LAURENT FARGUES
ELENA MANTOVAN

Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales

Astérisque, tome 291 (2004)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__291__R1_0>

ASTÉRISQUE 291

VARIÉTÉS DE SHIMURA, ESPACES DE RAPOPORT-ZINK ET CORRESPONDANCES DE LANGLANDS LOCALES

Laurent Fargues
Elena Mantovan

Société Mathématique de France 2004
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

L. Fargues
UMR C.N.R.S. 8628, Université Paris Sud/CNRS, Bâtiment 425, 91405 Orsay.
E-mail : `laurent.fargues@math.u-psud.fr`

E. Mantovan
Department of Mathematics, 970 Evans Hall 3840, University of California,
Berkeley, CA 94720-3840, U.S.A.
E-mail : `mantovan@math.berkeley.edu`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11G18, 11Fxx, 14G35, 14L05, 14G22.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, groupes p-divisibles, espaces de Rapoport-Zink, correspondances de Langlands, cohomologie étale des espaces rigides.

VARIÉTÉS DE SHIMURA, ESPACES DE RAPOPORT-ZINK ET CORRESPONDANCES DE LANGLANDS LOCALES

Laurent Fargues, Elena Mantovan

Résumé. — Ce volume contient deux articles. Tous deux traitent de généralisations des résultats de Michael Harris et Richard Taylor sur la cohomologie des variétés de Shimura de type P.E.L. de signature $(1, n-1)$ ainsi que celle des espaces de Lubin-Tate. Ils reposent sur les travaux de Robert Kottwitz concernant ces mêmes variétés en signature quelconque, ainsi que ceux de Michael Rapoport et Thomas Zink sur les espaces de modules de groupes p-divisibles associés, espaces qui généralisent les espaces de Lubin-Tate ainsi que ceux de Drinfeld.

Dans le premier article il est démontré que la cohomologie étale ℓ-adique de certains de ces espaces de modules de groupes p-divisibles « supersinguliers » réalise des correspondances de Langlands locales. Pour cela l'auteur y établit une formule reliant la cohomologie de ces espaces à celle de la partie « supersingulière » d'une variété de Shimura. Il démontre ensuite que la partie supercuspidale de la cohomologie de ces variétés est entièrement contenue dans celle de la partie « supersingulière ».

Le second article relie la cohomologie d'une strate de Newton de la variété de Shimura, par exemple la strate « supersingulière », à la cohomologie des espaces de modules locaux de groupes p-divisibles associés et à la cohomologie de variétés globales en caractéristique positive appelées variétés d'Igusa qui généralisent les courbes d'Igusa associées aux courbes modulaires.

Abstract **(Shimura varieties, Rapoport-Zink spaces and local Langlands correspondences)**

This volume contains two articles. Both deal with generalizations of Michael Harris' and Richard Taylor's work on the cohomology of P.E.L. type Shimura varieties of signature $(1, n-1)$ and on the cohomology of Lubin-Tate spaces. They are based on the work of Robert Kottwitz on those varieties in the general signature case, and on the work of Michael Rapoport and Thomas Zink on moduli spaces of p-divisible groups generalizing the one of Lubin-Tate and Drinfeld.

In the first article it is proved that the ℓ-adique étale cohomology of some of those "supersingular" moduli spaces of p-divisible groups realizes some cases of local Langlands correspondences. For this the author establishes a formula linking the cohomology of those spaces to the one of the "supersingular" locus of a Shimura variety. Then he proves that the supercuspidal part of the cohomology of those varieties is completely contained in the one of the "supersingular" locus.

The second article links the cohomology of a Newton stratum of the Shimura variety, for example the "supersingular" stratum, to the cohomology of the attached local moduli space of p-divisible groups and to the cohomology of some global varieties in positive characteristic named Igusa varieties that generalize the classical Igusa curves attached to modular curves.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les deux articles de ce volume trouvent leurs origines les plus récentes dans les travaux de Kottwitz ([**2**]), Rapoport-Zink ([**3**]) et Harris-Taylor ([**1**]).

L'idée est la suivante pour le groupe $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$. Soit

$$f = \sum_{n \geqslant 1} a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N))$$

une forme modulaire holomorphe cuspidale de poids $k \geqslant 2$, propre pour les opérateurs de Hecke hors N et primitive. La forme $f(z)dz^{k/2}$ définit une classe dans la cohomologie de de Rham à coefficients de la courbe modulaire $X_0(N)$ (isomorphisme d'Eichler-Shimura). Appliquant les théorèmes de comparaison entre théories cohomologiques on en déduit une classe de cohomologie dans la cohomologie étale ℓ-adique à coefficients de $X_0(N)$. Celle-ci est propre pour les opérateurs de Hecke hors N et définit une représentation galoisienne

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

telle que $\forall\, p \nmid Nl$ ρ_f soit non-ramifiée en p et

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p; \rho_f) = a_p$$

où Frob_p désigne une substitution de Frobenius en p. Une démonstration de cette égalité consiste à appliquer une formule des traces de Lefschetz à la réduction modulo p de modèles entiers lisses de $X_0(N)$ sur $\mathbb{Z}_p$ puis à la comparer à la formule des traces de Selberg.

A f est associée une forme automorphe $\phi \in \mathrm{L}^2_{cusp}\left(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A}_\mathbb{Q})/K_0(N)\right)$ dont les itérés par les opérateurs de Hecke en toutes les places engendrent une représentation automorphe

$$\Pi = \Pi_\infty \otimes \bigotimes\nolimits_p \Pi_p$$

où l'égalité de traces ci-dessus signifie que $\forall\, p \nmid Nl$, la représentation Π_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est associée à $\rho_{f|D_p}$ via la correspondance de Langlands non-ramifiée (les valeurs propres de Hecke correspondent à celle de Frobenius) où $D_p \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ désigne un groupe de décomposition en p. En fait, $\forall p \nmid \ell$, $(\rho_{f|D_p})^{\mathrm{Frob}_p\text{-ss}}$ et Π_p se correspondent via la correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

La question que l'on se pose est alors de comprendre géométriquement pourquoi $\rho_{f|D_p}$ ne dépend que de Π_p. On aimerait trouver une réalisation géométrique de la correspondance $\Pi_p \mapsto \rho_{f|D_p}$ dans des espaces de cohomologie « locaux », analogues en p des $X_0(N)$, qui soit compatible à la correspondance globale $\Pi \mapsto \rho$.

C'est le cas lorsque par exemple Π_p est supercuspidale (*i.e.* $(\rho_{f|D_p})^{\mathrm{ss}}$ est irréductible) puisqu'alors $\Pi_p \otimes (\rho_{f|D_p})$ est réalisé dans la cohomologie étale de la tour rigide analytique p-adique obtenue en considérant les points se spécialisant en un point supersingulier (la tour de Lubin-Tate pour GL_2). En effet, sur le complété formel le long du lieu ordinaire des modèles entiers réguliers sur $\mathbb{Z}_p$ des courbes $X(N)$ définis par des structures de niveau de Drinfeld, il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E[p^\infty]^0 \longrightarrow E[p^\infty] \longrightarrow E[p^\infty]^{\text{ét}} \longrightarrow 0$$

où E désigne la courbe elliptique ordinaire universelle et $E[p^\infty]^0$ ainsi que $E[p^\infty]^{\text{ét}}$ sont de hauteur 1. Lorsque $p^n|N$ la structure de niveau de Drinfeld

$$\eta : \left(p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2 \longrightarrow E[p^n]$$

définit alors un scindage de ce complété formel indexé par des sous-groupes $M = \eta^{-1}\left(E[p^n]^0\right) \subset \left(p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2$ facteur direct de rang 1. Cela démontre, modulo les problèmes liés aux pointes, que la différence entre la cohomologie de $X(N)$ et celle de sa partie supersingulière est induite en p à partir du sous-groupe de Borel $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ (le stabilisateur de la composante indexée par $M = (p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (0)$) et ne contribue donc pas à la partie supercuspidale.

D'après un théorème de Serre-Tate la tour de Lubin-Tate ne dépend pas des objets globaux $X_0(N)$ puisqu'elle ne dépend que de la loi de groupe formel associée à une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

C'est cette approche généralisée à des espaces de modules en dimension supérieure qui est utilisée dans [**1**] pour démontrer la correspondance de Langlands locale pour les groupes linéaires sur un corps p-adique.

Pour cela Harris et Taylor utilisent des cas particuliers des variétés de Shimura définies par Kottwitz ([**2**]), celles associées à des groupes unitaires donnés par des algèbres à division sur un corps C.M. de signature $(1, n-1) \times (n, 0) \times \cdots \times (n, 0)$ à l'infini. Dans les deux articles de ce volume des cas de signature quelconque sont étudiés. Les variétés de Shimura étudiées sont alors des espaces de modules de variétés abéliennes munies d'une polarisation, d'une action d'une algèbre à division sur un corps C.M. F, et de structures de niveau, le tout assujetti à des conditions de compatibilité et une condition liée à la signature du groupe unitaire à l'infini. Cette dernière spécifie que la structure de Hodge polarisée munie d'une action de F associée est dans une composante connexe fixée de l'espace de modules des variations de structures de Hodge associé. En effet, si Φ désigne un type C.M. de F, cet espace de modules est du type

$$\coprod_{\substack{(p_\sigma,q_\sigma)\in\mathbb{N}^\Phi\\ p_\sigma+q_\sigma=n}} U(p_\sigma,q_\sigma)/U(p_\sigma)\times U(q_\sigma)$$

où la composante indexée par $(p_\sigma,q_\sigma)_{\sigma\in\Phi}$ spécifie la classe d'isomorphisme de l'algèbre de Lie vue comme $F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\simeq\prod_{\Phi\coprod c\Phi}\mathbb{C}$-module.

Fixons un nombre premier p. La difficulté consiste maintenant à traduire cette condition topologique en une purement algébrique afin de définir de « bons » modèles entiers de ces espaces de modules sur l'anneau des entiers d'une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$. C'est ce que fait Kottwitz dans [**2**] lorsque le groupe p-adique associé au groupe unitaire est « non-ramifié » (*i.e.* a bonne réduction comme groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$) et la structure de niveau en p est minimale ($N\wedge p=1$ dans le cas des courbes modulaires $X_0(N)$). La condition algébrique équivalente de la condition topologique ci-dessus consiste alors à fixer le polygone de Hodge arithmétique avec structures additionelles.

Dans le cas particulier étudié par Harris et Taylor, utilisant la notion de structure de niveau de Drinfeld, on peut définir de tels modèles entiers en tout niveau en p. Cela n'est pas connu en général et est une des difficultés que doivent surmonter les deux articles de ce volume.

La réduction modulo p des variétés de Shimura étudiées dans ce volume possède une stratification généralisant celle des courbes modulaires donnée par le lieu ordinaire et le lieu supersingulier. Si A est une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ définie sur $\mathbb{F}_{p^r}$, les valuations p-adiques des valeurs propres (avec multiplicité) de l'endomorphisme de Frobenius Frob_{p^r}, $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k$, renormalisées en $\lambda_1/r\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k/r$ (les pentes du Frobenius cristallin) varient dans un ensemble fini en restriction aux variétés de Shimura étudiées sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, et définissent une stratification localement fermée de ces variétés appelée stratification de Newton (pour $X_0(N)$ le lieu ordinaire correspond à $1\geqslant 0$ et le lieu supersingulier à $1/2\geqslant 1/2$). Il existe de plus un ordre sur l'ensemble de tels systèmes de valuations tel que l'union des strates dont le système de valuations est plus grande qu'un donné est Zariski fermé. Cet ensemble possède de plus un éléments minimal associé à la strate ouverte (en général ce n'est pas la strate ordinaire qui peut être vide) et un maximal associé à la strate dite basique (ce qui est équivalent à supersingulier lorsque le groupe dérivé du groupe unitaire est simple sur $\mathbb{Q}_p$).

Cet ensemble ordonné est intimement lié au choix de la signature à l'infini.

Dans le cas de [**1**] il est isomorphe à l'ensemble $n\geqslant n-1\geqslant\cdots\geqslant 1$ (pour un entier k, $1\leqslant k\leqslant n$, la seule pente non nulle est $1/k$) et la strate basique est de dimension 0. En général cet ensemble est beaucoup plus compliqué et la strate basique est de dimension strictement positive, ce qui est le cas des deux articles de ce volume.

Dans [**1**] les espaces de modules locaux étudiés sont les points se spécialisant en un point supersingulier (la strate de dimension 0), la tour de Lubin-Tate. En général les espaces de modules locaux étudiés ici sont ceux définis par Rapoport et Zink ([**3**]) par déformations par quasi-isogénies d'un groupe p-divisible constant.

Le premier article de ce volume donne une généralisation de [**1**] en reliant la cohomologie des espaces de modules locaux de [**3**] « supersinguliers » à la cohomologie de la partie des espaces de modules globaux de Shimura-Kottwitz ([**2**]) ayant une réduction « supersingulière » (basique plutôt) via l'uniformisation p-adique de ce morceau de la variété de Shimura démontrée dans [**3**]. Les méthodes utilisées sont celles de l'analyse rigide p-adique. Puis, l'auteur démontre que l'on peut séparer la cohomologie globale de la partie supersingulière du reste si l'on se restreint aux représentations supercuspidales en p. La méthode utilisée dans [**1**] (semblable à celle expliquée pour les courbes modulaires) ne s'applique pas ici et il s'agit d'une des plus grosses difficultés à surmonter. Cela lui permet de démontrer que certains espaces de cohomologie locaux réalisent des correspondances de Langlands locales. Cette dernière partie utilise des résultats d'analyse harmonique associés à la formule des traces d'Arthur.

Le second article généralise [**1**] en commençant par définir des variétés d'Igusa généralisées. Contrairement aux variétés de [**1**] celles-ci ne sont pas définies sur toute la strate. L'auteur relie ensuite la cohomologie des espaces de modules locaux de [**3**] non forcément supersinguliers à la cohomologie de la strate de Newton associée dans la variété de Shimura et à la cohomologie de la variété d'Igusa. La méthode utilisée est celle des cycles évanescents ℓ-adiques. L'introduction des variétés d'Igusa provient de ce que les strates non-supersingulières ne sont pas entièrement uniformisées par les espaces de [**3**]. L'une des difficultés majeures est liée à ce qu'il n'y a pas vraiment d'uniformisation de la strate par le produit (espace de Rapoport-Zink) $\times$ (variété d'Igusa), il faut procéder à des troncatures et des torsions par Frobenius afin d'obtenir des uniformisations partielles.

En restriction à la partie supersingulière la première partie du premier article et le second donnent le même résultat par deux méthodes différentes (rigide analytique/cycles évanescents). Cela se déduit de l'invariance des cycles évanescents par complétion formelle.

Références

[1] M. HARRIS & R. TAYLOR – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[2] R.E. KOTTWITZ – « Points on some Shimura varieties over finite fields », *J. Amer. Math. Soc* **5** (1992), no. 2, p. 373–444.

[3] M. RAPOPORT & TH. ZINK – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, no. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

Astérisque
291, 2004, p. 1–199

COHOMOLOGIE DES ESPACES DE MODULES DE GROUPES p-DIVISIBLES ET CORRESPONDANCES DE LANGLANDS LOCALES

par

Laurent Fargues

Résumé. — Dans cet article on démontre que la partie supercuspidale de la cohomologie de certains espaces de Rapoport-Zink de type E.L. et P.E.L. non-ramifiés associés à des groupes p-divisibles supersinguliers réalisent des correspondances de Langlands locales. Pour cela on démontre d'abord que l'on peut relier, via une suite spectrale de type Hochschild-Serre, la cohomologie de ces espaces à celle du tube rigide au dessus de la partie supersingulière de certaines variétés de Shimura de type P.E.L.. On montre ensuite que la partie supercuspidale en une place finie non-ramifiée de la cohomologie de la variété de Shimura est égale à celle de sa strate basique, en d'autres termes la cohomologie des strates non-supersingulières est induite parabolique, du moins du point de vue des caractères.

***Abstract* (Cohomology of moduli spaces of p-divisible groups and local Langlands correspondences)**

In this article we prove that the supercuspidal part of the cohomology of some E.L. and P.E.L. type unramified Rapoport-Zink spaces realizes local Langlands correspondences. For this we first prove a relation between the cohomology of those spaces and the one of the p-adic rigid tube over the supersingular locus of some P.E.L. type Shimura varieties. This relation is an Hochschild-Serre type spectral sequence. Then we prove that, at a finite unramified place, the supercuspidal part of the cohomology of the Shimura variety is equal to the one of the supersingular locus, that is to say the cohomology of non-supersingular stratum is parabolicaly induced, at least from the character point of view.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G35, 14L05, 11Fxx, 14G22.
Mots clefs. — Variétés de Shimura, groupes p-divisibles, espaces de Rapoport-Zink, correspondances de Langlands, cohomologie étale des espaces rigides.

INTRODUCTION

Motivation générale

Dans l'article [**56**] Langlands a prédit l'existence d'un lien entre les motifs de Grothendieck définis sur des corps de nombres et certaines représentations automorphes des groupes linéaires. Pour certaines formes modulaires un cas particulier bien connu de cette correspondance est réalisé dans la cohomologie des courbes modulaires. Plus généralement, soit G un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}$ possédant une donnée de Shimura (G, X). Langlands a donné une description conjecturale du motif découpé par une représentation automorphe Π de G dans la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ en fonction du L-paramètre (conjectural) de Π ([**56**]).

Dans ce texte, nous démontrons des analogues locaux de cette conjecture en des places non-archimédiennes. Qu'entendons nous par analogue local ? En la place archimédienne de $\mathbb{Q}$ l'objet local équivalent naturel de la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ est l'espace symétrique hermitien X uniformisant la variété analytique $\mathrm{Sh}(G, X)(\mathbb{C})$, tandis que les objets associés aux représentations automorphes de G sont les représentations irréductibles du groupe de Lie $G(\mathbb{R})$ au sens d'Harish-Chandra. Les travaux de Schmid étudient ainsi la contribution des séries discrète de $G(\mathbb{R})$ dans la cohomologie L^2 de X (l'analogue local de l'identification de l'action du groupe de Galois motivique consisterait dans ce cas à déterminer une structure de Hodge sur ces espaces de cohomologie). Les analogues non-archimédiens en un premier p de $\mathbb{Q}$ de l'espace symétrique X sont les espaces rigides p-adiques de Rapoport-Zink ([**68**]) uniformisant certains ouverts rigides des variétés de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ (ils ne sont pas définis pour tous les couples (G, X)).

Espaces de Rapoport-Zink

Pour comprendre la définition des espaces de Rapoport-Zink rappelons que la plupart des variétés de Shimura devraient se décrire comme des espaces de modules de motifs. L'espace X s'interprète ainsi comme la contrepartie locale archimédienne de ce point de vue puisque c'est un espace de modules de structures de Hodge. Supposons que les variétés $\mathrm{Sh}(G, X)$ s'interprètent comme espaces de modules de variétés abéliennes. Les espaces de Rapoport-Zink sont alors la contrepartie p-adique de ce point de vue : ce sont des espaces de modules de groupes p-divisibles munis de structures de niveaux.

Contrairement à X les espaces de Rapoport-Zink ne sont pas simplement connexes ; il s'agit d'une tour d'espaces rigides $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ indexée par les sous groupes compacts ouverts de $G(\mathbb{Q}_p)$ telle que si K' est un sous groupe compact ouvert de K, le morphisme de transition $\breve{\mathcal{M}}_{K'} \to \breve{\mathcal{M}}_K$ est un revêtement étale. Cette tour est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p)$. Un deuxième groupe algébrique p-adique entre en jeux, une forme intérieure d'un sous groupe de Levi de la forme intérieure quasi-déployée de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On le note J_b. Celui-ci agit sur chaque espace $\breve{\mathcal{M}}_K$ de manière compatible aux morphismes de transition. Le troisième groupe entrant en jeu est le groupe de Weil W_E d'une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$.

Esquisse des résultats

Considérons la cohomologie étale ℓ-adique à support compact au sens de Berkovich des $\breve{\mathcal{M}}_K$ pour un $\ell \neq p$,

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

Lorsque K varie celle ci est munie d'une action lisse de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times W_E$.

Les résultats principaux de ce texte concernent des espaces de Rapoport-Zink pour lesquels le groupe J_b est une forme intérieure de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Ce sont ceux qui uniformisent les strates supersingulières des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées définies dans [**46**]. Le premier résultat concerne le cas où $G(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{GL}_n(F)$ pour une extension $F|\mathbb{Q}_p$ non ramifiée, et $J_b = D^\times$ où D est une algèbre à division sur F. Soit JL la correspondance de Jacquet-Langlands qui associe à une représentation irréductible de $D^\times$ une représentation de la série discrète de $\mathbf{GL}_n(F)$. Soit ρ une représentation de J_b telle que JL(ρ) soit supercuspidale. Soit π une représentation supercuspidale de $G(\mathbb{Q}_p)$. D'après la correspondance de Langlands locale ([**34**]), à π est associé un certain L-paramètre ψ. Nous démontrons que $\rho \otimes \pi$ intervient virtuellement dans la somme alternée de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink si et seulement si $\breve{\pi} = \mathrm{JL}(\rho)$. Nous démontrons qu'alors la représentation galoisienne découpée par $\rho \otimes \pi$ s'exprime simplement en fonction du L-paramètre ψ.

Nous démontrons le même type de résultat lorsque $G(\mathbb{Q}_p) = J_b = \mathbf{GL}_n(F)$, la correspondance de Jacquet-Langlands étant alors l'identité.

Nous démontrons également le premier cas de loi de réciprocité non abélienne locale construite géométriquement et associée à des groupes autres que des formes intérieures des groupes linéaires. Plus précisément, il s'agit du cas où $J_b = G(\mathbb{Q}_p) = GU(3)$ est le groupe de similitudes unitaires non ramifié en trois variables. Contrairement au cas précédents, les L-paquets de représentations de $GU(3)$ ne sont pas tous de cardinal 1. Le résultat est alors du même type que précédemment après sommation sur un tel L-paquet.

Conjectures de Kottwitz

Kottwitz a formulé une conjecture concernant la contribution d'une représentation « discrète » de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b$ dans les espaces de cohomologie $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ ainsi que de la représentation galoisienne associée ([**65**] et [**32**]). Il s'est basé pour cela sur la description conjecturale donnée par Langlands du motif, et en particulier de la représentation galoisienne dans la cohomologie ℓ-adique, associé à une représentation automorphe de G dans la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G,X)$, ainsi que sur la formule conjecturale d'Arthur pour la multiplicité d'une représentation automorphe dans un A-paquet discret de G. Les résultats de ce texte sont des cas particuliers de ces conjectures.

Énoncés précis

Les résultats principaux sont les suivants :

***Théorème* (théorèmes III.8.1.4 et III.8.1.5).** — *Soit (V,F,b,μ) une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple basique (I.2.2.1). Soit $E\subset\overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps reflex associé. Soient $\breve{\mathcal{M}}_K=\breve{\mathcal{M}}_K(b,\mu)$ les espaces de Rapoport-Zink associés (I.2.3.1).*

(1) *Supposons le groupe réductif J_b anisotrope modulo son centre, c'est-à-dire $J_b = D^\times$ pour une algèbre à division D sur F d'invariant calculé en fonction de μ. Notons JL la correspondance de Jacquet-Langlands. Soit π une représentation irréductible de J_b telle que $JL(\pi)$ soit supercuspidale. L'égalité suivante est vérifiée dans le groupe de Grothendieck* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p)\times W_E)$

$$\sum_i(-1)^i\Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}(H_c^i(\breve{\mathcal{M}}_K\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\pi)\Big]_{\mathrm{cusp}} = \pm[\mathrm{JL}(\pi)]\otimes[r_\mu\circ\widetilde{\sigma}_\ell(\mathrm{JL}(\pi))_{|E}]\ |.|^{\sum_\tau p_\tau q_\tau/2}$$

où $\widetilde{\sigma}_\ell$ la correspondance de Langlands locale « absolue » ℓ-adique pour le groupe linéaire (A.7.1) et r_μ la représentation du L-groupe associé (A.7.2) sur E.

(2) *Supposons le groupe réductif J_b égal à $G=\mathbf{GL}_n$. Soit π une représentation irréductible supercuspidale de J_b. Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p)\times W_E)$

$$\sum_i(-1)^i\Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}(H_c^i(\breve{\mathcal{M}}_K\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\pi)\Big]_{\mathrm{cusp}} = \pm[\pi]\otimes[r_\mu\circ\widetilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E}]\ |.|^{\sum_\tau p_\tau q_\tau/2}$$

Dans cet énoncé, la donnée de Rapoport-Zink locale est l'analogue non-archimédien local d'une donnée de Shimura.

***Théorème* (théorème III.8.2.2).** — *Soit $(F,*,V,\langle\bullet,\bullet\rangle,b,\mu)$ une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple basique (I.2.2.2). Supposons $[F{:}\mathbb{Q}_p]/2$ impair et* $\dim_F(V)=3$. *Soit $E\subset\overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps reflex associé. Soient $\breve{\mathcal{M}}_K=\breve{\mathcal{M}}_k(b,\mu)$ les espaces de Rapoport-Zink associés (I.2.3.2). Soit $\psi: W_{\mathbb{Q}_p}\to {}^LG$ une classe de conjugaison de L-paramètres vérifiant :* $\mathrm{im}(\psi)$ *n'est pas contenue dans ${}^LB$ pour un sous groupe de Borel B de G. Soit $\Pi(\psi)$ le L-paquet supercuspidal de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ associé (C.4.2). Rappelons que $J_b=G(\mathbb{Q}_p)=GU(3)$. L'égalité suivante est vérifiée dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p)\times W_E)$

$$\sum_{\pi\in\Pi(\psi)}\Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}\Big(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\pi\Big)\Big]_{\mathrm{cusp}} = \pm\sum_{\pi\in\Pi(\psi)}[\pi]\otimes[r_\mu\circ\psi_{|W_E}]\ |.|^{\sum_\tau p_\tau q_\tau/4}$$

En particulier, si $\Pi(\psi)$ est stable la conjecture de Kottwitz ([**65, 32**]*) est vérifiée.*

Quelques rappels sur la méthode de Harris,Taylor et Boyer

Rapide historique. — Lubin et Tate avaient déjà considéré (mais formulé différemment bien sûr) le cas particulier $G = \mathbf{GL}_1$ pour lequel les espaces $\breve{\mathcal{M}}$ sont de dimension 0, et donné ainsi une construction géométrique de la loi de réciprocité locale d'Artin. Deligne, Drinfeld ([**20**], [**21**] par exemple) et Langlands se sont intéressés à des problèmes de modules plus généraux. Carayol a ensuite formulé dans [**11**] des conjectures concernant les espaces de déformation de Lubin-Tate de dimension supérieure. Ces conjectures ont été démontrées dans le cas des corps locaux de caractéristique p par Boyer ([**8**]). Harris et Taylor on alors démontré la conjecture de Langlands locale pour les groupes linéaires sur des extensions de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ en utilisant cette approche ([**34**]), puisque dans leur cas la représentation r_μ est la représentation standard du groupe linéaire.

Quelques points de [**34**]. — Pour comprendre la tactique utilisée pour démontrer nos théorèmes il nous faut rappeler brièvement certains points de ([**34**]). Harris et Taylor considèrent des espaces de déformation de $\mathcal{O}_F$-modules divisibles de dimension 1 et de hauteur g, munis d'une structure de Drinfeld de niveau m, et notés $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$ (ce sont des schémas formels). Avec les notations du théorème III.8.1.4 énoncé précédemment, cela correspond à un choix particulier du cocaractère μ. Les espaces $\breve{\mathcal{M}}_K$ associés sont alors une union disjointe infinie des fibres génériques au sens des espaces analytiques des $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$. Leur résultat est énoncé en termes de cycles évanescents ℓ-adiques au sens de Berkovich, cependant les résultats de la section 5.9 de cet article permettent de faire le lien avec la cohomologie à support compact des espaces analytiques $\breve{\mathcal{M}}_K$. Avec nos notations, ils démontrent que si ρ est une représentation de J_b telle que $\mathrm{JL}(\rho)$ est supercuspidale alors,

$$[\mathrm{Hom}_{J_b}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho)] = [\mathrm{JL}(\rho)] \otimes [r_\ell(\mathrm{JL}(\rho))]$$

où $r_\ell(\mathrm{JL}(\rho))$ est une représentation ℓ-adique de W_F. Ils montrent alors que la correspondance définie sur les représentations supercuspidales

$$\pi \longmapsto r_\ell(\pi)$$

est une correspondance de Langlands locale tordue par un caractère non ramifié. Leur démonstration utilise certaines variétés de Shimura, dites « simples », possédant de bon modèles entiers en tout niveau. Elles paramètrent des variétés abéliennes A munies de structures additionnelles (polarisation, action d'une algèbre) et de structures de niveau définies en p en utilisant la théorie des structures de niveau de Drinfeld.

L'un des points clef est que celles-ci sont stratifiées par la classe d'isogénie du groupe p-divisible universel $A[p^\infty]$. La strate minimale, ou strate supersingulière, est de dimension 0, et le complété formel de la variété de Shimura le long de cette strate est uniformisé par une union disjointe de $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$. Un point clef de [**34**] remarqué par Boyer dans [**8**] dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules elliptiques et transposé par Harris et Taylor dans le cadre des groupes p-divisibles, est que la cohomologie des autres strates est induite parabolique en p, c'est-à-dire comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$. Cela est une conséquence du fait qu'en restriction aux autres strates le groupe p-divisible universel (pas $A[p^\infty]$, mais un déduit de celui-ci) est une extension d'un groupe étale par un groupe du même type que celui associé à la strate supersingulière. Utilisant que les déformations de tels groupes p-divisibles s'expriment simplement en termes des déformations de leur partie connexe, l'astuce de Boyer s'en déduit facilement. Une fois l'astuce de Boyer démontrée on peut facilement relier la partie supercuspidale en p de la cohomologie de la variété de Shimura à celle des espaces $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})^{\mathrm{an}}$, ce qui est la première étape de la récurrence de [**34**].

L'approche utilisée

Dans [**32**] M. Harris esquisse un programme visant à généraliser l'approche de [**34**]. Certains points de ce texte sont inspirés de ce programme. Nous utilisons une approche similaire à celle de [**34**] basée sur les travaux de Kottwitz sur les variétés de Shimura de type P.E.L. ([**51**]) et ceux de Rapoport et Zink sur l'uniformisation p-adique de ces variétés ([**68**]). Les principaux points de [**34**] ne se transposant pas dans ce cadre général et les solutions que nous y avons apportées sont les suivants :

- Contrairement aux variétés « simples » de [**34**], on ne sait construire en général de bon modèles entiers des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées de [**51**] qu'en niveau maximal (compact hyperspécial, ou parahorique) en p. Cela est lié au fait qu'on ne sait pas définir de notion de structure de niveau de Drinfeld sur les groupes p-divisibles de dimension plus grande que un. L'alternative consiste à travailler au niveau des espaces rigides dès que l'on n'est plus en niveau maximal, et par exemple à définir le tube au-dessus d'une strate comme étant l'image réciproque par l'application de changement de niveau vers un niveau maximal du tube rigide au-dessus de la strate considérée.
- Du point de vue des cycles évanescents, le lien entre la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink et celle de la strate supersingulière via l'uniformisation p-adique est quasi-immédiat dans [**34**]. En effet, la fibre spéciale des espaces $\breve{\mathcal{M}}_K$ de [**34**] est de dimension 0. Le lien entre les deux est donc un « problème de combinatoire ». Le problème dans notre cadre est que non seulement nous travaillons d'un point de vue rigide, mais en général l'uniformisation de [**68**] n'est pas une simple réécriture du théorème de Serre-Tate ; il y a des familles de déformations par quasi-isogénie « continues horizontales » (c'est-à-dire non discrètes sur un espace de paramètres de dimension 0) des groupes p-divisibles que nous considérons. Pour y remédier, nous démontrons dans la partie II l'existence d'une suite spectrale de type Hochschild-Serre liée à l'uniformisation p-adique rigide qui relie la cohomologie des $\breve{\mathcal{M}}_K$ à celle de la strate supersingulière.

• L'astuce de Boyer n'admet pas de généralisation immédiate. Soit par exemple X un groupe p-divisible sur la clôture algébrique d'un corps fini possédant deux pentes λ_1, λ_2 avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, et une filtration

$$0 \longrightarrow X_{\lambda_2} \longrightarrow X \longrightarrow X_{\lambda_1} \longrightarrow 0$$

où X_{λ_1}, resp. X_{λ_2}, est isoclin de pente λ_1, resp. λ_2. Les déformations de X ne se décrivent pas simplement à partir de celles de X_{λ_2} et de X_{λ_1} comme c'était le cas lorsque X_{λ_1} était étale.

La résolution de ce problème est à l'origine de la partie la plus originale de ce texte, la partie III. Dans [**32**] M. Harris propose de démontrer que la cohomologie des strates non basiques est induite parabolique en p en utilisant une formule des traces de Lefschetz en géométrie rigide. Malheureusement, à part en dimension 1 ([**38, 73**]) une telle formule des traces est loin d'exister (il faudrait comprendre les termes associés aux points fixes dans le bord des compactifications de Huber au sens des espaces adiques). La solution que nous apportons à ce problème est la suivante : utilisant les travaux de Fujiwara ([**25**]) nous démontrons une formule des traces de Lefschetz pour la cohomologie des tubes rigides au-dessus des strates des variétés de Shimura que nous considérons. La méthode consiste alors à comparer cette formule des traces « p-adique » à la formule des traces de Lefschetz archimédienne topologique associée à l'uniformisation complexe des variétés de Shimura. Utilisant la conjugaison stable en une place auxiliaire différente de p pour séparer les classes de conjugaison elliptiques régulières des non-elliptiques en p, on montre le résultat. Les techniques utilisées au passage sont très diverses : théorie des types, cycles évanescents rigides...

• Reste la partie purement automorphe du programme : comparaison de la formule des traces d'Arthur pour les groupes unitaires de signature quelconque à l'infini. Nous utilisons pour cela des résultats de Harris et Labesse ([**33**]) généralisant ceux de Clozel en signature $(1, n-1)$ ([**14**]). Ces résultats sont assujettis à certaines conditions sur les groupes unitaires. Ce sont ces conditions qui imposent les restrictions sur J_b dans le théorème 8.1.4 et 8.1.5. Pour les résultats concernant $U(3)$ nous utilisons les résultats de Rogawski ([**69**]).

Une meilleur connaissance de la stabilisation de la formule des traces pour les groupes unitaires permettrait surement d'obtenir des résultats complets sur $U(n)$ avec n quelconque.

• La partie représentation galoisienne, c'est-à-dire la détermination de $r_\mu \circ \psi$ est achevée en déterminant la restriction à un groupe de décomposition des représentations galoisiennes globales découpées par certaines représentations automorphes dans les variétés de Shimura associées aux groupes unitaires. Nous utilisons pour cela l'existence (résultats de Harris et Labesse, résultats de Rogawski sur $U(3)$) d'un changement de base quadratique stable pour de telles représentations automorphes, la détermination par Kottwitz de cette représentation en presque toutes les places non ramifiées ainsi que l'un des résultats principaux de [**34**] généralisant le théorème principal de Clozel dans [**14**].

Bien qu'en annexe, ce résultat peut être considéré en soi même comme un résultat indépendant.

Description des différentes parties

Premier chapitre. — Dans le premier chapitre nous rappelons et explicitons les définitions de base concernant les variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées de [**51**].

Chapitre 2. — Le début du chapitre 2 contient les définitions et propriétés de base concernant les espaces de Rapoport-Zink non ramifiés sans structure de niveau (en tant que schémas formels).

La section 2.4 contient le premier résultat, le théorème 2.4.13. Il s'agit d'une amélioration du théorème de finitude de 2.18 de [**68**]. Nous montrons que « $J_b\backslash\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ » est quasi-compact (pour tout (b,μ)), ou encore que sous l'action de J_b il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de composantes irréductibles dans la fibre spéciale de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$. Le demi-plan supérieur de Drinfeld possède une décomposition cellulaire indexée par l'immeuble de Bruhat-Tits de PGL_n. Comme dans [**61**] nous donnons une description des points sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ comme un sous ensemble de l'immeuble de G sur $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$ (section 2.4.1 et 2.4.2). Le théorème 2.4.13 s'interprète alors comme un théorème de finitude sur cet immeuble. Il nous permettra plus loin d'obtenir des théorèmes de finitude concernant la cohomologie à support compact des $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ comme J_b-modules.

La section 2.5 contient les définitions et propriétés de base concernant les espaces $\breve{\mathcal{M}}_K(b,\mu)$ (structures de niveau, action sur ces structures).

Dans ce texte nous travaillons avec deux théories différentes pour les variétés rigides et leur cohomologie étale ℓ-adique à support compact : la théorie des espaces analytiques de Berkovich et celle des espaces adiques de Huber. La première est la version surconvergente de la seconde : le topos étale analytique coïncide avec le topos étale adique surconvergent. Les raisons pour lesquelles nous n'avons pas fixé une des deux théories sont multiples :

- Le théorème de lissité de l'action sur la cohomologie ℓ-adique à support compact est formulé dans le cadre de la théorie de Berkovich. La démonstration de ce théorème n'étant pas publiée ([**2**]), nous en avons mis une démonstration dans la section 4.1.
- Les propriétés des cycles évanescents analytiques de Berkovich sont clairement exposées dans les deux articles [**3**] et [**5**]. Les propriétés des cycles évanescents adiques de Huber sont plus dispersées.

• Cependant, les théorèmes de finitude de Huber sont plus généraux (il a par exemple une définition des faisceaux constructibles). Nous utilisons notamment les théorèmes de finitude de [**36**].

Nous avons donc mis en annexe D quelques propriétés de base qui nous l'espérons permettront au lecteur de passer aisément d'une théorie à l'autre.

La définition et les propriétés de base (lissité des actions par exemple) de la cohomologie ℓ-adique des espaces de Rapoport-Zink sont données dans la section 4.4. Le lemme 4.4.12, la proposition 4.4.13 et le corollaire 4.4.14 constituent les trois théorèmes de finitude concernant l'action de J_b sur ces espaces de cohomologie.

Chapitre 3. — Le troisième chapitre contient des rappels et des précisions sur les résultats principaux de [**68**] concernant l'uniformisation des variétés de Shimura de type P.E.L.. Pour paramétrer les strates de ces variétés nous utilisons l'ensemble $B(G,\mu)$ de Kottwitz ([**52**]) des classes d'isomorphismes d'isocristaux munis de structures additionnelles vérifiant le théorème de Mazur généralisé ([**66**]) sur la position relative des polygones de Hodge et Newton (le polygone de Hodge étant fixé par μ via la condition de Kottwitz). Nous donnons la description explicite de ces ensembles (ainsi que des groupes J_b associés) dans le cas de $\mathbf{GL}_n$ dans la section 2.1.

On retiendra une propriété importante de l'application d'uniformisation rigide énoncée dans ce chapitre : c'est un isomorphisme local (3.2.9). Cependant (remarque 3.2.4), à part dans le cas de la strate basique, les ouverts rigides uniformisés sont beaucoup plus petit que les tubes au-dessus des strates (c'est déjà clair dans le cas des variétés de [**34**], où l'uniformisation de Rapoport-Zink uniformise des complétés formels de la strate μ-ordinaire, ouverte dans la fibre spéciale, le long de sous schémas de dimension 0 de cette fibre spéciale). C'est l'un des problèmes principaux qu'il faut surmonter pour comprendre la contribution des strates non basiques et qui est étudié dans l'article d'Elena Mantovan.

Chapitre 4. — D'après la formule de Matsushima, la cohomologie de nos variétés de Shimura s'exprime en termes de représentations automorphes du groupe de similitudes unitaires G. Une des idées qui est au cœur de cet texte est que le facteur en p (après restriction de la représentation galoisienne à un groupe de décomposition en p, c'est-à-dire comme comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_\nu}$ où E_ν est le complété en p du corps reflex) de certains morceaux de la cohomologie des variétés de Shimura que nous considérons ne devraient dépendre que de la cohomologie des objets locaux en p que sont les espaces rigides de Rapoport-Zink.

Dans [**34**] cela est une conséquence du théorème de comparaison de Berkovich entre cycles évanescents algébriques et analytiques rigides (comparaison entre le site étale et étale formel d'un schéma hensélien). Comme expliqué auparavant, nous utilisons une approche différente. Nous démontrons l'existence d'une suite spectrale de type

Hochschild-Serre reliant la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink à celle des tubes qu'ils uniformisent p-adiquement. M. Harris avait déjà démontré l'existence d'une telle suite spectrale dans le cas du demi-plan supérieur de Drinfeld ([**30**]). Il utilisait pour cela la décomposition cellulaire du demi-plan et des résultats de Berkovich sur les « G-modules discrets » (non publiés). Une telle décomposition n'existe pas en général. Notre méthode est différente et s'applique à tous les cas d'uniformisation connus (et conjecturaux, *cf.* [**32**] conjecture 4.2.).

La principale difficulté dans l'établissement d'une telle suite spectrale provient des coefficients ℓ-adiques. En effet, les espaces $\breve{\mathcal{M}}_K$ ne sont pas quasicompacts et en général

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Z}_\ell) \neq \varprojlim_n H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

à cause des problèmes d'interversion de limite inductive (sur le support compact des sections) et de limite projective (sur les coefficients). Nous contournons ce problème en nous inspirant de l'article [**36**]. Nous utilisons le foncteur dérivé $\mathbb{R}\pi_*$ de la section 4.1 (ainsi que ses versions équivariantes) introduit par Ekedahl dans [**22**] qui envoi des faisceaux ℓ-adiques sur des complexes de faisceaux de $\mathbb{Z}_\ell$-modules. Grâce au lemme 4.1.4 nous pouvons alors travailler avec les foncteurs dérivés des sections à support compact (noté $\Gamma_!$) dans la catégorie dérivée de tels faisceaux de $\mathbb{Z}_\ell$-modules, éliminant ainsi les problèmes de faisceaux ℓ-adiques. Cela permet de démontrer le théorème général 4.5.1. Le théorème principal 4.5.12 s'en déduit.

L'application fondamentale est la formule de Matsushima p-adique calculant la cohomologie de la strate basique en fonction de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink basiques (ceux qui interviennent dans les résultats principaux de cet article) et des représentations automorphes d'une forme intérieure I^ϕ de G (corollaire 4.6.3) : il y a une égalité dans le groupe de Grothendieck $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$

$$\sum_{\substack{i,j \\ \Pi \in \mathcal{T}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\rho}}} (-1)^{i+j} \Big[\varinjlim_{K_p} \mathrm{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}} \Big(H_c^j(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \otimes \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell})(N), \Pi_p \Big) \Big] \otimes [\Pi^p]$$
$$= \sum_i (-1)^i \Big[\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{an}}_{\mathrm{basique}}, \mathcal{L}_\rho^{\mathrm{an}}) \Big]$$

où $\mathcal{T}(I^\phi)$ désigne l'ensemble des représentations automorphes de I^ϕ, et I^ϕ vérifie $I^\phi(\mathbf{A}_f^p) = G(\mathbf{A}_f^p)$, $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = J_b$.

C'est la comparaison géométrique entre cette formule de Matsushima p-adique et celle archimédienne couplée à la comparaison analytique entre la formule des traces d'Arthur de G et sa forme intérieure I^ϕ qui permettra de démontrer les résultats principaux du chapitre 8.

Chapitre 5. — Le but des chapitres 5,6 et 7 est de démontrer l'analogue de l'astuce de Boyer en comparant deux formules des traces : l'une p-adique, c'est-à-dire utilisant l'uniformisation p-adique, l'autre topologique utilisant l'uniformisation archimédienne par l'espace symétrique hermitien X (un cas particulier de la formule des traces d'Arthur telle qu'elle est reformulée dans [**26**]).

Dans le chapitre 5 nous démontrons la formule p-adique (théorème 5.12.5). Plusieurs points sont au cœur de cette formule : le théorème de Fujiwara, le fait que la fibre des cycles évanescents algébriques ne dépend que du complété formel en ce point... nous renvoyons à l'introduction de ce chapitre pour plus de détails.

Pour démontrer une telle formule nous utilisons la formule des traces de Lefschetz modulo p, et plus particulièrement le théorème de Fujiwara ([**25**]). Pour cela nous utilisons les cycles évanescents analytiques rigides de Berkovich. Cependant nos variétés de Shimura et les correspondances de Hecke associées ne possèdent pas de bon modèles entiers en tout niveau en p. L'idée consiste alors à spécialiser (au sens de [**25**]) l'image directe sur la fibre générique vers un niveau maximal des correspondances de Hecke en tant que correspondances cohomologiques. Les correspondances cohomologiques agissent sur la cohomologie, cependant nous avons besoin de vérifier que la suite spectrale des cycles évanescents est équivariante vis à vis de ces deux opérations : image directe propre et spécialisation. C'est une des raisons pour laquelle nous développons un formalisme de spécialisation des correspondances cohomologiques rigides dans l'esprit de [**25**] et montrons que celui-ci est compatible à l'image directe et à l'isomorphisme de Berkovich.

Le théorème 5.12.5 est alors une application de ce formalisme couplé au théorème de Fujiwara ([**25**]).

Cependant un point technique doit être soulevé : même en niveau compact hyperspécial C_0 seules les correspondances de Hecke à support dans C_0 possèdent un bon modèle entier (pour appliquer le théorème de Fujiwara une des deux applications de projections de la correspondance doit être quasi-finie). Nous voudrions a priori appliquer notre formule des traces en mettant en p un pseudo-coefficient d'une représentation supercuspidale. Cela n'est donc pas possible. L'alternative consiste à utiliser la théorie des types de Bushnell et Kutzko. En effet, si (J, λ) est un type supercuspidal l'idempotent associé e_λ est à support dans J et donc dans un sous groupe compact hyperspécial. Le problème est presque résolu à la remarque suivante près : e_λ ne permet pas de séparer les représentations supercuspidales dans une même classe d'équivalence inertielle. A tous les types supercuspidaux connus est associé un couple $(\widetilde{J}, \widetilde{\lambda})$ où $\widetilde{J}$ est un sous groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{Q}_p)$ contenant J et $\widetilde{\lambda}$ une extension de λ à $\widetilde{J}$. On remarque alors que l'on peut séparer toutes les supercuspidales par les fonctions $e_\lambda * \delta_g$ où $g \in \widetilde{J}$ (annexe B). Il suffit donc de faire agir l'automorphisme associé à $g \in \widetilde{J}$ sur nos modèles entiers. Remarquant que pour les groupes $G(\mathbb{Q}_p)$ avec lesquels nous travaillons tous les groupes $\widetilde{J}$ sont contenus dans le normalisateur d'un sous groupe parahorique de $G(\mathbb{Q}_p)$ on vérifie que l'on peut s'en sortir (5.11.4) en utilisant les modèles entiers définis en niveau parahorique de [**68**].

Chapitre 6. — Dans ce chapitre nous redémontrons un cas très particulier de la formule des traces topologique d'Arthur telle qu'elle est reformulée dans [**26**] (théorème 6.4.1). En effet, en supposant la variété de Shimura compacte et la correspondance de Hecke à support dans les éléments réguliers en une place finie la formule prend une forme très simple.

Bien que cette formule puisse se déduire de [**26**], la lecture de [**26**] (plutôt technique) ne la laisse pas du tout transparaître (les auteurs de [**26**] s'intéressent surtout aux points fixes dans le bord). C'ést pourquoi nous avons inclus sa démonstration.

Nous vérifions de plus en utilisant la théorie de Hodge p-adique (théorème 6.3.2) que si l'on disposait d'une formule des traces en géométrie rigide de la forme une somme sur des points fixes locaux naïfs + des termes de Lefschetz au bord (au sens des compactifications de Huber des espaces adiques, *cf.* [**38**] et [**73**]), la distribution somme sur les points fixes naïfs associée à des strates non basiques est à support dans des éléments non-elliptiques réguliers ce qui ramènerait la démonstration de l'astuce de Boyer à montrer que la distribution associée aux termes au bord est « induite » en p.

Chapitre 7. — Il contient le théorème principal de la partie III (et l'un des principaux de cet article), l'équivalent de l'astuce de Boyer : le théorème 7.2.1.

La démonstration consiste à comparer les deux formules des traces : topologique et p-adique. La formule des traces topologique 6.4.1 pour la trace d'une fonction f dans l'algèbre de Hecke globale est une combinaison linéaire d'intégrales orbitales $\mathcal{O}_\gamma(f_p)\times\mathcal{O}_\gamma(f^p)$ où $\gamma\in G(\mathbb{Q})$. La formule p-adique 5.12.5 est une combinaison linéaire de termes de la forme $a_\gamma(f_p)\times\mathcal{O}_\gamma(f^p)$ où γ est une classe de conjugaison dans un groupe $I^\phi(\mathbb{Q})$ qui se transfert (via l'action sur la cohomologie ℓ-adique hors p d'une variété abélienne) en un élément de $G(\mathbf{A}_f^p)$ et permet de définir $\mathcal{O}_\gamma(f^p)$. Quant à la distribution $f_p\mapsto a_\gamma(f_p)$ il s'agit d'une certaine trace sur la cohomologie étale d'un espace rigide de déformation (par isomorphismes) de groupes p-divisibles. On suppose qu'en une place hors p f est à support dans les éléments réguliers. Toutes les classes de conjugaison γ précédentes sont alors régulières.

Si f_p est dans l'algèbre de Hecke d'un type supercuspidal, dans la formule des traces archimédienne seules des classes de conjugaison elliptiques en p contribuent de façon non nulle. Choisissons une place auxiliaire w de $\mathbb{Q}$ différente de p. Égalant les deux formules des traces et faisant varier les fonctions test en w on en déduit que si la classe d'isogénie ϕ ainsi que $\gamma\in I^\phi(\mathbb{Q})$ contribuent de façon non nulle alors γ est conjugué dans $G(\mathbb{Q}_w)$ à un élément de $G(\mathbb{Q})$ elliptique dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Regardons alors γ comme un élément de $I^\phi(\mathbb{Q}_p)\subset J_b$ (où b est déduit de ϕ). La forme intérieure quasidéployée de J_b est le centralisateur du morphisme des pentes $M(b)$ au sens de [**47**], une forme intérieure d'un sous groupe de Levi de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Le transfert de γ vers cette forme intérieure est donc un élément de $M(b)(\mathbb{Q}_p)$ stablement conjugué à un élément elliptique de $G(\mathbb{Q}_p)$. Cela n'est donc possible que si $M(b) = G_{\mathbb{Q}_p}$, c'est-à-dire si ϕ intervient dans la strate basique. On en déduit donc que seuls ces termes interviennent. Appliquant de nouveau la formule des traces p-adique (cette fois ci à la strate basique) on obtient le résultat.

Chapitre 8. — Il contient la démonstration des résultats annoncés au début de cette introduction en utilisant la formule de Matsushima p-adique de la partie II, le théorème 7.2.1 du III et les résultats de l'annexe A.

La lecture de ce mémoire est essentiellement indépendante de celle de [**34**]. On trouvera dans [**29**] une approche des résultats de [**34**] similaire à celle utilisée ici. J'ai également essayé de rendre la lecture de ce texte la plus indépendante possible de [**68**] en rappelant et explicitant les définitions et constructions de [**68**] dans le cas étudié. J'espère que cela rendra le texte accessible aux non-spécialistes.

Je tiens à remercier Michael Harris pour son soutien et son aide précieuse durant l'élaboration de ce travail.

CHAPITRE 1
VARIÉTÉS DE SHIMURA DE TYPE P.E.L. NON RAMIFIÉES

1.1. Donnée de Shimura de type P.E.L.

Soit $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, h)$ une donnée de Shimura de type P.E.L. ([**51**]). Plus précisément :

- B est une algèbre simple sur un corps de nombres F
- $*$ est une involution positive sur B : $\forall\, b \in B$, $\mathrm{tr}(bb^*) \geqslant 0$
- $(V, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ est un B-module hermitien où $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{Q}$ est symplectique
- $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V)_{\mathbb{R}}$ est un morphisme d'algèbres à involutions où $\mathrm{End}_B(V)$ est muni de l'adjonction par rapport à la forme symplectique $\langle \bullet, \bullet \rangle$ et $\mathbb{C}$ de la conjugaison complexe. Nous supposons de plus que $\langle \bullet, h(i) \bullet \rangle$ est un produit scalaire.

Notons

$$G = \{ g \in \mathrm{GL}_B(V) \mid gg^* = c(g) \in \mathbb{Q}^* \}$$

le groupe des similitudes unitaires défini sur $\mathbb{Q}$ associé. Le facteur de similitude c définit un caractère $c : G \to \mathbb{G}_m$. Notons $G_1 = \ker(c)$ le groupe unitaire associé.

Le morphisme h définit une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisée munie d'une action de B. Cette structure de Hodge munie de structures additionnelles est un point dans la variation de structures de Hodge associée aux variétés de Shimura que nous allons utiliser.

Nous noterons X la classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de $h : \mathbb{C}^\times \to G_{\mathbb{R}}$. Rappelons que X s'identifie à l'espace symétrique hermitien $G(\mathbb{R})/K_\infty$ où K_∞, un sous groupe compact maximal modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, est le centralisateur de h dans le groupe de Lie $G(\mathbb{R})$.

Au morphisme h on peut associer le cocaractère

$$\mu_h : \mathbb{C}^\times \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$$

(ou plutôt sa classe de conjugaison) définissant la filtration de Hodge sur $V_{\mathbb{C}} = V_0 \oplus V_1$ où $\mu_h(z) = z$ sur V_1 et $\mu_h = 1$ sur V_0. Dans toute la suite nous suivrons la convention homologique de Kottwitz, c'est-à-dire l'inverse de [**16**]. Cela signifie que dans l'interprétation modulaire des variétés de Shimura que nous considérerons la structure de Hodge définie par h sera celle sur l'homologie de degré 1 des variétés abéliennes considérées.

Nous noterons $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Soit E le corps reflex associé à $\mathcal{D}$. Le corps E est le corps de définition de la classe de conjugaison de μ,

$$E = \mathbb{Q}[\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(b; V_0) \mid b \in B] \subset \overline{\mathbb{Q}}$$

Contrairement à F, qui est un corps « abstrait », il s'agit d'un corps plongé dans $\mathbb{C}$.

1.1.1. Le cas (A). — La condition de positivité sur $*$ implique que F est soit un corps C.M. soit un corps totalement réel.

Supposons que F est un corps C.M., ce que nous appellerons le cas (A). Dans ce cas-là l'involution $*$ restreinte à F induit la conjugaison complexe sur F. Fixons $\Phi \subset \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$ un type C.M. de F. Il existe alors des signatures $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Phi}$ telles que $p_\tau + q_\tau = n$ soit indépendant de τ dans Φ et

$$G_{1/\mathbb{R}} \simeq \prod_{\tau\in\Phi} U(p_\tau, q_\tau)$$

De plus

$$G_{\mathbb{C}} \simeq \prod_{\tau\in\Phi} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$$

le dernier facteur représentant le facteur de similitude d'un élément de $G(\mathbb{C})$. Avec ces notations,

$$h(z) = \prod_{\tau\in\Phi} \mathrm{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{p_\tau}, \underbrace{\overline{z}, \dots, \overline{z}}_{q_\tau}) \quad \text{et} \quad \mu(z) = \prod_{\tau\in\Phi} \mathrm{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{p_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_\tau}) \times (z)$$

On a la relation $n = [B : F]^{1/2}\, \mathrm{rg}_B V$.

Le corps E peut alors se décrire à partir de ces données. Le groupe de Galois $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ agit en effet naturellement sur les Φ-uplets de couples d'entiers $(a_\tau, b_\tau)_{\tau\in\Phi}$ de la façon suivante :

$$\forall\, \sigma \in \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \quad \sigma.(a_\tau, b_\tau)_{\tau\in\Phi} = (a'_\tau, b'_\tau)_{\tau\in\Phi}$$

où

$$\forall\, \tau \in \Phi \ \ (a'_\tau, b'_\tau) = \begin{cases} (a_{\sigma^{-1}\tau}, b_{\sigma^{-1}\tau}) & \text{si } \sigma^{-1}\tau \in \Phi \\ (b_{c\sigma^{-1}\tau}, a_{c\sigma^{-1}\tau}) & \text{si } \sigma^{-1}\tau \notin \Phi \end{cases}$$

La lettre c désignant la conjugaison complexe. Le groupe $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ est alors le stabilisateur de $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Phi}$ pour cette action.

Exemple 1.1.1. — Notons F^Φ le corps reflex de (F, Φ) défini par l'égalité

$$\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|F^\Phi) = \{\tau \in \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \mid \tau\Phi = \Phi\}$$

Supposons qu'il existe $\tau_0 \in \Phi$ tel que $q_{\tau_0} \neq 0$ et $\forall\, \tau \neq \tau_0$ $(p_\tau, q_\tau) = (n, 0)$. Supposons de plus que $p_{\tau_0} \neq n/2$. Le corps E est alors le composé $F^\Phi \tau_0(F)$. C'est par exemple le cas de l'article [**14**] dans lequel $(p_{\tau_0}, q_{\tau_0}) = (1, n-1)$. Par contre dans [**34**], $(p_{\tau_0}, q_{\tau_0}) = (1, n-1)$ tandis que $\forall\, \tau \neq \tau_0$ $(p_\tau, q_\tau) = (0, n)$. On a encore dans dans ce cas-là $E = F^\Phi \tau_0(F)$.

Notons F^+ le sous-corps totalement réel maximal de F. Afin de simplifier les notations nous supposerons désormais dans toute la suite que F est de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}|\mathbb{Q}$ est une extension quadratique imaginaire et que le type C.M. Φ est induit à partir d'un type C.M. de $\mathcal{K}$. Le corps reflex de (F, Φ) est alors $\mathcal{K}$. Par exemple, sous cette hypothèse, dans l'exemple précédent $E = \tau_0(F)$ ce qui est le cas de [**34**].

1.1.2. Le cas (C). — Considérons maintenant le cas où F est un corps totalement réel. Sur F l'involution $*$ est triviale. Dans ce cas-là, G_1 est soit une forme d'un produit de groupes symplectiques, soit une forme de produits de groupes orthogonaux suivant que $B_{\mathbb{R}}$ est un produit d'algèbres $M_{2n}(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{H})$ (cas (C) et (D) de [**51**] respectivement). Nous ne considérerons que le premier cas. Alors,

$$G_{1/\mathbb{R}} \simeq \prod_{\tau:F\hookrightarrow\mathbb{R}} \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$$

où $\mathrm{Sp}_{2n} = \{g \in \mathrm{GL}_{2n} \mid {}^t gJg = J\}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Avec ces notations on peut supposer (quitte à conjuguer) que

$$h(a+ib) = \prod_{\tau:F\hookrightarrow\mathbb{R}} \begin{pmatrix} aI_n & -bI_n \\ bI_n & aI_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu(z) = \prod_{\tau:F:\hookrightarrow\mathbb{R}} \begin{pmatrix} zI_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

1.1.3. Variétés de Shimura sur E. — A la donnée $\mathcal{D}$ est associée une tour $(\mathrm{Sh}_K)_K$, pour des sous-groupes compacts ouverts K de $G(\mathbf{A}_f)$ suffisamment petits, de variétés quasi-projectives lisses sur E classifiant les quadruplets $(A, \lambda, \iota, \overline{\eta})$ où :

- A est un schéma abélien à isogénie près
- λ est une polarisation $\mathbb{Q}^\times$-homogène de A. Cette dernière condition signifie que pour toute fonction α définie sur le schéma de base du schéma abélien, à valeurs dans $\mathbb{Q}^\times$ et constante sur chaque composante connexe, λ est considérée comme étant équivalente à $\alpha\lambda$.
- $\iota : B \to \mathrm{End}(A)_{\mathbb{Q}}$ est un morphisme d'algèbres tel que $*$ corresponde à l'involution de Rosati associée à λ. Cela signifie que si $\dagger$ désigne l'involution de Rosati $\forall b \in B$, $\iota(b^*) = \iota(b)^\dagger$. Une condition équivalente est de dire que λ induit un morphisme de variétés abéliennes munies d'une action de B par quasi-isogénies entre (A, ι) et $(A^\vee, \iota \circ *)$.
- $\eta : V \otimes \mathbf{A}_f \to H_1(A, \mathbf{A}_f)[K]$ est un isomorphisme de $B \otimes \mathbf{A}_f$-modules symplectiques définissant une structure de niveau K sur le module de Tate de A. Cet isomorphisme est défini à une constante de $\mathbf{A}_f^\times$ près puisqu'il faut fixer un isomorphisme $\mathbf{A}_f(1)^\times \simeq \mathbf{A}_f^\times$.
- La condition suivante est vérifiée (condition de Kottwitz) :

$$\forall b \in B \quad \det(b; \mathrm{Lie}(A)) = \det(b; V_0).$$

Cette condition est l'analogue algébrique de la condition topologique : $\forall h' \in X$, h' est conjugué à h. Sur $\mathbb{C}$ elle revient à fixer une composante connexe dans l'espace des structures de Hodge munies d'une action d'un corps C.M. en fixant la signature.

Exemple 1.1.2. — Plaçons nous dans le cas (A) de la section 1.1.1. L'action de F sur $\mathrm{Lie}(A)$ permet de décomposer

$$\mathrm{Lie}(A)_{\overline{\mathbb{Q}}} = \bigoplus_{\tau \in \mathrm{Hom}(F,\overline{\mathbb{Q}})} \mathrm{Lie}(A)_\tau$$

où F agit sur $\mathrm{Lie}(A)_\tau$ via τ. La condition de Kottwitz se récrit alors dans ce cadre sous la forme (en utilisant le lemme I.6.1. de [**34**] par exemple) :

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \Phi \quad \mathrm{Lie}(A)_\tau &\quad \text{est localement libre de rang } p_\tau [B:F]^{1/2} \\ \text{et} \quad \mathrm{Lie}(A)_{c\tau} &\quad \text{est localement libre de rang } q_\tau [B:F]^{1/2} \end{aligned}$$

Exemple 1.1.3. — Dans le cas (A) lorsque $B = F$ est une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, $*$ est la conjugaison complexe, $V = F^3$, $\forall X, Y \in F^3$ $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(\beta\, {}^t X^* J Y)$ où $\beta \in F$, $\beta^* = -\beta$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec comme morphisme h défini par $h(z) = \mathrm{diag}(z, \overline{z}, z)$, la variété de Shimura associée est la variété modulaire de Picard et l'espace X est union disjointe de deux boules ouvertes unité dans $\mathbb{C}^2$.

Exemple 1.1.4. — Dans le cas (A) lorsque B est une algèbre à division sur F et que la signature est de la forme $(1, n-1) \times (0, n) \times \cdots \times (0, n)$ on retrouve les variétés de Shimura utilisées dans [**34**].

Exemple 1.1.5. — Dans le cas (C) avec $B = F = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^{2n}$, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est un produit symplectique non-dégénéré sur V on retrouve les variétés modulaires de Siegel.

Dans le cas (C) lorsque $2n = 2$, $B = F$, $V = F^2$, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est un produit symplectique non-dégénéré on retrouve les variétés modulaires de Hilbert (telles qu'elles sont définies « classiquement » les variétés modulaires de Hilbert sont plutôt les variétés de Shimura connexes associées). Le groupe associé est $G = \{g \in \mathrm{GL}_2(F) \mid \det(g) \in \mathbb{Q}^\times\}$.

Remarque 1.1.6. — Si v est une place de $\mathbb{Q}$ en laquelle $G_{/\mathbb{Q}_v}$ est non-ramifié et K de la forme $K_v K^v$ avec K_v hyperspécial alors dans la définition modulaire de $\mathrm{Sh}_{K_v K^v}$ on peut remplacer « à isogénie près » par « à isogénie première à p près » quitte à mettre des structures de niveau hors v uniquement. C'est ce que l'on fait classiquement pour les courbes modulaires pour lesquelles on s'intéresse à des courbes elliptiques à isomorphisme près, $\mathbf{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ étant non-ramifié en toutes les places finies.

La tour de variétés $(\mathrm{Sh}_K)_K$ est munie d'une action de $G(\mathbf{A}_f)$ par action des opérateurs de Hecke sur la structure de niveau $\overline{\eta}$.

La variété de Shimura Sh_K n'est pas en général associée à la donnée de Shimura (G, X). On a en fait la décomposition suivante définie sur E ([**51**] section 8) :

$$\mathrm{Sh}_K = \coprod_{ker^1(\mathbb{Q},G)} \mathrm{Sh}_K(G', X)$$

où G' parcourt des formes intérieures de G isomorphes à G partout localement, et où $\mathrm{Sh}_K(G', X)$ désigne le modèle canonique sur E de la variété de Shimura associée à la donnée de Shimura (G', X). Plus précisément, si $x \in \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ est associé à $(A, \lambda, \iota, \overline{\eta})$, x appartient à la composante indexée par la classe du G-torseur localement trivial

$$Isom_{\text{B-mod.symp.}}(V, H_1(A, \mathbb{Q}))$$

et G' est le groupe des similitudes unitaires associé au B-module symplectique $H_1(A, \mathbb{Q})$.

On remarque ([**51**] chapitre 7) que dans le cas (C) et dans le cas (A) avec n pair, G vérifie le principe de Hasse, c'est-à-dire que $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ est réduit à un seul élément. Dans ces deux cas les variétés Sh_K sont donc des variétés de Shimura associées à la donnée de Shimura (G, X). Il est également démontré dans la section 7 de [**51**] que dans le cas (A) avec n impair l'application $\ker^1(\mathbb{Q}, Z_G) \to \ker^1(\mathbb{Q}, G)$ est surjective. Dans ce cas, tous les groupes G' sont donc en fait isomorphes à G, et les variétés Sh_K sont donc une union finie de copies d'un modèle canonique de la variété de Shimura associée à la donnée (G, X) ([**16, 60**]).

1.1.4. Uniformisation complexe. — Le modèle canonique $\mathrm{Sh}(G, X)$ vérifie

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) \simeq G(\mathbb{Q})\backslash (X \times G(\mathbf{A}_f)/K)$$

Le lien entre cette uniformisation complexe et la description modulaire précédente est le suivant. Soit $x = (A, \lambda, \iota, \overline{\eta}) \in \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ que l'on suppose, pour simplifier, dans la composante indexée par la classe du G-torseur trivial dans $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$. Fixons donc un isomorphisme de B-modules symplectiques $V \simeq H_1(A, \mathbb{Q})$. Celui-ci induit un isomorphisme canonique $V \otimes \mathbf{A}_f \simeq H_1(A, \mathbf{A}_f)$ qui comparé à la structure de niveau K, $\overline{\eta} : V \otimes \mathbf{A}_f \simeq H_1(A, \mathbf{A}_f)[K]$, fournit une structure de niveau $K : V \otimes \mathbf{A}_f \simeq V \otimes \mathbf{A}_f[K]$, c'est-à-dire un élément de $G(\mathbf{A}_f)/K$. Quant à l'isomorphisme $V \otimes \mathbb{R} \simeq H_1(A, \mathbb{R})$ il induit une $\mathbb{R}$-structure de Hodge polarisée de poids $((-1, 0), (0, -1))$ munie d'une action de $B \otimes \mathbb{R}$ sur $V \otimes \mathbb{R}$ par image réciproque de celle sur $H_1(A, \mathbb{R})$. D'où un morphisme $h_x : \mathbb{S} \to G(\mathbb{R})$ qui, grâce à la condition de Kottwitz (dans le cas (A) cela revient à fixer l'action du corps C.M. sur $H_1(A, \mathbb{C})/\mathrm{Fil}^{-1} H_1(A, \mathbb{C})$), est conjugué dans $G(\mathbb{R})$ à l'élément h fournit par la donnée de Shimura et donne donc un élément de X. On obtient donc pour chaque isomorphisme de B-modules symplectiques $V \simeq H_1(A, \mathbb{Q})$ un élément de $X \times G(\mathbf{A}_f)/K$ qui une fois passé à la classe dans $G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbf{A}_f)/K)$ ne dépend plus de ce choix d'isomorphisme. On vérifie que cela donne bien une bijection au niveau des points en utilisant l'équivalence (de Riemann) de catégories $A \mapsto H_1(A, \mathbb{Q})$ entre $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisées de poids $((-1,0),(0,-1))$ et variétés abéliennes polarisées sur $\mathbb{C}$ à isogénie près.

Cet argument démontre qu'il existe une bijection entre les deux ensembles ci-dessus mais ne démontre pas qu'il s'agit d'un isomorphisme de variétés analytiques complexes entre $\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{an}}$ et $G(\mathbb{Q})\backslash (X \times G(\mathbf{A}_f)/K)$. Voici des arguments qui permettent de montrer que c'est le cas :

• Tout d'abord l'espace X admet l'interprétation modulaire suivante : il représente le foncteur défini sur la catégorie des espaces analytiques complexes lisses qui à un espace analytique $\mathfrak{X}$ associe les $(\mathcal{F}, \mathrm{Fil}^{-1}(\mathcal{F}_\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_\mathfrak{X}), \psi, \iota, \rho)$ où

– $(\mathcal{F}, \mathrm{Fil}^{-1}(\mathcal{F}_\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_\mathfrak{X}))$ est une variation de $\mathbb{R}$-structures de Hodge de poids $((-1,0),(0,-1))$. Cela signifie que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-système local, $\mathrm{Fil}^{-1}(\mathcal{F}_\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_\mathfrak{X})$ un sous fibré holomorphe du fibré complexe associé à $\mathcal{F}$ qui définit en chaque point $x \in \mathfrak{X}$ une $\mathbb{R}$-structure de Hodge $(\mathcal{F}_x, \mathrm{Fil}^{-1}\mathcal{F}_{\mathbb{C},x})$ (la condition de transversalité de Griffiths est vide ici)

– $\iota : B \otimes \mathbb{R} \to \mathrm{End}((\mathcal{F}, \mathrm{Fil}^{-1}(\mathcal{F}_\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_\mathfrak{X})))$ est une action de $B \otimes \mathbb{R}$ sur la variation précédente

– $\psi : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \to \mathbb{R}(-1)$ est une polarisation de la variation précédente telle que l'involution de Rosati associée induise $*$ sur B via ι

– Pour tout $x \in \mathfrak{X}$ l'action de $B \otimes \mathbb{R}$ sur $\mathcal{F}_{\mathbb{C},x}/\mathrm{Fil}^{-1}\mathcal{F}_{\mathbb{C},x}$ satisfait la condition de Kottwitz

– $\rho : \underline{V} \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ est une rigidification, c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathbb{R}$-systèmes locaux compatible à l'action de $B \otimes \mathbb{R}$, à ψ et $\langle \bullet, \bullet \rangle$

En effet, une telle variation de structure de Hodge sur $\mathfrak{X}$ donne une application $\mathfrak{X} \ni x \mapsto \rho^* h_x$ où $h_x : \mathbb{S} \to GU(\mathcal{F}_x, \iota_x, \psi_x)$ (GU=groupe de similitudes unitaires) désigne le morphisme définissant la structure de Hodge munies de ses structures additionnelles sur $\mathcal{F}_x$. La condition de Kottwitz implique que $\rho^* h_x$ est conjugué à h et défini donc un élément de X. D'où une application $\mathfrak{X} \to X$.

Celle-ci est holomorphe car la structure complexe sur X est celle induite par le plongement des périodes $X \hookrightarrow \check{X} = G(\mathbb{C})/P_{\mu_h}(\mathbb{C})$ (P_{μ_h} est le sous-groupe parabolique de $G_\mathbb{C}$ associé à μ_h) et l'application des périodes $h_x \mapsto \rho^* \mu_{h_x} \in \check{X}$ est holomorphe.

• Le second argument consiste à remarquer que $\mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}$ est un schéma lisse sur $\mathbb{C}$ comme il résulte de la théorie de la déformation des schémas abéliens en caractéristique 0 (celle de Grothendieck) et du fait qu'étant en caractéristique 0 le module de Tate des schémas abéliens est étale en tous les premiers de $\mathbb{Q}$ et que donc il n'y a pas d'obstruction à déformer les structures de niveau.

• Définissons une application holomorphe

$$\Xi : \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \longrightarrow G(\mathbb{Q})\backslash (X \times G(\mathbf{A}_f)/K)$$

Notons $(\mathcal{A}, \lambda, \iota, \overline{\eta})$ le quadruplet universel au-dessus de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}$ et $\pi : \mathcal{A} \to \mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}$. Soit U un ouvert de $\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{an}}$ au-dessus duquel le système local

$R^1\pi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{Q}$ est trivial et fixons un isomorphisme de B-modules symplectiques $\rho : V \xrightarrow{\sim} (R^1\pi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{Q})^\vee_{|U}$ (ce qui est possible puisque l'on est dans la composante de Sh_K indexée par la classe triviale dans $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$). D'après la définition modulaire de X donnée précédemment, la variation de structure de Hodge $((R^1\pi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{R})_U^\vee, (R^1\pi_*^{\mathrm{an}}\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{an}})^\vee)$ munie de ses structures additionnelles fournies par λ et ι couplée à la rigidification $\rho_{\mathbb{R}}$ donne un morphisme $U \to X$. Quant à $\overline{\eta}$ elle définit via ρ un morphisme $U \to G(\mathbf{A}_f)/K$, d'où un morphisme

$$U \longrightarrow X \times G(\mathbf{A}_f)/K$$

Remarquons maintenant qu'après passage au quotient par $G(\mathbb{Q})$ à gauche ces applications se recollent pour des U et des choix de rigidifications ρ différents puisque l'action de la monodromie sur $R^1\pi_*\mathbb{Q}$ se fait à travers $G(\mathbb{Q})$ (utiliser également que dans la définition d'une structure de niveau K l'action de la monodromie sur le module de Tate se fait à travers K).

• Le morphisme Ξ ainsi construit est holomorphe bijectif au niveau des points. Il reste donc à voir qu'il est biholomorphe. Il suffit de voir que l'application tangente est bijective ce qui résulte de la description de l'espace tangent à Sh_K en un point à valeurs dans $\mathbb{C}$ en termes de théorie de la déformation de Grothendieck des schémas abéliens et de celle de l'espace tangent à X (en termes de la théorie de la déformation de Kodaira-Spencer).

On pourra également consulter la section 4.4 de **[15]** ainsi que **[27]**.

1.1.5. Systèmes locaux. — Soit ℓ un nombre premier différent de p. Fixons une fois pour toute un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Soit ρ une représentation algébrique complexe de G. Le morphisme ρ définit alors via ι un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-système local étale équivariant $\mathcal{L}_\rho$ sur la tour $(\mathrm{Sh}_K)_{K\subset G(\mathbf{A}_f)}$.

La variété Sh_K est munie d'un pro-revêtement étale $(\mathrm{Sh}_{K'} \to \mathrm{Sh}_K)_{K'\lhd K}$ de groupe K. Composant l'application de projection $K \to G(\mathbb{Q}_\ell)$ avec la représentation $\rho : G(\mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow G(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{\iota\rho} \mathrm{GL}(V_{\iota\rho})$ on obtient une représentation continue $K \to \mathrm{GL}(V_{\iota\rho})$. Le système local $\mathcal{L}_\rho$ est celui associé à cette représentation.

Le morphisme ρ définit également un fibré holomorphe plat d'espace total

$$G(\mathbb{Q})\backslash (X \times V_\rho \times G(\mathbf{A}_f)/K) \longrightarrow G(\mathbb{Q})\backslash (X \times G(\mathbf{A}_f)/K)) = \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$$

Notons $\widetilde{\mathcal{L}}_\rho$ le système local complexe associé sur $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$. Si $x \in \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ le groupe fondamental topologique $\pi_1(\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}), x)$ s'identifie à un sous groupe arithmétique Γ de $G(\mathbb{Q})$ et $\widetilde{\mathcal{L}}_\rho$ est associé à la représentation $\Gamma \hookrightarrow G(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\rho} \mathbf{GL}(V_\rho)$. Considérons le système local topologique de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espaces vectoriels $\widetilde{\mathcal{L}}_\rho^\iota$ associé via ι. Il existe alors une extension de degré finie L de $\mathbb{Q}_\ell$ et un système local topologique de $\mathcal{O}_L$-espaces vectoriels $\mathcal{M}$ tel que $\widetilde{\mathcal{L}}_\rho^\iota = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_L} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ (cela résulte de l'arithméticité des groupes fondamentaux Γ précédents). Alors, dans la catégorie des faisceaux toplogiques, $\mathcal{M} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}/\varpi_L^n\mathcal{M}$ et en fait le système local ℓ-adique $\mathcal{L}_\rho$ est de la forme

$\mathcal{L}_\rho = (\mathcal{N}_n)_{n\in\mathbb{N}} \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ où

$$(\mathcal{M}/\varpi_L^n\mathcal{M})_{n\in\mathbb{N}} = (\mathcal{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\mathrm{an}}$$

où $^{\mathrm{an}}$ désigne le pull-back du site étale vers le site analytique. Le théorème de comparaison entre cohomologie analytique et étale pour les coefficients de torsion montre alors que la cohomologie de $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\widetilde{\mathcal{L}_\rho}$ twistée par ι est isomorphe à celle de $\mathcal{L}_\rho$.

Nous écrirons donc dans la suite $\mathcal{L}_\rho$ pour $\widetilde{\mathcal{L}_\rho}$.

Exemple 1.1.7. — Soit ρ la représentation standard de G sur V (l'espace de la donnée $\mathcal{D}$). Alors, si $\pi : \mathcal{A} \to \mathrm{Sh}_K(G,X)$ désigne le schéma abélien universel

$$\mathcal{L}_\rho = \left(R^1\pi_*\mathbb{Q}_\ell\right)^\vee(1)$$

En général $\mathcal{L}_\rho$ est facteur direct dans des images directes de produits $\mathcal{A}\times\cdots\times\mathcal{A} \to \mathrm{Sh}_K(G,X)$.

1.2. Modèles entiers

1.2.1. Hypothèse de non ramification. — Fixons un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ et notons E_ν le complété de E correspondant. Soit $\mathcal{O}_B$ un $\mathbb{Z}_{(p)}$ ordre dans B stable par $*$ et tel que $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ soit un ordre maximal dans $B_{\mathbb{Q}_p}$. Nous supposerons (*cf.* [**51**]) :

- $B_{\mathbb{Q}_p}$ est un produit d'algèbres de matrices sur des extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$, c'est-à-dire : B est déployée en toutes les places de F divisant p et F est non ramifié en toutes les places de F divisant p
- Afin de s'assurer que $G_{\mathbb{Q}_p}$ est quasidéployé nous supposerons qu'il existe un réseau autodual Λ_0 dans $V_{\mathbb{Q}_p}$

Sous ces hypothèses le groupe $G_{\mathbb{Q}_p}$ est non ramifié.

1.2.2. Modèles. — Sous les hypothèses précédentes Kottwitz construit dans [**51**] une tour $(S_{K^p})_{K^p}$ de variétés quasiprojectives lisses sur $\mathcal{O}_{E_\nu}$ indexée par des sous-groupes compacts ouverts suffisamment petits $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)$. Cette tour est munie d'une action de $G(\mathbf{A}_f^p)$. Le schéma S_{K^p} est défini comme l'espace de modules des quadruplets $(A, \lambda, \iota, \overline{\eta^p})$ où :

- A est un schéma abélien défini à une isogénie première à p près
- λ est une polarisation première à p et $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ homogène. Cela signifie que si α est une fonction définie sur le schéma de base sur lequel est défini A, à valeurs dans $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ et localement constante, alors λ est considérée comme étant équivalente à $\alpha\lambda$.
- $\iota : \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ est un morphisme d'algèbres transformant l'involution $*$ sur $\mathcal{O}_B$ en l'involution de Rosati associée à λ sur $\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$
- $\eta^p : V\otimes\mathbf{A}_f^p \to H_1(A, \mathbf{A}_f^p)[K^p]$ est un isomorphisme de $B\otimes\mathbf{A}_f^p$-modules symplectiques définissant une structure de niveau K^p au sens de la définition 2.5.5 de [**51**]. Cet isomorphisme est pris à un élément de $\mathbf{A}_f^{p\times}$ près.

• La condition de Kottwitz est vérifiée : il y a une égalité de fonctions polynomiales en $b \in B$ $\det(b; \mathrm{Lie}(A)) = \det(b; V_0)$.

Le groupe $G(\mathbf{A}_f^p)$ opère sur la tour $(S_{K^p})_{K^p}$ par action sur $\overline{\eta^p}$.

Soit $\Lambda_0 \subset V_{\mathbb{Q}_p}$ un réseau autodual. Soit $C_0 = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda_0)$ le sous-groupe compact hyperspécial associé. Il y a alors des isomorphismes compatibles pour K^p variant

$$S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_\nu}} E_\nu \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_{C_0 K^p} \otimes_E E_\nu$$

déduits du lemme 7.2 de [**51**]. Ces isomorphismes dépendent du choix de Λ_0 et sont $G(\mathbf{A}_f^p)$-équivariants.

Les systèmes locaux équivariants $\mathcal{L}_\rho$ définis précédemment sont en fait définis sur ces modèles entiers. Cela découle de ce que si $K^p = K_\ell K^{\ell p}$ alors le pro-revêtement $(\mathrm{Sh}_{C_0 K' K^{\ell p}} \to \mathrm{Sh}_{C_0 K_\ell K^{\ell p}})_{K' \lhd K_\ell}$ s'étend en le pro-revêtement $(S_{K' K^{\ell p}} \to S_{K_\ell K^{\ell p}})_{K' \lhd K_\ell}$.

1.2.3. Structure de $G(\mathbb{Q}_p)$: notations

1.2.3.1. Cas (A). — On se place dans le cadre de la section 1.1.1. Tout élément $\tau \in \Phi$ fournit un plongement $\nu \circ \tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$.

Cas (AL). — Supposons p décomposé dans $\mathcal{K}$. Soient $(w_i)_{i \in I}$ les places de F divisant p associées à tous ces plongements lorsque τ parcourt Φ. L'algèbre semi-simple $B_{\mathbb{Q}_p}$ est de la forme $\prod_i \big(M_d(F_{w_i}) \times M_d(F_{w_i^c})^{\mathrm{opp}}\big)$ puisque $*$ induit un isomorphisme $M_d(F_{w_i}) \xrightarrow{\sim} M_d(F_{w_i^c})$. On a alors,

$$G_{\mathbb{Q}_p} = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}_n(F_{w_i}) \times \mathbb{Q}_p^\times$$

où $\mathrm{GL}_n(F_{w_i})$ désigne la restriction des scalaires de F_{w_i} à $\mathbb{Q}_p$ de GL_n.

L'équivalence de Morita permet de supposer qu'en chaque place w_i on est dans le cas suivant : $B_{\mathbb{Q}_p} = F_{w_i} \times F_{w_i}$, $\mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{F_{w_i}} \times \mathcal{O}_{F_{w_i}}$, $(x,y)^* = (y,x)$, $V_{\mathbb{Q}_p} = V_i \oplus V_i^\vee$, $\langle x \oplus \varphi, x' \oplus \varphi' \rangle = \varphi'(x) - \varphi(x')$, un réseau autodual étant alors de la forme $\Lambda_0 = \Lambda \oplus \Lambda^\vee$ où Λ est un réseau de V_i.

Cas (AU). — Supposons p inerte dans $\mathcal{K}$. Nous noterons alors $(w_j)_{j \in J}$ les places de F divisant p. Les extensions $F_{w_j} | \mathbb{Q}_p$ sont alors non-ramifiées de degré pair et

$$G_{\mathbb{Q}_p} = G\Big(\prod_{j \in J} GU(F_{w_j}; n)\Big)$$

où $GU(F_{w_j}; n)$ est la forme intérieure quasidéployée du groupe des similitudes unitaires en n variables sur F_{w_j} vu comme groupe sur $\mathbb{Q}_p$ (plus précisément, il s'agit du sous-groupe de la restriction des scalaires de F_{w_j} à $\mathbb{Q}_p$ du groupe des similitudes unitaires sur F_{w_j} ayant un facteur de similitude dans $\mathbb{Q}_p^\times$) et où le G devant le produit signifie que l'on prend le sous-groupe du produit formé des uplets ayant même facteur de similitude.

L'équivalence de Morita permet alors de se ramener en chaque place w_j au cas suivant : $B_{\mathbb{Q}_p} = F_{w_j}$, l'involution $*$ est égale à $\sigma^{[F_{w_j}:\mathbb{Q}_p]/2}$ où σ est le Frobenius de l'extension non-ramifiée $F_{w_j}|\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{F_{w_j}}$, dans une base convenable de V_j identifié à $F_{w_j}^n$:

$$\forall X, Y \in F_{w_j}^n \quad \langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}_{F_{w_j}/\mathbb{Q}_p}(\alpha^t X^* JY)$$

où $\alpha \in F_{w_j}^{\times}$ est tel que $\alpha^* = -\alpha$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$$

si n est pair et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{(n-1)/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ I_{(n-1)/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si n est impair.

Un réseau autodual dans le cas où n est pair est alors donné par $\Lambda_0 = \Lambda^{(1)} \oplus \Lambda^{(2)}$ où $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$ sont deux sous-$\mathcal{O}_{F_{w_j}}$-modules totalement isotropes tels que l'accouplement $\Lambda^{(1)} \times \Lambda^{(2)} \xrightarrow{\langle \bullet, \bullet \rangle} \mathbb{Z}_p$ soit parfait.

Dans le cas où n est impair, on peut prendre comme réseau autodual $\Lambda_0 = \Lambda^{(1)} \oplus \mathcal{O}_{F_{w_j}}.\varepsilon \oplus \Lambda^{(2)}$ où $\Lambda^{(1)}$ et $\Lambda^{(2)}$ sont comme précédemment et $\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = 0$.

Cas (C). — Soient $(w_j)_{j \in J}$ les places de F divisant p. Comme dans le cas (AU) $G_{\mathbb{Q}_p}$ est isomorphe à un sous-groupe d'un produit indexé par J de groupes de similitudes symplectiques en $2n$-variables.

CHAPITRE 2
ESPACES DE RAPOPORT-ZINK

2.1. Isocristaux munis de structures additionnelles : le cas de GL_n

Nous donnons ici une description explicite pour le groupe linéaire de la classification des isocristaux munis de structures additionnelles donnée par Kottwitz dans [**47**] et [**52**]. Étant donné que nous avons essentiellement en vue comme application de cet article le cas de GL_n nous n'avons pas inclu les autres cas.

Oublions momentanément les notations globales du chapitre précédent. Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension non ramifiée de degré d. Soit $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_n)$. Le groupe algébrique G se déploie sur F en

$$G_{/F} = \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_{n/F}$$

où le groupe $\Gamma = \boldsymbol{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ opère par permutations cycliques sur les facteurs en translatant par un élément de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Un tore maximal de G défini sur $\mathbb{Q}_p$ est $T = (F^\times)^n$. Un tore déployé maximal est $A = (\mathbb{Q}_p^\times)^n \hookrightarrow (F^\times)^n = T$. Le groupe de Weyl absolu est $W = (\mathfrak{S}_n)^d$.

Définition 2.1.1. — Le corps L est le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. L'automorphisme σ est le Frobenius de l'extension $L|\mathbb{Q}_p$.

Définition 2.1.2. — On appelle isocristal un L-espace vectoriel de dimension finie N muni d'une application bijective σ-linéaire $\varphi : N \to N$.

On appelle F-isocristal un L-espace vectoriel N muni d'une application bijective σ^d-linéaire $\varphi : N \to N$ (σ^d est le Frobenius géométrique de l'extension $L|F$).

Rappelons également que deux éléments $b_1, b_2 \in G(L)$ sont dits σ-conjugués s'il existe un g dans $G(L)$ tel que $b_1 = gb_2g^{-\sigma}$. Rappelons alors la définition

Définition 2.1.3 **([47])**. — L'ensemble $B(G)$ désigne l'ensemble des classes de σ-conjugaison dans $G(L)$.

L'ensemble $B(G)$ classifie les isocristaux munis d'une action de F. A la classe de σ-conjugaison de b est associée la classe d'isomorphisme de l'isocristal muni d'une action de F, $(F^n \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b \otimes \sigma)$. Il est bien connu que la catégorie des isocristaux munis d'une action de F est équivalente à la catégorie des F-isocristaux, ce qui se traduit dans le langage de Kottwitz par le lemme de Shapiro $B(G) \simeq B(\mathrm{GL}_{n/F})$ ([**47**]). Rappelons que dans cette correspondance si (N, φ) est muni d'une action de F alors on lui associe le F-isocristal (N_τ, φ^d) où $\tau : F \hookrightarrow L$ est fixé et $N_\tau = \{n \in N \mid \forall x \in F\ x.n = \tau(x)n\}$.

Un élément $b \in B(G)$ est donné par les pentes du F-isocristal associé

$$\lambda_1 = \frac{d_1}{h_1} > \cdots > \lambda_r = \frac{d_r}{h_r}$$

où $d_i \wedge h_i = 1$, et des multiplicités $m_1, \dots, m_r$ vérifiant $\sum_i m_i h_i = n$. Le point de Newton associé ([**47**]) est

$$\nu_b = (\underbrace{\frac{\lambda_1}{d}, \dots, \frac{\lambda_1}{d}}_{m_1 h_1}, \dots, \underbrace{\frac{\lambda_r}{d}, \dots, \frac{\lambda_r}{d}}_{m_r h_r}) \in X_*(A)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^n$$

(le dénominateur d provient du fait que les pentes d'un F-isocristal sont d fois les pentes de l'isocristal muni d'une action de F associé). Le centralisateur du morphisme des pentes ν_b est le sous-groupe de Levi

$$M_b = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_1 h_1}) \times \cdots \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_r h_r})$$

et b provient d'une classe basique de M_b, où l'on rappelle qu'une classe basique est une classe possédant une unique pente. Rappelons que l'on note J_b le groupe des automorphismes de l'isocristal muni de ses structures additionnelles. Dans le cas présent, la structure additionnelle consiste en l'action de F. Le groupe J_b est donc le groupe des automorphismes du F-isocristal associé :

$$J_b = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_1}(D_{\lambda_1})) \times \cdots \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_r}(D_{\lambda_r}))$$

où D_λ/F est une algèbre centrale simple sur F d'invariant λ.

