne s'appliquent que sur un intervalle de temps où l'on est assuré de la régularité des solutions hydrodynamiques.* C'est cette restriction que Bardos, Golse et Levermore [BGL1, BGL2, BGL3] proposèrent de lever au début des années 90, tout en augmentant considérablement la généralité des données autorisées, grâce à la théorie de DiPerna et Lions, combinée à une adaptation astucieuse de la méthode des moments. Le but final était donc l'obtention d'*un théorème de limite hydrodynamique qui ne nécessiterait que des estimations a priori données par la physique : masse, énergie, entropie.* Malgré les difficultés considérables liées à notre peu de connaissance des solutions renormalisées, ce programme vient de remporter des succès importants, le plus spectaculaire — mais pas le seul ! —, annoncé très récemment, étant *le passage des solutions faibles de DiPerna-Lions aux solutions faibles de Leray.*

Avant de présenter ce programme plus précisément, parlons brièvement des autres asymptotiques liées au sixième problème de Hilbert. Pour ce qui est de la limite [équations microscopiques ⟶ équation de Boltzmann], le résultat qui fait autorité est le (presque trentenaire) théorème de Lanford [La], étendu par Illner et Pulvirenti [IP], dont les hypothèses restent très restrictives : donnée initiale petite, gaz de sphères dures (voir [CIP, chapitre 4] pour une excellente revue). Quant à la limite [équations microscopiques ⟶ équations hydrodynamiques], elle a progressé spectaculairement avec les travaux de Varadhan et ses collaborateurs (voir [GPV], et l'exposé de Comets [Co]), sans pour autant parvenir à couvrir des situations réalistes. Parmi les résultats marquants de ces dernières années, mentionnons (1) la preuve partielle par Olla, Varadhan et Yau [OVY] de la limite de systèmes microscopiques Hamiltoniens assez généraux vers un système d'Euler compressible, tant que sa solution reste régulière ; (2) le travail récent de Quastel et Yau [QY] qui réalise le passage d'une certaine

[7] Tronqué, de façon fort peu satisfaisante, car à un ordre beaucoup plus élevé qu'il n'est formellement nécessaire... En outre la positivité des solutions ainsi construites n'est pas toujours garantie ! De nombreuses applications de cette méthode sont passées en revue dans [ELM3].

dynamique microscopique stochastique sur un réseau, vers les solutions faibles de Leray. Quantité de résultats liés, faisant partie d'un important programme suggéré par Morrey [M], sont passés en revue dans [KL].

2. LE PROGRAMME DE BARDOS, GOLSE ET LEVERMORE

2.1. Régime de fluctuations

Le programme de Bardos, Golse et Levermore (programme BGL) concerne l'étude des solutions renormalisées de DiPerna-Lions dans un *régime de faible nombre de Mach et de faible nombre de Knudsen*. La première condition est obtenue par l'étude des fluctuations de l'équilibre global

$$M(v) = M_{1,0,1}(v) = \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{N/2}}, \tag{26}$$

Notant ε le nombre de Knudsen, on posera donc $f_\varepsilon = M(1+\delta g_\varepsilon)$, où δ, proportionnel au nombre de Mach, est appelé à tendre vers 0, et on s'intéressera aux fluctuations hydrodynamiques

$$\rho_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} M g_\varepsilon \, dv, \qquad u_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} M\, g_\varepsilon v \, dv, \qquad \theta_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} M g_\varepsilon \left(\frac{|v|^2}{N} - 1 \right) dv. \tag{27}$$

On fait ensuite tendre *simultanément* ε et $\delta = \delta_\varepsilon$ vers 0. L'hypothèse d'équilibre thermodynamique local se transforme alors naturellement en l'énoncé suivant : asymptotiquement, Mg_ε est une *fluctuation maxwellienne de l'équilibre global*, ou encore : *il existe des champs $\rho(t,x)$, $u(t,x)$, $\theta(t,x)$ tels que, dans la limite où $\varepsilon \to 0$,*

$$g_\varepsilon(t,x,v) \longrightarrow g(t,x,v) = \rho + u \cdot v + \theta \left(\frac{|v|^2 - N}{2} \right). \tag{28}$$

On a bien sûr dans ce cas $\rho = \int Mg\, dv$, $u = \int Mgv\, dv$, $\theta = \int Mg(\frac{|v|^2}{N} - 1)\, dv$.

On pourrait s'attendre à obtenir à la limite les équations fondamentales de la mécanique des fluides incompressibles. En fait, comme il est facile de s'en convaincre, on ne peut retrouver que l'équation de l'acoustique... car les équations d'Euler, Stokes et Navier-Stokes décrivent les mouvements d'un fluide incompressible sur des échelles de temps beaucoup plus grandes que celle de l'acoustique. Cela suggère une dilatation de l'échelle de temps macroscopique par un facteur τ_ε^{-1}, où τ_ε est susceptible de tendre vers 0 avec ε. L'équation considérée est donc finalement

$$\tau_\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon), \qquad f_\varepsilon = M(1 + \delta_\varepsilon g_\varepsilon). \tag{29}$$

La *relation de von Karman*,

$$Re = \frac{Ma}{Kn} = \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \tag{30}$$

permet de prédire si le régime limite sera visqueux ou non. Quelques manipulations astucieuses suggèrent que les quantités ρ_ε, u_ε, θ_ε, obtenues à partir de f_ε via (27), satisfont asymptotiquement les équations de

– l'acoustique si $\tau_\varepsilon = 1$;
– Euler incompressible si $\tau_\varepsilon = \delta_\varepsilon$, $\delta_\varepsilon/\varepsilon \to +\infty$;
– Navier-Stokes incompressible si $\tau_\varepsilon = \varepsilon = \delta_\varepsilon$;
– Stokes si $\tau_\varepsilon = \varepsilon$, $\delta_\varepsilon/\varepsilon \to 0$.

Remarque 2.1. — Dans l'un quelconque des trois derniers cas, il se peut bien sûr que le champ de vitesses à l'instant initial, u_ε^{in}, ne vérifie pas la condition d'incompressibilité asymptotique, $\nabla_x \cdot u_\varepsilon^{in} \longrightarrow 0$. Dans ce cas, c'est en fait la limite de Pu_ε^{in} qui doit être prise comme donnée initiale u^{in} dans les équations hydrodynamiques, où P est le *projecteur de Leray*, i.e. la projection orthogonale dans L^2 sur l'espace des champs de divergence nulle (le noyau de P est donc constitué par les gradients de fonctions scalaires). Une remarque similaire à celle-ci vaut pour la relation de Boussinesq (21) : plutôt que le couple $\lim_{\varepsilon\to 0}(\rho_\varepsilon^{in}, \theta_\varepsilon^{in})$, c'est le couple $\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{2}{N+2}\rho_\varepsilon^{in} - \frac{N}{N+2}\theta_\varepsilon^{in}, \frac{N}{N+2}\theta_\varepsilon^{in} - \frac{2}{N+2}\rho_\varepsilon^{in})$ qui doit être pris comme donnée initiale (ρ^{in}, θ^{in}) dans les équations hydrodynamiques. En fait, au vu de (14), les variations de $\nabla_x \cdot u_\varepsilon$ et de $\rho_\varepsilon + \theta_\varepsilon$ sont propagées par les ondes acoustiques à une échelle de temps macroscopique extrêmement brève si $\tau_\varepsilon \to 0$.

Remarque 2.2. — Comme on s'intéresse à un régime perturbatif d'un état d'équilibre global, on s'attend à ce que la partie linéarisée prédomine dans l'opérateur de Boltzmann. Définissons donc l'opérateur bilinéaire symétrique $Q_{\rm sym}(\cdot,\cdot)$ par polarisation de (2), et

$$\mathcal{L}g = -2M^{-1}Q_{\rm sym}(M, Mg). \tag{31}$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est symétrique pour le produit scalaire usuel dans $L^2(M\,dv)$, et admet une unique extension auto-adjointe dans cet espace. La convention de signe a été choisie de sorte que $\mathcal{L}$ soit positif. Si $f_\varepsilon = M(1 + \delta_\varepsilon g_\varepsilon)$, alors

$$Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon) = -M\delta_\varepsilon \mathcal{L}g_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2 Q(Mg_\varepsilon, Mg_\varepsilon).$$

Comme on le verra, c'est cet opérateur $\mathcal{L}$ qui détermine la viscosité ν et le coefficient de diffusion thermique κ.

Remarque 2.3. — Notons bien qu'il existe de nombreux autres changements d'échelles ! Plus de dix systèmes limites différents ont été recensés, sans compter ceux que l'on peut obtenir à partir de variantes de Boltzmann. Et telle équation hydrodynamique, par exemple Navier-Stokes, peut apparaître dans plusieurs contextes différents, parfois avec des lois de température distinctes de (20) ; en ce sens on devrait dire que l'on s'intéresse au passage de l'équation de Boltzmann à *une* équation de Navier-Stokes...

2.2. Théorie de DiPerna-Lions

Dans le programme BGL, le point de départ est la théorie de DiPerna-Lions, sous une forme légèrement modifiée pour inclure des perturbations d'un équilibre global. On note

$$H(f|g) = \int \left(f \log \frac{f}{g} - f + g \right) dx\, dv,$$

(« entropie relative » de f par rapport à g), et $w - L^p$ l'espace de Lebesgue L^p ($p \geqslant 1$) muni de sa topologie faible. Pour l'espace des positions, on se limitera à des domaines sans bord : l'espace $\mathbb{R}^N$, le tore plat $\mathbb{T}^N$.

THÉORÈME 2.4 (adapté de DiPerna, Lions). — *Soient $\varepsilon, \tau_\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ fixés, et soit $B(v - v_*, \omega)$ une section efficace satisfaisant à*

$$B \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N; L^1(S^{N-1})), \qquad \int_{S^{N-1}} B(z, \omega)\, d\omega = o(|z|^2) \text{ quand } |z| \to \infty, \tag{32}$$

et $B > 0$ presque partout. Soit $\Omega_x = \mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{T}^N$. Soit $f_\varepsilon^{in}(x, v)$ une donnée initiale positive sur $\Omega_x \times \mathbb{R}^N_v$, satisfaisant à $H(f_\varepsilon^{in}|M) < +\infty$. Alors il existe une fonction positive $f_\varepsilon(t, x, v) \in C(\mathbb{R}^+; w - L^1(\Omega_x \times \mathbb{R}^N_v))$, telle que $f_\varepsilon(0, \cdot, \cdot) = f_\varepsilon^{in}$, et telle que pour toute non-linéarité β vérifiant

$$\beta \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \quad \beta(0) = 0, \quad \beta'(G) \leqslant \frac{C}{1+G} \qquad (C > 0), \tag{33}$$

l'équation suivante soit vérifiée au sens des distributions :

$$\tau_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \beta\left(\frac{f_\varepsilon}{M}\right) + v \cdot \nabla_x \beta\left(\frac{f_\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon^{-1} \beta'\left(\frac{f_\varepsilon}{M}\right) \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{M}. \tag{34}$$

Remarque 2.5. — L'introduction de β, appelée renormalisation, permet de ne faire intervenir dans (34) que des termes bien définis au sens des distributions, car l'opérateur $f \longmapsto \beta'(f/M)Q(f, f)/M$ est essentiellement sous-linéaire, au vu de l'inégalité dans (33). Les équations (29) et (34) sont bien sûr formellement équivalentes par « chain-rule ».

Remarque 2.6. — La définition de DiPerna-Lions [DPL1] ne considère que des renormalisations de la forme $\beta(f)$; l'extension présentée ici est un cas particulier de celle de [Li2, p. 450]. Dans les articles de Bardos, Golse et Levermore, on choisit typiquement $\beta(G) = \log(1 - \alpha + \alpha G)$, $0 < \alpha < 1$.

Pour une démonstration du théorème 2.4, on pourra consulter l'exposé de Gérard [Ge1]. Une démonstration plus synthétique a été proposée plus récemment par Lions [Li2], grâce à l'important théorème dit de « régularité de l'opérateur Q^+ » (voir références dans [Vi]).

Dans l'optique de la méthode des moments, il importe de savoir si les lois de conservation locales (6) sont vérifiées. Pour des raisons techniques majeures, la théorie de DiPerna-Lions ne peut le garantir que pour $\xi = 1$. Si $\xi = v$, on a seulement une

variante affaiblie, « avec défaut » [LM4] : il existe une fonction matricielle symétrique positive S telle que

$$\tau_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon\, v\, dv\right) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon\, v \otimes v\, dv\right) = -\nabla_x \cdot S. \tag{35}$$

Enfin, la théorie de DiPerna et Lions ne garantit pas non plus le Théorème H, même sous la forme (10). À la place, on dispose à ce jour d'une forme intégrale affaiblie,

$$\forall\, t_0 \geqslant 0, \qquad H\big(f_\varepsilon(t_0,\cdot,\cdot)|M\big) + \frac{1}{\varepsilon\tau_\varepsilon}\int_0^{t_0}\int_{\Omega_x} D(f_\varepsilon(t,x,\cdot))\, dx\, dt \leqslant H(f_\varepsilon^{in}|M). \tag{36}$$

2.3. Stratégie générale de BGL

Pour garantir que $f = f_\varepsilon$ soit bien une perturbation de M, de taille (au plus) δ_ε, on fait à l'instant initial une hypothèse de petitesse de l'entropie relative :

$$H(f_\varepsilon^{in}|M) \leqslant C^{in}\delta_\varepsilon^2. \tag{37}$$

Bien sûr, cela entraîne, au vu de (36), que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} H(f_\varepsilon(t,\cdot,\cdot)|M) + \frac{1}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2}\int_0^t\int_{\Omega_x} D(f_\varepsilon(s,x,\cdot))\, ds\, dx \leqslant C^{in}. \tag{38}$$

La suite du programme BGL s'énonce simplement :
(1) montrer qu'à extraction d'une sous-suite près, $g_\varepsilon \longrightarrow g$;
(2) montrer que Mg est une fluctuation maxwellienne, eq. (28) ;
(3) passer à la limite dans les équations satisfaites par les moments de g_ε.

2.4. Stratégie alternative : la méthode de Yau

Introduite dans le contexte des limites hydrodynamiques de systèmes de particules stochastiques [OVY, Va, Y1, Y2], cette méthode a été adaptée par Golse [Go] au contexte cinétique, après que Brenier [Bn] en eut redécouvert indépendamment une variante. Le principe est le suivant : on introduit explicitement une solution (ρ, u, θ) de l'équation hydrodynamique limite, et on construit une distribution cinétique $\widetilde{f}_\varepsilon$ dont les paramètres hydrodynamiques sont très proches de cette solution. Par exemple, pour le système d'Euler incompressible, avec $\rho = \theta = 0$, on introduit u solution de (15) (et $\nabla_x \cdot u = 0$), puis $\widetilde{f}_\varepsilon(t,x,v) = M_{1,\delta_\varepsilon u,1}$. On cherche ensuite à montrer, par un lemme de Gronwall, que

$$\left[\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} H\big(f_\varepsilon^{in}|\widetilde{f}_\varepsilon^{in}\big) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\right] \Longrightarrow \left[\forall\, t \geqslant 0, \quad \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} H\big(f_\varepsilon(t,\cdot,\cdot)|\widetilde{f}_\varepsilon(t,\cdot,\cdot)\big) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\right], \tag{39}$$

cette dernière limite entraînant que $u_\varepsilon \longrightarrow u$.

Remarque 2.7. — La différence essentielle avec l'approche précédente est que dans l'approche de Yau, on considère l'entropie relative par rapport à un équilibre *local* et non par rapport à l'équilibre *global*.

Cette méthode est plus exigeante que la précédente : d'abord, dériver $H(f_\varepsilon(t,\cdot,\cdot)|\widetilde{f}_\varepsilon(t,\cdot,\cdot))$ par rapport à la variable t nécessite une certaine forme de régularité. Ensuite, la méthode amène à une hypothèse plus contraignante sur la famille des données initiales (« bien préparées »). Le résultat final est cependant plus précis, et plus quantitatif. Pour un survol des applications de la méthode d'entropie, on pourra consulter [GLSR].

2.5. Résultats

Le programme BGL s'avère donner d'excellents résultats pour les limites de l'acoustique, Stokes et Navier-Stokes ; en revanche il échoue pour la limite d'Euler, par suite du manque d'estimations de compacité forte. Pour des raisons (non essentielles) de commodité mathématique, les résultats qui suivent seront énoncés dans le cas où la variable d'espace appartient au tore plat, $\mathbb{T}^N$, avec une exception importante (théorème 2.10).

Commençons par le cas le plus simple : l'acoustique.

THÉORÈME 2.8 (Golse, Levermore). — *On pose $\Omega_x = \mathbb{T}^N$. Supposons $\tau_\varepsilon = 1$, $\delta_\varepsilon = O(\varepsilon^\beta)$, où $\beta > 1/2$. Soient f_ε^{in} une famille de données initiales satisfaisant à* (37)*, et $f_\varepsilon = M(1+\delta_\varepsilon g_\varepsilon)$ des solutions renormalisées associées, construites par le théorème 2.4. On suppose également que les moments $\rho_\varepsilon^{in}, u_\varepsilon^{in}, \theta_\varepsilon^{in}$ associés à g_ε^{in} via les formules* (27) *convergent faiblement quand $\varepsilon \to 0$, au sens des distributions, vers des fonctions $\rho^{in}, u^{in}, \theta^{in} \in L^2(\Omega_x)$. Alors, Mg_ε converge faiblement vers une fluctuation maxwellienne, eq.* (28)*, où ρ, u, θ sont des solutions faibles du système de l'acoustique* (13)*, avec données initiales ρ^{in}, u^{in}, θ^{in}.*

Avant ce théorème, Bardos, Golse et Levermore [BGL5] avaient prouvé un résultat similaire sous des hypothèses plus contraignantes (section efficace bornée). Une extension en est la convergence forte de g_ε vers g si g_ε^{in} converge fortement vers g.

Avant d'aborder la limite de Stokes, nous allons énoncer un lemme préliminaire issu de la théorie des opérateurs linéaires. On suppose que l'opérateur de collision (31) est coercif dans $L^2(M\,dv)$ (sous l'hypothèse (32), cela est vrai par exemple si B est minorée par une constante strictement positive, ou bien si $\int B(z,\omega)\,d\omega \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$) ; dans la suite, nous ferons cette hypothèse sur B sans le rappeler. On montre alors qu'il existe des fonctions uniques ϕ (matricielle) et ψ (vectorielle) dont toutes les composantes sont orthogonales au noyau de $\mathcal{L}$, telles que (I_N désignant la matrice identité)

$$\mathcal{L}\phi = v\otimes v - \frac{|v|^2}{N} I_N, \qquad \mathcal{L}\psi = \frac{|v|^2 v}{2} - \frac{N+2}{2} v, \tag{40}$$

THÉORÈME 2.9 (Golse, Levermore). — *On reprend les notations du théorème 2.8, et on suppose cette fois que $\tau_\varepsilon = \varepsilon$, $\delta_\varepsilon = O(\varepsilon^\beta)$, $\beta > 1$. On suppose en outre que Pu_ε^{in} et $\frac{N}{N+2}\theta_\varepsilon^{in} - \frac{2}{N+2}\rho_\varepsilon^{in}$ convergent faiblement, quand $\varepsilon \to 0$, vers des fonctions u^{in},*

$\theta^{in} \in L^2(\Omega_x)$. Alors, Mg_ε converge faiblement vers une fluctuation maxwellienne, eq. (28)*, telle que $\rho+\theta = 0$, $\nabla_x \cdot u = 0$, et (u, θ) soit solution du système de Stokes* (16)–(19)*, avec données initiales u^{in}, θ^{in}, où la viscosité ν et le coefficient de diffusion κ sont déterminés par les formules*

$$\nu = \frac{1}{(N-1)(N+2)} \int_{\mathbb{R}^N} \phi : \mathcal{L}\phi \, M \, dv, \qquad \kappa = \frac{2}{N(N+2)} \int_{\mathbb{R}^N} \psi \cdot \mathcal{L}\psi \, M \, dv, \tag{41}$$

où l'on note $A : B = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$.

Les premiers résultats de ce type sont dus à Bardos, Golse et Levermore [BGL3], conditionnellement à l'hypothèse que les solutions renormalisées satisfont les lois de conservation locales. Par la suite, Lions et Masmoudi [LM4] montrèrent que l'on pouvait se passer de cette hypothèse en utilisant la positivité de la matrice S dans (35). Cependant, ces travaux restaient limités à l'équation sur le champ de vitesses ; ce n'est que dans [GL] que Golse et Levermore parvinrent à obtenir l'équation de température (19). Une étude de la convergence forte de g_ε, des estimations asymptotiques de $g_\varepsilon - \Pi g_\varepsilon$, où Π est la projection orthogonale dans $L^2(M\,dv)$ sur l'espace vectoriel engendré par $1, v, |v|^2$, sont également possibles.

On considère ensuite la limite de Navier-Stokes, considérablement plus délicate.

THÉORÈME 2.10 (Golse, Levermore, Lions, Masmoudi, Saint-Raymond)

On suppose maintenant que $\tau_\varepsilon = \delta_\varepsilon = \varepsilon$, que $B(z,\omega)/|\cos(z,\omega)|^{N-2}$ est majorée et minorée par des constantes strictement positives, et que les fonctions ϕ, ψ dans (40) *sont à croissance au plus polynomiale*[8]*. On se limite en outre au cas où $\Omega_x = \mathbb{R}^N$ avec $N = 3$. On suppose que Pu_ε^{in}, $\frac{N}{N+2}\theta_\varepsilon^{in} - \frac{2}{N+2}\rho_\varepsilon^{in}$ convergent au sens des distributions vers u^{in}, $\theta^{in} \in L^2(\Omega_x)$. Alors, avec les mêmes notations que précédemment, il existe une sous-suite (ε_n), telle que Mg_{ε_n} converge faiblement vers une fluctuation maxwellienne, eq.* (28)*, satisfaisant à $\rho + \theta = 0$, $\nabla_x \cdot u = 0$, $u, \theta \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega_x)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_x))$, et (u, θ) soit une solution faible du système de Navier-Stokes* (17)–(20)*, avec données initiales u^{in}, θ^{in}, où ν et κ sont déterminés par* (41)*.*

Ce théorème a une histoire mouvementée, et a nécessité les efforts parallèles de tous les auteurs déjà cités, à partir de la première ébauche par Bardos, Golse et Levermore [BGL3] ; dans le paragraphe suivant, nous expliciterons plus précisément les contributions respectives des uns et des autres. L'énoncé ci-dessus est extrait de Golse et Saint-Raymond [GSR]. Dans le cas où une solution faible de (17) est automatiquement forte, la convergence faible peut être remplacée par de la convergence forte sous une hypothèse adéquate sur les données initiales.

Passons enfin à la limite d'Euler incompressible, que l'on ne sait actuellement traiter que par la méthode d'entropie de Yau. Les problèmes qui se posent dans la mise en

[8] Ces hypothèses techniques sur B sont certainement superflues, mais n'ont pas encore été éliminées.

œuvre de cette méthode ne sont pas tout à fait les mêmes que pour le programme BGL : il n'y a pas besoin de compacité, mais seulement d'estimations d'intégrabilité suffisantes pour majorer les termes d'erreur dans le lemme de Gronwall. En revanche, on retrouve deux difficultés attendues : le besoin apparent de lois de conservation locales, et le manque éventuel de régularité. De façon surprenante, elles peuvent être surmontées toutes les deux : d'une part, les lois de conservation locales exactes ne sont pas toujours nécessaires, comme l'ont prouvé Lions et Masmoudi [LM4]. D'autre part, comme l'a montré Golse [Go, pp. 58–66] la méthode s'accommode très bien du concept de solution dissipative [Li3, Li4], qui permet de contourner les problèmes éventuels de régularité :

DÉFINITION 2.11 (Lions). — *Soit $\Omega_x = \mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{T}^N$. Un champ de vecteurs $u(t,x) \in C(\mathbb{R}^+; w - L^2(\Omega_x))$ est appelé solution dissipative de l'équation d'Euler incompressible* (15)*, avec donnée initiale u^{in}, si $\nabla_x \cdot u = 0$, $u(0,\cdot) = u^{in}$, et si, pour tout champ de vecteurs $v(t,x)$ régulier et de divergence nulle, et pour tout $t \geqslant 0$,*

$$\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leqslant \|u^{in} - v(0,\cdot)\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^t \|\nabla_x v(s,\cdot)\|_{L^\infty}\, ds\right)$$
$$- \int_0^t \int_{\Omega_x} \exp\left(\int_s^t \|\nabla_x v(\tau,\cdot)\|_{L^\infty}\, d\tau\right) \left[\frac{\partial v}{\partial t} + P(v\cdot\nabla_x v)\right] \cdot (u-v)(s,x)\, dx\, ds.$$

(Pour se convaincre qu'il s'agit bien d'une notion de solution faible, choisir $v =$ solution régulière, $v(0,\cdot) = u^{in}$, et remarquer que le membre de droite s'annule, d'où $u = v$!!)

En regroupant les résultats de [Go] et de [LM4], on parvient au

THÉORÈME 2.12 (Golse, Lions, Masmoudi). — *On suppose $\tau_\varepsilon = \delta_\varepsilon$, $\varepsilon = O(\delta_\varepsilon^\beta)$, $\beta > 1$, et $\Omega_x = \mathbb{T}^N$. On se donne $u^{in} \in L^2(\Omega_x)$, $\nabla_x \cdot u^{in} = 0$, et f_ε^{in} tel que $H(f_\varepsilon^{in} | M_{1,\delta_\varepsilon u^{in},1}) = o(\delta_\varepsilon^2)$. On se donne des solutions g_ε de* (29)*, et on suppose en outre*[(9)] *que la famille $M|v|^2(g_\varepsilon)^2/(2+\delta_\varepsilon g_\varepsilon)$ est relativement compacte dans $w - L^1(dt\,dx\,dv)$. Alors, il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $g_{\varepsilon_n} \longrightarrow u \cdot v$, où u est solution dissipative de l'équation d'Euler incompressible avec donnée initiale u^{in}.*

Remarque 2.13. — Le principal défaut de ce théorème est l'usage de la notion très faible de solution dissipative. Cependant, chaque fois que l'on sait construire une solution forte, suffisamment régulière (solution régulière en temps petit, par exemple), on sait alors qu'il s'agit de l'unique solution dissipative, voir Lions [Li3], ce qui mène à un résultat plus « standard ». Dans ce cas, un théorème analogue (aux espaces fonctionnels près...) pourrait être démontré par des méthodes plus traditionnelles de développement de Hilbert tronqué ; pour autant, la méthode d'entropie de Yau est en fait plus naturelle et plus satisfaisante.