Le groupe dérivé G^{der} étant simplement connexe, $X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) = X_*(D)_\Gamma = B(D)$ où $D = G/G^{\mathrm{der}}$ et $Z(\widehat{G})$ désigne le centre du L-groupe connexe. Or, le déterminant induit un isomorphisme de groupes $\det : G/G^{\mathrm{der}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\mathbb{G}_m$, et donc $B(D) = \mathbb{Z}$. On identifiera donc $X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$ à $\mathbb{Z}$. L'application de Kottwitz κ définie dans la section 6 de [**49**] (*cf.* également le théorème 1.15 de [**66**]) est alors

$$\begin{aligned} \kappa : B(G) &\longrightarrow \mathbb{Z} = X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) \\ b &\longmapsto v_p(\det(b)) \end{aligned}$$

et est telle que

$$\kappa(b) = \sum_{i=1}^r m_i d_i$$

qui est la dimension de l'isocristal ou encore le point terminal du polygone de Newton.

2.1.1. Polygone de Hodge. — Soit maintenant un cocaractère $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}_p}} \to G_{/\overline{\mathbb{Q}_p}}$. Étant donné un élément de $B(G)$, à chaque représentation linéaire de G est associé un isocristal filtré, la filtration étant définie par μ. Dans [**66**] et [**52**] est défini un sous-ensemble $B(G,\mu) \subset B(G)$ en termes de théorie des groupes réductifs. Cette ensemble s'interprète comme une version tannakienne de l'inégalité de Mazur sur les polygones de Hodge et Newton au sens où étant donné un élément de $B(G)$, à chaque représentation linéaire de G est associé un isocristal filtré, la filtration étant définie par μ. L'élément de $B(G)$ est dans $B(G,\mu)$ si et seulement si tous ces isocristaux filtrés sont tels que le polygone de Newton associé soit au-dessus de celui de Hodge et aient mêmes points terminaux.

Le cocaractère μ est défini sur F et définit un élément de

$$X_*(T)/W \simeq \{(x_{ij})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1\leqslant j\leqslant n} \mid x_{ij}\in\mathbb{Z}, \forall i\,\forall j\leqslant j' \quad x_{ij}\geqslant x_{ij'}\}$$

sur lequel le groupe de Galois Γ opère via $\sigma\cdot(x_{ij}) = (x_{i-1j})_{i,j}$. Nous supposerons μ minuscule donné, avec les notations ci-dessus, par $\mu = (\mu_{ij})_{i,j}$ où $\forall i\ \mu_{ij} = 1$ pour $1\leqslant j\leqslant a_i$ et $\mu_{ij} = 0$ si $j > a_i$, les a_i étant des entiers compris entre 1 et n. Le groupe de Galois $\Gamma = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ agit par permutation sur $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$, et le corps de définition de la classe de conjugaison de μ a pour groupe de Galois le stabilisateur de $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ dans $\Gamma = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Le L-groupe connexe de G est donné par

$$^LG^0 = \widehat{G} = \prod_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

et le L-groupe par $^LG = \widehat{G}\rtimes\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ agit par permutation cyclique des composantes. Au cocaractère μ de G, Kottwitz associe un caractère du centre du L-groupe connexe $Z(\widehat{G})$ défini par $\mu_1 = \widehat{\mu}_{|Z(\widehat{G})^\Gamma}\in\mathbb{Z}$ ([**52**] section 6.1), et donné avec nos notations par

$$\mu_1 = \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i$$

le point terminal du polygone de Hodge. De même ([**52**] section 6.1), Kottwitz définit μ_2 par

$$\begin{aligned} X_*(T)_\Gamma\otimes\mathbb{Q} &\simeq X_*(A)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n \\ \widehat{\mu}_{|\widehat{T}^\Gamma}\otimes 1 &\longmapsto \mu_2 \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes

$$\mu_2 = \frac{1}{d}\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\underbrace{1,\dots,1}_{a_i},0,\dots,0)$$

Kottwitz définit dans la section 6 de [**52**] le sous ensemble $B(G,\mu)$ de $B(G)$ formé des classes de σ-conjugaison vérifiant le théorème de Mazur sur la position relative des polygones de Newton et de Hodge tel qu'il généralisé dans [**66**]. D'après ce qui précède, dans notre cas particulier cet ensemble possède la description suivante (après avoir multiplié l'inégalité $\mathrm{Newt}(b)\leqslant\mu_2$ par d)

$$\begin{aligned} B(G,\mu) &= \{b\in B(G)\mid \mathrm{Newt}(b)\leqslant\mu_2\in X_*(A)_\mathbb{Q} \text{ et } \kappa(b)=\mu_1\} \\ &= \Big\{(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{m_1h_1},\dots,\underbrace{\lambda_r,\dots,\lambda_r}_{m_rh_r})\leqslant \textstyle\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(\underbrace{1,\dots,1}_{a_i},0,\dots,0) \\ &\qquad\qquad\qquad \text{et tels que } \textstyle\sum_{i=1}^r m_id_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i\Big\} \end{aligned}$$

où $\leqslant$ désigne l'ordre usuel sur la chambre de Weyl positive (section 2.1 de [**66**]). L'inégalité s'interprète comme « le polygone de Newton est au-dessus du polygone de

Hodge », et l'égalité comme « les points terminaux des polygones de Newton et de Hodge sont égaux ».

Rappelons qu'en effet, à une suite

$$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in X_*(A)_{\mathbb{Q}}/W = \{(y_i)_i \in \mathbb{Q}^n \mid \forall i\ y_i \geqslant y_{i+1}\}$$

on associe un polygone convexe à pentes rationnelles constantes sur les segments entiers $[i, i+1]$ $0 \leqslant i \leqslant n-1$ défini par

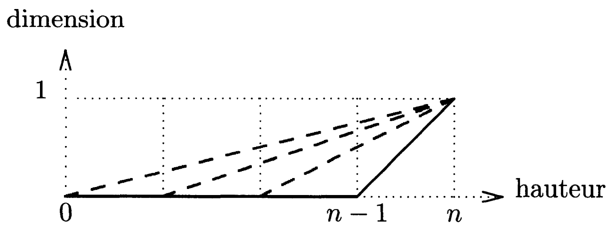
$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n \ \ P(k) = \sum_{r=1}^{k} x_{n+1-r}$$

Dans la description donnée ci-dessus de $B(G,\mu)$ (*i.e.* après multiplication par d des inégalités) les pentes du polygone de Hodge sont donc entières et les polygones de Newton possibles sont tous les polygones convexes à pentes rationnelles P vérifiant $P(0) = 0$, P à même point terminal que celui de Hodge, est au-dessus de celui-ci et a des points de rupture à coordonnées entières. Cette description permet de calculer « graphiquement » l'ensemble $B(G,\mu)$ pour un μ donné.

Exemple 2.1.4. — Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, et $b \in B(G)$, $b \in B(G,\mu)$ si et seulement si l'isocristal filtré $(L^n, b\sigma, \mu)$ vérifie la condition usuelle : le polygone de Hodge est en dessous du polygone de Newton et ils ont mêmes points terminaux.

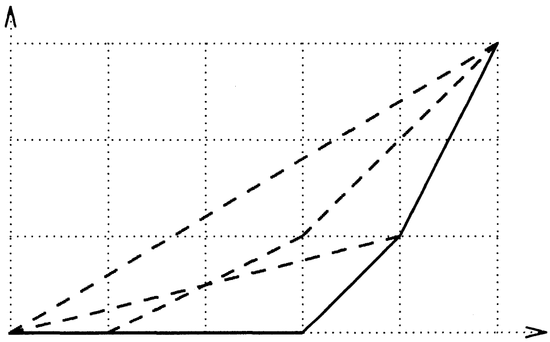
Pour un élément de $B(G)$, la condition d'appartenance à $B(G,\mu)$ généralise donc la condition sur les polygones de Newton et Hodge de l'isocristal filtré associé qui tient compte des structures additionnelles.

Exemple 2.1.5. — Dans le cas de signature $(1, n-1) \times (0, n) \times \cdots \times (0, n)$ étudié dans [**34**] les différents polygones possibles sont les suivants (Hodge est en trait plein)



On remarque en particulier que les polygones sont totalement ordonnés et qu'il n'y a que deux pentes dont l'une est toujours étale et l'autre « de dimension 1 ». Cette dernière propriété justifie l'adjectif « simple » associé aux variétés de Shimura utilisées dans [**34**].

Voici cependant un exemple de signature $(1,4) \times (2,3) \times (0,5) \times \cdots \times (0,5)$ qui montre qu'en général la situation est beaucoup plus compliquée (nous n'avons pas dessiné tous les polygones de Newton)



Le lecteur effrayé par une pente 2 associée un groupe p-divisible remarquera que les pentes de la classe d'isogénie associée sont les pentes du polygone ci-dessus divisées par d.

2.1.2. Classe basique dans $B(G,\mu)$. — Il existe une unique classe basique dans $B(G,\mu)$. Notons la b_0. Avec les notations précédentes celle-ci est donnée par l'unique pente

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i$$

Si la pente λ est égale à r/s, où $r \wedge s = 1$, alors la multiplicité de la pente est n/s, et l'on a

$$J_{b_0} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathrm{GL}_{\frac{n}{s}}(D_\lambda)$$

2.2. Donnée locale de Rapoport-Zink

2.2.1. Donnée de type E.L. non ramifiée simple. — Une donnée de type E.L. non ramifiée simple (F, V, b, μ) consiste en la donnée

- d'une extension finie non ramifiée F de $\mathbb{Q}_p$
- d'un F-espace vectoriel de dimension finie V
- d'une classe de σ-conjugaison $b \in B(G)$ où $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathrm{GL}(V)$
- d'une classe de conjugaison de cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}_p}} \to G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ du type de celles de la section 2.1.

On suppose que ces données sont reliées entre elles par la relation

$$b \in B(G,\mu)$$

Notons $I_F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ et $n = \dim_F V$. Le cocaractère μ est alors donné par des couples d'entiers

$$(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in I_F}$$

vérifiant $p_\tau + q_\tau = n$ (dans les notations de la section 2.1, ces couples d'entiers sont les $(a_i, n - a_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$).

Le corps reflex local associé E est le corps de définition de la classe de conjugaison de μ. Le groupe $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ opère par permutation sur I_F et $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E)$ est alors le stabilisateur dans $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ de (p_τ, q_τ).

2.2.2. Donnée de type P.E.L. unitaire non ramifiée simple. — Une donnée de type P.E.L. unitaire non ramifiée simple $(F, *, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, b, \mu)$ consiste en la donnée

- d'une extension finie non ramifiée F de $\mathbb{Q}_p$ munie d'une involution non triviale $*$
- d'un F-espace vectoriel de dimension finie V
- d'un produit hermitien symplectique $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{Q}_p$ qui est tel qu'il existe un réseau autodual dans V pour ce produit symplectique
- si G désigne le groupe des similitudes unitaires associé, d'une classe de σ-conjugaison $b \in B(G)$
- d'une classe de conjugaison de cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}_p}} \to G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$

On suppose que ces données sont reliées entre elles par la relation

$$c \circ \mu(z) = z$$

où c désigne le facteur de similitude, et

$$b \in B(G, \mu)$$

La donnée d'un tel μ est équivalente à la donnée de couples d'entiers

$$(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in I_F}$$

vérifiant $p_\tau + q_\tau = n$ et $(p_{\tau *}, q_{\tau *}) = (q_\tau, p_\tau)$. Le corps reflex associé se décrit comme précédemment.

2.2.3. Donnée de type P.E.L. symplectique non ramifiée simple. — Elle consiste en la donnée $(F, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, b, \mu)$ vérifiant des conditions analogues à celles du cas unitaire. Le groupe G est alors le groupe des similitudes symplectiques.

2.3. Espaces de Rapoport-Zink associés

Nous récrivons la définition 3.21 de [**68**] dans nos cas non ramifiés. On remarquera en particulier la similarité avec la définition modulaire de l'espace symétrique X donnée dans la section 1.1.4 (que nous avons volontairement formulée avec une rigidification ρ afin de la rapprocher de celle des espaces de Rapoport-Zink). En fait l'analogue de la définition de X en p serait plutôt la définition qui suit à laquelle on aurait appliqué le foncteur algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle qui à un groupe p-divisible associe un module localement libre filtré (*cf.* les espaces de périodes de [**68**]).

Notons $\breve{E} = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de E. Nous noterons $\overline{k} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p$ le corps résiduel de $\breve{E}$.

2.3.1. Cas E.L. non ramifié

Définition 2.3.1. — Soit (F, V, b, μ) une donnée locale de type E.L. non ramifiée simple. Soit $\mathbb{X}$ un groupe p-divisible sur $\overline{k}$ muni d'une action de $\mathcal{O}_F$ et d'isocristal covariant muni de son action de F isomorphe à $(V_L, b\sigma)$ (l'existence d'un tel $\mathbb{X}$ résulte de résultats récents de Kottwitz et Rapoport ([**53**]). Nous noterons $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ l'espace de Rapoport-Zink associé. C'est l'espace de modules de groupes p-divisibles munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, X défini sur une base S sur laquelle p est localement nilpotent, munis d'une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$

$$\rho : \mathbb{X} \times_{\overline{k}} (S \bmod p) \longrightarrow X \mathrm{mod}\ p$$

et vérifiant la condition : si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau \in I_F} \mathrm{Lie}(X)_\tau$$

est la décomposition de $\mathrm{Lie}(X)$ suivant l'action de $\mathcal{O}_F$ alors, $\forall \tau \in I_F$ $\mathrm{Lie}(X)_\tau$ est localement libre de rang p_τ.

Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ est localement formellement de type fini sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ ce qui signifie que localement $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ est de la forme

$$\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle[[X_1, \ldots, X_m]]/I)$$

pour un idéal I.

Il résulte de la théorie de Grothendieck-Messing que $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ est formellement lisse sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$. Au dessus d'un point point fermé x de sa fibre spéciale cela se traduit de la façon suivante : le complété formel $\widehat{\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)}_{/\{x\}}$ s'identifie à l'espace de déformations par isomorphismes du groupe p-divisible X_x^{univ}muni de son action de $\mathcal{O}_F$ (X^{univ} désignant le groupe p-divisible universel sur $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$), et il résulte de la théorie de Grothendieck Messing que cet espace de déformations est isomorphe au complété formel d'une certaine grassmannienne (les fameux modèles locaux de [**68**] (définition 3.27)) en un point :

$$\widehat{\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)}_{/\{x\}} \simeq \boldsymbol{Spf}\left(\mathcal{O}_{\breve{E}}[[X_1, \ldots, X_{\sum_\tau p_\tau q_\tau}]]\right)$$

Plus précisément, si $E(X^{\mathrm{univ}})$ désigne l'extension vectorielle universelle de X^{univ} ([**59**]) il y a une suite exacte de $\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}}$-modules localement libres

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}D})^\vee \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}}) \longrightarrow \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}}) \longrightarrow 0$$

et $\mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}}) = \bigoplus_{\tau : F \to \overline{\mathbb{Q}_p}} \mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}})_\tau$. Cette suite exacte est somme directe de suites

$$0 \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}\, D})_\tau^\vee}_{\text{loc. libre de rg. } q_\tau} \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}})_\tau \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_\tau}_{\text{loc. libre de rg. } p_\tau} \longrightarrow 0$$

La théorie de la déformation de Grothendieck-Messing fournit un isomorphisme

$$\left(\Omega^1_{\breve{\mathcal{M}}/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})}\right)^\vee \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\tau \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_\tau \otimes \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}\,D})_\tau$$

Cet isomorphisme est donné par la connexion de Gauss-Manin (il s'agit d'une classe de Kodaira-Spencer généralisée)

$$\nabla : \mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}}) \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}}} \Omega^1_{\breve{\mathcal{M}}/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})}$$

où $\nabla = \oplus_\tau \nabla_\tau$ et les suites exactes ci-dessus. Ici ∇ est induit par un isomorphisme

$$f : \mathrm{pr}_2^* \widehat{E}(X^{\mathrm{univ}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_1^* \widehat{E}(X^{\mathrm{univ}})$$

où

$$\begin{tikzcd} & \Delta^{(2)}_{\breve{\mathcal{M}}} \arrow[r, hook] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \breve{\mathcal{M}} \times_{\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})} \breve{\mathcal{M}} \\ \breve{\mathcal{M}} & & \breve{\mathcal{M}} \end{tikzcd}$$

désigne le voisinage infinitésimal d'ordre 2 de la diagonale dans $\breve{\mathcal{M}} \times \breve{\mathcal{M}}$ et f est l'unique isomorphisme tel que $\mathrm{pr}_1^* \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}D})^\vee$ et $\mathrm{pr}_2^* \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}D})^\vee$ diffèrent par des exponentielles au sens de Messing. Alors, $\nabla(m) = \mathrm{Lie}(f)(1 \otimes m) - m \otimes 1$.

2.3.2. Cas P.E.L. unitaire non ramifié

Définition 2.3.2. — Soit G un groupe p-divisible. On appelle polarisation de G un isomorphisme $\lambda : G \xrightarrow{\sim} G^D$ avec son dual de Cartier G^D tel que $\lambda^\vee = -\lambda$.

Définition 2.3.3. — Soit $(F, *, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, b, \mu)$ une donnée locale de type P.E.L. unitaire non ramifiée. Nous noterons $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ l'espace de Rapoport-Zink associé. Soit $(\mathbb{X}, \lambda)$ un groupe p-divisible sur $\overline{k}$ muni d'une action de $\mathcal{O}_F$, d'une polarisation principale λ tel que l'isocristal polarisé de $(\mathbb{X}, \lambda)$ muni de son action de F s'identifie à $(V, b\sigma, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ (une fois de plus l'existence d'un tel $(\mathbb{X}, \lambda)$ devrait résulter de travaux récents de Rapoport et Kottwitz). Alors, le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$ classifie les groupes p-divisibles principalement polarisés (X, λ') munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, tels que via cette action l'involution de Rosati sur $\mathcal{O}_F$ soit donnée par l'involution $*$, et munis d'une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$

$$\rho : \mathbb{X} \longrightarrow X \bmod p$$

telle que via ρ λ et λ' diffèrent, localement sur la base, d'une constante dans $\mathbb{Q}_p^\times$. On suppose de plus que si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau \in I_F} \mathrm{Lie}(X)_\tau$$

désigne la décomposition de $\mathrm{Lie}(X)$ sous l'action de $\mathcal{O}_F$ alors

$$\forall \tau \;\; \mathrm{Lie}(X)_\tau \text{ est localement libre de rang } p_\tau$$

Comme précédemment, $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ est formellement lisse sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$. Son complété formel en un point fermé de sa fibre spécial est le spectre formel d'une algèbre de séries formelles en $\frac{1}{2}\sum_{\tau\in I_F} p_\tau q_\tau$ variables.

Plus précisément, l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de $X^{\mathrm{univ}D}$ s'identifie au dual de celle de X^{univ} (tordu par $\mathbb{Z}_p(1) = \mathrm{Lie}\,E(\mathbb{G}_m)$ si l'on tient compte de la structure de F-cristal)([**7**]). La polarisation $\lambda : X^{\mathrm{univ}} \xrightarrow{\sim} X^{\mathrm{univ}D}$ fournit donc un produit symplectique parfait

$$\langle \bullet, \bullet\rangle : \mathrm{Lie}\,E(X^{\mathrm{univ}}) \times \mathrm{Lie}\,E(X^{\mathrm{univ}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}}$$

tel que $\mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}D})^\vee \subset \mathrm{Lie}\,E(X^{\mathrm{univ}})$ soit totalement isotrope (λ doit envoyer la filtration de Hodge de X^{univ} sur celle de $X^{\mathrm{univ}D}$) et (condition d'être hermitien)

$$\forall \tau,\tau' \ \ \mathrm{Lie}\,E(X^{\mathrm{univ}})_\tau \times \mathrm{Lie}\,E(X^{\mathrm{univ}})_{\tau'} \text{ est nul si } \tau' \neq \tau * \text{ et parfait sinon}$$

La polarisation λ (ou si l'on préfère $\langle \bullet, \bullet\rangle$) induit des isomorphismes

$$\mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_\tau \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}D})_{\tau *}$$

Et alors,

$$\bigoplus_\tau \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_\tau \otimes \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}D})_\tau \simeq \bigoplus_\tau \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_\tau \otimes \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_{\tau *}$$

qui est muni d'une involution $\#$ via $(\oplus_\tau x_\tau \otimes y_{\tau *})^{\#} = \oplus_\tau y_\tau \otimes x_{\tau *}$ et alors,

$$\begin{aligned}\left(\Omega^1_{\breve{\mathcal{M}}/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})}\right)^\vee &\xrightarrow{\sim} \Big(\bigoplus_\tau \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_\tau \otimes \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_{\tau *}\Big)^{\#=\mathrm{Id}} \\ &\simeq \bigoplus_{\tau\in A} \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_\tau \otimes \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_{\tau *}\end{aligned}$$

où A est un système de représentants de $\{\mathrm{Id}, *\}\backslash \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$.

2.3.3. Cas P.E.L. symplectique. — Étant donnée une donnée locale symplectique non ramifiée simple on peut définir de la même façon que dans le cas unitaire l'espace de Rapoport-Zink associé. Nous le noterons $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$.

Comme précédemment il y a un isomorphisme fournit par la connexion de Gauss-Manin

$$\left(\Omega^1_{\breve{\mathcal{M}}/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})}\right)^\vee \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\tau \mathrm{Sym}^2\ \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})_\tau$$

et l'espace est donc de rang $[F:\mathbb{Q}_p]n(n+1)/2$.

2.3.4. Description générale de l'espace tangent. — Soit

$$\widetilde{G} = \{g \in \mathbf{GL}_{\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}}\otimes\mathcal{O}_F}\left(\mathrm{Lie}\,E(X^{\mathrm{univ}})\right) \mid g^*g \in \mathbb{G}_m \text{ dans le cas (AL) ou symplectique}\}$$

et

$$\widetilde{P}_\mu = \{g \in \widetilde{G} \mid g(\mathrm{Lie}(D^D)^\vee) = \mathrm{Lie}(G^D)^\vee\}$$

Le schéma formel en groupes $\widetilde{G}$ est un groupe réductif au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}$ Zariski-localement isomorphe à un modèle entier réductif de G (G est non-ramifié). Il y a alors un isomorphisme

$$\kappa : \left(\Omega^1_{\breve{\mathcal{M}}/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})}\right)^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(\widetilde{G})/\,\mathrm{Lie}(\widetilde{P}_\mu)$$

et donc $\mathrm{rg}(\Omega^1_{\breve{\mathcal{M}}}) = 2\langle\rho,\mu\rangle$ où ρ désigne la demi-somme des racines positives.

Cet isomorphisme est donné par la connexion de Gauss-Manin équivariante : $\mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}})$ est un $\widetilde{G}$-torseur pour la topologie de Zariski et l'isomorphisme de Messing $\mathrm{pr}_2^*\widehat{E}(X^{\mathrm{univ}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_1^*\widehat{E}(X^{\mathrm{univ}})$ induit un isomorphisme de $\widetilde{G}$-torseurs $\mathrm{pr}_2^*\,\mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_1^*\,\mathrm{Lie}\, E(X^{\mathrm{univ}})$ et donc

$$\nabla \in \Gamma(\breve{\mathcal{M}}, \mathrm{Lie}(\widetilde{G}) \otimes \Omega^1_{\breve{\mathcal{M}}/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})})$$

qui définit l'isomorphisme ci-dessus.

2.3.5. Décomposition d'une donnée globale non ramifiée en produits de données locales simples. — Revenons aux notations globales du chapitre 1.1. La donnée globale $\mathcal{D}$ couplée au plongement ν fournit une donnée $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p} = (B\otimes\mathbb{Q}_p, V\otimes\mathbb{Q}_p, \langle\bullet,\bullet\rangle, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ où $\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ est obtenu à partir de μ grâce à ν.

Cas (AL). — Utilisant l'équivalence de Morita on en déduit pour tout i dans I (avec les notations de la section 1.2.3) une donnée de type $E.L.$ non ramifiée simple (sans sa classe de σ-conjugaison) : (F_{w_i}, V_i, μ_i). Nous noterons E_i son corps reflex. Les deux corps suivants sont égaux

$$E_\nu = \prod_{i\in I} E_i$$

Les signatures locales se déduisent des globales : les signatures associées à la donnée indexée par $i\in I$ sont les (p_τ, q_τ) lorsque τ parcourt les $\tau\in\Phi$ tels que le plongement $\nu\circ\tau$ restreint à F induise la place w_i. Remarquons maintenant que

$$B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}) = \prod_{i\in I} B(\mathrm{GL}_n(F_{w_i}), \mu_i)$$

et que donc la donnée de $b = \prod_i b_i \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ fournit des données locales (F_i, V_i, b_i, μ_i) pour tout i.

Cas (AU) et (C). — Comme précédemment la donnée se scinde en un produit de données locales de type P.E.L. indexées par J et $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ se scinde en un produit.

Définition 2.3.4. — Pour un $b\in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ nous noterons $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ la donnée locale de Rapoport-Zink $(B\otimes\mathbb{Q}_p, V\otimes\mathbb{Q}_p, \langle\bullet,\bullet\rangle, b, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ qui se décompose en un produit de données simples comme ci-dessus.

2.3.6. Espace de Rapoport-Zink associé à $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$. — Soit donc $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Celui-ci fournit une donnée de Rapoport-Zink locale de type P.E.L. $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ ([**68**] 3.17) à laquelle est associé un espace espace de Rapoport-Zink $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ où $\breve{E} = \widehat{E_{\nu}^{nr}}$ ([**68**] définition 3.21). Rappelons brièvement que c'est un espace de modules de groupes p-divisibles principalement polarisés, munis d'une action de $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$, vérifiant la condition de Kottwitz (associée à $\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$), rigidifiés via une quasi-isogénie avec un groupe p-divisible fixé sur $\overline{k}$ dont l'isocristal muni de structures additionnelles est fixé par b (le tout vérifiant des conditions de compatibilité).

Remarque 2.3.5. — En général $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ n'est pas un schéma formel p-adique comme c'est le cas pour les espaces de Drinfeld (en fait c'est le cas si et seulement si l'ensemble $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ est réduit a un seul élément qui est donc basique).

2.3.7. Décomposition de l'espace associé à $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ en produit d'espaces simples de type E.L. et P.E.L.

2.3.7.1. Cas (AL). — Soit X^{univ} le groupe p-divisible universel sur $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$. L'action de $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ sur X^{univ}, la polarisation λ et $*$ permettent de décomposer X^{univ} en

$$X^{\text{univ}} = \bigoplus_{i \in I} (X_i^{\text{univ}} \oplus \check{X}_i^{\text{univ}})$$

Utilisant le fait que $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ est un ordre maximal, on peut appliquer une « équivalence de Morita » à chaque terme pour obtenir que l'espace de Rapoport-Zink associé à $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ se décompose de la façon suivante

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) = \prod_{i \in I} \breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) \times \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Z}_p^\times$$

Remarque 2.3.6. — Cette décomposition en produit d'espaces plus simples par équivalence de Morita est un des points clef de tout ce qui suit. Par exemple, elle permet dans [**34**] et [**63**] de ramener l'étude d'espaces de modules associés à des groupes p-divisibles de dimension supérieur à 1 à celle de groupes p-divisibles de dimension 1 (avec les notations de [**34**] on associe au groupe p-divisible $\mathcal{A}[p^\infty]$ le groupe $\varepsilon\mathcal{A}[p^\infty]$ de dimension 1, où ε est un idempotent de $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$).

Exemple 2.3.7. — Supposons que pour un $i \in I$, μ_i soit tel qu'il existe un $\tau_0 \in I_{F_{v_i}}$ tel que $\forall \tau \neq \tau_0$, $p_{i,\tau} = 0$. Alors, le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i)$ est l'espace de modules des $\mathcal{O}_{F_{w_i}}^{\tau_0}$-modules p-divisibles X (au sens de [**34**]) sur un schéma S sur lequel p est localement nilpotent munis d'une rigidification avec un $\mathcal{O}_{F_{w_i}}^{\tau_0}$-module p-divisible sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ de F isocristal associé à b_i et vérifiant

$$\text{Lie}(X) \text{ est un } \mathcal{O}_S\text{-module libre de rang } p_{i,\tau_0}$$

Exemple 2.3.8. — Avec les notations précédentes, si $\mu_i = 1$ pour un i appartenant à I, alors $B(\mathrm{GL}_n(F_{w_i}, \mu_i))$ est réduit à un seul élément b_i qui est associé à un isocristal étale et

$$\breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) = \mathrm{GL}_n(F_{w_i})/C_0$$

comme espace discret (c'est-à-dire union disjointe de copies de $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$).

Exemple 2.3.9. — Avec les notations de l'exemple 2.3.7 si $p_{i,\tau_0} = 1$ et b_i est basique, $\breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i)$ paramétrise des déformations par quasi-isogénies de $\mathcal{O}_{F_{v_i}}^{\tau_0}$-modules p-divisibles de dimension 1 et de hauteur n.

$$\breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) \simeq \boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}}[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]) \times \mathbb{Z}$$

l'espace de Lubin-Tate sur lequel opère $J_{b_i} = D_{1/n}^{\times}$.

2.3.7.2. Cas (AU). — Commençons par remarquer que si $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$ désigne un espace de Rapoport-Zink de type P.E.L. unitaire non ramifié simple, celui ci est muni d'un morphisme $\beta : \breve{\mathcal{M}}(b, \mu) \to \mathbb{Q}_p^{\times}/\mathbb{Z}_p^{\times}$ mesurant le « défaut » de la polarisation du groupe p-divisible universel à coïncider avec celle définie par $\langle \bullet, \bullet \rangle$ sur V. Comme précédemment, X^{univ} se décompose en une somme indexée par J de groupes p-divisibles et l'on a l'égalité

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) = \Big(\prod_{j \in J} \breve{\mathcal{M}}(b_j, \mu_j) \Big)^1 \hookrightarrow \prod_{j \in J} \breve{\mathcal{M}}(b_j, \mu_j)$$

est l'ouvert fermé défini par l'égalité : $\forall j, j' \in J$, $\beta_j = \beta_{j'}$.

2.3.7.3. Cas (C). — Comme ci-dessus, il y a une décomposition :

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) = \Big(\prod_{j \in J} \breve{\mathcal{M}}(b_j, \mu_j) \Big)^1$$

2.3.8. Continuité de l'action de J_b. — Nous notons dans cette section $\breve{\mathcal{M}}$ un espace de Rapoport-Zink associé à une donnée locale simple ou bien à une donnée globale.

Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}$ est muni d'une action à gauche de J_b via

$$\forall g \in J_b \ \ \forall (X, \rho) \in \breve{\mathcal{M}} \quad g \cdot (X, \rho) = (X, \rho \circ g^{-1})$$

Lorsque $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$, cette action se fait composante par composante dans les décompositions en produits précédentes (on remarquera par exemple que dans le cas (AL), $J_b = \prod_i J_{b_i}$ et dans le cas (AU) $J_b \subset \prod_{j \in J} J_{b_j}$).

Définition 2.3.10. — Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel muni d'une action d'un groupe localement compact totalement discontinu H. Nous dirons que H agit continûment sur $\mathfrak{X}$ si et seulement si tout ouvert quasi-compact U de $\mathfrak{X}$ est stabilisé par un voisinage de l'identité dans H, et si $\mathcal{I}_U \subset \mathcal{O}_U$ est un idéal de définition de $\mathcal{O}_U$,

$\forall N \in \mathbb{N}$ il existe un sous-groupe compact ouvert $K_N \subset H$ suffisamment petit tel que $\forall g \in K_N,\ g^* : \mathcal{O}_U/\mathcal{I}_U^N \to \mathcal{O}_U/\mathcal{I}_U^N$ est l'identité.

Proposition 2.3.11. — *Le groupe J_b opère continûment sur $\breve{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. — On vérifie aisément que l'assertion ci-dessus est équivalente à la suivante : si S est un schéma quasicompact sur lequel p est nilpotent et $(X,\rho) \in \breve{\mathcal{M}}(S)$, il existe un voisinage de l'identité dans J_b tel que pour g dans un tel voisinage, $(X, \rho \circ g) \simeq (X,\rho)$.

Notons $\mathrm{End}(\mathbb{X})$ l'anneau des endomorphismes du groupe p-divisible $\mathbb{X}$ muni de ses structures additionnelles (la polarisation λ et l'action ι) sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. L'anneau $\mathrm{End}(\mathbb{X})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini. De plus, $\forall N > 0$, $\mathrm{Id} + p^N \mathrm{End}(\mathbb{X})$ est un sous-groupe compact ouvert de J_b et lorsque N varie cette famille de sous-groupes forme une base de voisinages de l'identité dans J_b. Considérons la quasi-isogénie sur $\overline{S} = S \bmod p$

$$\rho \circ (\mathrm{Id} + p^N(u \times 1)) \circ \rho^{-1} = \mathrm{Id} + p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1} \in \mathrm{End}(X \times_S \overline{S})_{\mathbb{Q}}$$

Le schéma S étant quasi-compact et p nilpotent sur S, par rigidité des quasi-isogénies

$$\forall u \in \mathrm{End}(\mathbb{X}),\ \exists N, \quad p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1} \text{ se relève en un endomorphisme de } X/S$$

Mais l'algèbre $\mathrm{End}(\mathbb{X})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini. On peut donc trouver un tel N uniformément pour tous les éléments u de $\mathrm{End}(\mathbb{X})$. C'est-à-dire,

$$\exists N,\ \forall u \in \mathrm{End}(\mathbb{X}), \quad p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1} \text{ se relève en un endomorphisme de } X$$

Nous noterons $(p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1})\tilde{}$ ce relèvement. Comme $\mathrm{End}(\mathbb{X})$ est un anneau p-adique,

$$\mathrm{Id} + p(p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1})\tilde{} \in \mathrm{Aut}(X)$$

On en déduit que $\forall u \in \mathrm{End}(\mathbb{X})$, $\mathrm{Id} + p^{N+1}\rho(u \times 1)\rho^{-1}$ se relève en un automorphisme de X, ce qui montre que

$$(X,\rho) \simeq (\mathrm{Id} + p^{N+1}u) \cdot (X,\rho) \qquad \square$$

Remarque 2.3.12. — Bien sûr, cette démonstration s'applique à un espace de Rapoport-Zink général tel qu'il est défini dans [**68**].

2.3.9. La tour d'espaces rigides. — Nous noterons dans cette section $\breve{\mathcal{M}}$ un espace de Rapoport-Zink associé à une donnée globale non ramifiée $\mathcal{D}$ ou bien un espace de Rapoport-Zink associé à une donnée locale non ramifiée simple. Si $\breve{\mathcal{M}}$ est associé à une donnée globale $\mathcal{D}$ nous noterons V pour $V \otimes \mathbb{Q}_p$, B pour $B \otimes \mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}_B$ pour $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$. Si $\breve{\mathcal{M}}$ est associé à une donnée locale nous noterons $\mathcal{O}_B$ pour $\mathcal{O}_F$. On fixe un réseau autodual Λ_0 dans V. Le corps $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ désignera soit E_ν dans le cas d'un espace associé à une donnée globale, soit le corps reflex de la donné locale dans le cas d'un espace associé à une donnée locale.

Définition 2.3.13. — $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$ désigne la fibre générique de $\breve{\mathcal{M}}$ sur $\breve{E}$ au sens des espaces analytiques de Berkovich ([**5**]). On notera $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}$ la fibre générique de $\breve{\mathcal{M}}$ au sens des espaces rigides ou adiques ([**35**]).

2.3.9.1. Trivialité du torseur des périodes. — Si $K|\breve{E}$ est une extension de degré fini, à $x \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}(K) = \breve{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K)$ est associé un groupe p-divisible $X = X_x^{\mathrm{univ}}$ sur $\mathcal{O}_K$ d'isocristal filtré $(V_L, b \otimes \sigma, \breve{\pi}_1(x))$ où $\breve{\pi}_1 : \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}} \to \breve{\mathcal{F}}^{\mathrm{ad}}$ est la première composante du morphisme des périodes ([**68**]). Le module de Tate rationnel de X, $V_p(X)$ est une représentation cristalline de $G_K = \boldsymbol{Gal}(\overline{K}|K)$ munie d'une action de B et d'un produit symplectique B-hermitien $V_p(X) \times V_p(X) \xrightarrow{(\cdot,\cdot)} \mathbb{Q}_p(1)$ dans lequel $T_p(X)$ est un réseau autodual. On a alors $V_p(X) \simeq (\mathrm{Fil}^0 \mathrm{Hom}(V_L, B_{\mathrm{cris}}))^{\varphi=\mathrm{Id}}$ où V_K est filtré par $\breve{\pi}_1(x)$ et $B_{\mathrm{cris}} \otimes_L K$ de façon usuelle, et $V_L = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Gal}(\overline{K}|K)}(V_p(X), B_{\mathrm{cris}})$ sur lequel $b\sigma$ provient du Frobenius cristallin φ sur B_{cris} et $\breve{\pi}_1(x)$ de la filtration de B_{cris} (*cf.* [**23**]). On s'intéresse à la variation du torseur des périodes le long de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$:

$$\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}(\overline{\breve{E}}) \ni x \longmapsto \mathrm{Isom}_{\mathrm{B\text{-}mod.symp.}}(V_p(X_x^{\mathrm{univ}}), V)$$

qui est un G-torseur non vide grâce à la rigidification ρ qui fournit un point de ce torseur sur B_{cris}. D'après [**68**] dans le cas qui nous intéresse (G^{der} est simplement connexe) et plus généralement grâce à [**75**] et aux travaux de Colmez et Fontaine,

Théorème 2.3.14. — *Le torseur des périodes est constant, trivial sur $\breve{\mathcal{M}}(\overline{\breve{E}})$.*

Remarque 2.3.15. — Dans le cas non ramifié auquel nous nous intéressons on peut démontrer cela de façon encore plus directe de la façon suivante : $V_p(X)$ et V sont isomorphes comme B-modules et contiennent tous deux un réseau autodual $T_p(X)$ et Λ_0. Donc d'après le lemme 7.2 de [**52**] ils sont isomorphes comme modules symplectiques.

Remarque 2.3.16. — Plus précisément on a le résultat suivant : si $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}_p}} \to G_{/\overline{\mathbb{Q}_p}}$ et $b \in B(G)$ sont tels que (μ, b) soit faiblement admissible, la classe de cohomologie de ce G-torseur est

$$\kappa(b) - \mu_1 \in H^1(\mathbb{Q}_p, G) \simeq \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D \subset X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$$

où $\kappa : B(G) \to X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$ est l'application de Kottwitz et $\mu_1 = \widehat{\mu}_{|Z(\widehat{G})^\Gamma}$. En particulier, si $b \in B(G, \mu)$, $\kappa(b) = \mu_1$ et la classe du G-torseur est triviale.

2.3.9.2. Structures de niveau. — Au groupe p-divisible universel $X^{\mathrm{univ}}/\breve{\mathcal{M}}$ est associé un groupe p-divisible rigide

$$(X^{\mathrm{univ}})^{\mathrm{an}} = \varinjlim X^{\mathrm{univ}}[n]^{\mathrm{an}}$$

où $X^{\mathrm{univ}}[n]^{\mathrm{an}}/\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$ est étale fini de degré $p^{nht(\mathbb{X})}$. Le faisceau $T_p(X^{\mathrm{univ}}) := (X[n]^{\mathrm{an}})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc un $\mathbb{Z}_p$-faisceau analytique étale localement constant sur des revêtements étales finis, muni d'une action de $\mathcal{O}_B$ et (dans le cas P.E.L.) d'une polarisation

$$T_p(X^{\mathrm{univ}}) \times T_p(X^{\mathrm{univ}}) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

où $\mathbb{Z}_p(1)$ est le $\mathbb{Z}_p$-faisceau analytique $(\mu_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$. Cet accouplement de faisceaux est parfait au sens où il induit un isomorphisme

$$T_p(X^{\text{univ}})^\vee \xrightarrow{\sim} T_p(X^{\text{univ}})(-1)$$

D'après la trivialité du torseur des périodes $\forall\, x \in \breve{\mathcal{M}}^{\text{an}}(\overline{\breve{E}})$ il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_B$-modules symplectiques

$$\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_x^{\text{univ}})$$

Si $K \subset C_0 = \text{Aut}(\Lambda_0)$ est un sous-groupe compact ouvert, on peut donc parler de structure de niveau K sur $T_p(X^{\text{univ}})$ au sens usuel que nous rappelons :

Définition 2.3.17. — Soit $Y \to \breve{\mathcal{M}}^{\text{an}}$ un espace analytique. Fixons un $x \in Y(\overline{\breve{E}})$ dans chaque composante connexe de Y. Une structure de niveau K sur $T_p(X^{\text{univ}})$ au-dessus de Y est un isomorphisme $\forall\, x$ de $\mathcal{O}_B$-modules symplectiques

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_x^{\text{univ}})$$

tel que via η l'action de $\pi_1^{\text{an}}(Y, x)$ se fasse à travers K agissant sur Λ_0. Un η étant considéré modulo composition par un élément de K. On notera $\overline{\eta}$ sa classe.

Bien sûr cette définition ne dépend pas du choix des $x \in \breve{\mathcal{M}}(\overline{\breve{E}})$. Une définition équivalente est la suivante :

La classe d'isomorphisme de $T_p(X^{\text{univ}})$ comme C_0-torseur étale est donnée par un élément de

$$\check{H}^1(Y, C_0) := \varprojlim \check{H}^1(Y, C_0 \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

Dire qu'un système local est trivial équivaut à dire que cette classe est un cobord. De la même façon, une trivialisation modulo K d'un élément de

$$\check{Z}^1(Y, C_0) = \varprojlim \check{Z}^1(Y, C_0 \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

est un élément $g \in \check{C}^0(Y, C_0)$ modulo $\check{C}^0(Y, K)$ tel que

$$c = \text{cobord}(g) \text{ modulo } K$$

Dit d'une autre façon, $\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X^{\text{univ}})[K]$ est donné par une famille compatible

$$\eta_n : \Lambda_0/p^n\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} X[n]^{\text{an}}\ [K]$$

où $\forall\, n\ \ \exists\, \{U_i\}_i$ un recouvrement étale de Y et des isomorphismes

$$(\eta_n)_i : \Lambda_0/p^n\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} X[n]^{\text{an}}_{|U_i}$$

tels que sur $U_i \cap U_j$,

$$(\eta_n)_{i|U_i\cap U_j} \circ (\eta_n)^{-1}_{|U_i\cap U_j} \in K(U_i \cap U_j) = K^{\pi_0(U_i\cap U_j)}$$

***Définition 2.3.18* ([68])**. — L'espace analytique $\breve{\mathcal{M}}_K$ classifie les structures de niveau K sur $T_p(X^{\text{univ}})$. Nous noterons $\breve{\mathcal{M}}_K^{\text{rig}}$ les espaces adiques correspondants.

Remarque 2.3.19. — Bien sûr une définition « expéditive » de $\breve{\mathcal{M}}_K$ est

$$\breve{\mathcal{M}}_K = K\backslash \mathrm{Iso}(\Lambda_0/p^n\Lambda_0, T_p(X^{\mathrm{univ}}) \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \quad n \gg 0$$

où le second membre est vu comme faisceau étale sur $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$, C_0 agit sur $\mathrm{Iso}(\Lambda_0, T_p(X^{\mathrm{univ}}))$ via son action sur Λ_0, Iso signifie isomorphismes compatibles aux structures additionnelles et $n \gg 0$ signifie $\mathrm{Id} + p^n\mathrm{End}(\Lambda_0) \subset K$.

Pour $K \subset C_0$ compact ouvert on définit ainsi une tour $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ d'espaces analytiques sur $\breve{E}$ au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$ munis de morphismes de transition étales finis pour $K \subset K'$

$$\Pi_{K,K'} : \breve{\mathcal{M}}_{K'} \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}_K$$

d'oubli de la structure de niveau tels que $\Pi_{K,K'}$ est galoisien de groupe K/K' si $K' \lhd K$.

2.3.9.3. Action se $G(\mathbb{Q}_p)$ sur les structures de niveau. — La tour $(\breve{\mathcal{M}}_K)_{K\subset G(\mathbb{Q}_p)}$ est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p)$ décrite dans le chapitre 5 de [**68**] par action de ce groupe sur la structure de niveau. Rappelons que cela signifie que pour $K \subset C_0$ et $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ tels que $g^{-1}Kg \subset C_0$ il y a un isomorphisme

$$g : \breve{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$$

Ces isomorphismes se composant de façon naturelle lorsque K et g varient. L'action « horizontale » de J_b sur $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}} = \breve{\mathcal{M}}_{C_0}$ s'étend à $\breve{\mathcal{M}}_K$ et commute à l'action « verticale » de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Détaillons la construction de cette action de $G(\mathbb{Q}_p)$ décrite rapidement dans [**68**]. Soient $K \subset C_0$ et $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ tels que $g^{-1}Kg \subset C_0$. On veut définir un isomorphisme $g : \breve{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$. Si Y est un espace rigide quasi-compact sur $\breve{E}$, un élément de $\breve{\mathcal{M}}_K^{\mathrm{rig}}(Y)$ est donné par un $(X, \rho) \in \breve{\mathcal{M}}(S)$ et un $\overline{\eta}$ tel que $(X, \rho, \overline{\eta}) \in \breve{\mathcal{M}}_K^{\mathrm{rig}}(S^{\mathrm{rig}})$ où $S/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ est un schéma formel admissible de fibre générique Y et

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X^{\mathrm{rig}})\ [K]$$

Étant donné que $g^{-1}Kg \subset C_0$, le réseau $g \cdot \Lambda_0$ est stable par l'action de K et donc $\eta(g \cdot \Lambda_0)$ est stable par l'action du π_1 de Y sur $T_p(X^{\mathrm{rig}})$. Il définit donc un groupe p-divisible rigide X' muni d'une quasi-isogénie $X \xrightarrow{f} X'$ telle que via la composée

$$\varphi : \Lambda_0 \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\simeq\ \eta\otimes 1} V_p(X) \xrightarrow{\simeq\ f_*} V_p(X')$$

on ait $\varphi^{-1}(T_p(X')) = g \cdot \Lambda_0$.

Le groupe X' est de la forme X^{rig}/U où U est un groupe rigide plat fini sur S^{rig} et f est de la forme $p^n q$ où $q : X^{\mathrm{rig}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{rig}}/U^{\mathrm{rig}}$ et $n \in \mathbb{Z}$. D'après la version relative de la théorie de Raynaud, après un éclatement formel admissible $\widetilde{S} \to S$, U se prolonge en un groupe plat fini $\widetilde{U}/\widetilde{S}$. Posons

$$\widetilde{X}' = (X \times_S \widetilde{S})/\widetilde{U}$$

et $\widetilde{f} : X \times_S \widetilde{S} \to \widetilde{X}'$ la quasi-isogénie $p^n\widetilde{q}$, où $\widetilde{q} : X \times_S \widetilde{S} \twoheadrightarrow X \times \widetilde{S}/\widetilde{U}$, qui prolonge f sur $\widetilde{S}$. Munissons $\widetilde{X}'$ de la rigidification

$$\widetilde{\rho} : \mathbb{X} \times_k \overline{\overline{\widetilde{S}}} \xrightarrow{\rho \times 1} X_{\overline{\widetilde{S}}} \times \overline{\overline{S}} \xrightarrow{f \times 1} \widetilde{X}' \times \overline{\overline{\widetilde{S}}}$$

ce qui nous donne un $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho}) \in \breve{\mathcal{M}}(\widetilde{S})$. Quant à la structure de niveau $\widetilde{\eta}$ sur $T_p(\widetilde{X})$,

$$\widetilde{\eta} = \eta \circ g$$

au sens où le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} g \cdot \Lambda_0 \arrow[rr, "\eta \otimes 1"] & & V_p(X) \arrow[d] \\ \Lambda_0 \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\widetilde{\eta}"] & T_p(\widetilde{X}') \arrow[r, hook] & V_p(\widetilde{X}') \end{tikzcd}$$

La fibre générique de $\widetilde{S}$ est Y et alors $(\widetilde{W}, \widetilde{\rho}, \overline{\widetilde{\eta}}) \in \breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}(Y)$ que l'on pose comme étant égal à $g \cdot (X, \rho, \overline{\eta})$.

Remarque 2.3.20. — Rappelons également ([**68**]) que si $x \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}(M)$ pour $M|\breve{E}$ une extension de degré fini, il n'est pas nécessaire d'effectuer un éclatement formel admissible pour prolonger notre isogénie sur $\mathcal{O}_M$ (il suffit de prendre l'adhérence schématique du groupe plat fini précédent dans $X[\pi^k]$, $k >> 0$) ce qui simplifie la description de l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur les points $\breve{\mathcal{M}}_K(\overline{\breve{E}})$.

Exemple 2.3.21. — Avec les notations globales précédentes, dans le cas (AL), si Si $K = \prod_{i \in I} K_i \times K_t$ où K_t est un sous-groupe compact ouvert de $\mathbb{Z}_p^\times$,

$$\breve{\mathcal{M}}_K(b, \mu) = \prod_{i \in I} \breve{\mathcal{M}}_{K_i}(b_i, \mu_i) \times \mathbb{Q}_p^\times / K_t$$

où $\mathbb{Q}_p^\times / K_t$ est l'espace de modules des structures de niveau K_t sur le module de Tate $\mathbb{Z}_p(1)$.

Exemple 2.3.22. — Avec les notations de l'exemple précédent et en se plaçant dans le cadre de l'exemple 2.3.8 (cas étale) :

$$\breve{\mathcal{M}}_{K_i}(b_i, \mu_i) = G(\mathbb{Q}_p)/K_i$$

De plus, $J_{b_i} = G(\mathbb{Q}_p)$ qui agit à gauche sur cet ensemble et $G(\mathbb{Q}_p)$ agit à droite via les correspondances de Hecke ensemblistes classiques.

Ce dernier exemple conforte bien l'idée que la tour d'espaces de Rapoport-Zink est un épaississement rigide de l'immeuble de Bruhat-Tits dans le cas non-étale.

2.3.10. Quelques propriétés des espaces de Rapoport-Zink rigides

Lemme 2.3.23. — *Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}$ est séparé sur $\mathbf{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que le sous-schéma formel localement fermé

$$\breve{\mathcal{M}} \xhookrightarrow{\Delta} \breve{\mathcal{M}} \times \breve{\mathcal{M}}$$

est une immersion fermée. Soit $(X^{\text{univ}}, \rho^{\text{univ}})$ le groupe p-divisible universel muni de sa rigidification ρ^{univ}. Considérons les deux projections

$$\breve{\mathcal{M}} \times \breve{\mathcal{M}} \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \breve{\mathcal{M}}$$

L'immersion Δ est alors défini comme étant le lieu défini par

$$p_1^*(X^{\text{univ}}, \rho^{\text{univ}}) \simeq p_2^*(X^{\text{univ}}, \rho^{\text{univ}})$$

ce qui est équivalent à dire que la quasi-isogénie

$$\alpha = p_1^* \rho^{\text{univ}} \circ (p_2^* \rho^{\text{univ}})^{-1} : p_2^* X^{\text{univ}} \longrightarrow p_1^* X^{\text{univ}}$$

est un isomorphisme ou encore que α ainsi que α^{-1} sont des isogénies. D'après la proposition 2.9 de [**68**] il s'agit d'une condition fermée. □

Rappelons que le morphisme des périodes ([**68**] chapitre 5) est le morphisme rigide analytique $\breve{\pi}_1 : \breve{\mathcal{M}}^{\text{an}} \to \breve{\mathcal{F}}^{\text{ad}}$ défini à partir de l'isomorphisme de la proposition 2.3.26 et de la filtration donnée par l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle où $\breve{\mathcal{F}}^{\text{ad}}_{/\mathbb{C}_p} \subset G/P_\mu$ est un ouvert analytique dans l'espace homogène.

Lemme 2.3.24. — *Pour tout K, l'espace analytique $\breve{\mathcal{M}}_K$ est lisse de bord vide. Le morphisme des périodes $\breve{\pi}_1 : \breve{\mathcal{M}}^{\text{an}} \to \breve{\mathcal{F}}^{\text{ad}}$ est étale. Traduit dans le langage des espaces adiques : l'espace adique $\breve{\mathcal{M}}_K^{\text{rig}}$ est lisse et partiellement propre et le morphisme $\breve{\pi}_1$ est partiellement propre.*

Démonstration. — Montrons les assertions sur les espaces adiques qui sont équivalentes à celles sur les espaces analytiques. D'après le lemme précédent, $\breve{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ est séparé. Pour voir qu'il est partiellement propre il suffit donc de constater que les composantes irréductibles de sa fibre spéciale $\overline{\mathcal{M}}$ sont propres ([**68**] proposition 2.32). Les morphismes $\Pi_{K,C_0} : \breve{\mathcal{M}}_K^{\text{rig}} \to \breve{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ étant finis il en est donc de même pour les $\breve{\mathcal{M}}_K^{\text{rig}}$.

On sait déjà que le morphisme des pentes est étale au sens des espaces adiques (proposition 5.17 de [**68**]). Les espaces adiques $\breve{\mathcal{F}}^{\text{ad}}$ et $\breve{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ étant partiellement propres, le morphisme $\breve{\pi}_1$ est partiellement propre □

Remarque 2.3.25. — Ces propriétés peuvent également se déduire de l'existence de l'uniformisation de variétés de Shimura par les $\breve{\mathcal{M}}_K$.

2.3.11. Platitude de l'isocristal convergent associé au cristal de Dieudonné

Soit $\breve{\mathcal{M}}$ un espace de Rapoport-Zink associé à une donnée locale simple. Soit X^{univ} le groupe p-divisible universel muni de ses structures additionnelles.

Proposition 2.3.26. — *Il y a des isomorphismes J_b-équivariants compatibles aux structures additionnelles de F-isocristaux*

$$\mathrm{Lie}\left(E(X^{\mathrm{univ}})\right)^{\mathrm{rig}} \simeq \left[\mathrm{Lie}\left(E(X^{\mathrm{univ}})\right)^{\mathrm{rig}}\right]^{\nabla=0} \otimes_{\mathcal{O}_{\breve{E}}} \mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}}$$

$$\left(\left[\mathrm{Lie}\left(E(X^{\mathrm{univ}})\right)^{\mathrm{rig}}\right]^{\nabla=0}, F\right) \simeq (\underline{V} \otimes L, b \otimes \sigma)$$

Démonstration. — C'est une conséquence de l'existence de la rigidification

$$\rho : \mathbb{X} \times_{\overline{k}} \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow X^{\mathrm{univ}} \times_{\breve{\mathcal{M}}} \overline{\mathcal{M}}$$

où $\overline{\mathcal{M}}$ désigne la fibre spéciale réduite de $\breve{\mathcal{M}}$, et de la fonctorialité de la construction de Berthelot qui à un F-cristal associe un F-isocristal convergent (elle-même conséquence de la remarque de Dwork que les relèvements de Frobenius agrandissent le rayon de convergence).

Rappelons brièvement comment cela fonctionne. Soient les F-cristaux munis de structure additionnelles sur $\left(\overline{\mathcal{M}}/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})\right)_{\mathrm{cris}}$

$$\mathcal{E}_1 = \mathbb{D}(\mathbb{X}) \qquad \mathcal{E}_2 = \mathbb{D}(X^{\mathrm{univ}} \times_{\breve{\mathcal{M}}} \overline{\mathcal{M}})$$

Soit

$$\Phi : \breve{\mathcal{M}} \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}^{(\sigma)}$$

un relèvement de Frobenius ($\breve{\mathcal{M}}$ étant formellement lisse un tel relèvement existe).

Soit $\boldsymbol{Spf}(A) \subset \breve{\mathcal{M}}$ un ouvert affine et $I \subset A$ son plus grand idéal de définition. Alors,

$$\boldsymbol{Spf}(A)^{\mathrm{rig}} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{Max}\left(A\left\langle \frac{I^n}{p} \right\rangle\right)$$

où $A\langle I^n/p\rangle \subset A[1/p]$ est le complété p-adique de la sous-$A[1/p]$-algèbre engendrée par les f^n/p avec $f \in I$, une K-algèbre de Tate.

$$\mathrm{Max}\left(A\left\langle \frac{I^n}{p} \right\rangle\right) = \{x \in \boldsymbol{Spf}(A)^{\mathrm{rig}} \mid \forall f \in I \ |f(x)| \leqslant |\pi|^{1/n}\}$$

Notons $B_n = A\left\langle I^n/p\right\rangle$. Il y a des inclusions $B_{n+1} \subset B_n$.

L'algèbre B_n possède un modèle entier A_n qui est une $\mathcal{O}_K$-algèbre topologiquement de type fini munie d'un morphisme $A \to A_n$. De plus, A_n/pA_n, une $\overline{k}$-algèbre de type fini, vérifie

$$(A_n/IA_n)_{\mathrm{red}} = (A_n/pA_n)_{\mathrm{red}}$$

Par rigidité des quasi-isogénies ρ induit une quasi-isogénie entre $\mathbb{X} \otimes_{\overline{k}} (A_n/pA_n)$ et $X^{\mathrm{univ}} \otimes_A (A_n/pA_n)$. L'idéal pA_n étant muni de puissances divisées on en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{Lie}(E(X^{\mathrm{univ}}) \otimes_A A_n)\,[1/p] \simeq \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_{W(\overline{k})} A_n\,[1/p]$$

D'où l'isomorphisme $\mathrm{Lie}(E(X^{\mathrm{univ}}))^{\mathrm{rig}} \simeq V \otimes \mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}}$ par recollement. Ceci est la proposition 5.15 de [**68**]. Néanmoins cet argument ne démontre pas que cet isomorphisme est compatible) à ∇.

Pour le voir, considérons $\mathcal{D}_I(A)\hat{}$ le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de I dans A. Soient

$$M_1 = \mathbb{D}(\mathbb{X}) = \mathcal{E}_{1,W(\overline{k})\twoheadrightarrow\overline{k}} \quad M_2 = \mathcal{E}_{2,\mathcal{D}_I(A)\hat{}\twoheadrightarrow A/I}$$

(évaluation des cristaux sur des pro-P.D. épaississement). Le module M_1 est muni de F σ-linéaire, V σ^{-1}-linéaire, M_2 de F Φ-linéaire et V Φ^{-1}-linéaire. La quasi-isogénie ρ induit un isomorphisme

$$M_1 \otimes_{W(\overline{k})} \mathcal{D}_I(A)\hat{}[1/p] = \mathcal{E}_{1,\mathcal{D}_I(A)\hat{}\twoheadrightarrow A/I}[1/p] \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{2,\mathcal{D}_I(A)\hat{}\twoheadrightarrow A/I} = M_2[1/p]$$

compatible à F, V et ∇. Il y a un morphisme

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_I(A)\hat{}\ [1/p] &\longrightarrow B_1\\ \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} f_1^{[i_1]}\cdots f_r^{[i_r]} &\longmapsto \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} \frac{f_1^{i_1}}{i_1!}\cdots\frac{f_r^{i_r}}{i_r!}\end{aligned}$$

où $a_{\underline{i}} \underset{|\underline{i}|\mapsto\infty}{\longrightarrow} 0$ p-adiquement et $f_i \in I$. Il induit un isomorphisme

$$f_1 : M_1 \otimes B_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma\left(\mathrm{Max}(B_1), \mathrm{Lie}(E(X^{\mathrm{univ}}))^{\mathrm{rig}}\right)$$

compatible à F, V et ∇. D'après Dwork les relèvements de Frobenius agrandissent les rayon de convergence, ce qui se traduit ici par $\Phi : B_n \to B_{n+1}$ puisque $\Phi(I) \subset I^p + (p)$. On peut alors construire des isomorphismes

$$f_n : M_1 \otimes B_n \xrightarrow{\sim} \Gamma\left(\mathrm{Max}(B_n), \mathrm{Lie}(E(X^{\mathrm{univ}}))^{\mathrm{rig}}\right)$$

en posant

$$f_n = \frac{1}{p^n} F^n \circ (\Phi^{n*} f_1) \circ V^n$$

Les f_n sont compatibles entre eux et définissent un isomorphisme compatible à F, V et ∇

$$M_1 \otimes \mathcal{O}_{\boldsymbol{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(E(X^{\mathrm{univ}}))^{\mathrm{rig}}_{|\boldsymbol{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}} \qquad \square$$

Remarque 2.3.27. — Bien que non-présent dans la proposition 5.15 de [**68**] on trouve ce type d'argument en théorie de Cartier dans la section 5.21.

Remarque 2.3.28. — La proposition précédente montre donc que, comme dans le cas complexe (*cf.* la description modulaire de l'espace symétrique X de la section 1.1.4) ρ définit une rigidification des sections horizontales de la cohomologie de de Rham.

2.4. Un théorème de finitude pour l'action de J_b

Dans cette section nous oublions les notations globales précédentes et considérons des espaces associés à des données locales simples (2.2.1,2.2.2).

Définition 2.4.1. — On posera comme précédemment $L = W(\overline{k})_{\mathbb{Q}}$. L'automorphisme σ désignera toujours un Frobenius de l'extension non ramifiée $L|\mathbb{Q}_p$. Le cristal associé à un groupe p-divisible est son cristal de Dieudonné covariant (M, V) où V est une application σ^{-1}-linéaire, le Verschiebung, ou bien (M, F) avec F σ-linéaire (on remarquera que dans la théorie de Dieudonné covariante le Frobenius du groupe p-divisible induit le Verschiebung du module de Dieudonné et réciproquement !).

Bien que dans notre situation $L = \breve{E}$ nous préférons distinguer les notations puisque le rôle de ces deux corps est totalement différent.

2.4.1. Description de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)(\overline{k})$ en termes de cristaux. — Soit donc une donnée locale de type E.L. ou P.E.L. non ramifiée simple.

Considérons l'isocristal $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$ muni de son action de F et, dans le cas P.E.L., de sa polarisation

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V_L \times V_L \longrightarrow \mathbb{Q}_p(1)$$

Un élément de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)(\overline{k})$ s'identifie alors à un cristal M dans $(V_L, b\sigma^{-1})$ stable par l'action de $\mathcal{O}_F$ tel que M comme $\mathcal{O}_L$-réseau soit autodual à une constante de $\mathbb{Q}_p^\times$ près (c'est-à-dire $\exists\, k \in \mathbb{Z}\ M^\vee = p^k M$) et tel qu'on ait une égalité de fonctions polynomiales :

$$\forall\, b \in \mathcal{O}_F \quad \det(b; M/VM) = \det(b; V_0)$$

Dit autrement, la dernière condition s'exprime en disant que le polygone de Hodge arithmétique « avec structures additionnelles » est fixé égal à μ. Détaillons les différents cas :

2.4.1.1. Cas (AL). — Reprenons les notations de 2.1. Posons $N = V_L$, $V = b\sigma^{-1}$. Décomposons N sous l'action de F

$$N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} N(i)$$

où

$$N(i) = \{n \in N \mid \forall x \in F\ x \cdot n = \sigma^i(x)n\}$$

Supposons μ donné par des $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$, $1 \leqslant a_i \leqslant n$ (qui sont les p_τ dans les notations de 2.2.1). Un élément de $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$ est donné par un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_L$-réseau $M \subset N$ tel que $pM \subset VM \subset M$, et si $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M(i)$ où

$$M(i) = \{m \in M \mid \forall x \in \mathcal{O}_F\ x.m = \sigma^i(x)m\}$$

alors, l'inclusion $VM(i) \subset M(i+1)$ induit une décomposition

$$M/VM = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M(i)/VM(i-1)$$

où $M(i)/VM(i-1)$ est un $\overline{k}$-espace vectoriel sur lequel le corps résiduel de F agit via le Frobenius géométrique à la puissance i. La condition de Kottwitz s'écrit alors avec ces notations

$$\dim_{\overline{k}} M(i)/VM(i-1) = a_i$$

2.4.1.2. Cas (AU). — Notons encore (N, V) l'isocristal $(V_L, b\sigma)$. Le produit symplectique sur V induit une polarisation $\langle \bullet, \bullet \rangle : N \times N \to \mathbb{Q}_p(1)$. Si $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}} N(i)$ est la décomposition de N sous l'action de F comme dans le cas (AL) où $\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle = \boldsymbol{Gal}(F|\mathbb{Q}_p)$, la condition d'être un F-module hermitien :

$$\forall\, b \in F\ \langle bv, v' \rangle = \langle v, b^* v' \rangle$$

s'exprime en disant que

$$\forall\, i \neq j + d,\ \langle N(i), N(j) \rangle = 0 \text{ et le produit } \langle \bullet, \bullet \rangle \text{ est parfait sur } N(i) \times N(i+d)$$

Un élément de $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)(\overline{k})$ est alors donné par un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_L$-réseau $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}} M(i)$ tel que $pM \subset VM \subset M$, M est autodual à un élément de $\mathbb{Q}_p^\times$ près et

$$\forall\ 0 \leqslant i \leqslant d \quad \dim_{\overline{k}}(M(i)/VM(i-1)) = a_i$$

où les a_i sont des entiers fixés par μ.

2.4.1.3. Cas (C). — L'isocristal (N, V) est polarisé via $\langle \bullet, \bullet \rangle : N \times N \to \mathbb{Q}_p(1)$. Comme précédemment il y a une décomposition $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} N(i)$. De plus, $\forall\, i \neq j$, $\langle N(i), N(j) \rangle = 0$ et $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est parfait sur $N(i) \times N(i)$.

Un élément de $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)(\overline{k})$ est alors donné par un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_L$-réseau $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M(i)$ tel que $pM \subset VM \subset M$, qui est autodual à un élément de $\mathbb{Q}_p^\times$ près et tel que

$$\forall\, 0 \leqslant i < d \ \ \dim_k(M(i)/VM(i-1)) = n$$

2.4.1.4. Action de J_b. — Avec les notations précédentes, le groupe J_b admet la description suivante

$$J_b = \{ g \in \mathrm{Aut}(N, V) \mid \forall\, n, n'\ \langle gn, gn' \rangle = c(g) \langle n, n' \rangle \}$$

Pour un élément g de J_b vu comme un élément de $G(L)$, l'action de g sur $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$ est, en termes de cristaux M, l'application $M \mapsto g \cdot M$.

2.4.2. Lien avec l'immeuble de G. — Donnons une autre description de $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$ dans l'esprit de la section 4 de ([**61**]) qui le fait apparaître comme un sous-ensemble de l'immeuble de G sur L :

$$\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)(\overline{k}) = \{ g \in G(L)/K \mid Kg^{-1} b g^\sigma K = K\mu(p)K \}$$

où $K = G(W(\overline{k}))$ est un sous-groupe borné hyperspécial. On vérifie cette égalité en utilisant le lemme 7.4 de [**51**]. Le lien avec la définition en termes de cristaux est le suivant : soit $M \subset V_L$ un cristal, $M \in \breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$, de stabilisateur K dans $G(L)$. A $g \in G(L)/K$ est associé le réseaux $g \cdot M$. Lorsque g vérifie la condition ci-dessus, $g \cdot M$ est bien un cristal de polygone de Hodge associé à μ. Dans cette description, $g_0 \in J_b$ opère de la façon suivante :

$$gK \longmapsto g_0 gK$$

Remarque 2.4.2. — Contrairement au cas des espaces de Drinfeld, en général le sous-ensemble de l'immeuble de G sur L défini précédemment ne provient pas d'un sous-ensemble de l'immeuble défini sur $\mathbb{Q}_p$ (rappelons que si $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_i$ est un cristal associé à un points sur $\overline{k}$ de l'espace de Drinfeld et si i est un indice critique ($\Pi M_i = VM_i$) alors $M_i^{V^{-1}\Pi}$ défini un sommet de l'immeuble sur $\mathbb{Q}_p$).

2.4.3. Orbites de J_b dans $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$. — On note (X, ρ) les éléments de $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$ où X désigne un groupe p-divisible sur $\overline{k}$ muni de son action de $\mathcal{O}_F$ et, dans le cas unitaire ou symplectique, de sa polarisation principale. La quasi-isogénie $\rho : \mathbb{X} \to X$ désigne la rigidification avec le groupe p-divisible $\mathbb{X}$ défini sur $\overline{k}$.

Lemme 2.4.3. — *Deux éléments $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in \breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$ sont dans la même J_b-orbite si et seulement si $X_1 \simeq X_2$ comme groupes p-divisibles munis de structures additionnelles.*

Démonstration. — Soit $g \in J_b$ tel que $(X_1, \rho_1) \simeq (X_2, \rho_2 \circ g^{-1})$. Alors, $X_1 \simeq X_2$. Réciproquement, supposons qu'il y ait un isomorphisme de groupes p-divisibles munis de structures additionnelles

$$f : X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$$

Considérons la quasi-isogénie $g = \rho_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \rho_2 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Par définition $g \in J_b$. Le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{X} \arrow[r, "\rho_2"] & X_2 \end{tikzcd}$$

ce qui montre que $(X_1, \rho_1) \simeq (X_2, \rho_2 \circ g^{-1})$. □

2.4.4. Action sur les composantes irréductibles

2.4.4.1. Rappels sur les modules de Dieudonné spéciaux et minimaux de Manin

La référence de cette sous-section est le chapitre III de l'article [**57**]. Tous les modules de Dieudonné considérés sont définis sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Soient m et n deux entiers positifs premiers entre eux. Posons $h = m + n$ et $\lambda = m/(m+n)$. Soit D_λ une algèbre à division d'invariant λ sur $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}_{D_\lambda}$ son ordre maximal. Soit Π une uniformisante de $\mathcal{O}_{D_\lambda}$ telle que $\Pi^h = p$. On note $\widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda} \subset \mathcal{O}_{D_\lambda}$ l'ordre égal à $W(\mathbb{F}_{p^h})[\Pi^m, \Pi^n]$.

Définition 2.4.4. — On note

$$M_{m,n} = \mathcal{O}_{D_\lambda} \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^h})} W(\overline{\mathbb{F}_p})$$

muni de $V = \Pi^m \otimes \sigma^{-1}$ et $F = \Pi^n \otimes \sigma$. On note

$$\widetilde{M}_{m,n} = W(\overline{\mathbb{F}_p})[F, V]/(F^m - V^n) = \widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda} \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^h})} W(\overline{\mathbb{F}_p})$$

Alors, $\mathrm{End}(M_{m,n}) = \mathcal{O}_{D_\lambda}$, $\mathrm{End}(\widetilde{M}_{m,n}) = \widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda}$, les deux modules $M_{m,n}$ et $\widetilde{M}_{m,n}$ sont isogénes, iso-simples de pente λ.

Définition 2.4.5. — Un module de Dieudonné M est minimal s'il est isomorphe à une somme directe de modules $M_{m,n}$. Il est spécial s'il est somme directe de modules isoclins de pentes $\lambda_i = m_i/(m_i + n_i)$ avec $m_i \wedge n_i = 1$ et tels que $F^{m_i} M_i = V^{n_i} M_i$.

***Théorème 2.4.6* (Manin)**. — *Soit M un module de Dieudonné. Il existe un plus grand sous-module spécial M_0 contenu dans M. De plus, l'indice de M_0 dans M est borné par une constante ne dépendant que du polygone de Newton de $M[1/p]$.*

La démonstration de ce théorème est donnée dans le chapitre III de [**57**]. On remarquera cependant que la démonstration du lemme 9 de [**77**] redonne la seconde partie du lemme de façon beaucoup plus simple.

Remarque 2.4.7. — Il existe également une notion de module divisible par ses pentes ([**77**]) plus générale qui consiste à supprimer la condition $m_i \wedge n_i = 1$ dans la définition d'un module spécial. Ces deux notions différent puisqu'un module est divisible par ses pentes ssi il est défini sur une extension de degré fini de $\mathbb{F}_p$ tendis que tout module spécial est défini sur un corps fini qui ne dépend que de son polygone de Newton.

Contrairement aux modules spéciaux, à polygone de Newton fixé, il y a une infinité de classes d'isomorphismes de modules divisibles par leurs pentes.

Lemme 2.4.8. — *Soit M un module isoclin de pente λ. Notons*

$$E = M[1/p]^{F^m = V^n} = \mathrm{Hom}(\widetilde{M}_{m,n}, M)[1/p] = \mathrm{Hom}(M_{m,n}, M)[1/p]$$

Celui-ci est muni d'une structure de D_λ-module à droite de rang la multiplicité de λ. Alors, les classes d'isomorphismes de quasi-isogénies entre les modules minimaux et M sont en bijection avec les sous-$\mathcal{O}_{D_\lambda}$-modules de E qui sont des $\mathbb{Z}_p$-réseaux. À la quasi-isogénie $\rho : M'[1/p] \to M[1/p]$ avec M' minimal on associe

$$\rho_* : \mathrm{Hom}(M_{m,n}, M') \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M_{m,n}, M[1/p]) = E$$

Les classes de quasi-isogénies entre modules spéciaux et M sont en bijection avec les sous-$\widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda}$-modules de E qui sont des $\mathbb{Z}_p$-réseaux. À $\rho : M'[1/p] \to M[1/p]$ avec M'

normal on associe

$$\rho(M'^{F^m=V^n}) = \rho_* \operatorname{Hom}(\widetilde{M}_{m,n}, M') \subset E$$

Démonstration. — Facile. □

Proposition 2.4.9. — *Il y a un nombre fini de classes d'isomorphismes de modules spéciaux de polygone de Newton donné.*

Démonstration. — On peut supposer M isoclin. Alors, si M' est le sous-$\mathcal{O}_{D_\lambda}$-module de $M[1/p]^{F^m=V^n}$ engendré par le $\widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda}$-module $M^{F^m=V^n}$, d'après le lemme 3.8 de [**57**]

$$\Pi^{m+n} M' \subset M \subset M'$$

et la classe d'isomorphisme de M' comme $\mathcal{O}_{D_\lambda}$-module est fixée (il est libre de rang fixé par le polygone de Newton). Or, pour un entier r, les sous-$\widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda}/\Pi^h\widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda}$-modules de $(\mathcal{O}_{D_\lambda}/\Pi^{m+n}\mathcal{O}_{D_\lambda})^r$ sont en nombre fini. □

Exemple 2.4.10. — Dans le cas iso-simple ce nombre est $|\mathrm{Pic}(\widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda})|$.

Proposition 2.4.11. — *Pour tout polygone de Newton β il existe une constant $N(\beta)$ telle que pour tout module de Dieudonné de polygone β il existe une isogénie ρ entre le module simple de polygone β et M telle que $p^{N(\beta)}\rho$ et $p^{N(\beta)}\rho^{-1}$ soient des isogénies.*

Démonstration. — D'après le théorème 2.4.6 on peut supposer M spécial. Dans la démonstration précédente la construction du module M' à partir du module M et les inclusions $\Pi^{m+n}M' \subset M \subset M'$ permettent alors de conclure. □

2.4.4.2. Action sur les composantes

Définition 2.4.12. — Si $\breve{\mathcal{M}}$ désigne un espace de Rapoport-Zink, nous noterons $\overline{\mathcal{M}}$ la fibre spéciale de $\breve{\mathcal{M}}$ c'est à dire le sous-schéma réduit défini sur $\overline{k}$.

Rappelons ([**68**]) que les composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{M}}$ sont des variétés projectives sur $\overline{k}$ et que $\overline{\mathcal{M}}$ étant localement de type fini, une composante irréductible n'intersecte qu'un nombre fini d'autres composantes. Le groupe J_b permute ces composantes. À part dans le cas du demi-plan de Drinfeld et de l'espace de Lubin-Tate où l'on possède des descriptions explicites, la combinatoire de ces composantes irréductibles munies de l'action de J_b reste à comprendre en général.

Théorème 2.4.13. — *Soit $\breve{\mathcal{M}}$ un espace de Rapoport-Zink de type E.L ou P.E.L. non ramifié simple ou encore associé à une donnée globale non ramifiée. Il y a un nombre fini d'orbites de composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{M}}$ sous l'action de J_b.*

Du point de vue de l'immeuble de G sur L ce théorème est un théorème de finitude pour l'action de J_b sur l'immeuble qui généralise la proposition 2.18 de [**68**].

D'après les remarques du début, un ouvert quasicompact de $\overline{\mathcal{M}}$ intersecte un nombre fini de composantes irréductibles et réciproquement une union finie de composantes irréductibles est quasicompacte. Le théorème est donc équivalent à l'énoncé : il existe un ouvert quasicompact U de $\overline{\mathcal{M}}$ tel que $\overline{\mathcal{M}} = J_b.U$.

On vérifie en utilisant la section 2.3.7 que l'on peut se ramener au cas des espaces associés à une donnée locale non ramifiée simple. Nous supposerons donc que $\breve{\mathcal{M}}$ est de ce type là. Commençons par rappeler le

Critère de quasicompacité 2.4.14 **(corollaire 2.31 de [68]).** — *Un ouvert U de $\overline{\mathcal{M}}$ est quasicompact ssi $\exists\, M \in \overline{\mathcal{M}}(\overline{k})\ \exists\, N \in \mathbb{N}$*

$$U(\overline{k}) \subset \{M' \in \breve{\mathcal{M}}(\overline{k}), p^N M \subset M' \subset p^{-N} M\}$$

de façon équivalente : $\exists\, N$, la quasi-isogénie universelle ρ^{univ} soit telle que sur U $p^N \rho^{\mathrm{univ}}$ et $p^N(\rho^{\mathrm{univ}})^{-1}$ soient des isogénies. Ainsi, les ensembles quasi-compacts correspondent aux sous ensembles bornés de l'immeuble de G sur L.

Le théorème 2.4.13 se reformule donc en : il existe un domaine fondamental de l'action de J_b sur $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$ qui est borné comme sous-ensemble de l'immeuble.

La démonstration consiste maintenant à exhiber un nombre fini d'orbites dans $\overline{\mathcal{M}}(\overline{k})$ (ou, dans le cas unitaire et symplectique, dans un ensemble plus gros : confère les définitions suivant 2.4.17) sous l'action de J_b vérifiant : il existe une constante c telle que tout point de $\overline{\mathcal{M}}(\overline{k})$ soit à distance inférieure à c d'un point d'une de ces orbites.

Étant donné qu'il n'y a qu'un nombre fini de polygones de Hodge possibles pour un groupe p-divisible muni de structures additionnelles isogène à $\mathbb{X}$, l'énoncé précédent est équivalent au même énoncé sans la condition de Kottwitz sur le polygone de Hodge arithmétique dans la définition de $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$. Nous ignorerons donc cette condition. Cela signifie que nous allons démontrer le théorème annoncé non pas sur l'espace $\breve{\mathcal{M}}$ mais sur l'espace plus gros défini de façon analogue, sans la condition de Kottwitz sur le polygone de Hodge. Nous noterons encore $\breve{\mathcal{M}}$ cet espace. Le lemme 2.4.3 est bien sûr encore valable pour cet espace.

Expliquons tout d'abord comment démontrer le théorème dans le cas (AL) lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de structures additionnelles.

Soit $Y_0/\overline{k}$ un groupe p-divisible minimal muni d'une isogénie : $f_0 : \mathbb{X} \to Y_0$. Soit $\widetilde{\mathcal{O}}$ la J_b-orbite de (Y_0, f_0) dans $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$. Soit maintenant $(X, \rho) \in \breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$. Appliquons la proposition 2.4.11 à X : soit $Y/\overline{k}$ un groupe p-divisible minimal et $f : X \to Y$ une quasi-isogénie telle que $p^{N(\beta)} f$ et $p^{N(\beta)} f^{-1}$ soient des isogénies (où β désigne le polygone de Newton de $\mathbb{X}$). Considérons le point $(Y, f \circ \rho) \in \breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$. Il est clair que ce point est à distance inférieure à $N(\beta)$ de (X, ρ). De plus, d'après le lemme 2.4.3 $(Y, f \circ \rho) \in \widetilde{\mathcal{O}}$. On en déduit donc le théorème lorsqu'il n'y a pas de structures additionnelles.

Démontrons maintenant le cas (AL) en général, c'est à dire lorsque l'on ajoute l'action de $\mathcal{O}_F$.

Lemme 2.4.15. — *Soient X_1, X_2 deux groupes p-divisibles minimaux munis d'une action de $\mathcal{O}_F$ isogènes comme groupes munsi d'une action de $\mathcal{O}_F$. Il existe alors un isomorphisme $\mathcal{O}_F$-équivaraint $X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$.*

Démonstration. — Tout groupe p-divisible minimal étant somme directe de groupes isoclins, et l'action de $\mathcal{O}_F$ respectant nécessairement cette décomposition (puisque si Y et Y' sont isoclins de pentes différentes $\mathrm{Hom}(Y, Y') = 0$), on peut supposer X_1 et X_2 isoclins de pente λ fixée. La catégorie des groupes p-divisibles minimaux isoclins de pentes λ est équivalante à celle des $\mathcal{O}_{D_\lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$-modules de type fini sans torsion.

Il s'agit donc de démontrer que deux tels $\mathcal{O}_{D_\lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$-modules E_1, E_2 tels que $E_1[1/p] \simeq E_2[1/p]$ comme $D_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$-modules sont isomorphes. Mais l'extensions $F|\mathbb{Q}_p$ étant non-ramifiée il existe un entier r et un nombre rationnel λ' tels que $\mathcal{O}_{D_\lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F \simeq M_r(\mathcal{O}'_{D_{\lambda'}})$ où $\mathcal{O}_{D'_{\lambda'}}$ désigne l'ordre maximal d'une algèbre à division d'invariant λ' sur F. Tout $\mathcal{O}_{D'_{\lambda'}}$-module est libre de rang celui du $D'_{\lambda'}$-module associé. L'équivalence de Morita permet donc de conclure. □

Proposition 2.4.16. — *Soit β un polygone de Newton. Il existe une constante $N(\beta)$ telle que pour tout groupe p-divisible Y muni d'une action de $\mathcal{O}_F$ de polygone de Newton β il existe une quasi-isogénie ρ entre l'unique groupe p-divisible minimal muni d'une action de $\mathcal{O}_F$ de polygone de Newton β (s'il en existe!) et Y telle que $p^{N(\beta)}\rho$ et $p^{N(\beta)}\rho^{-1}$ soient des isogénies.*

Démonstration. — Il suffit de voir que les deux constructions utilisées dans la démonstration de la proposition 2.4.11 (le sous-module spécial maximal et le $\mathcal{O}_{D_\lambda}$-module engendré par un $\widetilde{\mathcal{O}}_{D_\lambda}$-module) sont compatibles à l'action de $\mathcal{O}_F$ ce qui est immédiat. □

En utilisant ce lemme et cette proposition la démonstration du cas (AL) est analogue au cas déjà démontré lorsque $F = \mathbb{Q}_p$: il suffit de remplacer groupe p-divisible par groupe p-divisible muni d'une action de $\mathcal{O}_F$.

Passons maintenant au cas (AU). Commençons avant par une définition.

Définition 2.4.17. — Soit S un schéma et X un groupe p-divisible sur S. Soit N un entier. On appelle polarisation p^N-quasi-principale une polarisation $\lambda : X \to \check{X}$ telle que $p^N\lambda^{-1}$ soit une isogénie.

Une polarisation p^0-quasi-principale est donc une polarisation principale.

Définition 2.4.18. — Soit N un entier. On définit le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$ sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ comme étant l'espace de modules des groupes p-divisibles X sur un schéma sur lequel p est localement nilpotent, munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, d'une polarisation p^N-quasi-principale λ, et d'une rigidification $\rho : \mathbb{X} \to X$ qui est une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$ et qui transforme λ en un multiple rationnel de la polarisation sur $\mathbb{X}$. On ne suppose pas la condition de Kottwitz vérifiée.

Il est implicite dans cette définition que $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$ est représentable, ce qui se déduit du théorème 2.16 de [**68**] comme dans le théorème 3.25 de [**68**]. Cependant, nous n'utiliserons que l'ensemble $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}(\overline{k})$. Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$ est muni d'une action de J_b définie de façon analogue à celle sur $\breve{\mathcal{M}}$. Il y a une immersion J_b-équivariante $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}_{(p^0)} \hookrightarrow \breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$.

Nous allons démontrer l'existence d'un entier N et d'un nombre fini de J_b-orbites $\widetilde{\mathcal{O}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{O}}_r$ dans $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}(\overline{k})$ vérifiant : il existe une constante c telle que tout élément de $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k})$ est à distance inférieure à c d'une des orbite $\widetilde{\mathcal{O}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{O}}_r$. Cela démontrera le théorème dans le cas (AU).

Lemme 2.4.19. — *Dans l'énoncé de la proposition 2.4.16, supposons de plus Y muni d'une polarisation principale λ compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$ au sens où l'involution de Rosati induit l'involution $*$ sur $\mathcal{O}_F$. Il existe alors un entier M ne dépendant que de β tel que le groupe p-divisible minimal donné par la proposition 2.4.16 soit muni d'une polarisation p^M-quasi-principale λ' compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$ et à l'isogénie ρ.*

Démonstration. — On vérifie en effet que l'on peut prendre $M = 2N(\beta)$. □

Passons maintenant à un analogue faible du lemme 2.4.15.

Lemme 2.4.20. — *Soit N un entier. Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes p-divisibles minimaux Y sur $\overline{k}$ munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, d'une polarisation p^N-quasi-principale compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$ et isogènes avec leurs structures additionnelles à un même X fixé.*

Démonstration. — Soient $(\lambda_i)_i$ les pentes de X qui sont donc symétriques par rapport à $1/2$. Soit l'anneau $A = \prod_i \mathcal{O}_{D_{\lambda_i}}$. Il est muni d'une involution $\#$ échangeant les facteurs associés à λ_i et $1-\lambda_i$. À tout Y comme dans l'énoncé du lemme on peut associer un $A \otimes \mathcal{O}_F$-module hermitien de type fini sans torsion. Le résultat est alors une conséquence du lemme qui suit dans lequel il faut mettre $\mathcal{O}_F \otimes A$ pour A et $\# \otimes *$ pour $*$. □

Lemme 2.4.21. — *Soit A une $\mathbb{Z}_p$-algèbre qui est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, $*$ une involution de A, et B l'anneau $A_{\mathbb{Q}_p}$ muni de $*\otimes 1$. Soit $\mathcal{R}$ une classe d'isomorphismes de A-modules qui sont des $\mathbb{Z}_p$ modules libres de type fini. Si $M \in \mathcal{R}$, et $\langle \bullet, \bullet \rangle : M \times M \to \mathbb{Z}_p$ est un produit symplectique hermitien relativement à $\#$, parfait sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $M_{\mathbb{Q}_p}$, nous noterons $M^\vee \subset M_{\mathbb{Q}_p}$ le réseau dual. Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe un nombre fini de classes d'isomorphismes de tels A-modules symplectiques hermitiens $(M, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ tels que la classe d'isomorphisme de M soit $\mathcal{R}$ et $M \subset M^\vee \subset p^{-N}M$.*

Démonstration. — Soit n un entier vérifiant $n \geqslant 4N+2$. Soit M un A-module dont la classe d'isomorphisme est $\mathcal{R}$. Il existe un nombre fini de structures de A/p^nA-module symplectique hermitien sur M/p^nM. Montrons que si $\langle \bullet, \bullet \rangle_1$ et $\langle \bullet, \bullet \rangle_2$ sont deux structures symplectiques hermitiennes sur M vérifiant

$$\forall\, x, y \in M \quad \langle x, y \rangle_1 \equiv \langle x, y \rangle_2 \ [p^n]$$

alors il existe un isomorphisme $(M, \langle \bullet, \bullet \rangle_1) \simeq (M, \langle \bullet, \bullet \rangle_2)$, ce qui conclura. Soient donc deux tels produits $\langle \bullet, \bullet \rangle_1$ et $\langle \bullet, \bullet \rangle_2$. Nous devons montrer l'existence d'un $g \in \mathrm{GL}_A(M)$ tel que

$$\forall\, x, y \in M \quad \langle gx, gy \rangle_2 = \langle gx, gy \rangle_1$$

sachant que, relativement à $\langle \bullet, \bullet \rangle_1$ et $\langle \bullet, \bullet \rangle_2$, $M^\vee \subset p^{-N}M$. Il existe $u \in \mathrm{End}_{A_{\mathbb{Q}_p}}(M_{\mathbb{Q}_p})$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in M_{\mathbb{Q}_p} \quad \langle x, y \rangle_2 = \langle u(x), y \rangle_1$$

Notons $*$ l'adjonction par rapport à $\langle \bullet, \bullet \rangle_1$ sur $\mathrm{End}_{A_{\mathbb{Q}_p}}(M_{\mathbb{Q}_p})$. Désormais tous les réseaux duaux seront pris par rapport à $\langle \bullet, \bullet \rangle_1$. On a l'égalité $u^* = u$ et

$$\forall\, x, y \in M \quad \langle u(x), y \rangle \equiv \langle x, y \rangle \ [p^n] \Longrightarrow (u - \mathrm{Id})(M) \subset p^n M^\vee \subset p^{n-N}M$$

Cherchons un $\alpha \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que

$$\forall\, x, y \in M \quad \langle (\mathrm{Id} + p^{[n/2]+1}\alpha)(x), (\mathrm{Id} + p^{[n/2]+1}\alpha)(y) \rangle_2 \equiv \langle x, y \rangle_1 \ [p^{n+1}]$$

Un petit calcul montre que si α est solution de

$$\alpha^* + \alpha = \frac{u - \mathrm{Id}}{p^{[n/2]+1}}$$

et vérifie $\alpha^*(M) \subset M$, α conviendra. Or,

$$\begin{aligned}(u - \mathrm{Id})(\Lambda_i) \subset p^{n-N}M &\Longrightarrow \left(\frac{u - \mathrm{Id}}{p^{[n/2]+1}}\right)(M) \subset p^{n-[n/2]-1-N}M \subset p^{\frac{n}{2}-1-N}M \\ &\Longrightarrow \left(\frac{u - \mathrm{Id}}{p^{[n/2]+1}}\right)^*(M) \subset p^{\frac{n}{2}-1-2N}M\end{aligned}$$

la dernière inclusion résultant de

$$\forall\, v \in \mathrm{End}_A(M) \quad v^*(M) \subset p^{-N}M$$

car $\forall\, x \in M \ v^*(x) \in M^\vee \subset p^{-N}M$ (l'appliquer à $v = p^{-[n/2]+1+N}\left(\frac{u-\mathrm{Id}}{p^{[n/2]+1}}\right)$).

Donc, comme $n \geqslant 4N+3$, $[n/2] - 1 - 2N \geqslant 1$ ce qui implique (le 1 étant là pour le cas $p = 2$) que

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u - \mathrm{Id}}{p^{[n/2]+1}}\right) + \left(\frac{u - \mathrm{Id}}{p^{[n/2]+1}}\right)^*\right] \in \mathrm{End}_A(M)$$

convient. De plus, $\mathrm{Id} + p^{[n/2]+1}\alpha \in \mathrm{GL}_A(M)$.

Quitte à modifier $\langle \bullet, \bullet \rangle_2$ par cet automorphisme on peut maintenant supposer que $\langle x, y \rangle_1 \equiv \langle x, y \rangle_2 \ [p^{n+1}]$ et rappliquer la méthode de résolution par récurrence pour obtenir une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_B(V)$ convergeant vers un g tel que $\langle g\bullet, g\bullet \rangle_2 = \langle \bullet, \bullet \rangle_1$

(étant donné que le g construit précédemment appartient à $\mathrm{Id} + p^{[n/2]+1}\,\mathrm{End}_A(M)$, la convergence est assurée). $\square$

Appliquons maintenant le lemme 2.4.3 (encore valable pour $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$). On obtient donc l'existence d'un nombre fini de J_b-orbites dans $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}(\overline{k})$ tel que tout point soit à distance inférieure à c d'une telle orbite.

Le cas (C) se traite de la façon analogue au cas précédent en utilisant le lemme 2.4.21. $\square$

CHAPITRE 3
UNIFORMISATION DES VARIÉTÉS DE SHIMURA DE TYPE P.E.L.

L'uniformisation des variétés de Shimura se décompose en plusieurs étapes :

• stratification de la fibre spéciale selon la classe d'isogénie du groupe p-divisible muni de structures additionnelles

• raffinement d'une strate en classes d'isogénies ϕ de variétés abéliennes munies de structures additionnelles

• classes d'isomorphismes dans une classe d'isogénie :

– en p grâce à l'espace $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$

– hors p « tout est étale » et il s'agit d'une description de réseaux munis de structures de niveau c'est-à-dire d'éléments de $G(\mathbf{A}_f^p)/K_p$

Certaines de ces étapes apparaissent dans le comptage des points des variétés de Shimura sur les corps finis.

3.0.5. Stratification par la classe d'isogénie du groupe p-divisible. — Reprenons les notations globales du premier chapitre.

Soit $\overline{S}_{K^p} = S_{K^p} \times_{\mathcal{O}_{E_\nu}} k$ où k désigne ici le corps résiduel de E_ν. Soit $\mathcal{A}/\overline{S}$ le schéma abélien universel.

Grâce au théorème de spécialisation des cristaux de Grothendieck généralisé dans [**66**] le schéma $\overline{S}$ est stratifiée par le polygone de Newton du cristal muni de structures additionnelles $R^1 f_{\text{cris}*}\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$. Plus précisément, si $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$

$$\overline{S}(b) = \{x \in \overline{S}(\overline{k}) \mid (H_{1,\text{cris}}(\mathcal{A}_x, W(\overline{k})_{\mathbb{Q}}), F) \simeq (V_{\mathbb{Q}_p} \otimes W(\overline{k})_{\mathbb{Q}}, b \otimes \sigma)\}$$

(l'isomorphisme étant pris au sens des isocristaux munis de structures additionnelles). L'ensemble $\overline{S}(b)$ est l'ensemble des points géométriques sous-jacents à un sous-schéma localement fermé réduit de $\overline{S}$ encore noté $\overline{S}(b)$. On a la stratification

$$\overline{S} = \coprod_{b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})} \overline{S}(b)$$

et si P est un polygone fixé $\coprod_{\text{Newt}(b) \geqslant P} \overline{S}(b)$ est fermé dans $\overline{S}$.

Deux strates se distinguent particulièrement :

• la strate basique qui est fermée et est associée à la classe basique de $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Son polygone de Newton est maximal

• la strate μ-ordinaire associée à l'image via $B(T) \to B(G_{\mathbb{Q}_p})$ de $\widehat{\mu}_{|\widehat{T}^\Gamma} \in B(T)$ (T est un tore maximal de $G_{\mathbb{Q}_p}$) de polygone de Newton minimal dans $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Elle est ouverte et dense dans $\overline{S}$ ([**74**])

Rappelons enfin que l'on conjecture en général que $\overline{S}(b) \neq \varnothing \Leftrightarrow b \in B(G,\mu)$ (la conjecture est pour l'implication de la droite vers la gauche, l'implication de la gauche vers la droite étant la généralisation du théorème de Mazur). Nous montrerons de tout façon plus tard que la strate basique est non vide, ce qui est suffisant pour les applications que nous avons en vue.

3.1. Uniformisation de Rapoport-Zink

Fixons un point base $x \in \overline{S}(\overline{k})$. Le théorème de Serre Tate permet d'uniformiser S « verticalement » au-dessus de x c'est-à-dire sur un voisinage formel de x :

$S^{\wedge}_{\{x\}} \simeq$: {déformations par isomorphismes du groupe p-divisible muni de structures additionnelles $\mathcal{A}_x[p^\infty]$}.

Nous voulons uniformiser une plus grande partie de la strate qu'un point, c'est pourquoi on déforme le groupe p-divisible non plus par isomorphismes mais par quasi-isogénies grâce à l'espace $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$.

Soit ϕ la classe d'isogénie du triplet $(\mathcal{A}_x, \lambda, \iota)$ et

$$I^\phi = \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_x, \lambda, \iota)$$

un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$. Notons $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ la classe associée à ϕ et $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ l'espace de Rapoport-Zink associé. A ϕ est alors associé un ensemble $\widetilde{S}(\phi)$ de sous-schémas fermés projectifs de $\overline{S}(b)_{\overline{k}}$ (*cf.* le théorème 6.23 de [**68**] pour la définition de $\widetilde{S}(\phi)$ où cet ensemble est noté $\mathcal{T}$) tel que

$$\bigcup_{A \in \widetilde{S}(\phi)} A(\overline{k}) = \{y \in \overline{S}(b)(\overline{k}) \mid \text{ la classe d'isogénie de } (\mathcal{A}_y, \lambda, \iota) \in \phi\}$$

Le théorème 6.23 de [**68**] affirme alors qu'il y a un isomorphisme de schémas formels sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$:

$$\Theta : I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) \xrightarrow{\sim} \left(S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{\breve{E}}\right)^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}$$

où l'application d'uniformisation est définie en tordant le triplet $(\mathcal{A}_x, \lambda, \iota)$ par une déformation par quasi-isogénie de $(\mathcal{A}_x[p^\infty], \lambda, \iota)$ et en tordant la structure de niveau $\overline{\eta^p}$ par un élément de $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$. L'action de $I^\phi(\mathbb{Q})$ sur $\breve{\mathcal{M}}$ se fait à travers J_b par action de $I^\phi(\mathbb{Q})$ par quasi-isogénies sur $(\mathcal{A}_x[p^\infty], \lambda, \iota)$ ce qui donne une injection

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow J_b$$

et sur $G(\mathbf{A}_f^p)$ via l'action d'un élément de $I^\phi(\mathbb{Q})$ sur le module de Tate $H_1(\mathcal{A}_x, \mathbf{A}_f^p)$ ce qui donne une injection

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbf{A}_f^p)$$

Lorsque K^p varie les différents isomorphismes d'uniformisation sont compatibles et commutent à l'action de $G(\mathbf{A}_f^p)$ (et donc aux correspondances de Hecke hors p) en un sens évident.

3.1.1. Quelques propriétés de l'isomorphisme d'uniformisation. — Soit $(y_i)_{i\in I}$ un ensemble de représentants des orbites de $I^\phi(\mathbb{Q})$ dans $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$, c'est-à-dire

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q})\cdot y_i$$

Pour tout $i\in I$ notons $\Gamma_i = \mathrm{Stab}_{I^\phi(\mathbb{Q})}\, y_i$ que l'on verra comme un sous-groupe de J_b. L'isomorphisme d'uniformisation se récrit alors :

$$\coprod_{i\in I} \Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \big(S_{K^p}\otimes \mathcal{O}_{\breve{E}}\big)\widehat{\ }_{/\widetilde{S}(\phi)}$$

Définition 3.1.1. — Appelons $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-groupes $\Gamma\subset J_b$ de la forme $I^\phi(\mathbb{Q})\cap(J_b\times K^p)$ pour $K^p\subset G(\mathbf{A}_f^p)$ tel qu'il existe un $g\in G(\mathbf{A}_f^p), gK^pg^{-1}$ soit suffisamment petit.

Les groupes $\Gamma\in\mathcal{C}$ sont exactement les groupes Γ_i qui interviennent dans les morphismes d'uniformisation ci-dessus lorsque K^p et $(y_i)_i$ varient.

Lemme 3.1.2. — *Les éléments de $\mathcal{C}$ vérifient :*

- *Tout élément Γ dans $\mathcal{C}$ est discret sans torsion dans J_b.*
- *$\forall\,\Gamma_1,\Gamma_2\in\mathcal{C}$ Γ_2 et Γ_2 sont commensurables.*
- *$\forall\, A\subset J_b$ fini il existe $\Gamma\in\mathcal{C}$ tel que $\Gamma\cap A=\varnothing$.*

Démonstration. — Le fait que Γ soit discret et sans torsion est démontré lors de la démonstration du théorème 6.23 de [**68**]. La commensurabilité résulte de la commensurabilité des $K^p\subset G(\mathbf{A}_f^p)$ compacts ouverts. Quant à la dernière propriété, c'est une conséquence du fait que si $\ell\neq p, I^\phi(\mathbb{Q})\hookrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell)$ et $G(\mathbb{Q}_\ell)$ est séparé au sens où pour tout sous-ensemble fini A de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ il existe un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ ne rencontrant pas A. □

Rappelons également :

Proposition 3.1.3 **([68])**. — *Pour tout ouvert quasicompact U dans $\breve{\mathcal{M}}$, pour tout groupe Γ dans $\mathcal{C}$, l'ensemble $\{\gamma\in\Gamma\mid U\cdot\gamma\cap U\neq\varnothing\}$ est fini, et $\Gamma\smallsetminus\{\mathrm{Id}\}$ n'a pas de point fixe dans $\breve{\mathcal{M}}$.*

Le groupe Γ agit donc en quelque sorte de façon proprement discontinue et sans points fixes sur $\breve{\mathcal{M}}$, comme c'est le cas pour les groupes arithmétiques uniformisant les points complexes des variétés de Shimura et agissant sur les domaines symétriques hermitiens $X=G(\mathbb{R})/K_\infty$.

Corollaire 3.1.4. — *Tout ouvert quasicompact U dans $\breve{\mathcal{M}}$ est isomorphe au complété formel d'une variété quasi-projective sur $\mathcal{O}_{\breve{E}}$ le long d'un sous-schéma fermé de sa fibre spéciale.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente et le lemme 3.1.2 il existe $\Gamma \in \mathcal{C}$ tel que $\forall g \in \Gamma \;\; U \cdot \gamma \cap U = \varnothing$. On peut insérer Γ dans des $(\Gamma_i)_{i\in I}$ uniformisant S. Considérons alors le composé

$$U \hookrightarrow \breve{\mathcal{M}} \longrightarrow \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}} \hookrightarrow \coprod_{i\in I} \Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} S^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}$$

qui induit une immersion ouverte de U dans $S^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}$. L'ouvert U étant quasicompact, la fibre spéciale de l'ouvert de $S^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}$ image par ce composé ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\widetilde{S}(\phi)$. Cet ouvert s'identifie donc au complété formel de S le long d'un ouvert d'une union finie d'éléments de $\widetilde{S}(\phi)$, *i.e.* un ouvert d'un fermé de $\overline{S}$. Le schéma S étant quasiprojectif on en déduit le résultat. $\square$

Corollaire 3.1.5. — *Pour tout Γ élément de $\mathcal{C}$ le morphisme $\breve{\mathcal{M}} \to \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}$ est étale (i.e. adique et formellement étale) et le morphisme d'uniformisation est étale.*

Démonstration. — Il faut montrer que le morphisme $\breve{\mathcal{M}} \to \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}$ est adique puisqu'il est clairement formellement étale. Il suffit de montrer que ce morphisme est adique en restriction à tout ouvert quasicompact de $\breve{\mathcal{M}}$. Soit U un ouvert quasicompact de $\breve{\mathcal{M}}$. Choisissons un sous groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $\Gamma' \in \mathcal{C}$ et $\forall \gamma \in \Gamma' \smallsetminus \{\mathrm{Id}\} \;\; \gamma \cdot U \cap U = \varnothing$. Décomposons l'application $U \to \breve{\mathcal{M}}/\Gamma$ en

$$U \xhookrightarrow{j} \breve{\mathcal{M}} \xrightarrow{p} \breve{\mathcal{M}}/\Gamma' \xrightarrow{\pi} \breve{\mathcal{M}}/\Gamma$$

Si l'on choisit $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que Γ soit de la forme $I^{\phi}(\mathbb{Q}) \cap (J_b \times K^p)$ et Γ' de la forme $I^{\phi}(\mathbb{Q}) \cap K^{p\prime}$ pour $K^{p\prime} \subset K^p$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \breve{\mathcal{M}}/\Gamma' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & (S_{K^{p\prime}})^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)} \arrow[d] \\ \breve{\mathcal{M}}/\Gamma \arrow[r, hook] & (S_{K^p})^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)} \end{tikzcd}$$

L'application de droite étant étale on en déduit que π l'est. Le morphisme $p \circ j$ étant une immersion ouverte cela conclu la démonstration. $\square$

Lemme 3.1.6. — *L'inclusion $I^{\phi}(\mathbf{A}_f^p) \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. — L'existence d'un isomorphisme de $B \otimes \mathbf{A}_f^p$-modules symplectiques $\eta : V \otimes \mathbf{A}_f^p \xrightarrow{\sim} H_1(\mathcal{A}_x, \mathbf{A}_f^p)$ implique que la $\widehat{\mathbb{Z}}^p$ structure sur $G(\mathbf{A}_f^p)$ est la même que celle induite sur $I^{\phi}(\mathbf{A}_f^p)$. $\square$

Lemme 3.1.7. — *Pour tout élément Γ dans $\mathcal{C}$, le groupe Γ est cocompact dans $I^{\phi}(\mathbb{Q}_p)$.*

Démonstration. — Cela résulte du fait que le groupe réductif I^{ϕ} est anisotrope modulo son centre, $I^{\phi}(\mathbb{R})$ est compact modulo son centre et que d'après le lemme précédent si K est un sous groupe compact ouvert de $J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$ alors $K \cap I^{\phi}(\mathbf{A}_f)$ est compact ouvert dans $I^{\phi}(\mathbf{A}_f)$. □

3.1.2. Le cas de la strate basique. — Supposons dans cette section que $b = b_0$ est la classe basique de $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. D'après [**68**](6.34) on a alors :

- L'ensemble $\{\phi \mid b(\phi) = b_0\}$ est fini
- $\forall \phi \; b(\phi) = b_0$, I^{ϕ} est une forme intérieure de G
- $I^{\phi}(\mathbb{Q}_p) = J_b$, $\forall \ell \neq p$, $I^{\phi}(\mathbb{Q}_\ell) = G(\mathbb{Q}_\ell)$ et donc $I^{\phi}(\mathbf{A}_f) = J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$ (comme groupes topologiques d'après 3.1.6)
- $I^{\phi}(\mathbb{R})$ est la forme intérieure compacte modulo le centre de $G(\mathbb{R})$
- Le lemme 3.1.7 implique alors que $\forall \Gamma \in \mathcal{C}$ Γ est cocompact dans J_b

Dans le cas (A) et (C) de [**51**] que nous considérons on a en fait mieux :

Proposition 3.1.8 **([51, 68])**. — *Le nombre de classes d'isogénie ϕ intervenant dans la strate basique est égal a $|\ker^1(\mathbb{Q}, G)|$. De plus, pour toutes ces classes d'isogénie ϕ les groupes I^{ϕ} sont isomorphes sur $\mathbb{Q}$ et il existe des isomorphismes compatibles avec les isomorphismes $I^{\phi}(\mathbf{A}_f) \simeq J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$.*

Démonstration. — Il résulte du lemme 6.28 de [**68**] que les classes d'isogénie de la strate basique sur un corps fini $\mathbb{F}_{p^r}$ sont associées à un même triplet $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ de [**51**]. Le reste de la proposition se déduit de [**51**]. □

Corollaire 3.1.9. — *On a alors une uniformisation de la strate basique*

$$\coprod_{\ker^1(\mathbb{Q},G)} I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) \xrightarrow{\sim} (S_{K^p})^{\wedge}_{/\overline{S}(b_0)}$$

où $I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$ est fini.

3.2. Uniformisation rigide

Revenons au cas d'un b quelconque.

Lemme 3.2.1. — *Pour tout Γ dans $\mathcal{C}$ il y a un isomorphisme*

$$\Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \left(\Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}\right)^{\mathrm{an}}$$

Démonstration. — Si Uest un ouvert quasicompact de $\breve{\mathcal{M}}$, soit $\Gamma' \lhd \Gamma$, $\Gamma' \in \mathcal{C}$ choisi tel que $\forall \gamma' \in \Gamma' \setminus \{\mathrm{Id}\}$ $\gamma' \cdot U \cap U = \emptyset$ et tel que le morphisme $\Gamma'\backslash\breve{\mathcal{M}} \to \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}$ soit étale fini galoisien de groupe Γ/Γ'. Notons $p' : \breve{\mathcal{M}} \to \Gamma'\backslash\breve{\mathcal{M}}$, $p : \breve{\mathcal{M}} \to \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}$ les projections et $V = p^{-1}(p(U)) = \cup_{\gamma \in \Gamma} U \cdot \gamma$.

Étant donné que Γ' est d'indice fini dans Γ, $p'(V)$ est quasicompact. Le morphisme $p'(V) \to p(U)$ est galoisien de groupe Γ/Γ' ce qui implique que

$$p(U)^{\mathrm{an}} = (\Gamma/\Gamma')\backslash p'(V)^{\mathrm{an}}$$

De plus, $p'(V) = \Gamma'\backslash V$ au sens où $p'(V)$ est le schéma formel recollé des $(\gamma \cdot U)_{\gamma\in\Gamma}$ le long des $\gamma_1 \cdot U \cap \gamma'\gamma_2 \cdot U$ pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ et $\gamma' \in \Gamma'$. Donc $p'(V)^{\mathrm{an}}$ est l'espace analytique recollé des domaines analytiques fermés $\gamma \cdot U^{\mathrm{an}}$ le long des fermés analytiques $\gamma_1 \cdot U^{\mathrm{an}} \cap \gamma'\gamma_2 \cdot U^{\mathrm{an}}$. Cela implique que $\Gamma'\backslash p'(V)^{\mathrm{an}} = V^{\mathrm{an}}$. Au final,

$$p(U)^{\mathrm{an}} = (\Gamma/\Gamma')\backslash p'(V)^{\mathrm{an}} = (\Gamma/\Gamma')\backslash(\Gamma'\backslash V^{\mathrm{an}}) = \Gamma\backslash V^{\mathrm{an}}$$

Écrivant $\breve{\mathcal{M}}$ comme union croissante de tels U on obtient le résultat. □

Soit maintenant ϕ une classe d'isogénie comme dans la section 3.1 et $\widetilde{S}(\phi)$ la famille de sous-schémas fermés de $\overline{S}_{\overline{k}}$ associée. Notons $S^{\wedge}_{K^p}$ le complété p-adique du schéma $S_{K^p} \times_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{\breve{E}}$ et $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{C_0K^p}$ l'espace analytique sur $\breve{E}$ associée à la variété algébrique $\mathrm{Sh}_{C_0K^p} \otimes \breve{E}$. Il y a une immersion

$$(S^{\wedge}_{K^p})^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{K^pC_0}$$

qui est un domaine analytique fermé égal à tout $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{K^pC_0}$ lorsque S est propre.

Le morphisme de spécialisation

$$sp : (S^{\wedge}_{K^p})^{\mathrm{an}} \longrightarrow \overline{S}_{K^p}$$

est défini sur ce domaine analytique. Si le schéma S n'est pas propre les points de $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{K^pC_0} \setminus (S^{\wedge}_{K^p})^{\mathrm{an}}$ se spécialisent sur le bord de la fibre spéciale d'une compactification de S. Dit en d'autres termes, les points géométriques de $(S^{\wedge}_{K^p})^{\mathrm{an}}$ sont les points géométriques x de $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{K^pC_0}$ où la variété abélienne $\mathcal{A}_x$ muni de ses structures additionnelles a bonne réduction.

Définition 3.2.2. — Nous noterons

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{C_0K^p}(\phi) = \left((S_{K^p})^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}\right)^{\mathrm{an}}$$

la fibre générique du schéma formel complété de S le long de $\widetilde{S}(\phi)$.

C'est le tube au-dessus de $\widetilde{S}(\phi)$ au sens suivant : $\forall\, Z \in \widetilde{S}(\phi)\quad (S^{\wedge}_{/Z})^{\mathrm{an}} = \mathrm{sp}^{-1}(Z)$ est un domaine analytique ouvert dans $(S^{\wedge})^{\mathrm{an}}$. L'espace analytique $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{C_0K^p}(\phi)$ est alors l'espace analytique recollé des ouverts $\mathrm{sp}^{-1}(Z), Z \in \widetilde{S}(\phi)$ le long des $\mathrm{sp}^{-1}(Z_1) \cap \mathrm{sp}^{-1}(Z_2)$, $Z_1, Z_2 \in \widetilde{S}(\phi)$. On a donc que $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{C_0K^p}(\phi)$ est l'ouvert analytique de $(S^{\wedge})^{\mathrm{an}}$ union des $\mathrm{sp}^{-1}(Z), Z \in \widetilde{S}(\phi)$.

Remarque 3.2.3. — En fait, on a mieux car les $Z \in \widetilde{S}(\phi)$ sont des variétés projectives et on en déduit que $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{C_0K^p}(\phi)$ n'est pas seulement ouvert dans $(S^{\wedge})^{\mathrm{an}}$ mais aussi dans $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{C_0K^p}$.

Remarque 3.2.4. — À part pour la strate basique,

$$\coprod_{\phi, b(\phi)=b} \mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{C_0K^p}(\phi) \subsetneq \mathrm{sp}^{-1}(\overline{S}(b))$$

Par exemple, un point de $\mathrm{sp}^{-1}(\overline{S}(b))$ se spécialisant sur le point générique d'une composante irréductible de $\overline{S}(b)$ n'appartient pas au membre de gauche pour b différent de la classe basique.

Définition 3.2.5. — Si $K_p \subset C_0$, $K = K_pK^p$ nous noterons

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi) = \Pi^{-1}_{C_0K^p,K}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{C_0K^p}(\phi))$$

un ouvert analytique de $(\mathrm{Sh}_K)^{\mathrm{an}}_\eta$.

On a alors le théorème suivant combiné de l'uniformisation formelle et du lemme 3.2.1 :

Théorème 3.2.6 **([68])**. — *Pour $K = K_pK^p$ variant il y a un isomorphisme de tours d'espaces analytiques sur $\breve{E}$ munies d'une action de $G(\mathbf{A}_f) = G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbf{A}_f^p)$*

$$I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi)$$

Corollaire 3.2.7. — *Pour tout K_p, $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ est un espace analytique quasi-algébrique (*[**3**, **2**]*).*

Corollaire 3.2.8. — *Pour tout Γ dans $\mathcal{C}$ le morphisme $\breve{\mathcal{M}}_K \to \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}_K$ est un isomorphisme local d'espace analytiques.*

Démonstration. — Soit $x \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$. D'après le corollaire précédent, x possède une base de voisinages formée de domaines affinoïdes. De plus, si $\mathrm{sp}(x) \in Z$ une composante irréductible de $\overline{\mathcal{M}}$, $\mathrm{sp}^{-1}(Z)$ est un voisinage de x vérifiant

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot \mathrm{sp}^{-1}(Z) \cap \mathrm{sp}^{-1}(Z)\} \text{ est fini}$$

x possède donc une base de voisinages affinoïdes $\mathcal{B}$ tels que $\forall V \in \mathcal{B}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot V \cap V \neq \varnothing\}$ soit fini. Rappelons également que $\Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$ n'a pas de points fixes dans $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$.

Soit donc $V \in \mathcal{B}$ fixé et

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\} = \{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\} \mid \gamma \cdot V \cap V \neq \varnothing\}$$

Alors,

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\} \quad \bigcap_{W \in \mathcal{B}\ W \subset V} W \cap \gamma_i \cdot W = \varnothing$$

car x n'est pas un point fixe de γ_i. Par compacité des $W \in \mathcal{B}$,

$$\forall i, \exists W_i \in \mathcal{B}, \ \ W_i \cap \gamma_i . W_i = \varnothing$$

Alors, $W' = \bigcap_{i=1}^d W_i$ est un domaine affinoïde voisinage de x vérifiant $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$, $W' \cap \gamma \cdot W' = \varnothing$ et $W' \hookrightarrow \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$. □

Corollaire 3.2.9. — *Le morphisme d'uniformisation* $\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \rightarrow \mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{K_pK^p}(\phi)$ *est un isomorphisme local.*

Remarque 3.2.10. — Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme étale d'espaces analytiques de Berkovich, f est un isomorphisme local si et seulement si $\forall\, x \in X$ le morphisme induit entre les complété des corps résiduels, $f^* : \mathcal{K}(f(x)) \rightarrow \mathcal{K}(x)$, est un isomorphisme. Les revêtements étales qui sont des isomorphismes locaux correspondent aux revêtements de l'espace topologique $|Y|$. Ceux-ci sont classifiés par un quotient du groupe fondamental étale de Y, $\pi_1^{\mathrm{top}}(Y) = \pi_1(|Y|)$. Le morphisme d'uniformisation correspond donc à des morphismes $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K, \overline{x}) \twoheadrightarrow \Gamma$ pour $\overline{x}$ variant et $\Gamma \in \mathcal{C}$. Par opposition à π_1^{top} les revêtements $\breve{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \breve{\mathcal{M}}_K$ sont classifiés par le groupe fondamental algébrique π_1^{alg}, *cf.* [**42**].

CHAPITRE 4
UNE SUITE SPECTRALE DE HOCHSCHILD-SERRE POUR L'UNIFORMISATION DE RAPOPORT-ZINK

4.1. Cohomologie étale ℓ-adique des espaces analytiques rigides

Dans cette section nous donnons des démonstration des résultats non publiés de [**2**] en suivant [**36**].

La théorie utilisée ici est celle de la cohomologie à support compact des espaces de Berkovich. Il s'agit de la « bonne » théorie cohomologique pour les espaces rigides partiellement propres c'est-à-dire qui sont « surconvergents » (*cf.* appendice D.2).

4.1.1. Propriétés générales. — Soit k un corps valué complet et X un k-espace analytique Hausdorff (*i.e.* $|X|$ est séparé). Soit Λ un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$ où $p = char(k^0/k^{00})$.

Définition 4.1.1. — Un $\Lambda_\bullet$ faisceau ou encore un faisceau Λ-adique sur $X_{\text{ét}}$ est un système projectif $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de faisceaux en Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$ vérifiant $\forall n \;\; \mathfrak{m}^n\mathcal{F}_n = 0$. Nous noterons $\Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X^{\text{ét}}}$ la catégorie associée. On définit de même $\Lambda_\bullet - mod$ la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules. On notera également $\Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X^{\text{ét}}}$ la catégorie des faisceaux de Λ-modules.

$\Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X^{\text{ét}}}$ est une catégorie abélienne Λ-linéaire possédant suffisamment d'injectifs.

Il y a un foncteur exact à gauche

$$\begin{aligned} \pi_* : \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}} &\longrightarrow \Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}} \\ (\mathcal{F}_n)_n &\longmapsto \varprojlim \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

Si $(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ et X n'est pas compact il n'est pas raisonnable de poser $\Gamma_c(X, (\mathcal{F}_n)_n)$ comme étant égal à $\varprojlim \Gamma_c(X, \mathcal{F}_n)$ car si $(s_n)_n \in \varprojlim \Gamma_c(X, \mathcal{F}_n)$ il se peut que l'adhérence de $\cup_n \operatorname{supp}(s_n)$ ne soit pas compact. Nous adopterons donc la définition suivante :

Définition 4.1.2. — Soit le foncteur

$$\begin{aligned} \Gamma_! : \Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}} &\longrightarrow \boldsymbol{Ab} \\ \mathcal{F} &\longmapsto \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Alors, on posera $\Gamma_c = \Gamma_! \circ \pi_*$. On a donc

$$\Gamma_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) = \{(s_n)_n \in \varprojlim \Gamma(X, \mathcal{F}_n) \mid \overline{\cup_n \operatorname{supp}(s_n)} \text{ est compact}\}.$$

On posera

$$H_c^p(X, (\mathcal{F}_n)_n) = R^p(\Gamma_c(X, -))((\mathcal{F}_n)_n)$$

Ainsi, si X est compact $\Gamma_c(X,(\mathcal{F}_n)_n)=\varprojlim_n \Gamma(X,\mathcal{F}_n)$.

Lemme 4.1.3. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$. Si $\forall x \in X$, $\mathcal{F}_x$ est un $\boldsymbol{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x))$-module acyclique et si $\mathcal{F}_{||X|}$ est un faisceau mou, $\mathcal{F}$ est Γ_c acyclique.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le morphisme de sites $f : X_{\text{ét}} \to |X|$. La première hypothèse montre que $\forall p>0$, $R^pf_*(\mathcal{F})=0$ car ses fibres en tous les points de $|X|$ sont nulles (*cf.* [**1**], 4.2.4). La suite spectrale de Leray associée dégénère donc en $H^p_c(X_{\text{ét}},\mathcal{F})\simeq H^p_c(|X|,\mathcal{F}_{|X|})$ mais $|X|$ est localement paracompact donc $\mathcal{F}_{||X|}$ étant mou il est $\Gamma_c(|X|,-)$-acyclique. □

L'intérêt du lemme qui suit est qu'il permet de calculer la cohomologie à support compact d'un faisceau Λ-adique comme l'hypercohomologie à support compact d'un complexe de faisceaux de Λ-modules.

Lemme 4.1.4. — $\mathbb{R}\Gamma_c=\mathbb{R}\Gamma_!\circ\mathbb{R}\pi_*$.

Démonstration. — En suivant la preuve du i) du lemme 2.3 de [**36**] on voit qu'il suffit de montrer que si $\forall n$, $\mathcal{I}_n$ est un injectif de $\Lambda/\mathfrak{m}^n-\mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$, alors $\prod_{k=0}^{\infty}\mathcal{I}_k$ est $\Gamma_!$ acyclique. Pour cela nous allons appliquer le lemme 4.1.3.

$$\forall x\in X \quad \Big(\prod_k \mathcal{I}_k\Big)_x \simeq \Big(\prod(\mathcal{I}_k)_x\Big)^{\text{disc}}$$

comme $\boldsymbol{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x))$-module galoisien discret, où si M est un module galoisien M^{disc} désigne sa partie discrète. Or, si $(M_k)_{k\in K}$ sont des $\boldsymbol{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x))$-modules discrets

$$H^q\Big(\boldsymbol{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x)),\Big(\prod_k M_k\Big)^{\text{disc}}\Big)\simeq\prod_k H^q(\boldsymbol{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x)),M_k)$$

$\mathcal{I}_k$ étant injectif comme faisceau de $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-modules, $\forall x$, $\mathcal{I}_{k,x}$ est un $\boldsymbol{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x))$-module galoisien acyclique ([**1**], 4.2.5). On en déduit donc que $(\prod_k\mathcal{I}_k)_x$ en est également un. De plus, $(\prod_k\mathcal{I}_k)_{||X|}$ est mou car il est flasque et $|X|$ est localement paracompact. □

Lemme 4.1.5. — *Soit $\mathbb{U}(X)$ un ensemble d'ouverts de X tels que $\forall U\in\mathbb{U}(X)$, $\overline{U}$ est compact, $\forall U_1,U_2\in\mathbb{U}(X)$, $\exists U_3\in\mathbb{U}(X)$, $U_1\cup U_2\subset U_3$ et $\bigcup_{U\in\mathbb{U}(X)}U=X$. On a alors,*

$$\Gamma_c(X,(\mathcal{F}_n)_n)=\varinjlim_{U\in\mathbb{U}(X)}\varprojlim_n\Gamma_c(U,\mathcal{F}_n)$$

Démonstration. — Cela résulte de ce que tout compact de X est contenu dans un élément de $\mathbb{U}(X)$ et réciproquement. □

Nous choisirons généralement $\mathbb{U}(X)=\{$ouverts U de X, $\overline{U}$ est compact$\}$ ou bien $\mathbb{U}(X)=\{$ouverts distingués de $X\}$ où rappelons

***Définition 4.1.6* ([2]).** — Un ouvert U de X est distingué s'il peut s'écrire $U = V_1 \setminus V_2$ où V_1 et V_2 sont des domaines analytiques compacts.

Rappelons la remarque importante suivante de Huber (dans le cadre des espaces adiques) :

Remarque 4.1.7. — Si $j : U \hookrightarrow X$ est un ouvert, en général l'application naturelle $H^p_c(U, (\mathcal{F}_n)_n) \to H^p_c(X, (j_!\mathcal{F}_n)_n)$ n'est pas bijective. Cela est dû au fait que j ne possède pas nécessairement de bonnes propriétés de finitude. Déjà dans le cas algébrique, pour $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme de type fini, pour montrer que $(\mathbb{R}f_!)((\mathcal{F}_n)_n) = (\mathbb{R}f_!\mathcal{F}_n)_n$ pour $(\mathcal{F}_n)_n$ constructible il faut utiliser les propriétés de finitude de $f_!$: $f_!$(constructible) est constructible. Par exemple, en général $H^p_c(\breve{\mathcal{F}}^{\mathrm{ad}}, \mathbb{Q}_\ell) \neq H^p_c(\breve{\mathcal{F}}, j_!\mathbb{Q}_\ell)$ (*cf.* [**36**], exemple 2.7) où $\breve{\mathcal{F}}^{\mathrm{ad}}$ désigne un espace de périodes p-adiques dans la grassmannienne $\breve{\mathcal{F}}$ ([**68**]).

Comme dans le lemme 2.3 de [**36**] on a une factorisation $\mathbb{R}\Gamma_c = \varinjlim_{\mathbb{U}(X)} \circ \operatorname{Ind}(\mathbb{R}\rho) \circ \mathbb{R}\sigma$ de laquelle on déduit :

Proposition 4.1.8. — *Pour tout $(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet\text{-}\mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ et $p \in \mathbb{N}$ il y a des suites exactes :*

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{U \in \mathbb{U}(X)} \varprojlim_n{}^1 H^{p-1}_c(X, \mathcal{F}_n) \longrightarrow H^p_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) \longrightarrow \varinjlim_{U \in \mathbb{U}(X)} \varprojlim_n H^p_c(X, \mathcal{F}_n) \longrightarrow 0$$

Corollaire 4.1.9

a) *Si* $\forall n\, \forall p \quad \forall U \in \mathbb{U}(X) \quad H^p_c(U, \mathcal{F}_n)$ *est un $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module de type fini*

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad H^p_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{U \in \mathbb{U}(X)} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^p_c(U, \mathcal{F}_n)$$

b) $\forall p > 2\dim(X) + cd_\ell(k) + 1 \ \forall (\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}} \ H^p_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) = 0$ *et sous l'hypothèse du a) cela est vrai pour tout* $p > 2\dim(X) + cd_\ell(k)$

Exemple 4.1.10. — Si $X = \widetilde{\mathbb{B}}^n_k$ est la boule ouverte de dimension n, $\mathbb{U}(X) = \{\widetilde{\mathbb{B}}^n_k(0, \varepsilon) \mid 0 < \varepsilon < 1\}$ les hypothèses du a) sont vérifiées pour $\mathbb{Z}_\ell = (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})_n$ et

$$H^p_c(\widetilde{\mathbb{B}}^n_k, \mathbb{Z}_\ell) = \varinjlim_{\varepsilon \to 1} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^p_c(\widetilde{\mathbb{B}}^n_k(0, \varepsilon), \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 2n \\ \mathbb{Z}_\ell & \text{si } p = 2n \end{cases}$$

4.1.2. Cohomologie ℓ-adique des espaces analytiques quasi-algébriques

Les hypothèses faites ici : X quasi algébrique et $\mathcal{F}$ localement constant ne sont là que pour pallier l'existence d'une théorie des faisceaux constructibles pour les espaces analytiques comme c'est le cas pour les espaces adiques ([**35, 36**]).

***Définition 4.1.11* ([3, 2]).** — X est quasi-algébrique si $\forall x \in X$, $\exists V_1, \ldots, V_n$ des domaines affinoïdes tels que $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i$, $\bigcup_{i=1}^n V_i$ est un voisinage de x et tout V_i

est quasi-étale au-dessus d'un domaine affinoïde de l'espace analytique associé à un schéma de type fini sur k.

Remarque 4.1.12. — D'après [**2**] cela implique que l'on peut trouver des V_i qui sont eux mêmes des domaines affinoïdes dans l'espace analytique associé à un schéma de type fini.

Remarque 4.1.13. — Tout espace analytique lisse sur k est quasi-algébrique.

Définition 4.1.14. — Le faisceau Λ-adique $(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ est localement constant si

$$\forall m \geqslant n \quad \mathcal{F}_m \otimes \Lambda/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_n$$

et $\forall n$, $\mathcal{F}_n$ est localement constant fini sur $X_{\text{ét}}$ comme $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module.

Lemme 4.1.15. — *Soit X quasi-algébrique et U un ouvert distingué de X ou un domaine analytique compact. Pour tout $\mathcal{F} \in \Lambda/\mathfrak{m}^n - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ localement constant fini, $\forall p \in \mathbb{N}$, $H^p_c(U, \mathcal{F})$ est un $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module de type fini.*

Démonstration. — Si U est un domaine compact c'est le corollaire 5.6 de [**3**]. Si $U = V_1 \setminus V_2$ est un ouvert où V_1 et V_2 sont des domaines compacts cela résulte de la suite exacte longue de cohomologie

$$\longrightarrow H^p_c(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(V_1, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(V_1 \cap V_2, \mathcal{F}) \longrightarrow$$

et de l'assertion pour un domaine compact. □

Corollaire 4.1.16. — *Si X est quasi-algébrique et $(\mathcal{F}_n)_n$ est localement constant*

$$H^p_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) = \varinjlim_{U \text{ distingué}} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^p_c(U, \mathcal{F}_n)$$

En particulier si X est compact $H^p(X, (\mathcal{F}_n)_n) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^p(X, \mathcal{F}_n)$.

Démonstration. — Cela résulte du lemme précédent et du corollaire 4.1.9. □

Proposition 4.1.17. — *Supposons $cd_\ell(k) < +\infty$. Soit U un ouvert distingué ou un domaine compact d'un espace quasi-algébrique X et $\mathcal{F}$ localement constant sur X. Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $(H^p_c(U, \mathcal{F}_n))_n$ est AR $\mathfrak{m}$-adique et $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^p_c(U, \mathcal{F}_n)$ est un Λ-module de type fini.*

Démonstration. — $H^p_c(U, \mathcal{F}_1)$ étant de type fini, la première partie de la proposition entraîne la seconde.

Pour tout n, soit $C^\bullet(\mathcal{F}_n)$ la résolution de Godement de $\mathcal{F}_n$ associée aux points de $|X|$ (si $x \in |X|$ il y a un morphisme de sites $i_x : \boldsymbol{Spec}(\mathcal{K}(x)^s)_{\text{ét}} \to \boldsymbol{Spec}(\mathcal{K}(x))_{\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$ et $C^0(\mathcal{G}) = \prod_x i_{x*} i_x^* \mathcal{G}$). En utilisant le lemme 4.1.3 on vérifie que c'est une résolution $\Gamma_c(U, -)$ acyclique de $\mathcal{F}$. Cette résolution est scindée sur chaque fibre.

Étant donné que $\forall n\ \mathcal{F}_n$ est localement constant, pour tout $n\ C^\bullet(\mathcal{F}_n)$ est $\Lambda/\mathfrak{m}^n$ plat et

$$\forall m \geqslant n \quad C^\bullet(\mathcal{F}_m) \otimes \Lambda/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} C^\bullet(\mathcal{F}_n)$$

Si $m \geqslant n$ considérons la résolution périodique $D^\bullet$ de $\Lambda/\mathfrak{m}^n$ dans la catégorie des $\Lambda/\mathfrak{m}^m$-modules (et faisceaux)(ϖ_Λ est une uniformisante de Λ)

$$\cdots \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\varpi_\Lambda^n} \Lambda/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\varpi_\Lambda^{m-n}} \Lambda/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\varpi_\Lambda^n} \Lambda/\mathfrak{m}^m \longrightarrow 0$$

Pour tout entier p appliquons la formule de projection ([**1**] 5.3.9) :

$$C^p(\mathcal{F}_m) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda/\mathfrak{m}^m} D^\bullet = C^p(\mathcal{F}_m) \otimes \Lambda/\mathfrak{m}^n \simeq C^p(\mathcal{F}_n)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{R}^\bullet\Gamma_c(C^p(\mathcal{F}_m) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda/\mathfrak{m}^m} D^\bullet) \simeq \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_n))$$

et

$$\mathbb{R}^\bullet\Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda/\mathfrak{m}^m} D^\bullet = \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D^\bullet$$

$$= \cdots \longrightarrow \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \xrightarrow{\varpi_\Lambda^n} \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \xrightarrow{\varpi_\Lambda^{m-n}} \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m))$$

$$\xrightarrow{\varpi_\Lambda^n} \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \longrightarrow 0$$

On en déduit donc que

$$\Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m))/\varpi_\Lambda^n \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \xrightarrow{\sim} \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_n))$$

et que $\Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m))$ est un $\Lambda/\mathfrak{m}^m$-module plat (par récurrence sur $m \geqslant n$ par exemple).

L'espace X étant quasi-algébrique et $\overline{U}$ compact, $\dim(U) < +\infty$ et donc pour $d > 2\dim(U) + cd_\ell(k)$ $\tau_{\leqslant d}\Gamma_c(U, C^\bullet(\mathcal{F}_n))$ calcule $H_c^\bullet(U, \mathcal{F}_n)$ qui est un $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module de type fini. On peut alors appliquer le lemme 12-14 de [**24**] pour conclure. □

Définition 4.1.18. — Soit L le corps des fractions de Λ. Un faisceau L-adique est un faisceau Λ-adique modulo $\mathfrak{m}$-torsion. On notera pour $\mathcal{F} \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}$ $\ \mathcal{F} \otimes L$ le faisceau L-adique associé et on posera $H_c^p(X, \mathcal{F} \otimes L) = H_c^p(X, \mathcal{F}) \otimes L$.

Un faisceau L-adique localement constant est un faisceau L-adique de la forme $\mathcal{F} \otimes L$ avec $\mathcal{F}$ localement constant.

Corollaire 4.1.19. — *Soit X quasi-algébrique muni d'une action continue ([**3**] section 6) d'un groupe G tel que G possède un pro-p sous-groupe ouvert. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau L-adique localement constant muni d'une action de G compatible à celle sur X. Alors, $H_c^p(X, \mathcal{F})$ est un G-module lisse.*

Démonstration. — Si $\mathcal{F} = \mathcal{G} \otimes L$ avec $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_n$ localement constant,

$$H_c^p(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{U \text{ distingué}} \left[\varprojlim_n H_c^p(U, \mathcal{G}_n)\right] \otimes L$$

Soit donc $s \in H^p_c(X, \mathcal{F})$. Il existe U distingué tel que

$$s \in \operatorname{im}\Big(H^p_c(U, \mathcal{G}) \otimes L \longrightarrow H^p_c(X, \mathcal{G}) \otimes L\Big)$$

Si $U = V_1 \setminus V_2$ où V_1 et V_2 sont des domaines compacts, par continuité de l'action $\exists\, K \subset G$ un sous-groupe ouvert tel que $\forall\, g \in K$, $g \cdot V_1 = V_1, g \cdot V_2 = V_2$ et donc $g \cdot U = U$. D'après [**3**] 7.7, $\forall\, n$, $H^p_c(U, \mathcal{G}_n)$ est un K-module lisse. Étant un $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module de type fini c'est un K-module discret. Le groupe K agit donc continûment sur le Λ-module de type fini $\varprojlim_n H^p_c(U, \mathcal{F}_n)$. Si $K' \subset K$ est un sous-pro-p-groupe ouvert, un sous-groupe ouvert K'' de K' s'envoie sur un pro-ℓ groupe et agit donc trivialement. Donc, $\forall\, g \in K''$, $g \cdot s = s$. □

On montre de même :

Corollaire 4.1.20. — *Sous les mêmes hypothèses* $\mathbf{Gal}(\overline{k}|k)$ *agit continûment sur l'espace* $H^p_c(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F})$ *au sens où* $H^p_c(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F})$ *est une union croissante de* $\mathbf{Gal}(\overline{k}|k)$*-modules de dimension finie continus.*

4.2. Cohomologie ℓ-adique équivariante des espaces analytiques rigides

Nous adoptons les notations de la section 4.1 sur la cohomologie ℓ-adique des espaces analytiques. Soit k un corps valué complet non archimédien comme précédemment.

Définition 4.2.1. — Nous dirons qu'un k-espace analytique est de dimension finie sur k si $\dim(X) + cd_\ell(k) < +\infty$.

Tout ce dont nous aurons besoin sur la cohomologie étale ℓ-adique équivariante se trouve dans la démonstration de la proposition qui suit. Le lecteur familier avec [**40**] retrouvera certaines des propriétés bien connues de la cohomologie équivariante dans un topos. Le principal point ici est l'introduction des coefficients ℓ-adiques.

Proposition 4.2.2. — *Soit X un espace analytique de dimension finie sur k muni d'une action d'un groupe G à gauche. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X stable par l'action de G et soit $\mathcal{F} \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ muni d'une action de G compatible à celle sur X. Il existe alors un complexe borné $(\mathcal{I}^\bullet)$ de faisceaux de Λ-modules sur $X_{\acute{e}t}$, muni d'une action de G (compatible à celle sur X) comme complexe de faisceaux, et un complexe double*

$$C^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = -p+1}} \Gamma_c(U(\alpha), \mathcal{I}^q)$$

où $U(\alpha) = \bigcap_{i\in\alpha} U_i$, où $C^{p,q} \to C^{p,q+1}$ est induit par $\mathcal{I}^q \to \mathcal{I}^{q+1}$, qui est muni d'une action de G via les morphismes

$$\forall\, g \in G \quad g_! : \Gamma_c(U(\alpha), \mathcal{I}^q) \longrightarrow \Gamma_c(g \cdot U(\alpha), \mathcal{I}^q)$$

tel que la suite spectrale G-équivariante associée à la filtration par les ligne soit

$$E_0^{pq} = C^{pq} \quad E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = -p+1}} H_c^q(U(\alpha), \mathcal{F}) \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

où l'action sur $H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$ est celle induite par l'action de G sur $\mathcal{F}$.

Démonstration. — Par définition une action de G sur $\mathcal{F}$ est la donnée de morphismes

$$\forall\, g \in G \quad g^*\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha_g} \mathcal{F}$$

se composant de façon naturelle : $\forall\, g_1; g_2 \in G \quad \alpha_{g_2} \circ g_2^* \alpha_{g_1} = \alpha_{g_1 g_2}$ et vérifiant $\alpha_e = \mathrm{Id}$. De tels morphismes sont nécessairement des isomorphismes et $\alpha_{g^{-1}} : (g^{-1})^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est l'adjoint de l'inverse de α_g via l'égalité $(g^{-1})^*\mathcal{F} = g_*\mathcal{F}$.

Si U est un ouvert de X et g un élément de G, le morphisme $g_! : \mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}\Gamma_c(g \cdot U, \mathcal{F})$ est défini de la façon suivante : $\alpha_{g^{-1}}$ définit par adjonction un morphisme de faisceaux $u : \mathcal{F} \to (g^{-1})_*\mathcal{F}$ et $g_!$ est le composé

$$\mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mathbb{R}\Gamma_c(u)} \mathbb{R}\Gamma_c(U, (g^{-1})_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_c(g \cdot U, \mathcal{F})$$

Si $\mathcal{I}^\bullet$ est un complexe d'injectifs dans $\Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ représentant $\mathbb{R}\pi_*(\mathcal{F})$, l'action de G sur $\mathcal{F}$ induit une action de G sur $\mathbb{R}\pi_*(\mathcal{F})$ dans $\boldsymbol{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et donc une action sur le complexe $\mathcal{I}^\bullet$ à homotopie près au sens où $\forall\, g \in G$, on a un morphisme de complexes $\beta_g : g^*\mathcal{I}^\bullet \to \mathcal{I}^\bullet$ tel que $\beta_{g_1 g_2}$ soit homotope à $\beta_{g_2} \circ g_2^* \beta_{g_1}$. Pour avoir une vraie action nous allons nous placer dans une catégorie dérivée équivariante.

Définition 4.2.3. — Si Y est un espace analytique muni d'une action de G, nous noterons $\Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$, resp. $\Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ la catégorie des faisceaux Λ-adiques, resp. de Λ-modules sur $Y_{\text{ét}}$ munis d'une action de G compatible à celle sur Y. Nous noterons $\boldsymbol{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda_\bullet - G)$, $\boldsymbol{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda - G)$ les catégories dérivées associées.

Les catégories $\Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ et $\Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ sont des catégories abéliennes Λ-linéaires. Lorsque l'action de G sur Y est triviale elles coïncident avec $\Lambda_\bullet[G] - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$, resp. $\Lambda[G] - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$, les catégories de faisceaux de $\Lambda[G]$-modules.

Définition 4.2.4. — Notons

$$\iota_\bullet : \Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} \hookrightarrow \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$$
$$\iota : \Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} \hookrightarrow \Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$$

les plongements canoniques, et

$$\widetilde{\pi}_* : \Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} \longrightarrow \Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$$
$$(\mathcal{F}_n)_n \longmapsto \varprojlim \mathcal{F}_n$$

Lemme 4.2.5. — *Les catégories $\Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ et $\Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ possèdent suffisamment d'injectifs, les foncteurs $\iota_\bullet$ et ι sont exactes et envoient suffisamment d'injectifs sur des injectifs.*

Démonstration. — Les foncteurs $\iota_\bullet$ et ι possèdent un adjoint à droite :

$$\mathcal{G} \longmapsto \mathrm{Ind}_1^G \mathcal{G} = \prod_{g \in G} g^* \mathcal{G}$$

Soit alors $\mathcal{H}$ un objet de $\Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ (resp. de $\Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$). Si $\iota(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est un injectif (resp. $\iota_\bullet \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{I}$), on a une injection $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathrm{Ind}_1^G(\mathcal{I})$ et le membre de droite est un injectif puisque Ind_1^G possède un adjoint à gauche. On en déduit que nos deux catégories possèdent suffisamment d'injectifs. De plus $\iota(\mathrm{Ind}_1^G(\mathcal{I}))$ (resp. $\iota_\bullet(\mathrm{Ind}_1^G(\mathcal{I}))$) est un injectif et donc tout objet de l'une de nos deux catégories se plonge dans un injectif d'image un objet injectif par ι (resp. $\iota_\bullet$), d'où la seconde assertion. □

Lemme 4.2.6. — *On a une égalité*

$$\iota \circ \mathbb{R}\widetilde{\pi}_* = \mathbb{R}\pi_* \circ \iota_\bullet$$

Démonstration. — Cela résulte de l'égalité $\iota \circ \widetilde{\pi}_* = \pi_* \circ \iota_\bullet$, du lemme précédent et de l'exactitude de ι. □

Appliquons maintenant cela à $\mathcal{F} \in \Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$: $\iota(\mathbb{R}\widetilde{\pi}_* \mathcal{F}) = \mathbb{R}\pi_* \iota_\bullet(\mathcal{F})$. Il existe donc un complexe d'injectifs $\mathcal{I}^\bullet$ dans $\Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ où $\mathcal{I}^q = 0$ pour $q \ll 0$ et $\mathcal{I}^\bullet$ est muni d'une action de G tel que $\mathcal{I}^\bullet \simeq \mathbb{R}\pi_*(\mathcal{F})$ comme objets de la catégorie dérivée munis d'une action de G. Rappelons que $\mathbb{R}\Gamma_c = \mathbb{R}\Gamma_! \circ \mathbb{R}\pi_*$ (lemme 4.1.4) et que donc la cohomologie du complexe de $\Lambda[G]$-modules $\Gamma_c(X, \mathcal{I}^\bullet)$ calcule $H^\bullet(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$ muni de son action de G. L'espace analytique X étant de dimension finie sur k, $H_c^n(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $n \gg 0$ et donc, quitte à remplacer $\mathcal{I}^\bullet$ par $\tau_{\leqslant d}\mathcal{I}^\bullet$ pour $d \gg 0$ on peut supposer que le complexe $\mathcal{I}^\bullet$ est borné.

Lemme 4.2.7. — *Si $f : U \to X$ est étale, la cohomologie du complexe $\Gamma_c(U, \mathcal{I}^\bullet_{|U})$ calcule $H_c^\bullet(U, \mathcal{F}_{|U})$. C'est en particulier le cas si U est un ouvert de X.*

Démonstration. — Nous noterons

$$\begin{aligned} f^* : \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}} &\longrightarrow \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} \\ (\mathcal{G}_n)_n &\longmapsto (f^*\mathcal{G}_n)_n \end{aligned}$$

qui est exact et possède un adjoint à gauche $((\mathcal{G}_n))_n \mapsto (f_!\mathcal{G}_n)_n$. L'égalité $\pi_* \circ f^* = f^* \circ \pi_*$ implique donc $\mathbb{R}\pi_* \circ f^* = f^* \circ \mathbb{R}\pi_*$. □

Nous pouvons maintenant appliquer SGA IV, XVII 6.2.10 pour obtenir des résolutions simpliciales :

$$\forall \bullet \leqslant 0 \quad J^{\bullet, q} = \bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = -\bullet + 1}} e_{\alpha !} e_\alpha^* \mathcal{I}^q \longrightarrow \mathcal{I}^q$$

où $e_\alpha : U(\alpha) \hookrightarrow X$. Ces résolutions simpliciales sont celles associées au couple de foncteurs adjoints :

$$(j_!, j^*) : \Big(\coprod_{i\in I} U_i\Big)^{\sim}_{\text{ét}} \longrightarrow X^{\sim}_{\text{ét}}$$

où $j : \coprod_{i\in I} U_i \to X$ (*cf.* [**39**] I.5 par exemple). Le complexe double $J^{\bullet\bullet}$ est muni d'une action de G : si

$$J^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha\subset I\\ |\alpha|=-p+1}} J^{p,q}_\alpha$$

l'action de G se décompose sur les composantes en des morphismes

$$\forall g\in G \quad g^* J^{p,q}_{g\cdot\alpha} \longrightarrow J^{p,q}_\alpha$$

Le complexe double

$$C^{p,q} = \Gamma_!(X, J^{p,q}) = \bigoplus_{\substack{\alpha\subset I\\ |\alpha|=-p+1}} \Gamma_!(U(\alpha), \mathcal{I}^q_{|U(\alpha)})$$

convient alors car d'après le lemme 4.2.7 on a

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{\alpha\subset I\\ |\alpha|=-p+1}} H^q_c(U(\alpha), \mathcal{F}_{|U(\alpha)}) \qquad \square$$

On peut montrer (nous n'aurons pas besoin de cette proposition) en utilisant des résolutions par des faisceaux discrets comme dans [**31**] :

Proposition 4.2.8. — *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, supposons de plus X quasi-algébrique, $\mathcal{F}$ localement constant, $\forall\, i$ U_i est un ouvert distingué et l'action de G sur X est continue. On peut alors trouver un complexe double comme précédemment :*

$$C^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha\subset I\\ |\alpha|=-p+1}} C^{p,q}_\alpha$$

tel que $\forall\,\alpha$ $C^{p,q}_\alpha$ soit un $\mathrm{Stab}_G(U(\alpha))$*-module lisse.*

4.3. Lien avec la suite spectrale de Rapoport-Zink ([66])

Supposons que la valuation de k est discrète. Soit $\mathcal{Y}$ un schéma formel propre sur $\boldsymbol{Spf}(k^0)$ dont la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux

$$\mathcal{Y}_s = \bigcup_i Y_i$$

comme diviseurs de Cartier. Il y a alors un recouvrement $\mathcal{Y}^{\mathrm{an}} = \bigcup_i \mathrm{sp}^{-1}(Y_i)$ et une suite spectrale de cohomologie de Čech à support compact associée comme dans la section précédente. Cette suite spectrale est la même que celle associée à la résolution du lemme 2.5 de [**68**] via l'isomorphisme

$$a_{r*}a_r^! \mathrm{R}\Psi \simeq \mathrm{R}\Theta j_{r!} j_r^*$$

où $\mathrm{R}\Psi$ désigne les cycles proches, $\mathrm{R}\Theta$ les cycles proches rigides analytiques de Berkovich,

$$a_r : \coprod_{i_1 < \cdots < i_r} Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_r} \longrightarrow \mathcal{Y}_s$$

$$\text{et } j_r : \coprod_{i_1 < \cdots < i_r} \mathrm{sp}^{-1}(Y_1) \cap \cdots \cap \mathrm{sp}^{-1}(Y_{i_r}) \longrightarrow \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$$

Cette suite spectrale est équivariante lorsqu'un groupe agit en permutant les Y_i, ce qui est par exemple le cas pour les espaces de Drinfeld.

L'étape suivante dans [**67**] qui consiste à utiliser le calcul des cycles évanescents modérés de SGA7 consiste en rigide à calculer la cohomologie de « couronnes généralisées ».

4.4. Cohomologie de $\breve{\mathcal{M}}_K$

Reprenons les mêmes conventions sur $\breve{\mathcal{M}}$ que celles énoncées au début de la section 2.3.9.

4.4.1. Lissité de l'action de J_b. — Le corollaire suivant est une conséquence de la proposition 2.3.11 et du lemme 8.4 de [**3**] :

Corollaire 4.4.1. — *Le groupe J_b agit continûment sur $\breve{\mathcal{M}}_K$.*

Définition 4.4.2. — Nous noterons $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ la cohomologie à support compact ℓ-adique de l'espace analytique $\breve{\mathcal{M}}_K \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{C}_p$ (*cf.* 4.1).

Remarque 4.4.3. — Le lecteur de désirant pas lire la section 4.1 pourra prendre comme définition de $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$

$$\varinjlim_U \varprojlim_n H_c^\bullet(U \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

où U parcourt les ouverts relativement compacts de $\breve{\mathcal{M}}_K$.

Cet espace de cohomologie est muni d'une action de $J_b \times W_E$ de la façon suivante : l'action de J_b est celle induite par l'action sur $\breve{\mathcal{M}}_K$, l'action du groupe d'inertie de $\boldsymbol{Gal}(\overline{\breve{E}}|\breve{E})$ est celle induite par action sur les coefficients $\mathbb{C}_p$, quant à l'action d'un Frobenius σ de W_E elle est induite par la donnée de descente de Rapoport-Zink ([**68**]) $\alpha : \breve{\mathcal{M}}_K \to \breve{\mathcal{M}}_K^{(\sigma)}$. La cohomologie de $\breve{\mathcal{M}}_K^{(\sigma)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{E}} \mathbb{C}_p$ s'identifie en effet à celle de $\breve{\mathcal{M}}_K \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\breve{E}} \mathbb{C}_p$ via $1 \times \sigma : \breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p \to \breve{\mathcal{M}}_K^{(\sigma)} \otimes \mathbb{C}_p$. Lorsque la classe b est decent (cela signifie qu'il existe un entier s tel que $(b\sigma)^s = (s\nu_b)(p)\sigma^s$ où ν_b est le morphisme des pentes, *cf.* [**68**]), ce que l'on peut toujours supposer puisque cela ne change pas l'espace de Rapoport-Zink, une puissance suffisamment grande α^s de la donnée de descente α définit une donnée de descente vers l'extension non-ramifiée de degré s de E tordue par un élément de J_b (lorsqu'il y a une seule pente r/s il s'agit de l'égalité classique $F^s = p^r\sigma^s$, l'élément de J_b étant ici p). On en déduit qu'un Frobenius σ agit de façon inversible sur ces espaces de cohomologie. Étant donné que la donnée de descente commute à l'action de J_b, $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ est donc muni d'une action de $J_b \times W_E$. De plus, lorsque le niveau K varie, le système des $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ est muni d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times W_E$.

Remarque 4.4.4. — La donnée de descente α n'étant pas effective, il s'agit vraiment d'une action de W_E et non d'une action de $\boldsymbol{Gal}(\overline{E}|E)$. On remarquera en particulier qu'en général l'action d'un Frobenius de W_E ne stabilise pas de sous-espace vectoriel de dimension finie (*cf.* la section suivante et en particulier la remarque 4.4.11).

Définition 4.4.5. — Afin d'alléger les notations nous noterons désormais

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell) := H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$$
$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) := H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

Lemme 4.4.6. — *Il y a un isomorphisme $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mathrm{rig}} \otimes \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ où le second membre désigne la cohomologie étale à support compact ℓ-adique des espaces adiques (*[**36**]*).*

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme 2.3.24 et du théorème 1.5 de [**36**]. □

Combinant le théorème 4.1.19 ainsi que le corollaire 4.1.20 avec les corollaires 4.4.1 et 3.2.7 on obtient :

Corollaire 4.4.7. — *Pour tout K, $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell)$ est un $J_b \times W_E$-module lisse pour l'action de J_b et continu pour l'action de l'inertie I_E.*

Exemple 4.4.8. — Plaçons nous dans le cas d'une donnée locale étale (exemple 2.3.22). Alors,

$$H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K(b,\mu), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0 \\ \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p)/K) & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

et donc, $\varinjlim_K H_c^0(\breve{\mathcal{M}}(b,\mu), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p))$ où l'action de $J_b = G(\mathbb{Q}_p)$ se fait par la représentation régulière gauche et celle de $G(\mathbb{Q}_p)$ par la représentation régulière droite. L'action de W_E est l'action triviale.

4.4.2. Un lemme d'induction. — Soit $\Delta = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z})$. Le groupe J_b étant une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi M_b de G, tout $\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}$ se restreint à M_b et se transfert à J_b en un $\widetilde{\chi} \in X^*(J_b)_{\mathbb{Q}_p}$. Notons

$$J_b^1 = \bigcap_{\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}} \ker |\widetilde{\chi}|$$

où

$$\begin{aligned} |\widetilde{\chi}| : J_b &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto v_p(\widetilde{\chi}(x)) \end{aligned}$$

Il y a une application ([**68**] 3.52)

$$\begin{aligned} \omega_{J_b} : J_b(\mathbb{Q}_p) &\longrightarrow \Delta \\ x &\longmapsto [\chi \mapsto \widetilde{\chi}(x)] \end{aligned}$$

Il y a également une application $\breve{\pi}_2 : \breve{\mathcal{M}} \to \Delta$ J_b équivariante. Le morphisme $\breve{\pi}_2$ est essentiellement la hauteur de la rigidification ρ ([**68**] 3.52). Notons $\Delta' \subset \Delta$ l'image de $\breve{\pi}_2$ sur laquelle J_b agit avec un nombre fini d'orbites.

Définition 4.4.9. — Pour tout i élément de Δ' notons $\breve{\mathcal{M}}_K^{(i)} = \breve{\pi}_2^{-1}(i)$

On a donc

$$\breve{\mathcal{M}}_K = \coprod_{i \in \Delta'} \breve{\mathcal{M}}_K^{(i)}$$

décomposition de laquelle on déduit :

Lemme 4.4.10. — *Il y a un isomorphisme*

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \bigoplus_{\bar{i} \in \Delta'/J_b} \text{c-Ind}_{J_b^{1\prime}}^{J_b} H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K^{(i)}, \mathbb{Q}_\ell)$$

où

$$J_b^{1\prime} = \bigcap_{\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}} \ker(|\widetilde{\chi}|)$$

L'intérêt de ce lemme est que lorsque b est une classe basique $J_b^{1\prime} = J_b^1$ a un centre compact.

Remarque 4.4.11. — L'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme de J_b-modules. En fait, le groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ agit sur Δ. De même, il y a une action de W_E sur Δ triviale sur l'inertie de W_E et associée au fait que la donnée de descente de Rapoport-Zink transformant la rigidification ρ en ρ composée avec le Frobenius, elle change sa hauteur. Il y a alors un isomorphisme de $J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$-modules

$$\varinjlim_K H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_p) \simeq \bigoplus_{\bar{i} \in \Delta/J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E} \text{c-Ind}_{(J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1}^{J_b} \varinjlim_K H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K^{(i)}, \mathbb{Q}_\ell)$$

où $(J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1$ est le sous-groupe de $J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ agissant trivialement sur Δ.

Rappelons que la catégorie abélienne des représentations lisses d'un groupe p-adique contient suffisamment d'injectifs et de projectifs. Ceci est une conséquence de l'existence d'adjoints à gauche (l'induction compacte) et à droite (l'induction) à la restriction à un sous groupe fermé.

Lemme 4.4.12. — *Soit b une classe basique. Si r désigne le rang semi-simple de J_b, pour une représentation lisse π de J_b, pour $i > r$*

$$\mathrm{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}}(H^\bullet_c(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell), \pi) = 0$$

Démonstration

$$\mathrm{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}}(\text{c-Ind}_{J_b^1}^{J} H^j_c(\breve{\mathcal{M}}^{(0)}, \mathbb{Q}_\ell), \pi) = \mathrm{Ext}^i_{J_b^1\text{-lisse}}(H^j_c(\breve{\mathcal{M}}^{(0)}, \mathbb{Q}_\ell), \pi)$$

Notons $J_b^0 = \bigcap_{\chi \in X^*(M)} \ker(\widetilde{\chi})$ qui est un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ à centre fini. $J_b^0(\mathbb{Q}_p) \lhd J_b^1$ et $J_b^1/J_b^0(\mathbb{Q}_p)$ est un groupe compact ce qui implique que si ρ_1, ρ_2 sont deux représentations lisses de J_b^1,

$$\mathrm{Ext}^i_{J_b^1\text{-lisse}}(\rho_1, \rho_2) \simeq \mathrm{Ext}^i_{J_b^0\text{-lisse}}(\rho_1, \rho_2)^{J_b^1/J_b^0}$$

Dans [**72**], il est construit pour toute représentation lisse d'un groupe algébrique H sur $\mathbb{Q}_p$ ayant un caractère central χ sur Z_H^0, la composante connexe neutre du centre, une résolution projective dans la catégorie des représentations lisses ayant χ comme caractère central sur Z_H^0 de longueur inférieure à r. D'où le résultat. □

4.4.3. Finitude

Proposition 4.4.13. — *Quel que soit $\delta \in \Delta$ le J_b^1-module $H^q_c(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \mathbb{Q}_\ell)$ est de type fini. De même $H^q_c(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell)$ est un J_b-module de type fini.*

Démonstration. — On vérifie en utilisant le théorème 2.4.13 qu'il y a un nombre fini d'orbites de composantes irréductibles de $\breve{\mathcal{M}}^{(\delta)}$ sous l'action de J_b^1. Si $Z_1, \ldots, Z_t$ sont des représentants de ces orbites, soit $U = Z_1^{\mathrm{an}} \cup \cdots \cup Z_t^{\mathrm{an}}$ le tube au-dessus des Z_i, un ouvert analytique dans $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$. Notons encore U pour $\Pi^{-1}_{K,C_0}(U) \subset \breve{\mathcal{M}}_K$. Le corollaire 3.1.4 implique que U s'identifie à un tube au-dessus d'un fermé dans l'espace analytique associé à une variété algébrique propre sur $\mathcal{O}_{\breve{E}}$. Il résulte alors du théorème 3.3 (ii) de [**36**] que

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(H^q_c(U, \overline{\mathbb{Q}_\ell})) < +\infty$$

Soit $K \subset J_b^1$ le stabilisateur de U. C'est un sous-groupe compact ouvert. Considérons le recouvrement $(g \cdot U)_{\overline{g} \in J_b^1/K}$ de $\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}$. Il lui est associé une suite spectrale de cohomologie de Čech à support compact (II.4.2.2) concentrée en $p \leqslant 0$, $\dim(\mathrm{Sh}) \geqslant q \geqslant 0$:

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{\overline{\alpha} \subset J_b^1/K \\ |\alpha| = -p+1}} H_c^q(U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\breve{\mathcal{M}}_K^{(0)}, \mathbb{Q}_\ell)$$

où $U(\alpha) = \bigcap_{\overline{g} \in \alpha} g \cdot U$. Cette suite spectrale est J_b^1-équivariante où

$$\forall g \in J_b^1 \quad g_! : H_c^q(U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H_c^q(g \cdot U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell)$$

Si $\alpha \subset J_b^1/K$ notons $K_\alpha = \bigcap_{\overline{g} \in \alpha} gKg^{-1}$. Les espaces $H_c^q(U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell)$ sont des K_α-modules lisses puisque K_α agit continûment sur $U(\alpha)$ d'après le corollaire 4.4.1. Récrivons E_1^{pq} sous la forme suivante :

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{[\overline{\alpha}] \in J_b^1 \backslash \left(J_b^1/K\right)^{-p+1}} \text{c-Ind}_{K_\alpha}^{J_b^1} H_c^q(U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell)$$

Montrons maintenant que

$$\#\{[\overline{\alpha}] \in J_b^1 \backslash \left(J_b^1/K\right)^{-p+1} \mid U(\alpha) \neq \varnothing\} < +\infty$$

Pour cela, remarquons que si A est une union finie de composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{M}}^{(\delta)}$, $\{g \in J_b^1 \mid g \cdot A \cap A \neq \varnothing\}$ est compact et que donc

$$\Omega = \{g \in J_b^1 \mid g \cdot U \cap U \neq \varnothing\}$$

est compact et contient K. Si $[\alpha] = [(\overline{g}_0, \dots, \overline{g}_{-p})] \in J_b^1 \backslash \left(J_b^1/K\right)^{-p+1}$ est tel que $U(\alpha) \neq \varnothing$ alors, $\forall i \neq j \;\; g_i^{-1} g_j \in K \backslash \Omega$ qui est fini. Modulo l'action de J_b^1 à gauche sur les $(-p+1)$-uplets on peut supposer que $g_{-p} \in K$ et donc $\forall i \; \overline{g_i} \in K \backslash \Omega$ qui est fini. D'où la finitude de l'ensemble.

On conclu donc que E_1^{pq} est une somme finie d'induites compactes de représentations de dimension finie et est donc une représentation de type fini de J_b^1. D'après [**19**] la catégorie des J_b^1-modules lisses est localement noethérienne (*i.e.* tout objet de type fini est noethérien). On en déduit que $H_c^{p+q}(\breve{\mathcal{M}}^{(\delta)}, \mathbb{Q}_\ell)$ possède une filtration finie $F^p H_c^{p+q}(\breve{\mathcal{M}}^{(\delta)}, \mathbb{Q}_\ell)$ à quotients de type fini et est donc lui même de type fini. □

Corollaire 4.4.14. — *Pour toute représentation admissible π de J_b, pour tous K, p, q*

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}} \left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi \right) < +\infty$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition précédente et du lemme qui suit. □

Lemme 4.4.15. — *Soit H un groupe p-adique réductif, π_1 une représentation lisse de type fini de H et π_2 une représentation admissible. Alors,*

$$\forall i \;\; \dim(\mathrm{Ext}^i_{H\text{-lisse}}(\pi_1, \pi_2)) < \infty$$

Démonstration. — π_1 étant de type fini il existe une surjection

$$\alpha : \bigoplus_{i \in I} \text{c-Ind}_{K_i}^{H} \rho_i \twoheadrightarrow \pi_1$$

où I est fini, les K_i sont des sous-groupes compacts ouverts et les ρ_i de dimension finie. La représentation de droite étant elle même de type fini, $\ker(\alpha)$ est de type fini (locale noethérianité de la catégorie des représentations lisses de H ([**19**])) et on peut rappliquer le processus pour construire ainsi par récurrence une résolution projective $P^\bullet \to \pi_1$ de π_1 telle que $\forall q \; P^q$ soit une représentation de type finie de H. On conclut aussitôt puisque si ρ est de type fini et π_2 admissible alors $\mathrm{Hom}_H(\rho, \pi_2)$ est de dimension finie. En effet, un morphisme H équivariant de ρ dans π_2 est déterminé par l'image d'un nombre fini de vecteurs de ρ engendrant ρ. Or une telle famille finie de vecteurs est contenue dans ρ^V pour un sous-groupe compact ouvert V et donc d'image dans π_2^V qui est de dimension finie. □

Remarque 4.4.16. — Dans [**72**] ce lemme est démontré d'une autre façon mais en supposant de plus que π_1 est admissible. Cette restriction est donc inutile.

Corollaire 4.4.17. — *Soit b la classe basique. Supposons J_b anisotrope modulo son centre. Alors,*

$$\forall \delta \in \Delta \; \forall q \quad \dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) < +\infty$$

Remarque 4.4.18. — Supposons la classe b basique. On ne peut espérer mieux que la proposition 4.4.13 dans le cas où J_b n'est pas anisotrope modulo son centre. En effet, on pourrait penser que $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ est un J_b^1-module de longueur finie. Mais cela est faux comme le montre l'exemple étale (exemple 4.4.8).

4.5. Une suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'uniformisation de Rapoport-Zink

4.5.1. Suite spectrale pour l'action d'un groupe discret. — Soit X un espace analytique de dimension finie sur k, Γ un groupe discret agissant sur X de telle manière que $\forall x \in X$, $\exists U$ un voisinage de x tel que $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$, $\gamma \cdot U \cap U = \varnothing$. Le faisceau $\Gamma \backslash X$ sur le grand site étale de k est alors représentable par un espace analytique obtenu par recollement de tels ouverts (utiliser [**1**] 1.3.2,1.3.3).

Soit une extension de degré fini $L|\mathbb{Q}_\ell$, V un L-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\rho)$ une représentation continue pour Γ muni de la topologie profinie et $\mathrm{GL}(V_\rho)$ de la topologie ℓ-adique. Le morphisme $p : X \to \Gamma\backslash X$ étant un isomorphisme local il est associé à ρ un faisceau étale L-adique localement constant $\mathcal{F}_\rho$ sur $\Gamma\backslash X$: si $M \subset V_\rho$ est un $\mathcal{O}_L$-réseau stable par Γ, $\forall n \;\; \rho_n : \Gamma \to \mathrm{GL}(M/\varpi_L^n M)$ se factorise par un sous-groupe d'indice fini $\Gamma_n \lhd \Gamma$ et $\mathcal{F}_\rho = (\mathcal{F}_n)_n \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ où $\mathcal{F}_n$ est trivial sur $\Gamma_n\backslash X$

(qui est étale fini au-dessus de $\Gamma\backslash X$) associé à la représentation

$$\pi_1^{\text{top}}(\Gamma\backslash X) \longrightarrow \Gamma_n\backslash\Gamma \xrightarrow{\overline{\rho}_n} \mathrm{GL}(M/\varpi_L^n M)$$

Théorème 4.5.1

(1) *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau L-adique étale sur $\Gamma\backslash X$. Il y a une suite spectrale de type cohomologique convergente*

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}_\Gamma^p\left(H_c^{-q}(X, p^*\mathcal{F}), 1\right) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma\backslash X, \mathcal{F})^*$$

(2) *Il y a une suite spectrale convergente*

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}_\Gamma^p\left(H_c^{-q}(X, L), \check{\rho}\right) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\rho)^*$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que 2) se déduit de 1). En effet, il y a un isomorphisme de Γ-faisceaux $p^*\mathcal{F}_\rho \simeq \underline{V}_\rho$ où $\underline{V}_\rho$ désigne le faisceau constant muni de l'action de Γ via ρ. Donc, $H_c^{-q}(X, p^*\mathcal{F}) \simeq H_c^{-q}(X, L) \otimes \rho$ comme Γ-modules. Si M et N sont deux $L[\Gamma]$-modules il y a une formule d'adjonction (puisque L est un corps) $\mathrm{Ext}_\Gamma^p(M \otimes \rho, N) \simeq \mathrm{Ext}_\Gamma^p(M, \check{\rho} \otimes N)$. Cela montre donc que 1) implique 2).

Passons donc maintenant à la démonstration de 1). Celle ci consiste à écrire un complexe de cohomologie de Čech à support compact dont la cohomologie calcule la cohomologie à support compact de X à coefficients dans $p^*\mathcal{F}$ dans la catégorie dérivée bornée des complexes de $L[\Gamma]$-modules, et à identifier l'image par le foncteur $\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_\Gamma(\bullet, 1)$ de cet objet avec le dual d'un complexe de cohomologie de Čech à support compact dont la cohomologie est la cohomologie à support compact de $\Gamma\backslash X$ à coefficients dans $\mathcal{F}$.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X par des ouverts vérifiant

$$\forall\, i \neq j\ U_i \neq U_j \text{ et } \forall\, \gamma \in \Gamma \smallsetminus \{\mathrm{Id}\} \quad U_i \cdot \gamma \cap U_i = \varnothing$$

Nous travaillerons parfois directement avec des faisceaux L-adiques et des faisceaux de L-modules pour ne pas alourdir les notations. Le lecteur effrayé pourra travailler avec des faisceaux $\mathcal{O}_L$-adiques comme précédemment et tensoriser par L dès qu'il verra un $H_c^\bullet$. Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_{L\bullet} - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/(\Gamma\backslash X)_{\text{ét}}}$ tel que $\mathcal{F} = \mathcal{G} \otimes L$. Considérons $\mathbb{R}\pi_*\mathcal{G} \in \mathbb{D}^+((\Gamma\backslash X)_{\text{ét}}, \mathcal{O}_L)$ et soit $\mathcal{I}^\bullet$ un complexe de faisceaux de L-modules injectifs représentant $(\mathbb{R}\pi_*\mathcal{G}) \otimes L$. Tronquons $\mathcal{I}^\bullet$ de telle manière que si l'on note encore $\mathcal{I}^\bullet$ le tronqué, la cohomologie du complexe $\Gamma_!(\Gamma\backslash X, \mathcal{I}^\bullet)$ calcule $H_c^\bullet(\Gamma\backslash X, \mathcal{F})$. Le morphisme p étant étale, $p^*\mathcal{I}^\bullet$ est un complexe de L-modules injectifs qui est muni d'une action de Γ. De plus, d'après la démonstration du lemme 4.2.7

$$p^*(\mathbb{R}\pi_*\mathcal{G}) = \mathbb{R}\widetilde{\pi}_*(p^*\mathcal{F})$$

où rappelons que $\widetilde{\pi}$ est l'équivalent Γ-équivariant de π. Donc, la cohomologie du complexe $\Gamma_!(X, p^*\mathcal{I}^\bullet)$ muni de l'action de Γ déduite de celle sur $p^*\mathcal{I}^\bullet$ calcule $H_c^\bullet(X, p^*\mathcal{F})$ comme Γ-module.

Considérons le complexe double de cohomologie de Čech à support compact (*cf.* la démonstration de 4.2.2) associé à $p^*\mathcal{I}^\bullet$ et au recouvrement $(U_i \cdot \gamma)_{i\in I, \gamma\in\Gamma}$ de X :

$$C^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha\subset I\times\Gamma \\ |\alpha|=-p+1}} \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q)$$

où $U(\alpha) = \bigcap_{(i,\gamma)\in\alpha} U_i \cdot \gamma$. Le groupe Γ opère sur $C^{\bullet\bullet}$ via les morphismes

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q) \xrightarrow{\gamma!} \Gamma_!(U(\gamma\cdot\alpha), \mathcal{I}^q)$$

où pour un γ l'application $\alpha \mapsto \gamma\cdot\alpha$ est définie grâce à l'hypothèse $\forall\, i \neq j\ U_i \neq U_j$. On a alors l'isomorphisme de Γ-module

$$H^n(\mathrm{Tot}^{\oplus} C^{\bullet\bullet}) \simeq H^n(X, p^*\mathcal{F})$$

Posons pour un entier p

$$\mathcal{P}_p = \{\alpha \subset I \times \Gamma \mid |\alpha| = -p+1\}$$

sur lequel Γ agit à gauche via la seconde composante. Remarquons maintenant que

$$C^{p,q} = \bigoplus_{\overline{\alpha}\in\Gamma\backslash\mathcal{P}_p} \text{c-Ind}_1^\Gamma\ \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q)$$

Il résulte de cette identité que $\mathrm{Tot}^{\oplus}C^{\bullet\bullet}$ est un complexe de projectifs dans la catégorie des $L[\Gamma]$-modules et que donc, si F désigne le foncteur contravariant exact à gauche $\mathrm{Hom}_\Gamma(-,1)$,

$$\mathbb{R}^n F(\mathrm{Tot}^{\oplus}C^{\bullet\bullet}) \simeq H^{-n}(F(\mathrm{Tot}^{\oplus}C^{\bullet\bullet}))$$

où $\mathbb{R}^n F$ désigne l'hypercohomologie de F. Quant à la seconde suite spectrale d'hypercohomologie elle donne :

$$E_2^{pq} = R^pF(H^{-q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}C^{\bullet\bullet})) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}F(\mathrm{Tot}^{\oplus}C^{\bullet\bullet})$$

or, on sait déjà que

$$R^pF(H^q(\mathrm{Tot}^{\oplus}C^{\bullet\bullet})) = \mathrm{Ext}_\Gamma^p\left(H_c^{-q}(X,L),1\right)$$

Il reste donc à montrer que $H^n(F(\mathrm{Tot}^{\oplus}C^{\bullet\bullet})) \simeq H_c^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F})$.

Le complexe $F(\mathrm{Tot}^{\oplus}C^{\bullet\bullet})$ est le complexe simple associé au complexe double $\mathrm{Hom}_\Gamma(C^{\bullet\bullet},1)$. Montrons que $\mathrm{Hom}_\Gamma(C^{\bullet\bullet},1)$ est isomorphe au dual du complexe double de cohomologie de Čech à support compact associé à $\mathcal{I}^\bullet$ et au recouvrement $(p(U_i))_{i\in I}$ de $\Gamma\backslash X$ qui calcule $H_c^\bullet(\Gamma\backslash X,\mathcal{F})$, ce qui conclura. Notons $\mathcal{C}_p$ un ensemble de représentants de $\mathcal{P}_p$ modulo Γ. D'après la loi réciprocité de Frobenius pour les induites compactes

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(C^{p,q},1) = \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{C}_p} \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q)\Big)^*$$

C'est le complexe double associé au complexe de complexes cosimpliciaux dual du complexe de complexes simpliciaux associé aux applications

$$\forall \alpha \in \mathcal{C}_{p+1}\ \forall \beta \in \mathcal{C}_p \quad f_{\alpha,\beta} : \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q) \longrightarrow \Gamma_!(U(\beta), p^*\mathcal{I}^q)$$

où $f_{\alpha,\beta} = \gamma_!$ s'il existe $\gamma \in \Gamma$ $\gamma \cdot \alpha \subset \beta$ et $f_{\alpha,\beta} = 0$ sinon. Le complexe de cohomologie de Čech à support compact associé à $\mathcal{I}^\bullet$ et $(p(U_i))_{i\in I}$ est

$$B^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\beta\subset I \\ |\beta|=-p+1}} \Gamma_!\Big(\bigcap_{i\in\beta} p(U_i), \mathcal{I}^q\Big)$$

On vérifie en utilisant que $\forall i\ \forall \gamma \in \Gamma \smallsetminus \{\mathrm{Id}\}\ \ \gamma\cdot U_i \cap U_i = \varnothing$ que si

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{C}_p &\longrightarrow \{\beta \subset I \mid |\beta| = -p+1\} \\ \{(i_0,\gamma_0),\dots,(i_{-p},\gamma_{-p})\} &\longmapsto \{i_0,\dots,i_{-p}\} \end{aligned}$$

alors,

$$\forall \beta \subset I \quad \bigcap_{i\in\beta} p(U_i) = \coprod_{\substack{\alpha\in\mathcal{C}_p \\ \xi(\alpha)=\beta}} p(U(\alpha))$$

et que donc

$$B^{p,q} = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{C}_p} \Gamma_!(p(U(\alpha)), \mathcal{I}^q)$$

or $p_{|U(\alpha)} : U(\alpha) \xrightarrow{\sim} p(U(\alpha))$ et donc

$$\Gamma_!(p(U(\alpha)), \mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^\bullet)$$

d'où l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(C^{\bullet,\bullet}, 1) \simeq B^{\bullet,\bullet}$$

(on vérifie facilement, par exemple au niveau des complexes simpliciaux, que les applications de bord sont les mêmes) □

***Remarque 4.5.2* (Indépendance du choix du recouvrement).** — La suite spectrale construite dans le théorème précédent semble a priori dépendre du choix d'un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X vérifiant $\forall i \in I\ \forall \gamma \in \Gamma \smallsetminus \{\mathrm{Id}\}\ \ U_i \cap \gamma\cdot U_i = \varnothing$. Si $\mathcal{U}$ désigne un tel recouvrement notons $E_r^{pq}(\mathcal{U})$ la suite spectrale associée. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux tels recouvrements on peut toujours trouver un troisième recouvrement $\mathcal{W}$ plus fin que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ vérifiant ces hypothèses. Si de plus $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}$ il a un isomorphisme de suites spectrales (pour $r \geqslant 2$)

$$E_r^{pq}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(\mathcal{V})$$

associé (il s'agit d'un morphisme naturel défini au niveau des complexes de cohomologie de Čech à support compact qui induit un isomorphisme puisque c'est le cas au niveau des E_2^{pq}). Ces isomorphismes se composent de façon naturel. On a donc un système inductif de suites spectrales $(E_r^{pq}(\mathcal{U}))_{\mathcal{U}}$ où $\mathcal{U}$ parcourt des recouvrements vérifiant les hypothèses ci-dessus et où $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ si $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}$. Les morphismes de transition sont des isomorphismes et si l'on veut une définition canonique ne dépendant pas du choix d'un recouvrement on peut poser

$$E_r^{pq} = \varinjlim_{\mathcal{U}} E_r^{pq}(\mathcal{U})$$

Remarque 4.5.3. — La suite spectrale est naturelle en X, Γ, ρ au sens suivant : si X', Γ', ρ' vérifient les mêmes hypothèses que X, Γ, ρ et si

$$f : X \longrightarrow X', \quad g : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

où f est étale fini et g un morphisme de groupe sont tels que

$$\forall \gamma \in \Gamma \, \forall x \in X \quad f(\gamma \cdot x) = g(\gamma) \cdot f(x)$$

et

$$\rho = \rho' \circ g$$

alors, il y a un morphisme induit : $\overline{f} : X/\Gamma \to X'/\Gamma'$ qui induit un morphisme $\overline{f}^* \mathcal{F}_{\rho'} \to \mathcal{F}_\rho$ qui induit un morphisme ${}^t\overline{f}_! : H_c^{-(p+q)}(X'/\Gamma', \mathcal{F}_{\rho'})^* \to H_c^{-(p+q)}(X/\Gamma, \mathcal{F}_\rho)^*$.

Il y a alors un morphisme de suite spectrales $E_r^{pq}(X', \Gamma', \rho') \to E_r^{p,q}(X, \Gamma, \rho)$ qui induit sur la limite ${}^t\overline{f}_!$ et tel que le morphisme sur les E_2^{pq} soit le morphisme

$$\mathrm{Ext}^p_{\Gamma'}(H_c^{-q}(X', L), \check{\rho}') \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_\Gamma(H_c^{-q}(X, L), \check{\rho})$$

qui se déduit des deux applications $f_! : H_c^p(X, L) \to H_c^p(X', L)$ et $\check{\rho}' \to \check{\rho}$ par fonctorialité des Ext.

Ces morphismes de suites spectrales se composent naturellement au sens où l'application $(X, \Gamma, \rho) \mapsto E_r^{pq}$ est un foncteur de la catégorie des triplets vérifiant les hypothèses ci-dessus et munis de morphismes du type de ceux ci-dessus dans la catégorie des suites spectrales.

Nous utiliserons en fait la variante suivante du théorème précédent :

Théorème 4.5.4. — *Sous les hypothèses précédentes, il y a une suite spectrale* $\boldsymbol{Gal}(\overline{k}|k)$*-équivariante*

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_\Gamma(H_c^{-q}(X \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \widehat{\overline{k}}), \check{\rho}) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma \backslash X \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}_\rho)^*$$

Démonstration. — Reprenons les notations de la démonstration du théorème précédent. Appliquons la démonstration de ce théorème au recouvrement $(U_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}})_{i \in I}$ de $X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}$ et au complexes de faisceaux obtenus à partir de $\mathcal{I}^\bullet$ par pull-back vers $X \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \widehat{\overline{k}}$. L'équivariance de la suite spectrale obtenue ne pose alors pas de problème. □

Les remarques 4.5.2 et 4.5.3 s'appliquent bien sûr également au théorème 4.5.4.

Variantes 4.5.5

• Au lieu de nous placer dans le cadre des coefficients ℓ-adiques considérons des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-coefficients. La démonstration précédente s'adapte aussitôt (et est même plus simple puisqu'on n'a pas besoin d'utiliser la machinerie du foncteur $\mathbb{R}\pi_*$) pour montrer l'existence d'une suite spectrale du même type. Le point clef étant de remarquer que si M est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel alors c-$\mathrm{Ind}_1^\Gamma M$ est un Γ-module projectif, comme c'était le cas pour les L coefficients.