(9) Des travaux très récents de Saint-Raymond suggèrent que l'on peut se passer de cette hypothèse.

Remarque 2.14. — La méthode, en l'état actuel des choses, ne permet pas de retrouver d'équation de température telle que (18). À cause de cela, et de l'hypothèse contraignante sur les données initiales, elle donne dans l'étude de la limite de Navier-Stokes, par exemple (voir [Go, GLSR]), des résultats moins performants que la méthode BGL.

2.6. Limite de Navier-Stokes : un canevas de preuve à rendre rigoureux

Nous allons donner ci-après un canevas de preuve informelle (inspiré de Bardos, Golse et Levermore) pour le théorème 2.10, sur la base duquel nous pourrons expliciter plus clairement les difficultés de l'étude ; cela permettra en outre au lecteur d'avoir une idée de la façon dont apparaissent les mystérieux coefficients de diffusion (41).

On se limite ici à l'obtention de l'équation sur le champ de vitesses. L'équation (29), dans le changement d'échelles menant à Navier-Stokes, devient

$$\varepsilon \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x g_\varepsilon = \frac{1}{M} \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} = -\frac{\mathcal{L} g_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{M} Q(M g_\varepsilon, M g_\varepsilon). \tag{42}$$

En multipliant cette équation par ε, en faisant tendre ε vers 0, et en admettant que g_ε converge vers une fonction g, on trouve formellement $\mathcal{L} g = 0$, ce qui entraîne que Mg est une fluctuation maxwellienne, eq. (28).

Posons ensuite $q_\varepsilon = (f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} - f_\varepsilon f_{\varepsilon,*})/(\varepsilon^2 M M_*)$, de sorte que le membre de droite dans (42) peut se réécrire $\int q_\varepsilon M_* B \, dv_* \, d\omega$. Admettant que q_ε converge vers une fonction q quand $\varepsilon \to 0$, on obtient formellement, en passant à la limite dans (42),

$$v \cdot \nabla_x g = \int_{\mathbb{R}^N \times S^{N-1}} q M_* \, B \, dv_* \, d\omega. \tag{43}$$

On intègre cette relation contre M et Mv successivement, pour trouver, grâce à (27),

$$\nabla_x \cdot u = \int q M M_* \, B \, dv \, dv_* \, d\omega,$$

$$\nabla_x (\rho + \theta) = \frac{1}{N} \int q M M_* \, v \, B \, dv \, dv_* \, d\omega.$$

Mais q satisfait les lois de symétrie $q' = -q$, $q_* = q$ par passage à la limite des relations analogues pour q_ε ; des considérations élémentaires permettent d'en déduire que les deux intégrales ci-dessus sont nulles. On a donc obtenu formellement la relation d'incompressibilité $\nabla_x \cdot u = 0$, et la relation de Boussinesq (21).

Soit maintenant $u_\varepsilon = \int M g_\varepsilon v \, dv$. Après division de (42) par ε, et intégration contre $M \, v \, dv$, on obtient, grâce à la loi de conservation locale (6) (pour $\xi = v$), l'équation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot \left(\int M \, g_\varepsilon v \otimes v \, dv \right) = 0. \tag{44}$$

En supposant que g_ε converge vers g, le terme de gauche converge, au sens des distributions, vers $\partial u / \partial t$. Reste donc le cœur de la démonstration : prouver que

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot \left(\int M g_\varepsilon v \otimes v \, dv \right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \nabla_x \cdot (u \otimes u) - \nu \Delta_x u + \nabla_x p.$$

Par application du projecteur de Leray P, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{\varepsilon} P\nabla_x \cdot \left(\int M g_\varepsilon v \otimes v \, dv \right) \longrightarrow P\nabla_x \cdot (u \otimes u) - \nu P \Delta_x u. \tag{45}$$

Décomposons $v \otimes v$ selon $v \otimes v = (v \otimes v - \frac{|v|^2}{N} I_N) + \frac{|v|^2}{N} I_N$. On peut se débarrasser du deuxième terme, puisque

$$P\nabla_x \cdot \left(I_N \int M g_\varepsilon \frac{|v|^2}{N} \, dv \right) = P\nabla_x \left(\int M g_\varepsilon \frac{|v|^2}{N} \, dv \right) = 0.$$

Combinant cette remarque à la définition (40), il suffit de passer à la limite dans

$$\frac{1}{\varepsilon} P\nabla_x \cdot \left(\int g_\varepsilon \mathcal{L}\phi \, M \, dv \right) = P\nabla_x \cdot \left(\int \left(\frac{\mathcal{L} g_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \phi \, M \, dv \right),$$

où l'on a utilisé le caractère auto-adjoint de $\mathcal{L}$ dans $L^2(M\,dv)$.

C'est à ce stade qu'apparaissent les termes de viscosité et de convection : écrivons

$$\frac{\mathcal{L} g_\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{1}{M} \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{1}{M} Q(M g_\varepsilon, M g_\varepsilon). \tag{46}$$

Le premier terme dans le membre de droite de (46) va contribuer à la viscosité : en effet,

$$\int \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} \phi \, dv = \int q_\varepsilon \phi \, M M_* \, B \, dv \, dv_* \, d\omega \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int q \phi \, M M_* \, B \, dv \, dv_* \, d\omega.$$

Tenant compte de (43) et de (28), cette dernière quantité s'écrit $\int \phi (v \otimes v : \nabla_x u) \, M \, dv$. Par des arguments de symétrie on montre qu'elle est proportionnelle à $\nabla_x u + (\nabla_x u)^T$, un calcul d'algèbre élémentaire indiquant que le coefficient de proportionnalité est ν. D'où

$$\nabla_x \cdot \left(\int \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} \phi \, dv \right) \longrightarrow \nu \Delta_x u.$$

En revanche, du dernier terme dans (46), quadratique en g, on va tirer un terme de convection. Désignons par Π l'opérateur de projection dans $L^2(M\,dv)$ sur l'espace engendré par $1, v, |v|^2$, et admettons (ce qui est plausible au vu de (28)) que g_ε ressemble asymptotiquement à Πg_ε ; notons que le champ de vitesses associé à Πg_ε est toujours u_ε. Une étude simple mêlant algèbre élémentaire et symétries montre que

$$\int \frac{1}{M} Q(M \Pi g_\varepsilon, M \Pi g_\varepsilon) \, \phi \, M \, dv = u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon - \frac{|u_\varepsilon|^2}{N} I_N.$$

Si l'on admet enfin que

$$u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon \longrightarrow u \otimes u, \tag{47}$$

alors on trouve bien, après application du projecteur de Leray,

$$P\nabla_x \cdot \left(\int Q(M g_\varepsilon, M g_\varepsilon) \phi \, dv \right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} P\nabla_x \cdot (u \otimes u).$$

Dans cet argument, nous avons fait de nombreuses hypothèses, en particulier de convergence ; on peut les justifier presque toutes, mais cette tâche s'avère extrêmement ardue :

(a) toutes les étapes nécessitent des estimations plus ou moins fortes d'intégrabilité sur g_ε, alors que nous ne disposons que des estimations très faibles fournies par les bornes d'entropie. Ainsi, la toute première ligne, eq. (42), n'a aucun sens car on ne sait même pas définir $Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)$ au sens des distributions ; il en est de même de q_ε, et il faut réinterpréter toutes les formules où ce terme apparaît ;

(b) la justification des convergences nécessite (au moins) des hypothèses de compacité faible, qui se ramènent également à des bornes d'intégrabilité suffisamment fortes ;

(c) la loi de conservation locale (44) n'est pas garantie par la théorie de DiPerna-Lions ;

(d) pour passer à la limite selon (47), il faudrait prouver que le champ de vitesses u_ε converge *fortement* vers u. Or, du fait de la présence éventuelle des *ondes acoustiques*, qui se propagent avec une vitesse très élevée (d'ordre $1/\varepsilon$ dans nos échelles macroscopiques), rien ne garantit cette convergence forte ! En fait, si la variable x vit dans le tore plat, on peut même se convaincre qu'il n'y a *pas* convergence forte, de sorte que (47) est irrémédiablement faux...

Les trois premières difficultés ne sont pas seulement propres à la limite de Navier-Stokes, mais se rencontrent dans toutes les limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann. Le concept de solution renormalisée permet de surmonter une partie de (a), au prix d'une grande complexité technique.

Partant de ces principes, dans l'article pionnier [BGL3], Bardos, Golse et Levermore parvenaient à un énoncé satisfaisant sur la limite de Navier-Stokes, modulo cinq problèmes majeurs :

(1) les démonstrations reposant sur les lois de conservation locales, les auteurs étaient amenés à faire l'hypothèse que ces lois étaient satisfaites pour les solutions de DiPerna-Lions, ce que personne ne sait démontrer ;

(2) pour éviter le délicat problème du contrôle du flux de chaleur, ils ne considéraient que l'équation de quantité de mouvement, sans chercher à établir l'équation de température ;

(3) pour éviter le problème des ondes acoustiques, et le défaut de compacité qui en résulte, ils se limitaient au problème stationnaire en temps ;

(4) ils étaient amenés à faire certaines hypothèses de « compacité faible non linéaire » sur la famille (g_ε), en particulier l'équi-intégrabilité de $|v|^2(g_\varepsilon^2)/(2+\varepsilon g_\varepsilon)$, que l'on ne sait pas démontrer ;

(5) enfin, les hypothèses faites sur la section efficace étaient très contraignantes, et difficiles à vérifier en pratique sauf dans le cas dit des sections efficaces « maxwelliennes avec troncature angulaire ».

Toutes ces difficultés ont été résolues dans les quelques dernières années. Tout d'abord, Lions et Masmoudi [LM3] montrèrent comment résoudre le problème (3). À peu près simultanément, Bardos, Golse et Levermore [BGL4, BGL5] montrèrent comment dans certains cas on pouvait se passer de l'hypothèse (1) ; d'autres arguments furent ensuite proposés par Lions et Masmoudi [LM4], enfin par Golse et Levermore [GL], qui par la même occasion permettaient d'estimer les flux de chaleur (problème (2)), et de traiter des hypothèses beaucoup plus générales sur la section efficace. C'est finalement le problème (4) qui resta ouvert le plus longtemps ; sa solution est due à Golse et Saint-Raymond [GSR] (dans sa version actuelle, sous des hypothèses techniques qui cependant restreignent la généralité dans le choix de la section efficace).

Dans les paragraphes 3 à 5, nous allons maintenant exposer de manière plus synthétique les idées-clés de ces diverses contributions.

3. ESTIMATIONS D'ENTROPIE ET CONSÉQUENCES

Les estimations d'entropie vont jouer plusieurs rôles fondamentaux :

(1) la borne d'entropie (38) implique certaines propriétés de compacité faible sur g_ε, comme le montrent Bardos, Golse et Levermore [BGL3] ;

(2) l'estimation de dissipation d'entropie mènera à l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, par un argument établi dans [BGL3], grandement simplifié dans [GL] ;

(3) les estimations d'entropie et de dissipation d'entropie combinées vont aussi permettre d'établir que *les lois de conservation locales de quantité de mouvement et d'énergie cinétique sont satisfaites dans la limite de faible nombre de Knudsen*, et cela même si elles ne sont pas satisfaites à nombre de Knudsen fixé.

Parlons plus en détail du point (3), qui est crucial. Le premier résultat de ce type apparaissait dans le récent travail de Bardos, Golse et Levermore [BGL4, BGL5] sur les limites de l'acoustique et de Stokes, et constituait une avancée psychologique majeure. L'argument, basé sur l'annulation d'une mesure de défaut (grâce à une loi de conservation globale pour le modèle limite), nécessitait des hypothèses assez restrictives sur la section efficace, et ne concernait que la conservation de quantité de mouvement. Lions et Masmoudi [LM4] ont alors proposé une autre technique, basée sur la matrice symétrique S dans (35), qui permettait d'une part d'affaiblir les hypothèses pour la limite de Stokes, d'autre part d'étendre le résultat à la limite d'Euler. Finalement, Golse et Levermore [GL] ont suggéré un troisième argument, exploitant mieux les symétries de l'opérateur de Boltzmann, qui s'avère encore plus performant, et permet en outre d'obtenir des équations de température grâce au contrôle du flux d'énergie cinétique. Dans [GL], cet argument est mis en œuvre sur les limites de l'acoustique et

de Stokes ; dans un travail en préparation de Levermore et Masmoudi, et indépendamment dans [GSR], il est adapté au cas de Navier-Stokes. On notera que les méthodes de Golse et Levermore reposent en partie sur des inégalités élémentaires subtiles ne nécessitant aucun concept mathématique plus avancé que la notion de transformée de Legendre ! Pour en donner un aperçu, commençons par réécrire les estimations d'entropie et de dissipation d'entropie dans un formalisme adéquat.

LEMME 3.1. — *Soient $h(z) = (1+z)\log(1+z) - z$, et $d(z) = z\log(1+z)$. Alors,*

$$H(f|M) = \int h\left(\frac{f-M}{M}\right) M\, dv\, dx, \tag{48}$$

$$D(f) = \frac{1}{4}\int d\left(\frac{f'f'_* - ff_*}{ff_*}\right) ff_*\, B\, d\omega\, dv\, dv_*. \tag{49}$$

De plus, les fonctions h et d sont convexes et vérifient $h(|z|) \leqslant h(z)$, $d(|z|) \leqslant d(z)$, tandis que leurs transformées de Legendre respectives h^*, d^* satisfont pour $z \geqslant 0$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

$$h^*(\lambda z) \leqslant \lambda^2 h^*(z), \qquad d^*(\lambda z) \leqslant \lambda^2 d^*(z), \qquad h^*(z) = O(e^z), \quad d^*(z) = O(e^z).$$

Soit également $s(z) = z^2/(1+z/3)$; on remarque que $s(z) \leqslant h(z)$ pour tout $z \geqslant -1$. On montre alors le lemme élémentaire [BGL3] :

LEMME 3.2. — *Pour $\delta > 0$ assez petit, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $g \geqslant -1/\delta$, $\zeta > 0$, $a \geqslant \max(\delta, \zeta X)$, $X, Y, Z \geqslant 0$, les inégalités suivantes soient vérifiées :*

$$X|g| \leqslant \frac{1}{a}h^*(X) + \frac{a}{\delta^2}h(\delta g); \tag{50}$$

$$X\frac{s(\delta g)}{\delta^2} \leqslant C|\log\delta|\left(\frac{h(\delta g)}{\delta^2} + O(e^{\frac{8}{3}X})\right); \tag{51}$$

$$XY|q| \leqslant \frac{aZ}{\zeta^2}d^*\left(\frac{\zeta XY}{a}\right) + \frac{aZ}{\zeta^2}d\left(\frac{\zeta q}{Z}\right) \leqslant \frac{X^2Z}{a}d^*(Y) + \frac{aZ}{\zeta^2}d\left(\frac{\zeta q}{Z}\right). \tag{52}$$

3.1. Bornes d'entropie et compacité faible

Par application de (50) avec $X = (1+|v|^2)/3$, $\delta = \delta_\varepsilon$ et $g = g_\varepsilon$, et de la borne d'entropie (38), on trouve facilement que la famille g_ε est bornée dans

$$L^\infty(dt; L^1((1+|v|^2)M\, dv\, dx)),$$

et relativement compacte dans

$$w - L^1(dt; w - L^1((1+|v|^2)\, M\, dv)).$$

Comme $s \leqslant h$, il existe une constante numérique C telle que

$$\int \frac{g_\varepsilon^2}{2+\delta_\varepsilon g_\varepsilon} M\,dv\,dx \leqslant C\frac{H(f_\varepsilon|M)}{\delta_\varepsilon^2} \leqslant CC^{in}. \tag{53}$$

En outre, grâce à (51) il existe une constante numérique C telle que

$$\int |v|^2\,\frac{g_\varepsilon^2}{2+\delta_\varepsilon g_\varepsilon} M\,dv\,dx \leqslant C|\log\delta_\varepsilon|\left[\frac{H(f_\varepsilon|M)}{\delta_\varepsilon^2}+1\right] \leqslant C(C^{in}+1)|\log\delta_\varepsilon|. \tag{54}$$

3.2. Symétrisation et estimation de dissipation d'entropie

Dans l'étape suivante, on quantifie de manière ad hoc l'idée que l'intégrande $f'f'_* - ff_*$ ressemble, asymptotiquement quand $\varepsilon \to 0$, à sa version linéarisée $MM_*(g'+g'_*-g-g_*)$.

LEMME 3.3. — *On pose* $q_\varepsilon = (f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} - f_\varepsilon f_{\varepsilon,*})/(\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon MM_*)$, *et* $N_\varepsilon = 1+\delta_\varepsilon g_\varepsilon/3$. *Alors,*

$$\left\| \frac{q_\varepsilon}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}}\left(\frac{g'_\varepsilon}{N'_\varepsilon}+\frac{g'_{\varepsilon,*}}{N'_{\varepsilon,*}}-\frac{g_\varepsilon}{N_\varepsilon}-\frac{g_{\varepsilon,*}}{N_{\varepsilon,*}}\right)\right\| \leqslant CC^{in}\frac{\delta_\varepsilon|\log\delta_\varepsilon|^{\frac12}}{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}}, \tag{55}$$

où $\|\cdot\|$ *désigne la norme dans* $L^\infty(dt;L^1(dx;L^2(MM_*\,B\,d\omega\,dv\,dv_*)))$.

Esquisse de preuve. — Par un calcul facile, le membre de gauche vaut $F'-F$, avec

$$F = \frac13\left(\frac{1}{N'_{\varepsilon,*}N'_\varepsilon}+\frac{1}{N'_{\varepsilon,*}}+\frac{1}{N'_\varepsilon}-2\right)\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}}\frac{g_{\varepsilon,*}g_\varepsilon}{N_{\varepsilon,*}N_\varepsilon}. \tag{56}$$

Les termes entre parenthèses se majorent par une constante numérique, et l'on parvient au résultat en combinant les bornes d'entropie (53) (54) avec l'inégalité

$$\int\left(\frac{g_{\varepsilon,*}g_\varepsilon}{N_{\varepsilon,*}N_\varepsilon}\right)^2 M\,M_*\,(1+|v-v_*|^2)\,dv\,dv_* \leqslant C\left(\int\frac{(1+|v|^2)g_\varepsilon^2}{N_\varepsilon^2}\,M\,dv\right)\left(\int\frac{g_\varepsilon^2}{N_\varepsilon^2}\,M\,dv\right). \qquad \square$$

3.3. Equilibre thermodynamique local

LEMME 3.4. — *Avec les notations précédentes, il existe une constante numérique* C *telle que*

$$\int\frac{q_\varepsilon^2}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*}}\,M\,M_*\,B\,d\omega\,dv\,dv_*\,dx\,dt \leqslant C\frac{D(f)}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2} \leqslant CC^{in}. \tag{57}$$

Preuve. — C'est une conséquence directe des inégalités élémentaires

$$(N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*})^{-1} \leqslant (81/4)MM_*/(f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*}+f_\varepsilon f_{\varepsilon,*}),$$
$$z^2/(1+z/2) \leqslant d(z) \quad (\text{pour } z \geqslant -1)$$

et de (49). $\square$

PROPOSITION 3.5. — *Soit g une valeur d'adhérence de la famille (g_ε) quand $\varepsilon \to 0$. Alors g vérifie* (28)*, où $\rho, u, \theta \in L^\infty(dt; L^2(dx))$.*

Esquisse de preuve. — Par un théorème classique, il suffit de montrer que

$$g' + g'_* - g - g_* = 0. \tag{58}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que $g_\varepsilon \longrightarrow g$ faiblement. Par l'inégalité élémentaire $|g_\varepsilon - g_\varepsilon/N_\varepsilon| \leqslant C\delta_\varepsilon g_\varepsilon^2/N_\varepsilon$ et la borne d'entropie (53), on voit que $g_\varepsilon/N_\varepsilon$ converge faiblement vers g. On multiplie alors (55) par $\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}$, et on passe à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Le terme en q_ε disparaît à la limite au vu du lemme 3.4, et on trouve finalement (58). □

Une fois ce lemme établi, on se ramène par extraction au cas où $g_\varepsilon \longrightarrow g$ faiblement.

3.4. Lois de conservation approchées

Voyons maintenant comment utiliser les bornes d'entropie pour établir des lois de conservation asymptotiques. Nous allons nous limiter ici à un exemple de contrôle de la contribution des collisions ; cependant, mentionnons bien que les bornes d'entropie servent aussi de manière cruciale dans [GL] pour contrôler les *flux* de quantité de mouvement et d'énergie cinétique, avec les lemmes 3.2 et 3.3 comme outils-clés.

PROPOSITION 3.6. — *Soit ξ un invariant de collision : $\xi(v) = 1, v_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ ou $|v|^2$, et soit $\alpha > 0$. Alors, avec les notations précédentes, on a, pour $p = 1, 2$,*

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon}\left|\int \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{(1+\alpha\delta_\varepsilon g_\varepsilon)^p}\xi(v)\,dv\right| \leqslant C\left(\frac{H(f_\varepsilon|M)}{\delta_\varepsilon^2} + \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2} + 1\right)\left(\delta_\varepsilon|\log\delta_\varepsilon|^{1/2} + \sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon|\log\delta_\varepsilon|\right),$$

où C est une constante dépendant uniquement de α et de N.

Esquisse de preuve. — Considérons par exemple le cas $p = 1$, $\alpha = 1/3$: la quantité à estimer peut se réécrire $\int MM_*B\xi\frac{q_\varepsilon}{N_\varepsilon}$. En utilisant les symétries de l'opérateur de collision et le fait que ξ soit un invariant de collision, on trouve que cette quantité vaut

$$\frac{1}{3}\int MM_*B\xi\frac{\delta_\varepsilon g_{\varepsilon,*}}{N_{\varepsilon,*}N_\varepsilon}q_\varepsilon - \frac{2}{9}\int MM_*B\xi'\frac{\delta_\varepsilon^2 g_{\varepsilon,*}g'_{\varepsilon,*}}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*}}q_\varepsilon + \frac{1}{6}\int MM_*B\xi\frac{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon q_\varepsilon^2}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*}}. \tag{59}$$

On estime alors chacun des trois termes séparément. Les deux premiers se majorent en $O(\delta_\varepsilon|\log\delta_\varepsilon|^{\frac{1}{2}})$, le dernier en $O(\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon|\log(\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon)|)$, avec des constantes faisant

intervenir les fonctionnelles d'entropie et de dissipation d'entropie. Contentons-nous ici de majorer le premier terme : il suffit de prouver

$$\left| \int \frac{(1+|v|^2)\delta_\varepsilon g_{\varepsilon,*} q_\varepsilon}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}} \, M \, M_* \, B \, d\omega \, dv \, dv_* \right| \leqslant C \left(\frac{H(f_\varepsilon|M)}{\delta_\varepsilon^2} + \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2} + 1 \right) \delta_\varepsilon |\log \delta_\varepsilon|^{1/2}.$$

Pour cela on applique l'inégalité (52) avec

$$q = q_\varepsilon, \quad X = \frac{|g_{\varepsilon,*}|}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}}, \quad Y = \frac{1+|v|^2}{3}, \quad Z = \frac{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*}}{M M_*}, \quad \zeta = \sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon,$$

et on intègre en v, v_*, ω contre B. En utilisant $\int e^{(1+|v|^2)/3}(1+|v|^2)\, M \, dv < +\infty$, et les inégalités $f_\varepsilon/N_\varepsilon \leqslant 3M/\delta$, $f_{\varepsilon,*}/N_{\varepsilon,*} \leqslant 3M_*/\delta$, on parvient à une majoration en

$$C\delta_\varepsilon \left(\frac{1}{a\delta_\varepsilon^2} \int \frac{g_{\varepsilon,*}^2}{N_*} (1+|v_*|^2)\, M_* \, dv_* + a \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2} \right),$$

et il ne reste qu'à appliquer (54) et à optimiser en a pour conclure.

Les autres cas se traitent de même, par des estimations de plus en plus complexes. □

4. COMPACITÉ FORTE CONDITIONNELLE POUR NAVIER-STOKES

Les estimations du paragraphe précédent, combinées à des techniques classiques et à un usage adroit de la notion de solution renormalisée, sont suffisantes pour traiter les limites de l'acoustique et de Stokes [GL]. Il n'en va pas de même pour la limite de Navier-Stokes : d'une part, le contrôle des lois de conservation doit être affiné ; mais surtout, la présence du terme de convection quadratique, $\nabla_x \cdot (u \otimes u)$, rend nécessaire l'utilisation d'une certaine forme de convergence forte (convergence en norme). Rappelons en effet que si u_ε, famille bornée de $L^2(\mathbb{R}^m)$, converge faiblement vers u sans converger fortement, alors $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ *ne converge pas* vers $u \otimes u$ au sens des distributions.

Le critère de Riesz-Fréchet-Kolmogorov [Br] permet de traduire une propriété de compacité forte en termes de « régularité ». Plus précisément, soit (u_ε) bornée dans L^2 et vérifiant la condition de « non-fuite à l'infini » $\lim_{R\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(|x|\geqslant R)} = 0$; alors la famille (u_ε) est fortement relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ si et seulement si

$$\lim_{y\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon(\cdot + y) - u_\varepsilon\|_{L^2} = 0. \tag{60}$$

Ce point de vue permet de séparer le problème de compacité forte dans la limite de Navier-Stokes en deux sous-problèmes : compacité forte (ou régularité) par rapport à la variable x ; et compacité forte par rapport à la variable t. Nous allons voir comment ces deux problèmes peuvent être résolus, à condition de pouvoir établir des

estimations d'*intégrabilité* suffisantes (c'est en ce sens qu'il s'agit de compacité forte *conditionnelle*). Dans ce paragraphe, on considère des solutions de (42), où $\Omega_x = \mathbb{R}^N$; l'analyse est identique pour $\Omega_x = \mathbb{T}^N$.

4.1. Compacité forte en espace

Cette première difficulté a été résolue par Bardos, Golse et Levermore [BGL3] grâce aux *lemmes de moyenne cinétiques*. Introduits par Golse et al. [GPS, GLPS], améliorés et généralisés par de nombreux auteurs, ces lemmes donnent des estimations de régularité dans les variables (t, x) pour les solutions de certaines équations cinétiques après moyennisation par rapport à la variable v. Ils constituent l'un des outils-clés de la théorie de DiPerna-Lions et ses extensions, et plus généralement de toute la théorie cinétique moderne (pour une introduction et de nombreuses références, voir Bouchut [Bo]). Dans notre contexte, l'énoncé utile est fourni par le

LEMME 4.1. — 1. *Soit (h_ε) une famille de solutions de*

$$\varepsilon \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h_\varepsilon = S_\varepsilon, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad v \in \mathbb{R}^N, \tag{61}$$

où $\varepsilon \leqslant 1$, $h_\varepsilon(t,x,v)$ et $S_\varepsilon(t,x,v)$ sont bornées dans $L^2(dt\,dx\,M\,dv)$. Alors, pour toute fonction-test $\varphi(v)$, C^∞ à support compact, il existe une constante $C = C(\varphi, N)$, telle que

$$\left\| \int h_\varepsilon(\cdot,\cdot,v)\,\varphi(v)\,M\,dv \right\|_{L^2((0,T);H^{1/2}(\mathbb{R}^N_x))} \leqslant C\big(\|h_\varepsilon\|_{L^2} + \|S_\varepsilon\|_{L^2}\big).$$

Ici l'espace de Sobolev fractionnaire $H^{1/2}$ est défini via la transformée de Fourier par $\|u\|^2_{H^{1/2}} = \int (1+|\xi|)|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi$, où $\widehat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,dx$.

2. *Avec les mêmes notations, supposons la famille (h_ε) faiblement relativement compacte dans $L^1(dt\,dx\,M\,dv)$ et (S_ε) bornée dans $L^1(dt\,dx\,M\,dv)$. Alors (h_ε) est fortement compacte en x, au sens où pour toutes fonctions $\psi(t)$ et $\varphi(v)$, C^∞ à support compact,*

$$\lim_{y\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \left\| \psi(\cdot) \int \varphi(v) \Big(h_\varepsilon(\cdot,\cdot+y,v) - h_\varepsilon(\cdot,\cdot,v) \Big)\, M\,dv \right\|_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^N_x)} = 0. \tag{62}$$

Remarque 4.2. — Bien sûr, à cause du facteur ε qui apparaît dans l'équation (61), on ne peut espérer aucune régularisation (uniforme en ε) par rapport à la variable t.

Esquisse de preuve. — La preuve de 1., basée sur la transformée de Fourier, est une variante facile de celles que l'on trouve dans [Ge1] ou [GLPS]. L'énoncé 2., dû à Golse et Saint-Raymond, se démontre par une variante de la stratégie de [GLPS] : on écrit

$$\varepsilon \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h_\varepsilon + \lambda h_\varepsilon = S_\varepsilon + \lambda h_\varepsilon, \tag{63}$$

où $\lambda > 0$ sera choisi plus tard. On définit $R_\varepsilon^\lambda = (\varepsilon\partial_t + v\cdot\nabla_x + \lambda)^{-1}$, dont on vérifie que la norme $L^1 \to L^1$ est $1/\lambda$. Introduisant un paramètre de troncature $\alpha > 0$, on écrit alors

$$h_\varepsilon = R_\varepsilon^\lambda(S_\varepsilon) + \lambda R_\varepsilon^\lambda(h_\varepsilon 1_{h_\varepsilon \geqslant \alpha}) + \lambda R_\varepsilon^\lambda(h_\varepsilon 1_{h_\varepsilon \leqslant \alpha}).$$

Estimons chacun des trois termes apparaissant au membre de droite. La norme L^1 du premier est bornée en $O(1/\lambda)$; par compacité faible de (h_ε), la norme L^1 du deuxième, pour λ fixé, est arbitrairement petite pour α assez grand ; enfin, il résulte facilement de la partie 1 du lemme que, pour α et λ fixés, le troisième terme est borné dans $L^2((0,T); H^{1/2}(\mathbb{R}^N_x))$. La conclusion s'ensuit par des arguments simples de régularisation. □

En l'absence d'estimations sur le membre de droite dans (42), il est impossible d'appliquer directement le lemme 4.1 avec $h_\varepsilon = g_\varepsilon$. On utilise donc la définition des solutions renormalisées : on pose $h_\varepsilon = \beta_\varepsilon(g_\varepsilon)$, de sorte que h_ε satisfait l'équation

$$\varepsilon\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t} + v\cdot\nabla_x h_\varepsilon = \beta_\varepsilon'(g_\varepsilon)\frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2 M} \equiv S_\varepsilon.$$

On choisit la fonction $\beta_\varepsilon(g_\varepsilon)$ de la forme $\widetilde{g}_\varepsilon = g_\varepsilon\gamma(\varepsilon g_\varepsilon)$, où γ est une fonction C^∞ à support compact dans $[-1,1]$, identiquement égale à 1 dans un voisinage de 0 ($\widetilde{g}_\varepsilon$ est donc une approximation de g_ε, tronquée à hauteur $1/\varepsilon$). Les estimations fournies par l'entropie sont suffisantes pour que l'on puisse appliquer le lemme 4.1 à la famille (h_ε), et également remplacer $\varphi(v)$ dans (62) par v, grâce au contrôle des grandes vitesses. Posons

$$\widetilde{u}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} M\widetilde{g}_\varepsilon v\,dv, \tag{64}$$

on montre ainsi l'estimation de *compacité forte en x* sur le champ de vitesses $\widetilde{u}_\varepsilon(t,x)$:

$$\lim_{y\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\big\|\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot,\cdot+y) - \widetilde{u}_\varepsilon\big\|_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^N_x)} = 0. \tag{65}$$

Si l'on pouvait combiner ce renseignement avec une estimation de compacité faible, ou d'intégrabilité, telle que

$$(1+|v|^2)\frac{g_\varepsilon^2}{2+\varepsilon g_\varepsilon} \text{ est une famille relativement compacte dans } w - L^1(M\,dv\,dx\,dt), \tag{66}$$

il s'ensuivrait facilement que $(\widetilde{u}_\varepsilon)$ est fortement relativement compacte en x dans L^2 :

$$\lim_{y\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\big\|\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot,\cdot+y) - \widetilde{u}_\varepsilon\big\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N_x)} = 0. \tag{67}$$

On démontrerait de même la compacité en x pour les autres moments $\widetilde{\rho}_\varepsilon$ et $\widetilde{\theta}_\varepsilon$ de $\widetilde{g}_\varepsilon$.

4.2. Compacité en temps : les ondes acoustiques

La compacité par rapport à la variable de temps pose un problème plus délicat. En effet, dans une asymptotique de faible nombre de Mach, on peut s'attendre à rencontrer des phénomènes de propagation à très grande vitesse ($O(1/\varepsilon)$ dans notre choix d'échelles macroscopiques) : il s'agit des *ondes acoustiques*.

La même difficulté est présente dans le problème plus simple et plus classique de la *limite incompressible du système de Navier-Stokes compressible*, étudiée dans les années 80 par Klainerman et Majda [KM] ; de ce fait, les résultats de Klainerman et Majda étaient restés incomplets. Le remède est venu des travaux indépendants de Grenier [Gre] et Schochet [Sc] sur les fluides tournants, dans les années 90. Grenier et Schochet ont montré comment, dans certains problèmes asymptotiques, « filtrer » des oscillations de très haute fréquence par un changement de référentiel adéquat. Ces idées ont ensuite été adaptées au problème de la limite incompressible dans [LM1, DGLM] et d'autres articles.

Très récemment, Lions et Masmoudi [LM2] ont proposé une variante astucieuse de ces méthodes de filtrage. Sans atteindre la généralité des techniques de [Gre, Sc] (qui s'appliquent à de nombreux autres problèmes que les limites incompressibles), leur approche, basée sur des lois de conservation locales plutôt que sur un changement de référentiel, s'avère plus simple, plus souple, et suffisamment robuste pour être adaptée au programme BGL. Par rapport à (47), les conclusions vont différer sur deux points : d'une part, au lieu de considérer $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ on va considérer sa version tronquée, $\widetilde{u}_\varepsilon \otimes \widetilde{u}_\varepsilon$. D'autre part, on ne va pas montrer $\nabla_x \cdot (\widetilde{u}_\varepsilon \otimes \widetilde{u}_\varepsilon) \longrightarrow \nabla_x \cdot (u \otimes u)$, mais seulement

$$P\nabla_x \cdot (\widetilde{u}_\varepsilon \otimes \widetilde{u}_\varepsilon) \longrightarrow P\nabla_x \cdot (u \otimes u) \tag{68}$$

(on rappelle que P désigne le projecteur de Leray). C'est donc modulo un terme gradient que l'on prouve la limite escomptée. On démontre en même temps

$$\nabla_x \cdot (\widetilde{u}_\varepsilon \widetilde{\theta}_\varepsilon) \longrightarrow \nabla_x \cdot (u\theta). \tag{69}$$

Les limites (68) et (69) sont assez remarquables, puisqu'elles ne nécessitent pas de compacité forte ! Elles reposent sur le lemme suivant.

LEMME 4.3 (Lions, Masmoudi). — *Soient $\widetilde{\rho_\varepsilon}$, $\widetilde{u_\varepsilon}$, $\widetilde{\theta}_\varepsilon$ des familles bornées dans $L^\infty((0,T);$
$L^2(\mathbb{R}^N_x))$, fortement compactes dans la variable x au sens de* (67)*, et convergeant faiblement au sens des distributions vers ρ, u, θ respectivement. On suppose que $\partial_t P\widetilde{u}_\varepsilon$ et $\partial_t(\frac{N}{N+2}\widetilde{\theta}_\varepsilon - \frac{2}{N+2}\widetilde{\rho}_\varepsilon)$ sont bornées dans $L^1_{\rm loc}(dt; X)$, où X est un espace de distributions (disons, un espace de Sobolev négatif $W^{-s,k}_{\rm loc}$, $s \geqslant 0$, $k \geqslant 1$) et que*

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon}{\partial t} + \nabla_x(\widetilde{\rho}_\varepsilon + \widetilde{\theta}_\varepsilon) = F_\varepsilon, \\ \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}(\widetilde{\rho}_\varepsilon + \widetilde{\theta}_\varepsilon) + \dfrac{N+2}{N}\nabla_x \cdot \widetilde{u}_\varepsilon = G_\varepsilon, \end{cases} \tag{70}$$

où $F_\varepsilon, G_\varepsilon \longrightarrow 0$ *dans* $L^1((0,T); H^{-s}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N_x))$ *pour un certain* $s \geqslant 0$. *Alors les limites* (68), (69) *sont vérifiées au sens des distributions.*

Remarque 4.4. — Cet énoncé est dans le même esprit que les théorèmes dits de « compacité par compensation », au sens où l'on prouve la convergence de certaines quantités quadratiques formées à partir des fonctions $(\widetilde{\rho}_\varepsilon, \widetilde{u}_\varepsilon, \widetilde{\theta}_\varepsilon)$ sous l'hypothèse que certaines combinaisons des dérivées de ces fonctions convergent fortement (en t) vers 0.

Esquisse de preuve. — Montrons que la limite (68) est vraie, l'autre se traitant de la même manière. Tout d'abord, puisque $P\widetilde{u}_\varepsilon$ est une famille compacte en x, et que $\partial_t P\widetilde{u}_\varepsilon$ est bornée dans $L^1_{\rm loc}(dt; X)$, on peut montrer (lemme d'Aubin-Lions ; Cf. par exemple [Li4, lemme 5.1]) que $P\widetilde{u}_\varepsilon$ est une famille compacte dans $L^2_{\rm loc}(dt\,dx)$. On en déduit que $P\widetilde{u}_\varepsilon \longrightarrow Pu = u$ dans $L^2_{\rm loc}(dt\,dx)$. Décomposons $\widetilde{u}_\varepsilon$ selon $\widetilde{u}_\varepsilon = P\widetilde{u}_\varepsilon + \nabla_x \pi_\varepsilon$, de sorte que $P\widetilde{u}_\varepsilon$ converge fortement vers u dans L^2 et $\nabla_x \pi_\varepsilon$ converge faiblement vers 0 dans L^2. Il s'ensuit

$$P\nabla_x \cdot (\widetilde{u}_\varepsilon \otimes \widetilde{u}_\varepsilon) - P\nabla_x \cdot (\nabla_x \pi_\varepsilon \otimes \nabla_x \pi_\varepsilon) \longrightarrow P\nabla_x \cdot (u \otimes u),$$

et il ne nous reste donc plus qu'à montrer

$$P\nabla_x \cdot \big(\nabla_x \pi_\varepsilon \otimes \nabla_x \pi_\varepsilon\big) \longrightarrow 0. \tag{71}$$

On se ramène ensuite par approximation au cas où les fonctions en jeu sont régulières en x. En effet, la suite $(\widetilde{u}_\varepsilon)$ étant compacte par rapport à la variable x (formule (67)), il en résulte que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N_x$,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \big\| \widetilde{u}_\varepsilon *_x \zeta_\delta - \widetilde{u}_\varepsilon \big\|_{L^2((0,T)\times K)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0,$$

où ζ_δ désigne une approximation de l'identité au sens de la convolution : $\zeta_\delta(x) = \delta^{-N} \zeta(x/\delta)$, ζ étant une fonction C^∞ à support compact, positive et d'intégrale unité. En conséquence,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \big\| (\nabla_x \pi_\varepsilon) * \zeta_\delta - \nabla_x \pi_\varepsilon \big\|_{L^2((0,T)\times K)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0,$$

et de même

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \big\| (\widetilde{\rho}_\varepsilon + \widetilde{\theta}_\varepsilon) * \zeta_\delta - (\widetilde{\rho}_\varepsilon + \widetilde{\theta}_\varepsilon) \big\|_{L^2((0,T)\times K)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0.$$

Il s'ensuit que $(\nabla_x \pi_\varepsilon * \zeta_\delta) \otimes (\nabla_x \pi_\varepsilon * \zeta_\delta) - \nabla_x \pi_\varepsilon \otimes \nabla_x \pi_\varepsilon$ converge vers 0 dans $L^1_{\rm loc}$ quand $\delta \to 0$, et ce uniformément en ε. Il est donc suffisant de montrer que pour $\delta > 0$ fixé,

$$P\nabla_x \cdot \big((\nabla_x \pi_\varepsilon * \zeta_\delta) \otimes (\nabla_x \pi_\varepsilon * \zeta_\delta)\big) \longrightarrow 0. \tag{72}$$

Notons $\pi_\varepsilon^\delta = \pi_\varepsilon * \zeta_\delta$, $\beta_\varepsilon^\delta = (\widetilde{\rho}_\varepsilon + \widetilde{\theta}_\varepsilon) * \zeta_\delta$. Du système (70) on tire, par application de $\mathrm{Id} - P$ à la première équation et par convolution,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon} \nabla_x \beta_\varepsilon^\delta = \dfrac{F_\varepsilon^\delta}{\varepsilon}, \\ \dfrac{\partial \beta_\varepsilon^\delta}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon} \dfrac{N+2}{N} \Delta_x \pi_\varepsilon^\delta = \dfrac{G_\varepsilon^\delta}{\varepsilon}, \end{cases} \tag{73}$$

où F_ε^δ, G_ε^δ convergent vers 0 dans $L^1((0,T); H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$ pour tout $s \geqslant 0$ (grâce à l'action régularisante de la convolution). Vient maintenant le cœur de l'argument : par un calcul simple, on déduit de (73) l'astucieuse identité remarquable

$$\begin{aligned} &\nabla_x \cdot \Big(\nabla_x \pi_\varepsilon^\delta \otimes \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta \Big) \\ &\quad = \frac{1}{2} \nabla_x \Big(|\nabla_x \pi_\varepsilon^\delta|^2 - \frac{N}{N+2} (\beta_\varepsilon^\delta)^2 \Big) + \frac{N}{N+2} \Big(F_\varepsilon^\delta \beta_\varepsilon^\delta + G_\varepsilon^\delta \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \beta_\varepsilon^\delta \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta) \Big). \end{aligned} \tag{74}$$

En outre, β_ε^δ et $\nabla_x \pi_\varepsilon^\delta$ sont bornés dans $L^\infty(dt; L^2(\mathbb{R}^N_x))$; il s'ensuit que $F_\varepsilon^\delta \beta_\varepsilon^\delta$, $G_\varepsilon^\delta \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta$ et $\varepsilon \beta_\varepsilon^\delta \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta$ convergent fortement vers 0 dans $L^1((0,T); H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_x))$ quand $\varepsilon \to 0$. Les trois derniers termes du membre de droite dans (74) convergent donc vers 0 au sens des distributions. Après élimination du terme de gradient par application de P, on conclut donc à (72). □

Reste à se convaincre que le lemme 4.3 s'applique à la limite de Boltzmann vers Navier-Stokes. C'est ce que vérifient Lions et Masmoudi [LM3] au terme de quelques calculs simples qui suivent les étapes du canevas de preuve fourni au paragraphe 2.6, ainsi que les estimations d'entropie de Bardos, Golse et Levermore, et l'hypothèse (66). Notons en particulier que les bornes $L^\infty_t(L^2_x)$ sur $\widetilde{\rho}_\varepsilon$, $\widetilde{u}_\varepsilon$, $\widetilde{\theta}_\varepsilon$ découlent de $(\int |\widetilde{g}_\varepsilon| |v|^p \, M \, dv)^2 \leqslant (\int (\widetilde{g}_\varepsilon)^2 \, M \, dv)(\int |v|^{2p} \, M \, dv) \leqslant C \times$ (membre de droite dans (53)).

Remarque 4.5. — Finalement, la convergence de $(\widetilde{u}_\varepsilon)$ est-elle faible ou forte ? Ce point n'a pas été étudié de près ; dans le cas de la limite de faible nombre de Mach du système de Navier-Stokes compressible, on sait qu'il dépend de la géométrie globale du problème (au contraire du lemme 4.3, purement local). La limite est, en général, localement forte si les équations sont posées dans l'espace tout entier, ou dans un ouvert borné (générique), voir Desjardins et Grenier [DG], Desjardins et al. [DGLM]. L'interprétation physique est la suivante : dans l'espace tout entier, les ondes acoustiques se dispersent à l'infini, ce qui peut se traduire mathématiquement par des estimations à la Strichartz ; en revanche, dans un ouvert borné, l'énergie associée aux ondes acoustiques est dissipée par la viscosité du fluide, au voisinage du bord de l'ouvert. Il n'en va pas de même quand l'équation est posée sur une variété compacte sans bord telle que le tore plat — ou bien dans une boule : alors, la convergence est seulement faible.

5. GAIN DE COMPACITÉ FAIBLE POUR NAVIER-STOKES

En combinant les contributions [BGL3, LM4] et la méthode de [GL], il devenait finalement possible [LeMa] de prouver le théorème 2.10 [(10)] sous la condition d'obtenir une borne d'équi-intégrabilité de la forme (66). Cependant, à ce jour, cette estimation reste encore un problème ouvert... Pour le contourner, dans un manuscrit achevé tout récemment [GSR], Golse et Saint-Raymond ont introduit une nouvelle stratégie, qui les a menés à prouver des estimations plus faibles que (66), mais suffisantes pour conclure (en dimension $N = 3$ du moins). L'ensemble de la preuve s'inspire d'un travail antérieur de Saint-Raymond [SR] sur l'équation de BGK, un modèle simplifié que l'on utilise parfois en remplacement de l'équation de Boltzmann. Pour rendre justice au travail effectué dans [GSR], un exposé complet serait nécessaire ; nous allons nous contenter ici de quelques lignes pour expliquer les principales idées mises en œuvre.

Une première amélioration importante concerne le bon usage de l'estimation de *dissipation d'entropie*. Sachant que $D(f_\varepsilon) = 0$ si et seulement si f_ε est une maxwellienne locale, on peut espérer que l'estimation a priori sur $\varepsilon^{-4} D(f_\varepsilon)$ dans $L^1(dt\,dx)$ permette de contrôler assez finement l'écart entre f_ε et l'ensemble des maxwelliennes locales, ce qui serait très prometteur : en effet, il serait facile de prouver (66) si f_ε était une maxwellienne locale ! En fait, l'obtention de bornes précises sur $H(f|M_{R,U,T})$ en fonction de $D(f)$ est un problème classique qui a reçu beaucoup d'attention récemment pour ses applications dans l'étude de versions quantitatives du Théorème H (voir [Vi]). Cependant, sauf à faire des hypothèses encore beaucoup plus fortes que (66), il y a des obstructions mathématiques à un contrôle aussi bon qu'on le souhaiterait. Pour cette raison, dans [GSR] on ne retient qu'un contrôle très faible, même si fort astucieux : grâce à la formule de Jensen appliquée à la fonction convexe $(X, Y) \longmapsto (X - Y)(\log X - \log Y)$,

$$D(f_\varepsilon) \geqslant R_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N_v} \left(\frac{\mathcal{Q}^+(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{R_\varepsilon} - f_\varepsilon \right) \left(\log \frac{\mathcal{Q}^+(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{R_\varepsilon} - \log f_\varepsilon \right) dv, \tag{75}$$

où $\mathcal{Q}^+$ est la partie positive d'un opérateur de Boltzmann artificiel,

$$\mathcal{Q}^+(f, f) = \int f' f'_* \, b(v - v_*, \omega) \, dv_* \, d\omega,$$

$b(v - v_*, \omega) = K|\cos(v - v_*, \omega)|^{N-2}$, K étant une constante de normalisation assurant que $\int b(k \cdot \omega) d\omega = 1$ pour tout vecteur unitaire k. Notons que $\mathcal{Q}^+$ n'agit que sur la variable de vitesse, et que $\mathcal{Q}^+(f_\varepsilon, f_\varepsilon)/R_\varepsilon = f_\varepsilon$ si et seulement si f_ε est une maxwellienne locale ; en ce sens l'estimation (75) contrôle bien l'écart entre f_ε et l'ensemble des maxwelliennes locales.

[(10)] En fait une version plus générale, les hypothèses sur la section efficace étant moins contraignantes.

La stratégie de Golse et Saint-Raymond passe donc par la décomposition

$$g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(f_\varepsilon - M) = \frac{1}{\varepsilon}\left(f_\varepsilon - \frac{\mathcal{Q}^+(\widetilde{f}_\varepsilon, \widetilde{f}_\varepsilon)}{\widetilde{R}_\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\mathcal{Q}^+(\widetilde{f}_\varepsilon, \widetilde{f}_\varepsilon)}{\widetilde{R}_\varepsilon} - M\right), \tag{76}$$

où $\widetilde{f}_\varepsilon = M(1 + \varepsilon \widetilde{g}_\varepsilon)$, et $\widetilde{g}_\varepsilon$ est une troncature de g_ε à hauteur $1/\varepsilon$, comme dans les paragraphes précédents. Après avoir contrôlé le premier terme de cette décomposition par l'estimation de dissipation d'entropie, il reste à établir des bornes a priori d'intégrabilité adéquates sur le second. Celles-ci vont découler de la structure particulière de l'opérateur $\mathcal{Q}^+$, dont les propriétés régularisantes ont été étudiées par Grad [Gr3] et Caflisch [Ca1] dans un cadre linéaire, Lions et d'autres auteurs dans un cadre non linéaire (voir la revue dans [Vi]). En l'occurrence, le point important est que (pour $N = 3$) $M^{-1/2}\mathcal{Q}^+(M^{1/2}\cdot, M)$ envoie continûment $L^2(M\,dv)$ dans $L^\infty_{3/2}(M\,dv)$, et $L^\infty_p(M\,dv)$ dans $L^\infty_{p+2}(M\,dv)$, où l'on note $L^p_k(M\,dv)$ l'espace défini par la norme $\|g\|_{L^p_k(M\,dv)} = \|(1 + |v|)^k g\|_{L^p(M\,dv)}$. L'action de $\mathcal{Q}^+$ se traduit donc par un *gain d'intégrabilité en vitesses.*

Remarque 5.1. — L'idée d'introduire un opérateur de Boltzmann artificiel pour ses effets régularisants en v remonte à l'étude par Lions [Li1, p. 483] de l'équation fonctionnelle (23).

Encore faut-il en déduire un gain d'intégrabilité dans la variable x. Pour ce faire, Golse et Saint-Raymond établissent de nouveaux énoncés de type « lemmes de moyenne ». Pour formuler leurs résultats de façon heuristique : si la famille (h_ε) est bornée dans $L^\infty(dt; L^1_{\rm loc} dx\, dv)$ et « uniformément intégrable par rapport à la variable v », et si en outre $(\varepsilon\partial_t + v \cdot \nabla_x)h_\varepsilon$ est bornée dans $L^1(dt\, dx\, dv)$, alors (h_ε) est faiblement relativement compacte dans $L^1_{\rm loc}(dt\, dx\, dv)$. La démonstration de ces énoncés, très surprenante, passe par l'étude des propriétés dispersives de l'opérateur $\partial_\tau + \varepsilon\partial_t + v \cdot \nabla_x$, où τ est une variable auxiliaire d'interpolation ; il est encore trop tôt pour savoir si cet argument peut être remplacé par d'autres plus traditionnels.

La mise en œuvre de ces nouvelles idées se révèle particulièrement technique.

6. CONCLUSIONS ET PROBLÈMES OUVERTS

Les travaux présentés ici témoignent de progrès considérables dans le traitement des limites hydrodynamiques. Le sujet est cependant bien loin d'être épuisé, et l'on pourrait suggérer maintes améliorations de grande ampleur, faisant naître des difficultés colossales.

Tout d'abord, seul un théorème quantitatif pourrait donner une base physique incontestable à ces théorèmes asymptotiques, par exemple : à quelles conditions sur la donnée initiale et sur le nombre de Knudsen peut-on assurer que les équations hydrodynamiques sont satisfaites avec une erreur relative n'excédant pas, disons, 1% ?

Même si l'on parvenait à rendre quantitatifs les arguments des preuves actuelles, on serait amené à des majorations en $O(1/\sqrt{\log|\log\varepsilon|})$, donc à des nombres de Knudsen déraisonnables ($10^{10^{1000}}$...).

D'autre part, comment traiter des limites telles que Navier-Stokes *compressible* ? Deux problèmes majeurs surviennent : le premier est notre méconnaissance mathématique des équations compressibles ; le second est le fait que la dynamique de Navier-Stokes compressible ne peut être obtenue comme cas limite de la dynamique de Boltzmann : en effet, au vu de (30), les trois régimes $Kn \to 0$, $Re \to 1$, $Ma \to 1$ sont incompatibles. En fait, l'équation de Navier-Stokes compressible devrait être comprise comme une *correction de l'équation d'Euler compressible à faible nombre de Knudsen.* Non seulement une telle approximation semble de nature à échapper à jamais aux techniques de compacité, mais elle inclut en outre la limite vers le « monstre » que constitue le système d'Euler compressible...