• Par contre, si l'on prend comme coefficients un anneau artinien local R de corps résiduel de caractéristique ℓ la démonstration ne s'adapte pas en général. Cependant supposons R Gorenstein (ce qui est par exemple le cas si $R = \mathcal{O}_L/\varpi_L^m\mathcal{O}_L$ avec $L|\mathbb{Q}_\ell$ de degré fini et $m \in \mathbb{N}$). Alors, avec les notations de la démonstration, pour le système local de R-modules $\mathcal{F}$ sur $(X/\Gamma)_{\text{ét}}$ on peut trouver une résolution flasque $\mathcal{I}^\bullet$ de $\mathcal{F}$ telle que $\forall\,\alpha$ le R-module $\Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q)$ soit projectif et donc le $R[\Gamma]$-module induit compact soit projectif. En effet, utilisant des résolutions de Godement, si pour x un point de $\Gamma\backslash X$ on note $i_x : \boldsymbol{Spec}(\mathcal{K}(x)^s)_{\text{ét}} \to \boldsymbol{Spec}(\mathcal{K}(x))_{\text{ét}} \to (\Gamma\backslash X)_{\text{ét}}$, il suffit de vérifier que si l'on se fixe pour tout x un R-module injectif M_x alors pour tout α le R-module

$$\Gamma_!\Big(U(\alpha), p^*(\prod_x i_{x*}M_x)\Big) = \Gamma_!\Big(p(U(\alpha)), \prod_{x\in p(U(\alpha))} i_{x*}M_x\Big)$$

est projectif. Or, écrivant $U(\alpha)$ comme union croissante d'ouverts relativement compacts, ce dernier module s'écrit comme limite inductive de modules de la forme

$$\Gamma\Big(V, \prod_{x\in V} i_{x*}M_x\Big) = \prod_{x\in V} M_x$$

avec V un ouvert relativement compact dans $p(U(\alpha))$. Ce dernier module est injectif, puisque les M_x le sont, donc projectif, puisque R est Gorenstein. Une limite inductive de modules projectifs dont les applications de transition sont facteur direct, étant projective on en conclut que dans ce cas il y a une suite spectrale :

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_{R[\Gamma]}(H_c^{-q}(X\,\widehat{\otimes}_k\,\widehat{\overline{k}}), \check{\rho}) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma\backslash X\,\widehat{\otimes}_k\,\widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}_\rho)^*$$

où $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ (R étant Gorenstein de dimension 0, R est dualisant).

Remarque 4.5.6. — Supposons X lisse sur k. Si l'on considère comme coefficients un corps de caractéristique ℓ la suite spectrale obtenue est égale, via la dualité de Poincaré, à la suite spectrale obtenue pour les groupes de cohomologie en écrivant la suite spectrale de foncteurs composés associée à l'égalité $\Gamma(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, p^*\mathcal{F})^\Gamma$. Cependant dans le cas de la seconde variante ci-dessus ces deux suites ne sont pas forcément égales. Pour les coefficients ℓ-adiques, la cohomologie sans support et donc la dualité de Poincaré n'ayant pas de sens en général, il n'y a pas de telle interprétation.

4.5.2. La suite spectrale de Hochschild-Serre

4.5.2.1. Spéculations. — L'idée de l'existence d'une suite spectrale telle qu'elle est énoncée dans le théorème qui suit est due à Michael Harris ([**30**]). Dans [**30**] M. Harris démontre l'existence de cette suite spectrale dans le cas de l'espace de Drinfeld uniformisant des variétés de Shimura différentes des nôtres. Néanmoins la démonstration que nous allons donner s'applique à n'importe quel type d'uniformisation.

Reprenons les notations globales du premier chapitre. Soit donc $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ et ϕ une classe d'isogénie associée à b.

Définition 4.5.7. — $G^\phi(\mathbf{A}_f) = J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$

Il y a donc une inclusion $I^\phi(\mathbf{A}_f) \hookrightarrow G^\phi(\mathbf{A}_f)$ via l'action d'un automorphisme de ϕ sur l'homologie cristalline en p et ℓ-adique pour $\ell \neq p$. Il y a alors des isomorphismes lorsque $K = K_p K^p$ varie

$$\begin{aligned} I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) &\xrightarrow{\sim} \left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p\right)/J_b \\ [x, yK^p] &\longmapsto [x, I^\phi(\mathbb{Q})yK^p] \end{aligned}$$

où, contrairement au membre de gauche, J_b agit à droite sur $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ dans le membre de droite. Récrivons donc l'isomorphisme d'uniformisation rigide sous la forme

$$\left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p\right)/J_b \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi)$$

De ce point de vue là, l'uniformisation de Rapoport-Zink est une uniformisation p-adique. Pour simplifier supposons que $\rho = 1$. Supposons l'existence d'une suite spectrale du type Hochschild-Serre associée au quotient p-adique précédent :

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^{\,p}_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), 1\right) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi), \overline{\mathbb{Q}_\ell})^*$$

Alors,

$$H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}[I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p]$$

comme J_b-module. Et donc,

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^{\,p}_{J_b\text{-lisse}}\Big(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f), \overline{\mathbb{Q}_\ell})^{K^p}_{J_b\,\mathrm{lisse}}}_{(\mathcal{A}_1^\phi)^{K^p}}\Big)$$

où $\mathcal{A}_1^\phi$ est un espace de « formes automorphes sur G^ϕ » de type 1 à l'infini.

Le théorème qui suit donne une démonstration de ces spéculations. La démonstration que nous donnons est valable dans un cadre beaucoup plus général que celui des variétés de Shimura que nous considérons (par exemple dans le cadre de la conjecture 4.2 de [**32**]). Elle est différente de celle de [**30**] qui ne se généralise pas au cadre général.

4.5.2.2. La suite spectrale. — Rappelons que nous notons

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes}\, \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}.$$

Fixons $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ et ϕ une classe d'isogénie dans la strate indexée par b (*cf.* le chapitre 3). Nous allons définir un espace de formes automorphes sur $G^\phi(\mathbf{A}_f)$.

Définition 4.5.8

$$\mathcal{A}_\rho^\phi = \{f : G^\phi(\mathbf{A}_f) \to V_\rho \mid f \text{ est } G^\phi(\mathbf{A}_f)\text{-lisse à droite et} \\ \forall \gamma \in I^\phi(\mathbb{Q}) \;\; f(\gamma\bullet) = \rho(\gamma)\cdot f(\bullet)\}$$

Pour $\gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})$, $\rho(\gamma)$ signifie que γ est vu comme un élément de $G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ via $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Via l'isomorphisme fixé $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ on a

$$\mathcal{A}_\rho^\phi = \{f : G^\phi(\mathbf{A}_f) \to V_\rho \mid f \text{ est lisse et } \forall \gamma \in I^\phi(\mathbb{Q}) \;\; f(\gamma\bullet) = \rho(\gamma)\cdot f(\bullet)\}$$

où ici $\rho(\gamma)$ est défini via $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow I^\phi(\mathbb{C}) \hookrightarrow G(\mathbb{C})$. L'espace $\mathcal{A}_\rho^\phi$ est celui des « formes automorphes sur G^ϕ » de type ρ à l'infini. Il est muni d'une action lisse de $G^\phi(\mathbf{A}_f)$ par translations à droite.

Si $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p) \subset G^\phi(\mathbf{A}_f)$ nous noterons $(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}$ l'espace des formes invariantes par K^p *i.e.* de niveau contenu dans K^p.

Remarque 4.5.9. — Soit $\mathcal{A}(I^\phi)_\rho$ l'espace des formes automorphes usuelles sur I^ϕ se transformant via $\breve{\rho}_{|I^\phi(\mathbb{R})}$ à l'infini. Il y a alors un isomorphisme

$$\mathcal{A}_\rho^\phi \simeq \mathrm{Ind}_{I^\phi(\mathbf{A}_f)}^{G^\phi(\mathbf{A}_f)} \mathcal{A}(I^\phi)_\rho$$

où Ind désigne l'induite lisse.

Soit $N = \dim(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}) = \dim(\mathrm{Sh})$. Soit $K = K_pK^p$ un niveau.

Définition 4.5.10. — Posons

$$H^\bullet(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi), \mathcal{L}_\rho) = H_c^{2N-\bullet}(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi) \widehat{\otimes}\, \mathbb{C}_p, \mathcal{L}_{\breve{\rho}})^*(-N)$$

Il s'agit du dual de Poincaré algébrique.

Remarque 4.5.11. — Cette définition est complètement formelle puisqu'à part pour la strate basique, ces espaces de cohomologie sont de dimension infinie. Néanmoins, dans le cas de la strate basique, ces groupes peuvent s'interpréter comme l'aboutissement d'une suite spectrale des cycles évanescents ℓ-adique (II.5.9.4)

Théorème 4.5.12. — *Il y a un système compatible de suites spectrales $G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu}$-équivariant*

$$E_2^{pq}(K_pK^p) = \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\Big(H_c^{2N-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})(N), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}\Big) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_{K_pK^p}(\phi), \mathcal{L}_\rho^{\mathrm{an}})$$

Quelques remarques s'imposent avant la démonstration : $G(\mathbf{A}_f) = G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbf{A}_f^p)$ et $\forall q \, \forall g \in G(\mathbb{Q}_p)$ il y a un morphisme

$$H_c^{2N-q}(\breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}K_pg}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{(g^{-1})_!} H_c^{2N-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

qui induit par fonctorialité des Ext un morphisme $E_2^{pq}(K_pK^p) \to E_2^{pq}(g^{-1}K_pgK^p)$.

Dire que la suite spectrale est $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariante signifie que ce morphisme est le morphisme associé au niveau des groupes E_2^{pq} à un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K_pK^p) \longrightarrow E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p)$$

qui induit dans la limite le morphisme usuel

$$H^{p+q}(\mathrm{Sh}_K(\phi), \mathcal{L}_\rho^{\mathrm{an}}) \longrightarrow H^{p+q}(\mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}(\phi), \mathcal{L}_\rho^{\mathrm{an}})$$

Cela signifie également que ces morphismes de suites spectrales se composent de façon naturelle. De même, $G(\mathbf{A}_f^p)$ opère sur $\mathcal{A}_\rho^\phi$ et donc induit un morphisme pour $g \in G(\mathbf{A}_f^p)$

$$(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \longrightarrow (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{g^{-1}Kg}$$

qui induit le morphisme $E_2^{pq}(K) \to E_2^{pq}(K_pg^{-1}K^pg)$. La $G(\mathbf{A}_f^p)$-équivariance est alors prise au même sens que pour $G(\mathbb{Q}_p)$. Quant à l'action de W_{E_ν} elle se fait sur chaque $E_2^{pq}(K)$ et ne pose pas de problème d'interprétation.

Reste à expliquer ce que l'on appelle système compatible. Soient donc $K_p' \subset K_p$ et $K^{p\prime} \subset K^p$. La compatibilité signifie qu'il y a un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K_p'K^{p\prime}) \longrightarrow E_r^{pq}(K_pK^p)$$

qui est induit au niveau des termes E_2^{pq} par les morphismes J_b-équivariants

$$(\Pi_{K_p,K_p'})_! : H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p'}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

et l'inclusion

$$(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \hookrightarrow (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^{p\prime}}$$

couplés à la fonctorialité de Ext. Bien sûr, ces morphismes de transition sont compatibles à l'action de $G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu}$.

Démonstration. — Prenons les notations suivantes pour l'uniformisation rigide :

$$\Theta : I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi)$$

Soient $(y_i)_{i\in I}$ des éléments de $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$ vérifiant

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}) \cdot y_i$$

et notons pour tout i dans I $\Gamma_i = \mathrm{Stab}_{I^\phi(\mathbb{Q})}(y_i)$. Nous verrons les groupes Γ_i comme des sous-groupes de J_b via le plongement $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow J_b$. A un tel choix est associé un isomorphisme

$$\Xi_{(y_i)_i} : \coprod_{i\in I} \Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \xrightarrow{\sim} I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash\left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}\times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)$$

Notons $\rho_i : \Gamma_i \to \mathrm{GL}(V_\rho)$ le morphisme continu (pour Γ_i muni de la topologie profinie et V_ρ la topologie ℓ-adique) défini par le composé

$$\Gamma_i \hookrightarrow I^{\phi}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V_\rho)$$

Lemme 4.5.13

$$\Xi^*_{(y_i)_i}(\Theta^*\mathcal{L}_\rho) = \coprod_{i\in I}\mathcal{F}_{\rho_i}$$

où $\mathcal{F}_{\rho_i}$ est le système local associé à ρ_i (cf. le début de la section 4.5.1).

Démonstration. — Il suffit de regarder ce que donne une variation du niveau K^p à droite sur la décomposition de gauche. □

Nous allons avoir besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 4.5.14. — *Soit $i\in I$. Soient π_1 une représentation lisse de J_b et π_2 une représentation de Γ_i*

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{J_b\text{-lisse}}(\pi_1, \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J_b}\pi_2) \simeq \mathrm{Ext}^\bullet_{\Gamma}(\pi_1,\pi_2)$$

où les induites Ind *sont des induites lisses.*

Démonstration. — Cela résulte de la réciprocité de Frobenius usuelle pour les groupes p-adiques et de ce que Γ_i étant discret, $\mathrm{Ext}_{\Gamma_i\text{-lisse}} = \mathrm{Ext}_{\Gamma_i}$. □

Lemme 4.5.15. — *Soient π et $(\rho_i)_{i\in I}$ des représentations lisses de J_b. Il y a un isomorphisme canonique*

$$\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}^\bullet_{J_b\text{-lisse}}(\pi,\rho_i) \simeq \mathrm{Ext}_{J_b\text{-lisse}}\left(\pi, \left(\prod_{i\in I}\rho_i\right)^{\mathrm{lisse}}\right)$$

où $(\prod_i \rho_i)^{\mathrm{lisse}}$ est la partie lisse de la représentation produit.

Démonstration. — Soit $P_\bullet \twoheadrightarrow \pi$ une résolution projective de π dans la catégorie des J_b-modules lisses.

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}(\pi,\rho_i) &= \prod_{i\in I} H^p(\mathrm{Hom}_{J_b}(P_\bullet,\rho_i))\\ &= H^p\Big(\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{J_b}(P_\bullet,\rho_i)\Big)\\ &= H^p\Big(\mathrm{Hom}_{J_b}(P_\bullet,\prod_{i\in I}\rho_i)\Big)\end{aligned}$$

or $\mathrm{Hom}_{J_b}(P_\bullet,\prod_{i\in I}\rho_i) = \mathrm{Hom}_{J_b}(P_\bullet,(\prod_{i\in I}\rho_i)^{\mathrm{lisse}})$ car $P_\bullet$ étant lisse l'image d'un morphisme de J_b-module de $P_\bullet$ vers $\prod_i\rho_i$ est contenue dans $(\prod_i\rho_i)^{\mathrm{lisse}}$. D'où le résultat. □

Pour $i \in I$ nous considérons la suite spectrale du théorème 4.5.4 (rappelons qu'a fin de ne pas alourdir les notations on ne note pas les extensions des scalaires à $\mathbb{C}_p$) :

$$E_2^{pq}(i) = \mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i}\left(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho_i\right) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}}, \mathcal{F}_{\check{\rho}_i})^*$$

Le produit de ces suites spectrales est une suite spectrale convergente

$$\prod_{i\in I} E_2^{pq}(i) \Longrightarrow \prod_{i\in I} H_c^{-(p+q)}(\breve{\mathcal{M}}/\Gamma_{i,K^p}, \mathcal{F}_{\check{\rho}_{i,K^p}})^*$$

L'aboutissement de cette suite spectrale se récrit

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} H_c^{-(p+q)}(\breve{\mathcal{M}}/\Gamma_{i,K^p}, \mathcal{F}_{\check{\rho}_{i,K^p}})^* &\xrightarrow{\sim} H_c^{-(p+q)}\Big(\coprod_{i\in I}\breve{\mathcal{M}}/\Gamma_{i,K^p}, \coprod_{i\in I}\mathcal{F}_{\check{\rho}_{i,K^p}}\Big)^* \\ &\xrightarrow[\sim]{(\Xi_{(y_i)_i})_*} H_c^{-(p+q)}\left(I^\phi(\mathbb{Q})\backslash\left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}\times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right), \mathcal{L}_{\check{\rho}}\right)^* \\ &\xrightarrow[\sim]{\Theta_*} H_c^{-(p+q)}(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi), \mathcal{L}_{\check{\rho}})^* = H^{p+q+2N}(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi), \mathcal{L}_\rho)(N)\end{aligned}$$

Quant aux premiers termes, grâce au lemme 4.5.14

$$\forall i\in I\;\forall p,q\quad \mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho_i) \simeq \mathrm{Extp}^p_{J_b\text{-lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J_b}\rho_i)$$

et donc grâce au lemme 4.5.15

$$\prod_{i\in I} E_2^{pq}(i) \simeq \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \left(\textstyle\prod_i \rho_i\right)^{\mathrm{lisse}}\right)$$

L'ingrédient suivant est le lemme

Lemme 4.5.16. — *Il y a un isomorphisme de J_b-modules*

$$\zeta_{(y_i)_i} : \Big(\prod_{i\in I}\mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J_b}\rho_i\Big)^{\mathrm{lisse}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}$$

Démonstration. — Définissons $\zeta_{(y_i)_i}$. Soit $(f_i)_{i\in I} \in \prod_i \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^J \rho_i$. On a donc, $\forall i\in I$, $f_i : J_b \to V_\rho$ et est tel que $\forall\gamma\in\Gamma_i\; f_i(\gamma\bullet) = \rho_i(\gamma)\cdot f_i(\bullet)$. Définissons $f = \zeta_{(y_i)_i}((f_i)_i)$: $(\mathcal{A}_\rho^\phi\rho)^{K^p}$ s'identifie aux fonctions de $J_b\times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$ à valeurs dans V_ρ se transformant via ρ par l'action à gauche de $I^\phi(\mathbb{Q})$. Soit $(a,b)\in J_b\times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$. $\exists! i\in I\;\exists\gamma\in I^\phi(\mathbb{Q})\;\; b = \gamma\cdot y_i$. Posons alors

$$f(a,b) = \rho(\gamma)\cdot f_i(\gamma^{-1}a)$$

$f(a,b)$ est bien défini car si $b = \gamma'\cdot y_i$ où $\gamma'\in I^\phi(\mathbb{Q})$ alors ${\gamma'}^{-1}\gamma\in\Gamma_i$ et donc

$$\begin{aligned}\rho(\gamma')\cdot f_i({\gamma'}^{-1}a)) &= \rho(\gamma')\cdot f_i(({\gamma'}^{-1}\gamma)\gamma^{-1}a) \\ &= \rho(\gamma')\rho_i({\gamma'}^{-1}\gamma)f_i(\gamma^{-1}a) = \rho(\gamma)f_i(\gamma^{-1}a)\end{aligned}$$

Par définition de f, $\forall\gamma\in I^\phi(\mathbb{Q})\; f(\gamma\bullet) = \rho(\gamma)\cdot f(\bullet)$. La lissité de f est claire quant à l'action de $G(\mathbf{A}_f^p)$ puisqu'elle est invariante par K^p, quant à la lissité vis à vis de l'action de J_b elle résulte de l'existence d'un sous-groupe compact ouvert C dans J_b vérifiant $\forall c \in C\ \forall i \in I\ \ f_i(\bullet c) = f_i(\bullet)$.

Définissons l'inverse de $\zeta_{(y_i)_i}$. Si $f \in \left(\mathcal{A}^\phi_\rho\right)^{K^p}$, $f : J_b \times G(\mathbf{A}^p_f)/K^p \to V_\rho$, pour un i dans I et a dans J_b posons

$$f_i(a) = f(a, y_i)$$

$f \mapsto (f_i)_i$ est bien l'inverse de $\zeta_{(y_i)_i}$. □

On obtient donc au final une suite spectrale W_{E_ν}-équivariante

$$E_2^{pq}((y_i)_{i\in I}) = \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}^\phi_\rho)^{K^p}) \Longrightarrow H^{2N+p+q}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi), \mathcal{L}_{\breve{\rho}})(N)$$

où $E_2^{pq}((y_i)_i)$ et l'aboutissement ne dépendent pas du choix $(y_i)_i$ mais où les autres termes en dépendent a priori.

La suite spectrale annoncée s'obtient en translatant verticalement cette suite spectrale de $2N$ et en la tordant par $\overline{\mathbb{Q}_\ell}(-N)$.

Montrons qu'en fait cette suite spectrale est indépendante du choix des $(y_i)_i$ au sens suivant :

Lemme 4.5.17. — *Supposons choisis des $(y'_j)_{j\in J}$, $y'_j \in G(\mathbf{A}_f)/K^p$ tels que*

$$G(\mathbf{A}_f)/K^p = \coprod_{j\in J} I^\phi(\mathbb{Q}) \cdot y'_j$$

Il y alors un isomorphisme naturel de suites spectrales $E_r^{pq}((y_i)_i) \to E_r^{pq}((y'_j)_j)$ induisant l'identité sur E_2^{pq} et l'aboutissement :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{pq}((y_i)_{i\in I}) = \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}^\phi_\rho)^{K^p}) & \Longrightarrow & H_c^{-(p+q)}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi), \mathcal{L}_{\breve{\rho}})^* \\ \Big\downarrow \mathrm{Id} & & \Big\downarrow \mathrm{Id} \\ E_2^{pq}((y'_j)_{j\in J}) = \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}^\phi_\rho)^{K^p}) & \Longrightarrow & H_c^{-(p+q)}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi), \mathcal{L}_{\breve{\rho}})^* \end{array}$$

La naturalité étant prise au sens où si l'on fait un troisième choix $(y''_k)_k$ comme ci-dessus le morphisme de suites spectrales $E_r^{pq}((y_i)_i) \to E_r^{pq}((y''_k)_k)$ est le composé de $E_r^{pq}((y_i)_i) \to E_r^{pq}((y'_j)_j)$ et $E_r^{pq}((y'_j)_j) \to E_r^{pq}((x''_k)_k)$

Démonstration. — Quitte à réindexer on peut supposer que $J = I$ et que $\forall i \in I$, $y'_i \in I^\phi(\mathbb{Q}) \cdot y_i$. Fixons pour tout i dans I un γ_i dans $I^\phi(\mathbb{Q})$ vérifiant $y'_i = \gamma_i \cdot y_i$. On a donc

$$\forall i \in I\ \Gamma'_i = \mathrm{Stab}_{I^\phi(\mathbb{Q})}\, y'_i = \gamma_i \Gamma_i \gamma_i^{-1}$$

On définit comme précédemment ρ'_i. Notons pour tout i dans I $\ E_r^{pq}(i)'$ la suite spectrale associée à $(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \Gamma'_i, \rho'_i)$.

Considérons l'isomorphisme de suites spectrales associé au morphisme de triplets $(X, \Gamma, \rho) \to (X', \Gamma', \rho')$ par la remarque 4.5.3 où $X = X' = \breve{\mathcal{M}}_{K_p}$, le morphisme $X \to X'$ est l'action de $\gamma_i \in J_b$, $\Gamma = \Gamma_i, \Gamma' = \Gamma'_i$ et le morphisme de groupes $\Gamma \to \Gamma'$

est la conjugaison par γ_i^{-1}, et le morphisme $\rho \to \rho' \circ \mathrm{int}_{\gamma_i^{-1}}$ est la conjugaison par $\rho(\gamma_i)$. A un tel choix de $(\gamma_i)_i$ est donc associé un isomorphisme de suites spectrales

$$\begin{tikzcd} E_r^{pq}(i) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\alpha_{(\gamma_i)_i}"', "\simeq"] & H_c^{p+q}(\Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \mathcal{F}_{\check{\rho}_i}) \arrow[d, "\simeq"'] \\ E_r^{pq}(i)' \arrow[r, Rightarrow] & H_c^{p+q}(\Gamma_i'\backslash\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \mathcal{F}_{\check{\rho'}_i}) \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\alpha_{(\gamma_i)_i}$ induit au niveau des termes E_2^{pq} un morphisme

$$\mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i}(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho_i) \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i'}(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho_i')$$

qui se décrit en utilisant la fonctorialité de Ext.

Le produit de ces isomorphismes de suites spectrales induit un isomorphisme de suites spectrales convergentes

$$\prod_{i\in I} E_r^{pq}(i) \longrightarrow \prod_{i\in I} E_r^{pq}(i)'$$

Rappelons qu'au choix des y_i on a associé deux isomorphismes

$$\prod_{i\in I} E_2^{pq}(i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p})$$

et

$$\prod_{i\in I} H_c^{-(p+q)}(\Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \mathcal{F}_{\check{\rho}_i})^* \xrightarrow{\sim} H_c^{-(p+q)}(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi), \mathcal{L}_{\check{\rho}})^*$$

On a fait de même pour $(y_i')_i$. On en déduit l'existence de l'isomorphisme de suites spectrales annoncé.

Afin de montrer que ce morphisme induit bien l'identité sur les termes associés à $r = 2$ il faut montrer le lemme suivant

Lemme 4.5.18. — *Les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} & \prod_i E_2^{pq}(i) \arrow[dd] \\ \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \\ & \prod_i E_2^{pq}(i)' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\prod_i H_c^{p+q}(\Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}},\mathcal{F}_{\rho_i}) \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\prod_i \gamma_{i!}"', "\simeq"] & \\
& H_c^{p+q}(I^\phi(\mathbb{Q})\backslash(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}\times G(\mathbb{A}_f^p)/K^p),\Theta^*\mathcal{L}_\rho) \\
\prod_i H_c^{-(p+q)}(\Gamma'_i\backslash\breve{\mathcal{M}},\mathcal{F}_{\rho'_i}) \arrow[ur, "\simeq"] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Pour le deuxième diagramme c'est clair puisque le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i \Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}} \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\prod_i \gamma_i"'] & \\
& I^\phi(\mathbb{Q})\backslash(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}\times G(\mathbb{A}_f^p)/K^p) \\
\coprod_i \Gamma'_i\backslash\breve{\mathcal{M}} \arrow[ur, "\simeq"] &
\end{tikzcd}$$

Quant au premier cela se ramène aisément (il suffit de suivre les différents isomorphismes) à montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& \prod_i \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J_b}\rho_i \arrow[dd, "\prod_i \Delta_i"] \\
(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \arrow[ur, "\zeta_{(y_i)_i}"] \arrow[dr, "\zeta_{(y'_i)_i}"'] & \\
& \prod_i \mathrm{Ind}_{\Gamma'_i}^{J_b}\rho'_i
\end{tikzcd}$$

où $\Delta_i : \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J}\rho_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\Gamma'_i}^{J}\rho'_i$ est induit par $(\mathrm{int}_{g_i},\rho(\gamma_i)) : (\Gamma_i,\rho_i)\to(\Gamma'_i,\rho'_i)$. La commutativité est laissée au lecteur. □

Remarquons que l'isomorphisme de suites spectrales ainsi construit dépend du choix des γ_i qui ne sont pas uniques. Néanmoins, si l'on fait un autre choix de γ_i l'isomorphisme de suites spectrales induit encore l'identité sur le premier terme de la suite spectrale. Or deux morphismes de suites spectrales coïncidant sur les termes E_2^{pq} coïncident. L'isomorphisme ne dépend donc pas du choix des γ_i.

Finalement il reste à vérifier la naturalité des morphismes de suites spectrales construits mais cela est clair par le même argument que précédemment puisque sur les termes E_2^{pq} tous donnent l'identité. Cela finit la démonstration de l'indépendance des du choix des y_i. $\square$

Afin d'avoir une définition intrinsèque ne dépendant pas du choix des $(y_i)_i$ nous poserons

$$E_r^{pq} = \varprojlim_{(y_i)_i} E_r^{pq}((y_i)_i)$$

où les isomorphismes de transition sont les isomorphismes construits dans le lemme 4.5.17. Il résulte également de ce lemme qu'il y a un isomorphisme canonique

$$E_2^{pq} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{J_b\text{-lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p})$$

Reste à vérifier l'équivariance de la suite spectrale.

Nous allons faire varier le groupe $K = K_pK^p$, c'est pourquoi nous préciserons les notations précédentes en notant

$$E_r^{pq}(K, y_i)$$

la suite spectrale notée auparavant $E_r^{pq}(i)$,

$$E_r^{pq}(K, (y_i)_i)$$

la suite spectrale construite précédemment associée à des $(y_i)_i$ vérifiant

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}) \cdot y_i$$

et

$$E_r^{pq}(K) = \varprojlim_{(y_i)_i} E_r^{pq}(K, (y_i)_i)$$

Commençons par la $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariance. Soit $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ et $(y_i)_{i\in I}$. Puisque l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ commute à celle de J_b, pour tout i dans I g^{-1} induit un isomorphisme de triplets (4.5.3)

$$(\breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}K_pg}, \Gamma_i, \rho_i) \xrightarrow{\sim} (\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \Gamma_i, \rho_i)$$

d'où d'après la remarque 4.5.3 un isomorphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K_p, y_i) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(g^{-1}K_pg, y_i)$$

qui induit le morphisme annoncé sur les termes E_2^{pq}, c'est-à-dire le transposé du morphisme

$$H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}K_pg}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{(g^{-1})_!} H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

Prenant le produit de ces morphismes lorsque i varie on obtient un isomorphisme

$$E_r^{pq}(K, (y_i)_i) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p, (y_i)_i)$$

Si de plus on fait un autre choix de $(y_i')_i$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} E_r^{pq}(K,(y_i)_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"] & E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p,(y_i)_i) \arrow[d, "\simeq"] \\ E_r^{pq}(K,(y_i')_i) \arrow[r, "\sim"] & E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p,(y_i')_i) \end{tikzcd}$$

où les applications verticales sont celles construites dans le lemme 4.5.17. En effet, ce diagramme de suites spectrales commute au niveau des termes E_2^{pq}, il commute donc. On en déduit en prenant la limite sur tous les $(y_i)_i$ un isomorphisme

$$E_r^{pq}(K) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p)$$

Passons à la $G(\mathbf{A}_f^p)$-équivariance. Soit donc $g \in G(\mathbf{A}_f^p)$ et $(y_i)_i$ comme précédemment. L'élément g induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha : G(\mathbf{A}_f^p)/K^p &\xrightarrow{\sim} G(\mathbf{A}_f^p)/(g^{-1}K^pg) \\ xK^p &\longmapsto xg(g^{-1}K^pg) \end{aligned}$$

qui commute à l'action de $I^\phi(\mathbb{Q})$ et donc, comme $(y_i)_i$ est tel que

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}) \cdot y_i$$

on a

$$G(\mathbf{A}_f^p)/(g^{-1}K^pg) = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}).\alpha(y_i)$$

Remarquons que pour $i \in I \quad \Gamma_i = \mathrm{Stab}_{I^\phi(\mathbb{Q})}\, y_i = \mathrm{Stab}_{I^\phi(\mathbb{Q})}\, \alpha(y_i)$. Il y a donc des égalités

$$E_r^{pq}(K,y_i) = E_r^{pq}(K_pg^{-1}K^pg,\alpha(y_i))$$

Prenant le produit sur i on obtient l'égalité

$$E_r^{pq}(K_pK^p,(y_i)_i) = E_r^{pq}(K_pg^{-1}K^pg,(\alpha(y_i))_i)$$

Pour montrer que ce morphisme induit bien l'application attendue sur les termes E_2^{pq} il faut montrer le lemme suivant dont la démonstration ne pose aucun problème

Lemme 4.5.19. — *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \arrow[r, "\zeta_{(y_i)_i}"] \arrow[d, "\simeq"] & \prod_{i\in I} \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J_b} \rho_i \arrow[d, equal] \\ (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{g^{-1}K^pg} \arrow[r, "\zeta_{(\alpha(y_i))_i}"] & \prod_{i\in I} \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J_b} \rho_i \end{tikzcd}$$

où l'application verticale de gauche est induite par la translation d'une fonction de $\mathcal{A}_\rho^\phi$ par g.

Si maintenant $(y'_i)_i$ est un autre choix, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E_r^{pq}(K,(y_i)_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"] & E_r^{pq}(K_pg^{-1}K^pg,(\alpha(y_i))_i) \arrow[d, "\simeq"] \\ E_r^{pq}(K,(y'_i)_i) \arrow[r, "\sim"] & E_r^{pq}(K_pg^{-1}K^pg,(\alpha(y'_i))_i) \end{tikzcd}$$

où les applications verticales sont celles construites dans le lemme 4.5.17. En effet, il résulte de la commutativité du diagramme précédent que ce diagramme commute au niveau des termes E_2^{pq}. Il commute donc. Passant à la limite on obtient donc un isomorphisme

$$E_r^{pq}(K) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(K_pg^{-1}K^pg)$$

Passons maintenant à la compatibilité lorsque K varie. Soit donc $K'_p \subset K_p$ un sous-groupe compact ouvert et $K' = K'_pK^p$. Soit $(y_i)_i$ comme précédemment. Il y a alors pour tout i dans I un morphisme de triplets

$$(\breve{\mathcal{M}}_{K'_p},\Gamma_i,\rho_i) \longrightarrow (\breve{\mathcal{M}}_{K_p},\Gamma_i,\rho_i)$$

qui induit un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K,y_i) \longrightarrow E_r^{pq}(K',y_i)$$

Prenant le produit des ces morphismes on obtient un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K,(y_i)_i) \longrightarrow E_r^{pq}(K',(y_i)_i)$$

dont il est clair qu'il induit bien le morphisme attendu au niveau des termes E_2^{pq} et qu'il est compatible aux isomorphismes du lemme 4.5.17 lorsque l'on fait varier $(y_i)_i$.

Soit maintenant $K^{p\prime} \subset K^p$ un sous-groupe compact ouvert et $K' = K_pK^{p\prime}$. La projection

$$\mathrm{pr} : G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \longrightarrow G(\mathbf{A}_f^p)/K^{p\prime}$$

est compatible à l'action à gauche de $I^\phi(\mathbb{Q})$. Soit $(y_i)_i$ tel que

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q})\cdot y_i$$

et $(x_j)_j$ des éléments de $G(\mathbf{A}_f^p)/K^{p\prime}$ vérifiant

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^{p\prime} = \coprod_{j\in J} I^\phi(\mathbb{Q})\cdot x_j$$

et $\forall j \in J$, $\exists i \in I$, $\mathrm{pr}(x_j) = y_i$. Pour $j \in J$ notons $\beta(j) \in I$ l'élément vérifiant $\mathrm{pr}(x_j) = y_{\beta(j)}$. Pour tout $j \in J$, $\Gamma_j \subset \Gamma_{\beta(j)}$ d'où un morphisme de triplets

$$(\breve{\mathcal{M}}_{K_p},\Gamma_j,\rho_j) \longrightarrow (\breve{\mathcal{M}}_{K_p},\Gamma_{\beta(j)},\rho_{\beta(j)})$$

qui induit un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K,y_{\beta(j)}) \longrightarrow E_r^{pq}(K',y_j)$$

On obtient donc en assemblant ces morphismes un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K,(y_i)_i) \longrightarrow E_r^{pq}(K',(x_j)_j)$$

Il résulte du lemme suivant, dont la démonstration ne pose pas de problème, que ce morphisme est bien le morphisme attendu au niveau des termes E_2^{pq}.

Lemme 4.5.20. — *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \arrow[r, "\zeta_{(y_i)_i}"] \arrow[d, hook] & \prod_{i\in I} \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J_b} \rho_i \arrow[d] \\
(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^{p\prime}} \arrow[r, "\zeta_{(x_j)_j}"] & \prod_{j\in J} \mathrm{Ind}_{\Gamma_j}^{J_b} \rho_j
\end{tikzcd}$$

où les morphismes de gauches sont induits par les égalités $\mathrm{Res}_{\Gamma_{\beta(j)}}^{\Gamma_j} \rho_{\beta(j)} = \rho_j$.

Si maintenant $(y_j')_j$ et $(x_j')_j$ sont comme ci-dessus, il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E_r^{pq}(K,(y_i)_i) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & E_r^{pq}(K',(x_j)_j) \arrow[d, "\simeq"] \\
E_r^{pq}(K,(y_i')_i) \arrow[r] & E_r^{pq}(K',(x_j')_j)
\end{tikzcd}$$

où les application verticales sont celles construites dans le lemme 4.5.17. En effet, c'est déjà le cas au niveau des termes E_2^{pq}. On en déduit un morphisme

$$E_r^{pq}(K) \longrightarrow E_r^{pq}(K')$$

Les actions de $G(\mathbb{Q}_p)$ et de $G(\mathbf{A}_f^p)$ ainsi construites commutent et se composent naturellement puisque c'est la cas au niveau des termes E_2^{pq}. De même, ces actions commutent aux morphismes de changement de niveau construits ci-dessus. □

Corollaire 4.5.21. — *Il y a une suite spectrale $G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu}$-équivariante*

$$E_2^{pq} = \varinjlim_K \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^{2N-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}_\ell})(N),(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}\right) \Longrightarrow \varinjlim_K H^{p+q}(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi),\mathcal{L}_\rho^{\mathrm{an}})$$

4.5.3. Le cas des coefficients de torsion. — Soit $L|\mathbb{Q}_\ell$ de degré fini et $m \in \mathbb{N}$. Soit ρ une représentation d'un sous groupe compact de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ dans un $\mathcal{O}_L/\varpi^m\mathcal{O}_L$-module libre de rang fini (par exemple obtenue à partir d'un réseau stable dans l'espace d'une représentation ρ du type de celles considérées dans les sections précédentes). Soit $\mathcal{L}_\rho$ le système local associé. Utilisant la seconde variante 4.5.5 on obtient alors des suites spectrales du type précédent où l'on définit $H^{p+q}(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi),\mathcal{L}_\rho^{\mathrm{an}})$ comme dual (de Pontryagin) de la cohomologie à support compact de $\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi)$.

4.6. Application à la strate basique : « une formule de Matsushima p-adique »

Soit $b = b_0$ la classe basique de $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Supposons $\overline{S}(b_0) \neq \varnothing$ (ce que nous montrerons plus tard).

Si la classe d'isogénie ϕ induit la classe b_0, soit I^ϕ la forme intérieure de G associée. Le groupe réductif I^ϕ étant anisotrope modulo son centre, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}_\rho^\phi$ est l'espace des formes automorphes sur I^ϕ de type à l'infini $\check{\rho}'$ où

$$\rho' : I^\phi(\mathbb{R}) \hookrightarrow I^\phi(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V)$$

au sens où

$$\mathcal{A}_\rho^\phi = \mathrm{Hom}_{I^\phi(\mathbb{R})}(\check{\rho}', \mathcal{A}(I^\phi))$$

Nous noterons encore $\rho = \rho'$.

Supposons maintenant ρ irréductible et soit $\mathcal{A}(I^\phi)$ l'ensemble des représentations automorphes de I^ϕ (ce n'est pas l'ensemble des classes d'isomorphismes : on tient compte des multiplicités).

Le groupe de Lie $I^\phi(\mathbb{R})$ étant anisotrope modulo son centre, pour un sous groupe compact ouvert K^p de $G(\mathbf{A}_f^p)$

$$(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} = \bigoplus_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\rho}}} \Pi_p \otimes (\Pi^p)^{K^p}$$

Il y a alors un isomorphisme pour tous p et q

$$\mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}\right) \simeq \bigoplus_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\rho}}} \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}), \Pi_p\right) \otimes (\Pi^p)^{K^p}$$

où $H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}) = H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$. En effet, $H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p})$ étant un J_b-module de type fini (4.4.13), les Ext se calculent par des résolutions de $H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p})$ dont chaque terme est une somme finie de termes du type $\text{c-Ind}_{K_0}^{J_b} \pi$ où K_0 compact ouvert et π de dimension finie. Or,

$$\mathrm{Hom}_{J_b}(\text{c-Ind}_{K_0}^{J_b} \pi, (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) \simeq \mathrm{Hom}_{K_0}(\pi, (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) = \mathrm{Hom}_{K_0}(\pi, (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K_1 K^p})$$

où $K_1 \subset K_0$ est compact ouvert tel que $\pi(K_1) = \{\mathrm{Id}\}$. L'espace $(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K_1 K^p}$ est de dimension finie (admissibilité de l'espace des formes automorphes) et donc

$$\#\{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \mid \Pi_\infty = \rho \ \ \Pi^{K_1 K^p} \neq (0)\} < +\infty$$

On en déduit que le calcul des Ext ne fait intervenir qu'un nombre fini de Π d'où le résultat.

On en déduit alors en utilisant le lemme I.4.4.12 ainsi que la proposition I.4.4.13 (*cf.* [**34**] pour la définition du groupe de Grothendieck généralisé $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$) :

Corollaire 4.6.1. — *Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f)\times W_{E_\nu})$ *:*

$$\sum_{\substack{i,j\\ \Pi\in\mathcal{A}(I^\phi)\\ \Pi_\infty=\check{\rho}}}(-1)^{i+j}\Big[\varinjlim_{K_p}\mathrm{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}}\Big(H^j_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell})(N),\Pi_p\Big)\Big]\otimes[\Pi^p]$$
$$=\sum_i(-1)^i\Big[\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi)\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\mathcal{L}^{\mathrm{an}}_\rho)\Big]$$

La décomposition

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K=\coprod_{\ker^1(\mathbb{Q},G)}\mathrm{Sh}_K(G',X)^{\mathrm{an}}$$

induit une décomposition

$$\mathrm{sp}^{-1}(\overline{S}(b_0))=\coprod_{\ker^1(\mathbb{Q},G)}\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(G',X)\cap\mathrm{sp}^{-1}(\overline{S}(b_0))$$

où $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(G',X)\cap\mathrm{sp}^{-1}(\overline{S}(b_0))$ est un ouvert de $\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{an}}$.

Définition 4.6.2. — Dans la décomposition précédente nous noterons

$$\mathrm{Sh}_K(G',X)^{\mathrm{an}}_{\text{basique}}=\mathrm{sp}^{-1}(b_0)\cap\mathrm{Sh}_K(G',X)^{\mathrm{an}}$$

Rappelons (section 3.1.2) que dans le cas que nous considérons les groupes G' sont tous isomorphes à G, d'où un isomorphisme des modèles canoniques sur le corps reflex $E(G,X)$:

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sh}_K(G',X)$$

Les points géométriques dans $\overline{E}$ de $\mathrm{Sh}_K(G,X)\cap\mathrm{sp}^{-1}(b_0)$ se décrivent comme étant associés à des triplets (A,λ,ι) dont l'isocristal associé est basique. L'isomorphisme ci-dessus induit donc un isomorphisme d'ouverts analytiques

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\text{basique}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sh}_K(G',X)_{\text{basique}}$$

Donc, dans $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f)\times W_E)$ on a :

$$[H^\bullet_c(\mathrm{sp}^{-1}(b_0),\mathcal{L}^{\mathrm{an}}_\rho)]=|\ker^1(\mathbb{Q},G)|\cdot[H^\bullet_c(\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\text{basique}},\mathcal{L}^{\mathrm{an}}_\rho)]$$

Étant donné (3.1.2) que tous les groupes I^ϕ sont isomorphes et qu'il y a $|\ker^1(\mathbb{Q},G)|$ classes ϕ dans la strate basique, en sommant l'égalité du corollaire précédent sur tous les ϕ intervenant dans la strate basique et en divisant par $|\ker^1(\mathbb{Q},G)|$ on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.6.3. — *Choisissons la classe d'isogénie ϕ intervenant dans la strate basique. Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f)\times W_{E_\nu})$ *:*

$$\sum_{\substack{i,j\\ \Pi\in\mathcal{A}(I^\phi)\\ \Pi_\infty=\check{\rho}}}(-1)^{i+j}\Big[\varinjlim_{K_p}\mathrm{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}}\Big(H^j_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}\otimes\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell})(N),\Pi_p\Big)\Big]\otimes[\Pi^p]$$
$$=\sum_i(-1)^i\Big[\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{an}}_{\text{basique}}\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\mathcal{L}^{\mathrm{an}}_\rho)\Big]$$

4.7. Lien avec les variétés d'Igusa

Dans [**34**] M. Harris et R. Taylor utilisent des généralisations des variétés d'Igusa associées aux courbes modulaires. Dans [**58**] Elena Mantovan a généralisé cette approche aux variétés de Shimura de type P.E.L. étudiées ci-dessus dans le cas où p est décomposé dans le corps quadratique imaginaire $\mathcal{K}$ et $F = \mathcal{K}$ c'est-à-dire $F^+ = \mathbb{Q}$.

Le point de départ est la remarque 3.2.4 qui montre que pour les strates non-basiques l'uniformisation de Rapoport-Zink est insuffisante pour calculer la cohomologie d'une strate en fonction de la cohomologie de l'espace de Rapoport-Zink et d'autres objets. Comme le montre le théorème 4.5.12 on n'arrive qu'à calculer la cohomologie du tube $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}(\phi)$ (qui est d'ailleurs de dimension infinie). On aimerais sommer des égalités obtenues dans le groupe de Grothendieck à partir du théorème 4.5.12 pour toutes les classe d'isogénies ϕ dans une même strate. Cependant cela n'a pas de sens puisqu'il y a une infinité de classes d'isogénies dans les strates non-basiques.

L'idée de [**58**] est d'utiliser un espace de paramètres pour l'uniformisation qui coupe chaque classe d'isogénie transversalement dans une même strate. Un tel espace de paramètres est fourni par les travaux de Oort. Si $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ Mantovan considère la feuille centrale C_b qui au niveau des points est l'ensemble des $x \in \overline{S}(b)(\overline{k})$ tels que si $\mathcal{A}_x[p^\infty] = X \oplus X^\vee$ désigne le groupe p-divisible associé (*cf.* 2.3.7) alors le groupe p-divisible X est minimal au sens de Manin. Alors, C_b est fermé dans $\overline{S}(b)$. Dans le cas de [**34**] cette feuille centrale est égale à toute la strate $\overline{S}(b)$. Elle définit alors une tour de variétés au-dessus de C_b indexée par des sous-groupes compacts ouverts de J_b et munie d'une action de $J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$ qui paramétrise certaines trivialisations des troncatures du groupe p-divisible universel au-dessus de C_b. Avec nos notations on a alors

Lemme 4.7.1. — *Il y a une bijection compatible à l'action de $J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$ entre les points sur $\overline{k}$ de la variété d'Igusa en niveau K_p et*

$$\coprod_{\substack{\phi \\ \text{associé à } b}} I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(J_b/K_p \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)$$

Démonstration. — Regardons les points de la variété d'Igusa au-dessus d'un même ϕ. Les points de la variété de Shimura associée sont en bijection avec $I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}(\overline{k}) \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)$. D'après le lemme 2.4.15 et le lemme 2.4.3 l'image réciproque par l'application $\breve{\mathcal{M}}(\overline{k}) \to I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}(\overline{k}) \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)$ des éléments de $C_b(\overline{k})$ forme une J_b-orbite. On a donc une bijection

$$C_b(\overline{k}) \simeq I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(J_b/K_0 \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)$$

où K_0, les unités dans un ordre maximal d'une algèbre à division sur $\mathbb{Q}_p$, est le groupe des automorphisme d'un cristal du type de ceux du lemme 2.4.15.

Le résultat s'en déduit en ajoutant les trivialisation des groupes p-divisibles tronqués (ce qui revient à trivialiser les M/p^nM où M est le cristal associé). □

Corollaire 4.7.2. — *Si b est la classe basique la variété d'Igusa associée est un ensemble fini, isomorphe à une union finie de variétés de Shimura associées à I^ϕ.*

Mantovan relie la cohomologie de la strate à certains groupes de torsion de J_b-modules lisses à coefficients dans la cohomologie de l'espace de Rapoport-Zink et dans celle de la variété d'Igusa via une suite spectrale.

D'après le corollaire précédent, dans le cas basique la cohomologie de la variété d'Igusa s'exprime en termes de formes automorphes sur I^ϕ. Modulo l'interprétation des groupes de torsion comme des groupes d'extension cela permet de faire le lien avec la formule de Matsushima p-adique de la section 4.6.

Plus généralement, la cohomologie de la variété d'Igusa devrait vérifier une propriété du type : pour $\varphi_p \otimes \varphi^p \in \mathcal{C}_c^\infty(J_b \times G(\mathbf{A}_f^p))$ telle que φ_p est « suffisamment tordue »

$$\mathrm{tr}(\varphi_p \otimes \varphi^p; \mathrm{Igusa}) = \sum_{\substack{\phi \\ \text{associé à } b}} \sum_{\{\gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})\}} \mathrm{vol}(I^\phi(\mathbb{Q})_\gamma \backslash J_{b,\gamma} \times G(\mathbf{A}_f^p)_\gamma) \;\; \mathcal{O}_\gamma(\varphi_p)\mathcal{O}_\gamma(\varphi^p)$$

où le terme « suffisamment tordu » est là pour pouvoir appliquer la formule de Fujiwara (théorème 5.2.1) et impliquerait que la somme ci-dessus ainsi que les volumes associés sont finis. Il resterait ensuite à utiliser les techniques endoscopiques afin de relier cette formule des traces à celle pour G (transfert de J_b vers sa forme intérieure quasi-déployée, le sous-groupe de Levi $M(b)$ appelé centralisateur du morphisme des pentes, puis vers $G_{\mathbb{Q}_p}$).

CHAPITRE 5
FORMULE DE LEFSCHETZ SUR LA FIBRE SPÉCIALE

Le but de ce chapitre est d'établir la formule des traces 5.12.5 pour la trace de certaines fonctions dans l'algèbre de Hecke globale fois un élément du groupe de Weil local W_{E_ν} sur la cohomologie des strates des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées en p.

L'un des points clef qui nous permettra d'utiliser cette formule est que les termes intervenant dedans s'expriment comme un produit de la trace d'une fonction de l'algèbre de Hecke en p sur un espace de cohomologie fois une intégrale orbitale hors p. Cette factorisation des termes locaux dans la formule des traces de Lefschetz est une conséquence des trois résultats suivants :

- Le théorème de Fujiwara 5.2.1 qui sous certaines conditions permet d'écrire ces termes locaux comme la trace de certaines fonctions sur la fibre des cycles évanescents.
- Le théorème de comparaison de Berkovich qui montre que cette fibre ne dépend que du complété formel de la variété de Shimura en un point fixe.
- Le théorème de Serre-Tate (ou plus généralement l'uniformisation de Rapoport-Zink) qui montre que ce complété formel ne dépend que de la classe d'isomorphisme du groupe p-divisible en un point fixe et qui permet donc de mettre en facteur la trace de notre fonction dans l'algèbre de Hecke en p sur un espace de déformation de groupes p-divisibles.

Pour appliquer ces trois résultats nous avons besoin de spécialiser les correspondances de Hecke sur la fibre spéciale de modèles entiers de nos variétés de Shimura. Malheureusement, à part en niveau parahorique en p, on ne dispose pas de bon modèles entiers de ces variétés. L'idée consiste alors à considérer le spécialisé au sens de [**25**] de l'image directe sur la fibre générique vers un niveau parahorique d'une correspondance de Hecke. Cependant, nous avons ensuite besoin de montrer que les termes locaux obtenus ne dépendent finalement que de la situation originelle sur la fibre générique. Afin de faire la lien avec la seconde partie nous avons également besoin d'exprimer nos résultats sous forme analytique rigide. C'est pourquoi nous développons un formalisme de spécialisation des correspondances cohomologiques d'un point de vue analytique rigide et montrons que l'isomorphisme de Berkovich ([**5**]) est compatible à ce formalisme.

5.1. Rappels sur les correspondances cohomologiques

Ce qui suit est principalement tiré des articles [**28**], [**64**] et [**25**].

5.1.1. Définition. — Soit S le spectre d'un corps. Considérons un diagramme de schémas sur S

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, "c_2"] & \\ X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

où p_1 et p_2 désignent les deux projections de $X_1 \times X_2$ sur X_1 et X_2.

Nous supposerons toujours dans la suite que c est propre.

Définition 5.1.1. — Si $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}_c^b(X_1, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \times \boldsymbol{D}_c^b(X_2, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ on note

$$\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \underline{\mathrm{Hom}}(c_1^*\mathcal{F}_1, c_2^!\mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}_c^b(C, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

le faisceau des correspondances cohomologiques à support dans C.

Nous noterons

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = H^0(C, \underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)) = \mathrm{Hom}(c_1^*\mathcal{F}_1, c_2^!\mathcal{F}_2)$$

Lorsque $C = X_1 \times X_2$ on notera $\underline{\mathrm{Coh}}$, resp. Coh pour $\underline{\mathrm{Coh}}_C$, resp. Coh_C

Rappelons que la formule d'induction implique qu'il y a un isomorphisme canonique :

$$c^!\underline{\mathrm{Coh}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

L'adjonction $c_*c^! \to \mathrm{Id}$ donne une flèche d'oubli du support

$$c_*\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Coh}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

et par application de $H^0(X_1 \times X_2, -)$:

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

5.1.2. Seconde définition. — La formule de Künneth pour $\underline{\mathrm{Hom}}$ ([**18**]) implique qu'il existe un isomorphisme canonique en $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$:

$$D\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Coh}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

où $D\mathcal{F} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, K_X)$, K_X désignant le faisceau dualisant sur X.

5.1.3. Exemples

- Si $\Delta_X \hookrightarrow X \times_S X$ désigne la diagonale de $X \times X$, on a

$$\mathrm{Coh}_{\Delta_X}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

En particulier, pour tout $\mathcal{F}$ on notera Δ la correspondance cohomologique sur $\mathcal{F}$ associée à $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.

• Plus généralement, si $f : X_2 \to X_1$ et $C = \Gamma_f \subset X_1 \times X_2$ désigne le graphe de f alors

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \simeq \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$$

• A un cycle $C \subset X \times X$ est associé une correspondance cohomologique de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $c_2^!\mathbb{Q}_\ell(-d)[2d]$ pour un $d \in \mathbb{Z}$ (*cf.* [**28**])

• Soit $X_0/\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F} \in \mathbb{D}^+(X_0, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Notons $X = X_0 \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$. Soit $\mathrm{Fr} : X_0 \to X_0$ l'endomorphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$. Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Fr}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

d'où une correspondance sur $\mathcal{F}$ à support dans le graphe de Fr. Par extension des scalaires cette correspondance donne une correspondance appelée correspondance de Frobenius sur $\overline{\mathcal{F}} = \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F}$ où $\mathrm{pr}_1 : X_0 \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q \to X_0$. Elle est donnée par

$$(\mathrm{Fr} \times \mathrm{Id})^*\overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$$

5.1.4. Image directe. — Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] \arrow[dd, "f'"] & \\
X_1 \arrow[dd, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
& D \arrow[dl, "d_1"] \arrow[dr, "d_2"'] & \\
Y_1 & & Y_2
\end{tikzcd}$$

On peut alors définir ([**28**]) un morphisme

$$f'_*\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Coh}}_D(f_{1!}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2)$$

qui induit un morphisme image directe

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_D(f_{1!}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2)$$

noté $u \mapsto f_*u$.

Remarque 5.1.2. — Supposons $Y_1 = X_1, Y_2 = X_2$ et $D = X_1 \times X_2$. On retrouve alors le morphisme d'oubli du support.

Lorsque $Y_1 = Y_2 = D = S$ on obtient l'action d'une correspondance cohomologique sur la cohomologie. Plus précisément, il s'agit d'un morphisme

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D_c^b(\overline{\mathbb{Q}_\ell})}(R\Gamma_c(X_1, \mathcal{F}_1), R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2))$$

et l'on notera $u \mapsto u_*$ le morphisme associé dans ce cas-là.

5.1.5. Un cas particulier. — Supposons c_1 propre. Dans ce cas-là, le morphisme du cas précédent associé à l'action d'une correspondance cohomologique se factorise par $R\Gamma_c(X_2, \mathcal{F}_2) \to R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2)$ et possède une description simple.

Soit en effet $u : c_1^* \mathcal{F}_1 \to c_2^! \mathcal{F}_2$. Par adjonction, la donnée d'un tel u équivaut à celle de $\widetilde{u} : c_{2!} c_1^* \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$. Le morphisme u_* est alors défini par le composé

$$R\Gamma_c(X_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{c_1^*} R\Gamma_c(C, c_1^* \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X_2, c_{2!} c_1^* \mathcal{F}_1) \xrightarrow{R\Gamma_c(X_2, \widetilde{u})} R\Gamma_c(X_2, \mathcal{F}_2)$$

où la première application est définie car c_1 est propre.

Le fait que c_1 propre implique que la correspondance cohomologique agit sur la cohomologie à support compact se comprend mieux du point de vue de la section 5.1.7.

5.1.6. Restriction. — Soient $V_1 \subset X_1$ et $V_2 \subset X_2$ deux sous-schémas localement fermés. Supposons que $c_2^{-1}(V_2) \subset c_1^{-1}(V_1)$, d'où une « sous-correspondance » de c

$$c_2^{-1}(V_2) \xrightarrow{(c_1', c_2')} V_1 \times V_2$$

Soit donc $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ et $\widetilde{u} : c_{2!} c_1^* \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ le morphisme associé par adjonction.

Considérons la ligne suivante

$$c'_{2!} {c'_1}^* (\mathcal{F}_{1|V_1}) = c'_{2!} \left((c_1^* \mathcal{F}_1)_{|c_2^{-1}(V_2)} \right) \xrightarrow{\sim} (c_{2!} c_1^* \mathcal{F}_1)_{|V_2} \xrightarrow{\widetilde{u}_{|V_2}} \mathcal{F}_{2|V_2}$$

où l'isomorphisme du milieu est un isomorphisme de changement de base. Elle définit par adjonction une correspondance restreinte. On en déduit un morphisme de restriction

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{c_2^{-1}(V_2)}(\mathcal{F}_{1|V_1}, \mathcal{F}_{2|V_2})$$

Lorsque $X_1 = X_2$, $V_1 = V_2$ nous dirons que V_1 est stable par c.

5.1.7. Extension par zéro. — Supposons c_1 propre. Supposons nous donné des compactifications $j_1 : X_1 \hookrightarrow \overline{X_1}$, $j_2 : X_2 \hookrightarrow \overline{X_2}$ ainsi qu'une compactification $j : C \hookrightarrow \overline{C}$ de C compatible aux deux précédentes, au sens où il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "c"] & \overline{C} \arrow[d, "(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = \overline{c}"] \\ X_1 \times X_2 \arrow[r, hook, "j_1 \times j_2"] & \overline{X_1} \times \overline{X_2} \end{tikzcd}$$

Il existe alors un isomorphisme canonique ([**25**] lemme 1.3.1)

$$j_* \underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Coh}}_{\overline{C}}(j_{1!} \mathcal{F}_1, j_{2!} \mathcal{F}_2)$$

qui induit un isomorphisme

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}_{\overline{C}}(j_{1!} \mathcal{F}_1, j_{2!} \mathcal{F}_2)$$

noté $u \mapsto j_! u$ et qui se décrit ainsi : $\forall u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, $u : c_1^* \mathcal{F}_1 \to c_2^! \mathcal{F}_2$. Le morphisme c_1 étant propre il existe un morphisme

$$\overline{c_1}^* j_{1!} \mathcal{F}_1 \longrightarrow j_! c_1^* \mathcal{F}_1$$

défini par adjonction.

Alors,

$$j_! u : \overline{c_1}^* j_{1!} \mathcal{F}_1 \longrightarrow j_! c_1^* \mathcal{F}_1 \xrightarrow{j_!(u)} j_! c_2^! \mathcal{F}_2 \longrightarrow \overline{c_2}^! j_{2!} \mathcal{F}_2$$

où le dernier morphisme est défini par adjonction.

L'extension par zéro est compatible aux images directes au sens où « $j_! f_* u = \overline{f}_* j_! u$ ».

En particulier, l'action de u sur la cohomologie à support compact s'interprète comme l'action de $j_! u$: le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} R\Gamma_c(X_1, \mathcal{F}_1) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "\wr"] & R\Gamma_c(X_2, \mathcal{F}_2) \arrow[d, "\wr"] \\ R\Gamma(\overline{X_1}, j_{1!}\mathcal{F}_1) \arrow[r, "(j_! u)_*"] & R\Gamma(\overline{X_2}, j_{2!}\mathcal{F}_2) \end{tikzcd}$$

5.1.8. Accouplement des correspondances cohomologiques. — Nous supposerons désormais que $X_1 = X_2 = X$. Considérons un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} & E = C \times_X D \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "e"] & \\ C \arrow[dr, "c"'] & & D \arrow[dl, "d"] \\ & X \times_S X & \end{tikzcd}$$

i.e. E est le support intersection de C et D.

Il y a alors un morphisme ([**28**] paragraphe 4) d'accouplement des correspondances cohomologiques

$$\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \boxtimes \underline{\mathrm{Coh}}_D(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \longrightarrow K_E$$

qui induit une forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \mathrm{Coh}_D(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) &\longrightarrow H^0(E, K_E) \\ u \otimes v &\longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

5.1.9. Termes locaux de Lefschetz. — Il y a un isomorphisme

$$H^0(E, K_E) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\beta \in \pi_0(E)} H^0(\beta, K_\beta)$$

et si $\beta \in \pi_0(E)$, $\dim \beta = 0$, alors $K_\beta = \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et donc $H^0(\beta, K_\beta) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$. On note alors $\langle u, v\rangle_\beta \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ l'image de $\langle u, v\rangle$ par les deux applications ci-dessus.

Ces termes locaux sont invariants par localisation étale. Cependant, en général, ils ne dépendent pas que de la fibre des faisceaux en des points fixes.

5.1.10. Formule de Lefschetz Grothendieck Verdier. — Elle dit simplement que l'accouplement des correspondances cohomologiques est compatible aux images directes propres.

Plus précisément, étant donné un diagramme commutatif dont les faces supérieures et inférieures sont cartésiennes

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl] \arrow[dd] & & E \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dd, "b"] \\
X \times X \arrow[dd, "f = f_1 \times f_2"'] & & D \arrow[ll] \arrow[dd] & \\
& C' \arrow[dl] & & E' \arrow[ll] \arrow[dl] \\
Y \times Y & & D' \arrow[ll] &
\end{tikzcd}$$

où f_1 et f_2 sont propres. Alors, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \mathrm{Coh}_D(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_{1*} \otimes f_{2*}"] & H^0(E, K_E) \arrow[d, "b_*"'] \\
\mathrm{Coh}_{C'}(f_{1*}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2) \otimes \mathrm{Coh}_{D'}(f_{2*}\mathcal{F}_2, f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^0(E', K_{E'})
\end{tikzcd}$$

soit

$$\langle f_* u, f_* v\rangle = b_* \langle u, v\rangle$$

En particulier, si X est propre sur S, si $(u, v) \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \times \mathrm{Coh}_D(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$ et si $\dim E = 0$ alors,

$$u_* \in \mathrm{Hom}(R\Gamma(X_1, \mathcal{F}_1), R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2)) \text{ et } v_* \in \mathrm{Hom}(R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2), R\Gamma(X_1, \mathcal{F}_1))$$

et

$$\mathrm{tr}(v_* \circ u_*) = \sum_{\beta \in \pi_0(E)} \langle u, v\rangle_\beta$$

Supposons de plus que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ et que $v = \Delta$ la correspondance diagonale.

Définition 5.1.3. — Nous noterons

$$\mathrm{Fix}(c) = C \times_{X\times X} \Delta_X$$

et si $\beta \in \pi_0(\mathrm{Fix}(c))$, $\dim\beta = 0$ (β est un point fixe isolé)

$$\mathrm{Loc}_\beta(u) = \langle u, \Delta\rangle_\beta \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

Ainsi, lorsque tous les points fixes sont isolés

$$\mathrm{tr}(u, R\Gamma(X,\mathcal{F})) = \sum_{\beta\in\pi_0(\mathrm{Fix}(c))} \mathrm{Loc}_\beta(u)$$

5.1.11. Termes locaux naïfs. — Soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F},\mathcal{F})$ et soit $\beta \in \pi_0(\mathrm{Fix}(c))$, $\dim\beta = 0$. Soit $x = c_1(\beta) = c_2(\beta) \in X$ et supposons c_2 quasi-fini au voisinage de x.

Le morphisme $u : c_1^*\mathcal{F} \to c_2^!\mathcal{F}$ induit par adjonction $\widetilde{u} : c_{2!}c_1^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, et c_2 étant quasi-fini au voisinage de x

$$(c_{2!}c_1^*\mathcal{F})_x \simeq \bigoplus_{y\in c_2^{-1}(x)} (c_1^*\mathcal{F})_y$$

D'où un morphisme $\mathcal{F}_x = (c_1^*\mathcal{F})_\beta \hookrightarrow (c_{2!}c_1^*\mathcal{F})_x$ qui composé avec $\widetilde{u}_x$ donne un endomorphisme

$$u_\beta \in \mathrm{End}(\mathcal{F}_x)$$

Définition 5.1.4. — On pose

$$\mathrm{Loc.naïf}_\beta(u) = \mathrm{tr}(u_\beta) \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

5.1.12. Interprétation des termes locaux naïfs comme de vrais termes locaux. — Bien que $\mathrm{Loc}_\beta(u)$ soit invariant par localisation étale, il ne dépend pas que de la limite $\mathcal{F}_{c_1(\beta)}$ *i.e.* en général $\mathrm{Loc}_\beta \neq \mathrm{Loc.naïf}_\beta$.

Dans [**64**] il est démontré que si β vérifie les hypothèses précédentes et que c_1 est propre alors le calcul de $\mathrm{Loc}_\beta(u)$ se ramène à la situation suivante : $j : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ est stable par c. Et qu'alors,

$$\mathrm{Loc}_\beta(u) = \mathrm{Loc}_\beta(j_!j^*u) + \mathrm{Loc.naïf}_\beta(u)$$

Le premier terme dans le membre de droite s'interprétant donc comme un terme d'erreur par rapport au terme local naïf. Le calcul de $\mathrm{Loc}_\beta(u)$ se ramène donc au cas où la fibre du faisceau est nulle.

5.1.13. Exemples

- Si X est lisse, $\mathcal{F}$ localement constant et l'intersection en β de C et Δ est transverse

$$\mathrm{Loc}_\beta(u) = \mathrm{Loc.naïf}_\beta(u)$$

• Si X est lisse, si u est la correspondance sur le faisceau constant associée à un cycle, si β est isolé, l'application classe de cycle transformant le produit d'intersection des cycles en cup-produit,

$$\mathrm{Loc}_\beta(u) = (C.\Delta)_\beta$$

5.1.14. Un lemme sur les termes locaux naïfs. — Ce lemme nous servira plus tard dans la démonstration du théorème 5.12.5.

Lemme 5.1.5. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{(c_1,c_2)} & X \times X \\ {\scriptstyle f'}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f\times f} \\ D & \xrightarrow{(d_1,d_2)} & Y \times Y \end{array}$$

un morphisme de correspondances où les $c_i, d_i (i=1,2)$ sont finis et où f' et f sont étales finis. Supposons que $\dim \mathrm{Fix}(D) = 0$, *et que*

$$\forall \mathcal{G}\, \forall v \in \mathrm{Coh}_D(\mathcal{G}) \;\; \forall \beta \in \mathrm{Fix}(D) \quad \mathrm{Loc}_\beta(v) = \mathrm{Loc.na\ddot{\i}f}_\beta(v)$$

Alors, $\dim \mathrm{Fix}(C) = 0$, *et*

$$\forall \mathcal{F}\, \forall u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F})\; \forall \beta' \in \mathrm{Fix}(C) \quad \mathrm{Loc}_\beta(u) = \mathrm{Loc.na\ddot{\i}f}_\beta(u)$$

Démonstration. — L'assertion $\dim \mathrm{Fix}(C) = 0$ résulte du fait que f' envoie les points fixes de C sur ceux de D et de la finitude des fibres de f'.

Quant à la seconde assertion elle résulte facilement de l'invariance par localisation étale des termes locaux de Lefschetz appliquée à $f_*\mathcal{F}$ muni de la correspondance cohomologique f_*u et de la définition des termes locaux naïfs. □

5.2. Le théorème de Fujiwara

Le théorème qui suit, démontré par Fujiwara dans [**25**], avait été conjecturé par Deligne. Des résultats partiels avaient été obtenus par Zink ([**76**]) et Pink ([**64**]).

Théorème 5.2.1. — *Soit*

$$C_0 \xrightarrow{(c_1,c_2)} X_0$$

une correspondance définie sur $\mathbb{F}_q$. Soit $k|\mathbb{F}_q$ et notons $X = X_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$, $C = C_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$ et Fr *la correspondance de Frobenius sur X_0 étendue à X.*

Supposons c_2 quasi-fini et notons

$$\forall \beta \in C \quad d(\beta) = [k(\beta) : k(c_2(\beta))]_{\mathrm{insep.}} \cdot \mathrm{long}\big(\mathcal{O}_{c_2^{-1}(c_2(\beta)),\beta}\big)$$

Alors, $\forall N \in \mathbb{N}\;\; \forall \beta \in \mathrm{Fix}(C\cdot \mathrm{Fr}^N)$, $q^N > d(\beta) \Rightarrow \beta$ *est un points fixe isolé et*

$$\forall \mathcal{F}\, \forall u \in \mathrm{Coh}_{C\cdot\mathrm{Fr}^N}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \quad \mathrm{Loc}_\beta(u) = \mathrm{Loc.na\ddot{\i}f}_\beta(u)$$

5.3. Spécialisation des correspondances cohomologiques algébriques

Soit $S = \boldsymbol{Spec}(\mathcal{O})$ un trait de point générique η et de point fermé s. Nous noterons Λ un anneau de coefficients de torsion première à p ou bien $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$.

Nous noterons $\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}$ (ou souvent, afin de na pas alourdir les notations, $\mathrm{R}\Psi$) le foncteur des cycles proches. De même, pour un morphisme f au-dessus de S nous noterons $f_{\overline{s}}$ sa fibre spéciale étendue à $\overline{s}$ et f_η sa fibre générique (mais souvent, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons f pour $f_{\overline{s}}$ et f_η).

5.3.1. Règles de calculs sur les cycles évanescents

5.3.1.1. Image directe. — Soit $f : X \to Y$ au-dessus de S. Il y a alors un morphisme naturel ([**17**] 2.1.7.)

$$\mathrm{R}\Psi f_* \longrightarrow f_*\mathrm{R}\Psi$$

qui est un isomorphisme lorsque f est propre. Ce morphisme est bien sûr compatible à la composition :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{R}\Psi((fg)_*) & = & \mathrm{R}\Psi(f_*g_*) & \longrightarrow & f_*\mathrm{R}\Psi(g_*) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ (fg)_*\mathrm{R}\Psi & & = & & f_*g_*\mathrm{R}\Psi \end{array}$$

est un diagramme commutatif.

5.3.1.2. Image inverse. — Pour $f : X \to Y$ il y également un morphisme naturel ([**17**] 2.1.7.)

$$f^*\mathrm{R}\Psi \longrightarrow \mathrm{R}\Psi f^*$$

qui est un isomorphisme lorsque f est lisse. Comme ci-dessus ce morphisme est compatible à la composition vis à vis de l'égalité $(fg)^* = g^*f^*$.

5.3.1.3. Compatibilité au changement de base

Lemme 5.3.1. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

un diagramme sur S. Pour $\mathcal{F} \in \boldsymbol{D}^+(Y', \Lambda)$ considérons le morphisme de changement de base

$$f^*g_*\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha(\mathcal{F})} g'_*f'^*\mathcal{F}$$

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
f^*g_*\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}) \arrow[r, "\alpha(\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}))"] & g'_*f'^*\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}) \arrow[d] \\
f^*\mathrm{R}\Psi(g_*\mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[d] & g'_*\mathrm{R}\Psi(f'^*\mathcal{F}) \\
\mathrm{R}\Psi(f^*g_*\mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{R}\Psi(\alpha(\mathcal{F}))"] & \mathrm{R}\Psi(g'_*f'^*\mathcal{F}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les applications verticales sont déduites des fonctorialités précédentes par image directe et image inverse.

Démonstration. — Elle ne pose aucun problème. □

5.3.2. Spécialisation. — Considérons un diagramme au-dessus de S :

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\
X_1 & & X_2
\end{tikzcd}$$

où comme d'habitude $c : C \to X_1 \times X_2$ est propre.

Fujiwara a défini dans [**25**] un morphisme de spécialisation des correspondances cohomologiques

$$\mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{C_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1), \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2))$$

La définition de ce morphisme utilise l'existence de l'isomorphisme $\mathrm{R}\Psi D \simeq D\mathrm{R}\Psi$ qui se transpose mal au cadre de la géométrie rigide. Afin d'avoir une description qui se transporte dans le cadre de la géométrie rigide nous allons décrire le morphisme de spécialisation dans un cadre plus restreint. Nous ferons pour cela l'hypothèse suivante :

Hypothèse : c_1 et c_2 sont propres.

Soit donc $u \in \mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, $u : c_{1\eta}^*\mathcal{F}_1 \to c_{2\eta}^!\mathcal{F}_2$. Le morphisme c_2 étant propre il lui est associé $\widetilde{u} : c_{2\eta *}c_{1\eta}^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$. D'où

$$\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\widetilde{u}) : \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(c_{2\eta *}c_{1\eta}^*\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2)$$

Appliquant les diverses fonctorialités de $\mathrm{R}\Psi$ et la propreté de c_2 on obtient alors la ligne suivante :

$$c_{2\overline{s}*}c_{1\overline{s}}^*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow c_{2\overline{s}*}\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(c_{1\overline{s}}^*\mathcal{F}_1) \xleftarrow{\ \sim\ } \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(c_{2\overline{s}*}c_{1\overline{s}}^*\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\widetilde{u})} \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2)$$

qui fournit par adjonction un $u_{\overline{s}} \in \mathrm{Coh}_{C_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1), \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2))$ dont on peut vérifier qu'il coïncide avec celui défini par Fujiwara (nous n'utiliserons pas ce fait par la suite).

La proposition qui suit est démontrée par Fujiwara (proposition 1.6.1 de [**25**]). Néanmoins nous aurons besoin de démontrer son analogue pour les correspondances rigides. Sa démonstration ne s'adaptant pas dans le cadre rigide, nous donnons une démonstration (sous nos hypothèses plus restrictives) qui n'utilise pas la dualité D et le fait que $\mathrm{R}\Psi$ commute à cette dualité.

Remarque 5.3.2. — Si $\mathfrak{X}$ désigne un schéma formel sur S de la forme $\widehat{X}_{/V}$ où X est un schéma séparé de type fini sur S, et V un sous schéma ouvert de sa fibre spéciale alors, il résulte de l'isomorphisme de comparaison de Berkovich, de la commutation des cycles évanescents algébriques à la dualité et de l'égalité $Dj^* = j^*D$ pour une immersion ouverte j que si $\mathcal{F}$ désigne un faisceau étale constructible de torsion première à p sur $X_{\text{ét}}$, il y a un isomorphisme

$$D\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}}) \simeq \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(D(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}}))$$

(on utilise également la commutation de D au foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$, *cf.* [**4**]). Néanmoins, cet isomorphisme dépend à priori du choix de la réalisation de $\mathfrak{X}$ comme le complété formel d'un X le long d'un V et n'est donc pas formulé de façon intrinsèque. De plus cette commutation entre $\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}$ et D est fausse en général lorsque $\mathfrak{X}$ n'est plus adique sur S. Elle est par exemple déjà fausse pour $\mathfrak{X} = \boldsymbol{Spf}(k^0[[T_1,\ldots,T_n]])$ et $\mathcal{F}$ égal au faisceau constant.

Remarque 5.3.3. — Comme l'a fait remarquer A. Genestier à l'auteur l'hypothèse c_1 et c_2 propres faite ci-dessus est inutile pour définir simplement la spécialisation $u_{\overline{s}}$. En effet, pour tout morphisme de schémas de type fini sur S, f, il y a toujours une application $f_!\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}} \to \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}f_!$ (elle est duale via D à l'application $\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}f_* \to f_*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}$ mais peut se définir sans faire appel à la dualité, uniquement grâce au théorème de changement de base propre). Un $u \in \mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ définit par adjonction un morphisme $\widetilde{u} : c_{2\eta!}c_{1\eta}^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$. Le spécialisé $u_{\overline{s}}$ se définit alors via la ligne suivante

$$c_{2\overline{s}!}c_{1\overline{s}}^*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow c_{2\overline{s}!}\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(c_{1\overline{s}}^*\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(c_{2\overline{s}!}c_{1\overline{s}}^*\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\widetilde{u})} \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2)$$

Cependant, pour montrer les propriétés comme la compatibilité aux images directes propres nous utiliserons l'hypothèse de propreté sur c_1 et c_2 et préférerons voir l'application du milieu dans le diagramme ci-dessus comme associée à l'inverse de l'application naturelle $\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}c_{2\overline{s}*} \to c_{2\overline{s}*}\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}$.

Proposition 5.3.4. — *Soit un diagramme sur S*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "c_2"] & \\ X_1 \arrow[d, "f_1"'] & D \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dr, "d_2"] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ Y_1 & & Y_2 \end{tikzcd}$$

où $f_1, f_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ sont propres. Alors, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \arrow[r] \arrow[dd, "f_{\eta *}"'] & \mathrm{Coh}_{C_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1),\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2)) \arrow[dr, "f_{\overline{s}*}"] & \\
 & & \mathrm{Coh}_{D_{\overline{s}}}(f_{1\overline{s}*}\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1), f_{2\overline{s}*}\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2)) \\
\mathrm{Coh}_{D_\eta}(f_{1\eta *}\mathcal{F}_1, f_{2\eta *}\mathcal{F}_2) \arrow[r] & \mathrm{Coh}_{D_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f_{1\eta *}\mathcal{F}_1),\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f_{2\eta *}\mathcal{F}_2)) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $u \in \mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$. Appliquons le lemme 5.3.1 au losange de gauche et au morphisme de changement de base $d_1^* f_{1*} \to f'_* c_1^*$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
d_1^* f_{1*}\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[rr] & & f'_* c_1^*\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[d] \\
d_1^*\mathrm{R}\Psi(f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d] & \boxed{\mathcal{D}} & f'_*\mathrm{R}\Psi(c_1^*\mathcal{F}_1) \\
\mathrm{R}\Psi(d_1^* f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[rr] & & \mathrm{R}\Psi(f'_* c_1^*\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
d_{2*}d_1^* f_{1*}\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[rr] & & d_{2*}f'_* c_1^*\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & f_{2*}c_{2*}c_1^*\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & f_{2*}\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_2) \\
d_{2*}d_1^*\mathrm{R}\Psi(f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d] & \boxed{d_{2*}\mathcal{D}} & d_{2*}f'_*\mathrm{R}\Psi(c_1^*\mathcal{F}_1) \arrow[r, equal] & f_{2*}c_{2*}\mathrm{R}\Psi(c_1^*\mathcal{F}_1) & \\
d_{2*}\mathrm{R}\Psi(d_1^* f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[rr] & & d_{2*}\mathrm{R}\Psi(f'_* c_1^*\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] & f_{2*}\mathrm{R}\Psi(c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[uur, "\alpha"] & \\
\mathrm{R}\Psi(d_{2*}d_1^* f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[rr] & & \mathrm{R}\Psi(d_{2*}f'_* c_1^*\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, equal] & \mathrm{R}\Psi(f_{2*}c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r] & \mathrm{R}\Psi(f_{2*}\mathcal{F}_2) \arrow[uuu, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Le carré en haut à gauche est obtenu en appliquant d_{2*} à $\mathcal{D}$. Il commute donc. L'application α est égale à $f_{2*}\mathrm{R}\Psi(\widetilde{u})$ (où $\widetilde{u} : c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$). L'application β est définie à partir de α de telle manière que le triangle supérieur commute.

L'autre triangle (ou plutôt trapèze) et tous les autres rectangles dans le diagramme commutent car ils sont tous associés à des cas de fonctorialité par image directe ou inverse des cycles évanescents (*cf.* 5.3.1).

On en déduit donc que le grand rectangle extérieur commute.

Le résultat s'en déduit car en parcourant la ligne du haut on obtient l'image directe de la correspondance spécialisée tandis qu'en joignant les deux sommets du haut en passant par les trois autres cotés on obtient la spécialisation de l'image directe. □

Corollaire 5.3.5. — *Si X_1 et X_2 sont propres sur S alors la suite spectrale des cycles évanescents est équivariante pour l'action de $u_{\overline{s}}$ sur le terme initial et de u sur l'aboutissement : le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} R\Gamma(X_{1\overline{s}}, \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(u_{\overline{s}})_*"'] & R\Gamma(X_{1\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}_1) \arrow[d, "\overline{u}_*"] \\ R\Gamma(X_{2\overline{s}}, \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2)) \arrow[r, "\sim"] & R\Gamma(X_{2\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}_2) \end{tikzcd}$$

5.4. Cycles évanescents analytiques rigides

5.4.1. Rappels. — Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement formellement de type fini sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O})$ de fibre générique $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$ et de fibre spéciale $\mathfrak{X}_s$.

Il y a un isomorphisme de sites :

$$(\mathfrak{X}_s)_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{\text{ét}}$$

Si de plus $U/\mathfrak{X}$ est étale, $U^{\mathrm{an}}/\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$ est quasi-étale. On a donc un diagramme de sites

$$(\mathfrak{X}_s)_{\text{ét}} = \mathfrak{X}_{\text{ét}} \xleftarrow{\nu} \mathfrak{X}^{\mathrm{an}}_{q-\text{ét}} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{X}^{\mathrm{an}}_{\text{ét}}$$

Rappelons (même si nous ne l'utiliserons pas dans la suite) que $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}_{q-\text{ét}} \simeq \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\text{ét}}$ et que $\mu^* : \widetilde{\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}_{\text{ét}}} \to \widetilde{\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}_{q-\text{ét}}}$ est pleinement fidèle d'image essentielle les faisceaux surconvergents sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\text{ét}}$.

Berkovich pose alors ([**3, 5**])

$$\Theta = \nu_*\mu^* : \widetilde{(\mathfrak{X}^{\mathrm{an}})_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{(\mathfrak{X}_s)_{\text{ét}}}$$

Si $\widehat{\overline{\eta}}$ désigne le complété de $\overline{\eta}$ il y a également un foncteur

$$\Theta_{\overline{\eta}} : \widetilde{(\mathfrak{X}^{\mathrm{an}})_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{(\mathfrak{X}^{\mathrm{an}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{\eta}})_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{(\mathfrak{X}_{\overline{s}})_{\text{ét}}}$$

obtenu grâce à l'extension des scalaires de η à $\widehat{\overline{\eta}}$.

Soit Λ un anneau local artinien de torsion première à p. Nous considérerons

$$\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}} : \boldsymbol{D}^+(\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}, \Lambda) \longrightarrow \boldsymbol{D}^+(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \Lambda)$$

$\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})$ est muni d'une action de $\boldsymbol{Gal}(\overline{\eta}|\eta)$ compatible à celle sur $\mathfrak{X}_{\overline{s}}$.

Rappelons le théorème de Berkovich

Théorème 5.4.1 ([5]). — *Soit X/S un schéma de type fini et $Y \subset X_s$ un sous-schéma localement fermé de sa fibre spéciale. Pour tout faisceau étale abélien constructible $\mathcal{F}$ de torsion première à p, pour tout entier q il existe un isomorphisme canonique :*

$$R^q\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})_{|Y} \xrightarrow{\sim} R^q\Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/Y})$$

où $\widehat{\mathcal{F}}_{/Y}$ désigne la restriction de $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ sur X_η^{an} au domaine analytique $(\widehat{X}_{/Y})^{\mathrm{an}} \hookrightarrow X_\eta^{\mathrm{an}}$.

Rappelons comment est construit ce morphisme. Commençons par construire un morphisme

$$\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})_{|Y} \longrightarrow \Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/Y})$$

Le faisceau $\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})_{|Y}$ est le faisceau associé au préfaisceau qui à un $U/Y_{\overline{s}}$ étale associe $\varinjlim_{\mathcal{D}} \overline{\mathcal{F}}(V_\eta)$ où la limite inductive est prise selon les diagrammes $\mathcal{D}$ suivants

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[d] & & V \arrow[d, "\text{étale}"] \\ Y_{\overline{s}} \arrow[r, hook] & X_{\overline{s}} \arrow[r] & \overline{X} \end{tikzcd}$$

$\Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/Y})$ est le faisceau qui à $U/Y_{\overline{s}}$ étale associe $\Gamma(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}, \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}})$ où $\widetilde{U}/\widehat{X}_{/Y}$ est l'unique relèvement étale de U et $\widetilde{U}^{\mathrm{an}}/X_{\widehat{\overline{\eta}}}^{\mathrm{an}}$ est quasi-étale (rappelons que si $A \xrightarrow{p} X^{\mathrm{an}}$ est quasi-étale et $\mathcal{G}$ est un faisceau sur $X_{\text{ét}}^{\mathrm{an}}$, $\Gamma(A_{\text{ét}}, p^*\mathcal{G}) = \Gamma(A_{q-\text{ét}}, \mu^*\mathcal{G})$).

Soit donc maintenant $\mathcal{D}$ un diagramme comme précédemment et $s \in \Gamma(V_\eta, \overline{\mathcal{F}})$. Le diagramme $\mathcal{D}$ et la propriété de relèvement unique des morphismes étales via à vis des immersions nilpotentes implique qu'il existe un unique morphisme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \widehat{V}_{/Y} \arrow[dl] \\ \widehat{X}_{/Y} & \end{tikzcd}$$

d'où un morphisme

$$\Gamma(V_\eta, \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\text{restriction}} \Gamma(\widehat{V}_{/Y}^{\mathrm{an}}, \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{a^*} \Gamma(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}, \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}})$$

L'image de s par ce composé est l'image par le morphisme que l'on voulait décrire au niveau des préfaisceaux. Il induit le morphisme cherché au niveau des faisceaux.

Si $\alpha : Y_{\overline{s}} \hookrightarrow X_{\overline{s}}$ et $\beta : (\widehat{X}_{/Y})^{\mathrm{an}} \subset (X_\eta)^{\mathrm{an}}$ il y a donc un morphisme

$$\alpha^*\Psi_{\overline{\eta}} \longrightarrow \Theta_{\overline{\eta}}\beta^*$$

d'où un morphisme

$$\alpha^*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}} \longrightarrow \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\beta^*$$

Et le théorème de Berkovich implique qu'il s'agit d'un isomorphisme dans la catégorie dérivée $\boldsymbol{D}_c^+(X_{\overline{s}}, \Lambda)$.

5.4.2. Comparaison avec les cycles évanescents adiques. — A un schéma formel $\mathfrak{X}/S$ séparé localement formellement de type fini est associé un espace adique $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$ noté $\widetilde{d}(\mathfrak{X})$ par Huber (*cf.* l'appendice D). Celui ci est muni d'un morphisme de spécialisation $\widetilde{\lambda} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_s$. Ce morphisme induit un morphisme de topos

$$(X^{\text{rig}})_{\text{ét}} \longrightarrow \mathfrak{X}_{\text{ét}}$$

Avec les notations précédentes, les faisceaux étales abéliens sur X^{rig} s'identifient aux faisceaux sur le site quasi-étale de $\mathfrak{X}^{\text{an}}$ et ce morphisme de sites n'est rien d'autre que le morphisme ν défini précédemment. Huber définit alors les cycles évanescents adiques (*cf.* par exemple [**37**] 3.12) pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})_{\text{ét}}$ comme étant $\mathbb{R}\widetilde{\lambda}_*\mathcal{F}$. Du point de vue analytique, les cycles évanescents adiques ne sont donc rien d'autre que les $\mathbb{R}\nu_*\mathcal{F}$.

Les cycles évanescents adiques et analytiques coïncident au sens où l'on a avec les identifications précédentes entre le site quasi-étale analytique et le site étale adique l'égalité

$$\forall \mathcal{F} \in \boldsymbol{D}^+(\mathfrak{X}^{\text{an}}, \Lambda) \quad \mathrm{R}\Theta(\mathcal{F}) = \mathbb{R}\widetilde{\lambda}_*(\mu^*\mathcal{F})$$

Il suffit pour cela de montrer que $\mathbb{R}(\nu_*\mu^*) = \mathbb{R}\nu_* \circ \mu^*$. Or, il résulte par exemple du théorème 3.3 de [**3**] que μ^* envoi les faisceaux mous sur des faisceaux ν_*-acycliques, d'où le résultat.

Nous n'utiliserons que le point de vue des cycles évanescents de Berkovich, mais faisons remarquer au lecteur que Huber possède des théorèmes de comparaison et de finitude plus généraux que ceux déduits du théorème de comparaison de Berkovich (proposition 3.11 et proposition 3.15 de [**37**]).

5.4.3. Fonctorialité de $\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}$ et de l'isomorphisme de comparaison

5.4.3.1. Image directe. — Soit $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels formellement de type fini sur S. Il y a alors un isomorphisme naturel ([**5**], corollaire 2.3 (ii))

$$\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}} f_*^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} f_{\overline{s}*}\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}$$

D'où en particulier une suite spectrale des cycles évanescents pour tout $\mathfrak{X}$:

$$R\Gamma(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})) \simeq R\Gamma(\mathfrak{X}^{\text{an}} \widehat{\otimes}\, \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}})$$

Lemme 5.4.2. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas de type fini sur S. Soient $W_0 \subset Y_s$ et $W_1 \subset X_s$ deux sous-schémas fermés tels que $W_{1\text{red}} \subset f^{-1}(W_0)_{\text{red}}$. Le morphisme f induit donc un morphisme $\widehat{f} : \widehat{X}_{/W_1} \to \widehat{Y}_{/W_0}$. Soit $\mathcal{F} \in \boldsymbol{D}^+(X_\eta, \Lambda)$.*

Il y a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f_{\eta*}\mathcal{F})_{|W_0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\left((\widehat{f}^{\mathrm{an}})_*\widehat{\mathcal{F}}_{/W_1}\right) \arrow[d, "\simeq"] \\
(f_{\overline{s}*}\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}))_{|W_0} \arrow[r] & \widehat{f}_{\overline{s}*}\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\left(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_1}\right)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Le diagramme s'insère dans le grand diagramme suivant dont on doit montrer qu'il est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f_{\eta*}\mathcal{F})_{|W_0} \arrow[r, "A\,\simeq"] \arrow[ddd] & \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{(f_{\eta*}\mathcal{F})}_{/W_0}) \arrow[r, "\mathrm{R}\Theta(\alpha)\,\simeq"] & \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\left((f_{\eta*}^{\mathrm{an}}\mathcal{F}^{\mathrm{an}})_{|(\widehat{Y}_{/W_0})^{\mathrm{an}}}\right) \arrow[d, "\mathrm{R}\Theta(\beta)"] \\
& & \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\left(\widehat{f}_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}})\right) \arrow[d, "\simeq"] \\
& & \\
(f_{\overline{s}*}\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}))_{|W_0} \arrow[r, "\gamma"] & (f_{\overline{s}|W_1})_*\left(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})_{|W_1}\right) \arrow[r, "B\,\simeq"] & \widehat{f}_{\overline{s}*}\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\left(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|(\widehat{X}_{/W_1})^{\mathrm{an}}}\right)
\end{tikzcd}$$

où α est induit par l'isomorphisme de changement de base associé au diagramme de sites (corollaire 7.5.3 de [**1**])

$$\begin{tikzcd}
X^{\mathrm{an}}_{\eta,\text{ét}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\eta,\text{ét}} \arrow[d] \\
Y^{\mathrm{an}}_{\eta,\text{ét}} \arrow[r] & Y_{\eta,\text{ét}}
\end{tikzcd}$$

β et γ sont des applications de changement de base associées à des restrictions, A et B sont induites par l'isomorphisme de Berkovich, et les deux applications verticales restantes sont induites par la fonctorialité de $\mathrm{R}\Psi$, resp. $\mathrm{R}\Theta$, vis à vis de l'image directe.