Par ailleurs, les restrictions techniques imposées sur la section efficace excluent toutes les interactions microscopiques à longue portée. Il s'agit cependant là d'un problème technique que l'on peut envisager de surmonter à plus ou moins brève échéance.

Enfin, la pertinence des théorèmes faisant intervenir des solutions faibles peut bien sûr paraître sujette à caution tant que l'on a pas prouvé ou infirmé l'existence de solutions non régulières. Dans le cas de Navier-Stokes comme de Boltzmann, nous retrouvons là des problèmes ouverts qui comptent parmi les plus célèbres de toute la mécanique des fluides ! Cependant, notons que certains des résultats présentés dans cet exposé, et en particulier ceux qui sont basés sur la méthode d'entropie relative de Yau, garderont leur intérêt même si des solutions fortes sont construites dans le futur.

RÉFÉRENCES

[Al] S. Alinhac – *Blowup for nonlinear hyperbolic equations*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, 17, Birkhäuser, Boston 1995.

[AK] V. Arnold, B. Khesin – *Topological methods in hydrodynamics*, Springer-Verlag, New York 1998.

[As] K. Asano – *Fluid dynamical limit of the Boltzmann equation, I*, in "Proceedings of the 13th International Conference on Transport Theory (Riccione 1993), vol. 24 (1995), pp. 329–345.

[AU] K. Asano, S. Ukai – *On the fluid dynamical limit of the Boltzmann equation*, in "Recent topics in nonlinear PDE" (Hiroshima 1983), North-Holland, Amsterdam 1984, pp. 1–19.

[BGL1] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore – *Sur les limites asymptotiques de la théorie cinétique conduisant à la dynamique des fluides incompressibles*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **309** (1989), 727–732.

[BGL2] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore – *Fluid dynamical limits of kinetic equations, I : Formal derivation.* J. Statist. Phys. **63** (1991), 323–344.

[BGL3] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore – *Fluid dynamical limits of kinetic equations, II : Convergence proofs for the Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **46**, 5 (1993), 667–753.

[BGL4] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore – *Acoustic and Stokes limits for the Boltzmann equation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **327**, 3 (1998), 323–328.

[BGL5] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore – *The acoustic limit for the Boltzmann equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **153**, 3 (2000), 177–204.

[BU] C. Bardos, S. Ukai – *The classical incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation*, Math. Models Methods Appl. Sci. **1**, 2 (1991), 235–257.

[Ba] G.K. Batchelor – *An introduction to fluid dynamics, 2nd paperback ed.*, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[Bo] F. Bouchut – *Introduction à la théorie mathématique des équations cinétiques*, Session « L'Etat de la Recherche » de la SMF (1998), in « Kinetic equations and asymptotic theory », F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, coll. « Series in Appl. Math. », Gauthier-Villars, 2000.

[Bn] Y. Brenier – *Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations*, Comm. Partial Differential Equations **25**, 3-4 (2000), 737–754.

[Br] H. Brezis – *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris 1983.

[Ca1] R.E. Caflisch – *The Boltzmann equation with a soft potential*, Comm. Math. Phys. **74** (1980), 71–109.

[Ca2] R.E. Caflisch – *The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **33**, 5 (1980), 651–666.

[Ca3] R.E. Caflisch – *Asymptotics of the Boltzmann equation and fluid dynamics*, in "Kinetic theory and gas dynamics", Springer, Vienna 1988, pp. 95–133.

[Cn] M. Cannone – *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Ed., Paris 1995.

[Cr] T. Carleman – *Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, Acta Math. **60** (1932), 369–424.

[C1] C. Cercignani – *The Boltzmann equation and its applications, 2nd ed.*, Springer, New York 1988.

[C2] C. Cercignani – *Rarefied gas dynamics, From basic concepts to actual calculations*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.

[CIP] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti – *The Mathematical theory of dilute gases*, Springer, New York 1994.

[CKNS] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg – *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.

[CM] A.J. Chorin, J.E. Marsden – *A mathematical introduction to fluid mechanics, 3rd ed.*, Springer-Verlag, New York 1993.

[Co] F. Comets – *Limites hydrodynamiques*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1990-91, Exp. no. 735, Astérisque **201-203** (1992), 167–192.

[D] C. Dafermos – *The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws*, J. Differential Equations **14** (1973), 202–212.

[DMEL] A. De Masi, R. Esposito, J.L. Lebowitz – *Incompressible Navier-Stokes and Euler limits of the Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **42**, 8 (1989), 1189–1214.

[DG] B. Desjardins, E. Grenier – *Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **455**, 1986 (1999), 2271–2279.

[DGLM] B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions, N. Masmoudi – *Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions*, J. Math. Pures Appl. (9) **78**, 5 (1999), 461–471.

[DPL1] R.J. DiPierna, P.-L. Lions – *On the Cauchy problem for the Boltzmann equation : Global existence and weak stability*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), 312–366.

[DPL2] R.J. DiPierna, P.-L. Lions – *Global solutions of Boltzmann's equation and the entropy inequality*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), 47–55.

[EM] D. Ebin, J.E. Marsden – *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. of Math. **40** (1970), 102–163.

[EP] R.S. Ellis, M.A. Pinsky – *The first and second fluid approximations to the linearized Boltzmann equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **54** (1975), 125–156.

[E] D. Enskog – *Kinetische Theorie des Vorgänge in mässig verdünnten Gasen*, Uppsala, Almqvist & Wiksell, Trad. *Kinetic Theory of Processes in Dilute Gases*, in "Kinetic Theory" **3**, S.G. Brush, Ed., Pergamon Press, Oxford, 1972, 125–225.

[ELM1] R. Esposito, J.L. Lebowitz, R. Marra – *Hydrodynamic limit of the stationary Boltzmann equation in a slab*, Comm. Math. Phys. **160**, 1 (1994), 49–80.

[ELM2] R. Esposito, J.L. Lebowitz, R. Marra – *The Navier-Stokes limit of stationary solutions of the nonlinear Boltzmann equation*, J. Statist. Phys. **78**, 1-2 (1995), 389–412.

[ELM3] R. Esposito, J.L. Lebowitz, R. Marra – *On the derivation of hydrodynamics from the Boltzmann equation*, Phys. Fluids **11**, 8 (1999), 2354–2366.

[Ge1] P. Gérard – *Solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann (d'après R.J. DiPerna et P.-L. Lions)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1988-89, Astérisque **161-162**, Exp. no. 699, 5 (1989), 257–281.

[Ge2] P. Gérard – *Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels (d'après J.-Y. Chemin et J.-M. Delort)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1991-92, Astérisque **206**, Exp. no. 757, 5 (1992), 411–444.

[GM] Y. Giga, T. Miyakawa – *A kinetic construction of global solutions of first order quasilinear equations.* Duke Math. J. **50**, 2 (1983), 505–515.

[Gl] J. Glimm – *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 697–715.

[Go] F. Golse – *From kinetic to macroscopic models*, Session « L'Etat de la Recherche » de la SMF (1998). In « Kinetic equations and asymptotic theory », F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, coll. « Series in Appl. Math. », Gauthier-Villars, 2000.

[GL] F. Golse, C.D. Levermore – *Stokes-Fourier and acoustic limits for Boltzmann equations : Convergence proofs*, Prépublication, 2001.

[GLSR] F. Golse, C.D. Levermore, L. Saint-Raymond – *La méthode de l'entropie relative pour les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques*, Sém. EDP École polytechnique, exposé no. XIX, avril 2000.

[GLPS] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, R. Sentis – *Regularity of the moments of the solution of the transport equation*, J. Funct. Anal. **76** (1988), 110–125.

[GPS] F. Golse, B. Perthame, R. Sentis – *Un résultat de compacité pour les équations de transport et applications au calcul de la limite de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **301** (1985), 341–344.

[GSR] F. Golse, L. Saint-Raymond – *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation : Convergence proof*, Manuscrit, 2001.

[Gr1] H. Grad – *On the kinetic theory of rarefied gases*, Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949), 331–407.

[Gr2] H. Grad – *Principles of the kinetic theory of gases*, in "Flügge's Handbuch des Physik", vol. XII. Springer-Verlag, 1958, pp. 205–294.

[Gr3] H. Grad – *Asymptotic theory of the Boltzmann equation, II*, in "Rarefied Gas Dynamics", 3rd Symposium (1962), pp. 26–59.

[Gre] E. Grenier – *Fluides en rotation et ondes d'inertie*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. **321**, 6 (1995), 711–714.

[GPV] M.Z. Guo, G.C. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan – *Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions*, Comm. Math. Phys. **118**, 1 (1988), 31–59.

[H] D. Hilbert – *Begründung des kinetischen Gastheorie*, Math. Annalen **72** (1912), 562–577. Trad. *Foundations of the Kinetic Theory of Gases*, in "Kinetic Theory" **3**, S.G. Brush, Ed., Pergamon Press, Oxford 1972, 89–101.

[IP] R. Illner, M. Pulvirenti – *Global validity of the Boltzmann equation for two- and three-dimensional rare gas in vacuum. Erratum and improved result for "Global validity of the Boltzmann equation for a two-dimensional rare gas in vacuum"*, Comm. Math. Phys. **105**, 2 (1986), 189–203 ; Comm. Math. Phys. **121**, 1 (1989), 143–146.

[K] M. Kac – *Probability and related topics in physical sciences*, Interscience Publishers, London-New York 1959.

[KL] C. Kipnis, C. Landim – *Scaling limits of interacting particle systems*, Springer-Verlag, Berlin 1999.

[KM] S. Klainerman, A. Majda – *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math. **34**, 4 (1981), 481–524.

[Ld] O.A. Ladyzhenskaya – *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York 1969.

[LL] L.D. Landau, E.M. Lifshitz – *Fluid mechanics*, Pergamon Press, London 1959.

[La] O.E. Lanford III – *Time evolution of large classical systems*, In "Dynamical systems, theory and applications", Springer, Berlin 1975, pp. 1–111. Lecture Notes in Phys., Vol. **38**.

[Le1] J. Leray – *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl. **12** (1933), 1–82.

[Le2] J. Leray – *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[Le3] J. Leray – *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*, J. Math. Pures Appl. **13** (1934), 331–418.

[LeMa] C.D. Levermore, N. Masmoudi – Travail en préparation.

[Li1] P.-L. Lions – *Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications, I*, J. Math. Kyoto Univ. **34**, 2 (1994), 391–427.

[Li2] P.-L. Lions – *Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications, II*, J. Math. Kyoto Univ. **34**, 2 (1994), 429–461.

[Li3] P.-L. Lions – *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1 : Incompressible models*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York 1996.

[Li4] P.-L. Lions – *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2 : Compressible models*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York 1998.

[LM1] P.-L. Lions, N. Masmoudi – *Incompressible limit for a viscous compressible fluid*, J. Math. Pures Appl. (9) **77**, 6 (1998), 585–627.

[LM2] P.-L. Lions, N. Masmoudi – *Une approche locale de la limite incompressible*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. **329**, 5 (1999), 387–392.

[LM3] P.-L. Lions, N. Masmoudi – *From Boltzmann equations to incompressible fluid mechanics equations, I*, Arch. Rational Mech. Anal. **158**, 3 (2001), 173–193.

[LM4] P.-L. Lions, N. Masmoudi – *From Boltzmann equations to incompressible fluid mechanics equations, II,* Arch. Rational Mech. Anal. **158**, 3 (2001), 195–211.

[LPS] P.-L. Lions, B. Perthame, P. Souganidis – *Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. **49**, 6 (1996), 599–638.

[LPT1] P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor – *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations*, J. Amer. Math. Soc. **7**, 1 (1994), 169–191.

[LPT2] P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor – *Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems*, Comm. Math. Phys. **163**, 2 (1994), 415–431.

[MR] N.B. Maslova, Y.R. Romanovski – *Justification of the Hilbert method in the theory of kinetic equations*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. **27**, 11 (1987), 1680–1689, 1759.

[M] C. Morrey – *On the derivation of the equation of hydrodynamics from statistical mechanics*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 279–326.

[N] T. Nishida – *Fluid dynamical limit of the nonlinear Boltzmann equation to the level of the compressible Euler equation*, Comm. Math. Phys. **61**, 2 (1978), 119–148.

[OVY] S. Olla, S.R.S. Varadhan, H.-T. Yau – *Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise*, Comm. Math. Phys. **155**, 3 (1993), 523–560.

[QY] J. Quastel, H.-T. Yau – *Lattice gases, large deviations, and the incompressible Navier-Stokes equations*, Ann. of Math. (2) **148**, 1 (1998), 51–108.

[SR] L. Saint-Raymond – *From the Boltzmann-BGK to the Navier-Stokes equations*, Prépublication, 2001.

[Sc] S. Schochet – *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J. Differential Equations **114**, 2 (1994), 476–512.

[Si] T. Sideris – *Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids*, Comm. Math. Phys. **101**, 4 (1985), 475–485.

[SATSB] Y. Sone, K. Aoki, S. Takata, H. Sugimoto, A.V. Bobylev – *Inappropriateness of the heat-conduction equation for description of a temperature field of a stationary gas in the continuum limit : examination by asymptotic analysis and numerical computation of the Boltzmann equation*, Phys. Fluids **8**, 2 (1996), 628–638. Erratum dans Phys. Fluids **8**, 3 (1996), 841.

[S] H. Spohn – *Large scale dynamics of interacting particles*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin 1991.

[T] R. Temam – *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis, 3rd ed.*, North-Holland, Amsterdam 1984.

[TM] C. Truesdell, R. Muncaster – *Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monoatomic gas*, Academic Press, New York 1980.

[UA] S. Ukai, K. Asano – *The Euler limit and initial layer of the nonlinear Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J. **12**, 3, part 1 (1983), 311–332.

[Va] S.R.S. Varadhan – *Entropy methods in hydrodynamic scaling*, In "Nonequilibrium problems in many-particle systems" (Montecatini 1992), Springer, Berlin, 1993, pp. 112–145.

[Vi] C. Villani – *A review of mathematical problems in collisional kinetic theory*, à paraître dans "Handbook of fluid mechanics", D. Serre et S. Friedlander, Ed.

[Y1] H.-T. Yau – *Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models*, Lett. Math. Phys. **22**, 1 (1991), 63–80.

[Y2] H.-T. Yau – *Asymptotic solutions to dynamics of many-body systems and classical continuum equations*, Lecture at Current developments in mathematics, 1998.

Cédric VILLANI

École normale supérieure de Lyon
Département de Mathématiques
46, allée d'Italie
F-69364 Lyon Cedex 07
E-mail : cvillani@umpa.ens-lyon.fr

smf_ast_282_893
Astérisque
282, 2002, p. 365–405

LIMITES HYDRODYNAMIQUES DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN

Cédric VILLANI

Veuillez compiler ce fichier séparément et l'insérer ici

Please compile this file separately and insert it here

Séminaire BOURBAKI, 1948/49 à 2000/2001
Exposés 1 à 893

Les volumes 1948/49 à 1967/68, Exposés 1 à 346, initialement publiés par *W.A. Benjamin, Inc.* New York, ont été réimprimés en 1996 par la Société Mathématique de France sous forme d'un ensemble de 10 volumes hors série de la collection *Astérisque* :

vol. 1 : années 1948/49–1949/50–1950/51 ;
vol. 2 : années 1951/52–1952/53–1953/54 ;
vol. 3 : années 1954/55–1955/56 ;
vol. 4 : années 1956/57–1957/58 ;
vol. 5 : années 1958/59–1959/60 ;
vol. 6 : année 1960/61 ;
vol. 7 : année 1961/62 ;
vol. 8 : années 1962/63–1963/64 ;
vol. 9 : années 1964/65–1965/66 ;
vol. 10 : années 1966/67–1967/68.

Les volumes 1968/69 à 1980/81, Exposés 347 à 578, ont été publiés par *Springer–Verlag,* collection Lecture Notes in Mathematics :

vol. 1968/69, n° 179, 1971 ;
vol. 1969/70, n° 180, 1971 ;
vol. 1970/71, n° 244, 1971 ;
vol. 1971/72, n° 317, 1973 ;
vol. 1972/73, n° 383, 1974 ;
vol. 1973/74, n° 431, 1975 ;
vol. 1974/75, n° 514, 1976 ;
vol. 1975/76, n° 567, 1977 ;
vol. 1976/77, n° 677, 1978 ;
vol. 1977/78, n° 710, 1979 ;
vol. 1978/79, n° 770, 1980 ;
vol. 1979/80, n° 842, 1981 ;
vol. 1980/81, n° 901, 1981.

Les volumes 1981/82 à 1999/2000, Exposés 865 à 879, ont été publiés par *Astérisque* :

vol. 1981/82, n° 92-93, 1982 ;
vol. 1982/83, n° 105-106, 1983 ;
vol. 1983/84, n° 121-122, 1985 ;
vol. 1984/85, n° 133-134, 1986 ;
vol. 1985/86, n° 145-146, 1987 ;
vol. 1986/87, n° 152-153, 1987 ;
vol. 1987/88, n° 161-162, 1988 ;
vol. 1988/89, n° 177-178, 1989 ;
vol. 1989/90, n° 189-190, 1990 ;
vol. 1990/91, n° 201-202-203, 1991 ;
vol. 1991/92, n° 206, 1992 ;
vol. 1992/93, n° 216, 1993 ;
vol. 1993/94, n° 227, 1995 ;
vol. 1994/95, n° 237, 1996 ;
vol. 1995/96, n° 241, 1997 ;
vol. 1996/97, n° 245, 1997 ;
vol. 1997/98, n° 252, 1998 ;
vol. 1998/99, n° 266, 2000 ;
vol. 1999/2000, n° 276, 2002.

TABLE PAR NOMS D'AUTEUR

ABBES, Ahmed
Hauteurs et discrétude (d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang) .. 1996/97, n° 825, 26 p.

A'CAMPO, Norbert
Sur la première partie du 16^e *problème de Hilbert* ..... 1978/79, n° 537, 20 p.

ADAMS, John Frank
La conjecture de Segal ..... 1984/85, n° 645, 6 p.

ALINHAC, Serge
Caractérisation d'espaces de fonctions analytiques et non quasi–analytiques sur une variété à bord (d'après M. Baouendi et C. Goulaouic) ..... 1973/74, n° 442, 9 p.

ANANTHARAMAN–DELAROCHE, Claire
Classification des C^*–algèbres purement infinies nucléaires (d'après E. Kirchberg) ..... 1995/96, n° 805, 21 p.

AMICE, Yvette
Conjecture de Schanuel sur la transcendance d'exponentielles (d'après James Ax) ..... 1970/71, n° 382, 10 p.

ARNOUX, Pierre
Ergodicité générique des billards polygonaux (d'après Kerckhoff, Masur, Smillie) ..... 1987/88, n° 696, 19 p.

ATIYAH, Michael F.
The index of elliptic operators on compact manifolds (after Atiyah and Singer) ..... 1962/63, n° 253, 11 p.
Hyperbolic differential equations and algebraic geometry (after Petrowsky) ..... 1966/67, n° 319, 13 p.
The Heat Equation in Riemannian Geometry (after Patodi, Gilkey, etc.) ..... 1973/74, n° 436, 11 p.
The Jones–Witten invariants of knots ..... 1989/90, n° 715, 10 p.

ATTOUCH, Hedy
Homogénéisation ..... 1987/88, n° 686, 24 p.

AUDIN, Michèle
Cohomologie quantique ..... 1995/96, n° 806, 30 p.
Intégrabilité et non–intégrabilité de systèmes hamiltoniens (d'après S. Ziglin, J. Morales–Ruiz, J.-P. Ramis,...) ..... 2000/01, n° 884, 23 p.

AZENCOTT, Robert
Une approche probabiliste du théorème de l'indice (Atiyah–Singer) (d'après J.–M. Bismut) ..... 1984/85, n° 633, 12 p.
Simulated annealing ..... 1987/88, n° 697, 15 p.

AZRA, Jean–Pierre
Relations diophantiennes et la solution négative du 10^e problème de Hilbert (d'après M. Davis, H. Putnam, J. Robinson et I. Matiasevitch) ..... 1970/71, n° 383, 18 p.

BAOUENDI, Mohamed S.
Les opérateurs de convolution (d'après Ehrenpreis et Hörmander) .. 1962/63, n° 254, 8 p.

BARDOS, Claude
Apparition éventuelle de singularités dans des problèmes d'évolution non linéaires (d'après S. Glassey, S. Klainerman, J. Chadam, F. John (et d'autres)) ..... 1979/80, n° 555, 10 p.

BARLOW, Martin
Harmonic analysis on fractal spaces ..... 1991/92, n° 755, 24 p.

BASS, Hyman
K_2 des corps globaux (d'après J. Tate, H. Garland,...) ..... 1970/71, n° 394, 23 p.
Libération des modules projectifs sur certains anneaux de polynômes 1973/74, n° 448, 27 p.

BEAUVILLE, Arnaud
Géométrie des tissus (d'après S.S. Chern et P.A. Griffiths) ..... 1978/79, n° 531, 17 p.
Surfaces K3 ..... 1982/83, n° 609, 13 p.
Le problème de Torelli ..... 1985/86, n° 651, 14 p.
Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov ..... 1986/87, n° 675, 12 p.
Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphèrede Riemann (d'après A. Bolibruch) ..... 1992/93, n° 765, 17 p.

BEAUZAMY, Bernard
Sous–espaces invariants dans les espaces de Banach ..... 1979/80, n° 549, 17 p.

BELLISSARD, Jean
Le papillon de Hofstadter (d'après B. Helffer et J. Sjöstrand) ..... 1991/92, n° 745, 34 p.

BEN AROUS, Gérard
Géométrie de la courbe brownienne plane ..... 1990/91, n° 730, 36 p.

BENNEQUIN, Daniel
Caustique mystique (d'après Arnold et al.) ..... 1984/85, n° 634, 37 p.
Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques (d'après M. Gromov) ..... 1985/86, n° 657, 26 p.
Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact (d'après Y. Eliashberg, D. Mc Duff et al.) ..... 1989/90, n° 725, 39 p.
L'instanton gordien (d'après P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka) .... 1992/93, n° 770, 45 p.
Monopôles de Seiberg–Witten et conjecture de Thom (d'après Kronheimer, Mrowka et Witten) ..... 1995/96, n° 807, 38 p.

BENZÉCRI, Jean–Paul
Théorie des capacités (d'après G. Choquet) ..... 1955/56, n° 120, 11 p.

BÉRARD, Pierre
Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques ..... 1988/89, n° 705, 28 p.

BÉRARD BERGERY, Lionel
Laplacien et géodésiques fermées sur les formes d'espace hyperbolique compactes ..... 1971/72, n° 406, 16 p.
La courbure scalaire des variétés riemanniennes ..... 1979/80, n° 556, 21 p.

BÉRESTYCKI, Henri
Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens ..... 1982/83, n° 603, 24 p.

BERGER, Marcel
Groupes d'holonomie des variétés à connexion affine ..... 1954/55, n° 101, 6 p.
Le théorème de Gromoll–Meyer sur les géodésiques fermées ..... 1969/70, n° 364, 17 p.
Systoles et applications selon Gromov ..... 1992/93, n° 771, 32 p.

BERTHELOT, Pierre
Altérations de variétés algébriques (d'après A.J. de Jong) ..... 1995/96, n° 815, 39 p.

BERTRAND, Daniel
Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires ..... 1978/79, n° 538, 16 p.
Lemmes de zéros et nombres transcendants ..... 1985/86, n° 652, 24 p.
Groupes algébriques et équations différentielles linéaires ..... 1991/92, n° 750, 22 p.

BIANE, Philippe
Entropie libre et algèbres d'opérateurs ..... 2000/01, n° 889, 22 p.

BLANCHARD, André
Groupes algébriques et équations différentielles linéaires (d'après E. Kolchin) ..... 1949/50, n° 17, 7 p.
Le plongement des variétés de Hodge dans des espaces projectifs complexes (d'après K. Kodaira) ..... 1954/55, n° 114, 7 p.

BÖHME, Reinhold
New results on the classical problem of Plateau. On the existence of many solutions ..... 1981/82, n° 579, 20 p.

BOILEAU, Michel
Uniformisation en dimension trois ..... 1998/99, n° 855, 38 p.

BOMBIERI, Enrico
Régularité des hypersurfaces minimales ..... 1968/69, n° 353, 11 p.
Simultaneous approximations of algebraic numbers (following W.M. Schmidt) ..... 1971/72, n° 400, 20 p.
Counting points on curves over finite fields (after S.A. Stepanov) .. 1972/73, n° 430, 8 p.
A lower bound for the zeros of Riemann's Zeta Function on the critical line (following N. Levinson) ..... 1974/75, n° 465, 7 p.

BONAVERO, Laurent
Factorisation faible des applications birationnelles (d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli) ..... 2000/01, n° 880, 37 p.

BONY, Jean–Michel
Polynômes de Bernstein et monodromie (d'après B. Malgrange) .... 1974/75, n° 459, 14 p.
Hyperfonctions et équations aux dérivées partielles (d'après M. Sato, T. Kawaï et M. Kashiwara) ..... 1976/77, n° 495, 15 p.
Résolution des conjectures de Calderón et espaces de Hardy généralisés (d'après R. Coifman, G. Davis, A. McIntosh et Y. Meyer) ..... 1981/82, n° 591, 8 p.

BOREL, Armand
Groupes localement compacts (d'après Iwasawa et Gleason) ..... 1949/50, n° 29, 17 p.
Sous–groupes compacts maximaux des groupes de Lie (d'après Cartan, Iwasawa et Mostow) ..... 1950/51, n° 33, 9 p.
Cohomologie des espaces homogènes ..... 1950/51, n° 45, 8 p.
Les espaces hermitiens symétriques ..... 1951/52, n° 62, 12 p.
Groupes algébriques ..... 1955/56, n° 121, 10 p.
Travaux de Mostow sur les espaces homogènes ..... 1956/57, n° 142, 12 p.
Cohomologie et rigidité d'espaces compacts localement symétriques (d'après Weil et Matsushima) ..... 1963/64, n° 265, 9 p.
Opérateurs de Hecke et fonctions zêta ..... 1965/66, n° 307, 23 p.
Sous–groupes discrets de groupes semi–simples (d'après D.A. Kajdan et G.A. Margoulis) ..... 1968/69, n° 358, 17 p.
Cohomologie de certains groupes discrets et laplacien p–adique (d'après H. Garland) ..... 1973/74, n° 437, 24 p.
Formes automorphes et séries de Dirichlet (d'après R.P. Langlands) ..... 1974/75, n° 466, 40 p.