Soient $a : W_0 \hookrightarrow Y$ et $b : (\widehat{X}_{/W_1})^{\mathrm{an}} \hookrightarrow X_\eta^{\mathrm{an}}$. On doit vérifier que deux applications naturelles

$$a^*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}Rf_{\eta*} \rightrightarrows Rf_{\overline{s}*}\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}b^*$$

coïncident. Or, b étant une quasi-immersion, b^* envoie les faisceaux mous sur des faisceaux mous qui sont eux mêmes $\Theta_{\overline{\eta}}$ acycliques. De plus, $\Theta_{\overline{\eta}}$ envoie les faisceaux mous sur des faisceaux flasques (proposition 2.2 de [**5**]). Donc,

$$R(f_{\overline{s}*}\Theta_{\overline{\eta}}b^*) = Rf_{\overline{s}*}\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}b^*$$

Il est également clair que $R(a^*\Psi_{\overline{\eta}}f_{\eta*}) = a^*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}Rf_{\eta*}$. On vérifie alors aussitôt que les deux applications naturelles sont induites par dérivation des deux applications naturelles

$$a^*\Psi_{\overline{\eta}}f_{\eta*} \rightrightarrows f_{\overline{s}*}\Theta_{\overline{\eta}}b^*$$

dont on doit donc montrer qu'elles sont égales. Il faut donc montrer que le diagramme commute sans foncteurs dérivés et pour un faisceau $\mathcal{F}$. Il suffit pour cela de démontrer que le diagramme commute au niveau des préfaisceaux définissant les cycles évanescents. Soit donc $U/W_{0\overline{s}}$ étale et $s \in \Gamma(U, \Psi_{\overline{\eta}}(f_{\eta*}\mathcal{F})_{|W_0})$. Cette section est donnée par un germe de diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[d] & & V \arrow[d, "\text{étale}"] \\ W_{0\overline{s}} \arrow[r, hook] & Y_{\overline{s}} \arrow[r, hook] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

et une section

$$t \in \Gamma(V_{\overline{\eta}}, \overline{f_{\eta*}\mathcal{F}}) = \Gamma(V_{\overline{\eta}}, f_{\overline{\eta}*}\overline{\mathcal{F}}) = \Gamma(f_{\overline{\eta}}^{-1}(V_{\overline{\eta}}), \overline{\mathcal{F}}) = \Gamma(f^{-1}(V)_{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}})$$

La section image de s par les trois application horizontales du haut est une section $t' \in \Gamma(W_{0\overline{s}}, \Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{f}^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}}))$ qui se décrit ainsi : comme dans le 5.4.1 il y a des diagrammes

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{V}_{/W_0} \arrow[dl] \\ Y_{/W_0} & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{U}^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{V}^{\mathrm{an}}_{/W_0} \arrow[dl] \\ Y^{\mathrm{an}}_{/W_0} & \end{tikzcd}$$

Il y a donc un morphisme $\xi : (f^{\mathrm{an}})^{-1}(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}) \to (f^{\mathrm{an}})^{-1}(\widehat{V}^{\mathrm{an}}_{/W_0})$. La section t donne une section u de $\Gamma((f^{\mathrm{an}})^{-1}(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}), \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}})$ par les applications

$$\Gamma(f^{-1}(V)_{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V)^{\mathrm{an}}_{\overline{\overline{\eta}}}, \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \Gamma((f^{\mathrm{an}})^{-1}(\widehat{V}^{\mathrm{an}}_{/W_0}), \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}})$$
$$\xrightarrow{\xi^*} \Gamma((f^{\mathrm{an}})^{-1}(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}), \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}})$$

or, on a l'égalité

$$\Gamma((f^{\mathrm{an}})^{-1}(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}), \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}) = \Gamma(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}, \widehat{f}^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}}))$$

l'image de cette section u par l'application de spécialisation

$$\Gamma(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}, \widehat{f}^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}})) \longrightarrow \Gamma(U, \Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{f}^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}}))$$

est t'. De plus, $\Gamma(U, \widehat{f}_{\overline{s}*}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|(\widehat{X}_{/W_1})^{\mathrm{an}}}) = \Gamma(f^{-1}_{|W_1}(U), \Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|(\widehat{X}_{/W_1})^{\mathrm{an}}}))$, et il y a des diagrammes

$$\begin{tikzcd} U_1 = (f_{|W_1})^{-1}(U) \arrow[rr] \arrow[d] & & f^{-1}(V) \arrow[d, "\text{étale}"] \\ W_{1\overline{s}} \arrow[r, hook] & X_{\overline{s}} \arrow[r, hook] & \overline{X} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{U_1} \arrow[r] \arrow[d] & f^{-1}(V)_{/W_1} \arrow[dl] \\ \widehat{X}_{/W_1} & \end{tikzcd}$$

Par définition de l'application de commutation naturelle des cycles évanescents analytiques à l'image directe, l'image de t' par l'application verticale de droite dans le grand diagramme est l'image de u par la composée

$$\Gamma((f^{\mathrm{an}})^{-1}(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}), \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{U_1}^{\mathrm{an}}, \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{f}^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}})))$$

où la dernière application est l'application de spécialisation associée aux deux diagrammes ci-dessus. Cela donne une description de l'image de t en parcourant le grand diagramme par le haut puis par l'application verticale de droite.

Décrivons l'image de t de l'autre manière. L'image de t par l'application verticale de gauche composée avec l'application γ dans le grand diagramme est donnée par son image par la composée composée

$$\Gamma(f^{-1}(V)_{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})) = \Gamma(U, (f_{\overline{s}|W_1})_*\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})_{|W_1})$$

où l'application du milieu est l'application de spécialisation associée au diagramme de gauche ci-dessus. Par définition de l'isomorphisme de Berkovich, l'image de t, par le second chemin, dans $\Gamma(U, (\widehat{f_{\overline{s}}})_*\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}})) = \Gamma(U_1, \Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}}))$ est l'image de t par la composée

$$\Gamma(f^{-1}(V), \overline{\mathcal{F}}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V)^{\mathrm{an}}, \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{U_1}^{\mathrm{an}}, \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{|\widehat{X}^{\mathrm{an}}_{/W_1}}))$$

où la dernière application est l'application de spécialisation.

Le fait que ces deux descriptions donnent la même image est alors clair une fois que l'on mes bout à bout les différents morphismes décrits. □

Corollaire 5.4.3. — *Dans le lemme précédent, supposons $Y = S$ et f propre. Il y a alors un morphisme Galois équivariant de suite spectrale des cycles évanescents*

$$\begin{tikzcd} H^p(X_{\overline{s}}, R^q\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & H^{p+q}(X_{\overline{\eta}}, \mathcal{F}) \arrow[d] \\ H^p(W_{1\overline{s}}, R^q\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F}) \arrow[r, Rightarrow] & H^{p+q}((\widehat{X}_{/W_1})^{\mathrm{an}} \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}) \end{tikzcd}$$

5.4.3.2. Image inverse. — Soit $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Il y a alors un morphisme naturel

$$f^*\mathrm{R}\Theta \longrightarrow \mathrm{R}\Theta f^*$$

défini par adjonction grâce à l'isomorphisme $f_*\mathrm{R}\Theta f^* \simeq \mathrm{R}\Theta f_* f^*$ et l'application d'adjonction $\mathrm{Id} \to f_* f^*$.

Ce morphisme se décrit ainsi au niveau de la cohomologie : une section de $f^* R^q\Theta_{\overline{\eta}}\mathcal{F}$ est donnée étale localement par un $U/\mathfrak{X}_{\overline{s}}$ étale, un diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}_{\overline{s}} \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r] & \mathfrak{Y}_{\overline{s}} \end{tikzcd}$$

où $V/\mathfrak{Y}_{\overline{s}}$ est étale et une section $t \in H^q(\widetilde{V}^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}})$. Le diagramme se relève en

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U}^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}^{\mathrm{an}} \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{V}^{\mathrm{an}} \arrow[r] & \mathfrak{Y}^{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

et l'image réciproque de t par l'application verticale de gauche donne un élément de $H^q(\widetilde{U}^{\mathrm{an}}, f^*\mathcal{F})$, ce qui conclut la description de notre morphisme.

Lemme 5.4.4. — *Plaçons nous dans le cadre du lemme 5.4.2. Il y a alors un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} (f^*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}))_{|W_1} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{f}_{\overline{s}}^*\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0}) \arrow[d] \\ \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f^*\mathcal{F})_{|W_1} \arrow[r] & \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\left(\widehat{f}^{\mathrm{an}*}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0})\right) \end{tikzcd}$$

où les deux applications verticales sont celles associées à la fonctorialité de $\mathrm{R}\Psi$ *et* $\mathrm{R}\Theta$ *pour* f^*.

Démonstration. — Le diagramme s'insère dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} (f^*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}))_{|W_1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & (f_{|W_1})^*\left(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F})_{|W_0}\right) \arrow[r, "A\ \sim"] & (\widehat{f}_{\overline{s}})^*\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0}) \arrow[d] \\ \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f^*\mathcal{F})_{|W_1} \arrow[r, "B\ \sim"] & \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{f^*\mathcal{F}}_{/W_1}) \arrow[r, equal] & \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\left(\widehat{f}^{\mathrm{an}*}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0})\right) \end{tikzcd}$$

où A est induit par l'isomorphisme de Berkovich et B est l'isomorphisme de Berkovich.

On doit montrer que deux morphismes

$$(f^*\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}))_{|W_1} \rightrightarrows \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}\left(\widehat{f}^{\mathrm{an}*}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0})\right)$$

coïncident. Soient $a : W_1 \hookrightarrow X_s$ et $b : (\widehat{Y}_{/W_0})^{\mathrm{an}} \hookrightarrow Y_\eta^{\mathrm{an}}$. On a donc deux morphismes

$$a^*f^*\mathrm{R}\Psi \rightrightarrows \mathrm{R}\Theta \widehat{f}^*b^*$$

Rappelons que $\mathrm{R}\Theta = (R\nu_*) \circ \mu^*$. Se donner deux tels morphismes équivaut donc par adjonction à se donner deux morphismes

$$\nu^*a^*f^*\mathrm{R}\Psi \rightrightarrows \mu^*\widehat{f}^*b^*$$

Ce qui revient à se donner deux morphismes

$$\nu^*a^*f^*\Psi \rightrightarrows \mu^*\widehat{f}^*b^*$$

ou encore deux morphismes

$$a^*f^*\Psi \rightrightarrows \Theta\widehat{f}^*b^*$$

On s'est donc ramené à vérifier la commutativité du diagramme dans le cas où il n'y a plus de foncteurs dérivés, ce qui est facile en utilisant la définition de l'isomorphisme de Berkovich. □

5.4.3.3. Compatibilité au changement de base. — Propriété identique au cas algébrique.

5.5. Correspondances cohomologiques analytiques rigides

Λ désigne un anneau de coefficients de torsion première à p.

5.5.1. Définition. — Soit

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd}$$

un diagramme d'espaces analytiques de Berkovich sur η, et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}^+(X_1, \Lambda) \times \boldsymbol{D}^+(X_2, \Lambda)$.

Définition 5.5.1. — $\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \mathrm{Hom}(c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$

5.5.2. Restriction à un domaine analytique. — Soient $U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2$ deux domaines analytiques localement fermés tels que $c_2^{-1}(U_2) \subset c_1^{-1}(U_1)$. Considérons la correspondance

$$\begin{tikzcd} & c_2^{-1}(U_2) \arrow[dl, "c_1'"'] \arrow[dr, "c_2'"] & \\ U_1 & & U_2 \end{tikzcd}$$

Soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} c_2^{-1}(U_2) \arrow[r, hook, "b"] \arrow[d, "c_2'"'] & C \arrow[d, "c_2"] \\ U_2 \arrow[r, hook, "a"] & X_2 \end{tikzcd}$$

duquel il résulte un isomorphisme de changement de base $a^* c_{2*} \xrightarrow{\sim} c'_{2*} b^*$.

La restriction de u est alors définie par la composition suivante

$$\mathrm{res}(u) : c'_{2*} c_1'^*(\mathcal{F}_{1|U_1}) = c'_{2*} b^* c_1^* \mathcal{F}_1 \xleftarrow{\sim} a^* c_{2*} c_1^* \mathcal{F}_1 \xrightarrow{a^* u} a^* \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{2|U_2}$$

$\mathrm{res}(u) \in \mathrm{Coh}_{c_2^{-1}(U_2)}(\mathcal{F}_{1|U_1}, \mathcal{F}_{2|U_2})$ et cela définit un morphisme

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{c_2^{-1}(V_2)}(\mathcal{F}_{1|U_1}, \mathcal{F}_{2|U_2})$$

5.5.3. Image directe. — Soit un diagramme d'espaces analytiques

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] \arrow[dd, "f'"] & \\ X_1 \arrow[dd, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dd, "f_2"] \\ & D \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dr, "d_2"] & \\ Y_1 & & Y_2 \end{tikzcd}$$

et soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. On définit $f_* u$ de la façon suivante

$$f_* u : d_{2*} d_1^* f_{1*} \mathcal{F}_1 \longrightarrow d_{2*} f'_* c_1^* \mathcal{F}_1 = f_{2*} c_{2*} c_1^* \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f_{2*} u} f_{2*} \mathcal{F}_2$$

où la première application est déduite du morphisme de changement de base associé au losange de gauche. On a donc une application :

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_D(f_{1*}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2)$$

D'où en particulier une action sur la cohomologie

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R\Gamma(X_1, \mathcal{F}_1), R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2))$$

qui est définie ainsi

$$u_* : R\Gamma(X_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{c_1^*} R\Gamma(C, c_1^* \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_2, c_{2*} c_1^* \mathcal{F}_1) \longrightarrow R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2)$$

Ces images directes sont compatibles à la restriction en un sens facile à définir.

5.5.4. Analytification d'une correspondance algébrique. — Soit

$$C \xrightarrow{(c_1,c_2)} X_1 \times X_2$$

une correspondance algébrique avec c_1 propre. Soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ une correspondance cohomologique algébrique où $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}_c^+(X_1,\Lambda) \times \boldsymbol{D}_c^+(X_2,\Lambda)$. Il lui est associé un morphisme $\widetilde{u} : c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$. La correspondance analytifiée u^{an} est alors définie ainsi

$$u^{\mathrm{an}} : c_{2*}^{\mathrm{an}}c_1^{\mathrm{an}*}\mathcal{F}_1^{\mathrm{an}} = c_{2*}^{\mathrm{an}}(c_1^*\mathcal{F}_1)^{\mathrm{an}} \xleftarrow{\ \sim\ } (c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1)^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\widetilde{u}^{\mathrm{an}}} \mathcal{F}_2^{\mathrm{an}}$$

où l'isomorphisme du milieu des l'isomorphisme de changement de base du corollaire 7.5.3 de [**1**]. D'où un morphisme

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{C^{\mathrm{an}}}(\mathcal{F}_1^{\mathrm{an}},\mathcal{F}_2^{\mathrm{an}})$$

On vérifie facilement que ce morphisme d'analytification est compatible aux images directes propres.

5.6. Spécialisation des correspondances cohomologiques analytiques rigides

5.6.1. Définition. — Soit

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ \mathfrak{X}_1 & & \mathfrak{X}_2 \end{tikzcd}$$

un diagramme de schémas formels localement formellement de type fini sur S, c'est-à-dire une correspondance formelle. Soit $u \in \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{an}}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$. La correspondance spécialisée $u_{\bar{s}}$ est définie ainsi :

$$u_{\bar{s}} : c_{2*}c_1^*\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow c_{2*}\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(c_1^*\mathcal{F}_1) \xleftarrow{\ \sim\ } \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathrm{R}\Theta(u)} \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)$$

où l'on a utilisé les diverses fonctorialités de $\mathrm{R}\Theta$. Cela définit un morphisme

$$\mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{an}}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}_{\bar{s}}}(\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1),\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2))$$

5.6.2. Compatibilité à l'image directe. — Considérons la proposition 5.3.4 dans le cadre rigide en ne faisant aucune hypothèse de propreté sur les morphismes. Sa démonstration s'adapte alors automatiquement au cas rigide en changeant Ψ en Θ et en remarquant que toutes les hypothèses de propreté sont inutiles puisque Θ, contrairement à Ψ, commute toujours aux images directes (il faut bien sûr utiliser les différentes fonctorialités établies pour $\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}$ pour adapter la démonstration).

On en déduit donc la compatibilité entre image directe quelconque et spécialisation dans le cas analytique rigide.

5.7. Compatibilité entre les spécialisations algébriques et analytiques rigides

Soit une correspondance algébrique sur S

$$C \xrightarrow{(c_1,c_2)} X_1 \times X_2$$

où l'on suppose que c_1 et c_2 sont propres. Soient $V_1 \subset X_{1s}$ et $V_2 \subset X_{2s}$ deux sous-schémas fermés de leur fibre spéciale. Supposons

$$c_2^{-1}(V_2) \subset c_1^{-1}(V_1)$$

d'où une correspondance sur s

$$c_2^{-1}(V_2) \xrightarrow{(c_1',c_2')} V_1 \times V_2$$

et une correspondance formelle

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{(\widehat{c}_1,\widehat{c}_2)} \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$$

où $\mathfrak{C} = \widehat{C}_{/c_2^{-1}(V_2)}$, $\mathfrak{X}_1 = \widehat{X_1}_{/V_1}$, $\mathfrak{X}_2 = \widehat{X_2}_{/V_2}$.

Proposition 5.7.1. — *Soient $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}_c^+(X_1,\Lambda) \times \boldsymbol{D}_c^+(X_2,\Lambda)$. Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \arrow[r, "\text{spécialisation}"] \arrow[d, "\text{analytification}"] & \mathrm{Coh}_{C_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1),\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2)) \arrow[d, "\text{restriction}"] \\
\mathrm{Coh}_{C_\eta^{\mathrm{an}}}(\mathcal{F}_1^{\mathrm{an}},\mathcal{F}_2^{\mathrm{an}}) \arrow[d, "\text{restriction}"] & \mathrm{Coh}_{c_2^{-1}(V_2)}(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_1)_{|V_1},\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_2)_{|V_2}) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{an}}}(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1},\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}) \arrow[r, "\text{spécialisation}"] & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}),\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}))
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $u \in \mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ et notons $\widetilde{u} : c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ le morphisme associé par adjonction. La démonstration consiste à appliquer la compatibilité de l'isomorphisme de comparaison avec les deux cas de fonctorialité pour les cycles évanescents.

Appliquons le lemme 5.4.4 à $\mathcal{F}_1$ et au carré

$$\begin{tikzcd}
c_2^{-1}(V_2) \arrow[r] \arrow[d, "c_1'"'] & C \arrow[d, "c_1"] \\
V_1 \arrow[r, hook] & X_1
\end{tikzcd}$$

On obtient alors un diagramme

$$\begin{tikzcd}
{c_1'}^{*}\left(\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1)_{|V_1}\right) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\mathcal{D}}"] & (\widehat{c}_{1\bar{s}})^{*}\mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}) \arrow[d] \\
\mathrm{R}\Psi(c_1^{*}\mathcal{F}_1)_{|c_2^{-1}(V_2)} \arrow[r] & \mathrm{R}\Theta((\widehat{c}_1^{\mathrm{an}})^{*}\widehat{\mathcal{F}}_{1/V_1})
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
c'_{2*}{c_1'}^{*}\left(\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1)_{|V_1}\right) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\boxed{c'_{2*}\mathcal{D}}"] & c'_{2*}(\widehat{c}_{1\bar{s}})^{*}\mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}) \arrow[d] & \\
c'_{2*}\mathrm{R}\Psi(c_1^{*}\mathcal{F}_1)_{|c_2^{-1}(V_2)} \arrow[r] & \widehat{c}_{2\bar{s}*}\mathrm{R}\Theta((\widehat{c}_1^{\mathrm{an}})^{*}\widehat{\mathcal{F}}_{1/V_1}) & \\
(c_{2*}\mathrm{R}\Psi(c_1^{*}\mathcal{F}_1))_{|V_2} \arrow[u, "\simeq"] & \widehat{c}_{2\bar{s}*}\mathrm{R}\Theta\left((\widehat{c_1^{*}\mathcal{F}_1})_{/V_1}\right) \arrow[u, "\simeq"'] & \\
\mathrm{R}\Psi(c_{2*}c_1^{*}\mathcal{F}_1)_{|V_2} \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{R}\Theta\left(\widehat{c}_{2*}^{\mathrm{an}}(\widehat{c_1^{*}\mathcal{F}_1})_{/V_1}\right) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"'] & \\
 & \mathrm{R}\Theta\left(\widehat{c_{2*}c_1^{*}\mathcal{F}_1}_{/V_2}\right) \arrow[r, "\mathrm{R}\Theta(\widetilde{u}^{\mathrm{an}}_{|\mathfrak{X}_2^{\mathrm{an}}})"] & \mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2})
\end{tikzcd}$$

où le deuxième rectangle commute grâce au lemme 5.4.2.

Le résultat s'en déduit, car les deux éléments de $\mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{an}}}(\mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}), \mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}))$ associés se déduisent de ce diagramme en le parcourant du sommet en haut à droite vers l'élément en bas à droite des deux façons possibles en suivant les bords du diagramme. □

5.8. Résumé des différentes fonctorialités

Supposons nous donné un morphisme de correspondances sur S

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "(c_1, c_2)"] \arrow[d, "f'"'] & X_1 \times X_2 \arrow[d, "f_1 \times f_2"] \\
D \arrow[r, "(d_1, d_2)"] & Y_1 \times Y_2
\end{tikzcd}$$

Soient $W_1 \subset Y_1, W_2 \subset Y_2$ deux fermés de la fibre spéciale tels que $d_2^{-1}(W_2) \subset d_1^{-1}(W_1)$. Soient $V_i = f_i^{-1}(W_i)$, $i = 1, 2$ et supposons que $c_2^{-1}(V_2) \subset c_1^{-1}(V_1)$.

Soient $\mathfrak{C} = \widehat{C}_{/c_{\overline{2}}^{-1}(V_2)}, \mathfrak{X}_i = \widehat{X}_{/V_i}$, $i = 1,2$. Soient $\mathfrak{D} = \widehat{D}_{/d_{\overline{2}}^{-1}(W_2)}, \mathfrak{Y}_i = \widehat{Y}_{i/W_i}$, $i = 1,2$. Il y a donc un morphisme de correspondances formelles

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "(\widehat{c}_1,\widehat{c}_2)"] \arrow[d, "\widehat{f}'"'] & \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \arrow[d, "\widehat{f}^1 \times \widehat{f}_2"] \\
\mathfrak{D} \arrow[r, "(\widehat{d}_1,\widehat{d}_2)"] & \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2
\end{tikzcd}$$

Qui induit un morphisme de correspondances analytiques.

Soient $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}_c^+(X_1,\Lambda) \times \boldsymbol{D}_c^+(X_2,\Lambda)$. Supposons que $c_1, c_2, d_1, d_2, f_1, f_2$ sont propres. Le diagramme suivant est alors commutatif.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathrm{Coh}_{C_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Psi\mathcal{F}_1,\mathrm{R}\Psi\mathcal{F}_2) \arrow[rr, "\text{restriction}", "\text{+iso. de Berkovich}"'] \arrow[dd, "\text{(A)}"] & & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Theta\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1},\mathrm{R}\Theta\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}) \arrow[dd, "\begin{array}{c} f'_{\overline{s}*} \\ \text{+ commutation de} \\ \text{l'image directe à R}\Theta \end{array}"] \\
\mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \arrow[ur, "\text{spécialisation}"] \arrow[rr, "\text{(C)}"] \arrow[dd, "f_{\eta*}"'] & & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{an}}}(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1},\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}) \arrow[ur, "\text{spécialisation}"] \arrow[dd, "\widehat{f}^{\mathrm{an}}_*"] & \\
& \mathrm{Coh}_{D_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Psi f_{1*}\mathcal{F}_1,\mathrm{R}\Psi f_{2*}\mathcal{F}_2) \arrow[rr, "\text{(B)}"] & & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{D}_{\overline{s}}}(\mathrm{R}\Theta\widehat{f_{1*}\mathcal{F}_1}_{/W_1},\mathrm{R}\Theta\widehat{f_{2*}\mathcal{F}_1}_{/W_2}) \\
\mathrm{Coh}_{D_\eta}(f_{1*}\mathcal{F}_1,f_{2*}\mathcal{F}_2) \arrow[ur, "\text{spécialisation}"] \arrow[rr, "\text{(D)}"] & & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{D}^{\mathrm{an}}}(\widehat{f_{1*}\mathcal{F}_1}_{/W_1},\widehat{f_{2*}\mathcal{F}_1}_{/W_2}) \arrow[ur, "\text{spécialisation}"] &
\end{tikzcd}$$

où

- (A) $= f_{\overline{s}*}$ + commutation de l'image directe propre à RΨ
- (B) = restriction + isomorphisme de Berkovich
- (C) = analytification + restriction
- (D) = analytification + restriction

5.9. Des coefficients de torsion aux coefficients ℓ-adique

Oublions dans cette section les notations précédentes et reprenons les notations de la section 4.1 ; en particulier k est un corps valué complet, Λ un anneau de valuation discrète complet dont nous noterons K_Λ le corps des fractions. Soit X un

k-espace analytique ou bien un espace adique sur $\mathrm{Spa}(k,k^0)$. En général les groupes de cohomologie étale Λ-adique

$$H^\bullet(X,\Lambda)$$

ne sont pas définis : il n'y a aucune définition intrinsèque qui fasse que ces groupes vérifient de bonnes propriétés. Nous allons voir cependant que dans certains cas, lorsque certaines propriétés de finitude sont satisfaites, on peut donner une définition ad-hoc des $H^\bullet(X,\Lambda)$ satisfaisante.

Définition 5.9.1. — Soit $q \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$. Supposons que $(H^q(X,\mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit un système A.R. Λ-adique de type fini. On posera alors

$$H^q(X,\mathcal{F}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^q(X,\mathcal{F}_n)$$

un Λ-module de type fini.

Cette définition est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 5.9.2. — *Supposons X lisse sur k (ou sur* $\mathrm{Spa}(k,k^0)$ *dans le cas adique) de dimension pure d. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ localement constant. Soit $\check{\mathcal{F}}$ le système local dual. Supposons que $\forall\, q \in \mathbb{N}$ les systèmes*

$$\Big(H^q_c(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \quad et \quad \Big(H^q(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, (\check{\mathcal{F}})_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

sont A.R. Λ-adiques de type fini et que l'application

$$H^q_c(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^q_c(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}_n)$$

est un isomorphisme.

Il y a alors un isomorphisme canonique de dualité de Poincaré

$$(H^q_c(X,\mathcal{F}) \otimes_\Lambda K_\Lambda)^* \xrightarrow{\ \sim\ } H^{2d-q}(X,\check{\mathcal{F}})(d) \otimes_\Lambda K_\Lambda$$

Démonstration. — Nous allons appliquer le formalisme de Ekedahl [**22**] dont nous utiliserons librement les notations. Soit $f : X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}} \to \mathcal{M}(\widehat{\overline{k}})$ (resp. $\mathrm{Spa}(\widehat{\overline{k}}, \widehat{\overline{k}}^0)$ dans le cas adique). Il y a alors un foncteur (section 5 de [**22**])

$$\mathbb{R}f_! : \boldsymbol{D}(\mathcal{T} - \underline{\Lambda}) \longrightarrow \boldsymbol{D}(\mathcal{S} - \Lambda)$$

où $\mathcal{T}$ est le topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ et $\mathcal{S}$ le topos ponctuel $\widetilde{\mathcal{M}\big(\widehat{\overline{k}}\big)_{\text{ét}}}$ (resp. $Spa(\widehat{\overline{k}}, \widehat{\overline{k}}^0)^\sim_{\text{ét}}$) vérifiant (*cf.* par exemple la fin de l'énoncé du (iii) du théorème 6.3 de [**22**])

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \Lambda/\mathfrak{m}^n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda (\mathbb{R}f_!\mathcal{F}) = \mathbb{R}\Gamma_c(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}_n) \in \boldsymbol{D}^+((X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}})_{\text{ét}}, \Lambda/\mathfrak{m}^n)$$

(Ce foncteur est à distinguer du foncteur $\mathbb{R}\Gamma_c(X,-)$ introduit dans la section 4.1) Le topos ponctuel $\mathcal{S}$ vérifie les hypothèses du paragraphe 7 de [**22**]. $\mathbb{R}f_!$ est de dimension cohomologique finie ($R^i f_!$ s'annule en dimension supérieure à $2d$ pour les coefficients de torsion ([**35**] 5.3.8, [**1**] 5.3.11). Donc, d'après les hypothèses faites

$$\mathbb{R}f_!\mathcal{F} \in \boldsymbol{D}_c^b(\mathcal{S} - \Lambda)$$

D'après le théorème 7.1 de [**22**] il y a une équivalence de catégories

$$\boldsymbol{D}_c^b(\mathcal{S} - \Lambda) \underset{\mathbb{L}\pi^*}{\overset{\mathbb{R}\pi_*}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{D}^b_{\text{type fini}}(\Lambda\text{-mod})$$

où π_* est le foncteur $\varprojlim$, π^* le foncteur $M \mapsto (M \otimes \Lambda/\mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $\mathbb{R}\pi_*$ et $\mathbb{L}\pi^*$ sont quasi-inverses l'un de l'autre. Donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}f_!\mathcal{F} &\simeq \mathbb{L}\pi^*(\mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}f_!\mathcal{F}) \\ &= \left(\Lambda/\mathfrak{m}^n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda \mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}f_!\mathcal{F}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\simeq \left(\mathbb{R}\Gamma_c(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Soit $M^\bullet = \mathbb{R}\pi_*(\mathbb{R}f_!\mathcal{F})$. La suite spectrale

$$E_2^{ij} = \mathbb{R}^i\pi_*\left((H_c^j(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \Longrightarrow H^{i+j}(M^\bullet)$$

vérifie $E_2^{ij} = 0$ si $i \neq 0$ car par hypothèse le système $(H_c^j(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est A.R. Λ-adique. Donc,

$$H^j(M^\bullet) \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H_c^j(X, \mathcal{F}_n)$$

Comme dans le paragraphe 6 de [**22**], utilisant les propriétés de finitude de la dimension cohomologique de $f_!$, on peut définir $f^!\Lambda \in \boldsymbol{D}(\mathcal{T} - \underline{\Lambda})$. Il résulte du théorème de dualité de Poincaré pour les coefficients de torsion (théorème 7.3.1 de [**1**] dans le cas analytique et théorème 7.5.3 de [**35**] dans le cas adique) que $f^!\Lambda \simeq \underline{\Lambda}(d)[2d]$. En effet, le morphisme trace pour les coefficients de torsion $\mathbb{R}f_!f^*(-)(d)[2d] \to (-)$ s'étend naturellement en une application de foncteurs de $\boldsymbol{D}^b(\mathcal{S} - \Lambda)$ dans $\boldsymbol{D}^b(\mathcal{S} - \Lambda)$ qui définit par adjonction un morphisme $f^*(-)(d)[2d] \to f^!(-)$ dans $\boldsymbol{D}^b(\mathcal{T} - \Lambda)$. Ce morphisme est un isomorphisme puisqu'après application du foncteur conservatif $- \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Lambda/\mathfrak{m}$ on obtient l'isomorphisme dans le cas de torsion (grâce au 6.3. (iii) de [**22**]). La dualité de Verdier Λ-adique (isomorphisme 6.1 de [**22**]) donne alors un isomorphisme

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}(\mathbb{R}f_!\mathcal{F}, \Lambda_\bullet) \simeq \mathbb{R}\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Lambda_\bullet(d)[2d])$$

Le premier terme s'identifie via l'équivalence de catégories ci-dessus à

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_\Lambda(M^\bullet, \Lambda)$$

quant au second à

$$\mathbb{R}f_*(\check{\mathcal{F}}(d)[2d])$$

qui, comme précédemment pour $\mathbb{R}f_!$, est égal à

$$(\mathbb{R}\Gamma(X,\mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

Grâce à l'hypothèse que $\forall j,\ (H^j(X,\check{\mathcal{F}}_n))_n$ est un système A.R. Λ-adique de type fini, si

$$N^\bullet = \mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}f_*\check{\mathcal{F}}(d)[2d]$$

alors

$$\forall j\ \ H^j(N^\bullet) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^{2d+j}(X,\check{F})(d)$$

On obtient (toujours grâce à l'équivalence du théorème 7.1 de [**22**]) donc

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_\Lambda(M^\bullet,\Lambda)\simeq N^\bullet$$

dans la catégorie dérivée bornée des complexes de Λ-modules à cohomologie de type fini. Si W est un Λ-module de type fini,

$$Ext^i_\Lambda(W,\Lambda)=\begin{cases}\operatorname{Hom}_\Lambda(W_{\text{torsion}},K_\Lambda/\Lambda) & \text{si } i=1\\ 0 & \text{si } i\geqslant 2\end{cases}$$

La suite spectrale

$$E_2^{ij}=\operatorname{Ext}^i_\Lambda(H^{-j}(M^\bullet),\Lambda)\Longrightarrow H^{i+j}(N^\bullet)$$

dégénère donc en des suites exactes pour tout i

$$\begin{aligned}0\longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(H_c^{2d-i+1}(X,\Lambda)_{\text{torsion}},K_\Lambda/\Lambda)\longrightarrow H^i(X,\check{\mathcal{F}})(d)\\ \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(H_c^{2d-i}(X,\mathcal{F}),\Lambda)\longrightarrow 0\end{aligned}$$

qui donne le résultat voulu après tensorisation par K_Λ puisque le terme de gauche est de torsion. □

Remarque 5.9.3. — Il est sous entendu que les isomorphismes ci-dessus sont Galois équivariants.

Proposition 5.9.4. — *Les hypothèses de la proposition précédente sont vérifiées lorsque X et $\mathcal{F}$ sont de la forme suivante :*

- *Il existe un schéma séparé de type fini Y/k^0, un faisceau étale algébrique constructible $\mathcal{G}$ sur Y_η et un ouvert U de la fibre spéciale de Y, $Y\times_{k^0}k^0/k^{00}$, tels que X s'identifie à la fibre générique au sens des espaces adiques du complété formel de X le long de U*

$$(\widehat{Y}_{/U})^{\text{rig}}\subset (Y_\eta)^{\text{rig}}$$

et $\mathcal{F}$ s'identifie à la restriction de $\mathcal{G}^{\text{rig}}$ à cet ouvert (et X est lisse et $\mathcal{F}$ est localement constant).

• *Il existe un schéma séparé de type fini Y/k^0, un faisceau étale algébrique constructible $\mathcal{G}$ sur Y_η et, dans le cas analytique, un fermé propre V de la fibre spéciale de Y tels que X s'identifie au tube au-dessus de V dans $(Y_\eta)^{\mathrm{an}}$, $(\widehat{Y}_{/V})^{\mathrm{an}}$, et $\mathcal{F}$ s'identifie à la restriction de $\mathcal{G}^{\mathrm{an}}$. Dans le cas adique mêmes conditions mais V est seulement supposé fermé.*

Soit de plus $\mathfrak{X}$ le schéma formel $\widehat{X}_{/U}$ dans le premier cas et $\widehat{X}_{/V}$ dans le second. Soit $(\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ le système de faisceaux des cycles proches analytiques rigides. Alors,

$$(\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n \in \boldsymbol{D}_c^b(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \Lambda)$$

la catégorie dérivée bornée à cohomologie constructible 2-colimite des catégories $(\boldsymbol{D}_c^b(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \Lambda/\mathfrak{m}^n))_{n\in\mathbb{N}}$, et il y a une suite spectrale des cycles évanescents convergente de Λ-modules de type fini

$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, (\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n)) \Longrightarrow H^{p+q}(X \widehat{\otimes} \widehat{\overline{k}}, \overline{\mathcal{F}})$$

Démonstration. — Commençons par les assertions sur les cycles évanescents. Le fait que $\forall\, n\ \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n) \in \boldsymbol{D}_c^b(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \Lambda/\mathfrak{m}^n)$ résulte du théorème de comparaison de Berkovich et du théorème de constructibilité de Deligne ([**18**]) pour les cycles évanescents algébriques. La formule de Kunneth pour les cycles évanescents algébriques (appendice de [**41**]) couplée au théorème de comparaison de Berkovich montre que

$$\forall\, n\ \ \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_{n+1}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Lambda/\mathfrak{m}^n \simeq \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n)$$

(et cet isomorphisme est canonique). On en déduit que

$$(\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n \in \boldsymbol{D}_c^b(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \Lambda)$$

Il résulte également de [**18**] et de l'annulation des $\mathrm{R}^i\Psi_{\overline{\eta}}$ pour i grand que $(\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n$ est un système A.R. Λ-adique (utiliser le lemme 12.5 de [**24**] ou bien [**43**] 5.3.1). Le théorème de finitude de la cohomologie étale des faisceaux constructibles sur un corps de [**18**] couplé au théorème 5.3.1 de [**43**] montre alors que $\forall\, p\ \forall\, q$ le $\Lambda_\bullet$-module

$$(H^p(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \mathrm{R}\Theta^q_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n)))_{n\in\mathbb{N}}$$

est A.R. Λ-adique. Pour tout n il y a une suite spectrale des cycles évanescents

$$E_2^{pq}(n) = H^p(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n)) \Longrightarrow H^{p+q}(X \widehat{\otimes} \widehat{\overline{k}}, \overline{\mathcal{F}}_n)$$

On obtient donc une suite spectrale convergente dans la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules

$$E_2^{pq} = (E_2^{pq}(n))_{n\in\mathbb{N}} \Longrightarrow \Big(H^{p+q}(X \widehat{\otimes} \widehat{\overline{k}}, \overline{\mathcal{F}}_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

Les premiers termes E_2^{pq} sont dans la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules A.R. Λ-adiques de type fini. Cette catégorie est une sous-catégorie abélienne pleine stable par extension de celle des $\Lambda_\bullet$-modules ([**43**] théorème 5.2.3 et proposition 5.2.4). Le fait qu'elle soit abélienne implique que $\forall\, p\ \forall\, q\ \forall\, r \geqslant 2\ \ (E_r^{pq}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est A.R. Λ-adique de type fini. L'aboutissement $(H^{p+q}(X \widehat{\otimes} \widehat{\overline{k}}, \overline{\mathcal{F}}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors muni d'une filtration finie dont les gradués sont A.R. Λ-adique de type fini. La stabilité par extensions de la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules A.R. Λ-adiques montre donc que cet aboutissement est A.R. Λ-adique. Considérons maintenant le foncteur $\varprojlim$ qui va de la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules dans celle des Λ-modules. En restriction à la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules A.R. Λ-adiques de type fini il est exact d'image des Λ-modules de type fini. Appliquant ce foncteur exact à la suite spectrale $(E_2^{pq}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient donc une suite spectrale convergente de Λ-modules de type fini

$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, (\mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\overline{s}}, \mathrm{R}\Theta_{\overline{\eta}}(\mathcal{F}_n)) \Longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^{p+q}(X \widehat{\otimes} \widehat{\overline{k}}, \overline{\mathcal{F}_n})$$

ce qui termine la démonstration de la partie cycles évanescents de la proposition.

Passons maintenant à la première partie. Dans tous les cas, on a déjà vérifié l'hypothèse concernant $(H^q(X \widehat{\otimes} \widehat{\overline{k}}, \check{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la proposition 5.9.2. Reste donc les assertions concernant la cohomologie à support compact. Elles résultent dans le cas des espaces adiques du théorème 3.1 de [**36**] pour l'espace adique associé au complété formel le long de l'ouvert U et du théorème 3.3 de [**36**] dans le cas de l'espace adique associé au complété formel le long du fermé V. Dans le cas où V est propre, l'énoncé pour l'espace analytique de Berkovich associé au complété formel le long V est une conséquence du fait que V propre implique que l'espace adique est partiellement propre, et que donc sa cohomologie à support compact coïncide avec celle de l'espace analytique associé (proposition 1.5 de [**36**]). □

Définition 5.9.5. — Soit $C \xrightarrow{(c_1,c_2)} X_1 \times X_2$ une correspondance d'espaces analytiques où c_1 et c_2 sont finis. Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$. On note $\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ les correspondances cohomologiques à support dans C que l'on définit comme étant égal à l'ensemble des systèmes compatibles de correspondances dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Coh}_C((\mathcal{F}_1)_n, (\mathcal{F}_2)_n)$.

Comme précédemment, une correspondance cohomologique agit sur la cohomologie Λ-adique lorsque celle ci est bien définie par simple passage à la limite. De plus, dans le cas de la fibre générique d'un schéma formel, une correspondance spécialisée (égale par définition au système des correspondances spécialisées) sur les cycles proches analytiques rigides fournit une suite spectrale des cycles proches équivariante comme précédemment. Cela se déduit par passage à la limite projective des suites spectrales obtenues dans le cas de torsion grâce à la proposition précédente.

Remarque 5.9.6. — Soit $(c_1, c_2) : C \to X_1 \times X_2$ une correspondance analytique où c_1 et c_2 sont étales finis. Via la dualité de Poincaré de la proposition 5.9.2, l'action d'une correspondance cohomologique Λ-adique sur la cohomologie à support compact doit être définie comme étant l'action de la correspondance duale si l'on veut que l'isomorphisme de Poincaré soit équivariant.

Application 5.9.7. — *La représentation locale fondamentale de* [**34**] *s'exprime comme le dual de Poincaré de la cohomologie ℓ-adique à support compact des espaces de*

Lubin-Tate (la contragédiente convenablement twistée à la Tate du point de vue de la théorie des représentations).

Désormais nous utiliserons librement des cycles évanescents ℓ-adiques sans forcément citer la proposition 5.9.4. Cette proposition contient tous les éléments nécessaires (et même plus) pour justifier le passage des coefficients de torsion aux coefficients ℓ-adiques lorsque cela sera nécessaire.

5.10. Formule des traces générale

Théorème 5.10.1. — *Soit $D \xrightarrow{(d_1,d_2)} Y_1 \times Y_2$ une correspondance sur S où D, Y_1 et Y_2 sont propres sur S.*

Soit $C \xrightarrow{(c_1,c_2)} X_1 \times X_2$ une correspondance sur η, où c_1 et c_2 sont finis.

Soit un morphisme de correspondances sur η :

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & X_1 \times X_2 \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1 \times f_2} \\ D_\eta & \longrightarrow & Y_{1\eta} \times Y_{2\eta} \end{array}$$

où f_1, f_2 sont étales finis.

Soient $V_1 \subset Y_{1s}, V_2 \subset Y_{2s}$ deux fermés vérifiant $d_2^{-1}(V_2) \subset d_1^{-1}(V_1)$. Soient $U_1 = (f_1^{\mathrm{an}})^{-1}(\mathrm{sp}^{-1}(V_1)), U_2 = (f_2^{\mathrm{an}})^{-1}(\mathrm{sp}^{-1}(V_2))$ les ouverts de $X_1^{\mathrm{an}}, X_2^{\mathrm{an}}$ associés. Supposons $c_2^{\mathrm{an}-1}(U_2) \subset c_1^{\mathrm{an}-1}(U_1)$.

Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux lisses sur X_1, resp. X_2. Soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Soit $v = (f_* u)_{\overline{s}} \in \mathrm{Coh}(\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f_{1*}\mathcal{F}_1), \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f_{2*}\mathcal{F}_2))$ la spécialisation de l'image directe de u. Il y a alors un morphisme de suites spectrales des cycles évanescents commutant à l'action de $\boldsymbol{Gal}(\overline{\eta}|\eta)$:

$$\begin{array}{ccc} H^p\left(V_{1\overline{s}}, R^q\Psi_{\overline{\eta}}(f_{1*}\mathcal{F}_1)\right) & \Longrightarrow & H^{p+q}\left(U_1 \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}_1\right) \\ {\scriptstyle v_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_*^{\mathrm{an}}} \\ H^p\left(V_{2\overline{s}}, R^q\Psi_{\overline{\eta}}(f_{2*}\mathcal{F}_2)\right) & \Longrightarrow & H^{p+q}\left(U_2 \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}_2\right) \end{array}$$

où la cohomologie ℓ-adique des ouverts rigides U_1, U_2 est définie comme étant la Poincaré duale de la cohomologie à support compact et où

$$\begin{aligned} u_*^{\mathrm{an}} : H^i(U_1 \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}_1) &\xrightarrow{(c_1^{\mathrm{an}})^*_{|c_2^{\mathrm{an}-1}(U_2)}} H^i((c_2^{\mathrm{an}})^{-1}(U_2) \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, c_1^*\overline{\mathcal{F}}_1) \\ &\xrightarrow{(c_2^{\mathrm{an}})_*} H^i(U_2 \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, c_{2*}c_1^*\overline{\mathcal{F}}_1) \xrightarrow{H^i(\widetilde{u})} H^i(U_2 \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}_2) \end{aligned}$$

où $\widetilde{u} : c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ est associé à u par adjonction.

Démonstration. — Pour $i = 1, 2$ complétons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[d] \\ Y_i & Y_{i\eta} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

en un diagramme

$$\begin{tikzcd} X_i^0 \arrow[d] & X_i \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ Y_i & Y_{i\eta} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

où X_i^0 est un schéma de type fini sur S et X_i^0/Y_i est fini. En particulier, X_i^0 est propre sur S. Soit le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ X_1^0 \times_{Y_1} D \times_{Y_2} X_2^0 & X_1 \times_{Y_{1\eta}} D_\eta \times_{Y_{2\eta}} X_2 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Et, comme ci-dessus, soit C^0 un modèle de type fini de C sur S et fini au-dessus de $X_1^0 \times_{Y_1} D \times_{Y_2} X_2^0$. Ce dernier schéma étant propre sur S, C^0 est propre sur S (cependant, et c'est la un point important qui nous a poussé à développer notre formalisme des correspondances cohomologiques dans la catégorie dérivée, on ne peut pas forcément trouver de modèle C^0 tel que C^0/X_1^0 et C^0/X_2^0 soient finis).

On a donc étendu la correspondance $C \to X_1 \times X_2$ sur η en une correspondance $C^0 \to X_1^0 \times X_2^0$ sur S. On a également étendu le morphisme de correspondances f en un morphisme de correspondances sur S. Tous les morphismes étendus sont propres.

Remarquons maintenant que l'hypothèse $c_2^{\mathrm{an}-1}(f_2^{\mathrm{an}-1}(U_2)) \subset c_1^{\mathrm{an}-1}(f_1^{\mathrm{an}-1}(U_1))$ implique, grâce à la surjectivité du morphisme de spécialisation, qu'il en est de même sur la fibre spéciale (au niveau des schémas réduits ce qui est suffisant pour nos besoins cohomologiques étales) pour les fermés V_1 et V_2 : $c_{2s}^{-1}(f_{2s}^{-1}(V_2))_{\mathrm{red}} \subset c_{1s}^{-1}(f_{1s}^{-1}(V_1))_{\mathrm{red}}$.

Le théorème résulte donc de la compatibilité des différentes fonctorialités pour les cycles évanescents démontrée dans les sections précédentes. □

Nous supposerons désormais que $k(s)$ est le corps fini $\mathbb{F}_q$. Nous noterons η^{nr} le complété de l'extension maximale non ramifiée de η, $\sigma \in \boldsymbol{Gal}(\eta^{nr}|\eta) \simeq \boldsymbol{Gal}(\overline{s}|s)$ le Frobenius géométrique et $W_\eta \subset \boldsymbol{Gal}(\overline{\eta}|\eta)$ le groupe de Weil. Si $\tau \in W_\eta$ nous noterons $v(\tau)$ l'entier vérifiant $\tau_{|\eta^{nr}} = \sigma^{v(\tau)}$.

Soit U un espace analytique sur η^{nr}. Pour tout $\tau \in W_\eta$ il y a un isomorphisme canonique

$$\left(U \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\eta^{nr}} \widehat{\overline{\eta}}\right)^{(\tau)} \simeq U^{(\sigma^{v(\tau)})} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\eta^{nr}} \widehat{\overline{\eta}}$$

Si U est un domaine analytique dans un espace analytique de la forme $X \widehat{\otimes} \eta^{nr}$ pour un espace analytique X sur η, $U^{(\sigma^{v(\tau)})}$ est le domaine analytique de $X \widehat{\otimes}_\eta \eta^{nr}$ dont les points rigides naïfs (ceux du spectre maximal) sont l'image par $\sigma^{v(\tau)}$ de ceux de U.

De l'isomorphisme ci-dessus on déduit un morphisme (qui n'est pas au-dessus de $\widehat{\overline{\eta}}$) d'espaces analytiques pour tout τ

$$U \widehat{\otimes}_{\eta^{nr}} \widehat{\overline{\eta}} \xrightarrow{\operatorname{Id} \times \tau} U^{(\sigma^{v(\tau)})} \widehat{\otimes}_{\eta^{nr}} \widehat{\overline{\eta}}$$

Si maintenant $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $X_{\text{ét}}$ (où $U \subset X \widehat{\otimes}_\eta \eta^{nr}$), $(\operatorname{Id} \times \tau)^* \overline{\mathcal{F}} \simeq \overline{\mathcal{F}}$ où $\overline{\mathcal{F}}$ désigne le pull-back de $\mathcal{F}$ à $X \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}$. On en déduit pour tout τ dans W_η un isomorphisme

$$H^q\left(U^{(\sigma^{v(\tau)})} \widehat{\otimes}_{\eta^{nr}} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right) \xrightarrow{\tau^*} H^q\left(U \widehat{\otimes}_{\eta^{nr}} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right)$$

Supposons de plus qu'il existe un schéma formel $\mathfrak{Y}$ sur S, un morphisme $f : X \to \mathfrak{Y}^{\text{an}}$ et un point fermé $y \in \mathfrak{Y}_{\overline{s}}$ tels que $U = f^{-1}(\operatorname{sp}^{-1}(y))$. Alors, si $v(\tau) \geqslant 0$

$$U^{(\sigma^{v(\tau)})} = f^{-1}(\operatorname{sp}^{-1}(\operatorname{Fr}^{v(\tau)}(y)))$$

où Fr désigne la correspondance de Frobenius, et on en déduit donc un isomorphisme lorsque $v(\tau) \geqslant 0$

$$H^q\left(f^{-1}(\operatorname{sp}^{-1}(\operatorname{Fr}^{v(\tau)}(y))) \widehat{\otimes}_{\eta^{nr}} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right) \xrightarrow{\tau^*} H^q\left(f^{-1}(\operatorname{sp}^{-1}(y)) \widehat{\otimes}_{\eta^{nr}} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right)$$

Théorème 5.10.2. — *Plaçons nous dans le cadre du théorème précédent lorsque $X_1 = X_2 = X$, $Y_1 = Y_2 = Y$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$, $V_1 = V_2 = V$ et $U_1 = U_2 = U$. Il y a donc un diagramme au-dessus de η :*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "{(c_1, c_2)}"] \arrow[d, "f'"'] & X \times X \arrow[d, "f \times f"] \\ D_\eta \arrow[r, "{(d_{1\eta}, d_{2\eta})}"] & Y_\eta \times Y_\eta \end{tikzcd}$$

Supposons de plus que $d_{2\overline{s}}$ est fini. Il existe alors un entier N ne dépendant que du degré de $d_{2\overline{s}}$ tel que $\forall\, u \in \operatorname{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}), \forall\, \tau \in W_\eta$ tel que $v(\tau) \geqslant N$

$$\operatorname{tr}\left(u \times \tau; R\Gamma(X_{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}})\right) = \sum_{\substack{y \in D_{\overline{s}}(\overline{k}) \\ \operatorname{Fr}^{v(\tau)}(d_1(y)) = d_2(y)}} \operatorname{tr}\left(u \times \tau; R\Gamma\left(f^{\text{an}-1}(\operatorname{sp}^{-1}(d_2(y))) \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right)\right)$$

et

$$\operatorname{tr}\left(u \times \tau; R\Gamma(U \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}^{\text{an}})\right) = \sum_{\substack{y \in D_{\overline{s}}(\overline{k}) \\ d_2(y) \in V \\ \operatorname{Fr}^{v(\tau)}(d_1(y)) = d_2(y)}} \operatorname{tr}\left(u \times \tau; R\Gamma\left(f^{\text{an}-1}(\operatorname{sp}^{-1}(d_2(y))) \widehat{\otimes} \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right)\right)$$

où l'action de $u \times \tau$ dans le membre de droite est le composé des morphismes

$$R\Gamma(f^{\mathrm{an}-1}(\mathrm{sp}^{-1}(\underbrace{\mathrm{Fr}^{v(\tau)}\, d_1(y)}_{d_2(y)})) \widehat{\otimes}\, \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\tau^*} R\Gamma\left(f^{\mathrm{an}-1}(\mathrm{sp}^{-1}(d_1(y))) \widehat{\otimes}\, \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right)$$

$$\xrightarrow{c_1^*} R\Gamma\left(f'^{\mathrm{an}-1}(\mathrm{sp}^{-1}(y)) \widehat{\otimes}\, \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right) \xrightarrow{c_{2*}} R\Gamma\left(f^{\mathrm{an}-1}(\mathrm{sp}^{-1}(d_2(y))) \widehat{\otimes}\, \widehat{\overline{\eta}}, \overline{\mathcal{F}}\right)$$

Démonstration. — Les cycles évanescents $\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}}(f_*\mathcal{F})$ sont munis d'une structure de faisceau de Weil et donc d'une correspondance de Frobenius associée à τ :

$$\mathrm{Fr}^{v(\tau)*}\, \mathrm{R}\Psi(f_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \tau^*\mathrm{R}\Psi(f_*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{R}\Psi(f_*\mathcal{F})$$

Cette correspondance commute aux correspondances cohomologiques spécialisées puisque ces dernières sont définies sur s. On peut donc appliquer le théorème de Fujiwara (5.2.1) à la correspondance cohomologique spécialisée composée avec la correspondance de Frobenius ci-dessus associée à τ.

Plus précisément, dans le premier cas on applique Fujiwara à tout X_s. Dans le second cas, d'après le théorème précédent, la trace sur la cohomologie de U est égale à celle sur la cohomologie des cycles évanescents sur V, on applique donc le théorème de Fujiwara à V.

La fibre des cycles évanescents en un point fixe s'identifie à la cohomologie du tube au-dessus de ce point fermé. Le calcul des termes locaux naïfs s'effectue alors en utilisant les deux fonctorialités de l'isomorphisme de comparaison de Berkovich 5.4.2 et 5.4.4 ainsi que la compatibilité de cet isomorphisme à l'action de Galois. □

5.11. Modèles des variétés de Shimura et des espaces de Rapoport-Zink en niveau parahorique

Nous avons introduit dans le premier chapitre des modèles entiers de nos espaces en niveau compact hyperspécial. Nous aurons néanmoins besoin, pour des raisons techniques liées à la théorie des types, des modèles définis dans [**68**] en niveau parahorique en p. Ces modèles ne nous servirons que comme intermédiaires de démonstration. Nous ne rappellerons donc pas leur définition. Nous reprenons les notations globales de la première partie. $\mathcal{D}$ désignera donc une donnée de type P.E.L. non ramifiée.

5.11.1. Sous-groupes parahoriques et leurs normalisateurs. — Soit $\mathcal{L}$ une multichaîne polarisée de réseaux dans $V_{\mathbb{Q}_p}$ ([**68**] définition 3.14).

Notons

$$K_{\mathcal{L}} = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid \forall\, \Lambda \in \mathcal{L}\; g \cdot \Lambda = \Lambda\}$$

le sous-groupe parahorique associé. Le normalisateur dans $G(\mathbb{Q}_p)$ de $K_{\mathcal{L}}$ est alors défini par

$$N_{\mathcal{L}} = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid \forall\, \Lambda \in \mathcal{L}\; g \cdot \Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Si $\mathcal{L} = (\Lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est uniforme au sens où $i \mapsto [\Lambda_i : \Lambda_{i+1}]$ est constant alors

$$N_{\mathcal{L}} = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid \exists j \in \mathbb{Z}\ g\cdot\Lambda_i = \Lambda_{i+j}\}$$

Nous n'aurons besoin dans la suite que de ce cas-là et nous supposerons donc que toutes nos multichaînes sont uniformes.

Exemple 5.11.1. — Plaçons nous dans le cas (A) lorsque p est décomposé dans $\mathcal{K}$. Par équivalence de Morita, la donnée d'une telle multichaîne $\mathcal{L}$ est alors équivalente à la donnée pour tout i dans I d'une multichaîne $\mathcal{L}_i$ dans $F_{v_i}^n$. Pour un i fixé la donnée d'une telle multichaîne est alors équivalente (modulo l'action de $\mathrm{GL}_n(F_{v_i})$) à la donnée d'un entier d divisant n. Une chaîne associée à d est alors de la forme

$$\cdots \subset \underbrace{\langle e_1,\dots,e_n\rangle}_{\Lambda_0} \subset \cdots \subset \underbrace{\langle \varpi_{F_{v_i}}^{-1}e_1,\dots,\varpi_{F_{v_i}}^{-1}e_{kd},e_{kd+1},\dots,e_n\rangle}_{\Lambda_k} \subset \cdots \subset \varpi_{F_{v_i}}^{-1}\Lambda_0 \subset \dots$$

et le groupe $K_{\mathcal{L}}$ se décrit ainsi par blocs de taille $d\times d$:

$$K_{\mathcal{L}} = \left\{\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{F_{v_i}}) & \dots & M_d(\mathcal{O}_{F_{v_i}}) \\ \vdots & \ddots & \\ \varpi_{F_{v_i}} M_d(\mathcal{O}_{F_{v_i}}) & \dots & \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{F_{v_i}}) \end{pmatrix}\right\}$$

quant à $N_{\mathcal{L}}$, c'est le groupe engendré par $K_{\mathcal{L}}$ et l'élément suivant

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \varpi_{F_{v_i}}^{-1} I_d \\ I_d & \ddots & & 0 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & I_d & 0 \end{pmatrix}$$

5.11.2. Variétés de Shimura. — Dans [**68**], chapitre 6, il est défini des modèles entiers des variétés de Shimura de type P.E.L. que nous considérons sur E_ν en niveau parahorique, les $\mathrm{Sh}_{K_{\mathcal{L}}K^p}$. Nous noterons $S_{K_{\mathcal{L}}K^p}$ ces modèles entiers. Lorsque K^p varie ils forment une tour de variétés quasiprojectives sur $\boldsymbol{Spec}(\mathcal{O}_{E_\nu})$ munie d'une action de $G(\mathbf{A}_f^p)$.

Exemple 5.11.2. — Soit Λ_0 un réseau autodual dans $V_{\mathbb{Q}_p}$ de stabilisateur C_0 dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Supposons que $\mathcal{L}$ soit la plus petite multichaîne contenant Λ_0. Alors, $K_{\mathcal{L}} = C_0$ est compact hyperspécial et $S_{K_{\mathcal{L}}K^p}$ est le modèle entier défini précédemment en niveau hyperspécial.

Si $\mathcal{L}$ contient un réseau autodual Λ_0 alors, $K_{\mathcal{L}} \subset C_0$ et il y a un morphisme de tours :

$$(S_{K_{\mathcal{L}}K^p})_{K^p} \longrightarrow (S_{C_0K^p})_{K^p}$$

étendant celui défini sur la fibre générique.

Remarque 5.11.3. — En général ce morphisme n'est pas fini !

On ne supposera pas que $\mathcal{L}$ contient un réseau autodual, ce qui nous permettra, par exemple, d'inclure parmi les $K_{\mathcal{L}}$ des sous-groupes compacts maximaux des groupes de similitudes unitaires non hyperspéciaux.

5.11.3. Espaces de Rapoport-Zink. — A $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ est associé un espace de Rapoport-Zink

$$\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{E b_\nu})$$

muni d'une action de J_b ([**68**] définition 3.21). Comme précédemment (2.3.7), cet espace se scinde en produit d'espaces de Rapoport-Zink associés à des données simples.

Si $K_p \subset K_{\mathcal{L}}$, il y a une tour d'espaces rigides $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}} = \breve{\mathcal{M}}_{K_{\mathcal{L}}}$ qui coïncide avec celle définie auparavant lorsque $K_p \subset K_{\mathcal{L}} \cap C_0$.

5.11.4. Extension de l'action du normalisateur d'un parahorique aux modèles entiers

5.11.4.1. Variétés de Shimura. — L'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur la tour $(\mathrm{Sh}_K)_K$ permet de définir un morphisme de groupes trivial sur $K_{\mathcal{L}}$

$$N_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Sh}_{K_{\mathcal{L}}K^p})$$

Le but de cette section est d'étendre ces automorphismes aux modèles entiers ci-dessus, c'est-à-dire définir un morphisme

$$N_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(S_{K_{\mathcal{L}}K^p})$$

redonnant celui d'avant sur la fibre générique et commutant à l'action de $G(\mathbf{A}_f^p)$.

Soit donc $g \in N_{\mathcal{L}}$. Soit T un schéma sur $\boldsymbol{Spec}(\mathcal{O}_{E_\nu})$. Un élément de $S_{K_{\mathcal{L}}K^p}(T)$ est donné par un triplet $(A, \lambda, \overline{\eta^p})$ où A est une $\mathcal{L}$-multichaîne de variétés abéliennes sur T, λ une polarisation de cette multichaîne et η^p une structure de niveau hors p, le tout vérifiant certaines conditions ([**68**] chapitre 6).

Posons $g \cdot (A, \lambda, \overline{\eta^p}) = (A', \lambda', \overline{\eta^p}) \in S_{K_{\mathcal{L}}K^p}(T)$ où avec les notations du chapitre 6 de [**68**] :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{L} \quad A'_\Lambda = A_{g\cdot\Lambda} \text{ muni de son action de } \mathcal{O}_B$$
$$\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L} \ \ \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \quad \rho'_{\Lambda_1,\Lambda_2} = \rho_{g\cdot\Lambda_1, g\cdot\Lambda_2}$$

Posons pour tout a dans $B^\times$ normalisant l'ordre $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$

$$\theta'_a = \theta_a$$

Définissons λ'. On doit définir pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}$ une quasi-isogénie

$$\lambda'_\Lambda : A'_\Lambda \longrightarrow (A'_{\Lambda^\vee})^\vee$$

telle que

$$(\rho'_{\Lambda^\vee,\Lambda})^\vee \circ \lambda'_\Lambda : A'_\Lambda \longrightarrow (A'_\Lambda)^\vee$$

soit une polarisation de A'_Λ. Posons λ'_Λ comme étant égal à la quasi-isogénie composée

$$A'_\Lambda = A_{g\cdot\Lambda} \xrightarrow{\lambda_{g\cdot\Lambda}} \left(A_{(g\cdot\Lambda)^\vee}\right)^\vee \xrightarrow{\left(\rho_{(g\cdot\Lambda)^\vee, g\cdot\Lambda^\vee}\right)^\vee} \left(A_{g\cdot\Lambda^\vee}\right)^\vee = \left(A'_{\Lambda^\vee}\right)^\vee$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left(\rho'_{\Lambda^\vee,\Lambda}\right)^\vee \circ \lambda'_\Lambda &= \left(\rho_{g\cdot\Lambda^\vee, g\cdot\Lambda}\right)^\vee \circ \left(\rho_{(g\cdot\Lambda)^\vee, g\cdot\Lambda^\vee}\right)^\vee \circ \lambda_{g\cdot\Lambda}\\ &= \Big(\underbrace{\rho_{(g\cdot\Lambda)^\vee, g\cdot\Lambda^\vee} \circ \rho_{g\cdot\Lambda^\vee, g\cdot\Lambda}}_{\rho_{(g\cdot\Lambda)^\vee, g\cdot\Lambda}}\Big)^\vee \circ \lambda_{g\cdot\Lambda}\end{aligned}$$

qui est donc bien une polarisation. Il reste à vérifier que $\lambda' : A \to A'$ est bien un morphisme de multichaînes, mais cela ne pose pas de problème.

Le morphisme ainsi défini vérifie bien les propriétés voulues.

5.11.4.2. Espaces de Rapoport-Zink. — Posons $\breve{\mathcal{M}}_\mathcal{L} = \breve{\mathcal{M}}_\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$. On définit comme ci-dessus pour les variétés de Shimura un morphisme

$$N_\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\breve{\mathcal{M}}_\mathcal{L})$$

trivial sur $K_\mathcal{L}$, commutant à l'action de J_b et à la donnée de descente de Rapoport-Zink, et étendant le morphisme défini sur la fibre générique.

Sa définition est similaire à celle ci-dessus en remplaçant variétés abéliennes par groupes p-divisibles.

5.11.5. Uniformisation. — Soit ϕ une classe d'isogénie comme dans la première partie. Comme dans la première partie, il y a des isomorphismes de tours lorsque K^p varie ([**68**] théorème 6.23)

$$I^\phi(\mathbb{Q})\backslash\left(\breve{\mathcal{M}}_\mathcal{L} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) \xrightarrow{\sim} (S_{K_\mathcal{L}K^p} \otimes \mathcal{O}_{\breve{E}_\nu})^\wedge_{/\overline{S}(\phi)}$$

compatibles à la donnée de descente de Rapoport-Zink et commutant à l'action de $N_\mathcal{L}$ définie ci-dessus sur les deux membres.

5.12. La formule des traces pour la cohomologie des strates d'une variété de Shimura de type P.E.L.

Soit $\mathcal{D}$ une donnée globale de type P.E.L. non ramifiée en p. Fixons une multichaîne polarisée $\mathcal{L}$ dans $V_{\mathbb{Q}_p}$. Soient $K_\mathcal{L}$ le groupe parahorique associé et $N_\mathcal{L}$ son normalisateur.

5.12.1. Action de Galois sur les domaines analytiques de $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$. — Soit $K_p \subset K_\mathcal{L}$ un sous-groupe compact ouvert. Rappelons que les espaces analytiques $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ sont définis sur $\breve{E} = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$. Soit

$$\alpha : \breve{\mathcal{M}}_{K_p} \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}_{K_p}^{(\sigma)}$$

la donnée de descente de Rapoport-Zink. Soit $U \subset \breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ un domaine analytique. L'image $\alpha(U) \subset \breve{\mathcal{M}}_{K_p}^{(\sigma)}$ est un domaine analytique et si $pr : \breve{\mathcal{M}}_{K_p}^{(\sigma)} \to \breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ désigne la projection, $pr(\alpha(U))$ est un domaine analytique dans $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ que nous noterons $U^{(\alpha)}$. Il y a alors un morphisme (qui n'est pas défini au-dessus de $\breve{E}$)

$$U \longrightarrow U^{(\alpha)}$$

D'où un morphisme $\forall\, \tau \in W_E$ tel que $v(\tau) \geqslant 0$

$$H^q\left(U^{(\alpha^{v(\tau)})}\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell\right) \xrightarrow{\ \tau^*\ } H^q\left(U\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell\right)$$

(lorsque la cohomologie ℓ-adique de U est bien définie ce qui est par exemple le cas si U est le tube au-dessus d'un sous-schéma localement fermé quasicompact de $\overline{\mathcal{M}}$, grâce à 3.1.4 et 5.9.4).

5.12.2. Tubes et leur cohomologie. — $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k})$ est muni d'une action d'un Frobenius grâce à α. Lorsque $K_{\mathcal{L}} = C_0$ cette action coïncide avec celle décrite dans [**61**] lorsqu'on voit $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k})$ comme sous-ensemble de l'immeuble de G sur L. Nous noterons

$$\Phi : \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k}) \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k})$$

ce Frobenius. Ainsi, avec les notations précédentes, si sp désigne le morphisme de spécialisation associé à $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}$

$$\mathrm{sp}^{-1}(\Phi y) = \mathrm{sp}^{-1}(y)^{(\alpha)}$$

Les morphismes de changement de niveau commutant à la donnée de descente on en déduit que

$$\Pi^{-1}_{K_p,K_{\mathcal{L}}}\left(\mathrm{sp}^{-1}(\Phi\cdot y)\right) = \Pi^{-1}_{K_p,K_{\mathcal{L}}}\left(\mathrm{sp}^{-1}(y)\right)^{(\alpha)}$$

Définition 5.12.1. — $\forall\, y \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k})\ \forall\, K_p \subset K_{\mathcal{L}}$,

$$\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(y) = \Pi^{-1}_{K_p,K_{\mathcal{L}}}\left(\mathrm{sp}^{-1}(y)\right)$$

un ouvert analytique de bord vide dans $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ (qui est un revêtement étale fini du disque ouvert $\breve{\mathcal{M}}_{C_0}(y)$ lorsque $K_{\mathcal{L}} \subset C_0$).

On définit alors $H^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(y)\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ comme le dual de Poincaré de la cohomologie à support compact. C'est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action lisse de $\mathrm{Stab}_{J_b}(y) \times I_{E_\nu}$ ($\mathrm{Stab}_{J_b}(y)$ est un sous groupe compact ouvert de J_b), $K_{\mathcal{L}}$ agissant quant à lui sur la limite lorsque K_p varie dans $K_{\mathcal{L}}$.

Soit donc maintenant $f_p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p))$ de la forme $f_p' * \delta_z$ où $\mathrm{supp}(f_p') \subset K_{\mathcal{L}}$ et $z \in N_{\mathcal{L}}$, $\tau \in W_{E_\nu}$ vérifiant $v(\tau) \geqslant 0$ et $\gamma \in J_b$. Supposons que $y \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k})$ vérifie

$$z\gamma\Phi^{v(\tau)} \cdot y = y$$

Il y a alors des morphismes bien défini pour K_p variant

$$H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(y), \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\ z^* \circ \gamma^* \circ \tau^*\ } H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(y), \mathbb{Q}_\ell)$$

qui composés avec l'action de f'_p permettent de définir

$$\operatorname{tr}\left(f_p \times \gamma \times \tau ; [H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}(y), \mathbb{Q}_\ell)]\right) \in \mathbb{Q}_\ell$$

5.12.3. Le théorème

Définition 5.12.2. — Soit $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Pour $K = K_p K^p$ avec $K_p \subset C_0$, notons $\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{rig}, \geqslant b} \subset \mathrm{Sh}_K^{\mathrm{rig}}$ le tube au sens des espaces adiques au-dessus du fermé

$$\bigcup_{\substack{b' \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}) \\ \mathrm{Newton}(b') \geqslant \mathrm{Newton}(b)}} \overline{S}(b')$$

lorsque $K_p = C_0$, et son image réciproque par les morphismes de changement de niveau sinon.

Définition 5.12.3. — Nous noterons

$$[H^\bullet(\mathrm{Sh}^{\mathrm{rig}, \geqslant b}, \mathcal{L}_\rho)] = \sum_i (-1)^i [\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{rig}, \geqslant b}, \mathcal{L}_\rho)] \in \mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$$

qui est bien défini d'après la proposition 5.9.4 et coïncide avec la même définition en remplaçant adique par analytique lorsque S_K est propre ou bien lorsque b est la classe basique.

Il résulte alors de la proposition 5.9.4 que

Proposition 5.12.4. — *Si $b = b_0$ la classe basique, il y a un isomorphisme canonique*

$$H^\bullet(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{rig}, \geqslant b_0}, \mathcal{L}_\rho) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(b_0), \mathcal{L}_\rho)$$

où le membre de gauche est celui définit ci-dessus et celui de droite celui défini formellement dans la seconde partie comme dual de Poincaré algébrique de la cohomologie à support compact du tube au-dessus du fermé propre $\overline{S}(b_0)$.

Ces espaces de cohomologie coïncident pour b quelconque dès que les modèles entiers des variétés de Shimura sont propres.

Théorème 5.12.5. — *Supposons les variétés de Shimura S_K propres sur $\mathcal{O}_{E_\nu}$. Soit $b \in B(G, \mu)$, $f_p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p))$ de la forme $f'_p * \delta_z$ où $\mathrm{supp}(f'_p) \subset K_{\mathcal{L}}$ et $z \in N_{\mathcal{L}}$. Soit $\widetilde{K} \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ un compact ouvert. Il existe alors un entier positif N tel que*

$$\forall f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p)) \text{ telle que } \mathrm{supp}(f^p) \subset \widetilde{K},\ \forall \tau \in W_E \text{ tel que } v(\tau) \geqslant N$$

$$\operatorname{tr}\left(f_p \otimes f^p \times \tau ; [H^\bullet(\mathrm{Sh}^{\mathrm{rig}, \geqslant b}, \mathcal{L}_\rho)]\right)$$

$$= \sum_{\substack{\phi \\ \mathrm{Newt}(b(\phi)) \geqslant \mathrm{Newt}(b)}} \ \sum_{\{\gamma\} \in \{I^\phi(\mathbb{Q})\}} \ \sum_{[y] \in I_\gamma^\phi(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{Fix}(z \times \gamma \times \Phi^{v(\tau)} ; \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k}))}$$

$$\mathrm{vol}\left(I_\gamma^\phi(\mathbb{Q})_y \backslash I_\gamma^\phi(\mathbf{A}_f^p)\right) \ \operatorname{tr} \rho(\gamma) \ \operatorname{tr}\left(f_p \times \gamma \times \tau \ ; \ [H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}(y), \mathbb{Q}_\ell)]\right) \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

où $I_\gamma^\phi(\mathbb{Q})_y = \mathrm{Stab}_{I_\gamma^\phi(\mathbb{Q})}(y)$.

Démonstration. — Nous renvoyons à la section 6.1 pour des rappels sur le lien entre action des correspondances de Hecke sur la cohomologie et action des fonctions dans l'algèbre de Hecke. Toute fonction $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f))$ telle que $\mathrm{supp}(f^p) \subset \widetilde{K}$ se décompose en combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles de la forme $K^p g^p K^p$ où K^p est un sous-groupe compact ouvert et où $K^p g^p K^p \subset \widetilde{K}$. Quitte à raffiner une telle décomposition on peut de plus supposer les K^p suffisamment petit. On peut donc supposer $f^p = \frac{1}{\mathrm{vol}(K^p)} \mathbf{1}_{K^p g^p K^p}$ avec K^p suffisamment petit (on suppose fixé une fois pour toutes des mesures de Haar sur $G(\mathbf{A}_f^p)$ et $G(\mathbb{Q}_p)$) On peut également supposer que $f'_p = \frac{1}{\mathrm{vol}(K_p)} \mathbf{1}_{K_p g_p K_p}$ où $K_p \subset K_{\mathcal{L}}$ et $g_p \in K_{\mathcal{L}}$.

Considérons le diagramme suivant de correspondances de Hecke :

$$\begin{tikzcd}
 & Sh_{(g_pK_pg_p^{-1}\cap K_p)\,(g^pK^p(g^p)^{-1}\cap K^p)} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Sh}_{K_pK^p} \arrow[d] & (S_{K_{\mathcal{L}}\,(g^pK^p(g^p)^{-1}\cap K^p)})_\eta \arrow[dl] \arrow[dr] & \mathrm{Sh}_{K_pK^p} \arrow[d] \\
(S_{K_{\mathcal{L}}K^p})_\eta & & (S_{K_{\mathcal{L}}K^p})_\eta
\end{tikzcd}$$

où la correspondance du bas est définie sur $\mathcal{O}_{E_\nu}$. Tordons ces correspondances par l'isomorphisme associé à z. Et appliquons donc le théorème 5.10.2 à ce diagramme.

Mais pour obtenir l'énoncé annoncé il faut tout d'abord remarquer la chose suivante : lorsque K^p diminue et g^p est tel que $K^p g^p K^p \subset \widetilde{K}$ le degré des correspondances de Hecke associées $[K^p : K^p \cap g^p K^p g^{p-1}]$ ne reste pas borné. On ne peut donc pas appliquer directement le théorème de Fujiwara si l'on veut obtenir la borne uniforme $v(\tau) \geqslant N$ annoncée lorsque $\mathrm{supp}(f^p) \subset \widetilde{K}$. Néanmoins, fixons un sous-groupe compact ouvert suffisamment petit K' tel que $K'.\widetilde{K}.K' = \widetilde{K}$ et restreignons nous aux K^p contenus dans K'. Pour un tel K^p et g^p tel que $K^p g^p K^p \subset \widetilde{K}$, il y a un morphisme de correspondances de Hecke sur k

$$\begin{tikzcd}
\overline{S}_{K^p\cap g^pK^pg^{p-1}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{S}_{K^p} \times \overline{S}_{K^p} \arrow[d] \\
\overline{S}_{K'\cap g^pK'g^{p-1}} \arrow[r] & \overline{S}_{K'} \times \overline{S}_{K'}
\end{tikzcd}$$

Et on peut appliquer le lemme 5.1.5 à ces correspondances étendues à $\overline{k}$ puis tordues par Frobenius. Maintenant, le degré de la correspondance du bas est donné par $[K' : K' \cap g^p K' g^{p-1}]$. Or, $K' \backslash \widetilde{K} / K'$ est fini et $g^p \in \widetilde{K}$. On en déduit que ce degré reste borné. Et on peut donc appliquer le théorème de Fujiwara sous la forme du théorème 5.10.2 uniformément lorsque $\mathrm{supp}(f^p)$ reste dans $\widetilde{K}$.

Pour tout $b' \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$, $\overline{S}(b')(\overline{k})$ est une union disjointe selon les classes d'isogénie ϕ de sous-ensembles $\widetilde{S}(\phi)(\overline{k})$ stables par les correspondances de Hecke. Les points fixes de $z \times \mathrm{Fr}^{v(\tau)} \times \mathrm{Hecke}(K^p g^p K^p)$ sont donc une union disjointe de points fixes associés aux différentes classes ϕ, d'où la première somme dans la formule annoncée.

De plus,

$$\widetilde{S}(\phi)(\overline{k}) \simeq I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k}) \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)$$

où Fr agit via $[\Phi \times \mathrm{Id}]$, les correspondances de Hecke de façon usuelle et z via $[z \times \mathrm{Id}]$. Appliquant le lemme 5.3 de [**61**] on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Fix}\left(\mathrm{Fr}^{v(\tau)} \times K^p g^p K^p \times z; \widetilde{S}(\phi)(\overline{k})\right) \\
&\quad = \coprod_{\{\gamma\}\in\{I^\phi(\mathbb{Q})\}} I^\phi_\gamma(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{Fix}\left(\Phi^{v(\tau)} \times z \times \gamma; \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k})\right) \times \mathrm{Fix}\left(\gamma \times K^p g^p K^p\right)
\end{aligned}$$

Fibrons cet ensemble de points fixes par les éléments de

$$I^\phi_\gamma(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{Fix}\left(\Phi^{v(\tau)} \times z \times \gamma; \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k})\right)$$

Le cardinal de la fibre associée à la classe de y est

$$\mathrm{vol}\left(I^\phi_\gamma(\mathbb{Q})_y\backslash I^\phi_\gamma(\mathbf{A}_f^p)\right) \ \ \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

De plus, en tout point β de la fibre en $[y]$,

$$\widehat{\widetilde{S}}_{/\beta} \simeq \widehat{\breve{\mathcal{M}}}_{\mathcal{L}/y}$$

Et les revêtements rigides associés sont donnés par l'uniformisation rigide des variétés de Shimura. On en déduit que le terme local associé dans le théorème 5.10.2 en un tel point β est

$$\mathrm{tr}\left(f_p \times \gamma \times \tau \ ; \ [H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}(y), \mathbb{Q}_\ell)]\right) \ \mathrm{tr}\,\rho(\gamma)$$

où le terme $\mathrm{tr}\,\rho(\gamma)$ provient du fait que $\mathcal{L}_\rho^{\mathrm{an}}$ restreint aux tubes ci-dessus est le faisceau constant $\underline{V_\rho}$. □

Remarque 5.12.6. — Dans la formule précédente, lorsque $\widetilde{K}$,$v(\tau)$ et z sont fixés, indépendamment de f^p le nombre de classes d'isogénie ϕ et de classes de conjugaison $\{\gamma\}$ contribuant de façon non nulle est fini. Pour le voir, posons $f^p = \mathbf{1}_{\widetilde{K}}$ et écrivons $\widetilde{K}$ comme une union disjointe d'un nombre fini de classes doubles

$$\widetilde{K} = \coprod_{a\in A} K^p g_a K^p$$

pour un sous groupe compact ouvert K^p de $G(\mathbf{A}_f^p)$. Appliquons la méthode de la démonstration à chacune des correspondances associée à ces doubles classes pour compter le nombre de points fixes des correspondances associées (pas la trace des correspondances cohomologiques). On obtient une formule comme dans la démonstration du théorème, sans les traces des correspondances cohomologiques. La finitude du nombre de points fixes implique alors qu'il existe un nombre fini de $(\phi, \{\gamma\})$ tels que

$$\mathrm{Fix}\left(\Phi^{v(\tau)} \times z \times \gamma; \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\overline{k})\right) \neq \varnothing$$

et $\mathcal{O}_\gamma(1_{\widetilde{K}}) \neq 0$. Ce dernier point étant équivalent à dire que la classe de $G(\mathbf{A}_f^p)$-conjugaison de γ rencontre le compact $\widetilde{K}$. L'assertion s'en déduit.

CHAPITRE 6
FORMULE DE LEFSCHETZ SUR LA FIBRE GÉNÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous redémontrons un cas particulier très simple de la formule d'Arthur pour la trace des correspondances Hecke sur la cohomologie d'intersection des variétés de Shimura, telle qu'elle est réinterprétée topologiquement dans [**26**]. En faisant une hypothèse simple (la correspondance de Hecke est à support dans les éléments réguliers en une place), on s'aperçoit que tous les points fixes sont des points C.M.. Si l'on se restreint aux variétés de Shimura de type P.E.L. considérées dans la première section, nous montrons (6.3.2) que si un tel point fixe se spécialise sur la strate indexée par un $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ alors la classe de conjugaison γ dans $G(\mathbb{Q})$ associée à ce point fixe est conjuguée dans $G(\mathbb{Q}_p)$ à un élément du centralisateur du morphisme des pentes (un sous-groupe de Levi de $G(\mathbb{Q}_p)$). En particulier, si γ ne se spécialise pas sur la strate basique, γ n'est pas elliptique. Bien que nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite nous avons inclus le théorème 6.3.2 car il fournit une motivation pour l'énoncé « la cohomologie des strates non basiques est induite en p » (théorème 7.2.1). En effet, si l'on disposait d'une formule des traces rigides pour la trace d'un opérateur de Hecke sur la cohomologie à support compact du tube rigide sur la strate basique faisant intervenir une somme sur des points fixes naïfs + des termes au bord, cela montrerait que la distribution somme sur les points fixes naïfs associée aux strates non basiques est à support dans les éléments non elliptiques.

6.1. Généralités sur les points fixes sur la fibre générique

Soit $(\mathrm{Sh}_K)_{K\subset G(\mathbf{A}_f)}$ une variété de Shimura associée à une donnée de Shimura (G, X) (nous supposons que (G, X) vérifie la condition (2.1.2*) de [**60**] afin de ne pas avoir de problème avec le centre de G, condition vérifiée par les variétés de type P.E.L. étudiées précédemment). La variété algébrique Sh_K est définie sur le corps reflex associé E et les correspondances de Hecke également. La correspondance associée à KgK où $g \in G(\mathbf{A}_f)$ et K est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbf{A}_f)$ est :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Sh}_{gKg^{-1}\cap K} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\Pi"'] & \mathrm{Sh}_{K\cap g^{-1}Kg} \arrow[dr, "\Pi"] & \\ \mathrm{Sh}_K & & & \mathrm{Sh}_K \end{tikzcd}$$

où avec les notations de la section 5.1 $c_1 = \Pi \circ g$ et $c_2 = \Pi$.

Lemme 6.1.1. — *Toute fonction $f \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f))$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{KgK}$ telles que la correspondance de Hecke associée soit un cycle* *dans* $\mathrm{Sh}_K \times \mathrm{Sh}_K$:

$$\mathrm{Sh}_{K\cap gKg^{-1}} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_K \times \mathrm{Sh}_K$$

Démonstration. — Si K_1, K_2 sont deux sous-groupes compacts ouverts de $G(\mathbf{A}_f)$ contenus dans un même sous-groupe compact ouvert suffisamment petit alors

$$\mathrm{Sh}_{K_1\cap K_2} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{K_1} \times \mathrm{Sh}_{K_2}$$

Il suffit donc de montrer que f est combinaison linéaire de fonctions $\mathbf{1}_{KgK}$ où K et gKg^{-1} sont suffisamment petits. Or, f est combinaison linéaire de fonctions $\mathbf{1}_{KgK}$ avec K aussi petit que l'on veut et $KgK \subset \mathrm{supp}(f)$ ($\Rightarrow g \in \mathrm{supp}(f)$). Or, $\mathrm{supp}(f)$ étant compact lorsque K « tend » vers $\{1\}$, uniformément pour $g \in \mathrm{supp}(f)$, gKg^{-1} « tend » vers le groupe $\{1\}$. □

Étant donné que nous nous intéressons à la trace d'une telle fonction f dans la cohomologie de variétés de Shimura, ce lemme justifie que nous ne nous restreignions qu'à de telles correspondances de Hecke.

Hypothèse 6.1.2. — Nous supposerons dans ce chapitre que les correspondances de Hecke sont toutes définies par des cycles.

De telles correspondances sont donc définies par un cycle lisse de $\mathrm{Sh}_K \times \mathrm{Sh}_K$.

Si de plus ρ est fixé comme dans 1.1.5, la double classe KgK définit une correspondance cohomologique sur $\mathcal{L}_\rho$ à support dans ce cycle :

$$c_2^! \mathcal{L}_\rho = g^*\Pi^*\mathcal{L}_\rho = g^*\mathcal{L}_\rho \longrightarrow \mathcal{L}_\rho = c_1^*\mathcal{L}_\rho$$

Une fois fixée une mesure de Haar sur $G(\mathbf{A}_f)$ cela définit des morphismes de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-algèbres compatibles pour K variant :

$$\mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f), K) \longrightarrow \mathrm{Coh}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}_\rho)$$

où $\mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f), K) = \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbf{A}_f)/\!\!/K)$ désigne l'algèbre de Hecke et où $\dfrac{1}{\mathrm{vol}(K)}\mathbf{1}_{KgK}$ s'envoie sur la correspondance cohomologique précédente. Alors si

$$\begin{aligned}\pi : \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f), K) &\longrightarrow \mathrm{End}(H^\bullet(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\rho))\\ f &\longmapsto \int_{G(\mathbf{A}_f)} f(g)\rho(g)dg\end{aligned}$$

où ρ désigne l'action de $G(\mathbf{A}_f)$ sur la cohomologie, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f), K) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{Coh}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}_\rho) \arrow[dl] \\ & \mathrm{End}(H^\bullet(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\rho)) & \end{tikzcd}$$

où l'application verticale de droite est définie par l'action d'une correspondance cohomologique sur la cohomologie (5.1).

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la sous-variété des points fixes de cette correspondance :

$$\mathrm{Fix}(KgK) = (\Delta \cap \mathrm{Sh}_{K\cap gKg^{-1}})_{\mathrm{red}}$$

où Δ désigne la diagonale de Sh_K. Pour cela, nous allons décrire ses points complexes :

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \Delta(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Sh}_{K\cap gKg^{-1}}(\mathbb{C}) = \{x \in \mathrm{Sh}_{K\cap gKg^{-1}}(\mathbb{C}) \mid \Pi(x) = \Pi(g\cdot x)\}$$

Utilisons l'uniformisation complexe (*cf.* 1.1.4 dans le cas des variétés de type P.E.L. considérées précédemment)

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbf{A}_f)/K)$$

Dans laquelle $G(\mathbb{Q})$ opère librement sur $X \times G(\mathbf{A}_f)/K$ (car K est suffisamment petit et la condition 2.6.2* de [**60**] est supposée vérifiée). On utilisera également le fait que la projection

$$p : X \times G(\mathbf{A}_f)/K \longrightarrow G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbf{A}_f)/K)$$

est un isomorphisme analytique local : tout $(x, yK) \in X \times G(\mathbf{A}_f)/K$ est tel qu'il existe Ω voisinage de x dans X tel que $p : \Omega \times \{yK\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{yK\})$ soit un isomorphisme analytique.

La correspondance de Hecke associée à KgK s'écrit alors avec ces notations :

$$\begin{tikzcd}
 & {[x, y(gKg^{-1} \cap K)]} \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
{[x, yK]} & & {[x, ygK]}
\end{tikzcd}$$

et

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \{[x, y(gKg^{-1} \cap K)] \mid [x, yK] = [x, ygK]\}$$

que l'on peut voir, par hypothèse, comme un sous-ensemble de $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \{[x, yK)] \mid [x, yK] = [x, ygK]\}$$

Or,

$$\begin{aligned}
[x, yK] = [x, ygK] &\iff \exists \gamma \in G(\mathbb{Q}) \;\; \gamma\cdot x = x \text{ et } \gamma yK = ygK \\
&\iff \exists \gamma \in G(\mathbb{Q}) \cap ygKy^{-1} \;\; \gamma \cdot x = x
\end{aligned}$$

x, yK étant fixés un tel γ est unique (action libre de $G(\mathbb{Q})$ sur $X \times G(\mathbf{A}_f)/K$) et est semi-simple compact dans $G(\mathbb{R})$ car $\gamma \in \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}(x)$. De plus, si $\gamma' \in G(\mathbb{Q})$, alors

$$\begin{cases} \gamma \cdot x = x \\ \gamma \cdot yK = ygK \end{cases} \iff \begin{cases} (\gamma'\gamma\gamma'^{-1})\gamma' \cdot x = \gamma' \cdot x \\ (\gamma'\gamma\gamma'^{-1})\gamma' yK = \gamma' ygK \end{cases}$$

Et donc $\gamma'\gamma\gamma'^{-1}$ est l'unique élément de $G(\mathbb{Q})$ vérifiant les égalités de droite.