BORHO, Walter
Recent advances in enveloping algebras of semi–simple Lie–Algebras (a report on work of N. Conze, J. Dixmier, M. Duflo, J.C. Jantzen, A. Joseph, W. Borho) ..... 1976/77, n° 489, 18 p.

BOST, Jean–Benoît
Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel,...) ..... 1984/85, n° 639, 45 p.
Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesures sur les espaces de modules des courbes complexes ..... 1986/87, n° 676, 37 p.
Théorie de l'intersection et théorèmes de Riemann–Roch arithmétiques ..... 1990/91, n° 731, 46 p.
Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) ..... 1994/95, n° 795, 47 p.

BOTT, Raoul
Report on the fixed point formula ..... 1965/66, n° 295, 6 p.

BOURGUIGNON, Jean–Pierre
Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes (d'après E. Calabi, T. Aubin et S.T. Yau) ..... 1977/78, n° 507, 21 p.
L'équation de la chaleur associée à la courbure de de Ricci ..... 1985/86, n° 653, 17 p.
Stabilité par déformation non–linéaire de la métrique de Minkowski (d'après D. Christodoulou et S. Klainerman) ..... 1990/91, n° 740, 38 p.
Métriques d'Einstein–Kähler sur les variétés de Fano : obstructions et existence (d'après Y. Matsushima, A. Futaki, S.T. Yau, A. Nadel et G. Tian) ..... 1996/97, n° 830, 29 p.

BOUSCAREN, Élisabeth
Théorie des modèles et conjecture de Manin-Mumford (d'après Ehud Hrushovski) ..... 1999/2000, n° 870, 23 p.

BOUTET de MONVEL, Louis
Opérateurs pseudo–différentiels. Application au problème de Neumann à dérivée oblique (d'après Hörmander) ..... 1965/66, n° 308, 14 p.
Nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique et poynôme de Hilbert–Samuel (d'après V. Guillemin) ..... 1978/79, n° 532, 12 p.

BOUTOT, Jean–François
Frobenius et cohomologie locale (d'après R. Hartshorne et R. Speiser, M. Hochster et J.L. Roberts, C. Peskine et L. Szpiro) ..... 1974/75, n° 453, 19 p.
Uniformisation p–adique des variétés de Shimura ..... 1996/97, n° 831, 16 p.

BRACONNIER, Jean
Sur les suites de composition d'un groupe et la tour des groupes d'automorphismes d'un groupe fini (d'après H. Wielandt) ..... 1948/49, n° 7, 5 p.
Sous–algèbres sous–invariantes d'une algèbre de Lie et tour des dérivations (d'après E. Schenkman) ..... 1951/52, n° 56, 7 p.
Sur les groupes de Lie compacts opérant dans une variété compacte (d'après G. Mostow) ..... 1957/58, n° 163, 12 p.

BREUIL, Christophe
Intégration sur les variétés p-adiques (d'après Coleman, Colmez) .. 1998/99, n° 860, 32 p.

BRÉZIS, Haïm
Points critiques dans les problèmes variationnels sans compacité ... 1987/88, n° 698, 18 p.

BREEN, Lawrence
Un théorème de finitude en K–théorie (d'après D. Quillen) ..... 1973/74, n° 438, 22 p.

BRIESKORN, Egbert
Sur les groupes de tresses (d'après V.I. Arnold) ..... 1971/72, n° 401, 24 p.

BRION, Michel
Points entiers dans les polytopes convexes ..... 1993/94, n° 780, 25 p.

BROUÉ, Michel
Les ℓ–blocs des groupes $GL(n,q)$ et $U_1(n,q^2)$ et leurs structures locales ..... 1984/85, n° 640, 28 p.

BRUGUIÈRES, Alain
Propriétés de convexité de l'application–moment (d'après Atiyah, Guillemin–Sternberg, Kirwan et al.) ..... 1985/86, n° 654, 25 p.

BRUHAT, François
Représentations induites des groupes localement compacts ..... 1952/53, n° 68, 8 p.
Structure des algèbres de Lie semi–simples ..... 1954/55, n° 107, 8 p.
Prolongement des sous–variétés analytiques (d'après W. Rothstein) 1955/56, n° 122, 12 p.
Travaux de Harish–Chandra ..... 1956/57, n° 143, 9 p.
Travaux de Sternberg ..... 1960/61, n° 217, 18 p.
Intégration p–adique (d'après Tomas) ..... 1961/62, n° 229, 16 p.
Points entiers sur les courbes de genre $\geqslant 1$ (d'après Lang) ..... 1962/63, n° 247, 12 p.
Sous–groupes compacts maximaux des groupes semi–simples p–adiques ..... 1963/64, n° 271, 11 p.

BRUMER, Armand
Travaux récents d'Iwasawa et de Leopoldt ..... 1966/67, n° 325, 14 p.

BRUNELLA, Marco
Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes (d'après McQuillan, Demailly–El Goul,...) ..... 2000/01, n° 881, 23 p.

BRYANT, Robert
Recent advances in the theory of holonomy ..... 1998/99, n° 861, 24 p.

BRYLINSKI, Jean–Luc
(Co)–homologie d'intersection et faisceaux pervers ..... 1981/82, n° 585, 29 p.

BUFF, Xavier
Ensembles de Julia de mesure positive (d'après van Strien et Nowicki) ..... 1996/97, n° 820, 33 p.

BURQ, Nicolas
Mesures semi–classiques et mesures de défaut ..... 1996/97, n° 826, 29 p.
Formules de trace, résonances et quasi-modes (d'après Sjöstrand-Zworski, Stefanov-Vodev et al.) ..... 1998/99, n° 856, 16 p.

CALABI, Eugenio
Géométrie différentielle affine des hypersurfaces ..... 1980/81, n° 573, 16 p.

CARAYOL, Henri
Variétés de Drinfeld compactes (d'après Laumon, Rapoport et Stuhler) ..... 1991/92, n° 756, 41 p.
Preuve de la conjecture de Langlands locale pour GL_n : Travaux de Harris–Taylor et Henniart ..... 1998/99, n° 857, 52 p.

CARTAN, Henri
Les travaux de Koszul, I ..... 1948/49, n° 1, 6 p.
Les travaux de Koszul, II ..... 1948/49, n° 8, 8 p.
Les travaux de Koszul, III ..... 1948/49, n° 12, 4 p.
Espaces fibrés analytiques complexes ..... 1950/51, n° 34, 10 p.
Mémoire de Gleason sur le 5^e problème de Hilbert ..... 1952/53, n° 73, 9 p.
Fonctions et variétés algébroïdes (d'après F. Hirzebruch) ..... 1953/54, n° 84, 8 p.
Sur un mémoire inédit de H. Grauert : « Zur Theorie der analytisch vollständigen Räume » ..... 1954/55, n° 115, 11 p.
Théorie spectrale des C–algèbres commutatives (d'après L. Waelbroeck) ..... 1955/56, n° 125, 13 p.
Espaces fibrés analytiques (d'après H. Grauert) ..... 1956/57, n° 137, 12 p.
Thèse de Douady ..... 1965/66, n° 296, 16 p.
Travaux de Karoubi sur la K–théorie ..... 1967/68, n° 337, 25 p.
Sous–ensembles analytiques d'une variété banachique complexe (d'après J.–P. Ramis) ..... 1968/69, n° 354, 16 p.

CARTIER, Pierre
Représentations des groupes de Lie (d'après Harish–Chandra) ..... 1953/54, n° 96, 10 p.
Développements de fonctions arbitraires suivant les fonctions propres d'un opérateur différentiel ..... 1954/55, n° 102, 10 p.
Effacement dans la cohomologie des algèbres de Lie (d'après Hochschild et Koszul) ..... 1954/55, n° 116, 7 p.
Dualité des variétés abéliennes ..... 1957/58, n° 164, 13 p.
Vecteurs analytiques (d'après E. Nelson) ..... 1958/59, n° 181, 12 p.
Structures simpliciales ..... 1959/60, n° 199, 12 p.
Classes de formes bilinéaires sur les espaces de Banach (d'après Grothendieck) ..... 1960/61, n° 211, 14 p.
Analyse spectrale et théorème de prédiction statistique de Wiener .. 1960/61, n° 218, 22 p.
Fluctuations dans les suites de variables aléatoires indépendantes .. 1962/63, n° 241, 18 p.
Représentations linéaires des groupes algébriques semi–simples en caractéristique non nulle (d'après Steinberg) ..... 1962/63, n° 255, 10 p.
Processus aléatoires généralisés ..... 1963/64, n° 272, 10 p.
Équivalence linéaire des idéaux de polynômes (d'après R. Hartshorne) ..... 1964/65, n° 283, 11 p.
Diviseurs amples ..... 1965/66, n° 301, 16 p.
Théorie analytique des formes quadratiques. I. Suites quasi–périodiques ..... 1965/66, n° 309, 12 p.
Théorie des groupes, fonctions théta et modules des variétés abéliennes ..... 1967/68, n° 338, 16 p.
Relèvements des groupes formels commutatifs ..... 1968/69, n° 359, 14 p.
Espaces de Poisson des groupes localement compacts (d'après R. Azencott) ..... 1969/70, n° 370, 21 p.
Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs ..... 1970/71, n° 388, 16 p.
Géométrie et analyse sur les arbres ..... 1971/72, n° 407, 18 p.
Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs. II : Prolongement analytique ..... 1972/73, n° 418, 27 p.
Inégalités de corrélation en Mécanique Statistique ..... 1972/73, n° 431, 19 p.
Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie ..... 1974/75, n° 454, 15 p.
Les représentations des groupes réductifs p–adiques et leurs caractères ..... 1975/76, n° 471, 22 p.
Spectre de l'équation de Schrödinger, application à la stabilité de la matière (d'après J. Lebowitz, E. Lieb, B. Simon et W. Thirring) . 1976/77, n° 496, 17 p.

CARTIER, Pierre (suite)
Logique, catégories et faisceaux (d'après F. Lawvere et M. Tierney) 1977/78, n° 513, 24 p.
Théorie de la diffusion pour l'équation de Schrödinger ..... 1978/79, n° 533, 19 p.
La conjecture locale de Langlands pour $GL(2)$ et la démonstration de Ph. Kutzko ..... 1979/80, n° 550, 27 p.
Arrangements d'hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire 1980/81, n° 561, 22 p.
Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard ..... 1981/82, n° 580, 24 p.
La théorie classique et moderne des fonctions symétriques ..... 1982/83, n° 597, 23 p.
Homologie cyclique : Rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen,... ..... 1983/84, n° 621, 24 p.
Décomposition des polyèdres : le point sur le 3^e problème de Hilbert 1984/85, n° 646, 28 p.
Détermination des caractères des groupes finis simples : travaux de Lusztig ..... 1985/86, n° 658, 25 p.
Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées ..... 1987/89, n° 687, 22 p.
Développements récents sur les groupes de tresses. Applications à la topologie et à l'algèbre ..... 1989/90, n° 716, 51 p.
Démonstration « automatique » d'identités et fonctions hypergéométriques (d'après D. Zeilberger) ..... 1991/92, n° 746, 51 p.
La théorie des blocs et les groupes génériques ..... 1993/94, n° 781, 38 p.
Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro–unipotents ..... 2000/01, n° 885, 37 p.

CATHELINEAU, Jean-Louis
Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes (d'après A.B. Goncharov et d'autres) ..... 1992/93, n° 772, 31 p.

CERF, Jean
Travaux de Smale sur la structure des variétés ..... 1961/62, n° 230, 16 p.
1–formes fermées non singulières sur les variétés compactes de dimension 3 ..... 1980/81, n° 574, 15 p.
Suppression des singularités de codimension plus grande que 1 dans les familles de fonctions différentiables réelles (d'après Kiyoshi Igusa) ..... 1983/84, n° 627, 15 p.

CHABAUTY, Claude
Le théorème de Minkowski–Hlawka ..... 1948/49, n° 2, 3 p.

CHAMBERT–LOIR, Antoine
Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne (d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky) ..... 2000/01, n° 886, 34 p.

CHAPERON, Marc
Quelques questions de géométrie symplectique (d'après, entre autres, Poincaré, Arnold, Conley et Zehnder) ..... 1982/83, n° 610, 19 p.

CHAZARAIN, Jacques
Le problème mixte hyperbolique ..... 1972/73, n° 432, 21 p.
Spectre des opérateurs elliptiques et flots hamiltoniens ..... 1974/75, n° 460, 13 p.

CHEMIN, Jean-Yves
Explosion géométrique pour certaines équations d'ondes non linéaires (d'après Serge Alinhac) ..... 1998/99, n° 850, 14 p.

CHENCINER, Alain
Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique ..... 1972/73, n° 424, 25 p.
La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather ..... 1982/83, n° 622, 24 p.
À l'infini en temps fini ..... 1996/97, n° 832, 31 p.

CHERN, Shiing–Shen
Les hypersurfaces dans l'espace euclidien ..... 1959/60, n° 193, 9 p.

CHEVALLEY, Claude
L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de caractéristique p, I (d'après Weil) ..... 1948/49, n° 3, 3 p.
L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de caractéristique p, II (d'après Weil) ..... 1948/49, n° 9, 4 p.
Le théorème fondamental de la multiplication complexe (Démonstration de Eichler) ..... 1956/57, n° 138, 13 p.
La notion de correspondance propre en géométrie algébrique ..... 1957/58, n° 152, 11 p.
La théorie des fonctions holomorphes de Zariski. Application au théorème de connexité ..... 1957/58, n° 158, 17 p.
Certains schémas de groupes semi–simples ..... 1960/61, n° 219, 16 p.
Le groupe de Janko ..... 1967/68, n° 331, 15 p.
Théorie des blocs ..... 1972/73, n° 419, 16 p.

CHOQUET, Gustave
Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes ..... 1956/57, n° 139, 15 p.
Les travaux de Nash et Kuiper sur le plongement isométrique des C^1–variétés riemanniennes dans l'espace euclidien ..... 1956/57, n° 147, 11 p.

CLOZEL, Laurent
Progrès récents vers la classification du dual unitaire des groupes réductifs réels ..... 1986/87, n° 681, 24 p.
Nombres de Tamagawa des groupes semi–simples (d'après Kottwitz) 1988/89, n° 702, 22 p.
Nombre de points des variétés de Shimura sur un corps fini (d'après R. Kottwitz) ..... 1992/93, n° 766, 29 p.

COATES, John
The work of Mazur and Wiles on cyclotomic fields ..... 1980/81, n° 575, 23 p.
The work of Gross and Zagier on Heegner points and the derivative of L–series ..... 1984/85, n° 635, 16 p.
On p–adic L–functions ..... 1988/89, n° 701, 27 p.

COLIN de VERDIÈRE, Yves
Propriétés asymptotiques de l'équation de la chaleur sur une variété compacte (d'après P. Gilkey) ..... 1973/74, n° 439, 11 p.
La matrice de scattering pour l'opérateur de Schrödinger sur la droite réelle ..... 1979/80, n° 557, 11 p.
Distribution de points sur une sphère (d'après Lubotzky, Phillips et Sarnak) ..... 1988/89, n° 703, 11 p.

COLMEZ, Pierre
Fonctions L p-adiques ..... 1998/99, n° 851, 38 p.

COMBES, François
Les facteurs de von Neumann de type III (d'après A. Connes) ..... 1974/75, n° 461, 14 p.

COMETS, Francis
Limites hydrodynamiques ..... 1990/91, n° 735, 26 p.

CONNES, Alain
Feuilletages et algèbres d'opérateurs ..... 1979/80, n° 551, 17 p.
Indice des sous–facteurs, algèbres de Hecke et théorie des nœuds (d'après Vaughan Jones) ..... 1984/85, n° 647, 20 p.
Brisure de symétrie spontanée et géométrie du point de vue spectral 1995/96, n° 816, 37 p.

CONZE, Jean–Pierre
Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en Théorie Ergodique ..... 1972/73, n° 420, 19 p.

CORNALBA, Maurizio
Systèmes pluricanoniques sur l'espace des modules des courbes et diviseurs de courbes k–gonales (d'après Harris et Mumford) ..... 1983/84, n° 615, 18 p.

COUGNARD, Jean
Les travaux de A. Fröhlich, Ph. Cassou–Noguès et M.J. Taylor sur les bases normales ..... 1982/83, n° 598, 14 p.

COURRÈGE, Philippe
Problèmes aux limites elliptiques et principe du maximum ..... 1965/66, n° 302, 18 p.

DACUNHA–CASTELLE, Didier
Contre–exemple à la propriété d'approximation uniforme dans les espaces de Banach (d'après Enflo et Davie) ..... 1972/73, n° 433, 8 p.
Reconstruction des phases en cristollographie par maximum d'entropie (d'après G. Bricogne) ..... 1982/83, n° 628, 15 p.

DEBARRE, Olivier
Variétés de Fano ..... 1996/97, n° 827, 25 p.

DÉCHAMPS–GONDIM, Myriam
Analyse harmonique, analyse complexe et géométrie des espaces de Banach (d'après J. Bourgain) ..... 1983/84, n° 623, 25 p.

DEHORNOY, Patrick
La détermination projective (d'après Martin, Steel et Woodin) ..... 1988/89, n° 710, 16 p.

DEJEAN, Yves
Transformation de Fourier des distributions homogènes (d'après Gårding) ..... 1962/63, n° 242, 14 p.

DELAROCHE, Claire et KIRILLOV, Alexandre
Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous–groupes fermés (d'après D.A. Kajdan) ..... 1967/68, n° 343, 22 p.

DELIGNE, Pierre
Formes modulaires et représentations ℓ–adiques ..... 1968/69, n° 355, 34 p.
Travaux de Griffiths ..... 1969/70, n° 376, 25 p.
Travaux de Shimura ..... 1970/71, n° 389, 43 p.
Variétés unirationnelles non rationnelles (d'après M. Artin et D. Mumford) ..... 1971/72, n° 402, 13 p.
Les difféomorphismes du cercle (d'après M.R. Herman) ..... 1975/76, n° 477, 23 p.
Sommes de Gauss cubiques et revêtements de $SL(2)$ (d'après S.J. Patterson) ..... 1978/79, n° 539, 34 p.
Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien (d'après W. Fulton) ..... 1979/80, n° 543, 10 p.
Preuve des conjectures de Tate et Shafarevitch (d'après G. Faltings) 1983/84, n° 616, 17 p.

DELORME, Patrick
Inversion des intégrales orbitales sur certains espaces symétriques réductifs (d'après A. Bouaziz et P. Harinck) ..... 1995/96, n° 810, 21 p.

DELSARTE, Jean
Nombre de solutions des équations polynomiales sur un corps fini (d'après A. Weil) ..... 1950/51, n° 39, 9 p.

DEMAILLY, Jean-Pierre
Méthodes L^2 et résultats effectifs en géométrie algébrique ..... 1998/99, n° 852, 32 p.

DEMAZURE, Michel
Structure du groupe orthogonal (d'après T. Tamagawa) ..... 1958/59, n° 169, 11 p.
Sous–groupes arithmétiques des groupes algébriques linéaires (d'après Borel et Harish–Chandra) ..... 1961/62, n° 235, 12 p.
Structure des groupes réductifs (d'après Borel–Tits) ..... 1966/67, n° 313, 7 p.
Classification des algèbres de Lie filtrées ..... 1966/67, n° 326, 11 p.
Motifs des variétés algébriques ..... 1969/70, n° 365, 20 p.
Classification des germes à point critique isolé et à nombre de module 0 *ou* 1 *(d'après V.I. Arnold)* ..... 1973/74, n° 443, 19 p.
Démonstration de la conjecture de Mumford (d'après W. Haboush) . 1974/75, n° 462, 7 p.
Identités de Macdonald ..... 1975/76, n° 483, 11 p.
Caractérisations de l'espace projectif (conjectures de Hartshorne et de Frankel) (d'après Shigefumi Mori) ..... 1979/80, n° 544, 9 p.

DENEF, Jan
Report on Igusa's local zeta function ..... 1990/91, n° 741, 28 p.

DENY, Jacques
Les deux aspects de la théorie du potentiel ..... 1956/57, n° 148, 18 p.
Formes et espaces de Dirichlet ..... 1959/60, n° 187, 11 p.
Développements récents de la théorie du potentiel (Travaux de Jacques Faraut et de Francis Hirsch) ..... 1971/72, n° 403, 14 p.

DERRIDJ, Makhlouf
La sous-ellipticité pour le problème $\overline{\partial}$–Neumann dans un domaine pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ (d'après D. Catlin) ..... 1994/95, n° 790, 21 p.

DESCHAMPS, Mireille
Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général (d'après F.A. Bogolomov) ..... 1977/78, n° 519, 15 p.

DESHOUILLERS, Jean–Marc
Progrès récents des petits cribles arithmétiques (d'après Chen, Iwaniec,$\cdots$) ..... 1977/78, n° 520, 15 p.
Théorème de Fermat : la contribution de Fouvry ..... 1984/85, n° 648, 10 p.
L'étude des formes cubiques rationnelles via la méthode du cercle (d'après D.R. Heath–Brown, C. Hooley et R.C. Vaughan) ..... 1989/90, n° 720, 23 p.

DESOLNEUX–MOULIS, Nicole
Variétés de dimension infinie ..... 1969/70, n° 378, 15 p.
Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens autonomes (d'après Clarke, Ekeland–Lasry, Moser, Rabinowitz, Weinstein) ..... 1979/80, n° 552, 18 p.

DIEUDONNÉ, Jean
Géométrie des espaces algébrique homogènes (d'après W.L. Chow) . 1949/50, n° 18, 6 p.
Groupes de Lie algébriques (Travaux de Chevalley) ..... 1951/52, n° 57, 8 p.
Extensions de représentations linéaires de groupes de Lie (d'après Hochschild et Mostow) ..... 1957/58, n° 159, 10 p.
Les groupes simples déduits des algèbres de Lie simples complexes (d'après C. Chevalley) ..... 1959/60, n° 194, 10 p.
Mémoire de Bertram Kostant sur les applications de la cohomologie des algèbres de Lie réductives ..... 1962/63, n° 243, 13 p.
La théorie des invariants au XIX^e siècle ..... 1970/71, n° 395, 18 p.

DIXMIER, Jacques
Facteurs : classification, dimension, trace ..... 1949/50, n° 30, 11 p.
Anneaux d'opérateurs et représentations des groupes ..... 1950/51, n° 40, 6 p.
Quelques résultats d'Harish–Chandra, I ..... 1951/52, n° 50, 5 p.
Quelques résultats d'Harish–Chandra, II ..... 1951/52, n° 58, 7 p.
Fonctions sphériques (d'après R. Godement) ..... 1952/53, n° 79, 8 p.
Travaux de Malgrange sur les équations aux dérivées partielles elliptiques ..... 1955/56, n° 123, 9 p.
Travaux de Kadison sur les invariants unitaires ..... 1956/57, n° 140, 8 p.
Solution négative du problème des invariants, d'après Nagata ..... 1958/59, n° 175, 11 p.
Les algèbres hilbertiennes modulaires de Tomita (d'après Takesaki) 1969/70, n° 371, 15 p.
Certaines représentations infinies des algèbres de Lie semi–simples 1972/73, n° 425, 16 p.
Quelques résultats de finitude en théorie des invariants (d'après V.L. Popov) ..... 1985/86, n° 659, 13 p.

DOLBEAULT, Pierre
Le théorème de Riemann–Roch sur les surfaces kählériennes compactes (d'après K. Kodaira) ..... 1951/52, n° 63, 11 p.

DOLD, Albrecht
Les foncteurs dérivés d'un foncteur non–additif ..... 1958/59, n° 170, 7 p.
Structure de l'anneau de cobordisme Ω (d'après les travaux de V.A. Rokhlin et de C.T.C. Wall) ..... 1959/60, n° 188, 14 p.

DOLGACHEV, Igor
Integral quadratic forms : applications to algebraic geometry (after V. Nikulin) ..... 1982/83, n° 611, 28 p.

DOUADY, Adrien
Cohomologie des groupes compacts totalement discontinus (d'après Tate) ..... 1959/60, n° 189, 12 p.
Plongements de sphères (d'après Mazur et Brown) ..... 1960/61, n° 205, 6 p.
Le théorème de Grauert sur la cohérence des faisceaux–images d'un faisceau analytique cohérent par un morphisme propre ..... 1960/61, n° 220, 14 p.
Cycles analytiques, d'après Atiyah et Hirzebruch ..... 1961/62, n° 223, 22 p.
Démonstration élémentaire d'un théorème de périodicité de Bott (d'après Atiyah et Bott) ..... 1963/64, n° 259, 9 p.
Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes (d'après M. Kuranishi) ..... 1964/65, n° 277, 7 p.
Platitude et privilège ..... 1965/66, n° 303, 6 p.
Espaces analytiques sous–algébriques (d'après B.G. Moĭšezon) ..... 1967/68, n° 344, 14 p.
Prolongement de faisceaux analytiques cohérents (travaux de Trautmann, Frisch–Guenot et Siu) ..... 1969/70, n° 366, 16 p.
Le théorème des images directes de Grauert (d'après Kiehl–Verdier) 1971/72, n° 404, 15 p.
Système dynamiques holomorphes ..... 1982/83, n° 599, 25 p.

DOUADY, Adrien (suite)
Noeuds et structures de contact en dimension 3 (d'après Daniel Bennequin) ..... 1982/83, n° 604, 20 p.
Disques de Siegel et anneaux de Herman ..... 1986/87, n° 677, 22 p.
Prolongement de mouvements holomorphes (d'après Słodkowski et autres) ..... 1993/94, n° 775, 14 p.

DUFLO, Michel
Représentations de carré intégrable des groupes semi–simples réels . 1977/78, n° 508, 19 p.
Caractères des groupes de Lie résolubles ..... 1979/80, n° 558, 16 p.
Analyse harmonique sur les groupes algébriques complexes : formule de Plancherel (d'après M. Andler) et conjecture de M. Vergne .... 1982/83, n° 612, 13 p.
Opérateurs transversalement elliptiques et formes différentielles équivariantes (d'après N. Berline et M. Vergne) ..... 1994/95, n° 791, 17 p.