On a donc démontré :

Lemme 6.1.3. — *Il y a une partition naturelle*

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \coprod_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}_{ss} \\ \gamma \text{ compact dans } G(\mathbb{R})}} \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$$

où $\{G(\mathbb{Q})\}_{ss}$ *désigne les classes de conjugaison semi-simples de* $G(\mathbb{Q})$ *et*

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}} = \{[x, yK] \mid \exists\widetilde{\gamma} \in \{\gamma\}\ \ \widetilde{\gamma}\cdot x = x \text{ et } \widetilde{\gamma}yK = ygK\}$$

Remarque 6.1.4. — On aurait également pu déduire cette décomposition du lemme 5.3 de [**61**] comme dans la démonstration de la formule des traces sur la fibre spéciale (théorème 5.12.5).

Lemme 6.1.5. — *Si la classe de conjugaison* $\{\gamma\}$ *est associée à un point fixe de* KgK *alors* $\{\gamma\}$ *est associé à tout point de la composante connexe de ce point dans* $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$. *On a donc une partition*

$$\pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})) = \coprod_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}_{ss} \\ \gamma \text{ compact dans } G(\mathbb{R})}} \pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}))_{\{\gamma\}}$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer que tout $[x, yK] \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ possède un voisinage U dans $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ tel que $U \cap \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ ce qui montrera que l'application $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) \ni [x, yK] \mapsto \{\gamma\}$ est localement constante donc constante sur chaque composante connexe.

Fixons $[x, yK]$ dans $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$ tel que $\gamma\cdot x = x$ et $\gamma yK = ygK$ où $\gamma \in G(\mathbb{Q})$.

Si Ω est un voisinage compact de x dans X,

$$\{g \in G(\mathbb{R}) \mid g\cdot\Omega\cap\Omega \neq \varnothing\}$$

est un compact de $G(\mathbb{R})$ (écrire X sous la forme $G(\mathbb{R})/K_\infty$). Si de plus Ω est petit la projection p induit un isomorphisme $\Omega\times yK \xrightarrow{\sim} p(\Omega\times\{yK\}) \subset \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ où $p(\Omega\times\{yK\})$ est un voisinage de $[x, yK]$ dans $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$.

Fixons un Ω vérifiant les deux conditions ci-dessus : Ω est compact et petit. Si $(x', yK) \in \Omega\times\{yK\}$ est tel que $[x', yK] = p(x', yK) \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$ alors soit $\gamma' \in G(\mathbb{Q})$ l'unique élément tel que

$$\begin{cases} \gamma'\cdot x' = x' \\ \gamma'\cdot yK = ygK \end{cases}$$

On a donc, $\gamma'\cdot\Omega\cap\Omega\neq\varnothing$ et $\gamma' \in ygKy^{-1}\cap G(\mathbb{Q})$.

Par discrétude de $G(\mathbb{Q})$ dans $G(\mathbf{A})$,

$$A_\Omega = \{\gamma'' \in G(\mathbb{Q}) \mid \gamma''\cdot\Omega\cap\Omega\neq\varnothing \text{ et } \gamma'' \in ygKy^{-1}\}$$

est fini. Or, lorsque Ω parcourt des ensembles vérifiant les conditions ci-dessus,

$$\bigcap_{\Omega} A_\Omega = \{\gamma\}$$

Et donc, quitte à rétrécir Ω on peut supposer qu'il contient un seul élément. On pose alors $U = p(\Omega \times yK)$. □

Proposition 6.1.6. — *Tout élément de $\pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}))_{\{\gamma\}}$ est une composante connexe d'une sous-variété de type Hodge associée à G_γ^0 où G_γ désigne le centralisateur de γ.*

Démonstration. — Soit $[x, yK] \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ où $\gamma \cdot x = x$ et $\gamma \cdot yK = ygK$. Le point x correspond à un morphisme $h_x : \mathbb{S} \to G_{/\mathbb{R}}$, et

$$\gamma \cdot x = x \iff h_x : \mathbb{S} \longrightarrow (G_\gamma^0)_{\mathbb{R}}$$

Le couple (G_γ^0, h_x) définit alors une variété de Shimura de domaine hermitien associé

$$Y = G_\gamma^0(\mathbb{R})/C_{G_\gamma^0(\mathbb{R})}(h_x) \hookrightarrow X$$

Posons $K' = yKy^{-1} \cap G_\gamma^0(\mathbf{A}_f)$. Le morphisme $(G_\gamma^0, h_x) \to (G, h_x)$ induit alors un morphisme analytique

$$\begin{aligned} q : \mathrm{Sh}_{K'}(G_\gamma^0, h_x)(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) \\ [x_1, y_1K'] &\longmapsto [x_1, y_1yK] \end{aligned}$$

qui est un revêtement fini au-dessus de son image. De plus,

$$[x, yK] \in \mathrm{im}(q), \text{ et } \mathrm{im}(q) \subset \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$$

Considérons maintenant le lemme suivant

Lemme 6.1.7. — *Soient $x \in X$ et $g_0 \in G(\mathbb{R})$ tels que $g_0 \cdot x = x$. Alors,*

$$\begin{aligned} \{x' \in X \mid g_0 \cdot x' = x'\} &= \{g \cdot x \mid g \in C_{G(\mathbb{R})}(g_0)\} \\ &\simeq C_{G(\mathbb{R})}(g_0)/(C_{G(\mathbb{R})}(g_0) \cap K_\infty) \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $K_\infty = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}(x)$. Soit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

une décomposition de Cartan de $\mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))$ où $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K_\infty)$. L'application

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{p} &\xrightarrow{\sim} X \\ Z &\longmapsto \exp(Z) \cdot K_\infty \\ 0 &\longmapsto x \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Si $x' = \exp(Z)K_\infty \in X$ où $Z \in \mathfrak{p}$,

$$g_0 \cdot x' = x' \iff \underbrace{(g_0 \exp(Z) g_0^{-1})}_{\exp(\mathrm{Ad}(g_0)(Z))} \cdot K_\infty = \exp(Z) \cdot K_\infty$$

car $g_0 \in K_\infty$. De plus, $g_0 \in K_\infty \Rightarrow \mathrm{Ad}(g_0)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ et donc, $\mathrm{Ad}(g_0)(Z) \in \mathfrak{p}$ et l'égalité $\exp(\mathrm{Ad}(g_0)(Z))\cdot K_\infty = \exp(Z)\cdot K_\infty$ implique $\mathrm{Ad}(g_0)(Y) = Y$, qui implique elle même que g_0 commute à $\exp(Z)$. Donc :

$$\begin{aligned}\{x' \in X \mid g_0 \cdot x' = x'\} &= \{g \cdot x \mid g \in C_{G(\mathbb{R})}(g_0)\}\\ &= C_{G(\mathbb{R})}(g_0)/(C_{G(\mathbb{R})}(g_0) \cap K_\infty)\end{aligned} \qquad \square$$

Appliquons ce lemme à x et $g_0 = \gamma$. On trouve que l'ensemble des points fixes de γ dans X est Y. Le résultat s'en déduit. □

Corollaire 6.1.8. — $\mathrm{Fix}(KgK)$ *est lisse sur* E *(en particulier ses composantes connexes sont irréductibles).*

Exemple 6.1.9. — Dans la décomposition

$$\pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})) = \coprod_{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}_{ss}} \pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}))_{\{\gamma\}}$$

- Les classes de conjugaison elliptiques correspondent aux composantes de points fixes compactes.
- Les classes de conjugaison régulières correspondent aux points fixes isolés (et elles sont automatiquement elliptiques dès qu'un tel point fixe existe).

Remarquons également que lorsque G^{der} est simplement connexe, une classe de conjugaison semi-simple régulière γ dans $G(\mathbb{R})$ est compacte si et seulement si elle est elliptique. En effet, G étant associé à une donnée de Shimura, $G(\mathbb{R})$ est une forme intérieure de sa forme compacte et possède dont un tore maximal anisotrope modulo le centre T sur $\mathbb{R}$. Donc, si γ est compact γ appartient à un conjugué de T dans $G(\mathbb{R})$, mais γ étant régulier et G^{der} simplement connexe $C_G(\gamma)_{\mathbb{R}}$ est un tore maximal qui est donc un conjugué de T.

6.2. Points fixes isolés

L'idée sous-jacente à cette section est que tout vecteur tangent dans l'espace tangent en un point fixe qui est fixe infinitésimalement donne lieu à une géodésique dans l'espace hermitien X qui est formée de points fixes, et que donc en tout point fixe isolé l'intersection entre la correspondance de Hecke et la diagonale est transverse.

Les points fixes isolés correspondent comme on l'a vu aux points fixes associés à des classes de conjugaison $\{\gamma\}$ où γ est régulier c'est-à-dire G_γ^0 est un tore (qui est automatiquement elliptique si un tel point existe). On a donc en particulier :

Lemme 6.2.1. — *Les points fixes isolés sont des points C.M. de* Sh_K.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour appliquer une formule des traces de Lefschetz.

Lemme 6.2.2. — *Si $\xi \in \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ est un point fixe isolé de KgK alors, en ξ, Δ et $\mathrm{Sh}_{gKg^{-1}\cap K} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_K \times \mathrm{Sh}_K$ s'intersectent transversalement.*

Démonstration. — Soit

$$\xi \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}},\ \xi = [x, yK],\ \gamma \cdot x = x \text{ et } \gamma yK = ygK$$

Soit Ω voisinage de x dans X tel que $p : \Omega \times \{yK\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{yK\})$ soit un isomorphisme et $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) \cap p(\Omega \times yK) = \{\xi\}$.

On a alors que $p : \Omega \times \{y(gKg^{-1} \cap K)\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{y(gKg^{-1} \cap K)\}) \subset \mathrm{Sh}_{gKg^{-1}\cap K}$. L'inclusion $\mathrm{Sh}_{gKg^{-1}\cap K} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_K \times \mathrm{Sh}_K$ s'identifie alors dans la carte locale $\Omega \times \{yK\} \simeq \Omega$ à :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \Omega \times \Omega \\ x' &\longmapsto (x', \gamma \cdot x') \end{aligned}$$

Et Δ à

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \Omega \times \Omega \\ x' &\longmapsto (x', x') \end{aligned}$$

Les intersections sont donc transverses si et seulement si $d(\gamma)_x : T_x\Omega \to T_x\Omega$ ne possède pas la valeur propre $+1$. Si $K_\infty = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}(x)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de $\mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))$ telle que $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(K_\infty)$ alors,

$$\begin{tikzcd} T_x\Omega \arrow[r, "d(\gamma)_x"] \arrow[d, "\simeq"'] & T_x\Omega \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathfrak{p} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(\gamma)_{|\mathfrak{p}}"] & \mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

où $\gamma \in K_\infty$. L'espace propre associé à la valeur propre $+1$ s'identifie donc à

$$\mathrm{Lie}(C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)) \cap \mathfrak{p}$$

Mais $C_G(\gamma)^0$ étant un tore tel que $C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)^0 \subset K_\infty$, $\mathrm{Lie}(C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)) \subset \mathfrak{k}$ et donc

$$\mathrm{Lie}(C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)) \cap \mathfrak{p} = 0 \qquad \square$$

On déduit également de la démonstration précédente :

Corollaire 6.2.3. — *Si $\xi \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ est isolé alors*

$$Lef_\xi(KgK, \mathcal{L}_\rho) = \mathrm{tr}(\rho(\gamma))$$

6.3. Le cas des variétés de Shimura de type P.E.L.

6.3.1. Un lemme sur la conjugaison stable

Lemme 6.3.1. — *Soit $G/\mathbb{Q}_p$ un groupe réductif tel que G^{der} soit simplement connexe. Soit $\gamma \in G(\mathbb{Q}_p)$ régulier stablement conjugué à un élément de $M(\mathbb{Q}_p)$ où M est le Levi d'un parabolique propre défini sur $\mathbb{Q}_p$. Alors, γ est conjugué dans $G(\mathbb{Q}_p)$ à un élément de $M(\mathbb{Q}_p)$.*

Démonstration. — Supposons que γ soit stablement conjugué à $\gamma' \in M(\mathbb{Q}_p)$:

$$\gamma' = g\gamma g^{-1} \text{ où } g \in G(\overline{\mathbb{Q}_p})$$

Les éléments γ et γ' étant réguliers, et G^{der} simplement connexe, les centralisateurs $C_G(\gamma)$, resp. $C_G(\gamma')$, sont des tores maximaux sur $\mathbb{Q}_p$: T, resp. T'.

L'application définie sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$

$$\text{int}_g : T \xrightarrow{\sim} T'$$

est en fait un isomorphisme sur $\mathbb{Q}_p$ (les centralisateurs de deux éléments stablement conjugués sont formes intérieures l'un de l'autre via cette application, mais étant abéliens le cocycle intérieur est trivial : il s'agit de $c_\sigma = int_{gg^{-\sigma}}$ où $gg^{-\sigma} \in T$). Elle induit donc un isomorphisme

$$\text{int}_g : T_d \xrightarrow{\sim} (T')_d$$

(où l'indice d signifie le sous-tore déployé maximal).

Rappelons maintenant que si T est un tore maximal de G sur $\mathbb{Q}_p$, un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique défini sur $\mathbb{Q}_p$ minimal parmi ceux contenant T est $C_G(T_d)$ (*cf.* Borel, Algebraic groups) (par exemple, T est elliptique si et seulement si $T_d \subset Z_G$ si et seulement si T n'est contenu dans aucun parabolique propre).

Dans notre cas l'isomorphisme $\text{int}_g : T_d \xrightarrow{\sim} (T')_d$ implique que $C_G((T')_d) = gC_G(T_d)g^{-1}$ et que donc γ et γ' sont dans deux paraboliques définis sur $\mathbb{Q}_p$ conjugués dans $G(\overline{\mathbb{Q}_p})$. Mais (Borel, Algebraic groups) deux paraboliques définis sur $\mathbb{Q}_p$ conjugués sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ le sont déjà sur $\mathbb{Q}_p$. □

6.3.2. Plaçons nous maintenant dans le cadre des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées propres étudiées dans le premier chapitre.

Théorème 6.3.2. — *Soit $\xi \in \text{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ un point fixe isolé. Le point ξ appartient donc à $\text{Sh}_K(\overline{E})$. Supposons que ξ se spécialise sur un point de la strate $\overline{S}(b)$ où $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Alors, γ est conjugué dans $G(\mathbb{Q}_p)$ à un élément de $M(b)(\mathbb{Q}_p)$, le centralisateur du morphisme des pentes.*

Démonstration. — Soit (A, λ, ι) le triplet associé à ξ sur une extension de degré fini du corps reflex. A est une variété abélienne C.M.. Avec les notations précédentes pour l'uniformisation complexe on peut supposer que $\xi = [x, yK]$ où $\gamma \cdot x = x$ et $\gamma \cdot yK = ygK$. La relation $\gamma \cdot x = x$ implique que γ induit un automorphisme de la $\mathbb{Q}$ structure de Hodge polarisée munie de l'action de B associée à (A, λ, ι) et que donc, γ induit un automorphisme du triplet $(\mathbf{A}, \lambda, \iota)$ sur une extension de degré fini du corps reflex. Nous noterons f cet automorphisme. Rappelons qu'à l'uniformisation complexe est associée un choix d'isomorphisme de B-modules symplectiques :

$$V \xrightarrow{\sim} H^1_B(A, \mathbb{Q})$$

Il y a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma"'] & H^1_{\mathrm{B}}(A, \mathbb{Q}) \arrow[d, "f^*"] \\ V \arrow[r, "\simeq"] & H^1_{\mathrm{B}}(A, \mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

Rappelons que l'on note E_ν le complété en une place v divisant p du corps réflexe. Il y a un isomorphisme canonique

$$H^1_{\mathrm{B}}(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Q}_p)$$

où le second membre est une représentation cristalline du groupe de Galois absolu d'une extension de degré fini de E_ν que nous noterons K. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma \otimes 1"'] & H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p) \arrow[d, "f^*"] \\ V \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[r, "\simeq"] & H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p) \end{tikzcd}$$

Notons D_{cris} le foncteur de Fontaine entre la catégorie des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de K et celle des isocristaux filtrés admissibles. $D_{\text{cris}}(H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p))$ s'identifie comme isocristal muni de structures additionnelles à la cohomologie cristalline de la réduction mod p du triplet (A, λ, ι). Dans cette identification, f agit sur cet isocristal par un élément de J_b. Fixons un isomorphisme de L-modules symplectiques munis d'une action de B $(L = W(\overline{\mathbb{F}}_p)_{\mathbb{Q}})$:

$$F(H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p)) \simeq (V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes L$$

Il y a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D_{\text{cris}}(V \otimes \mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "D_{\text{cris}}(\gamma \otimes 1)"'] & D_{\text{cris}}(H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "F(f^*)"] & (V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes L \arrow[d, "g"] \\ D_{\text{cris}}(V \otimes \mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\simeq"] & D_{\text{cris}}(H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p)) \arrow[r, "\simeq"] & (V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes L \end{tikzcd}$$

dans lequel $g \in J_b$.

Trivialisons maintenant le torseur des périodes; c'est-à-dire étendons les scalaires à B_{dR}. Il y a un isomorphisme canonique

$$(V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes B_{dR} \xrightarrow{\sim} D_{\text{cris}}(V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes_L B_{dR}$$

d'où au final un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbb{Q}_p} \otimes B_{dR} & \xrightarrow{\simeq} & (V_{\mathbb{Q}_p} \otimes L) \otimes B_{dR} \\ \gamma\otimes 1 \big\downarrow & & \big\downarrow g \otimes 1 \\ V_{\mathbb{Q}_p} \otimes B_{dR} & \xrightarrow{\simeq} & (V_{\mathbb{Q}_p} \otimes L) \otimes B_{dR} \end{array}$$

Duquel on déduit que γ est stablement conjugué dans $G(L)$ à un élément de J_b.

Rappelons maintenant que dans le cas que nous considérons ($G_{\mathbb{Q}_p}$ quasidéployé) la classe de σ-conjugaison b provient d'une classe de $M(b)(L)$ encore notée b, et que $J_b = \{g \in M(b)(L) \mid gb\sigma = b\sigma g\}$. Rappelons également que l'on peut supposer b « decent » (*cf.* [**68**]) au sens où pour un $s \in \mathbb{N}$, $(b\sigma)^s = (s.\nu_b)(p)\sigma^s$. Dans tous ce qui précède on peut alors remplacer L par $\mathbb{Q}_{p^s}$ l'extension non ramifiée de degré s de $\mathbb{Q}_p$. La relation $b^{-1}gb = g^\sigma$ dans $M(b)(\mathbb{Q}_{p^s})$ montre que la classe de conjugaison de g dans $M(b)(\mathbb{Q}_{p^s})$ est définie sur $\mathbb{Q}_p$ et que donc, d'après [**46**] (pour les groupes avec lesquels nous travaillons $M(b)^{\mathrm{der}}$ est simplement connexe), la classe de conjugaison de g dans $M(b)(\overline{\mathbb{Q}_p})$ contient un élément de $M(b)(\mathbb{Q}_p)$.

On déduit donc au final que γ est stablement conjugué dans $G(\mathbb{Q}_p)$ à un élément de $M(b)(\mathbb{Q}_p)$. On conclut alors grâce au lemme 6.3.1. □

Remarque 6.3.3. — Dans la dernière partie de la démonstration, nous n'avons fait qu'expliquer l'existence du transfert des classes de conjugaison stables de J_b vers celles de sa forme intérieure quasi-déployée $M(b)$. Par exemple, lorsque J_b est le groupe des unités d'une algèbre à division $D^\times$, ce transfert est le transfert des classes de conjugaison de $D^\times$ vers les classes de conjugaison elliptiques de $\mathbf{GL}_n$.

6.4. Formule de Lefschetz

Théorème 6.4.1. — *Soit* $\mathrm{Sh}(G,X)$ *une variété de Shimura compacte. Soit* $f = \otimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f))$ *telle qu'il existe une place finie* v *telle que* $\mathrm{supp}(f_v) \subset G(\mathbb{Q}_v)_{\mathrm{reg}}$. *Alors,*

$$\mathrm{tr}\,(f;[H^\bullet(\mathrm{Sh},\mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ g \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbf{A}_f)_\gamma)\ \mathrm{tr}\,\rho(\gamma)\ \mathcal{O}_\gamma(f)$$

Démonstration. — On peut supposer que f est de la forme $\frac{1}{vol(K)}\mathbf{1}_{KgK}$ où $K = \prod_v K_v$ et $K_v g_v K_v \subset G(\mathbb{Q}_v)_{\mathrm{reg}}$. Appliquons la formule des traces de Lefschetz à la correspondance de Hecke associée. Soit $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ elliptique dans $G(\mathbb{R})$. $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}} \neq \varnothing \Rightarrow \gamma$ est régulier. En effet, une relation du type $\gamma y K = ygK$ implique que $\gamma y_v K_v = y_v g_v K_v$ qui implique que $y_v^{-1}\gamma y_v \in K_v g_v K_v \subset G(\mathbb{Q}_v)_{\mathrm{reg}}$. Tous les points fixes sont donc isolés et la somme dans la formule annoncée provient de la décomposition

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \coprod_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\} \\ \text{régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_\gamma$$

Reste donc à montrer que

$$\sum_{\xi\in\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}} \mathrm{Lef}_\xi(KgK,\mathcal{L}_\rho) = \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma\backslash G(\mathbf{A}_f)_\gamma)\ \ \mathrm{tr}\,\rho(\gamma)\ \mathcal{O}_\gamma(f)$$

On sait (corollaire 6.2.3) que $\mathrm{Lef}_\xi(KgK,\mathcal{L}_\rho)$ est constant sur $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ et vaut $\mathrm{tr}\,\rho(\gamma)$. Il faut donc calculer $\#\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$. L'élément γ étant régulier, $\mathrm{Fix}(\gamma;X)$ est réduit à un seul élément. On en déduit que $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ est en bijection avec

$$G(\mathbb{Q})_\gamma\backslash\{yK \mid y^{-1}\gamma y\in KgK\}$$

qui est de cardinal $\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma\backslash G(\mathbf{A}_f)_\gamma)\ \mathcal{O}_\gamma(f)$. □

Remarque 6.4.2. — Cette formule se déduit de [**26**] en remarquant grâce au théorème 5.2 de [**26**] que la somme des caractères des séries discrètes de $G(\mathbb{R})$ ayant même caractère infinitésimal que $\check{\rho}$ évaluée en un γ régulier est $\mathrm{tr}\,\rho(\gamma)$.

Remarque 6.4.3. — Lorsque le support de f reste dans un compact fixé de $G(\mathbf{A}_f)$, les classes $\{\gamma\}$ intervenant dans la formule ci-dessus varient dans un ensemble fini ne dépendant que de ce compact. Cela peut se voir de deux façons : la première en utilisant la proposition 8.2 de [**48**] qui implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de $G(\mathbf{A})$-conjugaison contenant un élément de $G(\mathbb{Q})$ et rencontrant un compact de $G(\mathbf{A})$ fixé (ce qui est le cas ici puisque nos classes sont elliptiques à l'infini) ; la deuxième de la même manière que dans la remarque (5.12.6).

CHAPITRE 7
CONTRIBUTION DE LA COHOMOLOGIE DE LA STRATE BASIQUE

7.1. Caractérisation des éléments de $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f)) \times W_{E_\nu}$ par leurs traces

7.1.1. Un lemme d'algèbre linéaire. — Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $u \in \mathrm{End}(V)$ et $v \in \mathrm{GL}(V)$. Le but du lemme qui suit est de montrer que si l'on connaît $\mathrm{tr}(uv^N)$ pour N grand alors on connaît $\mathrm{tr}(u)$.

Pour cela on s'inspire de la formule classique : si $P(T) = \det(\mathrm{Id} - Tv)$ alors si $F(T) = \sum_{N\geqslant 0} \mathrm{tr}(v^{N+1})T^N$, F est une fraction rationnelle et $F(T)dT = -d\log P$. Ainsi, puisque v est inversible

$$\mathrm{Res}_\infty(F(T)dT) = v_\infty(P^{-1}) = \dim(V) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id})$$

Lemme 7.1.1. — *Soit*

$$F(T) = \sum_{N\geqslant 0} \mathrm{tr}(uv^{N+1})\, T^N \in K[[T]]$$

La série formelle F est une fraction rationnelle de degré -1 et

$$\mathrm{Res}_\infty(F(T)dT) = \mathrm{tr}(u)$$

Démonstration. — On peut supposer K algébriquement clos de caractéristique 0. Soit $v = v_s + v_n$ la décomposition de v en parties semi-simples et nilpotentes. Supposons le lemme démontré pour v semi-simple. On a alors

$$\begin{aligned} F(T) &= \sum_{N\geqslant 0}\sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} \mathrm{tr}\left(uv_n^k v_s^{N+1-k}\right) T^N \\ &= \sum_{k=0}^{\dim V} \sum_{\substack{N+1\geqslant k\\ N\geqslant 0}} \binom{N+1}{k} \mathrm{tr}\left(uv_n^k v_s^{N+1-k}\right) T^N \\ &= \sum_{N\geqslant 0} \mathrm{tr}(uv_s^{N+1})T^N + \sum_{k=1}^{\dim V} \underbrace{\sum_{N\geqslant k-1} \binom{N+1}{k} \mathrm{tr}\left(uv_n^k v_s^{N+1-k}\right) T^N}_{\frac{T^{k-1}}{k!}\frac{d^k}{dT^k}(F_k(T))} \end{aligned}$$

où

$$F_k(T) = \sum_{N\geqslant 0} \mathrm{tr}(uv_n^k v_s^{-k} v_s^{N+1})T^N$$

Le terme de gauche est une fraction rationnelles par application du cas semi-simple à u et v_s, quant au terme de droite cela résulte du fait que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $F_k(T)$ est une fraction rationnelle par application du cas semi-simple à $uv_n^k v_s^{-k}$ et v_s. La série formelle F est donc une fraction rationnelle. De plus, par hypothèse, $\deg F_k = -1$ et donc $\deg\left(\dfrac{d^k}{dT^k}(TF_k(T))\right) \leqslant -k-1$. Cela implique que

$$\deg\left(\frac{T^{k-1}}{k!}\frac{d^k}{dT^k}(TF_k(T))\right) \leqslant -2$$

et est donc de résidu nul en l'infini. La cas semi-simple implique donc les autres cas.

Reste à démontrer le lemme dans le cas où v est semi-simple. Soit donc v semi-simple. Pour tout $w \in \mathrm{GL}(V)$

$$\mathrm{tr}(u(w^{-1}vw)^{N+1}) = \mathrm{tr}(uw^{-1}v^{N+1}w) = \mathrm{tr}((wuw^{-1})v^{N+1})$$

et $\mathrm{tr}(wuw^{-1}) = \mathrm{tr}(u)$. On peut donc supposer que $V = K^n$ et que la matrice de v dans la base canonique de K^n est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (où $\forall i\ \lambda_i \neq 0$). Notons $(a_{ij})_{i,j}$ la matrice de u. Alors,

$$\begin{aligned} F(T) &= \sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda_i^{N+1}t^N \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i T} \end{aligned}$$

or $\lambda_i \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Res}_\infty\left(\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_i T}dT\right) = 1$. D'où le résultat. □

Remarque 7.1.2. — L'intérêt de ce lemme est que si P est un polynôme alors

$$\mathrm{Res}_\infty P(T)dT = 0$$

Ainsi, si l'on modifie la série définissant $F(T)$ dans le lemme précédent par un nombre fini de termes on peut encore retrouver la trace de u.

7.1.2. Séparation des représentations sphériques par les traces de fonctions à support dans les éléments réguliers

Proposition 7.1.3. — *Soit $H/\mathbb{Q}_p$ un groupe réductif non ramifié tel que $H(\mathbb{Q}_p) \to H_{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_p)$ soit surjectif. Soit*

$$\sum_{\pi\in\mathrm{Irr}(H(\mathbb{Q}_p))} a_\pi[\pi] \in \mathrm{Groth}(H(\mathbb{Q}_p)) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{C}$$

(i.e. $a_\pi \in \mathbb{C}$ et $\forall\ K_p \subset H(\mathbb{Q}_p)$ compact ouvert $\#\{\pi \mid a(\pi) \neq 0 \text{ et } \pi^{K_p} \neq (0)\} < \infty$)

Si $\forall f_p \in \mathcal{H}(H(\mathbb{Q}_p))$ telle que $\mathrm{supp}(f_p) \subset H(\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{reg}}$ on a

$$\sum_\pi a_\pi \,\mathrm{tr}\ \pi(f_p) = 0$$

Alors, $\forall\ \pi$ sphérique $a(\pi) = 0$.

Démonstration. — Ce résultat est essentiellement contenu dans [**54**] dont nous utiliserons librement les notations.

Commençons par remarquer que dans [**54**], si le paramètre t est régulier alors la fonction élémentaire f_t est à support dans les éléments réguliers de $H(\mathbb{Q}_p)$. D'après la proposition 5 de [**54**] on a en prenant $f_p = f_t$ avec t régulier :

$$\sum_{\substack{\pi \text{ sous-quotient} \\ \text{d'une série principale} \\ \text{non ramifiée}}} a_\pi \ \mathrm{tr}\ \pi(f_t) = 0$$

i.e. on peut séparer les sous-quotients des séries principales non ramifiées des autres éléments de $\mathrm{Irr}(H(\mathbb{Q}_p))$.

Remarquant que les éléments réguliers t engendrent le groupe de type fini $A(\mathbb{Q}_p)/A(\mathbb{Z}_p)$, la proposition 7 de [**54**] couplée à l'indépendance linéaire des caractères (ici l'indépendance linéaire des caractères non ramifiés λ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ du groupe des points dans $\mathbb{Q}_p$ d'un tore déployé maximal) permet de séparer les π sous-quotients de séries principales non ramifiées associées à des λ, λ' tels que $\forall w \in W \quad \lambda^w \neq \lambda'$ (on utilise le fait que $A(\mathbb{Q}_p)/A(\mathbb{Z}_p)$ étant de type fini il suffit d'écrire la proposition 7 de [**54**] pour un nombre fini de f_t avec t régulier et donc qu'il existe un sous-groupe compact ouvert K_p de $H(\mathbb{Q}_p)$ tel que pour ce nombre fini de paramètres t, $f_t \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ ce qui ramène les combinaisons linéaires de traces considérées à un nombre fini).

La proposition 8 (*cf.* également la remarque qui la suit) permet à λ (modulo l'action de W) fixé de séparer dans les sous-quotients irréductibles de la série principale non ramifiée le sous-quotient sphérique des autres sous-quotients. D'où le résultat. $\square$

7.1.3. Le théorème. — Soit G un groupe de similitudes unitaires sur $\mathbb{Q}$ comme dans le premier chapitre dont nous reprenons les notations.

Définition 7.1.4. — Pour $A \in \mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$, $A = \sum_{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))} [\Pi] \otimes [\sigma(\Pi)]$ nous noterons

$$A_{\mathrm{cusp}} = \sum_{\substack{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f)) \\ \Pi_p \text{ supercuspidale}}} [\Pi] \otimes [\sigma(\Pi)]$$

Théorème 7.1.5. — *Soit* $A \in \mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$ *tel que pour tout type supercuspidal* (J, λ) *de* $G(\mathbb{Q}_p)$, $\forall g \in \widetilde{J}$ *le sous-groupe compact modulo le centre associé,* $\forall f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p))$ *telle qu'il existe* $w \neq p$ *vérifiant* $\mathrm{supp}(f_w) \subset G(\mathbb{Q}_w)_{\mathrm{reg}}$ *il existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall \tau \in W_{E_\nu}$ *vérifiant* $v(\tau) \geqslant N$ *si* $f = (e_\lambda * \delta_g) \otimes f^p$ *on ait*

$$\mathrm{tr}(f \times \tau; A) = 0$$

Alors,

$$A_{\mathrm{cusp}} = 0$$

Démonstration. — Fixons $\sigma \in W_{E_\nu}$ tel que $v(\sigma) = 1$. Considérons la distribution sur $G(\mathbf{A}_f)$

$$f \longmapsto \sum_{N \geqslant 0} \mathrm{tr}(f \times \tau\sigma^{N+1}; A) T^N$$

qui est à valeurs dans $\mathbb{C}(T)$ d'après le lemme 7.1.1. Appliquant l'application linéaire

$$\mathrm{Res}_\infty : \mathbb{C}(T) \longrightarrow \mathbb{C}$$

à cette distribution on déduit du lemme 7.1.1 et de la remarque qui le suit que dans l'énoncé du théorème on peut prendre n'importe quel $\tau \in W_{E_\nu}$ indépendamment de f^p.

Fixons π_0 une représentation supercupsidale de $G(\mathbb{Q}_p)$ et (J, λ) un type associé. Notons

$$A = \sum_{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))} [\Pi] \otimes [\rho(\Pi)]$$

où $[\rho(\Pi)] \in \mathrm{Groth}(W_{E_\nu})$. Fixons $\tau \in W_{E_\nu}$, fixons $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p))$, $f^p = \bigotimes_{v \neq p} f_p$ vérifiant $\exists\, w \neq p$ $\mathrm{supp}(f_w) \subset G(\mathbb{Q}_w)_{\mathrm{reg}}$ et considérons la distribution sur $G(\mathbb{Q}_p)$

$$f_p \longmapsto \mathrm{tr}(f_p \otimes f^p \times \tau; A) = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbb{Q}_p))} \underbrace{\Bigg(\sum_{\substack{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f)) \\ \Pi_p \simeq \pi}} \mathrm{tr}(f^p; \Pi^p)\ \mathrm{tr}(\tau; \rho(\Pi)) \Bigg)\ }_{a_\pi} \mathrm{tr}_\pi(f_p)$$

Il résulte de la définition de $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$ que pour tout sous-groupe compact ouvert K_p de $G(\mathbb{Q}_p)$

$$\#\{\pi \mid \pi^{K_p} \neq (0) \text{ et } a_\pi \neq 0\} < +\infty$$

Si K_p est tel que $e_\lambda \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ alors $\forall\, g \in \widetilde{J}\ \forall \pi\ \ \pi(e_\lambda * \delta_g) = \pi(e_\lambda)\pi(g)$ et donc,

$$\#\{\pi \mid \pi(e_\lambda * \delta_g) \neq 0 \text{ et } a_\pi \neq 0\} < +\infty$$

Il existe donc un ensemble fini non-vide E de caractères non ramifiés de $G(\mathbb{Q}_p)$ vérifiant

$$\forall\, \chi, \chi' \in E\ \ \chi \neq \chi' \Longrightarrow \pi_0 \otimes \chi \not\simeq \pi_0 \otimes \chi'$$

et

$$\sum_{\chi \in E} a_{\pi_0 \otimes \chi} \mathrm{tr}_{\pi_0 \otimes \chi}(e_\lambda * \delta_g) = 0$$

or, $\mathrm{tr}_{\pi_0 \otimes \chi}(e_\lambda * \delta_g) = \chi(g)\, \mathrm{tr}_{\pi_0}(e_\lambda * \delta_g)$ et $\mathrm{tr}_{\pi_0}(e_\lambda * \delta_g) \neq 0$ (lemme B.1.2). On en déduit

$$\forall\, g \in \widetilde{J} \quad \sum_{\chi \in E} a_{\pi_0 \otimes \chi}\, \chi(g) = 0$$

Rappelons (annexe B) que $\pi_0 \otimes \chi \not\simeq \pi_0 \otimes \chi' \Leftrightarrow \chi_{|\widetilde{J}} \neq \chi'_{|\widetilde{J}}$ et donc par indépendance linéaire des caractères

$$a_{\pi_0} = 0$$

Fixons maintenant $\Pi_0 \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))$ vérifiant $\Pi_{0p} \simeq \pi_0$. Fixons toujours $\tau \in W_{E_\nu}$. Soit w une place de $\mathbb{Q}$ en laquelle $G(\mathbb{Q}_w)$ est non ramifié de type adjoint et Π_{0w} sphérique. Fixons $f^{pw} \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^{pw}))$. Il résulte de l'égalité $a_{\pi_0} = 0$ que l'on a la relation

$$\forall f_w \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_w)) \quad \mathrm{supp}(f_w) \subset G(\mathbb{Q}_w)_{\mathrm{reg}}$$

$$\sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbb{Q}_w))} \Bigg(\sum_{\substack{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f)) \\ \Pi_p \simeq \pi_0}} \mathrm{tr}_{\Pi^{pw}}(f^{pw})\, \mathrm{tr}(\tau; \rho(\Pi)) \Bigg) \mathrm{tr}_\pi(f_w) = 0$$

On déduit donc du lemme 7.1.3 que

$$\forall f^{pw} \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^{pw}))\ \forall \tau \in W_{E_\nu} \qquad \sum_{\substack{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f)) \\ \Pi_p \simeq \Pi_{0p} \\ \Pi_w \simeq \Pi_{0w}}} \mathrm{tr}_{\Pi^{pw}}(f^{pw})\, \mathrm{tr}(\tau; \rho(\Pi)) = 0$$

Fixons un niveau K^{pw} tel que $(\Pi_0^{pw})^{K^{pw}} \neq (0)$. Alors, si

$$X = \{\Pi^{pw} \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f^{pw})) \mid (\Pi^{pw})^{K^{pw}} \neq (0) \text{ et } \rho(\Pi_{0,p} \otimes \Pi_{0,w} \otimes \Pi^{pw}) \neq (0)\}$$

$\# X < +\infty$. Les représentations semi-simples de W_{E_ν} de dimension finie sur $\mathbb{C}$ sont équivalentes aux représentations semi-simples de dimension finie sur $\mathbb{C}$ de la $\mathbb{C}$-algèbre

$$R = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[W_{E_\nu}/\boldsymbol{Gal}(\overline{E}_\nu | E_\nu)^{(i)}]$$

Il résulte alors de l'indépendance linéaire des caractères que les traces des éléments de

$$\mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^{pw})//K^{pw}) \otimes_{\mathbb{C}} R$$

permettent de séparer les

$$\Pi^{pw} \otimes \rho(\Pi_{0,p} \otimes \Pi_{0,w} \otimes \Pi^{pw}), \quad \Pi^{pw} \in X$$

On en déduit donc que

$$[\rho(\Pi_0)] = 0$$

□

7.2. Contribution de la cohomologie de la strate basique

Soit $\mathcal{D}$ une donnée de type P.E.L. non ramifiée en p (*cf.* le premier chapitre), et Sh_K les variétés de Shimura associées, que nous supposerons compactes. Nous supposerons pour cela que $D = \mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division. Nous supposerons de plus qu'en toutes les places finies de F, D est soit déployée soit une algèbre à division. Nous supposerons également que l'on est dans le cas (A), c'est-à-dire dans le cas unitaire. Rappelons que le que le corps C.M. F est de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}|\mathbb{Q}$ est une extension quadratique imaginaire.

Rappelons également que l'on note

$$G(\mathbb{Q}_p) = G\Big(\prod_{j \in J} U(n; F_{w_j})\Big)$$

lorsque p est inerte dans $\mathcal{K}$.

Le facteur de droite n'étant pas tout à fait un produit, ses représentations ne se décrivent pas immédiatement à partir des représentations de chaque facteur. Afin de ne pas trop alourdir les notations nous supposerons donc dans ce chapitre que lorsque p est inerte dans $\mathcal{K}$ l'ensemble J de cardinal 1, ce qui est suffisant pour les applications que nous avons en vue.

Théorème 7.2.1

(1) *Supposons p décomposé dans $\mathcal{K}$, alors*

$$\Big[\varinjlim_{K} H^\bullet(\mathrm{Sh}_K,\mathcal{L}_\rho)\Big]_{\mathrm{cusp}} = \Big[\varinjlim_{K} H^\bullet(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(b_0),\mathcal{L}_\rho)\Big]_{\mathrm{cusp}}$$

dans $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f)\times W_{E_\nu})$.

(2) *Supposons p inerte dans $\mathcal{K}$ et l'ensemble J de cardinal* 1. *Supposons démontré l'existence d'une application de changement de base quadratique local en p pour les groupes unitaires non ramifiés (ce qui est le cas pour* $U(3)$, *C.3) et l'existence de types pour les représentations supercuspidales des groupes unitaires non ramifiés en p (cf. B.3.2) (c'est le cas pour* $U(3)$ *lorsque* $p\neq 2$, *cf. B.3.1, cf. également la section 7.2.1 où cette hypothèse est enlevée). On a alors l'égalité*

$$\Big[\varinjlim_{K} H^\bullet(\mathrm{Sh}_K,\mathcal{L}_\rho)\Big]^{\sim}_{|W_{E_\nu}\mathcal{K}_p,\mathrm{cusp}} = \Big[\varinjlim_{K} H^\bullet(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(b_0),\mathcal{L}_\rho)\Big]^{\sim}_{|W_{E_\nu}\mathcal{K}_p,\mathrm{cusp}}$$

où si $A=\sum_{\Pi\in\mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))}[\Pi]\otimes[\sigma(\Pi)]\in\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f)\times W_{E_\nu})$ *on note*

$$A^{\sim}_{\mathrm{cusp}} = \sum_{\substack{\Pi_p \text{ supercuspidale}\\ \exists v \text{ décomposée dans } \mathcal{K}\, \Pi_v \text{ supercusp.}}} [\Pi]\otimes[\sigma(\Pi)]$$

Démonstration. — La démonstration consiste à comparer deux formules des traces, l'une sur la fibre générique, l'autre sur la fibre spéciale.

Nous donnons la démonstration dans le cas où p est inerte dans $\mathcal{K}$ qui est a priori la cas le plus compliqué.

Commençons par rappeler quelques notations. Notons $J=\{j\}$. Fixons une représentation supercuspidale π_0 de $G(\mathbb{Q}_p)\simeq GU(n;F_{w_j})$. Soit (λ,J_0) un type associé à la classe d'équivalence inertielle de π_0. Notons $\widetilde{J}_0$ le sous-groupe compact modulo le centre associé (*cf.* l'annexe B)), et $\widetilde{\lambda}$ l'extension de λ à $\widetilde{J}_0$ vérifiant

$$\pi_0\simeq \text{c-Ind}_{\widetilde{J}_0}^{GU(n;F_{w_j})}\widetilde{\lambda}$$

Soit e_λ l'idempotent de l'algèbre de Hecke associé défini par

$$e_\lambda(g)=\begin{cases}0 & \text{si } g\notin J_0\\ \dfrac{\dim\lambda}{\mathrm{vol}(J)}\,\chi_\lambda(g) & \text{si } g\in J_0\end{cases}$$

Posons $f_p = e_\lambda * \delta_g$ pour un $g \in \widetilde{J}_0$. Soient $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p))$ et $\tau \in W_{E_\nu \mathcal{K}_p}$. Nous supposerons que $f^p = \bigotimes_{v \neq p} f_v$ telle qu'en une place v décomposée dans $\mathcal{K}$ f_v soit un pseudo-coefficient supercuspidal. Posons $f = f_p \otimes f^p$.

Commençons par établir la formule des traces sur la fibre générique. Plus précisément, on cherche une expression pour

$$\mathrm{tr}(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)])$$

Si la représentation $\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))$ est telle que Π intervienne dans $[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]$, la non nullité de $\mathrm{tr}(f; \Pi)$ implique que Π_p est supercuspidale, qu'il existe un caractère non ramifié χ de $G(\mathbb{Q}_p)$ tel que $\Pi_p \simeq \pi_0 \otimes \chi$ et qu'en une place v décomposée dans $\mathcal{K}$ Π_v est supercuspidale.

Il résulte donc de l'annexe A que :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) \\ = \sum_{\substack{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f)) \\ \Pi_p \in [\pi_0, G(\mathbb{Q}_p)] \\ \exists\, \Pi' \in \mathcal{T}(G)_\rho\ \Pi = \Pi'_f}} m_\Pi \ \mathrm{tr}_\Pi(f) \ \mathrm{tr}\left(\tau; r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\mathrm{BC}(\Pi_p))_{|E_\nu} |.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}\right)\end{aligned}$$

où m_Π est la multiplicité d'une $\Pi' \in \mathcal{T}(G)_\rho$ vérifiant $\Pi \simeq \Pi'_f$ et BC désigne le changement de base local (qui existe par hypothèse en la place w_j).

On dispose seulement d'une formule des traces pour la trace d'une fonction de l'algèbre de Hecke (théorème 6.4.1), mais pas pour $f \times \tau$. C'est pourquoi nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.2.2. — *Pour tout $\tau \in W_{E_\nu \mathcal{K}_p}$ il existe une fonction*

$$\widetilde{f_p^\tau} \in e_\lambda * \mathcal{H}(G(\mathbb{Q})) * e_\lambda \subset \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}))$$

telle que $\forall\, \chi$ caractère non ramifié de $G(\mathbb{Q}_p)$ on ait

$$\mathrm{tr}(\widetilde{f_p^\tau}; \pi_0 \otimes \chi) = \mathrm{tr}(f_p; \pi_0 \otimes \chi) \ \mathrm{tr}\left(\tau; r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi_0 \otimes \chi)|.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}\right)$$

Démonstration. — Notons $X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p))$ le groupe des caractères non ramifiés de $G(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. Le groupe $X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p))$ s'identifie aux points à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ d'une variété algébrique de type fini sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ (plus précisément un tore). De plus, soit le groupe fini

$$\Gamma = \{\chi \in X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p)) \mid \pi_0 \otimes \chi \simeq \pi_0\}$$

Les fonctions régulières sur le tore quotient par Γ s'identifient à l'algèbre de Hecke du type λ de $G(\mathbb{Q}_p)$ (annexe B.1.2).

Considérons maintenant la fonction

$$\begin{aligned} F : X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p)) &\longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell} \\ \chi &\longmapsto \mathrm{tr}(f_p; \pi_0 \otimes \chi) \ \mathrm{tr}(\tau; r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi_0 \otimes \chi)_{|E_\nu} |.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}) \end{aligned}$$

Étant donné que $\widetilde{\sigma}_\ell$ est défini au niveau des classes d'isomorphisme de représentations, F est invariante par Γ et descend donc en une fonction sur $X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p))/\Gamma$. Montrons que cette fonction est régulière.

Soit χ élément de $X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p))$. Le caractère $\mathrm{BC}(\chi)$ obtenu par changement de base quadratique est un caractère non ramifié de $\mathrm{GL}_n(F_{w_j}) \times \mathbb{Q}_p^\times$. Notons $\mathrm{BC}(\chi) = (\chi' \circ \det) \otimes \chi''$. L'application $\chi \mapsto \mathrm{BC}(\chi)$ est régulière (on peut la décrire explicitement). On a alors,

$$(\pi_0 \otimes \chi)(f_p) = \pi_0(f_p)\, \chi(\det g)$$

duquel on déduit

$$\mathrm{tr}(f_p; \pi_0 \otimes \chi) = \mathrm{tr}(f_p; \pi_0).\chi(g)$$

De plus, avec les notations de l'annexe A

$$\sigma_\ell(\pi_0 \otimes \chi \circ \det) = \sigma_l(\pi_0) \otimes \sigma_\ell(\chi)$$

où $\sigma_\ell(\chi) : W_{F_{v_i}} \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ est associé à χ par la théorie du corps de classe local, et

$$\sigma_\ell(\mathrm{BC}(\pi_0 \otimes \chi)) = \sigma_\ell(\mathrm{BC}(\pi_0) \otimes ((\chi' \circ \det) \otimes \chi'')) = \sigma_\ell(\mathrm{BC}(\pi_0)) \otimes \sigma_\ell(\chi') \otimes \sigma_\ell(\chi'')$$

Utilisant le fait que l'extension $E_\nu|\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée on en déduit

$$r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi_0 \otimes \chi)(\tau) = (r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi_0)(\tau))\chi'(p)^{-v(\tau)p}\chi''(p)^{-v(\tau)}$$

où p est un entier associé à $\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$. La fonction F est donc une fonction régulière. D'après l'annexe B.1.2 il existe donc $\widetilde{f_p^\tau} \in \mathcal{H}(\lambda, G(\mathbb{Q}_p))$ vérifiant

$$\forall \chi \in X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p)) \quad F(\chi) = \mathrm{tr}_{\pi_0 \otimes \chi}(\widetilde{f_p^\tau}) \qquad \square$$

Remarque 7.2.3. — On peut aussi utiliser le théorème de Paley-Wiener scalaire ([**6**]) pour obtenir l'existence d'une fonction $\widetilde{f_p^\tau} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p))$ vérifiant

$$\forall \pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbb{Q}_p)) \quad \mathrm{tr}_\pi(\widetilde{f_p^\tau}) = \mathrm{tr}_\pi(f_p)\ \mathrm{tr}(\tau; r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E_\nu}|.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2})$$

Cependant nous aurons besoin par la suite de l'annulation des intégrales orbitales de $\widetilde{f_p^\tau}$ sur les éléments réguliers non elliptiques. Pour la fonction $\widetilde{f_p^\tau}$ du lemme ci-dessus ce sera une conséquence facile de l'appartenance de $\widetilde{f_p^\tau}$ à l'algèbre de Hecke d'un type supercuspidal. Si l'on veut utiliser le théorème de Paley-Wiener scalaire et non le lemme ci-dessus, cela est une conséquence du théorème A-(b) de [**44**].

Posons $\widetilde{f^\tau} = \widetilde{f_p^\tau} \otimes f^p$ qui dépend donc de τ. Il résulte du lemme que l'on a l'égalité

$$\mathrm{tr}(\widetilde{f^\tau}; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \mathrm{tr}(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)])$$

Supposons maintenant qu'en une place w de $\mathbb{Q}$, f_w soit à support dans les éléments réguliers de $G(\mathbb{Q}_w)$ (on suppose f décomposée en un produit $\otimes_v f_v$). Il résulte de l'égalité précédente ainsi que du théorème 6.4.1 que :

$$\operatorname{tr}(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbf{A})_\gamma) \operatorname{tr}\rho(\gamma)\, \mathcal{O}_\gamma(\widetilde{f}_p^\tau)\, \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

Remarquons maintenant qu'étant donné que $\widetilde{f}_p^\tau$ est dans l'algèbre de Hecke associée à un type supercuspidal, pour tout élément γ de $G(\mathbb{Q}_p)$ semi-simple régulier non elliptique $\mathcal{O}_\gamma(\widetilde{f}_p) = 0$. D'où la formule

$$\operatorname{tr}(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R}) \text{ et } G(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbf{A})_\gamma) \operatorname{tr}\rho(\gamma)\, \mathcal{O}_\gamma(\widetilde{f}_p^\tau)\, \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

Passons maintenant à la formule des traces sur la fibre spéciale.

Soit donc f_p comme précédemment fixée définitivement. Soit $\widetilde{K} \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ un compact. Il résulte du théorème 5.12.5 appliqué à toute la variété de Shimura qu'il existe un entier N tel que $\forall \tau \in W_{E_\nu \mathcal{K}_p}$, $v(\tau) \geqslant N$, $\forall f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p))$ $\mathrm{supp}(f^p) \subset \widetilde{K}$

$$\operatorname{tr}(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\phi} \sum_{\{\gamma\}\in\{I^\phi(\mathbb{Q})\}} \lambda_{\phi,\{\gamma\},\tau}\, \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

où $\lambda_{\phi,\{\gamma\},\tau} = 0$ sauf pour un nombre fini de $(\phi, \{\gamma\})$ (ce nombre fini tendant vers l'infini lorsque $\widetilde{K}$ grossi et $v(\tau)$ varient). Nous choisirons de plus N suffisamment grand de tel façon que le théorème 5.12.5 s'applique également à la strate basique.

On a donc l'égalité

$$\operatorname{tr}(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}(b_0), \mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\phi, b(\phi)=b_0} \sum_{\{\gamma\}\in\{I^\phi(\mathbb{Q})\}} \lambda_{\phi,\{\gamma\},\tau}\, \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

Remarquons que si la classe d'isogénie ϕ n'est pas basique et $\gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})$ alors l'image de γ dans $I^\phi(\mathbb{Q}_p)$ est dans une forme intérieure d'un Levi propre de $G(\mathbb{Q}_p)$, J_b.

Nous pouvons maintenant comparer les formules des traces sur la fibre générique et sur la fibre spéciale.

Fixons un compact $\widetilde{K}$ dans $G(\mathbf{A}_f^p)$. Soit $v_1 \neq p$ une place de $\mathbb{Q}$ décomposée dans $\mathcal{K}$. Supposons le compact $\widetilde{K}$ de la forme $\widetilde{K}_{v_1} \times \widetilde{K}^{v_1}$. Soit f_p comme précédemment et $f^{p,v_1} \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^{p,v_1}))$ telle que $\mathrm{supp}(f^{p,v_1}) \subset \widetilde{K}^{v_1}$, et en une place f est à support dans les éléments réguliers. Soit $\tau \in W_{E_\nu \mathcal{K}_p}$ tel que $v(\tau) \geqslant N$ où N est associé à $\widetilde{K}$ comme précédemment. On note $\widetilde{f}_p^\tau$ la fonction associée à τ et f_p, et $\widetilde{f}^\tau = \widetilde{f}_p \otimes f^p$. Désormais, τ et f^{v_1} sont fixés. Alors, la comparaison des deux formules des traces fournit

$$\forall f_{v_1}\ \mathrm{supp}(f_{v_1}) \subset \widetilde{K}_{v_1} \quad \sum_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R}) \text{ et } G(\mathbb{Q}_p)}} \alpha_{\{\gamma\}} \mathcal{O}_\gamma(f_{v_1}) = \sum_{\phi} \sum_{\{\gamma\}\in\{I^\phi(\mathbb{Q})\}} \beta_{\phi,\{\gamma\}} \mathcal{O}_\gamma(f_{v_1})$$

où l'on a posé

$$\alpha_{\{\gamma\}} = \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbf{A})_\gamma)\, \mathrm{tr}\,\rho(\gamma)\; \mathcal{O}_\gamma((\widetilde{f}^\tau)^{v_1})$$

et $\beta_{\phi,\{\gamma\}} = \lambda_{\phi,\{\gamma\},\tau}\; \mathcal{O}_\gamma(f^{p,v_1})$ qui dépendent de f^{v_1} et τ.

Regroupons les termes par classes de conjugaison dans $G(\mathbb{Q}_{v_1})$: on obtient

$$\sum_{\{\gamma'\}\in\{G(\mathbb{Q}_{v_1})\}_{\mathrm{reg}}} \Bigg(\sum_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R}) \text{ et } G(\mathbb{Q}_p) \\ \gamma\sim\gamma'}} \alpha_{\{\gamma\}} - \sum_{\substack{\phi,\{\gamma\}\in I^\phi(\mathbb{Q}) \\ \gamma\sim\gamma'}} \beta_{\phi,\{\gamma\}} \Bigg)\, \mathcal{O}_{\gamma'}(f_{v_1}) = 0$$

où, étant donné que $\mathrm{supp}(f_{v_1})$ reste dans le compact $\widetilde{K}_{v_1}$, la somme porte sur un nombre fini de classes de conjugaisons semi-simples régulières dans $G(\mathbb{Q}_{v_1})$ intersectant le compact $\widetilde{K}_{v_1}$ (*cf.* les remarques 5.12.6 et 6.4.3).

Étant donné que ces classes de conjugaison sont fermées, disjointes et en nombre fini on peut les séparer par des éléments $f_{v_1} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_{v_1}))$ vérifiant $\mathrm{supp}(f_{v_1}) \subset \widetilde{K}_{v_1}$.

On obtient donc que $\forall\, \gamma' \in G(\mathbb{Q}_{v_1})$ semi-simple régulier

$$\sum_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R}) \text{ et } G(\mathbb{Q}_p) \\ \gamma\sim\gamma'}} \alpha_{\{\gamma\}} = \sum_{\substack{\phi,\{\gamma\}\in I^\phi(\mathbb{Q}) \\ \gamma\sim\gamma'}} \beta_{\phi,\{\gamma\}}$$

Remarquons maintenant que si ϕ est non basique et $\gamma_1 \in I^\phi(\mathbb{Q})$ régulier, γ_1 ne peut être conjugué dans $G(\mathbb{Q}_{v_1})$ à un élément γ_2 de $G(\mathbb{Q})$ elliptique dans $G(\mathbb{Q}_p)$. En effet, γ_1 vu comme élément de J_b se transfert en un élément γ_1' de $M(b)$ (le centralisateur du morphisme des pentes) la forme intérieure quasi-déployée de J_b (l'explicitation de l'existence de ce transfert est faite à la fin du théorème III.6.3.2). L'élément γ_2 serait alors stablement conjugué à un élément γ_1' d'un Levi propre de $G(\mathbb{Q}_p)$ ce qui d'après le lemme 6.3.1 est incompatible avec le fait que γ_2 est elliptique régulier.

On en déduit donc :

$$\sum_{\substack{\phi \text{ non basique} \\ \{\gamma\}\in\{I^\phi(\mathbb{Q})\}}} \beta_{\phi,\{\gamma\}} = 0$$

On peut maintenant appliquer de nouveau le théorème 5.12.5 à la strate basique pour obtenir que $\forall\, f_{v_1},\ \mathrm{supp}(f_{v_1}) \subset \widetilde{K}_{v_1}$

$$\mathrm{tr}\,(f\times\tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \mathrm{tr}\,(f\times\tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}(b_0), \mathcal{L}_\rho)])$$

Nous pouvons maintenant faire varier f^{v_1} et τ tels que $\mathrm{supp}(f^{v_1}) \subset \widetilde{K}^{v_1}$ et $v(\tau) \geqslant N$. On peut alors appliquer le théorème 7.1.5 pour conclure. □

Remarque 7.2.4. — Dans le théorème précédent, dans le second cas, lorsque G est un groupe de similitudes unitaires en trois variables la restriction de W_{E_ν} à $W_{E_\nu\mathcal{K}_p}$ est inutile. C'est une conséquence du théorème A.7.8.

7.2.1. Principes d'une démonstration n'utilisant pas la théorie des types

Voici une méthode permettant d'enlever l'hypothèse d'existence de types supercuspidaux dans le théorème précédent et est donc un premier pas vers la démonstration sans restriction du théorème précédent pour pour tous les groupes unitaires $U(n)$ avec n quelconque.

La méthode consiste à utiliser la proposition 2.1 de [**13**] reliant traces et traces compactes sur un groupe réductif p-adique. Avec les notations de [**13**], si f est une fonction dans l'algèbre de Hecke de $G(\mathbb{Q}_p)$ et π une représentation irréductible de $G(\mathbb{Q}_p)$ alors $\mathrm{tr}_\pi(f)$ s'exprime comme une combinaison linéaire indexée par une suite de paraboliques standards P de $G_{\mathbb{Q}_p}$ des traces de $\overline{f}^P \mathbf{1}_{M(\mathbb{Q}_p)_c}$ sur le module de Jacquet associé à π et P, où :

- $\overline{f}$ est une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $f^g = f(g{\bullet}g^{-1})$
- $\overline{f}^P$ désigne le terme constant de $\overline{f}$ comme fonction sur un sous-groupe de Levi associé à P
- $M(\mathbb{Q}_p)_c$ désigne les éléments compacts de $M(\mathbb{Q}_p)$, un sous-groupe de Levi associé à P, c'est-à-dire les éléments semi-simples réguliers contenus dans un sous-groupe compact modulo le centre de $M(\mathbb{Q}_p)$.

En particulier, si f est un pseudo-coefficient supercuspidal $\overline{f}^P$ est une combinaison linéaire de termes constants de f le long de paraboliques P^g et est donc nul pour $P \neq G_{\mathbb{Q}_p}$. On en déduit que pour un tel f et toute représentation irréductible π, $\mathrm{tr}_\pi(f) = \mathrm{tr}_\pi(\overline{f}\mathbf{1}_{G(\mathbb{Q}_p)_c})$. Cela démontre l'existence de coefficients supercuspidaux à support dans les éléments compacts.

Or pour les groupes avec lesquels nous travaillons tout élément compact est dans le normalisateur d'un sous-groupe parahorique. En particulier si f est à support dans les éléments compacts on peut écrire f comme combinaison linéaire de fonctions de la forme $f_0 * \delta_g$ où f_0 est à support dans un parahorique $K_{\mathcal{L}}$ (avec les notations de la section 5.11) pour une multichaîne $\mathcal{L}$ et $g \in N_{\mathcal{L}}$ le normalisateur de $K_{\mathcal{L}}$ (les $\mathcal{L}$ variant dans la combinaison linéaire). Or les distributions avec lesquelles nous travaillons sont invariantes par conjugaison en p. On peut alors se ramener à évaluer la trace de notre fonction sur la fibre spéciale comme une combinaison linéaire de traces fonctions à support dans le *même* normalisateur d'un parahorique en p.

La formule des traces sur la fibre spéciale (théorème 5.12.5) s'applique à chacun des termes de cette combinaison linéaire. On vérifie que cela est suffisant pour appliquer la méthode de la démonstration précédente.

7.2.2. Conjecture générale. — La cohomologie de la variété de Shimura est une somme indexée par $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ de la cohomologie des strates associées. Plus généralement, on conjecture que si $\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))$ est telle que Π intervienne de façon non nulle dans la cohomologie de la strate indexée par $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ (dans $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$) alors la classe d'équivalence inertielle de Π_p est associée à une représentation supercuspidale d'un sous-groupe de Levi contenu dans $M(b)$, le centralisateur du morphisme des pentes. C'est le cas dans [**34**].

CHAPITRE 8
APPLICATION À LA COHOMOLOGIE DES ESPACES DE RAPOPORT-ZINK DE TYPE E.L. ET P.E.L.

Nous démontrons dans ce chapitre les principaux résultats de ce livre, à savoir les conjectures de Kottwitz ([**65**] conjecture 5.1, [**32**] conjecture 5.3) pour la partie supercuspidale de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink basiques suivants :

• Les espaces de type E.L. non ramifiés pour lesquels le groupe J_b est anisotrope modulo le centre ou bien égal à G (théorèmes 8.1.4 et 8.1.5) (la restriction sur J_b provient du fait que cette hypothèse simplifie la comparaison des formules des traces)
• Pour les espaces de type P.E.L. non ramifiés associés au groupe unitaire $U(3)$ sur des extensions de degré impaires de $\mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$, nous les démontrons pour les représentations supercuspidales stables. Nous démontrons des résultats plus faibles pour les autres représentations supercuspidales. (théorème 8.2.2)
• De même pour $U(n)$ en supposant certains faits connus concernant l'analyse harmonique sur les groupes unitaires locaux et globaux en n variables.

Avec le cas des espaces de type P.E.L. non ramifiés associés au groupe $U(3)$ nous donnons ainsi le premier exemple de loi de réciprocité locale non abélienne construite géométriquement et associée à des groupes autres que des formes intérieures du groupe linéaire.

8.1. Espaces de type E.L. non ramifiés

8.1.1. Construction de données globales à partir de données locales

8.1.1.1. Le résultat de Clozel. — Commençons par rappeler les résultats de la seconde section de [**14**] qui donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de formes intérieures locales d'un groupe unitaire presque-partout localement triviale provienne d'un groupe unitaire global. Ces conditions sont déduites du formalisme développé par Kottwitz pour étudier la cohomologie galoisienne des groupes réductifs sur les corps de nombres.

Soit donc F un corps C.M. de sous corps totalement réel maximal F^+. Supposons nous donnée une famille $(U_v)_v$, où v parcourt les places de F^+, de groupes unitaires en n variables sur F_v^+ (nous entendons par là que U_v est une forme intérieure du groupe $U(n)_{F_v^+}$ où $U(n)/F^+$ est le groupe unitaire quasi-dépolyé en n variables associé à l'extension quadratique $F|F^+$). Soit Φ un type C.M. de F. Lorsque v parcourt les places infinies de F^+ les groupes U_v sont donnés par des couples d'entiers $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Phi}$ tels que si τ induit v alors

$$U_v \simeq U(p_\tau, q_\tau)$$

Si v est une place de F^+ décomposée dans F, U_v est du type $\mathbf{GL}_a(D)$ où $a|n$ et D/F_v^+ est une algèbre à division d'invariant $r/(n/a)$ avec $r \wedge n/a = 1$. Avec les notations de (2.3) de [**14**], lorsque n est pair, l'invariant local associé dans $\mu_n^D \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est ra mod n. Dans ce cas, la composante en v de l'invariant global associé est donc ra mod 2. Qui est non nul si et seulement si a est impair (puisque a impaire implique r impair).

Si v est une place finie de F^+ inerte dans F, si n est impaire, il y a un unique groupe unitaire en n variables sur F_v^+, le groupe unitaire quasi-déployé. Le groupe U_v est donc ce groupe. Si n est pair, il y en a deux : la forme quasidéployée et l'autre (suivant que le discriminant de la forme hermitienne définissant le groupe est une norme de l'extension quadratique ou non). Dans ce cas-là, il y a donc deux possibilités pour U_v.

Les résultats de la section 2 de [**14**] s'énoncent ainsi :

Proposition 8.1.1. — *Supposons que pour presque tout v, U_v est quasi-déployé.*

Si n est impair, il existe un groupe unitaire U/F^+ tel que $\forall\, v$ $U_{F_v^+} \simeq U_v$.

Si n est pair, notons A le cardinal de l'ensemble des places finies déployées de F^+ telles que U_v soit de la forme $\mathbf{GL}_a(D)$ avec a impair, notons B le cardinal des places finies inertes de F^+ telles que U_v soit non quasi-déployé. Il existe un groupe unitaire U/F^+ tel que $\forall\, v$ $U_{F_v^+} \simeq U_v$ ssi

$$\frac{n}{2}[F^+ : \mathbb{Q}] + \sum_{\tau \in \Phi} p_\tau \equiv A + B \ mod\ 2$$

Dans tous les cas, U est le groupe unitaire associé à $(\mathcal{B}, *)$ où $\mathcal{B}/F$ est une algèbre simple et $*$ une involution de seconde espèce.

8.1.1.2. Un lemme

Lemme 8.1.2. — *Soit $F'|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini. Il existe un corps de nombres totalement réel F^0 tel que p soit inerte dans F^0 et $F_p^0 \simeq F'$.*

Démonstration. — Écrivons pour cela $F' = \mathbb{Q}_p(\alpha)$ avec $P \in \mathbb{Q}_p[X]$ le polynôme minimal de α. On peut choisir α tel que P soit unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Notons d le degré de P. Alors, le lemme de Krasner montre que pour $Q \in \mathbb{Z}_p[X]$ suffisamment proche de P, Q est irréductible et une racine de Q engendre F'.

Par densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$ le lemme se ramène alors à montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d, pour tout voisinage p-adique de Q dans les polynômes à coefficients entiers de degré d il existe un polynôme dont toutes les racines soient réelles. Le fait que dans dans l'extension construite à partir d'une racine d'un tel polynôme p reste inerte est conséquence du fait que ce polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ reste irréductible dans $\mathbb{Q}_p[X]$.

Soit $E = \mathbb{R}[X]_d$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égal à d. Pour tout entier N, $p^N \cdot \mathbb{Z}[X]_d$ est un réseau de E. Considérons l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}\varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}\\ R &\longmapsto (R(0), \dots, R(d))\end{aligned}$$

Le groupe $\varphi(p^N \cdot \mathbb{Z}[X]_d)$ est un réseau de $\mathbb{R}^{d+1}$. Et l'on veut montrer que $\varphi(Q + p^N \cdot \mathbb{Z}[X]_d)$ intersecte l'ensemble $\{x_0 < 0, x_1 > 0, x_2 < 0, \dots\}$. Or on montre aisément que pour tout réseau Λ et tout $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, $x + \Lambda$ intersecte un tel ensemble. $\square$

8.1.1.3. Construction d'une donnée de type P.E.L. globale à partir d'une donnée de Rapoport-Zink locale de type E.L. non ramifiée simple. — Soit (F', V', b', μ') une donnée de type E.L. non ramifiée simple (I.2.2.1) sans sa classe de σ-conjugaison. Nous notons $n = \dim_{F'}(V')$. Soit F^+ un corps de nombres totalement réel dans lequel p est inerte et tel que $F_p^+ \simeq F'$ (lemme 8.1.2). Nous fixons définitivement un isomorphisme $F_p^+ \xrightarrow{\sim} F'$. Soit $\mathcal{K}$ un corps quadratique imaginaire dans lequel p est décomposé. Notons F le corps C.M. $F^+\mathcal{K}$. Notons $p = v_1 v_1^c$ la décomposition de p dans F. Fixons un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ (où, rappelons le, $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$). Définissons le type C.M. Φ de F de la façon suivante :

$$\Phi = \{\tau \in \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}) \mid \nu \circ \tau : F \longhookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p} \text{ induit } v_1\}$$

Rappelons que le cocaractère μ' est donné par des couples d'entiers

$$(p'_\tau, q'_\tau)_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F', \overline{\mathbb{Q}_p})}.$$

Pour $\tau \in \Phi$, τ induit un plongement $\nu \circ \tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ qui via l'isomorphisme $F_{v_1} \simeq F'$ (induit par l'isomorphisme $F_p^+ \simeq F'$) induit un plongement $\alpha(\tau) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F', \overline{\mathbb{Q}_p})$. Nous noterons $(p_\tau, q_\tau) = (p'_{\alpha(\tau)}, q'_{\alpha(\tau)})$).

Construisons un système $(U_v)_v$ comme dans le 8.1.1.1. Pour toute place v de F^+ divisant l'infini, il existe un unique $\tau \in \Phi$ tel que τ induise v. Posons alors

$$U_v = U(p_\tau, q_\tau)$$

Posons également

$$U_p = \mathrm{GL}_n(F')$$

Choisissons une place finie w de F^+ différente de p, décomposée dans F, et posons U_w comme étant égal au groupe des unités d'une algèbre à division sur F_w^+. Posons pour toute place finie w' de F^+ décomposée dans F, différente de p et w, $U_{w'} = \mathbf{GL}_n(F_{w'}^+)$. Si n est impair, faisons un choix quelconque (presque partout quasi-déployé) de groupes unitaires $U_{w''}$ en les places w'' de F^+ inertes dans F. Si n est pair, on peut toujours choisir le nombre de $U_{w''}$ non quasi-déployés de tel manière que l'équation de la proposition 8.1.1 soit satisfaite.

A ce choix de groupes locaux, la proposition 8.1.1 associe un couple $(\mathcal{B}, *)$ où $\mathcal{B}$ est une algèbre simple sur F et $*$ une involution de seconde espèce sur $\mathcal{B}$.

Étant donné qu'en la place w, $\mathcal{B}$ est une algèbre à division, $\mathcal{B}$ est une algèbre à division. Posons

$$B = \mathcal{B}^{\mathrm{opp}}$$

qui est donc muni de l'involution $*$. D'après le lemme 2.8 de [**51**], l'ensemble des $b \in B^{*=1} \otimes \mathbb{R}$ tels que le produit symétrique $(x,y)_b = \mathrm{tr}_{B_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}}(xby^*)$ sur $B_{\mathbb{R}} \times B_{\mathbb{R}}$ soit positif est un cône ouvert non vide. Par un argument de densité, cet ensemble rencontre donc l'ensemble $B^\times \cap B^{*=1}$. On en déduit qu'il existe un $b \in B^\times$ tel que $b^* = b$ et tel que l'involution $\#$ définie sur B par

$$\forall x \in B \quad x^{\#} = bx^*b^{-1}$$

est une involution positive de seconde espèce. Fixons un tel b et notons $\#$ l'involution associée. Soit $\beta \in F$ tel que $\beta^{\#} = -\beta$. Posons $V = B$ vu comme B-module à gauche. Considérons le produit $\langle \bullet, \bullet \rangle$ défini sur $V \times V$ par

$$\forall x, y \in V \quad \langle x, y \rangle = \mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xb^{-1}\beta y^{\#})$$

C'est un produit symplectique qui fait de V un $(B, \#)$-module hermitien. De plus,

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathcal{B} = \mathrm{End}_B(V)\ \forall x, y \in V \quad \langle a(x), y \rangle &= \langle xa, y \rangle \\
&= \mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xab^{-1}\beta y^{\#}) \\
&= \mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xb^{-1}\beta(bab^{-1})y^{\#}) \\
&= \mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xb^{-1}\beta(y\underbrace{(bab^{-1})^{\#}}_{a^*})^{\#}) \\
&= \langle x, a^*(y) \rangle
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathcal{B} = \mathrm{End}_B(V)$ muni de l'adjonction associée à $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est égal au couple $(\mathcal{B}, *)$. Soit G le groupe des similitudes unitaires associé à $(B, \#, V, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ et G_1 le groupe unitaire. Le groupe G_1 est donc le groupe unitaire associé à $(\mathcal{B}, *)$. Étant donné qu'à l'infini les signatures (p_τ, q_τ) sont fixées, il existe une unique classe de $G_1(\mathbb{R})$-conjugaison h de morphisme d'algèbre à involution de $(\mathbb{C}, c)$ dans $(\mathcal{B}, *)$ telle que le produit $\langle \bullet, h(i) \bullet \rangle$ soit défini positif. Fixons un tel $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V)$. Et posons

$$\mathcal{D} = (B, \#, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, h)$$

qui est une donnée de type P.E.L. au sens du chapitre I.

D'après le choix fait pour Φ et les (p_τ, q_τ) en fonction des (p'_τ, q'_τ) on en déduit la proposition suivante :

Proposition 8.1.3. — *Étant donnée une donnée locale de type E.L. non ramifiée simple sur une extension de $\mathbb{Q}_p$, il existe une donnée globale de type P.E.L. $\mathcal{D} = (B, \#, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, h)$, un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ tel que via ν, $\mathcal{D}$ induise (i.e. après équivalence de Morita, cf. I.2.3.5) la donnée locale. On peut de plus supposer que* $\mathrm{End}_B(V)$ *est une algèbre à division qui est en toutes les places finies soit déployée, soit une algèbre à division. On peut également supposer le corps C.M.*

F de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un corps quadratique imaginaire et où p est inerte dans F^+ et décomposé dans $\mathcal{K}$.

8.1.2. Le théorème principal. — Si H est un groupe réductif p-adique, si V est un H-module lisse, on peut définir le sous H-module V_{cusp} de V, la partie supercuspidale, en utilisant par exemple le centre de Bernstein :

$$V_{\text{cusp}} = \bigoplus_e e \cdot V$$

où e parcourt les idempotents du centre de Bernstein de H associés aux classes d'équivalences inertielles des représentations supercuspidales de H.

Théorème 8.1.4. — *Soit (V, F, b, μ) une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple basique. Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps reflex associé. Supposons le groupe réductif J_b anisotrope modulo son centre, c'est-à-dire $J_b = D^\times$ pour une algèbre à division D sur F d'invariant calculé en fonction de μ. Notons JL la correspondance de Jacquet-Langlands. Soit π une représentation irréductible de J_b telle que $JL(\pi)$ soit supercuspidale. Il y a une égalité dans le groupe de Grothendieck* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$

$$\sum_i (-1)^{i+\sum_\tau p_\tau q_\tau} \Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}(H^i_c(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes}\, \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi) \Big]_{\text{cusp}}$$
$$= [JL(\pi)] \otimes \big[r_\mu \circ \widetilde{\sigma}_\ell(JL(\pi))_{|E} \big] \ |.|^{\sum_\tau p_\tau q_\tau / 2}$$

où $\widetilde{\sigma}_\ell$ la correspondance de Langlands locale « absolue » ℓ-adique pour le groupe linéaire (A.7.1), r_μ la représentation du L-groupe associé (A.7.2) sur E et (p_τ, q_τ) la signature locale associée à l'espace de Rapoport-Zink.

Rappelons avec les notations du I.2.1 que la classe de conjugaison de μ est donnée par des entiers $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ (les (p_τ, q_τ) ci-dessus), et que J_b est anisotrope ssi

$$\Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i \Big) \wedge n = 1$$

Alors, $J_b = D^\times$ où l'invariant local de D est $\frac{1}{n} \sum_i a_i \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Il peut également arriver, lorsque $n | \sum_i a_i$, que J_b soit égal à $G(\mathbb{Q}_p)$. Cela ne veut pas dire que les groupe p-divisibles associés sont étales (ce qui est la cas si et seulement si $\forall i \ a_i = 0$), car le groupe J_b tient compte de l'action de F. Dans ce cas-là, la correspondance de Jacquet-Langlands est l'identité et on a le théorème suivant :

Théorème 8.1.5. — *Soit (V, F, b, μ) une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple basique. Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps reflex associé. Supposons le groupe réductif J_b égal à $G = \mathbf{GL}_n$. Soit π une représentation irréductible supercuspidale de*

J_b. *Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$

$$\sum_i (-1)^{i+\sum_\tau p_\tau q_\tau} \Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}(H^i_c(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi) \Big]_{\mathrm{cusp}} = [\pi] \otimes \big[r_\mu \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E} \big] \; |.|^{\sum_\tau p_\tau q_\tau / 2}$$

Voici la démonstration des deux théorèmes ci-dessus :

Démonstration. — Soit $\mathcal{D}$ une donnée de type P.E.L. globale induisant la donnée locale, comme dans la proposition 8.1.3. Soit Sh la variété de Shimura associée. Le groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ est $\mathbf{GL}_n(F_v) \times \mathbb{Q}_p^\times$ (où F_v est le corps local noté F dans les énoncés). Notons $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$ l'espace de Rapoport-Zink local associé à la donnée locale. L'espace de Rapoport-Zink associé à $\mathcal{D}$ en p et à la classe basique $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ est donc

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) = \breve{\mathcal{M}}(b, \mu) \times \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Z}_p^\times$$

D'après les résultats de l'appendice A, dans le groupe de Grothendieck $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$, si

$$[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)] = (-1)^{\dim \mathrm{Sh}} \, |\ker^1(\mathbb{Q}, G)| \sum_{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))} [\Pi] \otimes [R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi)]$$

la représentation semi-simple $[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi')]$ est non nulle si et seulement si il existe $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$ telle que $\Pi' \simeq \Pi_f$. De plus, pour une telle $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$, contribuant à $[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]_{\mathrm{cusp}}$, *i.e.* telle que Π_p soit supercuspidale,

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)] = m_\Pi [r_\mu \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\Pi_p)] \; |.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}$$

où m_Π désigne la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes sur G. On obtient donc l'égalité suivante

$$[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]_{\mathrm{cusp}} = (-1)^{\dim \mathrm{Sh}} \, |\ker^1(\mathbb{Q}, G)| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho \\ \Pi_p \text{ supercuspidale}}} [\Pi_f] \otimes [r_\mu \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\Pi_p)] \; |.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}$$

Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la strate basique et I^ϕ le groupe réductif associé. Rappelons que $I^\phi(\mathbb{R})$ est la forme compacte modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, que $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = J_b \times \mathbb{Q}_p^\times$ et que $I^\phi(\mathbf{A}_f^p) = G(\mathbf{A}_f^p)$.

Le corollaire 4.6.3 couplé au théorème 7.2.1 montre que l'on a l'égalité suivante :

$$[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]_{\mathrm{cusp}} = |\ker^1(\mathbb{Q}, G)| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{T}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\rho} \\ \Pi_p \text{ supercuspidale}}} [\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b \times \mathbb{Q}_p^\times}(H^\bullet_c(\breve{\mathcal{M}}_K(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b), \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \Pi_p)]_{\mathrm{cusp}} \otimes [\Pi^p] \; |.|^{\dim \mathrm{Sh}}$$

Si $\Pi_p = \pi_1 \otimes \chi$ où π_1 est une représentation irréductible de J_b et χ un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$, il y a un isomorphisme

$$\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b \times \mathbb{Q}_p^\times}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b), \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \Pi_p) = \varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K(b, \mu), \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi_1) \otimes \chi$$

comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{GL}_n(F) \times \mathbb{Q}_p^\times$.

Fixons $\rho = 1$. Il existe une représentation automorphe Π de I^ϕ telle que $\Pi_p = \pi \otimes 1$ et $\Pi_\infty = 1$ ([**12**]). Utilisons le théorème A.4.1 appliqué aux groupes formes intérieurs I^ϕ et G. On obtient alors le résultat en égalant les deux expressions ci-dessus pour $[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]_{\mathrm{cusp}}$ et en prenant la partie Π_f^p-isotypique (après avoir divisé par $|\ker^1(\mathbb{Q}, G)| m_\Pi$, où m_Π désigne la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes sur I^ϕ qui est égale à celle de $\pi_\infty \otimes JL(\Pi_p) \otimes \Pi_f^p$ dans l'espace des formes automorphes sur G pour une représentation de la série discrète π_∞ ayant de la cohomologie dans ρ, d'après A.4.1). $\square$

8.2. Espaces de type P.E.L. non ramifiés

8.2.1. Construction de données globales à partir de données locales

Soit $F'|\mathbb{Q}_p$ une extension non ramifiée de degré pair. On veut trouver un corps de nombres totalement réel F^+ et un corps quadratique imaginaire $\mathcal{K}|\mathbb{Q}$ dans lesquels p est inerte, tels que F_p^+ et $\mathcal{K}_p$ soient linéairement disjointes (c'est-à-dire p reste inerte dans $F^+\mathcal{K}$) et tels que $F' = F_p^+\mathcal{K}_p$. Cela est possible si et seulement si $[F' : \mathbb{Q}_p]$ n'est pas un multiple de 4 (utiliser le lemme 8.1.2). De la même manière que pour la proposition 8.1.3 on montre alors la proposition suivante :

Proposition 8.2.1. — *Étant donnée une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple sur une extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré qui n'est pas un multiple de 4, il existe une donnée globale de type P.E.L. $\mathcal{D} = (B, \#, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, h)$, un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ tel que via ν, $\mathcal{D}$ induise la donnée locale. On peut de plus supposer que* $\mathrm{End}_B(V)$ *est une algèbre à division qui est en toutes les places finies soit déployée, soit une algèbre à division. On peut également supposer le corps C.M. F de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un corps quadratique imaginaire.*

8.2.2. Le théorème principal pour $GU(3)$

Théorème 8.2.2. — *Soit $(F, *, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, b, \mu)$ une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple basique. Supposons $[F : \mathbb{Q}_p]/2$ impair et* $\dim_F(V) = 3$. *Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps reflex associé.*

(1) *Soit $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L G$ une classe de conjugaison de L-paramètre vérifiant :* $\mathrm{im}(\psi)$ *n'est pas contenue dans ${}^L B$ pour un sous groupe de Borel B de G. Soit $\Pi(\psi)$ le L-paquet supercuspidal de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ associé (C.4.2). Rappelons que*

$J_b = G(\mathbb{Q}_p) = GU(3)$. *Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$:

$$\sum_{\pi \in \Pi(\psi)} \Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b} \Big(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi \Big) \Big]_{\mathrm{cusp}} = (-1)^{\sum_\tau p_\tau q_\tau/2} \sum_{\pi \in \Pi(\psi)} [\pi] \otimes \big[r_\mu \circ \psi_{|W_E} \big] \; |.|^{-\sum_\tau p_\tau q_\tau/4}$$

En particulier, si $\Pi(\psi)$ *est stable la conjecture de Kottwitz est vérifiée.*

(2) *Soit* ξ *un caractère du groupe endoscopique* H *de* $U(3)$ *(appendice C) et* $\mathrm{St}_H(\xi)$ *la représentation de Steinberg associée. Soit* $\Pi(\mathrm{St}_H(\xi)) = \{\pi^2(\xi), \pi^s(\xi)\}$ *le L-paquet transfert endoscopique à* $U(3)$ *(C.6). Soit* $\Pi = \{\pi^2, \pi^s\}$ *un L-paquet de représentations de* $G(\mathbb{Q}_p)$ *tel que* $\pi^2_{|U(3)} = \pi^2(\xi), \pi^s_{|U(3)} = \pi^s(\xi)$. *A* Π *est associé un L-paramètre* $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \times SL_2(\mathbb{C}) \to {}^L G$. *Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$:

$$\Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b} \Big(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi^s \Big) \Big]_{\mathrm{cusp}} + \Big[\varinjlim_K \mathrm{Ext}^\bullet_{J_b\text{-lisse}} (H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi^2) \Big]_{\mathrm{cusp}} = (-1)^{\sum_\tau p_\tau q_\tau/2} [\pi^s] \otimes \big[r_\mu \circ \psi_{|W_E} \big] \; |.|^{-\sum_\tau p_\tau q_\tau/4}$$

(3) *Soit* χ *un caractère de* $G(\mathbb{Q}_p)$ *et* $\mathrm{St}_G(\chi)$ *la représentation de Steinberg associée. Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}) \times W_E)$:

$$\Big[\mathrm{Ext}^\bullet_{J_b\text{-lisse}} \Big(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \mathrm{St}_G(\chi) \Big) \Big]_{\mathrm{cusp}} = 0$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{D}$ une donnée globale de type P.E.L. induisant la donnée locale comme dans la proposition 8.2.1. Soit Sh la variété de Shimura associée. Il y a un isomorphisme d'espaces analytiques $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) \simeq \breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$. Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la classe basique.

Dans les trois cas de l'énoncé, pour chacun des L-paquets locaux en p, Π (dans le troisième cas $\{\mathrm{St}_G(\chi)\}$ est un L-paquet, *cf.* page 174 de [**69**]), on peut trouver une représentation irréductible de $G(\mathbf{A}_f^p)$, Π^p, telle que

$$\forall \pi_p \in \Pi \quad \mathrm{Triv}_\infty \otimes \pi_p \otimes \Pi^p \in \mathcal{T}(I^\phi)_{\mathrm{Triv}_\infty}$$

En effet, il suffit de choisir une représentation $\pi_p \in \Pi$, de la globaliser ([**12**]) (dans le troisième cas cela est une conséquence du fait que $\mathrm{St}_G(\chi)$ est de carré intégrable). Alors, les L-paquets globaux de représentations de G étant stables (c'est une conséquence du fait que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division, [**69**] théorème 14.6.3) tous les éléments d'un même L-paquet apparaissent avec la même multiplicité dans le spectre discret de G (multiplicité qui est 1). On peut également supposer qu'en une place v décomposée dans $\mathcal{K}$, Π_v est supercuspidale.

On peut appliquer la seconde partie du théorème 7.2.1. Utilisons également le théorème A.7.8. Le résultat s'en déduit comme dans la démonstration du théorème

8.1.4 en prenant la partie Π^p-isotypique dans les deux expressions différentes pour $[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})]_{\mathrm{cusp}}$ en termes de représentations automorphes de G et I^ϕ, et en utilisant le fait que si deux représentations automorphes de G, resp. I^ϕ, sont isomorphes hors p elle sont dans le même L-paquet global et que donc leur composante en p sont dans le même L-paquet local ([**69**])(et en utilisant également le fait énoncé ci-dessus que la multiplicité est constante pour tous les éléments d'un même L-paquet global). □

8.2.3. Spéculations. — Le théorème précédent ne donne une démonstration de la conjecture de Kottwitz que dans le cas des représentations supercuspidales π telles que $\{\pi\}$ soit un L-paquet, c'est-à-dire telles que le changement de base de π soit une représentation supercuspidale de $\mathbf{GL}_3(F) \times K^\times$. La raison de « l'échec » de la méthode dans le cas des autres représentations supercuspidales de $G(\mathbb{Q})$ est que quelque soit la globalisation d'une représentation locale en une représentation globale de G, le L-paquet global obtenu (il faudrait plutôt parler de A-paquet) est stable et donc les multiplicités de chaque élément sont égales. On obtient donc dans tous les cas dans les membres de gauche du théorème 8.2.2 une somme sur tous les éléments du L-paquet local qui ne permet pas de séparer chaque terme.

Voila une stratégie permettant d'attaquer la conjecture de Kottwitz dans les autres cas : il faudrait travailler avec des groupes unitaires G qui ne sont plus associés à une algèbre à division mais à $M_3(F)$. En effet, dans ce cas-là le spectre discret de G est beaucoup plus riche que dans le cas précédent. Par exemple, avec les notations de C.4.2 si ρ est une représentation supercuspidale stable de $H(\mathbb{Q}_p)$, si $\Pi(\rho)$ désigne le L-paquet associé de $U(3)$ celui ci est de cardinal 2. On peut globaliser ρ en une représentation de l'analogue global du groupe endoscopique local H ([**69**]) dont le changement de base à GL_2 est cuspidale, puis considérer le transfert endoscopique global de cette représentation à $U(3)$. Notons Π le L-paquet global obtenu. Avec les notations de [**69**], $\Pi \in \Pi_e(G)$. En p, le L-paquet local associé à Π est le L-paquet local $\Pi(\rho)$. De plus, les multiplicités de chaque élément de ce L-paquet global dans le spectre discret de G sont calculées dans [**69**] (*cf.* également [**70**]). Ces multiplicités ne sont pas constantes. On peut ainsi espérer obtenir suffisamment de relations pour isoler chaque facteur dans les sommes des membres de gauche du théorème 8.2.2. Cependant, pour l'algèbre à division $M_3(F)$ les variétés de Shimura associées ne sont pas en général compactes. Pour avoir des variétés de Shimura compactes, il faut imposer que le groupe unitaire à l'infini possède un facteur simple compacte (c'est-à-dire $\exists\, \tau\ p_\tau = 0$ ou $q_\tau = 0$). Cela implique que la variété de Shimura est propre sur la fibre générique. Il resterait à vérifier que c'est également le cas pour les modèles entiers (un exercice en théorie des modèles de Néron).

APPENDICE A

RÉSULTATS CONCERNANT LES REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES DES GROUPES UNITAIRES, LEUR COHOMOLOGIE ET LES REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ASSOCIÉES

A.1. Hypothèses générales

Soit $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle \bullet, \bullet \rangle, h)$ une donnée de type P.E.L. globale comme dans le premier chapitre.

Nous supposerons dans cet appendice que que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division D sur le corps C.M. F. Les variétés de Shimura associées sont donc propres. Cela implique également que toutes les représentations automorphes des groupes unitaires associés sont globalement stables au sens où les groupes endoscopiques globaux s'annulent ([**50**]). Nous supposons de plus que le corps F est de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}|\mathbb{Q}$ est une extension quadratique imaginaire. Nous ferons également l'hypothèse qu'en toute place v de F, l'algèbre simple D_v est soit déployée soit une algèbre à division.

Soit Φ un type C.M. de F. Rappelons que

$$G_1(\mathbb{R}) \simeq \prod_{\tau \in \Phi} U(p_\tau, q_\tau)$$

où $p_\tau + q_\tau = n$ et que

$$G(\mathbb{C}) \simeq \prod_{\Phi} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$$

Rappelons que ρ est une représentation algébrique irréductible de dimension finie de $G_{\mathbb{C}}$ et que nous notons également ρ sa restriction à $G(\mathbb{R})$.