DUISTERMAAT, J.J.
The light in the neighborhood of a caustic ..... 1976/77, n° 490, 11 p.

EDIXHOVEN, Bas
Rational torsion points on elliptic curves over number fields (after Kamienny and Mazur) ..... 1993/94, n° 782, 19 p.
Rational elliptic curves are modular (after Breuil, Conrad, Diamond and Taylor) ..... 1999/2000, n° 871, 28 p.

EDWARDS, Robert D.
Characterizing infinite dimensional manifolds topologically (after H. Torúnczyk) ..... 1978/79, n° 540, 25 p.

EHRESMANN, Charles
Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable ... 1949/50, n° 24, 16 p.
Sur les variétés presque complexes ..... 1950/51, n° 35, 10 p.

EILENBERG, Samuel
Exposition des théories de Morse et Lusternik–Schnirelmann ..... 1950/51, n° 36, 6 p.
Foncteurs de modules et leurs satellites (d'après Cartan et Eilenberg) ..... 1950/51, n° 46, 3 p.

ELWORTHY, K. David
Stochastic methods and differential geometry ..... 1980/81, n° 567, 16 p.

ÉMERY, Michel
Espaces probabilisés filtrés : de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson ..... 2000/01, n° 882, 21 p.

ESNAULT, Hélène
Classification des variétés de dimension 3 et plus (d'après T. Fujita, S. Iitaka, Y. Kawamata, K. Ueno, E. Viehweg) ..... 1980/81, n° 568, 21 p.

EYMARD, Pierre
Homomorphismes des algèbres de groupe (d'après Paul J. Cohen) .. 1961/62, n° 231, 14 p.
Algèbres A_p et convoluteurs de L^p ..... 1969/70, n° 367, 18 p.

FACK, Thierry
K–théorie bivariante de Kasparov ..... 1982/83, n° 605, 18 p.

FALTINGS, Gerd
Curves and their fundamental groups (following Grothendieck, Tamagawa and Mochizuki) ..... 1997/98, n° 840, 20 p.

FERNIQUE, Xavier
Fonctions aléatoires gaussiennes, les résultats récents de M. Talagrand ..... 1985/86, n° 660, 10 p.

FERRAND, Daniel
Les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes sur un corps sont libres (d'après Quillen et Suslin) ..... 1975/76, n° 484, 20 p.

FONTAINE, Jean–Marc
Valeurs spéciales des fonctions L des motifs ..... 1991/92, n° 751, 45 p.

FOURNIER, Jean–Claude
Le théorème du coloriage des cartes (ex–conjecture des quatre couleurs) ..... 1977/78, n° 509, 24 p.

FRENKEL, Edward V.
Vertex algebras and algebraic curves ..... 1999/2000, n° 875, 41 p.

FRIEDLANDER, Eric M.
Motivic complexes of Suslin and Voevodsky ..... 1996/97, n° 833, 24 p.

FRÖHLICH, Jürg and SPENCER, Thomas
Some recent rigorous results in the theory of phase transitions and critical phenomena ..... 1981/82, n° 586, 42 p.

FULTON, William
Eigenvalues of sums of Hermitian matrices (after A. Klyachko) .... 1997/98, n° 845, 15 p.

FURSTENBERG, Harry
Rigidity and cocycles for ergodic actions of semi–simple Lie groups (after G.A. Margulis and R. Zimmer) ..... 1979/80, n° 559, 20 p.

GABRIEL, Pierre
Représentations des algèbres de Lie résolubles (d'après J. Dixmier) 1968/69, n° 347, 22 p.
Représentations indécomposables ..... 1973/74, n° 444, 27 p.
Algèbres auto–injectives de représentation finie (d'après Christine Riedtmann) ..... 1979/80, n° 545, 20 p.

GALLOT, Sylvestre
Minorations sur le λ_1 des variétés riemanniennes ..... 1980/81, n° 569, 17 p.
Volumes, courbure de Ricci et convergence des variétés (d'après T.H. Colding et Cheeger–Colding) ..... 1997/98, n° 835, 26 p.

GAUDUCHON, Paul
Variétés riemanniennes autoduales (d'après C.H. Taubes et al.) .... 1992/93, n° 767, 36 p.

GAUTHIER, Luc
Théorie des correspondances birationnelles selon Zariski ..... 1948/49, n° 10, 8 p.
Quelques variétés usuelles en géométrie algébrique ..... 1950/51, n° 37, 5 p.

GAWĘDZKI, Krzysztof
Conformal field theory ..... 1988/89, n° 704, 32 p.

GECK, Meinolf
Representations of Hecke algebras at roots of unity ..... 1997/98, n° 836, 23 p.

GÉRARD, Christian
Complétude asymptotique des systèmes à N corps à courte portée (d'après I.M. Sigal et A. Soffer) ..... 1989/90, n° 721, 23 p.

GÉRARD, Patrick
Solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann (d'après R.J. Di Perna et P.L. Lions) ..... 1987/88, n° 699, 25 p.
Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels (d'après J.–Y. Chemin et J.–M. Delort) ..... 1991/92, n° 757, 34 p.

GÉRARDIN, Paul
Représentations du groupe SL_2 d'un corps local (d'après Gel'fand, Graev et Tanaka) ..... 1967/68, n° 332, 35 p.
Changement du corps de base pour les représentations de $GL(2)$ (d'après R.P. Langlands, H.Saito et T. Shintani) ..... 1977/78, n° 510, 24 p.
Formes automorphes associées aux cycles géodésiques des surfaces de Riemann hyperboliques (d'après S. Kudla et J. Millson) ..... 1980/81, n° 562, 13 p.

GERMAIN, Paul
Les équations du type mixte et le problème de Tricomi ..... 1955/56, n° 124, 12 p.

GHYS, Étienne
L'invariant de Godbillon–Vey ..... 1988/89, n° 706, 27 p.
Les groupes hyperboliques ..... 1989/90, n° 722, 36 p.
Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes ..... 1991/92, n° 747, 44 p.
Construction de champs de vecteurs sans orbite périodique (d'après Krystyna Kuperberg) ..... 1993/94, n° 785, 25 p.

GINIBRE, Jean
Le problème de Cauchy pour des EDP semi–linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain) ..... 1994/95, n° 796, 25 p.

GIRARD, Jean–Yves
Le lambda–calcul du second ordre ..... 1986/87, n° 678, 13 p.

GIRAUD, Jean
Groupe de Picard, anneaux factoriels (d'après Grothendieck) ..... 1962/63, n° 248, 13 p.
Analysis situs (d'après Artin et Grothendieck) ..... 1962/63, n° 256, 11 p.
Résolution des singularités (d'après H. Hironaka) ..... 1966/67, n° 320, 13 p.

GIROUX, Emmanuel
Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg) ..... 1992/93, n° 760, 27 p.

GODBILLON, Claude
Travaux de D. Anosov et S. Smale sur les difféomorphismes ..... 1968/69, n° 348, 13 p.
Problèmes d'existence et d'homotopie dans les feuilletages ..... 1970/71, n° 390, 15 p.
Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels ..... 1972/73, n° 421, 19 p.

GODEMENT, Roger
Groupe complexe unimodulaire, I : les représentations unitaires irréductibles du groupe complexe unimodulaire (d'après Gelfand et Neumark) ..... 1948/49, n° 4, 7 p.
Groupe complexe unimodulaire, II : la transformation de Fourier dans le groupe complexe unimodulaire à deux variables (d'après Gelfand et Neumark) ..... 1948/49, n° 13, 7 p.
Sommes continues d'espaces de Hilbert, I ..... 1949/50, n° 19, 6 p.
Sommes continues d'espaces de Hilbert, II ..... 1949/50, n° 25, 8 p.
Théorie des caractères dans les groupes unimodulaires ..... 1950/51, n° 41, 11 p.
Travaux de Hecke, I ..... 1951/52, n° 51, 7 p.
Travaux de Hecke, II ..... 1951/52, n° 59, 8 p.

GODEMENT, Roger (suite)
Travaux de Hecke, III ..... 1952/53, n° 74, 10 p.
Travaux de Hecke, IV ..... 1952/53, n° 80, 7 p.
Cohomologie des groupes discontinus ..... 1953/54, n° 90, 11 p.
Représentations induites des groupes de Lie (d'après Bruhat) ..... 1955/56, n° 126, 8 p.
Représentations induites des groupes semi–simples ..... 1955/56, n° 131, 7 p.
Introduction aux travaux de A. Selberg ..... 1956/57, n° 144, 16 p.
Les fonctions zêta des algèbres simples, I ..... 1958/59, n° 171, 23 p.
Les fonctions zêta des algèbres simples, II ..... 1958/59, n° 176, 20 p.
Groupes linéaires algébriques sur un corps parfait ..... 1960/61, n° 206, 22 p.
La formule des traces de Selberg ..... 1962/63, n° 244, 10 p.
Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques ..... 1962/63, n° 257, 17 p.
Quelques résultats nouveaux de Kostant sur les groupes semi–simples ..... 1963/64, n° 260, 8 p.
Analyse spectrale des fonctions modulaires ..... 1964/65, n° 278, 26 p.
Introduction à la théorie de Langlands ..... 1966/67, n° 321, 30 p.
Formes automorphes et produits eulériens (d'après R.P. Langlands) 1968/69, n° 349, 17 p.
De l'équation de Schrödinger aux fonctions automorphes ..... 1974/75, n° 467

GONZALEZ SPRINBERG, Gerardo
Désingularisation des surfaces par des modifications de Nash normalisées (d'après M. Spivakovsky) ..... 1985/86, n° 661, 21 p.

GOODE, John B.
H. L. M. (Hrushovski–Lang–Mordell) ..... 1995/96, n° 811, 16 p.

GOULAOUIC, Charles
Sur la théorie spectrale des opérateurs elliptiques (éventuellement dégénérés) ..... 1968/69, n° 360, 14 p.

GRAMAIN, André
L'invariance topologique des classes de Pontrjagin rationnelles ..... 1965/66, n° 304, 16 p.
Éléments de $\pi_{2n-1}(S^n)$ d'invariant de Hopf Un (d'après J. Adams et M. Atiyah) ..... 1966/67, n° 322, 7 p.
Groupe des difféomorphismes et espaces de Teichmüller d'une surface ..... 1972/73, n° 426, 14 p.
Sphères d'homologie rationnelle (d'après H. Barge, J. Lannes, F. Latour et P. Vogel) ..... 1974/75, n° 455, 18 p.
Rapport sur la théorie classique des nœuds (première partie) ..... 1974/75, n° 485, 16 p.
Rapport sur la théorie classique des nœuds (deuxième partie) ..... 1990/91, n° 732, 25 p.

GRIGORIEFF, Serge
Détermination des jeux boréliens et problèmes logiques associés (d'après D. Martin) ..... 1975/76, n° 478, 14 p.

GRISVARD, Pierre
Méthodes opérationnelles dans l'étude des problèmes aux limites ..... 1964/65, n° 289, 11 p.
Résolution locale d'une équation différentielle (selon Nirenberg et Trèves) ..... 1970/71, n° 391, 14 p.

GROMOV, Mikhael
On hyperbolic manifolds according to Thurston and and Jørgensen . 1979/80, n° 546, 14 p.
Entropy, homology and semialgebraic geometry (after Y. Yomdin) . 1985/86, n° 663, 16 p.

GROSS, Leonard
Harmonic functions on loop groups ..... 1997/98, n° 846, 16 p.

GROTHENDIECK, Alexander
Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires ..... 1952/53, n° 69, 8 p.
La théorie de Fredholm ..... 1953/54, n° 91, 8 p.
Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de von Neumann munies d'une trace ..... 1954/55, n° 113, 13 p.
Sur le mémoire de A. Weil : « Généralisation des fonctions abéliennes » ..... 1956/57, n° 141, 15 p.
Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents ..... 1956/57, n° 149, 25 p.
Géométrie formelle et géométrie algébrique ..... 1958/59, n° 182, 28 p.
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I : généralités. Descente par morphismes fidèlement plats ..... 1959/60, n° 190, 29 p.
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. II : le théorème d'existence en théorie formelle des modules ..... 1959/60, n° 195, 22 p.
Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. III : préschémas quotients ..... 1960/61, n° 212, 20 p.
Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV : les schémas de Hilbert ..... 1960/61, n° 221, 28 p.
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. V. Les schémas de Picard : théorèmes d'existence ..... 1961/62, n° 232, 19 p.
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. VI. Les schémas de Picard : propriétés générales ..... 1961/62, n° 236, 23 p.
Complément : fondements de la géométrie algébrique. Commentaires ..... 1961/62, 11 p.
Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L ..... 1964/65, n° 279, 15 p.
Le groupe de Brauer. I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses ..... 1964/65, n° 290, 21 p.
Le groupe de Brauer. II. Théorie cohomologique ..... 1965/66, n° 297, 21 p.

GUICHARDET, Alain
Représentations des algèbres involutives ..... 1960/61, n° 207, 8 p.
Représentations des groupes de Lie nilpotents (d'après Kirillov) ..... 1962/63, n° 249, 9 p.
Facteurs de type III (d'après R.T. Powers) ..... 1967/68, n° 333, 10 p.
Représentations de G^X selon Gelfand et Delorme ..... 1975/76, n° 486, 18 p.
Représentations de G^X (G compact) (selon Verchik, Gelfand, Graiev et Ismagilov) ..... 1978/79, n° 541, 9 p.

GUILLAUME, Marcel
Les tableaux sémantiques du calcul des prédicats restreint ..... 1957/58, n° 153, 13 p.

HAEFLIGER, André
Plongements de variétés dans le domaine stable ..... 1962/63, n° 245, 13 p.
Sphères d'homotopie nouées ..... 1964/65, n° 280, 12 p.
Travaux de Novikov sur les feuilletages ..... 1967/68, n° 339, 12 p.
Sur les classes caractéristiques des feuilletages ..... 1971/72, n° 412, 22 p.
Feuilletages riemanniens ..... 1988/89, n° 707, 15 p.

HAKIM, Monique
Valeurs au bord de fonctions holomorphes bornées en plusieurs variables complexes ..... 1982/83, n° 613, 13 p.

HARISH–CHANDRA
Some applications of invariant differential operators on a semisimple Lie algebra ..... 1957/58, n° 160, 8 p.

HARTSHORNE, Robin
Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif (d'après L. Gruson et C. Peskine) ..... 1981/82, n° 592, 13 p.

HARVEY, William James
Kleinian groups (a survey) ..... 1976/77, n° 491, 16 p.

HECKMAN, Gerrit J.
Dunkl operators ..... 1996/97, n° 828, 24 p.

HELFFER, Bernard
Propagation des singularités pour des problèmes aux limites (d'après R.B. Melrose, J. Sjöstrand) ..... 1978/79, n° 525, 20 p.

HELLEGOUARCH, Yves
Fonctions zêta en caractéristique positive et modules de Carlitz–Hayes ..... 1997/98, n° 837, 23 p.

HENNIART, Guy
Les inégalités de Morse (d'après E. Witten) ..... 1983/84, n° 617, 19 p.
Cyclotomie et valeurs de la fonction Γ (d'après G. Anderson) ..... 1987/88, n° 688, 20 p.
Formes de Maass et représentations galoisiennes (d'après Blasius, Clozel, Harris, Ramakrishnan et Taylor) ..... 1988/89, n° 711, 26 p.
Erratum à l'exposé n° 711 ..... 1990/91, n° 711, 2 p.
Représentations des groupes réductifs p–adiques ..... 1990/91, n° 736, 27 p.
Progrès récents en fonctorialité de Langlands ..... 2000/01, n° 890, 22 p.

HERVÉ, Michel
Travaux de Köcher sur les formes modulaires ..... 1955/56, n° 132, 6 p.

HERZ, Jean–Claude
Caractérisation des caractères des groupes finis (d'après R. Brauer) 1953/54, n° 92, 6 p.

HERZLICH, Marc
L'inégalité de Penrose (d'après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen,...) ..... 2000/01, n° 883, 27 p.

HIRSCH, Francis
Opérateurs carrés du champ (d'après J.–P. Roth) ..... 1976/77, n° 501, 16 p.

HIRSCHOWITZ, André
Le groupe de Cremona d'après Demazure ..... 1971/72, n° 413, 16 p.

HIRZEBRUCH, Friedrich
A Riemann–Roch theorem for differentiable manifolds (d'après Atiyah et Hirzebruch) ..... 1958/59, n° 177, 21 p.
The topology of normal singularities of an algebraic surface (d'après Mumford) ..... 1962/63, n° 250, 9 p.
Singularities and exotic spheres ..... 1966/67, n° 314, 20 p.
The Hilbert modular group, resolution of the singularities at the cusps and related problems ..... 1970/71, n° 396, 14 p.

HITCHIN, Nigel J.
The Yang–Mills equations and the topology of 4–manifolds (after Simon K. Donaldson) ..... 1982/83, n° 606, 12 p.
The Hyperkähler manifolds ..... 1991/92, n° 748, 30 p.

HOUZEL, Christian
Espaces analytiques rigides (d'après R. Kiehl) ..... 1966/67, n° 327, 21 p.

HUSEMOLLER, Dale
La décomposition des espaces des lacets et la torsion impaire des groupes d'homotopie (d'après F. Cohen, J.C. Moore, J. Neisendorfer et P. Selick) ..... 1979/80, n° 547, 19 p.

ILLUSIE, Luc
Contractibilité du groupe linéaire des espaces de Hilbert de dimension infinie (d'après N. Kuiper) ..... 1964/65, n° 284, 9 p.
Travaux de Quillen sur la cohomologie des groupes ..... 1971/72, n° 405, 17 p.
Cohomologie cristalline (d'après P. Berthelot) ..... 1974/75, n° 456, 8 p.
Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p–adique (d'après G. Faltings, J.–M. Fontaine et al.) ..... 1989/90, n° 726, 50 p.

IOOSS, Gérard
Modélisation de la transition vers la turbulence ..... 1982/83, n° 607, 19 p.

JACOBSON, Nathan
Le problème de Kuros ..... 1951/52, n° 64, 10 p.

JACQUET, Hervé
Mémoire de Langlands sur la dimension des espaces de formes automorphes ..... 1963/64, n° 261, 15 p.
La transformation de Radon sur un espace symétrique (d'après S. Helgason) ..... 1964/65, n° 285, 13 p.

JAFFARD, Paul
Les corps quasi–algébriquement clos (d'après S. Lang) ..... 1952/53, n° 70, 12 p.
Anneaux d'adèles (d'après Iwasawa) ..... 1954/55, n° 103, 11 p.
Travaux de Krull sur les anneaux de Jacobson ..... 1955/56, n° 127, 9 p.

JANKO, Zvonimir
On the finite simple groups (according to Aschbacher and Gorenstein) ..... 1976/77, n° 502, 15 p.

JONES, Vaughan
Fusion en algèbres de von Neumann et groupes de lacets (d'après A. Wassermann) ..... 1994/95, n° 800, 23 p.

JULG, Pierre
Travaux de N. Higson et G. Kasparov sur la conjecture de Baum–Connes ..... 1997/98, n° 841, 33 p.

KAHANE, Jean–Pierre
Séries de Fourier aléatoires ..... 1959/60, n° 200, 10 p.
Travaux de Beurling et Malliavin ..... 1961/62, n° 225, 13 p.
Algèbres tensorielles et analyse harmonique (d'après N. Varopoulos) 1964/65, n° 291, 10 p.
Sommes partielles des séries de Fourier (d'après L. Carleson) ..... 1965/66, n° 310, 17 p.
Quotients de fonctions définies–négatives (d'après Beurling et Deny) ..... 1966/67, n° 315, 12 p.

KAHN, Bruno
La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky) ..... 1996/97, n° 834, 40 p.

KALOUJNINE, Léo
Sur la structure des p–groupes de Sylow des groupes symétriques finis et de quelques généralisations infinies de ces groupes ..... 1948/49, n° 5, 3 p.

KARCHER, Hermann
Report on M. Gromov's almost flat manifolds ..... 1978/79, n° 526, 15 p.

KAROUBI, Max
Cobordisme et groupes formels (d'après D. Quillen et T. Tom Dieck) ..... 1971/72, n° 408, 25 p.

KASSEL, Christian
Le résidu non commutatif (d'après M. Wodzicki) ..... 1988/89, n° 708, 31 p.
L'ordre de Dehornoy sur les tresses ..... 1999/2000, n° 865, 22 p.

KATZ, André
Introduction aux quasicristaux ..... 1997/98, n° 838, 23 p.

KATZ, Nicholas M.
Travaux de Dwork ..... 1971/72, n° 409, 34 p.
Travaux de Laumon ..... 1987/88, n° 691, 28 p.

KAZDAN, Jerry L.
Positive Energy in General Relativity ..... 1981/82, n° 593, 16 p.

KERVAIRE, Michel A.
L'homotopie stable des groupes classiques (d'après R. Bott). Applications ..... 1958/59, n° 172, 10 p.
Le problème de Poincaré en dimensions élevées (d'après J. Stallings) ..... 1960/61, n° 208, 11 p.
Fractions rationnelles invariantes (d'après H.W. Lenstra) ..... 1973/74, n° 445, 20 p.

KHARLAMOV, Viatcheslav
Variétés de Fano réelles (d'après C. Viterbo) ..... 1999/2000, n° 872, 18 p.

KIRILLOV, Alexandre et DELAROCHE, Claire
Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous–groupes fermés (d'après D.A. Kajdan) ..... 1967/68, n° 343, 22 p.

KOLLÁR, János
Minimal models of algebraic threefolds : Mori's program ..... 1988/89, n° 712, 24 p.

KOLMOGOROV, A.
Dimension linéaire des espaces vectoriels topologiques ..... 1957/58, n° 165, 1 p.

KOMOROWSKI, Tomasz
Brownian motion in a Poisson obstacle field ..... 1998/99, n° 853, 20 p.

KONTSEVICH, Maxim
Mirror symmetry in dimension 3 ..... 1994/95, n° 801, 19 p.
Product formulas for modular forms on $O(2,n)$ *(after R. Borcherds)* 1996/97, n° 821, 16 p.

KOSZUL, Jean–Louis
Algèbres de Jordan ..... 1949/50, n° 31, 12 p.
Cohomologie des espaces fibrés différentiables et connexions ..... 1950/51, n° 38, 7 p.
Relations d'équivalence sur les courbes algébriques ayant des points multiples (d'après M. Rosenlicht) ..... 1952/53, n° 75, 8 p.
Les variétés jacobiennes généralisées (d'après M. Rosenlicht) ..... 1953/54, n° 93, 7 p.
Formes hermitiennes canoniques des espaces homogènes complexes (d'après Atiyah) ..... 1954/55, n° 108, 7 p.
Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques (d'après Atiyah) ..... 1957/58, n° 154, 10 p.
Travaux de B. Kostant sur les groupes de Lie semi–simples ..... 1959/60, n° 191, 9 p.
Théorèmes de points fixes pour les groupes élémentaires (d'après Borel) ..... 1962/63, n° 251, 6 p.
Travaux de J. Stallings sur la décomposition des groupes en produits libres ..... 1968/69, n° 356, 13 p.

KOSZUL, Jean–Louis (suite)
Travaux de S.S. Chern et J. Simons sur les classes caractéristiques 1973/74, n° 440, 20 p.
Rigidité forte des espaces riemanniens localement symétriques (d'après G.D. Mostow) ..... 1974/75, n° 468, 15 p.

KOTSCHICK, Dieter
The Seiberg–Witten invariants of symplectic four-manifolds (after C.H. Taubes) ..... 1995/96, n° 812, 26 p.

KRAFT, Hanspeter
Challenging problems on affine n–space ..... 1994/95, n° 802, 21 p.

KRASNER, Marc
Les travaux récents de R. Brauer en théorie des groupes ..... 1948/49, n° 14, 6 p.
Généralisations non–abéliennes de la théorie locale des corps de classes ..... 1950/51, n° 47, 24 p.

KRÉE, Paul
Intégrales singulières ..... 1965/66, n° 298, 13 p.

KRIVINE, Jean–Louis
Théorèmes de consistance en théorie de la mesure de R. Solovay ... 1968/69, n° 357, 11 p.

KUDLA, Stephen S.
Derivatives of Eisenstein series and generating functions for arithmetic cycles ..... 1999/2000, n° 876, 28 p.

KUIPER, Nicolaas H.
Sur les variétés riemanniennes très pincées ..... 1971/72, n° 410, 18 p.
Sphères polyédriques flexibles dans E^3 (d'après Robert Connelly) ... 1977/78, n° 514, 22 p.

KUPKA, Ivan
Géométrie sous–riemannienne ..... 1995/96, n° 817, 30 p.

LABESSE, Jean–Pierre
La formule des traces d'Arthur–Selberg ..... 1984/85, n° 636, 16 p.

LACHAUD, Gilles
Les codes géométriques de Goppa ..... 1984/85, n° 641, 19 p.

LACOMBE, Daniel
Théorèmes de non–décidabilité ..... 1963/64, n° 266, 41 p.
Logique du premier ordre avec quantificateur cardinalisé ..... 1966/67, n° 328, 24 p.

LAFONTAINE, Jacques
Mesures de courbure des variétés lisses et des polyèdres, (d'après Cheeger, Müller et Schräder) ..... 1985/86, n° 664, 16 p.

LANFORD, Oscar E.
Smooth transformations of intervals ..... 1980/81, n° 563, 19 p.

LANG, Serge
Familles algébriques de jacobiennes (d'après Igusa) ..... 1957/58, n° 155, 9 p.
Le théorème d'irréductibilité de Hilbert ..... 1959/60, n° 201, 13 p.
L'équivalence homotopique tangentielle (d'après Mazur) ..... 1960/61, n° 222, 10 p.
Fonctions implicites et plongements riemanniens (d'après Nash et Moser) ..... 1961/62, n° 237, 10 p.
Les formes bilinéaires de Néron et Tate ..... 1963/64, n° 274, 11 p.
Corps de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann ..... 1964/65, n° 292, 2 p.
Nombres transcendants ..... 1965/66, n° 305, 8 p.
Sur la conjecture de Birch–Swinnerton–Dyer (d'après J. Coates et A. Wiles) ..... 1976/77, n° 503, 12 p.

LANNES, Jean
Un faux espace projectif réel de dimension 4 *(d'après Sylvain E. Cappell et Julius L. Shaneson)* ..... 1978/79, n° 527, 21 p.
La conjecture des immersions (d'après R.L. Cohen, E.H. Brown, F.P. Peterson et al.) ..... 1981/82, n° 594, 16 p.
Théorie homotopique des groupes de Lie (d'après W.G. Dwyer et C.W. Wilkerson) ..... 1993/94, n° 776, 25 p.

LASCAR, Daniel
Théorie de la classification ..... 1986/87, n° 682, 9 p.

LATOUR, François
Chirurgie non simplement connexe (d'après C.T.C. Wall) ..... 1970/71, n° 397, 34 p.
Double suspension d'une sphère d'homologie (d'après R. Edwards) . 1977/78, n° 515, 18 p.

LATTÈS, Robert
Application de la théorie des semi–groupes à l'intégration d'équations aux dérivées partielles ..... 1952/53, n° 81, 9 p.

LAUDENBACH, François
Les 2*–sphères de* $\mathbb{R}^3$ *vues par A. Hatcher et la conjecture de Smale :* $\mathrm{Diff}(S^3) \sim O(4)$ ..... 1983/84, n° 629, 15 p.
Orbites périodiques et courbes pseudo–holomorphes, application à la conjecture de Weinstein en dimension 3 *(d'après H. Hofer et al.)* 1993/94, n° 786, 25 p.

LAUMON, Gérard
Faisceaux caractères (d'après Lusztig) ..... 1988/89, n° 709, 30 p.
La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions (d'après Laurent Lafforgue) ..... 1999/2000, n° 873, 59 p.

LAWSON Jr., H. Blaine
Surfaces minimales et la construction de Calabi–Penrose ..... 1983/84, n° 624, 15 p.

LAZARD, Daniel
Primitives des fonctions élémentaires (d'après Risch et Davenport) 1983/84, n° 630, 14 p.

LAZARD, Michel
Groupes analytiques en caractéristique 0 ..... 1952/53, n° 76, 8 p.
Lois de groupes et analyseurs ..... 1954/55, n° 109, 15 p.

LÊ, Dũng Tráng
Faisceaux constructibles quasi–unipotents ..... 1981/82, n° 581, 13 p.

LEBEAU, Gilles
Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires (d'après J.–M. Bony et al.) ..... 1984/85, n° 642, 14 p.

LEDOUX, Michel
Inégalités isopérimétriques en analyse et probabilités ..... 1992/93, n° 773, 33 p.

LE GALL, Jean-François
Exposants critiques pour le mouvement brownien et les marches aléatoires (d'après Kenyon, Lawler et Werner) ..... 1999/2000, n° 866, 23 p.

LELONG, Pierre
Valeurs algébriques d'une application méromorphe (d'après E. Bombieri) ..... 1970/71, n° 384, 17 p.

LEMAIRE, Jean–Michel
Le transfert dans les espaces fibrés (d'après J. Becker et D. Gottlieb) ..... 1975/76, n° 472, 15 p.
Anneaux locaux et espaces de lacets à séries de Poincaré irrationnelles (d'après Anick, Roos, etc.) ..... 1980/81, n° 570, 8 p.

LEMAIRE, Luc
Existence des applications harmoniques et courbure des variétés .... 1979/80, n° 553, 22 p.

LENSTRA Jr., Hendrik W.
Primality testing algorithms (after Adleman, Rumely and Williams) 1980/81, n° 576, 15 p.

LE POTIER, Joseph
Le problème des modules locaux pour les espaces C–analytiques compacts (d'après A. Douady et J. Hubbard) ..... 1973/74, n° 449, 18 p.
Fibrés vectoriels et cycles d'ordre fini sur une variété algébrique non compacte (d'après M. Cornalba et P. Griffiths) ..... 1975/76, n° 473, 16 p.
Fibrés de Higgs et systèmes locaux ..... 1990/91, n° 737, 48 p.

LERAY, Jean
La résolution des problèmes de Cauchy et de Dirichlet au moyen du calcul symbolique et des projections orthogonales et obliques ..... 1950/51, n° 48, 11 p.
Résidus ..... 1958/59, n° 183, 2 p.
Le problème de Cauchy dans le cas analytique linéaire ..... 1959/60, n° 202, 11 p.

LERNER, Nicolas
Principe d'incertitude et microlocalisation (d'après C. Fefferman et D.H. Phong) ..... 1986/87, n° 669, 11 p.

LICHNEROWICZ, André
Variétés localement kählériennes ..... 1951/52, n° 60, 17 p.

LIONS, Jacques–Louis
Les travaux de Deny en théorie du potentiel ..... 1951/52, n° 52, 9 p.
Problèmes aux limites relatifs à des équations de type elliptique .... 1954/55, n° 110, 13 p.
Espaces de Beppo Levi et quelques applications ..... 1954/55, n° 117, 13 p.
Équations de Navier–Stokes ..... 1958/59, n° 184, 16 p.
Sur les problèmes d'interpolation ..... 1959/60, n° 196, 13 p.
Sur les problèmes unilatéraux ..... 1968/69, n° 350, 23 p.

LITTELMANN, Peter
Bases canoniques et applications ..... 1997/98, n° 847, 20 p.

LODAY, Jean–Louis
Homotopie des espaces de concordances (d'après F. Waldhausen) .. 1977/78, n° 516, 19 p.
Excision en K–théorie algébrique (d'après A. Suslin et M. Wodzicki) ..... 1991/92, n° 752, 21 p.
La renaissance des opérades ..... 1994/95, n° 792, 28 p.

LOESER, François
Déformations de courbes planes (d'après Severi et Harris) ..... 1986/87, n° 679, 19 p.
Polytopes secondaires et discriminants ..... 1990/91, n° 742, 34 p.
Exposants P–adiques et théorèmes d'indice pour les équations différentielles p–adiques (d'après G. Christol et Z. Mebkhout) .... 1996/97, n° 822, 25 p.

LOOIJENGA, Eduard
Intersection theory on Deligne-Mumford compactifications (after Witten and Kontsevich) ..... 1992/93, n° 768, 26 p.
Motivic measures ..... 1999/2000, n° 874, 31 p.

MACDONALD, Ian G.
Affine Lie algebras and modular forms ..... 1980/81, n° 577, 19 p.
Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials ..... 1994/95, n° 797, 19 p.

MACPHERSON, Robert
The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class ..... 1976/77, n° 497, 20 p.

MALGRANGE, Bernard
Équations de Sturm–Liouville ..... 1951/52, n° 65, 11 p.
Fonctions moyenne–périodiques (d'après J.–P. Kahane) ..... 1953/54, n° 97, 7 p.
Variétés analytiques réelles (d'après F. Bruhat, H. Cartan et B. Malgrange) ..... 1956/57, n° 150, 12 p.
Théorème de Frobenius complexe ..... 1957/58, n° 166, 7 p.
Unicité du problème de Cauchy (d'après A.P. Calderón) ..... 1958/59, n° 178, 11 p.
Division des distributions (d'après Łojasiewicz) ..... 1959/60, n° 203, 5 p.
Équations différentielles sans solutions (d'après Hörmander) ..... 1960/61, n° 213, 7 p.
Systèmes différentiels à coefficients constants ..... 1962/63, n° 246, 11 p.
Problèmes aux limites elliptiques ..... 1963/64, n° 262, 9 p.
Majorations a priori et d''–cohomologie (d'après Hörmander) ..... 1963/64, n° 275, 6 p.
Théorie analytique des équations différentielles ..... 1966/67, n° 329, 13 p.
Opérateurs de Fourier (d'après Hörmander et Maslov) ..... 1971/72, n° 411, 20 p.
L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels ..... 1977/781, n° 522, 13 p.
Travaux d'Écalle et de Martinet–Ramis sur les systèmes dynamiques ..... 1981/82, n° 582, 15 p.
Transformation de Fourier géométrique ..... 1987/88, n° 692, 18 p.

MALLIAVIN, Paul
Calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach ..... 1959/60, n° 197, 9 p.
Travaux de H. Skoda sur la classe de Nevanlinna ..... 1976/77, n° 504, 17 p.

MALTSINIOTIS, Georges
Le théorème de Brill–Noether (d'après P. Griffiths, J. Harris, G. Kempf, S. Kleiman et D. Laksov) ..... 1980/81, n° 571, 19 p.

MANIN, Yuri I.
Classical computing, quantum computing and Shor's factoring algorithm ..... 1998/99, n° 862, 30 p.

MARGERIN, Christophe
Fibrés stables et métriques d'Hermite–Einstein (d'après S.K. Donaldson, K.K. Uhlenbeck, S.T. Yau) ..... 1986/87, n° 683, 21 p.

MARIN, Alexis
Géométrie des polynômes, coût global moyen de la méthode de Newton (d'après M. Shub et S. Smale) ..... 1986/87, n° 670, 18 p.
Un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension trois (d'après Casson) ..... 1987/88, n° 693, 14 p.

MARMI, Stefano
Chaotic behaviour in the solar system (following J. Laskar) ..... 1998/99, n° 854, 23 p.

MARS, J.G.M.
Les nombres de Tamagawa de groupes semi–simples ..... 1968/69, n° 351, 16 p.

MARTINEAU, André
Les hyperfonctions de M. Sato ..... 1960/61, n° 214, 13 p.
Théorèmes sur le prolongement analytique du type « Edge of the wedge theorem » ..... 1967/68, n° 340, 17 p.

MARTINET, Jacques
Un contre–exemple à la conjecture d'E. Noether (d'après R. Swan) 1969/70, n° 372, 10 p.
Bases normales et constante de l'équation fonctionnelle des fonctions L d'Artin ..... 1973/74, n° 450, 22 p.

MARTINET, Jean
Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après A.D. Brjuno) ..... 1980/81, n° 564, 16 p.

MATHIEU, Olivier
Bases des représentations des groupes simples complexes (d'après Kashiwara, Lusztig, Ringel et al.) ..... 1990/91, n° 743, 22 p.
Équations de Knizhnik-Zamolodchikov et théorie des représentations ..... 1993/94, n° 777, 21 p.
Le modèle des chemins (d'après P. Littelmann) ..... 1994/95, n° 798, 16 p.
Classification des algèbres de Lie simples ..... 1998/99, n° 858, 42 p.

MATSUSHIMA, Yôso
Pseudo–groupes de Lie transitifs ..... 1954/55, n° 118, 14 p.

MAUREY, Bernard
Sous–espaces ℓ^p des espaces de Banach ..... 1982/83, n° 608, 17 p.

MAUTNER, Friedrich I.
Théorie des idéaux dans certaines algèbres d'un groupe ..... 1958/59, n° 179, 6 p.

MAZUR, Barry
Courbes elliptiques et symboles modulaires ..... 1971/72, n° 414, 18 p.

MAZUR, Barry et SERRE, Jean–Pierre
Points rationnels des courbes modulaires $X_0(N)$ (d'après (7) et (9)) 1974/75, n° 469, 18 p.

MC ALOON, Kenneth
Formes combinatoires du Théorème d'Incomplétude (d'après J. Paris et d'autres) ..... 1977/78, n° 521, 14 p.

McKEAN, Henry P. et van MOERBEKE, Pierre
Sur le spectre de quelques opérateurs et les variétés de Jacobi ..... 1975/76, n° 474, 15 p.

MÉLA, Jean–François
Le calcul sur les caractères de l'algèbre $M(G)$ et le problème« $\mu * L^1$ fermé ? » (d'après les travaux de B. Host et F. Parreau) ..... 1978/79, n° 534, 19 p.

MERLE, Michel
Variétés polaires, stratifications de Whitney et classes de Chern des espaces analytiques complexes (d'après Lê–Teissier) ..... 1982/83, n° 600, 14 p.

MÉTIVIER, Guy
Équations aux dérivées partielles sur les groupes de Lie nilpotents .. 1981/82, n° 583, 25 p.
Problèmes mixtes non linéaires et stabilité des chocs multidimensionnels ..... 1986/87, n° 671, 17 p.

MEYER, Paul–André
Le théorème ergodique de Chacón–Ornstein ..... 1964/65, n° 293, 10 p.
Le théorème de continuité de P. Lévy sur les espaces nucléaires (d'après X. Fernique) ..... 1965/66, n° 311, 14 p.
Lemme maximal et martingales (d'après D.L. Burkholder) ..... 1967/68, n° 334, 12 p.
Démonstration probabiliste d'une identité de convolution (d'après H. Kesten) ..... 1968/69, n° 361, 15 p.
Le théorème de dérivation de Lebesgue pour une résolvante (d'après G. Mokobodzki (1969)) ..... 1972/73, n° 422, 10 p.
Régularité des processus gaussiens (d'après X. Fernique) ..... 1974/75, n° 470, 11 p.
Calcul stochastique non commutatif ..... 1986/87, n° 672, 12 p.
Progrès récents en calcul stochastique quantique ..... 1992/93, n° 761, 13 p.

MEYER, Yves
Problèmes de l'unicité, de la synthèse et des isomorphismes en analyse harmonique ..... 1967/68, n° 341, 9 p.
Les nouvelles intégrales singulières de Calderón ..... 1978/79, n° 528, 9 p.
Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires (d'après J.–M. Bony) ..... 1979/80, n° 560, 9 p.
Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs .. 1985/86, n° 662, 15 p.

MICHEL, Philippe
Progrès récents du crible et applications (d'après Duke, Fouvry, Friedlander, Iwaniec) ..... 1997/98, n° 842, 25 p.
Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires ..... 2000/01, n° 887, 38 p.

MOKOBODZKI, Gabriel
Structure des cônes de potentiel ..... 1969/70, n° 377, 14 p.

MOREL, Jean–Michel
La conjecture de Mumford–Shah en segmentation d'images ..... 1995/96, n° 813, 22 p.

MORET–BAILLY, Laurent
Variétés stablement rationnelles non–rationnelles (d'après Beauville, Colliot–Thélène, Sansuc et Swinnerton–Dyer) ..... 1984/85, n° 643, 14 p.

MORGAN, John W.
The rational homotopy of smooth, complex projective varieties (following Deligne, Griffiths, Morgan and Sullivan) ..... 1975/76, n° 475, 12 p.
Actions de groupes finis sur S^3 : la conjecture de P.A. Smith (d'après Thurston et Meeks–Yau) ..... 1980/81, n° 578, 13 p.

MORIN, Bernard
Un contre–exemple de Milnor à la Hauptvermutung ..... 1961/62, n° 226, 23 p.
Champs de vecteurs sur les sphères (d'après J.F. Adams) ..... 1961/62, n° 233, 27 p.

MORLET, Claude
Microfibrés et structures différentiables ..... 1963/64, n° 263, 11 p.
Hauptvermutung et triangulation des variétés (d'après Kirby, Siebenmann et aussi Lees, Wall, etc.) ..... 1968/69, n° 362, 18 p.

MOULIS, Nicole
Variétés de dimension infinie ..... 1969/70, n° 378, 15 p.
Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens autonomes (d'après Clarke, Ekeland–Lasry, Moser, Rabinowitz et Weinstein) ..... 1979/80, n° 552, 18 p.

MOUSSU, Robert
Le problème de la finitude du nombre de cycles limites (d'après R. Bamon et Yu S. Il'Yasenko) ..... 1985/86, n° 655, 13 p.

MÜLLER, Werner
The eta invariant (some recent developments) ..... 1993/94, n° 787, 29 p.

MURRE, J.P.
Representation of unramified functors. Applications ..... 1964/65, n° 294, 19 p.

NACHBIN, Leopoldo
Régularité des solutions des équations différentielles elliptiques (d'après Moser) ..... 1962/63, n° 258, 11 p.

NÉRON, André
L'arithmétique sur les variétés algébriques (d'après A. Weil) ..... 1951/52, n° 66, 7 p.
Le Lemme d'Enriques–Severi (d'après O. Zariski) ..... 1953/54, n° 94, 9 p.
Variétés abéliennes (d'après A. Weil (en introduction à l'exposé n° 106)) ..... 1954/55, n° 104, 7 p.
Modèles p–minimaux des variétés abéliennes ..... 1961/62, n° 227, 16 p.

NOMIZU, Katsumi
Quelques résultats en géométrie différentielle des espaces homogènes 1953/54, n° 98, 8 p.

NORGUET, François
Problème de Levi et plongement des variétés analytiques réelles (d'après H. Grauert) ..... 1958/59, n° 173, 21 p.
Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes (d'après A. Andreotti et H. Grauert) ..... 1961/62, n° 234, 15 p.

OESTERLÉ, Joseph
Travaux de Ferrero et Washington sur le nombre de classes d'idéaux des corps cyclotomiques ..... 1978/79, n° 535, 13 p.
Courbes sur une variété abélienne (d'après M. Raynaud) ..... 1983/84, n° 625, 12 p.
Nombres de classes des corps quadratiques imaginaires ..... 1983/84, n° 631, 15 p.
Démonstration de la conjecture de Bieberbach (d'après L. de Branges) ..... 1984/85, n° 649, 14 p.
Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham (d'après Deligne et Illusie) ..... 1986/87, n° 673, 17 p.
Nouvelles approches du « théorème » de Fermat ..... 1987/88, n° 694, 22 p.
Empilements de sphères ..... 1989/90, n° 727, 23 p.
Polylogarithmes ..... 1992/93, n° 762, 19 p.
Travaux de Wiles (et Taylor,...), partie II ..... 1994/95, n° 804, 23 p.
Quantification formelle des variétés de Poisson (d'après Maxim Kontsevich) ..... 1997/98, n° 843, 19 p.
Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3 (d'après Thomas C. Hales et Samuel P. Ferguson) ..... 1998/99, n° 863, 9 p.

PALLU de la BARRIÈRE, Robert
L'existence de sous–espaces stables (d'après J. Werner) ..... 1953/54, n° 85, 8 p.

PANDHARIPANDE, Rahul
Rational curves on hypersurfaces (after A. Givental) ..... 1997/98, n° 848, 34 p.

PANSU, Pierre
Effondrement des variétés riemanniennes (d'après J. Cheeger et M. Gromov) ..... 1983/84, n° 618, 20 p.
Le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative .. 1990/91, n° 738, 30 p.
Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité .... 1993/94, n° 778, 37 p.
Volume, courbure et entropie (d'après G. Besson, G. Courtois et S. Gallot) ..... 1996/97, n° 823, 21 p.

PASTUR, Leonid
Eigenvalue distribution of random operators and matrices ..... 1991/92, n° 758, 17 p.

PAULIN, Frédéric
Actions de groupes sur les arbres ..... 1995/96, n° 808, 41 p.

PÉREZ–MARCO, Ricardo
Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe (d'après J.–C. Yoccoz) ..... 1991/92, n° 753, 38 p.

PERRIN–RIOU, Bernadette
Travaux de Kolyvagin et Rubin ..... 1989/90, n° 717, 38 p.

PETERS, Chris
Algebraic Fermi curves (after Gieseker, Trubowitz and Knörrer) ... 1989/90, n° 723, 20 p.

PEYRE, Emmanuel
Points de hauteur bornée et géométrie des variétés algébriques (d'après Y. Manin et al.) ..... 2000/01, n° 891, 22 p.

PHAM, Frédéric
Introduction à la résurgence quantique (d'après Écalle et Voros) ... 1985/86, n° 656, 8 p.

PIRASHVILI, Teimuraz
Polynomial functors over finite fields (after Franjou, Friedlander, Henn, Lannes, Schwartz, Suslin) ..... 1999/2000, n° 877, 20 p.

PISIER, Gilles
De nouveaux espaces de Banach sans la propriété d'approximation (d'après A. Szankowski) ..... 1978/79, n° 542, 16 p.
Espaces d'opérateurs : une nouvelle dualité ..... 1995/96, n° 814, 30 p.

PISOT, Charles
Démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers (d'après Selberg et Erdös) ..... 1949/50, n° 20, 5 p.

POÉNARU, Valentin
Extension des immersions en codimension 1 *(d'après S. Blank)* .... 1967/68, n° 342, 33 p.
Travaux de J. Cerf (isotopie et pseudo–isotopie) ..... 1969/70, n° 373, 22 p.
Le théorème de s–cobordisme ..... 1970/71, n° 392, 23 p.
Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller ..... 1978/79, n° 529, 14 p.

POITOU, Georges
Solution du problème du dixième discriminant (d'après Stark) ..... 1967/68, n° 335, 8 p.
Minorations de discriminants (d'après A.M. Odlyzko) ..... 1975/76, n° 479, 18 p.

POURCIN, Geneviève
Fibres holomorphes dont la base et la fibre sont des espaces de Stein 1977/78, n° 517, 15 p.

PUIG, Lluis
La classification des groupes finis simples : bref aperçu et quelques conséquences internes (Exposé écrit et préparé avec la collaboration de Michel Broué) ..... 1981/82, n° 584, 28 p.

RAÏS, Mustapha
Opérateurs différentiels bi–invariants (d'après M. Duflo) ..... 1976/77, n° 498, 13 p.

RAMIS, Jean–Pierre
Frobenius avec singularités (d'après B. Malgrange, J.F. Mattei et R. Moussu) ..... 1977/78, n° 523, 10 p.

RAUZY, Gérard
Points transcendants sur les variétés de groupe (d'après Lang) ..... 1963/64, n° 276, 8 p.

RAVENEL, Douglas C.
The nilpotence and periodicity theorems in stable homotopy theory . 1989/90, n° 728, 30 p.

RAYNAUD, Michel
Caractéristique d'Euler–Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes (d'après Šafarevič, Ogg et Grothendieck) ..... 1964/65, n° 286, 19 p.
Familles de fibrés vectoriels sur une surface de Riemann (d'après C.S. Seshadri, M.S. Narasimhan et D. Mumford) ..... 1966/67, n° 316, 16 p.
Travaux récents de M. Artin ..... 1968/69, n° 363, 17 p.
Compactification du module des courbes ..... 1970/71, n° 385, 15 p.
Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne (d'après David Mumford) ..... 1972/73, n° 427, 15 p.
Faisceaux amples et très amples (d'après T. Matsusaka) ..... 1976/77, n° 493, 13 p.

REEB, Georges
Propriétés des trajectoires de certains systèmes dynamiques ..... 1949/50, n° 21, 12 p.
Sur les feuilletages analytiques ..... 1959/60, n° 192, 7 p.

REID, Miles
La correspondance de McKay ..... 1999/2000, n° 867, 20 p.

RIEDTMANN, Christine
Algèbres de type de représentation fini (d'après Bongartz, Gabriel, Roiter et d'autres) ..... 1984/85, n° 650, 16 p.

RIGUET, Jacques
Calcul différentiel libre (d'après Fox) ..... 1954/55, n° 105, 7 p.

RISLER, Jean–Jacques
Complexité et géométrie réelle (d'après A. Khovansky) ..... 1984/85, n° 637, 12 p.
Construction d'hypersurfaces réelles (d'après Viro) ..... 1992/93, n° 763, 18 p.

RIVIÈRE, Tristan
Ginzburg-Landau vortices : the static model ..... 1999/2000, n° 868, 31 p.

ROBERT, Alain
Formes automorphes sur GL_2 (travaux de H. Jacquet et R.P. Langlands) ..... 1971/72, n° 415, 24 p.

ROBERT, Didier
Analyse semi–classique de l'effet tunnel (d'après B. Helffer et J. Sjöstrand) ..... 1985/86, n° 665, 25 p.

RODIER, François
Représentations de $GL(n, k)$ où k est un corps p–adique ..... 1981/82, n° 587, 18 p.

ROSENBERG, Harold
Feuilletages sur des sphères (d'après H.B. Lawson) ..... 1970/71, n° 393, 12 p.
Un contre–exemple à la conjecture de Seifert (d'après P. Schweitzer) ..... 1972/73, n° 434, 13 p.
Les difféomorphismes du cercle (d'après M.R. Herman) ..... 1975/76, n° 476, 18 p.
Some recent developments in the theory of properly embedded minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ ..... 1991/92, n° 759, 73 p.

ROSSO, Marc
Représentations des groupes quantiques ..... 1990/91, n° 744, 41 p.

ROUSSARIE, Robert
Constructions de feuilletages (d'après W. Thurston) ..... 1976/77, n° 499, 17 p.

RUELLE, David
Formalisme thermodynamique ..... 1975/76, n° 480, 13 p.

RUYER, Dominique
Extensions résolubles des corps de nombres algébriques (d'après Iwasawa) ..... 1955/56, n° 128, 10 p.

SABBAGH, Gabriel
Caractérisation algébrique des groupes de type fini ayant un problème de mots résoluble (Théorème de Boone-Higman, travaux de B.H. Neumann et Macintyre) ..... 1974/75, n° 457, 20 p.

SABBAH, Claude
Classes caractéristiques et théorèmes d'indice : point de vue microlocal ..... 1995/96, n° 818, 29 p.

SADOURNY, Robert
Quelques problèmes de dynamique des fluides géophysiques ..... 1982/83, n° 614, 13 p.

SAMUEL, Pierre
La théorie des correspondances birationnelles selon Zariski ..... 1948/49, n° 6, 5 p.
Anneaux locaux ; introduction à la géométrie algébrique ..... 1949/50, n° 22, 5 p.
Théorie du corps de classes local selon G.P. Hoschschild ..... 1950/51, n° 42, 5 p.
Sections hyperplanes des variétés normales (d'après A. Seidenberg) 1950/51, n° 49, 4 p.
Variété de Picard et groupe de Severi (d'après A. Néron) ..... 1951/52, n° 53, 5 p.
Les fonctions holomorphes abstraites de Zariski ..... 1953/54, n° 86, 9 p.
Travaux de Zariski sur le 14^e *problème de Hilbert* ..... 1953/54, n° 99, 6 p.
La jacobienne d'une courbe algébrique (d'après W.L. Chow) ..... 1954/55, n° 106, 9 p.
Travaux de Shimura et Taniyama sur la multiplication complexe ... 1955/56, n° 129, 8 p.
Travaux de Rosenlicht sur les groupes algébriques ..... 1956/57, n° 145, 13 p.
Invariants arithmétiques des courbes de genre 2 *(d'après Igusa)* .... 1961/62, n° 228, 13 p.
Travaux d'Igusa sur les formes modulaires de genre 2 ..... 1963/64, n° 267, 8 p.
La conjecture de Mordell pour les corps de fonctions (d'après Manin et Grauert) ..... 1964/65, n° 287, 19 p.
Modèles Booléiens et hypothèse du continu (Résultats de Paul Cohen par la méthode de D. Scott et R. Solovay) ..... 1966/67, n° 317, 12 p.