Si v est une place finie de F divisant un premier p de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$, le groupe $\mathbf{GL}_n(F_v)$ est un facteur de $G(\mathbb{Q}_p)$. Si Π est une représentation automorphe de G on peut donc définir Π_v comme représentation irréductible de $\mathbf{GL}_n(F_v)$.

Le groupe G étant anisotrope modulo son centre, l'espace des formes automorphes sur G de caractère central fixé est décomposé discrètement ; il n'y a pas de spectre continu. Si Π est une représentation automorphe de G on peut donc définir sa multiplicité comme étant la multiplicité de la classe d'isomorphisme de Π dans le $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$-module admissible des formes automorphes se transformant selon le caractère central de Π. Nous noterons m_Π cette multiplicité.

A.2. Résultats de Clozel, Harris et Labesse sur la pureté de la cohomologie des représentations automorphes

Certains des résultats énoncés ci-dessous sont démontrés par Clozel dans [**14**] (on pourra également consulter le corollaire VI.2.7 de [**34**]). Ils sont démontrés dans le cas de signature quelconque par Harris et Labesse dans [**33**] (*cf.* également [**63**]).

Définition A.2.1. — Nous noterons $\mathcal{T}(G)_\rho$ l'ensemble des représentations automorphes Π de G vérifiant que Π_∞ a de la cohomologie dans ρ.

Bien que son énoncé ne le fasse pas apparaître, la démonstration du résultat qui suit utilise la cohomologie des variétés de Shimura de type P.E.L., et notamment les résultats de Kottwitz sur la cohomologie en une place de bonne réduction ([**50**]), couplés aux estimations connues sur les valeurs propres des composantes locales des représentations automorphes unitaires cuspidales de $\mathbf{GL}_n$ (c'est-à-dire les estimations connues concernant la conjecture de Ramanujan). Plus précisément, si Π est une représentation automorphe de G intervenant dans la cohomologie de la variété de Shimura associée, le lien démontré par Kottwitz entre les valeurs propres de Frobenius en une place de bonne réduction (qui vérifient certaines conditions grâce au théorème de pureté de Deligne) et les paramètres de Hecke associés permettent de démontrer que le motif (tout du moins sa réalisation ℓ-adique, De Rham) découpé par Π_f dans la variété de Shimura est pure de poids $\dim \mathrm{Sh}$.

Théorème A.2.2. — *Soit $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$ telle qu'il existe un premier p de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$ et une place finie v de F divisant p vérifiant : Π_v soit dans la série discrète. Alors,*

$$\dim H^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \Pi_\infty \otimes \rho) = \begin{cases} 1 & si\ i = \sum_\tau p_\tau q_\tau = \dim \mathrm{Sh} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*De plus, Π_∞ appartient au L-paquet de la série discrète de $G(\mathbb{R})$ formé des représentations de la série discrète de $G(\mathbb{R})$ ayant de la cohomologie dans ρ. Ce L-paquet est exactement la fibre du changement de base vers $G(\mathbb{C})$ en l'unique représentation tempérée de $G(\mathbb{C})$ ayant de la cohomologie dans ρ. Son cardinal est égal à $\dim r_\mu$ où r_μ est la représentation du L-groupe de G associée à μ ([**56**])(cf. A.7.3).*

Théorème A.2.3. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, supposons de plus que Π_v soit supercuspidale. Alors, pour toute représentation π'_∞ de $G(\mathbb{R})$ dans le L-paquet de la série discrète ci-dessus $\Pi' = \pi'_\infty \otimes \Pi_f \in \mathcal{T}(G)_\rho$. De plus, les multiplicités m_Π, $m_{\Pi'}$ de Π et Π' sont égales.*

A.3. Résultats de Clozel, Harris et Labesse sur le changement de base quadratique stable

Nous énonçons ici un théorème de Harris et Labesse démontré dans [**33**]. Le cas de signature $(1, n-1)$ est démontré par Clozel dans [**14**] (dans le VI.2 de [**34**] le résultat de Clozel est expliqué en détails, il y est également expliqué comment passer du cas des groupes unitaires au cas des groupes de similitudes unitaires). Les morphismes de L-groupes associés aux fonctorialités de Langlands que démontrent ce théorème sont exposés dans la démonstration du théorème A.7.2.

Soit p un premier de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$, $p = w_0 w_0^c$. Supposons l'algèbre à division $D = \mathrm{End}_B(V)$ déployée en p. Si $(v_i)_{i\in I}$ désigne un ensemble de représentants des classes de places v divisant p modulo l'action de c,

$$G(\mathbb{Q}_p) = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_n(F_{v_i}) \times \mathbb{Q}_p^\times$$

et si $\pi = (\otimes_i \pi_i) \otimes \chi$ est une représentation irréductible de $G(\mathbb{Q}_p)$ on peut définir le changement de base quadratique de π comme étant

$$BC(\pi) = (\otimes_{i\in I} \pi_i \otimes \breve{\pi}_i^c) \otimes (\chi \otimes \chi^{-1})$$

Lorsque D n'est plus déployée en p on peut encore définir un changement de base quadratique stable en composant le changement de base qui vient d'être décrit avec la correspondance de Jacquet-Langlands locale.

Si maintenant p un premier de $\mathbb{Q}$ en lequel $G_{\mathbb{Q}_p}$ est non ramifié, si π est une représentation sphérique de $G(\mathbb{Q}_p)$ on peut alors définir le changement de base non ramifié de π comme représentation de

$$\prod_{v|p} \mathrm{GL}_n(F_v) \times \prod_{w|p} \mathcal{K}_w^\times$$

où v parcourt des places de F et w de $\mathcal{K}$. Dans le cas où p est décomposé dans $\mathcal{K}$ on retrouve le cas précédent restreint aux représentations sphériques. Dans le cas où p n'est pas décomposé dans $\mathcal{K}$, si $BC(\pi) = (\otimes_v \pi'_v) \otimes \chi_w$, on a les relations

$$\forall\, v \quad \pi'_v \simeq \breve{\pi}'_{v^c}$$

Le théorème qui suit énonce l'existence d'un changement de base quadratique stable pour des représentation automorphes de G vers celles d'un groupe linéaire. Le mot stable signifie que l'on a composé un changement de base quadratique avec une correspondance de Jacquet-Langlands.

Théorème A.3.1. — *Soit $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$ telle qu'il existe un premier p décomposé dans $\mathcal{K}$ et une place v de F^+ divisant p telle que Π_v soit supercuspidale. Il existe alors une représentation automorphe cuspidale Π' de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ ainsi qu'un caractère de Hecke χ de $\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^\times$ vérifiant*

- $\chi = \chi^c_{\Pi|\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^\times}$

• *Si* Π_p *est non ramifiée alors* $(\Pi' \otimes \chi)_p$ *est le changement de base non ramifié de* Π_p

• Π'_∞ *est de la forme*

$$\bigotimes_{\tau \in \Phi} \pi'_\tau$$

où $\otimes_\tau \pi'_\tau$ *est l'unique représentation tempérée de* $G_1(\mathbb{C})$ *ayant de la cohomologie dans* $\rho_{|G_1(\mathbb{C})}$. *De plus,*

$$\chi_\infty = \rho^{-1}_{|\mathbb{C}^\times}$$

où $\mathbb{C}^\times \subset G(\mathbb{C})$ *désigne l'inclusion du facteur de similitude.*

• $\check{\Pi}' \simeq \Pi'^c$

• *Si* p *est décomposé dans* $\mathcal{K}$ *alors*

$$(\Pi' \otimes \chi)_p = BC(\Pi_p)$$

comme représentation de $(\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n \times \mathrm{Res}_{\mathcal{K}|\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m)(\mathbb{Q}_p)$.

• $\chi_{\Pi' | \mathbf{A}^\times_{\mathcal{K}}} = \chi/\chi^c$

Par multiplicité un forte, une telle représentation automorphe Π' est unique.

A.4. Résultats de Harris et Labesse sur la comparaison entre la formule des traces pour deux groupes unitaires formes intérieures

Soit v une place finie de F vérifiant $v \neq v^c$. Soient G_1 et G_2 deux groupes unitaires comme ci-dessus, formes intérieurs l'un de l'autre tels que $G_1(\mathbf{A}^v_f) = G_2(\mathbf{A}^v_f)$. Nous notons JL le transfert local des représentations supercuspidales de G_{1v} et G_{2v} vers les représentations de leur forme intérieur quasidéployée : $\mathrm{GL}_n(F_v)$.

Théorème A.4.1. — *Soit* $\Pi_1 \in \mathcal{T}(G_1)_\rho$ *telle que* $JL(\Pi_{1v})$ *soit supercuspidale. Alors, pour toute représentation* π_∞ *de* $G_2(\mathbb{R})$ *faisant partie du L-paquet de la série discrète ayant de la cohomologie dans* ρ, *il existe une* $\Pi_2 \in \mathcal{T}(G_2)_\rho$ *telle que*

• $\Pi_{2\infty} = \pi_\infty$

• $\Pi_2^v \simeq \Pi_1^v$

De plus, pour une telle Π_2

$$JL(\Pi_{2v}) = JL(\Pi_{1v})$$

et les multiplicités de Π_1 *et* Π_2 *sont égales.*

On déduit en particulier de ce théorème, du théorème A.2.2 et de la formule de Matushima que si Π_1 est comme dans l'énoncé, la multiplicité de $\Pi_{1,f}$ dans la cohomologie de la variété de Shimura associée est

$$\text{multiplicité}(\Pi_1) \times \dim r_\mu$$

Nous verrons en fait dans le théorème A.7.2 que le facteur $\dim r_\mu$ est la dimension d'une représentation galoisienne telle que la représentation galoisienne décomposée par $\Pi_{1,f}$ dans la cohomologie est multiplicité(Π_1)-fois cette représentation. Dans le cas de la signature $(1, n-1)$ ce théorème de divisibilité est démontré par Taylor en utilisant la théorie de Hodge-Tate p-adique (à l'origine dans une lettre de Taylor à Clozel, cet argument est esquissé dans [**30**] page 102 ; pour plus de détails, *cf.* [**34**] et notamment le lemme I.2.2 et la proposition VII.1.8). Dans le cas général, nous déduirons ce résultat du cas de signature $(1, n-1)$ (théorème A.7.2).

A.5. Résultats de Clozel, Harris, Kottwitz et Taylor sur les représentations galoisiennes

Voici une partie de l'énoncé du théorème VII.1.9 de [**34**] qui généralise le théorème principal de [**14**].

Théorème A.5.1. — *Soit* Π *une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ *satisfaisant les hypothèses suivantes :*

- $\check{\Pi} \simeq \Pi^c$
- Π_∞ *a même caractère infinitésimal que* $\check{\rho}_{|G_1(\mathbb{C})}$

Il existe alors une représentation continue

$$R_\ell(\Pi) : \boldsymbol{Gal}(\overline{F}|F) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

vérifiant

- *En toute place* v *de* F *ne divisant pas* ℓ *la restriction de* $R_\ell(\Pi)$ *à* W_{F_v} *est* $\sigma_\ell(\Pi_v^\vee) \otimes |.|^{(1-n)/2}$ *où* σ_ℓ *désigne la correspondance de Langlands locale pour* $\mathbf{GL}_n(F_v)$.
- *En toute place* v *où* $R_\ell(\Pi)$ *est non ramifiée, les valeurs propres de Frobenius sont algébriques pures de poids* $n-1$

A.6. Résultat de Kottwitz sur les représentations galoisiennes obtenues dans la cohomologie des variétés de Shimura en une place de bonne réduction

Dans l'article [**50**] Kottwitz démontre qu'en presque toutes les places de bonne réduction, la correspondance de Langlands locale non ramifiée est réalisée dans la cohomologie des variétés de Shimura que nous considérons. Ce résultat est le corollaire des nombreux travaux de Kottwitz sur la stabilisation de la formule des traces ainsi que de ses travaux sur le comptage des points des variétés de Shimura sur les corps finis ([**51**]). Nous renvoyons le lecteur au théorème 1 de [**50**] (et au nombreux travaux antérieurs de Kottwitz) pour l'énoncé. Le théorème A.7.2 est une généralisation de ce théorème à d'autres places.

A.7. Application aux représentations galoisiennes obtenues dans la cohomologie des variétés de Shimura de type P.E.L. de signature quelconque

Nous montrons que la représentation galoisienne associée à une représentation automorphe d'un groupe unitaire associé à une algèbre à division dans une variété de Shimura de signature quelconque est bien celle prédite dans [**56**], du moins en une place décomposée ou bien en d'autres places sous certaines hypothèses.

A.7.1. Correspondance de Langlands locale pour GL_n revisitée. — Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini. Soit

$$\sigma_\ell : \mathcal{A}_\ell(n,F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_\ell(n,F)$$

la correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_n(F)$ ℓ-adique, au sens où des deux cotés les représentations sont à valeurs dans des $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espaces vectoriels et où nous prenons comme définition de $\mathcal{G}_\ell(n,F)$: l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations $\rho : W_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ Frobenius semi-simples. L'ensemble $\mathcal{A}_\ell(n,F)$ est défini de la même façon que pour des coefficients complexes en remplaçant formellement $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$.

Considérons le groupe $H = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{n/F})$, et

$$^L H = \Big(\prod_{\tau\in I_F} \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})\Big) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$$

son L-groupe ℓ-adique où $I_F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F,\overline{\mathbb{Q}_p})$ sur lequel $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ agit par composition.

Le lemme de Shapiro

$$H^1(W_{\mathbb{Q}_p}, {}^L H^0) \simeq H^1(W_F, \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell}))$$

implique alors l'existence d'une bijection

$$\pi \longmapsto \widetilde{\sigma}_\ell(\pi)$$

entre $\mathcal{A}_\ell(n,F)$ et l'ensemble des classes de morphismes continus de $W_{\mathbb{Q}_p}$ dans $^L H$ induisant l'identité après projection sur $W_{\mathbb{Q}_p}$, tels que l'image du Frobenius de F dans $^L H^0$ soit semi-simple, et où deux tels morphismes sont dans la même classe si et seulement si ils sont conjugués par un élément de $^L H^0$. La correspondance $\widetilde{\sigma}$ est la correspondance de Langlands locale « absolue », c'est-à-dire sur $\mathbb{Q}_p$.

A.7.2. Le morphisme r_μ local. — Nous explicitons la définition de [**56**] dans notre cas.

Soit H comme précédemment et

$$\mu : \mathbb{G}_m/\overline{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow H_{/\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

un cocaractère. Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps de définition de la classe de conjugaison de μ.

$$H_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \simeq \prod_{\tau \in I_F} \mathrm{GL}_{n\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

et si via cet isomorphisme $\mu = (\mu_\tau)_{\tau \in I_F}$ où $\forall \tau$ $\mu_\tau \in \mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}^n \simeq X_*(\mathrm{GL}_n)/\text{conjugaison}$, $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E)$ est le stabilisateur de $(\mu_\tau)_\tau$ dans $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$.

Exemple A.7.1. — Si $\tau_0 \in I_F$ est fixé et $\forall \tau \neq \tau_0 \quad \mu_\tau = 0$, $\mu_{\tau_0} \neq 0$ alors $E = F^{\tau_0}$.

μ définit un poids dominant $\breve{\mu}$ de ${}^LH^0$ dont la classe de conjugaison est invariante par $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E)$.

Supposons μ minuscule donné par des entiers $(p_\tau)_{\tau \in I_F}$, $0 \leqslant p_\tau \leqslant n$, c'est-à-dire

$$\mu = \prod_\tau \mu_\tau \quad \text{et } \mu_\tau = (\underbrace{1, \dots, 1}_{p_\tau}, 0, \dots, 0)$$

A $\breve{\mu}$ est associé la représentation irréductible de dimension finie de ${}^LH^0$ de plus haut poids $(1, \dots, 1) - \breve{\mu}$ (et non $\breve{\mu}$, à cause de la convention homologique de Kottwitz qui identifie μ au caractère définissant la filtration de Hodge sur le H_1 et non le H^1). Étendons cette représentation en une représentation r_μ de ${}^LH_E$ en posant que l'action de W_E sur l'espace de plus haut poids est triviale.

Plus explicitement

$$r_{\mu|\,{}^LH^0} = \bigotimes_{\tau \in I_F} \Big(\bigwedge^{p_\tau} St \Big)^*$$

où St désigne la représentation standard. Pour un élément $\sigma \in W_E$

$$(1 \rtimes \sigma) \cdot (\otimes_\tau v_\tau) = \otimes_\tau v_{\sigma^{-1}\tau}$$

(cette expression est bien définie car si $\sigma \in W_E, p_{\sigma^{-1}\tau} = p_\tau$).

Si $\pi \in \mathcal{A}_\ell(n, F)$ on peut donc définir

$$r_\mu \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E} \in \mathcal{G}_\ell(\dim r_\mu, E)$$

Si plus généralement $H = \prod_{i \in I} \mathrm{Res}_{F_i/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{nF_i})$ pour des corps locaux p-adiques F_i, si $\mu = \prod_i \mu_i$ est un cocaractère de $H_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$, si E_i est le corps reflex de la composante μ_i alors, le corps reflex de μ, encore noté E, vérifie $E = \prod_i E_i$. De plus, la représentation r_μ du L-groupe de H est encore définie et

$$r_\mu = \bigotimes_{i \in I} r_{\mu_i|E}$$

Ainsi, si $\pi = \otimes_i \pi_i$ est un représentation irréductible de $H(\mathbb{Q}_p)$, la représentation $\widetilde{\sigma}_\ell(\pi) : W_{\mathbb{Q}_p} \to {}^LH$ est définie et l'on a l'égalité

$$r_\mu \circ \widetilde{\sigma}(\pi)_{|E} = \bigotimes_{i \in I} \big(r_{\mu_i} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi_i)_{|E_i} \big)_{|E}$$

A.7.3. Le théorème. — Nous supposerons maintenant que le type C.M. Φ est induit à partir d'un type C.M. de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire qu'il existe un $\tau_0 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ tel que $\Phi = \{\tau \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}) \mid \tau_{|\mathcal{K}} = \tau_0\}$. Soit μ le cocaractère de $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ associé à la donnée de Shimura. Rappelons que le cocaractère μ est donné par un uplet $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Phi}$ où $p_\tau + q_\tau = n$. Nous reprenons les notations du chapitre I.

Rappelons la formule de Matsushima qui décompose la cohomologie de De Rham de la variété de Shimura en représentations irréductibles de $G(\mathbf{A}_f)$:

$$\forall i \quad \varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\rho) = \bigoplus_{\Pi\in\mathcal{T}(G)_\rho} \dim H^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \Pi_\infty \otimes \rho) \cdot \Pi_f$$

L'action de $G(\mathbf{A}_f) \times \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ sur cette cohomologie permet quant à elle de décomposer la cohomologie étale ℓ-adique en

$$\forall i \quad \varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\rho) = \bigoplus_{\Pi'\in\mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))} \Pi' \otimes R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi')$$

où $R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)$ est une représentation continue de $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$. De la formule de Matsushima on déduit que

$$\exists\, i\ R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi') \neq 0 \Longrightarrow \exists\, \Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho \ \ \Pi_f \simeq \Pi'$$

Du théorème A.2.3, on déduit que si $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$ et si en une place v décomposée de F, Π_v est supercuspidale

$$R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f) = 0 \text{ si } i \neq \dim \mathrm{Sh}$$

et

$$\dim R^{\dim \mathrm{Sh}}_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f) = m_\Pi \ \dim r_\mu$$

où m_Π désigne la multiplicité de Π. Nous poserons $[R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]$ comme étant la représentation galoisienne semi-simplifiée de la représentation précédente.

Théorème A.7.2. — *Soit $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$, soit $[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]$ la représentation semi-simple de $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ associée à Π_f en degré moitié dans la cohomologie de la variété de Shimura de type P.E.L. associée à μ. Supposons qu'en une place finie v de F divisant un premier de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$, Π_v soit supercuspidale. Soit p un premier de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$. Notons $G(\mathbb{Q}_p) = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_n(F_{v_i}) \times \mathbb{Q}_p^\times$ et $\Pi_p = \otimes_v \Pi_v \otimes \chi$. Rappelons qu'un plongement ν de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est fixé, et qu'on note $\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{i\in I} \mu_i$ le cocaractère de Shimura local associé. Il y alors une égalité*

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{E_\nu}} = [r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\Pi_p)_{|E_\nu}]^{m_\Pi} \otimes |.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}$$

comme représentation semi-simple de W_{E_ν}.

De plus, si pour i dans I, E_i désigne le corps reflex de μ_i, $E_\nu = \prod_i E_i$ et

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{E_\nu}} = m_\Pi \bigotimes_{i\in I} [r_{\mu_i|E_\nu} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\Pi_{v_i})_{|E_\nu}] \otimes \sigma_\ell(\chi)^{-1}_{|E_\nu}\ |.|^{-\sum_\tau p_\tau q_\tau/2}$$

Démonstration. — La deuxième formule est une conséquence immédiate de la première.

Commençons par quelques préliminaires de L-groupes « ℓ-adiques » (étant donné que nous ne disposons que de systèmes compatibles de représentations galoisiennes et pas de représentation du groupe de Weil global, nous ne pouvons travailler directement avec des L-groupes complexes). Soit le L-groupe ℓ-adique de G

$$^LG = \Big(\prod_{\tau\in\Phi} \mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \times \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \Big) \rtimes \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$$

où $\forall\, \sigma \in \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ $\sigma \cdot ((g_\tau)_\tau, z) = ((h_\tau)_\tau, z')$ avec

$$\forall\, \tau \in \Phi \quad h_\tau = \begin{cases} g_{\sigma^{-1}\tau} & \text{si } \sigma^{-1}\tau \in \Phi \\ w^t(g_{c\sigma^{-1}\tau})^{-1}w^{-1} & \text{si } \sigma^{-1}\tau \notin \Phi \end{cases}$$

où

$$w = ((-1)^{i-1}\delta_{i,n-j+1})_{i,j}$$

et

$$z' = z \prod_{\substack{\tau\in\Phi \\ \sigma^{-1}\tau\notin\Phi}} \det(g_\tau)$$

L'élément w a été choisi de manière à ce qu'il envoie l'image par l'automorphisme $g \mapsto {}^tg^{-1}$ de l'épinglage standard de GL_n sur l'épinglage standard. Soit maintenant $H = (\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n) \times \mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$. Le groupe réductif $\mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}G_{\mathcal{K}}$ étant une forme intérieure de H il y a un isomorphisme de L-groupes

$$^L\left(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}G_{\mathcal{K}}\right) \xrightarrow{\sim} {}^LH \simeq \Big(\prod_{\tau\in I_F} \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \Big) \rtimes \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$$

auquel est associé la correspondance de Jacquet-Langlands. Il y a également un morphisme de L-groupes

$$\begin{aligned} {}^LG &\longrightarrow {}^L\left(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}G_{\mathcal{K}}\right) \\ ((g_\tau)_\tau, z) \rtimes \sigma &\longmapsto \left((g_\tau)_\tau, w\,{}^t(g_\tau^{-1})_{c\tau}w^{-1}, z, z\textstyle\prod_{\tau\in\Phi}\det g_\tau\right) \rtimes \sigma \end{aligned}$$

auquel est associé le changement de base quadratique. Le composé des deux morphismes ci-dessus est associé au changement de base stable de la section A.3.

Rappelons que E désigne le corps reflex de μ. Ce corps ne contient pas forcément le corps reflex de (F, Φ). Comme dans la section précédente dans le cas local, au cocaractère μ est associé une représentation r_μ de ^LG_E vérifiant

$$r_{\mu|{}^LG^0} = \bigotimes_{\tau\in\Phi} \Big(\bigwedge^{p_\tau} \mathrm{St} \Big)^* \otimes (\mathrm{St})^{-1}$$

et

$$\forall\,\sigma\in \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)\quad r_\mu(\sigma)\Big(\bigotimes_{\tau\in\Phi} v_\tau\otimes z\Big)=\bigotimes_{\substack{\tau\in\Phi\\ \sigma^{-1}\tau\in\Phi}} v_{\sigma^{-1}\tau}\bigotimes_{\substack{\tau\in\Phi\\ \sigma^{-1}\tau\notin\Phi}} {}^t\Big(\bigwedge^{p_\tau} w^{-1}\Big)(v_{c\sigma^{-1}\tau})\otimes z$$

Remarque A.7.3. — Le morphisme r_μ est bien défini : on doit vérifier l'égalité pour tout g et σ

$$r_\mu(\sigma)r_\mu(g)r_\mu(\sigma)^{-1}=r_\mu(g^\sigma)$$

Cela ne pose pas de problème au niveau des composantes du produit tensoriel indexées par des $\tau\in\Phi$ vérifiant $\sigma^{-1}\tau\in\Phi$. Cependant, si $\sigma^{-1}\tau\notin\Phi$, il faut remarquer qu'étant donné que σ stabilise la classe de conjugaison μ, $q_{c\sigma^{-1}\tau}=p_\tau$, et que si g est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n alors pour tout i, $\det(g)^{-1}\cdot\bigwedge^i g={}^t(\bigwedge^{n-i}g)$.

Rappelons que F^Φ désigne le corps reflex de (F,Φ). Dans notre cas $F^\Phi=\tau_0(\mathcal{K})$ pour un plongement τ_0 de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$. Nous allons nous intéresser au corps composé EF^Φ. On peut définir une représentation r'_μ de ${}^LH_{EF^\Phi}$ de la façon suivante :

$${}^LH\simeq\Big(\prod_{\tau\in\Phi}\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})\times\prod_{\tau\in c\Phi}\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})\times\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times\times\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times\Big)\rtimes\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$$

Posons

$$r'_{\mu|\,{}^LH^0}=\bigotimes_{\tau\in\Phi}\Big(\bigwedge^{p_\tau}\mathrm{St}\Big)^*\bigotimes_{\tau\in c\Phi}1\otimes(\mathrm{St})^{-1}\otimes 1$$

et $\forall\,\sigma\in\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)$

$$r'_\mu(\sigma)\Big(\bigotimes_{\tau\in\Phi}v_\tau\otimes\lambda\Big)=\bigotimes_{\tau\in\Phi}v_{\sigma^{-1}\tau}\otimes\lambda$$

Et remarquons maintenant que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
{}^LG_{EF^\Phi} \arrow[r] \arrow[dr, "r_{\mu|EF^\Phi}"'] & {}^L(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}G_{\mathcal{K}})_{EF^\Phi} \arrow[r, "\sim"] & {}^LH_{EF^\Phi} \arrow[dl, "r'_\mu"] \\
& \mathrm{GL}_{\dim(r_\mu)}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) &
\end{tikzcd}$$

où la première application horizontale est l'application associée au changement de base et la seconde à la correspondance de Jacquet-Langlands décrites auparavant.

Notons maintenant $R_1=[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]$ la représentation de $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ associée à Π_f dans la cohomologie de la variété de Shimura. Soit (Π',χ) le changement de base stable de Π associé à Π grâce au théorème A.3.1. Soit R' la représentation ℓ-adique de $\boldsymbol{Gal}(\overline{F}|F)$ associée à Π' par le théorème A.5.1. Il résulte du théorème A.3.1 que χ est un caractère de Hecke algébrique. On peut donc également lui associer un caractère ℓ-adique $\chi' : \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathcal{K}}|\mathcal{K}) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. Faisons maintenant la remarque fondamentale suivante qui résulte de l'égalité $q_\tau = n - p_\tau$:

$$a := \sum_{\tau\in\Phi} p_\tau(n-1) - \sum_{\tau\in\Phi} p_\tau q_\tau \equiv 0 \bmod 2$$

A l'entier $a/2$ est associé le caractère cyclotomique ℓ-adique tordu $a/2$-fois (qui est le caractère Galoisien ℓ-adique associé au caractère de Hecke algébrique $||.||^{a/2})$; nous noterons $(-) \mapsto (-)(a/2)$ la torsion par ce caractère. Le couple (R', χ') fournit (par le lemme de Shapiro) un morphisme

$$R'_2 : \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow {}^L H$$

Posons

$$R_2 = \left(r'_\mu \circ R'_{2|EF^\Phi}\right)^{m_\Pi} \left(\frac{a}{2}\right)$$

comme représentation de $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)$.

Montrons que $R_{2|\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)} = R_1$ ce qui conclura la démonstration d'après les propriétés de R' énoncées dans le théorème A.5.1, la forme du changement de base local en un p décomposé, la définition de r'_μ, le choix de a et qu'étant donné que p est décomposé dans $\mathcal{K}$, $(EF^\Phi)_\nu = E_\nu$.

Pour montrer que $R_{2|\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)} = R_1$ il suffit d'après le théorème de densité de Tchebotarev de montrer que pour presque toutes les places v de EF^Φ, $R_{2|W_{(EF^\Phi)_v}} = R_{1|W_{(EF^\Phi)_v}}$. Restreignons nous aux places v divisant des premiers p_0 de $\mathbb{Q}$ tels que Π_{p_0} soit non ramifiée. L'égalité ci-dessus résulte alors de la commutativité du diagramme global ci-dessus restreint à $W_{(EF^\Phi)_v}$ et du théorème de Kottwitz calculant la représentation galoisiennes non ramifiée en une place de bonne réduction ([**50**]). □

Corollaire A.7.4. — *Soit v_0 une place de F fixée. Soit ν un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ tel que si $\tau \in \Phi$ vérifie $\nu\circ\tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ n'induise pas v_0 alors $p_\tau = 0$ (autrement dit, la donnée de Shimura locale associée est étale hors v_0). Alors, $E_\nu = E(\mu_{v_0})$ et*

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{E_\nu}} = m_\Pi [r_{\mu_{v_0}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\Pi_{v_0})_{|E(\mu_{v_0})}] \otimes \sigma_\ell(\chi)^{-1}_{|E_\nu} \, |.|^{-\sum_\tau p_\tau q_\tau/2}$$

Remarque A.7.5. — Les représentations ℓ-adiques des groupes de Weil locaux considérées ci-dessus sont semi-simples et pas seulement Frobenius semi-simples : on a semi-simplifié la monodromie de ces représentations. Ainsi, par exemple si ρ est une représentation galoisienne locale

$$[\rho \otimes \mathrm{sp}(r)] = r[\rho]$$

Cependant le théorème ci-dessus devrait être encore vrai sans semi-simplification de la monodromie, c'est-à-dire il devrait y avoir un isomorphisme comme représentations du groupe de Weil-Deligne.

Nous allons maintenant nous intéresser à la restriction de la représentation galoisienne obtenue dans la cohomologie de la variété de Shimura en une place non décomposée. Soit donc p un premier de $\mathbb{Q}$ inerte non-ramifié dans $\mathcal{K}$. Avec les notations du I, il y a une décomposition

$$G(\mathbb{Q}_p) = G\Big(\prod_{j\in J} U(n, F_{w_j})\Big)$$

Si Π est une représentation automorphe de G satisfaisant les hypothèses du théorème A.3.1, le changement de base stable global $BC(\Pi)$ consiste en une représentation automorphe Π' de $\mathbf{GL}_{n/F}$ et un caractère de Hecke χ de $\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^\times$. La composante en p de $\Pi'\otimes\chi$ est donc une représentation du groupe p-adique

$$\prod_{j\in J} \mathbf{GL}_n(F_{w_j}) \times \mathcal{K}_p^\times$$

de la forme

$$BC(\Pi)_p = (\Pi'\otimes\chi)_p = \bigotimes_{j\in J} \pi_j \otimes \chi_p$$

où $\forall j \in J$, $\pi_j \simeq \breve{\pi}_j$. Dans la démonstration du théorème précédent, l'égalité $R_{2|\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)} = R_1$ implique alors le théorème suivant :

Théorème A.7.6. — *Plaçons nous dans le cadre du théorème précédent en supposant cette fois ci que p est inerte dans $\mathcal{K}$. Il y a une égalité pour toute $\Pi\in\mathcal{T}(G)_\rho$:*

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{(E_\nu\mathcal{K}_p)}} = [r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(BC(\Pi)_p)_{|E_\nu\mathcal{K}_p}]^{m_\Pi} \otimes |.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}$$

et si $BC(\Pi)_p = \otimes_{j\in J}\pi_j\otimes\chi$,

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{(E_\nu\mathcal{K}_p)}}] = m_\Pi \bigotimes_{j\in J} (r_{\mu_j})_{|E_\nu\mathcal{K}_p} \circ \widetilde{\sigma}_\ell(\pi_j)_{|E_\nu\mathcal{K}_p} \otimes \sigma_\ell(\chi)_{|E_\nu\mathcal{K}_p}$$

Remarque A.7.7. — Dans le cas d'un groupe unitaire en 3-variables les travaux de Rogawski ([**69**] et appendice C.3) montrent que dans le théorème précédent $BC(\Pi)_p^0$ ne dépend que de Π_p et que donc la représentation galoisienne découpée par Π_f restreinte à un groupe de décomposition en p ne dépend que de Π_f.

Nous allons préciser ce théorème dans le cas de d'un groupe unitaire en trois variables.

Théorème A.7.8. — *Supposons $n=3$ et $G(\mathbb{Q}_p) = GU(3)$ le groupe non ramifié en trois variables. Soit $\Pi\in\mathcal{T}(G)_\rho$. Supposons Π_p supercuspidale ou bien une représentation de Steinberg de $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L GU(3)$ le L-paramètre local associé (cf. l'appendice C; dans le cas de la représentation notée $\pi^s(\xi)$ dans l'appendice C ou de la représentation de Steinberg, le L-paramètre n'est pas trivial sur le facteur $SL_2(\mathbb{C})$; dans ce cas on note ψ la restriction à $W_{\mathbb{Q}_p}$ de ce L-paramètre). Supposons* *qu'en une place finie de $\mathbb{Q}$ décomposée dans $\mathcal{K}$,* Π *est supercuspidale. Il y a a alors une égalité*

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{E_\nu}} = [r_\mu \circ \psi_{|W_{E_\nu}}]\ |.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}$$

Démonstration. — Notons (Π', χ) le changement de base stable de Π (A.3) et R' la représentation ℓ-adique de $\boldsymbol{Gal}(\overline{F}|F)$ associée à Π' par le théorème A.5.1. Étant donné que $\check{\Pi}' \simeq \Pi'^c$, $\check{R}' \simeq R'^c$ (utilisant qu'en une place finie de F, R' réalise la correspondance de Langlands locale on en déduit que cet isomorphisme est vrai en toute les places finies de F et qu'il est donc vérifié par le théorème de densité de Tchebotarev). La représentation Π étant supercuspidale en une place finie décomposée, Π' est supercuspidale en une place finie, et donc la restriction de R' à un groupe de décomposition en cette place est irréductible (il s'agit d'une propriété de la correspondance de Langlands locale). La représentation R' est donc irréductible. Comme dans le lemme 15.1.2 de [**69**], il existe un signe $c(R') \in \{\pm 1\}$ obstruction à ce que R' se relève en un L-paramètre $\boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|F^+) \to {}^LG_1$. Montrons que $c(R') = 1$. Le caractère $\det(R')$ est le caractère ℓ-adique associé au caractère central de Π' (puisque cela est vérifié en toutes les places finies d'après une propriété standard de la correspondance de Langlands locale). Comme dans le lemme 15.1.2 de [**69**], $c(R') = 1$ si et seulement si ce caractère central est trivial sur $(F^+)^\times \backslash \mathbf{A}_{F^+}^\times$, ce qui est le cas d'après la dernière propriété du théorème A.3. Il existe donc une unique extension de R',

$$\varphi' : \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|F^+) \longrightarrow {}^LG_1$$

où G_1 est vu comme groupe sur F^+. D'où un L-paramètre

$$\varphi'' : \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow {}^LG_1$$

où cette fois ci G_1 est un groupe sur $\mathbb{Q}$. Le caractère algébrique χ fournit un caractère ℓ-adique χ' qui couplé à φ'' nous donne un L-paramètre

$$\varphi : \boldsymbol{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow {}^LG$$

L'application de changement de base locale de Rogawski est injective ([**69**] théorème 13.2.1). On montre de même que si $GU(3)$ désigne le groupe de similitudes unitaires p-adique non ramifiée 3 variables, si $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \to {}^LGU(3)$ est un L-paramètre, $\varphi_{|W_K}$ détermine φ de façon unique, où K est l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On en déduit en particulier que

$$\varphi_{|W_{\mathbb{Q}_p}} = \psi$$

et qu'en toutes les places v où Π est non ramifiée, $\varphi_{|W_{\mathbb{Q}_v}}$ est associé à Π_v via la correspondance de Langlands locale non ramifiée.

Considérons maintenant $r_\mu \circ \varphi$. Comme dans la démonstration précédente, d'après le théorème de Kottwitz (A.6), $[r_\mu \circ \varphi]$ est égal à $[R_{\ell,\mu,\rho}(\Pi_f)]\ |.|^{-\dim \mathrm{Sh}/2}$ en presque toutes les places où Π est non ramifiée. D'où le résultat d'après le théorème de densité de Tchebotarev. □

APPENDICE B
RÉSULTATS CONCERNANT LES TYPES ASSOCIÉS AUX REPRÉSENTATIONS DES GROUPES p-ADIQUES

B.1. Quelques propriétés générales des types associés aux représentations supercuspidales des groupes p-adiques ([10])

Soit F un corps local et G les points à valeurs dans F d'un groupe réductif sur F. Soit π une représentation supercuspidale de G. Notons $\mathfrak{s} = [\pi, G]$ sa classe d'équivalence inertielle.

Nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse B.1.1. — Il existe un $\mathfrak{s}$ type (J, λ), un sous-groupe compact ouvert modulo le centre de G, $\widetilde{J}$ tel que $J = \widetilde{J} \cap G^1$, et une extension $\widetilde{\lambda}$ de λ à $\widetilde{J}$ tels que

$$\pi \simeq \text{c-Ind}_{\widetilde{J}}^{G} \ \widetilde{\lambda}$$

Soient maintenant χ_1, χ_2 deux caractères non ramifiés de G.

Fait B.1.1. — *On a l'équivalence*

$$\pi \otimes \chi_1 \simeq \pi \otimes \chi_2 \Longleftrightarrow \chi_{1|\widetilde{J}} = \chi_{2|\widetilde{J}}$$

En effet, l'implication de la droite vers la gauche résulte de l'isomorphisme

$$(\text{c-Ind}_{\widetilde{J}}^{G} \pi) \otimes \chi \simeq \text{c-Ind}_{\widetilde{J}}^{G} (\pi \otimes \chi_{|\widetilde{J}}).$$

Dans l'autre sens, si $\pi \otimes \chi_1 \simeq \pi \otimes \chi_2$, alors $(\pi \otimes \chi_1)_{|\widetilde{J}} \simeq (\pi \otimes \chi_2)_{|\widetilde{J}}$ or, pour $i = 1, 2$ il résulte de la proposition 5.6 de [**10**] que $(\pi \otimes \chi_i)_{|\widetilde{J}} = \widetilde{\lambda} \otimes \chi_{i|\widetilde{J}}$. $\widetilde{\lambda}$ étant irréductible de dimension finie, on en déduit en utilisant le caractère de $\widetilde{\lambda}$ que $\chi_{1|\widetilde{J}} = \chi_{2|\widetilde{J}}$.

Notons $X_{\mathbb{C}}(G)$ le groupe des caractères non ramifiés de G. Le groupe $X_{\mathbb{C}}(G)$ s'identifie aux points d'un tore algébrique sur $\mathbb{C}$.

Fait B.1.2. — *Soit* $\Gamma = \{\chi \in X_{\mathbb{C}}(G) \mid \pi \otimes \chi \simeq \pi\}$, *un sous-groupe fini de* $X_{\mathbb{C}}(G)$. *L'algèbre de Hecke du type,* $\mathcal{H}(\lambda, G)$ *est isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières sur la composante connexe du centre de Bernstein indexée par* $\mathfrak{s}$. *L'algèbre* $\mathcal{H}(\lambda, G)$ *s'identifie donc aux fonctions régulières sur le tore complexe* $X_{\mathbb{C}}(G)/\Gamma$.

Notons $e_\lambda \in \mathcal{H}(G)$ l'idempotent associé à λ et $\mathcal{H}(\lambda, G) = e_\lambda * \mathcal{H}(G) * e_\lambda$. Pour toute représentation π' dans la classe d'équivalence $\mathfrak{s}$, l'espace $\pi'(e_\lambda).V_{\pi'}$ est un $\mathcal{H}(\lambda, G)$-module sur lequel $\mathcal{H}(\lambda, G)$ opère par un caractère qui correspond au point associé à π'.

L'application suivante est alors un isomorphisme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\lambda, G) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_{\mathbb{C}}(G)/\Gamma]\\ f &\longmapsto \big[[\chi] \mapsto \mathrm{tr}_{\pi\otimes\chi}(f)\big]\end{aligned}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme B.1.2. — *On a l'inégalité*

$$\forall g \in \widetilde{J} \quad \mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g) \neq 0$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que

$$\mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g) = \mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g * e_\lambda) \quad \text{où } e_\lambda * \delta_g * e_\lambda \in \mathcal{H}(\lambda, G)$$

On vérifie de plus que

$$\forall \chi \in X_{\mathbb{C}}(G) \quad \mathrm{tr}_{\pi\otimes\chi}(e_\lambda * \delta_g) = \chi(g)\ \mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g)$$

et donc, $\mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g) = 0 \iff$ la fonction régulière associée à $e_\lambda * \delta_g * e_\lambda$ est nulle $\iff$ $e_\lambda * \delta_g * e_\lambda = 0$ (grâce à l'isomorphisme ci-dessus).

Or,

$$(e_\lambda * \delta_g * e_\lambda) * \delta_{g^{-1}} = e_\lambda * (\delta_g * e_\lambda * \delta_{g^{-1}}) = e_\lambda * e_{\lambda^g}$$

Étant donné que λ s'étend en $\widetilde{\lambda}$ et que $g \in \widetilde{J}$, $\lambda^g \simeq \lambda$ et donc $e_{\lambda^g} = e_\lambda$. D'où

$$(e_\lambda * \delta_g * e_\lambda) * \delta_{g^{-1}} = e_\lambda * e_\lambda = e_\lambda \neq 0 \Longrightarrow e_\lambda * \delta_g * e_\lambda \neq 0 \qquad \square$$

B.2. Types pour GL_n

Rappelons l'un des théorèmes principaux de [**9**]

Théorème B.2.1 ([**9**]). — *Pour $G = \mathrm{GL}_n$, l'hypothèse B.1.1 de la section précédente est vérifiée.*

Nous remarquerons de plus que tous les groupes $\widetilde{J}$ obtenus sont contenus dans des normalisateurs de groupes parahoriques dans GL_n (cela est valable pour n'importe quel sous-groupe compact modulo le centre de GL_n et résulte de la classification des sous-groupes compacts maximaux de PGL_n).

B.3. Types pour les groupes unitaires non ramifiés

B.3.1. Le groupe unitaire en trois variables. — Dans [**62**] le théorème suivant est démontré :

Théorème B.3.1. — *Supposons p différent de 2. Toutes les représentations supercuspidales du groupe unitaire quasi-déployé $U(3)$ sur un corps local p-adique possèdent un type vérifiant l'hypothèse B.1.1.*

Nous utiliserons des types pour les groupes de similitudes unitaires non ramifiés. Bien que le théorème précédent soit démontré dans le cas des groupes unitaires, on peut l'étendre aux groupes de similitude unitaires en utilisant la section C.7

B.3.2. Le groupe unitaire général. — Dans l'article [**45**], Ju-Lee Kim construit des types vérifiant l'hypothèse B.1.1 pour des représentations supercuspidales des groupes unitaires non ramifiés. Elle conjecture qu'elle obtient ainsi toutes les représentation supercuspidales de ces groupes. Ses résultats s'étendent aux groupes de similitudes unitaires (bien que cela n'est pas été publié).

APPENDICE C
RÉSULTATS DE ROGAWSKI SUR $U(3)$

Nous rassemblons dans cette annexe les résultats de [**69**] que nous utilisons. La lecture des articles [**70**] et [**71**] est également utile.

C.1. Notations

Soit $F|F_0$ une extension quadratique de corps locaux p-adiques. Soit $G = U(3)$ le groupe unitaire en trois variables quasidéployé vu comme groupe sur F_0.

Soit $H = U(2) \times U(1)$ l'unique groupe endoscopique elliptique de G. Il est donc muni d'un morphisme de L-groupes ${}^LH \to {}^LG$ décrit dans le chapitre 4.6 et 4.7 de [**69**].

Soit $C = U(1) \times U(1) \times U(1)$ l'unique groupe endoscopique elliptique de H.

Les groupes C et H sont les deux groupes endoscopiques associés à G (plus généralement, les groupes endoscopiques associés aux groupes unitaires $U(n)$ sont décrits dans la partie 1.2 de [**70**]).

C.2. Transfert endoscopique local

C.2.1. De C à H. — Dans le chapitre 11 de [**69**], l'existence du transfert endoscopique des représentations admissibles irréductibles de C vers celles de H est énoncé (les démonstrations étant identiques à celles de [**55**]). Il s'agit d'une application injective

$$\begin{aligned} \Pi(C) &\longrightarrow \Pi(H) \\ \theta &\longmapsto \rho(\theta) \end{aligned}$$

où $\Pi(C)$ désigne les représentation irréductibles de $C(F_0)$ (*i.e.* les caractères $\theta = \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_3$ de $U(1) \times U(1) \times U(1)$) et $\Pi(H)$ les L-paquets de représentations admissibles irréductibles irréductibles de $H(\mathbb{Q}_p)$.

C.2.2. De H à G. — Dans le chapitre 13 de [**69**], l'existence du transfert local

$$\begin{aligned} \Pi(H) &\longrightarrow \Pi(G) \\ \rho &\longmapsto \Pi(\rho) \end{aligned}$$

est démontré, où $\Pi(G)$ désigne l'ensemble des L-paquets associés à $G(F_0)$.

C.3. Changement de base local

Dans le chapitre 13.2 de [**69**], Rogawski démontre l'existence d'une application de changement de base quadratique

$$BC : \Pi(G) \longrightarrow \Pi(\mathbf{GL}_{n/F}) = \mathcal{A}(3, F)$$

compatible avec le changement de base global de l'annexe A. Son image est constituée de représentations de $\mathbf{GL}(3, F)$, π vérifiant $\check{\pi} \simeq \pi^c$ et $\omega_{\pi|F_0^\times} = 1$ où c désigne l'automorphisme non trivial de $F|F_0$ et ω_π le caractère central de π.

C.4. Classification des L-paquets supercuspidaux de G

Dans la section 12-2 de [**69**], il est donné une description détaillée des L-paquets de représentations de $G(F_0)$. Nous rappelons cette classification dans le cas des représentations supercuspidales qui est le seul cas que nous considérons.

C.4.1. L-paquets supercuspidaux pour H (proposition 11.1.1 de [69])

Définition C.4.1. — Un L-paquet de représentations de H contient une représentation supercuspidale si et seulement si ce L-paquet est formé de représentations supercuspidales (ce fait est faux en général). Nous appellerons un tel L-paquet un L-paquet supercuspidal.

Les L-paquets supercuspidaux de représentations de H se scindent en deux ensembles :

- Les L-paquets de cardinal 1 ou encore L-paquets stables. Ce sont les $\{\rho\}$ où ρ est une représentation supercuspidale de H telle que le changement de base quadratique $BC(\rho)$ soit une représentation supercuspidale de $\mathbf{GL}_2(F) \times F^\times$.
- Si θ est un caractère de C de la forme $\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_1$ où $\theta_1 \neq \theta_2$, le L-paquet transfert endoscopique $\rho(\theta)$ est supercuspidal de cardinal 2. Lorsque θ parcourt les caractères de C du type précédent on obtient ainsi tous les L-paquets supercuspidaux de G de cardinal plus grand que 1. Un L-paquet supercuspidal Π est de la forme $\rho(\theta)$ si et seulement si $BC(\Pi)$ n'est par supercuspidale ($BC(\Pi)$ est alors un quotient d'une série principale de $\mathbf{GL}_2(F) \times F^\times$ calculée en fonction de θ).

C.4.2. L-paquets supercuspidaux pour G

Définition C.4.2. — Un L-paquet de représentations de G est appelé un L-paquet supercuspidal s'il est constitué de représentations supercuspidales.

Les L-paquets supercuspidaux de représentations de G se scindent en trois sous ensembles :

• Les L-paquets de cardinal 1 ou encore L-paquets stables. Ce sont les $\Pi = \{\pi\}$ où π est une représentation supercuspidale telle que $BC(\pi)$ soit une représentation supercuspidale de $\mathbf{GL}_3(E)$.

• Les L-paquets de cardinal 2. Ils sont construits de la façon suivante : soit ρ un L-paquet supercuspidal de cardinal 1 de H. Alors, le transfert endoscopique $\Pi(\rho)$ est un L-paquet supercuspidal de cardinal 2 de G. Un L-paquet supercuspidal Π est de cette forme si et seulement si $BC(\Pi)$ est une représentation de $\mathbf{GL}_3(F)$ dont le support supercuspidal est une représentation du sous groupe de Levi $\mathbf{GL}_2(F) \times \mathbf{GL}_1(F)$.

• Les L-paquets de cardinal 4. Ils sont construits ainsi : Soit $\rho = \rho(\theta)$ un L-paquet supercuspidal de cardinal 2 de H tel que si $\theta = \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_3$ alors $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont deux à deux distincts. Le L-paquet obtenu par transfert de H à G de ρ, noté $\Pi(\rho)$ est alors de cardinal 4. Un L-paquet supercupsidal Π de G est de ce type-là si et seulement si $BC(\Pi)$ est un sous-quotient d'une série principale de $\mathbf{GL}_3(F)$.

C.5. Correspondance de Langlands locale pour les L-paquets supercuspidaux de G

Dans le chapitre 15 de [**69**], il est expliqué comment construire une correspondance de Langlands locale pour les L-paquets supercuspidaux de G à partir de la correspondance de Langlands locale pour $\mathbf{GL}_3(F)$, et la classification précédente.

Rappelons cette correspondance :

• L'application $BC : \Pi(G) \longrightarrow \mathcal{A}(3, F)$ induit une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de cardinal 1 et les représentations supercuspidales π' de $\mathbf{GL}_3(F)$ vérifiant $\breve{\pi}' \simeq \pi'^c$ (où c est l'automorphisme non trivial de $F|F_0$) et $\omega_{\pi'|F_0^\times} = 1$. Si $\{\pi\} \in \Pi(G)$ est un tel L-paquet, si $\varphi : W_F \longrightarrow \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$ est le paramètre de Langlands associé à $BC(\pi)$ (une représentation irréductible de dimension 3), φ défini un morphisme de L-groupe $W_F \longrightarrow {}^LG_F = \mathbf{GL}_3(\mathbb{C}) \times W_F$ qui possède une unique extension en un L-morphisme $W_{F_0} \longrightarrow {}^LG$. Cela établit une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de cardinal 1 de G et les classes de ${}^LG^0$-conjugaison φ de L-morphismes de W_{F_0} dans ${}^LG$ telles que $\varphi_{|W_{F_0}}$ soit irréductible.

• On établit de même une correspondance de Langlands locale pour les L-paquets supercuspidaux de H de cardinal 1. Alors, si $\Pi = \Pi(\rho)$ est un L-paquet supercuspidal de cardinal 2 de G, si $\varphi : W_{F_0} \longrightarrow {}^LH$ est le paramètre de Langlands associé à ρ, le paramètre associé à Π est celui composé $W_{F_0} \longrightarrow {}^LH \longrightarrow {}^LG$. Cela établit une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de G de cardinal 2 et les classes de ${}^LG^0$-conjugaison de L-morphismes $\varphi : W_{F_0} \longrightarrow {}^LG$ telles que $\mathrm{im}(\varphi)$ ne soit pas contenue dans ${}^LB$, où B est un sous-groupe de Borel de G, et telles que $\varphi_{|W_F}$ soit somme de deux représentations irréductibles.

• La correspondance de Langlands locale pour C se déduit de la théorie du corps de classe local. Si $\Pi = \Pi(\rho(\theta))$ est un L-paquet supercuspidal de cardinal 4 de G, où

θ est un caractère de C, si $\varphi : W_{F_0} \to {}^L C$ est le paramètre associé à θ, on associe à Π le paramètre composé $W_{F_0} \to {}^L C \to {}^L H \to {}^L G$. Cela définit une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de G de cardinal 4 et les classes de ${}^L G^0$-conjugaison de L-morphismes $\varphi : W_{F_0} \to {}^L G$ telles que $\mathrm{im}(\varphi)$ ne soit pas contenue dans ${}^L B$, où B est un sous-groupe Borel de G, et telles que $\varphi_{|W_{F_0}}$ soit somme de trois caractères.

Il y donc une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de G et les classes de ${}^L G^0$-conjugaison de L-morphismes $\varphi : W_{F_0} \to {}^L G$ telles que $\mathrm{im}(\varphi)$ ne soit pas contenue dans ${}^L B$ pour un sous-groupe de Borel B de G. L'application de changement de base se lit au niveau des L-paramètres comme l'application de restriction $\varphi \mapsto \varphi_{|W_F}$.

C.6. Classification des représentations supercuspidales de G

Comme nous l'avons vu, les représentations supercuspidales de H sont toutes membres d'un L-paquet supercuspidal. Cela est faux pour G. Il existe une famille de représentations supercuspidales de G, $(\pi^s(\xi))_\xi$, toutes membres de L-paquets de cardinal 2 qui ne sont pas supercuspidaux.

Ces représentations supercuspidales se construisent ainsi : soit ξ un caractère de H. A ξ est associé la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_H(\xi)$ de H définie comme constituante d'une série principale réductible de H (l'autre constituant étant ξ, *cf.* **[69]** 12.1). L'ensemble $\{\mathrm{St}_H(\xi)\}$ est un L-paquet stable de carré intégrable de représentations de H. Considérons le L-paquet de représentations de G, $\Pi(\mathrm{St}_H(\xi))$, transfert endoscopique de $\{\mathrm{St}_H(\xi)\}$. C'est un L-paquet de cardinal 2 noté

$$\Pi(\mathrm{St}_H(\xi)) = \{\pi^2(\xi), \pi^s(\xi)\}$$

où $\pi^s(\xi)$ est une représentation supercuspidale et $\pi^2(\xi)$ une représentation de carré intégrable. Alors,

Fait C.6.1. — *Les représentations supercuspidales de G sont soit membres d'un L-paquet supercuspidal soit de la forme $\pi^s(\xi)$ pour une unique représentation de dimension 1 de H, ξ.*

C.7. Passage de $U(3)$ à $GU(3)$

Soit $G = GU(3)$ un groupe de similitudes unitaires non ramifié en 3 variables défini sur $\mathbb{Q}_p$ et $G_1 \subset G$ le groupe unitaire noyau du facteur de similitude. Soit $K|\mathbb{Q}_p$ l'extension quadratique non ramifiée. Il y a une inclusion $K^\times \hookrightarrow Z_G$.

Lemme C.7.1. — *On a l'égalité suivante*

$$G(\mathbb{Q}_p) = G_1(\mathbb{Q}_p) K^\times$$

Démonstration. — Étant donné que G est non ramifié il y a une décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{Q}_p) = C \cdot A(\mathbb{Q}_p) \cdot N(\mathbb{Q}_p)$, où C est compact, A est un tore déployé maximal et N unipotent. Donc, $v_p(c(G(\mathbb{Q}_p))) = v_p(c(A(\mathbb{Q}_p)))$. Avec les notations de l'appendice D, $A(\mathbb{Q}_p) = \{\mathrm{diag}(t, x, t^{-1}x^2) \mid t \in \mathbb{Q}_p^\times\ x \in \mathbb{Q}_p^\times\}$ et $c = x^2$. Donc, $v_p(c(G(\mathbb{Q}_p))) = 2\mathbb{Z}$.

De plus, $N_{K/\mathbb{Q}_p}(K^\times) = p^{2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p^\times$ et donc $c(G(\mathbb{Q}_p)) \subset N_{K/\mathbb{Q}_p}(K^\times)$. D'où le résultat puisque $c_{|K^\times} = N_{K/\mathbb{Q}_p}$. □

Corollaire C.7.2. — *Il y a une bijection entre les représentations irréductibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ et les couples (π, χ) où π est une représentation irréductible du groupe unitaire $G_1(\mathbb{Q}_p)$ et χ un caractère de $K^\times$ tel que $\omega_{\pi|K^\times} = \chi$.*

Corollaire C.7.3. — *La description des représentations supercuspidales de $G(\mathbb{Q}_p)$ est identique à celle de $G_1(\mathbb{Q}_p)$. En particulier, il y a une paramétrisation des paquets supercuspidaux de $G(\mathbb{Q}_p)$ par des L-paramètres $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \to {}^LG$ tels que $\mathrm{im}(\psi)$ n'est pas contenu dans ${}^LB$ pour un sous groupe de Borel B de G.*

APPENDICE D
ESPACES ADIQUES ET ESPACES ANALYTIQUES

La théorie des espaces analytiques de Berkovich est la version surconvergente de la théorie rigide « classique » ou bien de celle des espaces adiques de Huber.

D.1. Différents espaces

Soit k un corps valué complet muni d'une valuation de rang 1.

Rappelons qu'il y a un foncteur pleinement fidèle ([**1**] 1.6.1)

$$X \longmapsto s(X)$$

de la catégorie des espaces analytiques de Berkovich Hausdorff (*i.e.* $|X|$ est séparé) dans la catégorie des variétés rigides quasiséparées.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre affinoïde, $s(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = \mathrm{Spm}(\mathcal{A})$.

Rappelons également ([**35**] 1.1.11) qu'il y a une équivalence de catégorie

$$Y \longmapsto r(Y)$$

entre la catégorie des variétés rigides quasiséparées Y sur k et la catégorie des espaces adiques quasiséparés localement de type fini sur $\mathrm{Spa}(k, k^0)$. Nous noterons

$$X \longmapsto X^{\mathrm{rig}}$$

la composée $X \mapsto r(s(X))$ qui est pleinement fidèle.

Rappelons la proposition suivante

Fait D.1.1 **([35] 8.3.3)**. — *L'image essentielle de $X \mapsto X^{\mathrm{rig}}$ est formée de la catégorie des espaces adiques quasiséparés localement de type fini tendus (« taut ») sur* $\mathrm{Spa}(k, k^0)$.

La condition d'être tendu portant uniquement sur l'espace topologie de l'espace adique ([**35**] 5.1.2).

Supposons maintenant la valuation de k discrète.

A $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement formellement de type fini sur $\boldsymbol{Spf}(k^0)$ est associé un k-espace analytique paracompact $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$. Il est muni d'un morphisme de spécialisation

$$\mathrm{sp} : \mathfrak{X}^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

Si $Y \subset \mathfrak{X}_s$ est un sous-schéma localement fermé de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$ on a un isomorphisme canonique

$$(\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y})^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}^{-1}(Y)$$

où $\mathrm{sp}^{-1}(Y)$ est un domaine analytique localement fermé dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$.

Si Y est ouvert, $\mathrm{sp}^{-1}(Y)$ est fermé ($Y = D(f) \Rightarrow \mathrm{sp}^{-1}(Y) = \{|f| = 1\}$.

Si Y est fermé, $\mathrm{sp}^{-1}(Y)$ est ouvert ($Y = V(f) \Rightarrow \mathrm{sp}^{-1}(Y) = \{|f| < 1\}$.

A $\mathfrak{X}$ est également associé fonctoriellement un espace adique $t(\mathfrak{X})$. t étant défini localement par $t(\boldsymbol{Spf}(A)) = \mathrm{Spa}(A, A)$. On peut alors considérer l'espace adique

$$d(\mathfrak{X}) = t(\mathfrak{X})_a$$

l'ouvert de $t(\mathfrak{X})$ formé des points analytiques *i.e.* des valuations ayant un support non ouvert. Si I est un idéal de définition de A,

$$d(\boldsymbol{Spf}(A)) = \mathrm{Spa}(A, A) \setminus V(I)$$

On a alors un morphisme de spécialisation d'espaces annelés

$$(d(\mathfrak{X}), \mathcal{O}_{d(\mathfrak{X})}) \xrightarrow{\lambda} (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

l'application au niveau des espaces topologiques étant celle qui associe à un point $x \in d(\mathfrak{X})$ le support d'une spécialisation de x dans $t(\mathfrak{X})$ formée d'un point non analytique.

Si $\mathfrak{X}/\boldsymbol{Spf}(k^0)$ est adique c'est la bonne définition de la fibre générique de $\mathfrak{X}$ au sens des espaces adiques.

Dans le cas général

$$\widetilde{d}(\mathfrak{X}) = t(\mathfrak{X}) \setminus V(\pi) \subset d(\mathfrak{X})$$

est un espace adique ouvert dans $d(\mathfrak{X})$ muni du morphisme de spécialisation obtenu par restriction de λ :

$$\widetilde{\lambda} : \widetilde{d}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{X}$$

C'est la bonne définition de la fibre générique au sens de Berthelot et on a des isomorphismes canoniques commutant aux morphismes de spécialisation

$$(\mathfrak{X}^{\mathrm{an}})^{\mathrm{rig}} \simeq \widetilde{d}(\mathfrak{X})$$

Nous noterons donc $\widetilde{d}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$.

Si maintenant $Y \subset \mathfrak{X}_s$ et un sous-schéma fermé, $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y) \subset \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ est un ensemble fermé constructible et on a un isomorphisme canonique

$$(\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y})^{\mathrm{rig}} \simeq (\widetilde{\lambda}^{-1}(Y))^0$$

(l'intérieur de $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y)$). Ainsi $(\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y})^{\mathrm{rig}}$ s'identifie à un ouvert de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ qui est l'ouvert $\mathrm{sp}^{-1}(Y)^{\mathrm{rig}}$.

Si $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{X}$ est ouvert, $\mathcal{Y}^{\mathrm{rig}} \subset \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ est l'ouvert $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y)$.

Exemple D.1.1. — Si $\mathfrak{X} = \boldsymbol{Spf}(k^0\langle X_1, \dots, X_n\rangle)$, $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}} = \mathbb{B}^n$ la boule fermée analytique, $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} = \mathbb{B}^n$ la boule fermée adique (qui est ouverte dans $\mathbf{A}^n$). Si $Y = V(0)$, $\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y} = \boldsymbol{Spf}(k^0[\![X_1, \dots, X_n]\!])$, $\mathrm{sp}^{-1}(Y) = \widetilde{\mathbb{B}}^n$ la boule ouverte analytique obtenue par recollement d'une union croissante de boules fermées (ce n'est pas l'intérieur de la boule fermée analytique pour la topologie de Berkovich !).

$\widetilde{\lambda}^{-1}(Y) = \{|X_i| < 1\} \subset \mathbb{B}^n$ un fermé (ce n'est pas un espace adique, c'est un espace pseudo-adique) et $(\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y})^{\mathrm{rig}}$ est la boule ouverte adique obtenue comme union croissante des boules ouvertes de rayon strictement inférieur à 1. $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y) \setminus \widetilde{\lambda}^{-1}(Y)^0$ est constitué de valuations de rang $\geqslant 2$ qui ne sont pas dans l'espace de Berkovich.

On remarquera que la stratification associée à un fermé $Y \subset \mathfrak{X}_s$ de la fibre spéciale est plus compliquée dans le cas de l'espace adique :

- La stratification de $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$ associée est $\mathrm{sp}^{-1}(Y) \subset \mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$ où $\mathrm{sp}^{-1}(Y)$ est un domaine analytique ouvert et $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}} \setminus \mathrm{sp}^{-1}(Y)$ est un domaine analytique fermé. Les deux strates sont donc des espaces analytiques
- La stratification de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ associée est

$$\widetilde{\lambda}^{-1}(Y)^0 \subset \widetilde{\lambda}^{-1}(Y) \subset \mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$$

où $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y)$ est un espace pseudo-adique (*i.e.* un germe d'espace adique) et le complémentaire est un espace adique ouvert dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$.

D.2. Différents morphismes étales

Si $j : \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ désigne l'inclusion de la boule fermée dans l'espace affine, j est une immersion ouverte au sens des espaces adiques et est donc étale. L'espace adique $\mathbb{B}^n$ est lisse sur $\mathrm{Spa}(k, k^0)$. Cependant, j n'est pas étale au sens des espaces analytiques car $\partial(\mathbb{B}^n/\mathbb{A}^n) \neq \varnothing$. Ainsi, $\mathbb{B}^n$ n'est pas lisse comme espace analytique sur k.

Rappelons :

Définition D.2.1 **([3])**. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espace analytique. f est quasi-étale si tout point $x \in X$ possède un voisinage qui est un domaine analytique fermé étale au-dessus de Y.

Fait D.2.1 **([3] 2.3, resp. [35] 3.5.1)**. — *Si $\mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ est un morphisme de schémas formels, $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ est quasi-étale et $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{rig}}$ est étale.*

Par exemple, si $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ est une immersion ouverte, donc étale, elle induit une inclusion d'un domaine analytique fermé $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$ dans $\mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ qui n'est pas étale mais quasi-étale. Par contre elle induit une immersion ouverte d'espaces adiques.

Le lien entre les deux notions est le suivant :

Fait D.2.2 **([35] 8.3.4)**. — *Si $f : X \to Y$ est quasi-étale, f est étale si et seulement si $f^{\mathrm{rig}} : X^{\mathrm{rig}} \to Y^{\mathrm{rig}}$ est partiellement propre si et seulement si $\forall x \in X$ $\exists U$ voisinage de x et V voisinage de $f(x)$ tels que $f : U \to V$ soit étale fini.*

Rappelons qu'un morphisme d'espaces adiques est partiellement propre s'il vérifie un critère valuatif de propreté (et est localement de type fini) et qu'un morphisme est propre si et seulement si il est partiellement propre et quasicompact.

Ainsi, un domaine analytique ouvert induit une immersion ouverte d'espace adique qui est partiellement propre et à un ouvert analytique d'un espace analytique de bord vide sur k est du point de vue adique partiellement propre (c'est en particulier le cas d'un ouvert analytique de l'espace analytique associé à un schéma)

Les deux exemples typique d'espace partiellement propre sont les suivants :

Fait D.2.3. — *Si X/k est un schéma localement de type fini, $X^{\mathrm{rig}}/\mathrm{Spa}(k,k^0)$ est partiellement propre.*

Fait D.2.4. — *Si $\mathfrak{X}/\boldsymbol{Spf}(k^0)$ est un schéma formel localement formellement de type fini séparé,*

$$\mathfrak{X}_s \text{ propre} \implies \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \text{ partiellement propre}$$

Lorsque $\mathfrak{X}$ est adique sur k^0, il s'agit même d'une équivalence.

Exemple D.2.2. — Le tube au-dessus d'un fermé propre de la fibre spéciale d'un schéma formel est partiellement propre.

Du point de vue des espaces adiques de Huber

Fait D.2.5. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. f^{rig} est partiellement propre si et seulement si $\partial(X/Y) = \varnothing$.*

Si $f : X \to Y$, un point $x \in X$ n'appartient pas à $\partial(X/Y)$ si et seulement si il existe deux voisinages affinoïdes $U \subset U'$ de x et un voisinage affinoïde V de $f(x)$ tels que $U \subset\subset_V U'$ au sens où il existe un entier n et une immersion Zariski-fermée au-dessus de V

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{B}^n(0,1) \times V \arrow[d] \\ & V \end{tikzcd}$$

telle que l'image de U soit contenue dans $\mathbb{B}^n(0,\varepsilon) \times V$ pour un $\varepsilon < 1$.

Un morphisme $f : X \to Y$ est partiellement propre si et seulement si X est surconvergent comme faisceau au-dessus de Y. Ainsi, si X est un espace analytique les ouverts de X correspondent aux ouverts de X^{rig} surconvergents c'est-à-dire stables par spécialisation au niveau de l'espace adique.

RÉFÉRENCES

[1] V.G. Berkovich – « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math* **78** (1994), p. 5–161.

[2] ———, « Étale cohomology for p-adic analytic spaces », Notes d'un exposé à Toulouse, Juin 1994.

[3] ———, « Vanishing cycles for formal schemes », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 539–571.

[4] ———, « On the comparison theorem for étale cohomology of non-Archimedean analytic spaces », *Israel J. Math* **92** (1995), no. 1-3, p. 45–59.

[5] ———, « Vanishing cycles for formal schemes, II », *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 367–390.

[6] J. Bernstein, P. Deligne & D. Kazhdan – « Trace Paley Wiener theorem for reductive p-adic groups », *J. Analyse Math* **47** (1986), p. 180–192.

[7] P. Berthelot, L. Breen & W. Messing – *Théorie de Dieudonné cristalline, II*, Lect. Notes in Math., vol. 930, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[8] P. Boyer – « Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Invent. Math* **138** (1999), no. 3, p. 573–629.

[9] C.J. Bushnell & P.C. Kutzko – *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 129, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[10] ———, « Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types », *Proc. London Math. Soc* **77** (1998), no. 3, p. 582–634.

[11] H. Carayol – « Non abelian Lubin-Tate theory », in *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990, p. 15–39.

[12] L. Clozel – « On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms », *Invent. Math* **83** (1986), no. 2, p. 265–284.

[13] ———, « The fundamental lemma for stable base change », *Duke Math. J* **61** (1990), no. 1, p. 255–302.

[14] ———, « Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$ », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math* **73** (1991), p. 97–145.

[15] P. Deligne – « Théorie de Hodge. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math* **40** (1971), p. 5–57.

[16] ———, « Travaux de Shimura », in *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71)*, Lect. Notes in Math., vol. 244, Springer, Berlin, 1971, Exp. no. 389, p. 123–165.

[17] ———, « Le formalisme des cycles évanescents (exposés 13 et 14) », in *SGA 7 II*, Lect. Notes in Math., vol. 340, Springer-Verlag, 1973, p. 82–173.

[18] P. Deligne – « Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ-adique », in *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA $4\frac{1}{2}$)*, Lect. Notes in Math., vol. 569, Springer-Verlag, 1977, avec la collaboration de J.F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.L. Verdier.

[19] P. Deligne, D. Kazhdan & M.F. Vignéras – *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984.

[20] V.G. Drinfel'd – « Elliptic modules », *Mat. Sb. (N.S.)* **136** (1974), p. 594–627, 656.

[21] ———, « Coverings of p-adic symmetric domains », *Funkcional. Anal. i Priložen* **10** (1976), no. 2, p. 29–40.

[22] T. EKEDEAHL – « On the adic formalism », in *The Grothendieck Festschrift*, Progress in Math., vol. 88, no. 2, Birkhäuser, Basel, Boston, 1990.

[23] J.M. FONTAINE – « Représentations l-adiques potentiellement semi-stables », in *Périodes p-adiques*, Astérisque, vol. 294, Société Mathématique de France, Paris, 1994, p. 321–347.

[24] R. FREITAG & R. KIEHL – *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Results in Mathematics and Related Areas (3), vol. 13, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.

[25] K. FUJIWARA – « Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture », *Invent.math* **127** (1997), p. 489–533.

[26] M. GORESKY, R.E. KOTTWITZ & R. MACPHERSON – « Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators », *Duke Math. J* **89** (1997), no. 3, p. 477–554.

[27] P.A. GRIFFITHS – « Periods of integrals on algebraic manifolds. III. some global differential-geometric properties of the period mapping », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math* **38** (1970), p. 125–180.

[28] A. GROTHENDIECK & L. ILLUSIE – « Formule de Lefschetz », in *SGA V*, Lect. Notes in Math., vol. 589, Springer Verlag, 1977, p. 73–135.

[29] M. HARRIS – « The local Langlands correspondence », Notes of (half) a course at the IHP, Spring 2000, à paraître.

[30] ———, « Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces; elaboration of Carayol's program », *Invent. Math.* **129** (1997), no. 1, p. 75–119.

[31] ———, « Galois properties of cohomological automorphic forms on $GL(n)$ », *J. Math. Kyoto Univ.* **39** (1999), no. 1, p. 299–318.

[32] ———, « Local Langlands correspondences and vanishing cycles on Shimura varieties », in *Proceedings of the E.C.M.*, 2000.

[33] M. HARRIS & J.P. LABESSE – « Conditional base change for unitary groups », Preprint.

[34] M. HARRIS & R. TAYLOR – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[35] R. HUBER – *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics., Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996.

[36] ———, « A comparison theorem for ℓ-adic cohomology », *Compositio Math.* **112** (1998), no. 2, p. 217–235.

[37] ———, « A finiteness result for direct image sheaves on the étale site of rigid analytic varieties », *J. Algebraic Geom* **7** (1998), no. 2, p. 159–403.

[38] ———, « Swan representations associated with rigid analytic curves », *J. Reine Angew. Math* **537** (2001), p. 165–234.

[39] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformations, I*, Lect. Notes in Math., vol. 239, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[40] ———, *Complexe cotangent et déformations, II*, Lect. Notes in Math., vol. 283, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[41] ———, « Autour du théorème de monodromie locale », in *Périodes p-adiques*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, Paris, 1994.

[42] A.J. DE JONG – « Étale fundamental groups of non-archimedean analytic spaces », preprint.

[43] J.P. JOUANOLOU – « Systèmes projectifs J-adiques », in *SGA V*, Lect. Notes in Math., vol. 589, Springer Verlag, 1977.

[44] D. KAZHDAN – « Cuspidal geometry of p-adic groups », *J. Analyse Math* **47** (1986), p. 1–36.

[45] J.L. KIM – « Hecke algebras of classical groups over p-adic fields and supercuspidal representations », *Amer. J. Math* **121** (1999), no. 5, p. 967–1029.

[46] R.E. KOTTWITZ – « Rational conjugacy classes in reductive groups », *Duke Math. J.* **49** (1982), no. 4, p. 785–806.

[47] ———, « Isocrystals with additional structure », *Compositio Math.* **56** (1985), no. 2, p. 201–220.

[48] ———, « Stable trace formula : elliptic singular terms », *Math. Ann* **275** (1986), no. 3, p. 365–399.

[49] ———, « Shimura varieties ans λ-adic representations », in *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, 1990, p. 161–209.

[50] ———, « On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties », *Invent. Math.* **108** (1992), no. 3, p. 653–665.

[51] ———, « Points on some Shimura varieties over finite fields », *J. Amer. Math. Soc* **5** (1992), no. 2, p. 373–444.

[52] ———, « Isocrystals with additional structure, II », *Compositio Math.* **109** (1997), no. 3, p. 255–339.

[53] R.E. KOTTWITZ & M. RAPOPORT – « On the existence of F-crystals », preprint.

[54] J.P. LABESSE – « Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable », *Duke Math. J* **61** (1990), no. 2, p. 519–530.

[55] J.P. LABESSE & R.P. LANGLANDS – « L-indistinguishability for $SL(2)$ », *Canad. J. Math* **31** (1979), no. 4, p. 726–785.

[56] R.P. LANGLANDS – « Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Oregon State Univ., Corvallis, Ore.)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1979.

[57] YU. I. MANIN – « The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic », *Usp. Math.* **18** (1963), p. 3–90, *Russ. Math. Surveys*, **18** (1963), p. 1–80.

[58] E. MANTOVAN – « On certain unitary group Shimura varieties », ce volume.

[59] W. MESSING – *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lect. Notes in Math., vol. 264, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[60] J.S. MILNE – « Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles », in *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[61] ———, « The points on a Shimura variety modulo a prime of good reduction », in *The Zeta functions of Picard modular surfaces*, Univ. Montréal, Montreal, PQ, 1992, p. 151–253.

[62] A. MOY – « Representations of $U(2,1)$ over a p-adic field », *J. Reine Angew. Math* **372** (1986), p. 178–208.

[63] J.P. PETIT – *OVNIS et armes secrètes américaines : l'extraordinaire témoignage d'un scientifique*, Albin Michel.

[64] R. PINK – « On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne », *Ann. of Math.* **135** (1992), p. 483–525.

[65] M. RAPOPORT – « Non-Archimedean period domains », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, 1995, p. 423–434.

[66] M. RAPOPORT & M. RICHARTZ – « On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure », *Compositio Math.* **103** (1996), no. 2, p. 153–181.

[67] M. RAPOPORT & TH. ZINK – « Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik », *Invent. Math* **68** (1982), no. 1, p. 21–101.

[68] ———, *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, no. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[69] J.D. ROGAWSKI – *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Studies, vol. 123, Princeton University Press, Princeton,NJ, 1990.

[70] ———, « Analytic expression for the number of points mod p », in *The Zeta functions of Picard modular surfaces*, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992, p. 65–109.

[71] ———, « The multiplicity formula for A-packets », in *The Zeta functions of Picard modular surfaces*, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992, p. 395–419.

[72] U. SCHNEIDER & P. STUHLER – « Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **85** (1997), p. 97–191.

[73] M. STRAUCH – « On the Jacquet-Langlands correspondance in the cohomology of Lubin-Tate deformation tower », Preprint.

[74] T. WEDHORN – « Ordinariness in good reductions of Shimura varieties of PEL-type », *Ann. Sci. École Norm. Sup* **32** (1999), no. 5, p. 575–618.

[75] J.P. WINTENBERGER – « Propriétés du groupe tannakien des structures de Hodge p-adiques et torseur entre cohomologies cristalline et étale », *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), no. 5, p. 1289–1334.

[76] TH. ZINK – « The Lefschetz trace formula for an open algebraic surface », in *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[77] ———, « On the slope filtration », *Duke Math. J* **109** (2001), no. 1, p. 79–95.

L. FARGUES, UMR C.N.R.S. 8628, Université Paris Sud/CNRS, Bâtiment 425, 91405 Orsay
E-mail : `laurent.fargues@math.u-psud.fr` • *Url :* `http://www.math.u-psud.fr/~fargues`

Astérisque
291, 2004, p. 201–331

ON CERTAIN UNITARY GROUP SHIMURA VARIETIES

by

Elena Mantovan

Abstract. — In this paper, we study the local geometry at a prime p of a certain class of (PEL) type Shimura varieties. We begin by studying the Newton polygon stratification of the special fiber of a Shimura variety with good reduction at p. Each stratum can be described in terms of the products of the reduced fiber of the corresponding Rapoport-Zink space with some smooth varieties (we call the Igusa varieties), and of the action on them of a certain p-adic group T_α, which depends on the stratum. (The definition of the Igusa varieties in this context is based upon a result of Zink on the slope filtration of a Barsotti-Tate group and on the notion of Oort's foliation.) In particular, we show that it is possible to compute the étale cohomology with compact supports of the Newton polygon strata, in terms of the étale cohomology with compact supports of the Igusa varieties and the Rapoport-Zink spaces, and of the group homology of T_α. Further more, we are able to extend Zariski locally the above constructions to characteristic zero and obtain an analogous description for the étale cohomology of the Shimura varieties in both the cases of good and bad reduction at p. As a result of this analysis, we obtain a description of the ℓ-adic cohomology of the Shimura varieties, in terms of the ℓ-adic cohomology with compact supports of the Igusa varieties and of the Rapoport-Zink spaces.

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** — 11G18, 14G35.
Key words and phrases. — Shimura varieties, Barsotti-Tate groups, Rapoport-Zink spaces, Langlands correspondences.

Partially supported under a I.N.d.A.M. Fellowship.

***Résumé* (Sur certaines variétés de Shimura associées à des groupes unitaires)**
Dans cet article, nous étudions la géométrie locale, en un nombre premier p, d'une certaine classe de variétés de Shimura de type PEL. Nous commençons par étudier la stratification par le polygone de Newton de la fibre spéciale des variétés de Shimura ayant bonne réduction en p. Chaque strate peut être décrite en termes de produits des fibres réduites des espaces de Rapoport-Zink correspondants avec certaines variétés lisses, les variétés d'Igusa, et de l'action sur ces objets d'un certain groupe p-adique T_α, qui dépend de la strate. Nous montrons en particulier qu'il est possible de calculer la cohomologie étale à support compact des strates du polygone de Newton, en termes de la cohomologie étale à support compact des variétés d'Igusa et des espaces de Rapoport-Zink, et de l'homologie des groupes de T_α. De plus, nous parvenons à étendre localement (au sens de la topologie de Zariski) les constructions précédentes à la caractéristique nulle et à obtenir une description analogue de la cohomologie étale des variétés de Shimura, dans les cas de bonne comme de mauvaise réduction en p. Comme conséquence de cette étude, nous obtenons une description de la cohomologie ℓ-adique des variétés de Shimura, en termes de la cohomologie ℓ-adique à support compact des variétés d'Igusa et des espaces de Rapoport-Zink.

1. Introduction

In this paper, we study a certain class of (PEL) type Shimura varieties. These varieties arise as moduli spaces of polarized abelian varieties, endowed with an action of a division algebra and a level structure. Their ℓ-adic cohomology is the object of a conjecture of Langlands.

In [**27**] Rapoport and Zink introduce local analogues of the Shimura varieties, which are (PEL) type moduli spaces for Barsotti-Tate groups, in the category of rigid analytic spaces. These spaces can be used to give rigid analytic uniformizations of isogeny classes of abelian varieties inside the corresponding Shimura varieties. In [**26**] Rapoport reports a conjecture of Kottwitz for the ℓ-adic cohomology groups with compact supports of the Rapoport-Zink spaces. This conjecture is "heuristically compatible" (in the sense of the p-adic uniformization given in [**27**]) with the corresponding global conjecture on Shimura varieties.

In [**14**] Harris and Taylor prove the local Langlands conjecture by studying a particular class of (PEL) type Shimura varieties. In their work, they analyse the reduction mod p of the Shimura varieties via the notion of Igusa varieties. These varieties arise as finite étale covers of the locus, inside the reduction of the Shimura varieties with no level structure at p, where the Barsotti-Tate group associated to the abelian variety lies in a fixed isomorphism class. Their analysis strongly relies on the fact that, for the class of Shimura varieties they consider, the pertinent Barsotti-Tate groups are one dimensional, and thus Drinfeld's theory of elliptic modules applies.

For general (PEL) type Shimura varieties such an assumption on the dimension of the Barsotti-Tate groups which control the deformation of the abelian varieties does not hold. On the other hand, it might be possible to describe the geometry and the cohomology of general (PEL) type Shimura varieties by combining together Harris-Taylor's and Rapoport-Zink's techniques. We consider the Newton polygon stratification of the reduction of the Shimura varieties, which is defined by the loci where the Barsotti-Tate group associated to the abelian variety lies in a fixed isogeny class. The idea is to analyse each Newton polygon stratum along two main "directions": one corresponding to deforming the abelian varieties without altering the isomorphism class of the associated Barsotti-Tate group, the other corresponding to varying the abelian varieties inside one isogeny class.

In this paper, we carry out this plan for a simple class of (PEL) type Shimura varieties and, as a result, we obtain a description of the ℓ-adic cohomology groups of the Shimura varieties, in terms of the ℓ-adic cohomology with compact supports groups of the Igusa varieties and of the Rapoport-Zink spaces, in the appropriate Grothendieck group, for any prime number $\ell \neq p$.

More precisely, the class of (PEL) type Shimura varieties we are interested in arises as the class of moduli spaces of polarized abelian varieties endowed with the action of a division algebra and with a level structure associated to the data $(E, B, *, V, \langle\bullet,\bullet\rangle)$ where:

- E is an imaginary quadratic extension of $\mathbb{Q}$ in which the prime p splits (we write $(p) = u \cdot u^c$);
- B is a central division algebra over E of dimension h^2 which splits at u;
- $*$ is a positive involution of the second kind on B;
- $V = B$ viewed as a B-module;
- $\langle\bullet,\bullet\rangle : V \times V \to \mathbb{Q}$ is a non degenerate alternating $*$-hermitian pairing.

We denote by G the algebraic group over $\mathbb{Q}$ of the automorphisms of V which preserves $\langle\bullet,\bullet\rangle$ up to scalar multiple, and by G_1 the algebraic subgroup of G of the automorphisms which preserves $\langle\bullet,\bullet\rangle$, *i.e.* $0 \to G_1 \to G \to \mathbb{G}_m \to 0$. Finally, we also assume

$$G_1(\mathbb{R}) = U(q, h-q),$$

for some integer q, $1 \leqslant q \leqslant h-1$.

We remark that when $q = 1$ the above class of Shimura varieties is a subclass of the one studied by Harris and Taylor in [**14**] (namely, the case when the totally real part of the ground field is trivial).

For any sufficiently small open compact subgroup $U \subset G(\mathbb{A}^\infty)$, we call the Shimura variety of level U the smooth projective scheme X_U over $\operatorname{Spec} E$, of dimension $q(h-q)$, which arises as the moduli space of polarized abelian varieties endowed with a *compatible* action of B and with a structure of level U, classified up to isogeny (see [**22**]).

Our goal is to study the virtual representation of the group $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$:

$$H(X, \mathbb{Q}_\ell) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \varinjlim_{U} H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}^{\text{nr}}_u)^{\text{ac}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

We obtain the following theorem.

Theorem 1 **(Main Theorem).** — *There is an equality of virtual representations of the group* $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$*:*

$$H(X, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathbb{Z}_p^\times} = \sum_{\alpha,k,i,j} (-1)^{k+i+j} \varinjlim_{V_p} \mathrm{Ext}^k_{T_\alpha\text{-smooth}} \Big(H^i_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,V_p}, \mathbb{Q}_\ell(D)), H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Q}_\ell) \Big)$$

where:

- $D = q(h-q)$ *is the dimension of the Shimura varieties;*
- *the action of* $\mathbb{Z}_p^\times$ *on* $H(X, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ *is defined via the embedding*

$$\mathbb{Z}_p^\times \subset \mathbb{Q}_p^\times \times (B_u^{\mathrm{op}})^\times = G(\mathbb{Q}_p) \subset G(\mathbb{A}^\infty);$$

- α *varies among all the Newton polygons of height* h *and dimension* q*;*
- *for each* α, T_α *is a p-adic group of the form* $T_\alpha = \prod_i \mathrm{GL}_{r_i}(D_i)$ *for some finite dimensional division algebras* $D_i/\mathbb{Q}_p$*;*
- $H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Q}_\ell)$ *are representations of* $T_\alpha \times G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times) \times (W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p})$ *associated to the* ℓ*-adic cohomology with compact support groups of the Igusa varieties, for all* $j \geqslant 0$*;*
- $H^k_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,V_p}, \mathbb{Q}_\ell)$ *are the* ℓ*-adic cohomology with compact supports groups of the rigid analytic Rapoport-Zink space of level* V_p*, for all* $k \geqslant 0$ *and any open compact subgroup* $V_p \subset G(\mathbb{Q}_p)/\mathbb{Q}_p^\times$*; as the level* V_p *varies, they form a direct limit of representations of* $T_\alpha \times W_{\mathbb{Q}_p}$*, endowed with an action of* $G(\mathbb{Q}_p)/\mathbb{Q}_p^\times$*.*

In the following, we outline in more detail the content of this paper.

In [**22**] Kottwitz proves that the Shimura varieties without level structure at p, *i.e.* associated to a subgroup U of the form

$$U = U^p(0) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \mathcal{O}^\times_{B_u^{\mathrm{op}}},$$

admit smooth integral models over $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{E_u}$ ($\mathcal{O}_{E_u} = \mathbb{Z}_p$). We denote by $\overline{X} = \overline{X}_{U^p(0)}$ the reduction $X_{U^p(0)} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p} \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$ of a Shimura variety with no level structure at p and by $\mathcal{A}$ the universal abelian variety over $\overline{X}$. It follows from the definition of the moduli space and Serre-Tate's theorem that the deformation theory of the abelian variety $\mathcal{A}$ over $\overline{X}$ is controlled by a Barsotti-Tate group of height h and dimension q over $\overline{X}$, which we denote by $\mathcal{G}/\overline{X}$ ($\mathcal{G} \subset \mathcal{A}[p^\infty]$).

In [**24**] Oort studies the Newton polygon stratification of a moduli space of abelian varieties in positive characteristic. This is a stratification by locally closed subschemes which are defined in terms of the Newton polygons of the Barsotti-Tate groups associated to the abelian varieties. (Newton polygons associated to Barsotti-Tate groups were first introduced and studied by Grothendieck in [**13**] and Katz in [**19**]). For any Newton polygon α of dimension q and height h, the associated stratum $\overline{X}^{(\alpha)}$ is the locus where the Barsotti-Tate group $\mathcal{G}$ has constant Newton polygon equal to α, *i.e.* constant isogeny class.

The first step towards the main theorem is to notice that the decomposition of $\overline{X}$ as the disjoint union of the open Newton polygon strata $\overline{X}^{(\alpha)}$ induces an equality of virtual representations of the group $G(\mathbb{A}^{\infty}) \times W_{\mathbb{Q}_p}$:

$$\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) = \sum_{i\geqslant 0}(-1)^i H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) = \sum_{\alpha}\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j H^j_c(\overline{X}^{(\alpha)},\mathbb{Q}_\ell).$$

Thus, we may restrict ourself to study each Newton polygon stratum separately. Since we are assuming $q \geqslant 1$, to each isogeny class of Barsotti-Tate groups of dimension q and height h correspond possibly many distinct isomorphism classes. It is a result of Oort that, for any given Barsotti-Tate group H over $\overline{\mathbb{F}}_p$, with Newton polygon equal to α, the set of geometric points x of $\overline{X}^{(\alpha)}$ such that $\mathcal{G}_x \simeq H$ is a closed subset of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. Moreover, the corresponding reduced subscheme of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is a smooth scheme over $\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p$, which is called the leaf associated to H and is denoted by C_H.

In this work, we focus our attention on a distinguished leaf $C_\alpha = C_{\Sigma_\alpha}$ inside each Newton polygon stratum, which we call the central leaf, and define the Igusa varieties as covering spaces of the central leaf C_α. Before introducing the definition of Igusa variety, we recall a result of Zink (see [**29**]). This result extends the classical result in Dieudonné's theory of p-divisible groups which states that any p-divisible group defined over a perfect field is isogenous to a completely slope divisible one, *i.e.* to a direct product of isoclinic slope divisible p-divisible groups. In [**29**] Zink shows that over a regular scheme of characteristic p any p-divisible group with constant Newton polygon of slopes $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ is isogenous to a p-divisible group $\mathcal{G}$ which admits a filtration (called the slope filtration)

$$0 = \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$$

whose factors $\mathcal{G}^i = \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i-1}$ are isoclinic slope divisible p-divisible groups of slope λ_i. In particular, it follows from Zink's work that the Barsotti-Tate group $\mathcal{G}$ over C_α admits a slope filtration (see remark 2.14).