SCHIFFMANN, Gérard
Frontières de Furstenberg et formules de Poisson sur un groupe de Lie semi–simple ..... 1963/64, n° 268, 11 p.
Introduction aux travaux d'Harish–Chandra ..... 1966/67, n° 323, 25 p.
Un analogue du théorème de Borel–Weil–Bott dans le cas non compact ..... 1970/71, n° 398, 14 p.

SCHNEIDER, Michael
Holomorphic vector bundles on $\mathbb{P}^n$ ..... 1978/79, n° 530, 23 p.

SCHREIBER, Jean–Pierre
Nombres de Pisot et travaux d'Yves Meyer ..... 1969/70, n° 379, 11 p.

SCHWARTZ, Laurent
Sur un mémoire de Petrowsky : « Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete nichtanalytischen Funktionen » ..... 1948/49, n° 11, 5 p.
Sur un deuxième mémoire de Petrowsky : « Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen » ..... 1948/499, n° 15, 1 p.
Sur un mémoire de K. Kodaira : « Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory) », I ..... 1949/50, n° 26, 19 p.
Sur un mémoire de K. Kodaira : « Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory) », II ..... 1949/50, n° 32, 12 p.
Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables ..... 1950/51, n° 43, 9 p.
Les travaux de L. Gårding sur les équations aux dérivées partielles elliptiques ..... 1951/52, n° 67, 8 p.
Solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants (d'après B. Malgrange) ..... 1953/54, n° 87, 6 p.
La fonction aléatoire du mouvement brownien ..... 1957/58, n° 161, 23 p.
Sous–espaces hilbertiens et antinoyaux associés ..... 1961/62, n° 238, 18 p.
Les travaux de Seeley sur les opérateurs intégraux singuliers sur une variété ..... 1963/64, n° 269, 15 p.
Produits tensoriels g_p et d_p, applications p–sommantes, applications p–radonifiantes ..... 1970/71, n° 386, 26 p.

SCHWARTZ, Lionel
La conjecture de Sullivan (d'après H. Miller) ..... 1984/85, n° 638, 12 p.

SCHWARTZ, Marie–Hélène
Compte rendu de travaux de M. Heins sur diverses majorations de la croissance des fonctions analytiques ou sous–harmoniques ..... 1949/50, n° 23, 5 p.

SEGAL, Graeme
Elliptic cohomology (after Landweber–Stong, Ochanine, Witten and others) ..... 1987/88, n° 695, 15 p.

SEMENOV–TIAN–SHANSKY, Michael
Quantum integrable systems ..... 1993/94, n° 788, 23 p.

SERGERAERT, Francis
$B\Gamma$ (d'après Mather et Thurston) ..... 1977/78, n° 524, 16 p.

SERRE, Jean–Pierre
Extensions de groupes localement compacts (d'après Iwasawa et Gleason) ..... 1949/50, n° 27, 6 p.
Groupes d'homotopie ..... 1950/51, n° 44, 6 p.
Utilisation des nouvelles opérations de Steenrod dans la théorie des espaces fibrés (d'après Borel et Serre) ..... 1951/52, n° 54, 10 p.
Cohomologie et fonctions de variables complexes ..... 1952/53, n° 71, 6 p.
Cohomologie et arithmétique ..... 1952/53, n° 77, 7 p.
Espaces fibrés algébriques (d'après A. Weil) ..... 1952/53, n° 82, 7 p.
Travaux d'Hirzebruch sur la topologie des variétés ..... 1953/54, n° 88, 6 p.
Faisceaux analytiques ..... 1953/54, n° 95, 6 p.

SERRE, Jean–Pierre (suite)
Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts (d'après Borel et Weil) ..... 1953/54, n° 100, 8 p.
Le théorème de Brauer sur les caractères (d'après Brauer, Roquette et Tate) ..... 1954/55, n° 111, 7 p.
Théorie du corps de classes pour les revêtements non ramifiés de variétés algébriques (d'après S. Lang) ..... 1955/56, n° 133, 9 p.
Critère de rationalité pour les surfaces algébriques (d'après K. Kodaira) ..... 1956/57, n° 146, 14 p.
Classes des corps cyclotomiques (d'après K. Iwasawa) ..... 1958/59, n° 174, 11 p.
Corps locaux et isogénies ..... 1958/59, n° 185, 9 p.
Rationalité des fonctions zêta des variétés algébriques (d'après Dwork) ..... 1959/60, n° 198, 11 p.
Revêtements ramifiés du plan projectif (d'après Abhyankar) ..... 1959/60, n° 204, 7 p.
Groupes finis à cohomologie périodique (d'après R. Swan) ..... 1960/61, n° 209, 12 p.
Structure de certains pro–p–groupes (d'après Demuškin) ..... 1962/63, n° 252, 11 p.
Groupes analytiques p–adiques (d'après M. Lazard) ..... 1963/64, n° 270, 10 p.
Groupes p–divisibles (d'après J. Tate) ..... 1966/67, n° 318, 14 p.
Groupes de congruence (d'après H. Bass, H. Matsumoto, J. Mennicke, J. Milnor, C. Moore) ..... 1966/67, n° 330, 17 p.
Travaux de Baker ..... 1969/70, n° 368, 14 p.
p–torsion des courbes elliptiques (d'après Y. Manin) ..... 1969/70, n° 380, 14 p.
Cohomologie des groupes discrets ..... 1970/71, n° 399, 14 p.
Congruences et formes modulaires (d'après H.P.F. Swinnerton–Dyer) ..... 1971/72, n° 416, 20 p.
Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d'après P. Deligne) ..... 1973/74, n° 446, 15 p.
Représentations linéaires des groupes finis « algébriques » (d'après Deligne–Lusztig) ..... 1975/76, n° 487, 18 p.
Points rationnels des courbes modulaires $X_0(N)$ (d'après Barry Mazur (3), (4), (5)*)* ..... 1977/78, n° 511, 12 p.
Groupes de Galois sur Q ..... 1987/88, n° 689, 13 p.
Revêtements de courbes algébriques ..... 1991/92, n° 749, 16 p.
Cohomologie galoisienne : progrès et problèmes ..... 1993/94, n° 783, 29 p.
Travaux de Wiles (et Taylor,...), partie I ..... 1994/95, n° 803, 14 p.
Sous-groupes finis des groupes de Lie ..... 1998/99, n° 864, 16 p.

SERRE, Jean–Pierre et MAZUR, Barry
Points rationnels des courbes modulaires $X_0(N)$ (d'après (7) *et* (9)*)* 1974/75, n° 469, 18 p.

SHAPIRO, Arnold
Algèbres de Clifford et périodicité des groupes $\pi_k(BO)$ (d'après R. Bott et A. Shapiro) ..... 1960/61, n° 215, 8 p.

SHIMURA, Goro
Fonctions automorphes et variétés abéliennes ..... 1957/58, n° 167, 9 p.

SIBONY, Nessim
Noyau de Bergman et applications biholomorphes dans des domaines strictement pseudo–convexes (d'après C. Fefferman) ..... 1974/75, n° 463, 14 p.

SIEBENMANN, Laurent
L'invariance topologique du type simples d'homotopie (d'après T. Chapman et R.D. Edwards) ..... 1972/73, n° 428, 24 p.
Amorces de la chirurgie en dimension quatre : un $S^3 \times R$ exotique (d'après Andrew H. Casson et Michael H. Freedman) ..... 1978/79, n° 536, 25 p.

SIEBENMANN, Laurent (suite)
La conjecture de Poincaré topologique en dimension 4 (d'après M.H. Freedman) ..... 1981/82, n° 588, 30 p.

SIKORAV, Jean–Claude
Homologie associée à une fonctionnelle (d'après A. Floer) ..... 1990/91, n° 733, 27 p.
Construction de sous-variétés symplectiques (d'après S.K. Donaldson et D. Auroux) ..... 1997/98, n° 844, 23 p.

SIU, Yum–Tong
Asymptotic Morse inequalities for analytic sheaf cohomology (according to J.–P. Demailly) ..... 1985/86, n° 666, 15 p.

SJÖSTRAND, Johannes
Asymptotique des résonances pour des obstacles ..... 1989/90, n° 724, 25 p.

SKANDALIS, Georges
Approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique (d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici) ..... 1990/91, n° 739, 22 p.
Algèbres de von Neumann de groupes libres et probabilités non commutatives (d'après Voiculescu etc.) ..... 1992/93, n° 764, 16 p.
Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes. Contribution de Vincent Lafforgue ..... 1999/2000, n° 869, 31 p.
Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse et algèbres de Hopf (d'après A. Connes et H. Moscovici) ..... 2000/01, n° 892, 20 p.

SMALE, Stephen
Stability and generecity in dynamical systems ..... 1969/70, n° 374, 11 p.

SOERGEL, Wolfgang
Conjectures de Lusztig ..... 1994/95, n° 793, 11 p.

SORGER, Christoph
La formule de Verlinde ..... 1994/95, n° 794, 28 p.

SOULÉ, Christophe
K_2 et le groupe de Brauer (d'après A.S. Merkurjev et A.A. Suslin) 1982/83, n° 601, 15 p.
Régulateurs ..... 1984/85, n° 644, 17 p.
Géométrie d'Arakelov des surfaces arithmétiques ..... 1988/89, n° 713, 17 p.
Classes caractéristiques secondaires des fibrés plats ..... 1995/96, n° 819, 14 p.

SPENCER, Thomas and FRÖHLICH, Jürg
Some recent rigorous results in the theory of phase transitions and critical phenomena ..... 1981/82, n° 586, 42 p.

SPRINGER, Tonny A.
Caractères des groupes de Chevalley finis ..... 1972/73, n° 429, 24 p.
Relèvements de Brauer et représentations paraboliques de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ (d'après G. Lusztig) ..... 1973/74, n° 441, 25 p.
Quelques applications de la cohomologie d'intersection ..... 1981/82, n° 589, 25 p.

STALLINGS, John
Coherence of 3–manifold fundamental groups ..... 1975/76, n° 481, 7 p.

STEINBERG, Robert
Abstract homomorphisms of simple algebraic groups (after A. Borel and J. Tits) ..... 1972/73, n° 435, 20 p.

STERN, Jacques
Le problème des cardinaux singuliers (d'après (R. B. Jensen et T. Silver) ..... 1976/77, n° 494, 14 p.
Le problème de la mesure ..... 1983/84, n° 632, 22 p.

SULLIVAN, Dennis
Travaux de Thurston sur les groupes quasi–fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur S^1 ..... 1979/80, n° 554, 19 p.

SZNITMAN, Alain–Sol
Grandes déviations ..... 1986/87, n° 680, 21 p.

SZPIRO, Lucien
Travaux de Kempf, Kleiman, Laksov, sur les diviseurs exceptionnels 1971/72, n° 417, 15 p.
Cohomologie des ouverts de l'espace projectif sur un corps de caractéristique zéro (d'après A. Ogus) ..... 1974/75, n° 458, 16 p.
La conjecture de Mordell (d'après G. Faltings) ..... 1983/84, n° 619, 21 p.
Sur les solutions d'un système d'équations polynomiales sur une variété abélienne (d'après G. Faltings et P. Vojta) ..... 1989/90, n° 729, 18 p.

TALAGRAND, Michel
Verres de spin et optimisation combinatoire ..... 1998/99, n° 859, 31 p.

TAMARI, Dov
Machines logiques et problèmes de mots. I : Les machines de Turing 1951/52, n° 55, 12 p.
Machines logiques et problèmes de mots. II : Problèmes de mots indécidables ..... 1951/52, n° 61, 11 p.

TATE, John
WC–groups over $\mathfrak{p}$–adic fields ..... 1957/58, n° 156, 13 p.
On the conjectures of Birch and Swinnerton–Dyer and a geometric analog ..... 1965/66, n° 306, 26 p.
Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda) ..... 1968/69, n° 352, 16 p.

TEISSIER, Bernard
Théorèmes de finitude en géométrie analytique (d'après Heisuke Hironaka) ..... 1973/74, n° 451, 23 p.
Variétés toriques et polytopes ..... 1980/81, n° 565, 14 p.
Résultats récents d'algèbre commutative effective ..... 1989/90, n° 718, 25 p.
Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative (d'après André, Artin, Popescu et Spivakovsky) ..... 1993/94, n° 784, 24 p.

TEMAM, Roger
Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition ..... 1969/70, n° 381, 9 p.

TERJANIAN, Guy
Équations diophantiennes p–adiques (d'après J. Ax et S. Kochen) .. 1965/66, n° 299, 13 p.

THOM, René
Les géodésiques dans les variétés à courbure négative (d'après Hopf) ..... 1949/50, n° 28, 11 p.
Sous–variétés et classes d'homologie des variétés différentiables .... 1952/53, n° 78, 7 p.
Sur les variétés–bords ..... 1953/54, n° 89, 8 p.
Les singularités des applications différentiables ..... 1955/56, n° 134, 13 p.
La classification des immersions (d'après Smale) ..... 1957/58, n° 157, 11 p.
Travaux de Milnor sur le cobordisme ..... 1958/59, n° 180, 9 p.

THOM, René (suite)
Travaux de Moser sur la stabilité des mouvements périodiques ..... 1963/64, n° 264, 13 p.
Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques (d'après H. Whitney) ..... 1964/65, n° 281, 12 p.

THOMPSON, John G.
Sylow 2–subgroups of simple groups ..... 1967/68, n° 345, 3 p.

THOUVENOT, Jean–Paul
La démonstration de Furstenberg du Théorème de Szemerédi sur les progressions arithmétiques ..... 1977/78, n° 518, 12 p.
La convergence presque sûre des moyennes ergodiques suivant certaines sous–suites d'entiers (d'après Jean Bourgain) ..... 1989/90, n° 719, 21 p.

TITS, Jacques
Groupes semi–simples complexes et géométrie projective ..... 1954/55, n° 112, 11 p.
Sous–algèbres des algèbres de Lie semi–simples (d'après V. Morozov, A. Malčev, E. Dynkin et F. Karpelevitch) ..... 1954/55, n° 119, 18 p.
Les « formes réelles » des groupes de type E_6 ..... 1957/58, n° 162, 15 p.
Les groupes simples de Suzuki et de Ree ..... 1960/61, n° 210, 18 p.
Structures et groupes de Weyl ..... 1964/65, n° 288, 15 p.
Groupes finis simples sporadiques ..... 1969/70, n° 375, 25 p.
Travaux de Margulis sur les sous–groupes discrets de groupes de Lie 1975/76, n° 482, 17 p.
Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps (d'après V.P. Platonov et al.) ..... 1976/77, n° 505, 19 p.
Groupes à croissance polynomiale (d'après M. Gromov et al.) ..... 1980/81, n° 572, 13 p.
Le monstre (d'après R. Griess, R. Fischer et al.) ..... 1983/84, n° 620, 18 p.
Le module du « moonshine » (d'après I. Frenkel, J. Lepowsky et A. Meurman) ..... 1986/87, n° 684, 19 p.
Groupes associés aux algèbres de Kač–Moody ..... 1988/89, n° 700, 25 p.

TOGNOLI, Alberto
Algebraic approximation of manifolds and spaces ..... 1979/80, n° 548, 22 p.

TOUGERON, Jean–Claude
Stabilité des applications différentiables (d'après J. Mather) ..... 1967/68, n° 336, 16 p.

TRÉPREAU, Jean–Marie
Systèmes différentiels à caractéristiques simples et structures réelles–complexes (d'après M.S. Baouendi et F. Trèves ; M. Sato, T. Kawaï et M. Kashiwara) ..... 1981/82, n° 595, 18 p.

TRÈVES, François
Thèse d'Hörmander, I ..... 1955/56, n° 130, 10 p.
Thèse d'Hörmander, II ..... 1955/56, n° 135, 9 p.

TURAEV, Vladimir G.
Faithful linear representations of the braid groups ..... 1999/2000, n° 878, 21 p.

VALETTE, Alain
Graphes de Ramanujan et applications ..... 1996/97, n° 829, 30 p.

VAN DER PUT, Marius
Recent work on differential Galois theory ..... 1997/98, n° 849, 27 p.

VAN DE VEN, A.
Some recent results on surfaces of general type ..... 1976/77, n° 500, 12 p.
On the Enriques classification of algebraic surfaces ..... 1976/77, n° 506, 15 p.
On the differentiable structure of certain algebraic surfaces ..... 1985/86, n° 667, 14 p.

VAN DIJK, Gerrit
Harmonic analysis on reductive p–adic groups (after Harish–Chandra) ..... 1970/71, n° 387, 18 p.

VAN MOERBEKE, Pierre
Algèbres $\mathcal{W}$ et équations non–linéaires ..... 1997/98, n° 839, 25 p.
Random matrices and permutations, matrix integrals and integrable systems ..... 1999/2000, n° 879, 23 p.

VAN MOERBEKE, Pierre et McKEAN, Henry P.
Sur le spectre de quelques opérateurs et les variétés de Jacobi ..... 1975/76, n° 474, 15 p.

VAROPOULOS, Nicholas T.
Measure algebras of a locally compact abelian group ..... 1964/65, n° 282, 10 p.

VERDIER, Jean–Louis
Sur les intégrales attachées aux formes automorphes (d'après Shimura) ..... 1960/61, n° 216, 27 p.
Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts ..... 1965/66, n° 300, 13 p.
Indépendance par rapport à ℓ des polynômes caractéristiques des endomorphismes de Frobenius de la cohomologie ℓ–adique (d'après P. Deligne) ..... 1972/73, n° 423, 18 p.
Le théorème de Riemann–Roch pour les variétés algébriques éventuellement singulières (d'après P. Baum, W. Fulton et R. Macpherson) ..... 1974/75, n° 464, 17 p.
Équations différentielles algébriques ..... 1977/78, n° 512, 22 p.
Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques (d'après M. Adler et P. van Moerbeke) ..... 1980/81, n° 566, 10 p.
Les représentations des algèbres de Lie affines : applications à quelques problèmes de physique (d'après E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa) ..... 1981/82, n° 596, 13 p.
Groupes quantiques (d'après V.G. Drinfel'd) ..... 1986/87, n° 685, 15 p.

VERGNE, Michèle
Sur les intégrales d'entrelacement de R.A. Kunze et E.M. Stein (d'après G. Schiffmann) ..... 1969/70, n° 369, 20 p.
Quantification géométrique et réduction symplectique ..... 2000/01, n° 888, 30 p.

VIENNOT, Gérard
Problèmes combinatoires posés par la physique statistique ..... 1983/84, n° 626, 22 p.

VILLANI, Cédric
Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann (d'après C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond) ..... 2000/01, n° 893, 41 p.

VITERBO, Claude
Capacités symplectiques et applications (d'après Ekeland–Hofer, Gromov) ..... 1988/89, n° 714, 18 p.
Orbites périodiques dans le problème des trois corps ..... 1992/93, n° 774, 17 p.

VOGEL, Pierre
Invariants de Vassiliev des nœuds (d'après D. Bar-Natan, M. Kontsevich et V.A. Vassiliev) ..... 1992/93, n° 769, 20 p.
Les invariants récents des variétés de dimension 3 ..... 1994/95, n° 799, 26 p.

VOROS, André
Problème spectral de Sturm–Liouville : le cas de l'oscillateur quartique ..... 1982/83, n° 602, 10 p.

WALDSCHMIDT, Michel
Les travaux de G.V. Cudnovskii sur les nombres transcendants ..... 1975/76, n° 488, 19 p.
Sur la nature arithmétique des valeurs de fonctions modulaires ..... 1996/97, n° 824, 36 p.

WALDSPURGER, Jean–Loup
Représentation métaplectique et conjectures de Howe ..... 1986/87, n° 674, 15 p.
Cohomologie des espaces de formes automorphes (d'après J. Franke) ..... 1995/96, n° 809, 18 p.

WEIL, André
Théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions thêta (d'après des mémoires de Poincaré et Frobenius) ..... 1948/49, n° 16, 10 p.
Variété de Picard et variétés jacobiennes ..... 1952/53, n° 72, 8 p.
Sur la théorie du corps de classes ..... 1952/53, n° 83, 3 p.
Multiplication complexe des fonctions abéliennes ..... 1955/56, n° 136, 7 p.
Sur le théorème de Torelli ..... 1956/57, n° 151, 5 p.
Modules des surfaces de Riemann ..... 1957/58, n° 168, 7 p.
Adèles et groupes algébriques ..... 1958/59, n° 186, 9 p.
Un théorème fondamental de Chern en géométrie riemannienne ... 1961/62, n° 239, 13 p.
Fonction zêta et distributions ..... 1965/66, n° 312, 9 p.
Séries de Dirichlet et fonctions automorphes ..... 1967/68, n° 346, 6 p.
La cyclotomie jadis et naguère ..... 1973/74, n° 452, 21 p.

WEINSTEIN, Alan
Deformation quantization ..... 1993/94, n° 789, 21 p.

YOCCOZ, Jean–Christophe
Bifurcations de points fixes elliptiques (d'après A. Chenciner) ..... 1985/86, n° 668, 22 p.
Non–accumulation de cycles limites ..... 1987/88, n° 690, 17 p.
Polynômes quadratiques et attracteur de Hénon ..... 1990/91, n° 734, 23 p.
Travaux de Herman sur les tores invariants ..... 1991/92, n° 754, 34 p.

YOR, Marc
Introduction au calcul stochastique ..... 1981/82, n° 590, 18 p.

ZELLER–MEIER, Georges
Dérivations et automorphismes des algèbres d'opérateurs (d'après R.V. Kadison et J.R. Ringrose) ..... 1966/67, n° 324, 10 p.

ZISMAN, Michel
Travaux de Borel–Haefliger–Moore ..... 1961/62, n° 240, 9 p.

ZUILY, Claude
Solutions en grand temps d'équations d'ondes non linéaires ..... 1993/94, n° 779, 38 p.

ASTÉRISQUE

2003

284. Autour de l'analyse microlocale, actes du colloque en l'honneur de Jean-Michel Bony, G. LEBEAU, éditeur

2002

283. L. ROBBIANO, C. ZUILY – *Analytic theory for the quadratic scattering wave front set and application to the Schrödinger equation*
282. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 2000/2001, exposés 880-893
281. T. DUQUESNE, J.-F. LE GALL – *Random Trees, Lévy Processes and Spatial Branching Processes*
280. A. MOKRANE, P. POLO, J. TILOUINE – *Cohomology of Siegel varieties*
279. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (II), P. BERTHELOT, J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE, K. KATO, M. RAPOPORT, éditeurs
278. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (I), P. BERTHELOT, J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE, K. KATO, M. RAPOPORT, éditeurs
277. B. RÉMY – *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*
276. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1999/2000, exposés 865-879

2001

275. J.-M. BISMUT, S. GOETTE – *Families torsion and Morse functions*
274. A. BONNET, G. DAVID – *Cracktip is a global Mumford-Shah minimizer*
273. K. NISHIYAMA, H. OCHIAI, K. TANIGUCHI, H. YAMASHITA, S. KATO – *Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations*
272. M. BOILEAU, J. PORTI – *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type (avec la collaboration de M. HEUSENER)*
271. M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA – *Ind-Sheaves*
270. M. BONK, J. HEINONEN, P. KOSKELA – *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*
269. J.-L. WALDSPURGER – *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*

2000

268. J. FRANCHETEAU, G. MÉTIVIER – *Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels*
267. R. CERF – *Large Deviations for three Dimensional Supercritical Percolation*
266. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1998/1999, exposés 850-864
265. O. BIQUARD – *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*
264. L. LIPSHITZ, Z. ROBINSON – *Rings of Separated Power Series and Quasi-Affinoid Geometry*
263. C. SABBAH – *Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*
262. A. VASY – *Propagation of singularities in three-body scattering*
261. Géométrie complexe et systèmes dynamiques, colloque en l'honneur d'Adrien Douady, Orsay 1995, M. FLEXOR, P. SENTENAC et J.-C. YOCCOZ, éditeurs

1999

260. S. D. CUTKOSKY – *Local monomialization and factorization of morphisms*
259. R. KRIKORIAN – *Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts*
258. Structure Theory of Set Addition, J.-M. DESHOUILLERS, B. LANDREAU and A.A. YUDIN, editors
257. J.-P. LABESSE – *Cohomologie, stabilisation et changement de base (avec la collaboration de L. BREEN et L. CLOZEL)*
256. F. MOREL – *Théorie homotopique des schémas*
255. R.E. KOTTWITZ, D. SHELSTAD – *Foundations of twisted endoscopy*
254. C.J. BUSHNELL, G. HENNIART – *Local tame lifting for* $\mathrm{GL}(n)$ *II : wildly ramified supercuspidals*
253. B. MAGNERON – *Involutions complexes et vecteurs sphériques associés pour les groupes de Lie nilpotents réels*

1998

252. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1997/1998, exposés 835-849
251. Nombre et répartition de points de hauteur bornée, E. PEYRE, éditeur
250. C. BONATTI, R. LANGEVIN – *Difféomorphismes de Smale des surfaces (avec la collaboration de E. JEANDENANS)*
249. P. AUSCHER, P. TCHAMITCHIAN – *Square root problem for divergence operators and related topics*
248. P. COLMEZ – *Intégration sur les variétés* p*-adiques*
247. G. PISIER – *Non-commutative vector valued* L_p*-spaces and completely* p*-summing maps*

1997

246. V. TARASOV, A. VARCHENKO – *Geometry of* q*-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups*
245. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1996/1997, exposés 820-834
244. J.-M. BISMUT – *Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms*
243. L. LAFFORGUE – *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*
242. N. BURQ – *Pôles de diffusion engendrés par un coin*
241. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1995/1996, exposés 805-819

1996

240. A. SÀ BARETTO, R. B. MELROSE, M. ZWORSKI – *Semilinear diffraction of conormal waves*
239. J.-L. VERDIER – *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*
238. A. BROISE, F. DAL'BO, M. PEIGNÉ – *Méthodes des opérateurs de transfert : transformations dilatantes de l'intervalle et dénombrement de géodésiques fermées*
237. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1994/1995, exposés 790-804
236. Hommage à P. A. MEYER et J. NEVEU
235. J.-P. OTAL – *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*
234. A. GENESTIER – *Espaces symétriques de Drinfeld*

1995

233. I. KRIZ, J.P. MAY – *Operads, algebras modules and motives*
232. Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992)
231. J.-C. YOCCOZ – *Petits diviseurs en dimension 1*
230. J.-Y. CHEMIN – *Fluides parfaits incompressibles*
229. B. PERRIN-RIOU – *Fonctions* L p*-adiques des représentations* p*-adiques*
228. Columbia University number theory seminar (New-York, 1992)
227. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1993/1994, exposés 775-789