Definition 2. — For any positive integer m, we define the Igusa variety of level m, $J_{\alpha,m}$, over C_α to be the universal space for the existence of isomorphisms

$$j^i_m : \Sigma^i[p^m] \longrightarrow \mathcal{G}^i[p^m]$$

which extend étale locally to any higher level $m' \geqslant m$ (we denote by Σ^i the isoclinic piece of Σ_α of slope λ_i, for each i).

The notion of Igusa varieties was first introduced by Igusa in [**16**] in the theory of elliptic curves and used to describe the reduction at a bad prime p of modular curves (see [**20**]). In [**14**], Harris and Taylor introduce and study a higher dimensional analogue of the Igusa curves which they use to describe the reduction at a bad prime p of Shimura varieties. We remark that, both in the classical theory of modular curves and in the case of the Shimura varieties considered by Harris and Taylor in [**14**], the Igusa varieties are finite étale covers of the whole open Newton polygon stratum, and not of the central leaf. This is because, in the case when $\mathcal{G}$ is one dimensional, there is a unique leaf inside each open Newton polygon stratum, namely the whole stratum itself. We prove that, for any integer $m > 0$, the morphism $J_{\alpha,m} \to C_\alpha$ is finite, étale and Galois. (The definition of the Igusa varieties can be easily given over other leaves of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, namely over any leaf associated to a completely slope divisible p-divisible group.)

As mentioned, our idea is to study the Newton polygon stratum along two "directions": one corresponding to deforming the abelian varieties without altering the isomorphism class of the associated Barsotti-Tate group, the other to varying the Barsotti-Tate group (and the associated abelian variety) inside its isogeny class. The first one is related to the leaves of Oort's foliation (and thus to the Igusa varieties), the latter corresponds to the Rapoport-Zink spaces.

Following the work of Rapoport and Zink (**[27]**), to the Barsotti-Tate group Σ_α we associate a formal scheme $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_{\Sigma_\alpha}$ over $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$, which is formally locally of finite type. It arises as a moduli space for Barsotti-Tate groups H/S together with a quasi-isogeny $\beta : \Sigma_\alpha \times \overline{S} \to H \times \overline{S}$ over the reduction modulo p $\overline{S}$ of S, classified up to isomorphisms of Barsotti-Tate group H/S (S is a scheme over $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ on which p is locally nilpotent). We call $\mathcal{M}_\alpha$ the Rapoport-Zink space with no level structure, associated to α. For any pair of positive integers (n, d), we denote by $\mathcal{M}_\alpha^{n,d}$ the closed formal subscheme of $\mathcal{M}_\alpha$ over which $p^n\beta$ is an isogeny with kernel contained in $\Sigma_\alpha[p^d]$, and by $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$ its reduced fiber over $\overline{\mathbb{F}}_p$.

For any set of positive integers m, n, d, with $m \geqslant d$, and all integers $N \geqslant d/\delta B$ (where $\delta \in \mathbb{Q}$ and $B \in \mathbb{N}$ are two numbers which depend on the Newton polygon α), we define some morphisms $\pi_N : J_{\alpha,m} \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d} \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. (The definition of the map π_N is based on the observation that the iterated action of Frobenius on a Barsotti-Tate group makes the slope filtration more and more split.) When $n = d = 0$, the morphism $\pi_m^{0,0}$ is simply the structure morphism $\mathrm{q}_m : J_{\alpha,m} \to C_\alpha \hookrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (the space $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{0,0}$ is just a point, namely the point corresponding to the pair $(\Sigma_\alpha, \mathrm{id})$ over $\overline{\mathbb{F}}_p$). We prove that the morphisms $\pi_N : J_{\alpha,m} \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d} \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ are finite, and surjective on geometric points for m, n, d sufficiently large. Moreover, they are compatible with the projections among the Igusa varieties and with the inclusions among the Rapoport-Zink spaces, and also $\pi_{N+1} = (\mathrm{Fr}^B \times 1)\pi_N$, for all N (we denote by Fr the absolute Frobenius on $\overline{X}$). Further more, there is a natural way of defining a Galois action on the Igusa varieties and on the Rapoport-Zink spaces, which is compatible under the morphisms π_N with the Galois action on the Newton polygon strata.

One may hope to also endow the system of covers $J_{\alpha,m} \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$ of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ with an action of the group T_α of quasi-isogenies of Σ_α over $\overline{\mathbb{F}}_p$, leaving the morphisms π_N invariant (such an action exists for example on geometric points). From the definitions we have an action of subgroup $\Gamma_\alpha = \operatorname{Aut}(\Sigma_\alpha)$ of T_α on the tower of Igusa varieties, and a natural action of T_α on the space $\overline{\mathcal{M}}_\alpha$. We show that the diagonal action of Γ_α on the system of covers $J_{\alpha,m} \times_{\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$ extends to an action of a certain submonoid $\Gamma_\alpha \subset S_\alpha \subset T_\alpha$ which leaves the morphisms π_N invariant. Moreover, the action of S_α on the systems of covers $J_{\alpha,m} \times_{\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$ induces an action on the étale cohomology with compact supports groups, and this action extends uniquely to a smooth action of the entire group T_α. As a result of the analysis of the action of T_α on the cohomology groups, we prove the existence of a spectral sequence of Galois representations

$$\bigoplus_{i+j+k=n} \operatorname{Tor}^i_{\mathcal{H}_r(T_\alpha)} \left(H^k_c(\overline{\mathcal{M}}_\alpha, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})\right) \Longrightarrow H^n_c(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

where $H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_m H^j_c(J_{\alpha,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$.

As we let the level structure away from p vary, the action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the Shimura varieties with no level structure at p preserves the above constructions. Therefore, the above spectral sequences give rise to an equality of representations of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\sum_{i+j+k=n} \varinjlim_{U^p} \operatorname{Tor}^i_{\mathcal{H}(T_\alpha)} \left(H^k_c(\overline{\mathcal{M}}_\alpha, \mathbb{Q}_\ell), H^j_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Q}_\ell)\right) = \varinjlim_{U^p} H^n_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p(0)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell).$$

We are left to study the case of Shimura varieties with level structure at p. Our idea is to extend the above construction to characteristic zero and to compare the Shimura varieties with level structure to the product of some smooth lifts of the Igusa varieties with the Rapoport-Zink spaces of the same level. More precisely, we are interested in studying the associated vanishing cycles sheaves as we can then use them to compute the ℓ-adic cohomology of these spaces in characteristic zero in terms of the cohomology of their reduction in positive characteristic.

We denote by $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{C}_\alpha$) the formal completion of X along $\overline{X} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (resp. $C_\alpha \times \overline{\mathbb{F}}_p$), and by $\mathcal{J}_{\alpha,m}$ the finite étale cover of $\mathfrak{C}_\alpha$ corresponding to $J_{\alpha,m}/C_\alpha$. We denote by $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_M$ over $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ the rigid analytic space associated to the Shimura variety with structure of level M at p and by $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M}$ over $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_\alpha$ the Rapoport-Zink space of level M.

For $m \geqslant d+t$, we construct some morphisms

$$\pi_N(t) : \left(\mathcal{J}_{\alpha,m} \times_{\operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}_\alpha\right)(t) \longrightarrow \mathfrak{X}(t),$$

such that $(\pi_N(t))^{\mathrm{red}} \circ (1 \times \operatorname{Fr}^{NB}) = \pi_N$, for all $N \geqslant (d+t)/\delta B$, which are compatible with the projections among the lifts of the Igusa varieties and with the inclusions among the Rapoport-Zink spaces, and which extend Zariski locally to the formal schemes in characteristic zero. (For any formal scheme $\mathcal{Y}$ over $\operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, we write $\mathcal{Y}(t)$ for the subscheme defined by the t-th power of an ideal of definition $\mathcal{I}$ of $\mathcal{Y}$, $p \in \mathcal{I}$.) For $m \geqslant d+t+M$, we prove that for any affine open V of $\mathcal{J}_{\alpha,m} \times_{\operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}_\alpha$ there exists a formally smooth morphism π_V over V lifting $\pi_N(t)_{|V(t)}$ with the property that

$$\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_M \times_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \pi_V} V^{\mathrm{rig}} \simeq \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \times_{\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_\alpha, pr_{2|V}} V^{\mathrm{rig}}.$$

The existence of the morphisms $\pi_N(t)$, and of the corresponding local liftings to characteristic zero, enable us to compare the vanishing cycles sheaves (in the sense of Berkovich's [**3**] and [**4**]) of the Shimura varieties and of the Rapoport-Zink spaces when level structure at p is considered. More precisely, as the level at p varies, we obtain a system of compatible equalities of representations of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\sum_{i,j,k,q} (-1)^{i+j+k+q} \varinjlim_{U^p} \mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}(T_\alpha)} \left(H^k_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R^q\Psi_\eta(\mathbb{Q}_\ell)), H^j_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Q}_\ell)\right)$$
$$= \sum_{n,q} (-1)^{n+q} \varinjlim_{U^p} H^n_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p(M)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, R^q\Psi_\eta(\mathbb{Q}_\ell)),$$

It is easy to see that, as α varies among the Newton polygons of dimension q and height h, the right hand side computes the ℓ-adic cohomology groups of the Shimura variety of level M. It is more subtle to realise that the cohomology groups of the special fibers of the Rapoport-Zink spaces, with coefficients in the vanishing cycles sheaves, compute not the cohomology of the Rapoport-Zink spaces but its contragredient dual, up to Tate twist.

As the level M varies, the above equalities piece together in the statement of the main theorem.

Acknowledgements. — The author will like to thank R. Taylor suggesting the topic of this paper, and for his inestimable help with all the phases of its realization. She is also very grateful to B. Conrad, J. de Jong, L. Fargues, T. Graber and F. Oort for many enlightening mathematical discussions and for carefully reading early drafts of this paper.

2. Preliminaries

In this section, we shall introduce the definitions and results which are the starting point of our work. In particular, we shall define the class of (PEL) type Shimura varieties we study. These are some smooth projective varieties defined over an imaginary quadratic extension of $\mathbb{Q}$, which arise as moduli spaces of polarized abelian varieties and which admit smooth integral models at p, in the cases when no level structure at p is considered. (We shall follow the definitions given by Harris and Taylor in [**14**]).

In section 2.2, we shall focus our attention on the reduction in positive characteristic of the Shimura varieties with no level structure at p and introduce in this context the Newton polygon stratification. This stratification was defined by Grothendieck in [**13**] and extensively studied by Oort in the general context of moduli spaces of abelian varieties (see [**24**]). Inside each Newton polygon stratum, we shall distinguish some smooth closed subschemes which are defined by fixing the isomorphism class of the p-divisible group associated to the abelian variety. These are the leaves of Oort's foliation (see [**23**]). We shall also point out a certain isomorphism class of p-divisible groups for any given Newton polygon, whose corresponding leaf (the central leaf) will play an important role in our analysis.

From the theory of Barsotti-Tate groups, we shall recall the definition of some (PEL) type moduli spaces introduced by Rapoport and Zink (in [**27**]) and also the notion of slope filtration. The slope filtration of a Barsotti-Tate group over a perfect field of characteristic p was first studied by Grothendieck (see [**19**]). Here, we shall recall some recent results of Zink which study the case of a Barsotti-Tate group over a smooth scheme of characteristic p (see [**29**]). We shall also introduce the notion of level structure on a Barsotti-Tate group, as a specification of Katz's and Mazur's notion of full set of sections on finite flat group schemes (see [**20**]).

Finally, we shall recall some results of Berkovich on the theory of vanishing cycles in the context of rigid-analytic spaces associated to some special formal schemes (see [**3**] and [**4**]).

2.1. Shimura varieties. — In this section we shall introduce the simple unitary group Shimura varieties which are studied in this paper. This class is a sub-class of the Shimura varieties introduced by Kottwitz in [**21**] and contains a sub-class of the class studied by Harris and Taylor in [**14**] (see section 2.1.8).

We shall follow the exposition and notations of Chapter IV in [**14**].

2.1.1. Let E be an imaginary quadratic extension of $\mathbb{Q}$ in which the prime p splits. We denote by c the complex conjugation in $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ and by u, u^c the two primes of E above p.

Let B over E be a division algebra of dimension h^2 such that:

- E is the center of B;
- B splits at u;
- there is a positive involution of the second kind $*$ on B.

(We recall that an involution on B, $* : B \longrightarrow B^{\mathrm{op}}$, is said of the second kind if $z^* = z^c$ for all $z \in E$, and is positive if $\mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xx^*) > 0$ for all $x \in B^\times$.)

The above conditions on B imply that $B_u = B \otimes_E E_u$ is isomorphic to $M_n(\mathbb{Q}_p)$. We fix such an isomorphism $B_u \simeq M_n(\mathbb{Q}_p)$ and denote by $\mathcal{O}_{B_u}$ the maximal order of B_u corresponding to $M_n(\mathbb{Z}_p) \subset M_n(\mathbb{Q}_p)$. Then, there is a a unique maximal $\mathbb{Z}_{(p)}$-order $\mathcal{O}_B$ in B which is stable under the involution $*$ and such that $(\mathcal{O}_B)_u = \mathcal{O}_{B_u}$. We also define $\varepsilon \in \mathcal{O}_{B_u}$ to be the idempotent element which maps, under the above isomorphism, to the matrix with entries equal to 1 in position $(1,1)$ and 0 every where else.

2.1.2. Let V denote the $B \otimes B^{\mathrm{op}}$-module underlying B and choose a non-degenerate $*$-hermitian alternating pairing $\langle \bullet, \bullet \rangle$ on V. This choice defines an involution of the second kind $\#$ on B^{op} by

$$\langle (b_1 \otimes b_2)x, y \rangle = \langle x, (b_1^* \otimes b_2^\#)y \rangle$$

for all $x, y \in V$, $b_1 \in B$ and $b_2 \in B^{\mathrm{op}}$.

Let us denote by q $(0 \leqslant q \leqslant h)$ the positive integer such that the pairing $\langle \bullet, \bullet \rangle$ on $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ has invariant $(q, h-q)$. We assume $q \neq 0, h$. This is equivalent to assuming that the corresponding class of Shimura varieties has bad reduction at p.

2.1.3. Let G be the algebraic group over $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{A}^{\infty}$) defined by

$$G(R) = \{(\lambda, g) \in R^{\times} \times (B^{\mathrm{op}} \otimes R)^{\times} \mid gg^{\#} = \lambda\},$$

for any $\mathbb{Q}$-algebra (resp. $\mathbb{A}^{\infty}$-algebra) R.

There is a distinguished normal subgroup G_1 of G, namely the subgroup of the automorphisms of V which preserves the pairing $\langle \bullet, \bullet \rangle$, *i.e.*

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0,$$

where the morphism $\nu : G \to \mathbb{G}_m$ is defined by $(\lambda, g) \mapsto \lambda$. Then,

$$G_1(\mathbb{R}) \simeq U(q, h-q).$$

Let $\mathbb{A}^{\infty}$ denote the finite adels of $\mathbb{Q}$. We observe that $G(\mathbb{A}^{\infty})$ naturally decomposes as $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times G(\mathbb{Q}_p)$. Moreover, since $(p) = u \cdot u^c$ in E, we can identify

$$B^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = B_u^{\mathrm{op}} \times B_{u^c}^{\mathrm{op}},$$

and thus any $(\lambda, g) \in G(\mathbb{Q}_p)$ can be written uniquely as $(\lambda, g_1, g_2) \in \mathbb{Q}_p \times B_u^{\mathrm{op}} \times B_{u^c}^{\mathrm{op}}$ with $(g_1 g_2^{\#}, g_2 g_1^{\#}) = (\lambda, \lambda)$. There is a natural isomorphism

$$(\mathbb{Q}_p)^{\times} \times (B_u^{\mathrm{op}})^{\times} \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

which is defined by $(\lambda, g_1) \mapsto (\lambda, g_1, \lambda(g_1^{\#})^{-1})$.

2.1.4. Let us recall the following definitions about abelian schemes (see [**14**], Lemma IV.1.1, p. 93, and Section IV.4, p. 112).

Let S be a E-scheme and A/S an abelian scheme of dimension h^2. Suppose that there is a morphism $i : B \hookrightarrow \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Then $\mathrm{Lie}(A)$ is a locally free $\mathcal{O}_S$-module of rank h^2 with an action of B and it decomposes as

$$\mathrm{Lie}(A) = \mathrm{Lie}^{+}(A) \oplus \mathrm{Lie}^{-}(A),$$

where $\mathrm{Lie}^{+}(A)$ (resp. $\mathrm{Lie}^{-}(A)$) is the module $\mathrm{Lie}(A) \otimes_{\mathcal{O}_S \otimes E} \mathcal{O}_S$ and the map $E \to \mathcal{O}_S$ is the natural map (resp. the complex conjugate of the natural map). Both $\mathrm{Lie}^{+}(A)$ and $\mathrm{Lie}^{-}(A)$ are locally free $\mathcal{O}_S$-modules.

Definition 2.1. — We call the pair (A, i) compatible if $\mathrm{Lie}^{+}(A)$ has rank qh.

Suppose now that S is a $\mathcal{O}_{E_u}$-scheme, A an abelian scheme over S and $i : \mathcal{O}_B \hookrightarrow \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$.

Definition 2.2. — We call the pair (A, i) compatible if $\mathrm{Lie}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E_u}$ is locally free of rank qh.

We remark that, if p is locally nilpotent on S, then the pair (A,i) is compatible if and only if the Barsotti-Tate group $G=\varepsilon A[u^\infty]$ is a q-dimensional Barsotti-Tate group, ($\varepsilon\in\mathcal{O}_{B_u}$ is the idempotent defined in section 2.1.1). In fact, in this case, we can identify $\mathrm{Lie}(A[u^\infty])=\mathrm{Lie}(A)\otimes_{\mathbb{Z}_p\otimes\mathcal{O}_E}\mathcal{O}_{E_u}$ as $\mathcal{O}_{B_u}$-modules, and thus we have $\mathrm{Lie}(G)=\varepsilon\,\mathrm{Lie}(A[u^\infty])$ as $\mathcal{O}_{E_u}=\mathbb{Z}_p$-modules. It follows that saying that the pair (A,i) is compatible is equivalent to say that $\mathrm{Lie}(G)$ is locally free of rank q, since we also have the equalities

$$\mathcal{O}_{B_u}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Lie}(G)=\mathcal{O}_{B_u}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\varepsilon\,\mathrm{Lie}(A[u^\infty])=\mathrm{Lie}(A[u^\infty])=\mathrm{Lie}(A).$$

On the other hand, saying that $\mathrm{Lie}(G)$ is a locally free $\mathbb{Z}_p$-module of rank q is equivalent to saying that the Barsotti-Tate group G has dimension q.

It follows from the fact that A/S has dimension h^2 that $A[u^\infty]$ has height h^2 (half the height of $A[p^\infty]$) and thus that G has height h.

2.1.5. Let U be an open compact subgroup of $G(\mathbb{A}^\infty)$. We shall define a functor X_U on the category of pairs (S,s), where S is a connected locally noetherian E-scheme and s is a geometric point on S, to sets. We define $X_U(S,s)$ to be the set of equivalence classes of quadruples $(A,\lambda,i,\overline{\mu})$ where:

- A is an abelian scheme over S of dimension h^2;
- $\lambda: A\to A^\vee$ is a polarization;
- $i: B\hookrightarrow \mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ such that (A,i) is compatible and $\lambda\circ i(b^*)=i(b)^\vee\circ\lambda$ for all $b\in B$;
- $\overline{\mu}$ is a $\pi_1(S,s)$-invariant U-orbit of isomorphisms of $B\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{A}^\infty$-modules $\mu: V\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{A}^\infty\to VA_s$ which takes the pairing $\langle\bullet,\bullet\rangle$ on $V\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{A}^\infty$ to a $(\mathbb{A}^\infty)^\times$-scalar multiple of the λ-Weil pairing.

Two quadruples $(A,\lambda,i,\overline{\mu})$ and $(A',\lambda',i',\overline{\mu}')$ are equivalent if there exists an isogeny $\beta: A\to A'$ which takes λ to a $\mathbb{Q}^\times$-multiple of λ', i to i' and $\overline{\mu}$ to $\overline{\mu}'$ (see [**22**], p. 390).

If s' is a second geometric point on S then $X_U(S,s)$ is canonically in bijection with $X_U(S,s')$ (see [**22**], p. 391). Therefore X_U can be viewed as a functor on the category of connected locally noetherian E-schemes to sets. Moreover, we can extend X_U on the category of locally noetherian E-schemes by setting $X_U(S)=\prod_i X_U(S_i)$ for any $S=\coprod_i S_i$ with S_i connected for all i.

2.1.6. We say that an open compact subgroup U of $G(\mathbb{A}^\infty)$ is sufficiently small if there exists a prime x in $\mathbb{Q}$ such that the projection of U in $G(\mathbb{Q}_x)$ contains no elements of finite order other than 1. If U is sufficiently small then the functor X_U on the category of locally noetherian E-schemes to sets is represented by a smooth projective scheme X_U/E (see [**22**], p. 391).

If $V\subset U$ then there is a natural finite étale morphism $X_V\twoheadrightarrow X_U$ and if V is normal in U this map is Galois with Galois group U/V.

2.1.7. Moreover, there is a natural action of the group $G(\mathbb{A}^\infty)$ on the system of Shimura varieties defined by composition on the right with the isomorphism $\mu : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^\infty \to VA_s$. More precisely, for any $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ and any open compact sufficiently small subgroup U of $G(\mathbb{A}^\infty)$, there exists a natural finite étale morphism

$$g : X_U \longrightarrow X_{g^{-1}Ug}$$

defined by setting $(A, \lambda, i, \overline{\mu}) \mapsto (A, \lambda, i, \overline{\mu g})$.

2.1.8. We remark that when $q = 1$ the class of Shimura varieties we have introduced is a sub-class of the class of Shimura varieties studied by Harris and Taylor in [**14**] (and thus the geometry and the cohomology of these Shimura varieties is already known). More precisely, for $q = 1$, we recover the sub-class corresponding to the case when the totally real extension of $\mathbb{Q}$ inside the ground field is trivial.

2.1.9. Let U^p be a sufficiently small open compact subgroup of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ (*i.e.* there exists a prime $x \neq p$ in $\mathbb{Q}$ such that the projection of U^p in $G(\mathbb{Q}_x)$ contains no elements of finite order other than 1). For any non-negative integer m we define

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \ker\left((\mathcal{O}_{B_u^{\mathrm{op}}})^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_u^{\mathrm{op}}}/u^m)^\times \right).$$

It is a sufficiently small open compact subgroup of $G(\mathbb{A}^\infty)$.

We call $X_{U^p(m)}$ a Shimura variety with structure of level m at u (or with no level structure at u if $m = 0$).

2.1.10. The Shimura varieties with no level structure at u admit smooth integral models over $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{E_u}$ (see [**22**], chapter 5, pp. 389–392). For completeness, we recall Kottwitz's construction in this context.

We define a functor $\mathfrak{X}_{U^p}$ on the category of pairs (S, s), where S is a connected locally noetherian $\mathcal{O}_{E_u}$-schemes and s is a geometric point on S, to sets. We set $\mathfrak{X}_{U^p}(S, s)$ to be the set of equivalence classes of quadruples $(A, \lambda, i, \overline{\mu}^p)$ where:

- A is an abelian scheme over S of dimension h^2;
- $\lambda : A \to A^\vee$ is a prime-to-p polarization;
- $i : \mathcal{O}_B \hookrightarrow \operatorname{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ such that (A, i) is compatible and $\lambda \circ i(b^*) = i(b)^\vee \circ \lambda$ for all $b \in \mathcal{O}_B$;
- $\overline{\mu}^p$ is a $\pi_1(S, s)$-invariant U^p-orbit of isomorphisms of $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^{\infty,p}$-modules $\mu^p : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^{\infty,p} \to V^p A_s$ which takes the pairing $\langle \bullet, \bullet \rangle$ on $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^{\infty,p}$ to a $(\mathbb{A}^{\infty,p})^\times$-scalar multiple of the λ-Weil pairing (we denote by $V^p A_s$ the Tate space of A_s away from p).

Two quadruples $(A, \lambda, i, \overline{\mu}^p)$ and $(A', \lambda', i', (\overline{\mu}^p)')$ are equivalent if there exists a prime-to-p isogeny $\beta : A \to A'$ which takes λ to a $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$-multiple of λ', i to i' and $\overline{\mu}$ to $(\overline{\mu}^p)'$.

As in 2.1.5 $\mathfrak{X}_{U^p}(S, s)$ is canonically independent on s. We denote again by $\mathfrak{X}_{U^p}$ the induced functor on the category of connected locally noetherian $\mathcal{O}_{E_u}$-schemes. We also extend $\mathfrak{X}_{U^p}$ to all locally noetherian $\mathcal{O}_{E_u}$-schemes as in 2.1.5.

The functor $\mathfrak{X}_{U^p}$ on the category of locally noetherian $\mathcal{O}_{E_u}$-schemes to sets is represented by a projective scheme $\mathfrak{X}_{U^p}$ over $\mathcal{O}_{E_u}$ and there is a canonical isomorphism

$$\mathfrak{X}_{U^p} \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{E_u}} \operatorname{Spec} E_u = X_{U^p(0)} \times_{\operatorname{Spec} E} \operatorname{Spec} E_u$$

(see [**14**], p. 113).

Proposition 2.3. — *Let U^p be a sufficiently small open compact subgroup of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$. Let x be a closed point of $\mathfrak{X}_{U^p} \times_{\mathcal{O}_{E_u}} k(u)^{\mathrm{ac}}$, associated to a quadruple $(A, \lambda, i, \overline{\mu}^p)$.*

The formal completion $(\mathfrak{X}_{U^p} \times_{\mathcal{O}_{E_u}} \mathcal{O}_{\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}}})_x^\wedge$ is the universal formal deformation space of the Barsotti-Tate group $G = \varepsilon A[u^\infty]/k(u)^{\mathrm{ac}} = \overline{\mathbb{F}}_p$, thus

$$(\mathfrak{X}_{U^p} \times \mathcal{O}_{\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}}})_x^\wedge \simeq \operatorname{Spf} W(\overline{\mathbb{F}}_p)[[T_1, \ldots, T_{q(h-q)}]].$$

Proof. — By definition, the completion $(\mathfrak{X}_{U^p} \times \mathcal{O}_{\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}}})_x^\wedge$ is the formal deformation space for deforming (A, λ, i). By Serre-Tate Theorem, this is the same as deforming $(A[p^\infty], \lambda, i)$, and since $\lambda : A[u^\infty] \to A[(u^c)^\infty]$ is an isomorphism, this is also the same as deforming $(A[u^\infty], i)$. Finally, we observe that deforming the $\mathcal{O}_{B_u}$-module $A[u^\infty]$ is equivalent to deforming the $\mathbb{Z}_p = \varepsilon \mathcal{O}_{B_u}$-module $G = \varepsilon A[u^\infty]$.

Since the Barsotti-Tate group G has dimension q and height h, its formal deformation space is isomorphic to $\operatorname{Spf} W(\overline{\mathbb{F}}_p)[[T_1, \ldots, T_{q(h-q)}]]$ (see [**17**]). □

Corollary 2.4. — *For any sufficiently small open compact subgroup U^p of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, the Shimura variety $\mathfrak{X}_{U^p}$ is a smooth projective scheme over $\mathcal{O}_{E_u}$.*

2.1.11. If $V^p \subset U^p$ then there is a natural finite étale morphism $\mathfrak{X}_{V^p} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}_{U^p}$ which is compatible with the map $X_{V^p(0)} \twoheadrightarrow X_{U^p(0)}$ defined in 2.1.5. Moreover, if V^p is normal in U^p then the map is Galois with Galois group U^p/V^p (see [**14**], Lemma IV.4.1, part (6)).

There is a natural action of the group $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the integral models of the Shimura varieties, which is compatible with the action we previously defined on the Shimura varieties. More precisely, for any $g \in G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ and any open compact sufficiently small subgroup U^p of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, there exists a natural finite étale morphism

$$g : \mathfrak{X}_{U^p} \longrightarrow \mathfrak{X}_{g^{-1}U^p g}$$

defined by setting $(A, \lambda, i, \overline{\mu}) \mapsto (A, \lambda, i, \overline{\mu g})$, and whose restriction to the generic fibers is the morphism

$$g : X_{U^p(0)} \longrightarrow X_{g^{-1}U^p(0)g},$$

we defined in section 2.1.7.

2.1.12. We remark that the above action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the integral models of the Shimura varieties extends to an action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \subset G(\mathbb{A}^\infty)$, also compatible with the previously defined action on the generic fibers.

In fact, let $g \in \mathbb{Q}_p^\times$ and U^p be an open compact sufficiently small subgroup of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$. Then, we have $g^{-1}U^p(0)g = U^p(0)$. Let us assume $\mathrm{val}_p(g) \leqslant 0$ and define a morphism

$$g : \mathfrak{X}_{U^p} \longrightarrow \mathfrak{X}_{U^p}$$

by setting $(A, \lambda, i, \overline{\mu}) \mapsto (A/A[(u^c)^{-\mathrm{val}_p(g)}], \lambda', i', \overline{\mu}')$, where the structures on the abelian variety $A/A[(u^c)^{-\mathrm{val}_p(g)}]$ are induced by the ones on A via the isogeny $g : A \twoheadrightarrow A/A[(u^c)^{-\mathrm{val}_p(g)}]$, *i.e.*

- λ' is the unique prime-to-p polarization such that $g^\vee \circ \lambda' \circ g = p^{-\mathrm{val}_p(g)}\lambda$;
- for all $b \in \mathcal{O}_B$, we have $g^{-1} \circ i'(b) \circ g = i(b) \in \mathrm{End}(A) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$;
- $\overline{\mu}' = \overline{\mu \circ g}$.

Let us choose $v \in \mathcal{O}_E$ such that $\mathrm{val}_u(v) = 0$ and $\mathrm{val}_{u^c}(v) = -\mathrm{val}_p(g)$. Then the isogeny $v : A \to A$ gives rise to an equivalence between the quadruples $(A/A[(u^c)^{-\mathrm{val}_p(g)}], \lambda', i', \overline{\mu}')$ and $(A, \lambda, i, \overline{\mu \circ v})$. It follows that the morphism $g : \mathfrak{X}_{U^p} \to \mathfrak{X}_{U^p}$ is indeed an isomorphism and also that on the generic fibers it restricts to the morphism

$$g : X_{U^p(0)} \longrightarrow X_{g^{-1}U^p(0)g},$$

defined in section 2.1.7.

2.1.13. Let us reinterpret some of the above definitions and results in terms of the cohomology of the Shimura varieties.

Let ℓ be a prime number, $\ell \neq p$, and consider the constant abelian torsion étale sheaf $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, for any integer $r \geqslant 1$.

For any level $U \subset G(\mathbb{A}^\infty)$, we consider the étale cohomology of the Shimura varieties over E_u with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, $H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$, for any integer $i \geqslant 0$. They form an A-R ℓ-adic system, we write

$$H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Q}_\ell) = \varprojlim_r H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

For any $U' \subset U$, the natural morphisms $X_{U'} \to X_U$ give rise to some morphisms

$$H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(X_{U'} \times_E (\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

The groups $H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Q}_\ell)$, together with the above morphisms, form an inductive system. For all $i \geqslant 0$, we write

$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_U H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}_u^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

For any $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$, the morphisms $g : X_U \to X_{g^{-1}Ug}$ also give rise to some morphism among the ℓ-adic cohomology groups of the Shimura varieties, and moreover the induced morphisms piece together in an isomorphism of the direct limit $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$. These isomorphisms define an action of $G(\mathbb{A}^\infty)$ on the groups $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$, for all i, and moreover it is easy to see that this action commutes with the natural action of the Weil group $W_{E_u} = W_{\mathbb{Q}_p}$ ($E_u = \mathbb{Q}_p$). Further more, the $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ are admissible representations of the product $W_{\mathbb{Q}_p} \times G(\mathbb{A}^\infty)$.

In the following, we are interested in studying the virtual representation of $W_{\mathbb{Q}_p} \times G(\mathbb{A}^\infty)$

$$H^\bullet(X, \mathbb{Q}_\ell) = \sum_i (-1)^i H^i(X, \mathbb{Q}_\ell).$$

We will also work with torsion coefficients and, for any integer $r \geqslant 1$, consider the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $W_{\mathbb{Q}_p} \times G(\mathbb{A}^\infty)$

$$H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_U H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}^{\text{nr}}_u)^{\text{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

for all $i \geqslant 0$. Let us remark that these representations are smooth, but not *a priori* admissible.

2.2. Newton polygon stratification. — In [**24**] Oort studies a stratification on the reduction in characteristic $p > 0$ of a moduli space of abelian varieties. This stratification is called the Newton polygon stratification and is defined in terms of the Newton polygons of the Barsotti-Tate groups associated to the p-torsion of the abelian varieties. In particular, each Newton polygon stratum is characterized by the property that the Barsotti-Tate group over it has constant Newton polygon, *i.e.* constant isogeny class. When Barsotti-Tate groups considered have dimension greater than one, to each isogeny class correspond many isomorphism classes. In [**23**], Oort defines some closed subvarieties inside each Newton polygon stratum, which are the loci where the Barsotti-Tate groups associated to the abelian varieties have constant isomorphism class. We refer to these varieties as the leaves of Oort's foliation.

In this section we shall recall the definitions of the Newton polygon stratification and of the leaves, in the context of the Shimura varieties introduced in 2.1. Moreover, we shall give an alternative proof of the fact that the leaves are closed and smooth subvarieties of the Newton polygon strata.

2.2.1. Let U^p be as in 2.1.10 and denote by $\overline{X}$ the reduction $\mathcal{X}_{U^p} \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{E_u}} \operatorname{Spec} k(u)$, where $k(u)$ is the residue field of $\mathcal{O}_{E_u}$ ($k(u) = \mathbb{F}_p$).

Let $\mathcal{A}$ be the universal abelian variety over $\overline{X}$. It follows from the definition of the moduli space that there is a natural action of $\mathcal{O}_B$ on $\mathcal{A}$ and therefore an action of $\mathcal{O}_{B_u}$ on $\mathcal{A}[p^\infty]$. Let $\varepsilon \in \mathcal{O}_{B_u}$ be the idempotent element defined in 2.1.1 and write $\mathcal{G} = \varepsilon\mathcal{A}[p^\infty]$.$\mathcal{G}$ is a Barsotti-Tate group of height h and dimension q over $\overline{X}$ (see section 2.1.4). For any point x of $\overline{X}$ we denote by $\alpha(x)$ the Newton polygon of $\mathcal{G}_x$.

***Proposition 2.5* (see [24], section 2.3, p. 387).** — *Let α be a Newton polygon of height h and dimension q. The set of the points x of $\overline{X}$ such that $\alpha(x) \leqslant \alpha$ (i.e. such that no point of $\alpha(x)$ is strictly below α) is a closed subset of $\overline{X}$.*

We denote by $\overline{X}^{[\alpha]}$ the corresponding reduced subscheme of $\overline{X}$ and call it the closed Newton polygon stratum determined by α.

We also define the open Newton polygon stratum $\overline{X}^{(\alpha)} = \overline{X}^{[\alpha]} - \cup_{\beta<\alpha}\overline{X}^{[\beta]}$.

2.2.2. The following definition of a leaf is due to Oort, who also proved that the leaves are closed smooth subvarieties of the Newton polygon strata (see [**23**]). Here, we provide an alternative proof of these facts in our context. More precisely, we now show that the leaves are locally closed smooth subvarieties of the Newton polygon strata. Later, in proposition 4.7, we will prove that the leaves are indeed closed. We thank A. Vasiu for suggesting to us the proof of proposition 2.7.

Lemma 2.6. — *Let H be a Barsotti-Tate group defined over a finite extension k_0 of $\mathbb{F}_p$. Let X be a scheme over $\overline{\mathbb{F}}_p \supset k_0$ and G/X a Barsotti-Tate group.*

Then, the set

$$C_H = \{x \in X \mid G_x \times_{k(x)} k(x)^{\mathrm{ac}} \simeq H \times_{k_0} k(x)^{\mathrm{ac}}\}$$

is a constructible subset of X.

Moreover, if we further assume that $X = X_0 \times_{k_0} \overline{\mathbb{F}}_p$, for some k_0-scheme X_0, and G is the pullback of a Barsotti-Tate group over X_0, then the set C_H is a constructible subset of X_0.

Proof. — In [**28**], Zink proves that, for any positive integer N, the functor $Y_N = Y_{H,N}$, defined as

$$Y_N(T/X) = \{\text{isomorphisms } \mathcal{G}_T[p^N] \simeq H_T[p^N]\},$$

is represented by a scheme of finite type over X.

Thus, in particular, $C_{H,N} = \mathrm{im}(Y_N \to X)$ is a constructible subset of X,

$$C_{H,N} = \{x \in X \mid G_x[p^N] \times k(x)^{\mathrm{ac}} \simeq H[p^N] \times k(x)^{\mathrm{ac}}\}.$$

Moreover, Zink also proves that, for any algebraically closed field $K/\overline{\mathbb{F}}_p$, there exists a positive integer N_K such that

$$C_{H,N}(K) = C_{H,N_K}(K) = \{x \in X(K) \mid G_x \simeq H \times K\},$$

for all $N \geqslant N_K$.

In particular, for $K = \overline{\mathbb{F}}_p$ and $N_0 = N_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, we have that for all $N \geqslant N_0$

$$C_{H,N}(\overline{\mathbb{F}}_p) = C_{H,N_0}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{x \in X(\overline{\mathbb{F}}_p) \mid G_x \simeq H \times \overline{\mathbb{F}}_p\}.$$

Since the subsets $C_{H,N}$ are constructible, the above equalities imply that $C_{H,N} = C_{H,N_0}$, for all $N \geqslant N_0$, and thus

$$C_H = \{x \in X \mid G_x \times k(x)^{\mathrm{ac}} \simeq H \times k(x)^{\mathrm{ac}}\} = C_{H,N_0}$$

and is a constructible subset of X.

Finally, in order to show that the subscheme C_H is a constructible subset of X_0, it suffices to observe that the set of closed points of C_H is stabilized by the action of the

Galois group $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/k_0)$ (which follows from the fact that the Barsotti-Tate groups G_0 and H are defined over X_0/k_0 and k_0, respectively). $\square$

Proposition 2.7. — *Let H be a Barsotti-Tate group over a finite extension $k_0/\mathbb{F}_p$, of height h and dimension q. We denote by α the Newton polygon of H, by $\overline{X}^{(\alpha)}$ the associated open Newton polygon stratum and by $\mathcal{G}$ the universal Barsotti-Tate group over $\overline{X}^{(\alpha)}$.*

Then there exists a unique reduced locally closed subscheme C_H of $\overline{X}^{(\alpha)} \times k_0$ such that for any geometric point $x \in \overline{X}^{(\alpha)} \times k_0$ we have $G_x \simeq H$ if and only if $x \in C_H$.

Moreover, the scheme C_H is smooth.

Proof. — By the previous lemma, we know that the set

$$C_H = \{x \in \overline{X}^{(\alpha)} \times k_0 \mid \mathcal{G}_x \times k(x)^{\mathrm{ac}} \simeq H \times k(x)^{\mathrm{ac}}\}$$

is constructible. Thus, it remains to prove that the set C_H is locally closed (in which case it inherits a unique structure of reduced locally closed subscheme), and moreover that, as a subscheme of $\overline{X}^{(\alpha)} \times k_0$, C_H is smooth.

Let us fix an algebraically closed field $\Omega/\overline{\mathbb{F}}_p$ with transcendence degree of the continuum (thus all the point of $\overline{X}^{(\alpha)}$ can be viewed as Ω-points).

Since $C = C_H \times \Omega$ is constructible, C is a finite union of locally closed sets C_i with irreducible closure. Moreover, for each closed point x of C, the ring $\mathcal{O}^{\wedge}_{\overline{X}\times\Omega,x}$ and the restriction of $\mathcal{G}$ over it are independent of x. For simplicity, we denote this ring by A and its Barsotti-Tate group by G/A. For any prime ideal $\mathcal{P}$ of A (necessarily closed), we choose a morphism $f_{\mathcal{P}} : A \to \Omega$ with $\ker f_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ (such a morphism exists since Ω has degree of the continuum). We denote by J the intersection of all primes $\mathcal{P}$ of A such that $f_{\mathcal{P}*}\mathcal{G} \simeq H$.

Let x_0 be a smooth closed point of C, *i.e.* x_0 is in the closure of only one C_i, say C_0, and it is a smooth point of C_0. Let I_0 denote the ideal in $\mathcal{O}_{\overline{X}\times\Omega,x_0}$ defining $\mathcal{O}_{C_0,x_0}$. Then, a prime ideal $\mathcal{P}$ of $\mathcal{O}^{\wedge}_{\overline{X}\times\Omega,x_0}$ contains $I_0^{\wedge}$ if and only if it contains I_0, or equivalently if and only if $f_{\mathcal{P}*}\mathcal{G} \simeq H$. As C_0 is by definition reduced we have

$$I_0^{\wedge} = \cap_{\mathcal{P}\supset I_0}\mathcal{P}.$$

It follows that, under an isomorphism $(\mathcal{G}, \mathcal{O}^{\wedge}_{\overline{X}\times\Omega,x_0}) \simeq (G, A)$, the ideal $I_0^{\wedge}$ corresponds to the ideal J. In particular, the ring A/J is formally smooth and a prime ideal $\mathcal{P}$ of A contains J if and only if $f_{\mathcal{P}*}\mathcal{G} \simeq H$.

Now let $x \in C_i - C_j$ be a closed point such that $x \in \overline{C_j}$ (the closure of C_j). Let $\mathcal{P}'$ be the prime ideal of $\mathcal{O}_{\overline{X}\times\Omega,x}$ defining $\overline{C_j}$ and let J_x be the ideal of $\mathcal{O}^{\wedge}_{\overline{X}\times\Omega,x}$ which corresponds to J under an isomorphism $(\mathcal{G}, \mathcal{O}^{\wedge}_{\overline{X}\times\Omega,x}) \simeq (G, A)$. Since $\mathcal{P}'$ is a prime in C we have $\mathcal{P}'^{\wedge} \supset J_x$. Thus, for any other prime $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}'$, we have $\mathcal{P}^{\wedge} \supset J_x$ and so $f_{\mathcal{P}^{\wedge}*}\mathcal{G} \simeq H$, *i.e.* $\mathcal{P} \in C$. Hence, there exists a neighbourhood U_x of x in $\overline{X}$ such that $U_x \cap \overline{C_j}$ is contained in C. We conclude that for any point x in C, there exists a neighbourhood U_x in $\overline{X}$ such that $U_x \cap \overline{C} = C$. Thus C is a locally closed subset of $\overline{X}$, and by definition is contained in $\overline{X}^{(\alpha)}$ (thus, it is also a locally closed subset of $\overline{X}^{(\alpha)}$).

Moreover, if x is any point of C and $I \subset \mathcal{O}_{\overline{X}\times\Omega,x}$ is the ideal defining C, then (as C is reduced) $I^\wedge$ is the intersection of the prime ideals of $\mathcal{O}^\wedge_{\overline{X}\times\Omega,x}$ which contain I, *i.e.* the intersection of prime ideals $\mathcal{P}$ such that $f_{\mathcal{P}*}\mathcal{G} \simeq H$. Thus, under an isomorphism $(\mathcal{G}, \mathcal{O}^\wedge_{\overline{X}\times\Omega,x}) \simeq (G, A)$, $I^\wedge$ corresponds to J and we see that C is formally smooth at x and hence smooth. □

2.2.3. We remark that both the definition of the Newton polygon stratification and the definition of Oort's foliation of the Newton polygon strata are independent of the level structure away from p. Thus, as the level U^p of the structure away from p varies, the corresponding morphisms among the reductions of the Shimura varieties preserve the Newton polygon stratification and also Oort's foliation. Analogously, the action of the group $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the Shimura varieties with no level structure at p also respects the Newton polygon strata and the leaves inside them. We thus obtain, by restriction, an action of the group $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the Newton polygon strata (resp. on the leaves) via finite étale morphisms (see section 2.1.11).

2.3. Some distinguished Barsotti-Tate groups. — In this section we shall define a distinguished p-divisible group Σ_α over $\mathbb{F}_p$, for each Newton polygon α of dimension q and height h. The associated leaf $C_\alpha = C_{\Sigma_\alpha}$ inside the corresponding Newton polygon stratum $\overline{X}^{(\alpha)}$ is called the central leaf and it will play an important role in our work. In this section, we shall also discuss some of the properties of the group of the quasi-selfisogenies of Σ_α (for all α).

2.3.1. We start by recalling the definition of a certain simple isoclinic p-divisible group Σ_λ over $\mathbb{F}_p$, for any given slope $\lambda \in \mathbb{Q}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. The definition of Σ_λ is introduced by de Jong and Oort in [**18**] (Paragraph 5.3, p. 227).

Let λ be a rational number, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ and write $\lambda = n/(m+n)$ (with n, m relatively prime). We describe the p-divisible group Σ_λ over $\mathbb{F}_p$ by its covariant Dieudonné module $M(\Sigma_\lambda)$. This is the free $\mathbb{Z}_p$-module with basis $e_0, e_1, \ldots, e_{m+n-1}$ on which the actions of F and V are given by $F(e_i) = e_{i+n}$ and $V(e_i) = e_{i+m}$ for all i (for any non-negative integer j we write $e_j = p^\ell e_i$ if $j = i + \ell(m+n)$ with $0 \leqslant i \leqslant m+n-1$ and $\ell \geqslant 0$). The p-divisible group Σ_λ has height $m+n$ and is isoclinic of slope λ.

We denote by t the endomorphism of $M(\Sigma_\lambda)$ (and also the corresponding isogeny on Σ_λ) which maps e_i to e_{i+1} for all i. It is an isogeny of degree p and $t^{m+n} = p$.

***Proposition 2.8* (see [18], Lemma 5.4, p. 227).** — *We choose $r, s \in \mathbb{Z}$ such that $rm + sn = 1$. For every algebraically closed field k of characteristic p we have*

$$\operatorname{End}\left((\Sigma_\lambda)_k\right) = W(\mathbb{F}_{p^{m+n}})[t]$$

where $xt = t\sigma^{s-r}(x)$ *for all* $x \in W(\mathbb{F}_{p^{m+n}})$ *(we denote by* σ *the Frobenius map). The ring* $\mathrm{End}\left((\Sigma_\lambda)_k\right)$ *is a non-commutative discrete valuation ring with uniformizer* t *and valuation define by* $\log_p \deg(\cdot)$

We write $\mathcal{O}_\lambda = W(\mathbb{F}_{p^{m+n}})[t]$ and $D_\lambda = \mathcal{O}_\lambda[1/p].D_\lambda$ is a central simple algebra over $\mathbb{Q}_p$ of rank $(n+m)^2$ and invariant λ, and $\mathcal{O}_\lambda$ is a maximal order inside D_λ.

2.3.2. For convenience, we also recall de Jong's and Oort's Isogeny theorem. This result illustrates one of the properties which make isoclinic p-divisible groups easier to understand than general p-divisible groups.

***Theorem 2.9* (see [18], Corollary 2.17, p. 217-218).** — *Let* A *be a noetherian complete local domain with algebraically closed residue field* k*, normal and with field of fractions* K *of characteristic* p*. Let* G *be an isoclinic* p*-divisible group over* $\mathrm{Spec}\, A$.

Then there exists a p*-divisible group* G_0 *over* $\mathrm{Spec}\, k$ *and an isogeny over* A

$$G_0 \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, A \longrightarrow G.$$

2.3.3. An isoclinic p-divisible group G of slope λ is called slope divisible if there exists an integer $b > 0$ such that $p^{-\lambda b} F^b$ is an isogeny, or equivalently an isomorphism between G and $G^{(p^b)}$.

It follows from the definition that the p-divisible groups Σ_λ are slope divisible, for all λ.

2.3.4. Let α be a Newton polygon of dimension q and height h, and denote by $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ its slopes. For each i, we denote by r_i the multiplicity of the slope λ_i in α and define the Barsotti-Tate groups

$$\Sigma_\alpha^i = \Sigma_{\lambda_i}^{\oplus r_i} \qquad \text{and} \qquad \Sigma_\alpha = \oplus_i \Sigma_\alpha^i.$$

Thus, for all i, Σ_α^i are slope divisible isoclinic p-divisible groups of slope λ_i defined over $\mathbb{F}_p$, and Σ_α is a p-divisible group over $\mathbb{F}_p$ with Newton polygon equal to α. Moreover, the p-divisible group Σ_α^i may be identified with the isoclinic pieces of Σ_α (see section 2.4).

2.3.5. For every algebraically closed field k of characteristic p we have

$$(\mathrm{End}_k(\Sigma_\alpha) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)^\times = \prod_i \mathrm{GL}_{r_i}(D_{\lambda_i}).$$

We write T_α for the group of the quasi-selfisogenies of Σ_α, *i.e.* $T_\alpha = \prod_i \mathrm{GL}_{r_i}(D_{\lambda_i})$, and Γ_α for the group of the automorphism of Σ_α, *i.e.* $\Gamma_\alpha = \prod_i \mathrm{GL}_{r_i}(\mathcal{O}_{\lambda_i})$ $(\Gamma_\alpha \subset T_\alpha)$.

2.3.6. We now fix a Newton polygon α of dimension q and height h (and write $\Sigma = \Sigma_\alpha$). In the following, we analyse in more detail the group $T = T_\alpha$ and, in particular, we introduce a certain submonoid $S = S_\alpha$ of T, where $S \supset \Gamma = \Gamma_\alpha$. (The role of the submonoid S will be explained in section 3.4.)

Let $\rho \in T$. For any $i = 1, \ldots, k$ we denote by $\rho_i : \Sigma^i \to \Sigma^i$ the quasi-selfisogeny of Σ^i induced by ρ and define:

$$e_i = e_i(\rho) = e(\rho_i) = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid p^m \rho_i \text{ is an isogeny}\}$$

and

$$f_i = f_i(\rho) = f(\rho_i) = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid (p^m \rho_i)^{-1} \text{ is an isogeny}\}.$$

We also write $e = e(\rho) = \max_i e_i(\rho)$ and $f = f(\rho) = \min_i f_i(\rho)$. It follows from the definitions that e and f are respectively the minimal and maximal integers such that $p^e \rho$ and $(p^f \rho)^{-1}$ are isogenies.

It is easy to see that if ρ^{-1} is an isogeny then f_i, e_i are respectively the maximal and the minimal integers such that

$$\Sigma^i[p^{f_i}] \subset \ker(\rho_i^{-1}) \subset \Sigma^i[p^{e_i}].$$

In particular, $e_i \geqslant f_i$ for all i.

Definition 2.10. — We define $S \subset T$ to be the subgroup

$$S = \{\rho \in T \mid \rho^{-1} \text{ is an isogeny}, e_i \leqslant f_{i-1},\ 1 < i \leqslant k\}.$$

2.3.7. For all $i = 1, \ldots, k$, we denote by $t_i \in \mathrm{End}(\Sigma_{\lambda_i})$ the uniformizer we defined in section 2.3, and write $\tau_i = t_i^{\oplus r_i} \in \mathrm{End}(\Sigma^i = \Sigma_{\lambda_i}^{\oplus r_i})$. We define fr to be the isogeny of $\Sigma = \oplus_i \Sigma^i$

$$\mathrm{fr} = \oplus_i \tau_i^{a_i},$$

where the a_i denote the numerators of the slopes λ_i (written in minimal form), for all i. Equivalently, fr is the unique isogeny which fits in the following commutative diagram (see section 2.3.7)

$$\begin{tikzcd} & \Sigma \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "\mathrm{fr}"] & \\ \Sigma^{(p)} & & \Sigma. \arrow[ll, "\simeq", "\nu"'] \end{tikzcd}$$

where we may identify Σ and $\Sigma^{(p)}$, via ν, since the Barsotti-Tate group Σ is defined over $\mathbb{F}_p$.

2.3.8. If $B = \mathrm{lcm}(b_1, \ldots, b_k)$, where the b_i are the denominators of the rational numbers λ_i (written in minimal form), then it follows from the definition of the morphism fr that $\mathrm{fr}^B = \oplus_i p^{\lambda_i B}$ and, in particular, that fr^B is in the center of T (for all i, $\lambda_i B \in \mathbb{Z}$).

Lemma 2.11. — *Maintaining the above notations.*

The set S is a submonoid of T and has the properties that the quasi-selfisogenies $p^{-1}, \mathrm{fr}^{-B} \in S$ and also that $T = \langle S, p, \mathrm{fr}^B \rangle$.

Proof. — To see that S is a submonoid of T, it suffices to remark that

$$e_i(\omega\rho) \leqslant e_i(\rho) + e_i(\omega) \text{ and } f_i(\omega\rho) \geqslant f_i(\rho) + f_i(\omega),$$

which follow easily for the definitions.

It is also clear from the definition of S that $p^{-1}, \mathrm{fr}^{-B} \in S$. In fact, we have

$$e_i(p^{-1}) = 1 = f_{i-1}(p^{-1}) \text{ and } e_i(\mathrm{fr}^{-B}) = \lambda_i B > f_{i-1}(\mathrm{fr}^{-B}) = \lambda_{i-1}B,$$

for all $i = 2, \ldots, k$.

We now show that $T = \langle S, p, \mathrm{fr}^B\rangle$.

For any $\rho \in T$, there exists $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ such that $p^m\rho^{-1}$ is an isogeny, *i.e.* such that $\rho = p^m\omega$ with ω^{-1} an isogeny ($\omega = p^{-m}\rho$). Moreover, for any isogeny ρ we have

$$e_i(p^n\rho) = e_i(\rho) - n \text{ and } f_i(p^n\rho) = f_i(\rho) - n,$$

and thus ρ satisfies the conditions $e_i(\rho) \geqslant f_{i-1}(\rho)$, for all $1 < i \leqslant k$, if and only if $p^n\rho$ does for some integer n.

Then, it suffices to prove that for any isogeny ρ there exists a positive integer m such that $\mathrm{fr}^{mB}\rho$ satisfies the above inequalities. This fact follows directly from the following inequalities:

$$e_i(\mathrm{fr}^{mB}\rho) \leqslant e_i(\rho) + m\lambda_i B \text{ and } f_{i-1}(\mathrm{fr}^{mB}\rho) \geqslant f_{i-1}(\rho) + m\lambda_{i-1}B,$$

where $\lambda_i < \lambda_{i-1}$, for all $i = 2, \ldots, k$. □

2.4. Slope filtration. — Dieudonné's classification of p-divisible groups implies that any p-divisible group defined over a perfect field is isogenous to a direct product of slope divisible isoclinic p-divisible groups. In [**29**] Zink investigates what remains true if the perfect field is replaced by a ring of characteristic p. In particular, Zink shows that over a regular scheme of characteristic p any p-divisible group is isogenous to a p-divisible group which admits a filtration by p-divisible subgroups which factors are slope divisible isoclinic p-divisible groups ordered with the decreasing order of the slopes.

In this section we shall recall some of the definitions and results from [**29**]. For completeness, let us mention that this result over a smooth curve was previously established by Katz in [**19**], and also that, more recently, it was extended by Oort and Zink to the case over a normal scheme (see [**25**]).

2.4.1. Let H be a p-divisible group over a scheme S of characteristic p and $\lambda \in \mathbb{Q}$. We say that H is slope divisible with respect to λ if there are positive integers a, b such that $\lambda = a/b$ and the quasi-isogeny $p^{-a}F^b : H \to H^{(p^b)}$ is an isogeny. If H isoclinic and slope divisible of slope λ then the above isogeny is in fact an isomorphism.

***Theorem 2.12* (see [29], Theorem 7, p.9).** — *Let S be a regular scheme over $\mathbb{F}_p$. Let H be a p-divisible group over S with constant Newton polygon. We denote by $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ the slopes of H.*

Then there is a p-divisible group G over S which is isogenous to H, and which has a filtration by closed immersions of p-divisible groups:

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_k = G$$

such that for each i the factor G_i/G_{i-1} is isoclinic of slope λ_i and G_i is slope divisible with respect to λ_i.

We say a p-divisible group with the properties described for G completely slope divisible and call its filtration the slope filtration.

We remark that any isogeny among two p-divisible groups endowed with slope filtrations respects the filtrations.

In fact, suppose $\phi : G \to H$ is an isogeny among p-divisible group endowed with a slope filtration over a reduced scheme S of characteristic p. When $k = 1$, the statement is trivial, so we may assume $k \geqslant 2$. Moreover, using induction on k, it suffices to prove the statement for $k = 2$.

First, we assume $S = \operatorname{Spec} K$ and we consider the morphism

$$\phi_1 : G_1 \hookrightarrow G \longrightarrow H \twoheadrightarrow H_2.$$

By Dieudonné's theory, there is no non zero morphism between two isoclinic Barsotti-Tate groups with different slopes (see **[29]**, p. 13). Thus, the morphism ϕ_1 is identically zero, or equivalently the isogeny ϕ maps G_1 to H_1.

For obtaining the same result in the general case, it suffices to remark that the above considerations imply that $(\phi_1)_x$ vanishes for any point x in S. Thus, the morphism ϕ_1 over S is zero.

Finally, we remark that from the existence of an isogeny ψ such that $\phi\psi = p^d$, for some d, we deduce that the induced morphisms ϕ_i are isogenies, for all i.

2.4.2. We conclude this section with the following two remarks which will play a key role in our definition of Igusa varieties (see section3).

***Remark 2.13* (see [25]).** — Let G be a Barsotti-Tate group over a field K of positive characteristic p. Then, G is completely slope divisible if and only if $G \times_K L$ is completely slope divisible, for some $L \supset K$.

***Remark 2.14* (see [29], proof of Theorem 7, p. 15).** — Let $\mathcal{G}$ be a Barsotti-Tate group over a connected regular scheme S over $\mathbb{F}_p$. Let η be the generic point of S and assume that $\mathcal{G}_\eta$ is completely slope divisible (*i.e.* admits a slope filtration as in theorem 2.12).

Then, the Barsotti-Tate group $\mathcal{G}$ over S is also completely slope divisible.

2.5. Rapoport-Zink spaces. — In **[27]** Rapoport and Zink formulate moduli problems of (PEL) type for Barsotti-Tate groups, associated to any decent Barsotti-Tate group over a perfect field k of characteristic p. They prove that the corresponding moduli spaces exist in the category of rigid analytic spaces over the fraction field of the Witt vectors of k and, in the cases when the moduli problems impose no level structures, they admit integral models in the category of formal schemes over $W(k)$.

In this section we shall recall their constructions together with some of the main results in the case which is our interest.

2.5.1. Let $\mathbb{X}$ be a decent Barsotti-Tate group over a perfect field k of characteristic p. (We recall that a Barsotti-Tate group is called decent if it arises by base change from a Barsotti-Tate defined over a perfect field.) To $\mathbb{X}$ we associate a functor $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ on the category of schemes S over $W = W(k)$ such that p is locally nilpotent on S to sets. For such a scheme S, we denote by $\overline{S}$ the closed subscheme defined by the sheaf of ideals $p\mathcal{O}_S$, and we view it as a scheme over $\operatorname{Spec} k$.

We define $\mathcal{M}(S)$ to be the set of equivalence classes of pairs (H, β) where:

- H is a Barsotti-Tate group over S;
- $\beta : \mathbb{X}_{\overline{S}} \to H_{\overline{S}}$ is a quasi-isogeny.

Two pairs (H, β) and (H', β') are equivalent if the quasi-isogeny $\beta' \circ \beta^{-1} : H_{\overline{S}} \to H'_{\overline{S}}$ lifts to an isomorphism between H and H' over S.

Theorem 2.15 **(see [27], Theorem 2.16, p. 54).** — *The functor $\mathcal{M}$ is represented by a formal scheme over* $\operatorname{Spf} W$*, which is formally locally of finite type.*

For any other Barsotti-Tate group $\mathbb{X}'$ and isogeny $\phi : \mathbb{X}' \to \mathbb{X}$, there is a canonical isomorphism between the corresponding Rapoport-Zink spaces

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathcal{M}_{\mathbb{X}} &\longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{X}'} \\ (H, \beta) &\longmapsto (H, \beta \circ \phi). \end{aligned}$$

2.5.2. For any pair of positive integers n, d, we denote by $\mathcal{M}^{n,d}$ the subfunctor of $\mathcal{M}$ defined by the condition that $p^n\beta$ is an isogeny and its kernel is contained inside $\mathbb{X}[p^d]$ (or equivalently, both $p^n\beta$ and $p^{d-n}\beta^{-1}$ are isogenies). The functor $\mathcal{M}^{n,d}$ is represented by the p-adic completion of a scheme of finite type over $\operatorname{Spf} W$ and can be identified to a closed formal subscheme of $\mathcal{M}$, of finite type over $\operatorname{Spf} W$. Moreover, it follows from the definitions that, in the sense of Zariski sheaves, we have

$$\mathcal{M} = \varinjlim_{n,d} \mathcal{M}^{n,d}.$$

We call the spaces $\mathcal{M}^{n,d}$ the truncated Rapoport-Zink spaces. (Let us remark that the truncated Rapoport-Zink spaces we use are not exactly the ones introduced in [**27**], paragraph 2.22, p. 58. For any pair of positive integers n, d, Rapoport and Zink consider the closed subfunctor $\mathcal{M}_{n,d}$ of $\mathcal{M}$ defined by the condition that $p^n\beta$ is an isogeny of degree less than or equal to p^d. Thus, there are natural inclusions $\mathcal{M}_{n,d} \subset \mathcal{M}^{n,d} \subset \mathcal{M}_{n,dh}$.)

We observe that, for any other Barsotti-Tate group $\mathbb{X}'$ and isogeny $\phi : \mathbb{X}' \to \mathbb{X}$, the corresponding isomorphism $\phi^* : \mathcal{M}_{\mathbb{X}} \to \mathcal{M}_{\mathbb{X}'}$ does not preserve the truncated Rapoport-Zink spaces (nor the open subspaces we define below).

2.5.3. For any pair of positive integers n, d, we define:

$$U^{n,d} = \{t \in \mathcal{M}^{n,d} \mid \exists\, V \subset \mathcal{M} \text{ open}, t \in V \subset \mathcal{M}^{n,d}\}.$$

It follows from the fact that $\mathcal{M}$ is formally locally of finite type that the $U^{n,d}$ form an open cover of $\mathcal{M}$, *i.e.*

$$\mathcal{M} = \cup_{n,d} U^{n,d},$$

where the $U^{n,d}$ are open formal subschemes of $\mathcal{M}$, of finite type over $\operatorname{Spf} W$.

2.5.4. Let us assume from now on that the field k is algebraically closed and write K for the fraction field of W. We denote by $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$ the rigid analytic space associated to the formal scheme $\mathcal{M}$. In **[27]** Rapoport and Zink introduce a tower of rigid analytic coverings of $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$ over $\operatorname{Spm} K$. We now recall their construction (see **[27]**, paragraph 5.34, pp. 254–256).

We first recall the following result.

***Proposition 2.16* (see [27], Proposition 5.17, p. 237).** — *The rigid analytic space $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$ over* $\operatorname{Spm} K$ *is smooth.*

Let $x \in \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}(L)$ be represented by the pair $(H, \beta) \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_L)$. The p-adic Tate modules $T_p(H)$, for the points $x \in \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$, piece together in a locally constant $\mathbb{Z}_p$-sheaf for the étale topology on $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$. We denote this sheaf by $\mathcal{T}$. Namely, for all integers $n \geqslant 0$, $T_p(H) \otimes \mathbb{Z}_p/p^n$ is the generic fiber of the finite flat group scheme $H[p^n]$, which is étale.

For any open compact subgroup $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, we define $\mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}$ to be the finite étale covering of $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$ parametrizing the classes modulo U of trivializations of $\mathcal{T}/\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$,

$$\alpha : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^n \pmod{U}.$$

We remark that if

$$U = U(M) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \mid A \equiv \mathbf{1}_n (\mathrm{mod}\ p^M)\}$$

the space $\mathcal{M}_{U(M)}^{\mathrm{rig}}$ parametrizes the classes of trivializations of the generic fiber of the p^M-torsion of the universal Barsotti-Tate group over $\mathcal{M}$.

2.5.5. If $U' \subset U$, then there is a natural morphism $\mathcal{M}_{U'}^{\mathrm{rig}} \to \mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}$. More generally, for any two subgroups U', U, an element $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ such that $g^{-1}U'g \subset U$ gives rise to a morphism

$$g : \mathcal{M}_{U'}^{\mathrm{rig}} \longrightarrow \mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}.$$

2.5.6. Let T denote the group of quasi-selfisogenies of $\mathbb{X}$ over k and σ the Frobenius automorphism of W (we also denote by σ its extension to K and the Frobenius automorphism of k).

There is a natural action of the group

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$$

on the system of Rapoport-Zink spaces, where the action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T$ is linear and the action of $\mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$ is σ-semilinear.

2.5.7. We first define the action of T on the formal scheme $\mathcal{M}$ defined by

$$(H,\beta) \longmapsto (H,\beta\circ\rho), \qquad \rho\in T$$

(see [**27**], section 2.33, p. 64). We remark that, for any other Barsotti-Tate group $\mathbb{X}'$ and isogeny ϕ, the isomorphism $\phi^* : \mathcal{M}_{\mathbb{X}} \to \mathcal{M}_{\mathbb{X}'}$ commutes with the action of the group of the quasi-selfisogenies, where we identify $T_{\mathbb{X}}$ with $T_{\mathbb{X}'}$ via the isomorphism $\rho \mapsto \phi^{-1}\rho\phi$, for all $\rho \in T_{\mathbb{X}}$.

The action of T on $\mathcal{M}$ induces an action of T on $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$, which extends canonically to an action of T on the covers $\mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}$, for all level $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$. In fact, for any level U, let us denote a point $t \in \mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}(L)$, for some extension L of K, by a triple $(H,\beta,[\alpha])$, where H is a Barsotti-Tate group defined over the ring of integers $\mathcal{O}_L$ of L, $\beta : \mathbb{X} \to H \times_{\mathcal{O}_L} k$ a quasi-isogeny, and $[\alpha]$ the U-orbit of an isomorphism $\alpha : T_p(H) \to \mathbb{Z}_p^n$. Then, for any $\rho \in T$, we define

$$\begin{aligned}\rho : \mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}} &\longrightarrow \mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}\\ (H,\beta,[\alpha]) &\longmapsto (H,\beta\circ\rho,[\alpha]).\end{aligned}$$

It is clear that the above action of T on the system of the Rapoport-Zink spaces $\mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}$ commutes with the previously defined action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

2.5.8. We now introduce the σ-semilinear action of Frobenius. Let us recall that defining a σ-semilinear automorphism of the formal scheme $\mathcal{M}$ is equivalent to defining an isomorphism of formal schemes over W

$$\mathrm{Frob} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{(p)},$$

where $\mathcal{M}^{(p)}$ denotes the pullback under σ of $\mathcal{M}$.

If we identify the space $\mathcal{M}^{(p)}$ with the Rapoport-Zink space associated to the Barsotti-Tate group $\mathbb{X}^{(p)}/k$, then we can describe the morphism Frob in terms of its universal property. The morphism Frob is defined by

$$(H,\beta) \longmapsto (H,\beta\circ F^{-1}),$$

where $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}^{(p)}$ is the Frobenius morphism of the Barsotti-Tate group $\mathbb{X}$ (see [**27**], section 3.48, pp. 100-101).

We observe that Frob is indeed an isomorphism, since we can define its inverse by setting

$$(G,\rho) \longmapsto (G,\rho\circ F).$$

Moreover, it is easy to see that this action commutes with the action of T. In fact, for any quasi-selfisogeny $\rho \in T$, the equality $F\circ\rho = \rho^{(p)}\circ F$ implies

$$\mathrm{Frob}\circ\rho = \rho^{(p)}\circ \mathrm{Frob} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{(p)}.$$

Finally, we remark that the automorphism Frob of $\mathcal{M}$ gives rise to an automorphism of $\mathcal{M}^{\text{rig}}$, which is also σ-semilinear and which extends canonically to σ-semilinear automorphisms of the covers $\mathcal{M}_U^{\text{rig}}$, for all level $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$. If we denote a point on $\mathcal{M}_U^{\text{rig}}$ by a triple $(H, \beta, [\alpha])$ as before, then, for all level U, we define

$$\begin{aligned} \mathrm{Frob}: \mathcal{M}_U^{\text{rig}} &\longrightarrow (\mathcal{M}_U^{\text{rig}})^{(p)} \\ (H, \beta, [\alpha]) &\longmapsto (H, \beta \circ F^{-1}, [\alpha]). \end{aligned}$$

It is clear that the action of Frob on the system of the Rapoport-Zink spaces $\mathcal{M}_U^{\text{rig}}$ commutes with the previously defined action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, and thus gives rise to an action of the group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$.

2.5.9. Let us remark that, if we restrict our attention to the reduced fiber $\overline{\mathcal{M}}$ of $\mathcal{M}$ over k, then the action of $T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$ extends to an action of the product

$$T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}},$$

where Fr is also a σ-semilinear endomorphism of $\overline{\mathcal{M}}$, namely the relative Frobenius.

As before, we describe Fr as a k-linear morphism

$$\mathrm{Fr}: \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{(p)},$$

where $\overline{\mathcal{M}}^{(p)}$ is the pullback under $\sigma: k \to k$ of $\overline{\mathcal{M}}$. If we identify the space $\overline{\mathcal{M}}^{(p)}$ with the reduced fiber of the Rapoport-Zink space associated to the Barsotti-Tate group $\mathbb{X}^{(p)}/k$, then the morphism Fr is defined by setting

$$(H, \beta) \longmapsto (H^{(p)}, \beta^{(p)}),$$

where $H^{(p)}$ and $\beta^{(p)}: \mathbb{X}^{(p)} \to H^{(p)}$ are the pullbacks under σ of H and $\beta: \mathbb{X} \to H$, respectively.

We observe that indeed the relative Frobenius Fr commutes with the action of $T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$. For any $\rho \in T_\alpha$,

$$(\beta\rho)^{(p)} = \beta^{(p)}\rho^{(p)},$$

and also

$$(\beta F_{\mathbb{X}}^{-1})^{(p)} = \beta^{(p)}(F_{\mathbb{X}}^{-1})^{(p)} = \beta^{(p)} F_{\mathbb{X}^{(p)}}^{-1},$$

where $F_{\mathbb{X}}$ and $F_{\mathbb{X}^{(p)}}$ are the Frobenius morphism on $\mathbb{X}$ and $\mathbb{X}^{(p)}$, respectively.

2.5.10. We now focus our attention of the Rapoport-Zink space $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_{\Sigma_\alpha}$ over $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$, associated to the Barsotti-Tate $\Sigma_\alpha/\overline{\mathbb{F}}_p$, for any given Newton polygon α of dimension q and height h (see section 2.3.4).

Let T_α be the group of the quasi-selfisogenies of $\Sigma_\alpha/\overline{\mathbb{F}}_p$. In section 2.5.7 and 2.5.8, we defined the action of $T_\alpha \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$ on $\mathcal{M}_\alpha$. It follows from the definition that this action does not preserve the truncated Rapoport-Zink spaces $\mathcal{M}_\alpha^{n,d} \subset \mathcal{M}_\alpha$. In the following, we analyze how this action moves the truncated Rapoport-Zink spaces. (We remark that, in particular, the action of the subgroup $\Gamma = \mathrm{Aut}(\Sigma_\alpha)$ preserves the truncated Rapoport-Zink spaces.)

2.5.11. Let $\rho \in T_\alpha$ and write $e = e(\rho)$ and $f = f(\rho)$ (see section 2.3.6). It is not hard to see that if $(H,\beta) \in \mathcal{M}^{n,d}$ then $(H,\beta\rho) \in \mathcal{M}^{n+e,d+e-f}$. In fact, it follows from the definitions that both $p^{n+e}\beta\rho = (p^n\beta)(p^e\rho)$ and $p^{d-f-n}(\beta\rho)^{-1} = (p^f\rho)^{-1}(p^{d-n}\beta^{-1})$ are isogenies.

Thus, for each $\rho \in T_\alpha$ and any pair of integers n, d, the action of T_α on $\mathcal{M}_\alpha$ give rise to morphisms

$$\rho : \mathcal{M}_\alpha^{n,d} \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha^{n+e,d+e-f}$$

such that for any positive integers n', d', with $n' \geqslant n$ and $d' \geqslant d$,

$$i_{n'+e,d'+e-f}^{n+e,d+e-f} \circ \rho = \rho \circ i_{n',d'}^{n,d}$$

where we denote by $i_{n',d'}^{n,d}$ the natural inclusion of $\mathcal{M}_\alpha^{n,d}$ in $\mathcal{M}_\alpha^{n',d'}$.

Moreover, the restrictions of the above morphisms associated to $\rho \in T_\alpha$ give rise to morphisms

$$\rho : U^{n,d} \longrightarrow U^{n+e,d+e-f},$$

which are open embeddings of formal schemes over $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

On the other hand, from the equality $p = FV = VF$ we deduce that, for all positive integers n, d,

$$\mathrm{Frob} : \mathcal{M}_\alpha^{n,d} \longrightarrow (\mathcal{M}_\alpha^{n+1,d+1})^{(p)} = (\mathcal{M}_\alpha^{(p)})^{n+1,d+1},$$

and also that

$$\mathrm{Frob} : U^{n,d} \longrightarrow (U^{n+1,d+1})^{(p)}.$$

In fact, if $p^n\beta$ and $p^{d-n}\beta^{-1}$ are isogenies, then $p^{n+1}\beta F^{-1} = p^n\beta p F^{-1}$ and $p^{d-n}F\beta^{-1}$ are also an isogenies.

2.5.12. Let us now consider the reduced fibers $\overline{\mathcal{M}}_\alpha$ and $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$ of $\mathcal{M}_\alpha$ and $\mathcal{M}_\alpha^{n,d}$ respectively, for all n, d. Then, $\overline{\mathcal{M}}_\alpha$ and $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$ are reduced schemes over $\overline{\mathbb{F}}_p$ (the latter of finite type over $\overline{\mathbb{F}}_p$, for all n, d), and there is an action of $T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$ on $\overline{\mathcal{M}}_\alpha$. From the above discussion, we already know how the action of $T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$ moves the spaces $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$, let us now remark that the action of Fr respects the truncated Rapoport-Zink spaces.

In fact, if a quasi-isogeny $\beta : \Sigma \to H$ is such that $p^n\beta$ with kernel contained in $\Sigma[p^d]$, then the same holds for the quasi-isogeny $\beta^{(p)} : \Sigma^{(p)} \to H^{(p)}$. Equivalently, for all positive integers n, d, the relative Frobenius morphism maps the scheme $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$ to $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d\,(p)}$.

Let us also remark that the action of Γ on the reduced fiber $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$ of the truncated Rapoport-Zink spaces is particularly simple. More precisely, for any n, d the subgroup $\Gamma_d \subset \Gamma$ of the automorphisms of Σ_α which induce the identity on $\Sigma_\alpha[p^d]$ acts trivially on $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^{n,d}$. Indeed, for any $\gamma \in \Gamma_d$ and any $(H,\beta) \in \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$, there exists $\overline{\gamma} \in \mathrm{Aut}(H)$ such that $(p^n\beta)\circ\gamma = \overline{\gamma}\circ(p^n\beta)$, thus the pair (H,β) is equivalent to the pair $(H,\beta\circ\gamma)$.

2.5.13. We observe that, depending of the choice of the Barsotti-Tate group $\Sigma_\alpha \mathbb{F}_p$ in its isogeny class, there is another natural isomorphism frob between $\mathcal{M}_\alpha$ and $\mathcal{M}_\alpha^{(p)}$, namely the isomorphism defined as

$$\begin{aligned} \mathrm{frob} : \mathcal{M}_\alpha &\longrightarrow \mathcal{M}_\alpha^{(p)} \\ (H, \beta) &\longmapsto (H, \beta \circ \nu^{-1}), \end{aligned}$$

where $\nu : \Sigma_\alpha \to \Sigma_\alpha^{(p)}$ is the natural identification over $\mathbb{F}_p$ (see section 2.3.7).

Differently from Frob, the action of frob preserves the truncated Rapoport-Zink spaces $\mathcal{M}_\alpha^{n,d}$ (and thus also the open $U_\alpha^{n,d}$) inside $\mathcal{M}_\alpha$, but is not compatible with the action of T_α. In fact, for any $\rho \in T_\alpha$, we have

$$\nu^{-1} \circ \rho^{(p)} \circ \nu = \mathrm{fr} \circ \rho \circ \mathrm{fr}^{-1},$$

which is equivalent to

$$\rho^{(p)} \circ \mathrm{frob} = \mathrm{frob} \circ (\mathrm{fr} \circ \rho \circ \mathrm{fr}^{-1}) : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha^{(p)}.$$

On the other hand, since fr^B is in the center of T, the same equality shows that the morphism frob^B does commute with the action of T.

Finally, it follows from the definitions that

$$\mathrm{Frob} = \mathrm{frob} \circ \mathrm{fr}^{-1},$$

since the equality $\nu \circ \mathrm{fr} = F$ implies that

$$\beta \circ F^{-1} = \beta \circ \mathrm{fr}^{-1} \circ \nu^{-1},$$

for any Barsotti-Tate group H and any quasi-isogeny $\beta : \Sigma_\alpha \to H$.

2.5.14. We reinterpret the above definitions in terms of the ℓ-adic cohomology with compact supports of the Rapoport-Zink rigid analytic spaces associated to the Barsotti-Tate group Σ_α.

Let ℓ be a prime, $\ell \neq p$, and consider the constant abelian torsion étale sheaf $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, for some integer $r \geqslant 1$. For any open compact subgroup U of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ and any integer $i \geqslant 0$, we consider the i-th étale cohomology group with compact supports of the rigid analytic space $\mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}$ with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$,

$$H_c^i(\mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}} \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}).$$

For any $U' \subset U$, the natural projection $\mathcal{M}_{U'}^{\mathrm{rig}} \to \mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}}$ give rise to a morphism between the corresponding cohomology groups and therefore the cohomology groups of the Rapoport-Zink spaces piece together in a direct limit

$$\varinjlim_U H_c^i(\mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}} \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}).$$

We remark that, since the open subgroups $U(M)$ (for all integers $M \geqslant 0$) form a cofinal system of compact opens of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, the above limit can be also computed as a direct limit over the open subgroups U of the form $U = U(M)$, for some positive integer M, *i.e.*

$$\varinjlim_{U} H^i_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_{M} H^i_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{U(M)} \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}).$$

The action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T_\alpha \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$ on the system of Rapoport-Zink spaces gives rise an action of the $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T_\alpha \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$ on étale cohomology groups, which naturally extends to an action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T_\alpha \times W_{\mathbb{Q}_p}$, where $W_{\mathbb{Q}_p}$ is the Weil group of $\mathbb{Q}_p$ ($K = \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$).

Proposition 2.17. — *For all integers $i \geqslant 0$, the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation*

$$\varinjlim_{U} H^i_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$$

of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T_\alpha$ is smooth.

Proof. — Let us write $H^i = \varinjlim_U H^i_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$. Then, it follows from the definitions that, for any open subgroup U of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, we have

$$(H^i)^U = H^i_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}).$$

Moreover, let us consider the opens $V = U^{n,d} \subset \mathcal{M}_\alpha$ (for all integers $n, d \geqslant 0$), which form a cover of opens of finite type of $\mathcal{M}$. Then, for any level U, the associated open cover of $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U$ (whose opens V^{rig}_U are the pullbacks under the natural projection $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U \to \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$ of the rigid analytic spaces associated to the opens $V$of $\mathcal{M}_\alpha$) is also formed of opens of finite type and we have

$$H^i_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_{V^{\mathrm{rig}}_U} H^i_c(V^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

a direct limit of finite modules. Finally, we remark that the action of the subgroup $\Gamma_\alpha \subset T_\alpha$ on H^i preserves the subspaces $H^i_c(V^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$, for all opens V and all levels U, and thus

$$(H^i)^{U\times\Gamma'} = \varinjlim_{V} H^i_c(V^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^{\Gamma'},$$

for any level U and any open compact subgroup $\Gamma' \subset \Gamma_\alpha$. □

Maintaining the notations introduced in the above proof, for any integer $i \geqslant 0$ and open compact subgroup $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, we defined the i-th ℓ-adic cohomology group of $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U$ as

$$H^i_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_{V^{\mathrm{rig}}_U} (\varinjlim_{r} H^i_c(V^{\mathrm{rig}}_U \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell).$$

As the level U varies, the ℓ-adic cohomology groups of the Rapoport-Zink spaces form a direct system, endowed with an action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T_\alpha$. Further more, the corresponding ℓ-adic representations of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times T_\alpha$

$$\varinjlim_U H_c^i(\mathcal{M}_U^{\mathrm{rig}} \times_K \widehat{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

are smooth. (This fact is a direct consequence of the definition.)

2.6. Full set of sections. — In [**9**] Drinfeld introduces the notion of full level structure in the context of his theory of elliptic modules. In [**20**] Katz and Mazur develop this notion in the context of finite locally free commutative group-schemes.

In this section we shall recall the definition and some basic properties of their notion of a full set of sections of a finite flat scheme of finite presentation.

2.6.1. Let S be a scheme and Z a finite flat S-scheme of finite presentation and rank $N > 1$ (or equivalently Z is finite locally free over S of rank $N > 1$). For every affine S-scheme $\operatorname{Spec} R$, the R-scheme $Z_R = Z \times_S \operatorname{Spec} R$ is of the form $\operatorname{Spec} B$ where B is an R-algebra which is as an R-module locally free of rank N. Any $f \in B$ defines an R-linear endomorphism of B. We denote by $\mathrm{Norm}(f)$ its determinant and by $\det(T - f)$ its characteristic polynomial, which is a monic polynomial in $R[T]$ of degree N.

***Definition 2.18* (see [20], section 1.8.2, p. 33).** — A set of N points (not necessarily distinct) $P_1, \dots, P_N \in Z(S)$ is a full set of sections of Z/S if either of the following equivalent conditions is satisfied:

(1) for every affine S-scheme $\operatorname{Spec} R$ and for every $f \in B = H^0(Z_R, \mathcal{O})$ we have $\det(T - f) = \prod_{i=1}^N (T - f(P_i))$ in $R[T]$;

(2) for every affine S-scheme $\operatorname{Spec} R$ and for every $f \in B = H^0(Z_R, \mathcal{O})$ we have $\mathrm{Norm}(f) = \prod_{i=1}^N f(P_i)$ in R.

2.6.2. If Z is a finite étale S-scheme of rank N the above conditions are equivalent to the following ones:

(1) the morphism $\coprod_i S \to Z$ defined by the N-sections $P_1, \dots, P_N$ is an isomorphism of S-scheme;

(2) for every geometric point $\operatorname{Spec} k \to S$ the N points $(P_i)_k \in Z(k)$ are all distinct (see [**20**], Lemma 1.8.3, pp. 33-34).

***Proposition 2.19* (see [20], Proposition 1.9.1, p. 38).** — *Let Z be a finite flat S-scheme of finite presentation and rank $N > 1$. Let $P_1, \dots, P_N \in Z(S)$ (not necessarily distinct).*

Then there exists a unique closed subscheme W of S which is universal for the relation "$P_1, \dots, P_N$ is a full set of sections of Z/S", i.e. such that for any S-scheme T the induced points $P_{1,T}, \dots, P_{N,T} \in Z(T)$ are a full set of sections for Z_T/T if and only if the structure morphism $T \to S$ factors through W.

2.6.3. Suppose now that Z is a finite flat S-group scheme of finite presentation and rank $N > 1$ and let A be a finite abelian abstract group of order N (*e.g.* Z is the p^m-torsion of a Barsotti-Tate group over S of height h and $A = (\mathbb{Z}/p^m)^h$).

***Definition 2.20* (see [20], section 1.10.5, p. 44).** — A group morphism $\phi : A \to Z(S)$ is an A-generator of Z/S if the set of N points $\{\phi(a) \mid a \in A\}$ is a full set of sections of Z/S.

It follows directly from proposition 2.19 that the functor on S-schemes to sets which maps T/S to the sets of A-generators of Z_T/T is represented by a closed subscheme $W(A, Z/S)$ of $Z \times_S \cdots \times_S Z$. In particular, $W(A, Z/S)$ is finite over S.

Moreover, if Z, Z' are two isomorphic finite flat S-group schemes of finite presentation and rank $N > 1$ then $W(A, Z) \simeq W(A, Z')$.

We remark that there is a natural action of the group $\mathrm{Aut}(A)$ on the S-scheme $W(A, Z/S)$, namely the one defined by $\phi \mapsto \phi \circ g$, for any $g \in \mathrm{Aut}(A)$.

2.7. Vanishing cycles. — In [**3**] and [**4**] Berkovich constructs and studies the vanishing cycles functor from the category of étale sheaves on the generic fiber $\mathfrak{X}_\eta$ of a formal scheme $\mathfrak{X}$ to the category of étale sheaves on the closed fiber $\mathfrak{X}_s$ of $\mathfrak{X}$, when the formal scheme $\mathfrak{X}$ is locally finitely presented over the ring of integers W of a non archimedean field K with residue field k. In this case, the generic fiber $\mathfrak{X}_\eta$ is an analytic space over K and the closed fiber $\mathfrak{X}_s$ is a scheme over k. Berkovich proves that for each pair of formal schemes $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}$ over W there exists an ideal of definition $\mathcal{I}$ of $\mathcal{Y}$ such that, if two morphisms $\varphi, \psi : \mathcal{Y} \to \mathfrak{X}$ coincide modulo $\mathcal{I}$, then the morphisms between the vanishing cycles sheaves induced by φ and ψ coincide.

In this section we shall recall the definition of the functor that associates to a formal scheme $\mathfrak{X}$ locally finitely presented over W a K-analytic space $\mathfrak{X}_\eta$, together with the definition and some of the relevant properties of the vanishing cycles functor. Finally, we shall focus on the construction and properties of the vanishing cycles of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, for a prime number $\ell \neq p$ and an integer $r \geqslant 1$ (see [**14**], pp. 46-47).

2.7.1. We now describe the functor from the category of formal schemes locally finitely presented over W to the category of K-analytic spaces which associates to a formal scheme $\mathfrak{X}$ its generic fiber $\mathfrak{X}_\eta$ over K.

If $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\, A$ where A is topologically finitely presented over W, then $\mathfrak{X}_\eta = \mathrm{Spm}\, A_K$ where $A_K = A \otimes_W K$ is naturally a strictly K-affinoid algebra.

We define the reduction map $\pi : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s$ by sending a seminorm $|\cdot|_x$ on A_K to the prime ideal $\ker |\cdot|_x$ of $A_k = A \otimes_W k$. If $\mathcal{Y}$ is a open subset of $\mathfrak{X}_s$ then $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ is a closed analytic domain of $\mathfrak{X}_\eta$ and in particular, when $\mathcal{Y}$ is a open formal subscheme, we have $\pi^{-1}(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}_\eta$.

2.7.2. Let $\mathfrak{X}$ be a formal scheme locally finitely presented over W, we recall the following two facts.

Proposition 2.21 **(see [3], Lemma 2.1, pp. 542-543, and Proposition 2.3, p. 543)**

(1) *The correspondence $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y}_s$ induces an equivalence between the category of étale formal schemes over $\mathcal{X}$ and the category of étale schemes over $\mathcal{X}_s$.*

(2) *If $\phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ is an étale morphism of formal schemes, then the induced morphism $\phi_\eta : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ between the generic fibers is quasi-étale.*

2.7.3. For simplicity, we suppose the field K separably closed. The functor $\mathcal{Y}_s \mapsto \mathcal{Y}_\eta$, which we obtain by composing the functors $\mathcal{Y}_s \mapsto \mathcal{Y}$ and $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y}_\eta$, induces a left exact functor Ψ_η from the category of étale sheaves over $\mathcal{X}_\eta$ to the category of étale sheaves over $\mathcal{X}_s$ (we recall that any sheaf on the étale site of $\mathcal{X}_\eta$ extend uniquely to a sheaf on the quasi-étale site of $\mathcal{X}_\eta$).Ψ_η is called the vanishing cycles functor of $\mathcal{X}$, and we denote by $R^q\Psi_\eta$ its right derived functors on the category of étale abelian sheaf on $\mathcal{X}_\eta$.

Proposition 2.22 **(see [3], Corollary 4.5, p. 549 and Corollary 5.4, p. 555; and [4], Corollary 2.5, p. 373 and Theorem 3.1, p. 374)**

Let $\mathcal{X}$ be a formal scheme locally finitely represented over W and $\mathcal{F}$ an étale abelian sheaf on $\mathcal{X}_\eta$.

(1) *For any étale morphism $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, $R^q\Psi_\eta(\mathcal{F})_{|\mathcal{Y}_s} \simeq R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{|\mathcal{Y}_\eta})$, for all $q \geqslant 0$.*

(2) *For any morphism $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ of formal schemes locally finitely represented over W, we have*

$$R^\bullet\Psi_\eta(R^\bullet\varphi_{\eta*}\mathcal{F}) \simeq R^\bullet\varphi_{s*}(R^\bullet\Psi_\eta(\mathcal{F})).$$

(3) *If $\mathcal{X}$ is a smooth formal scheme and n is relatively prime to* $\operatorname{char} k$, *then $\Psi_\eta(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}_\eta} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}_s}$ and $R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}_\eta} = 0$ for $q \geqslant 1$.*

(4) *For any subscheme $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_s$, we denote by $\mathcal{X}^\wedge_{|\mathcal{Y}}$ the formal completion of $\mathcal{X}$ along $\mathcal{Y}$ and by $\mathcal{F}^\wedge_{|\mathcal{Y}}$ the pullback of $\mathcal{F}$ over $(\mathcal{X}^\wedge_{|\mathcal{Y}})_\eta$, then $(\mathcal{X}^\wedge_{|\mathcal{Y}})_\eta$is canonically isomorphic to $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$. If $\mathcal{F}$ is constructible with torsion orders prime to* $\operatorname{char} k$, *then there are canonical isomorphisms*

$$R^q\Psi_\eta(\mathcal{F})_{|\mathcal{Y}} \simeq R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}^\wedge_{|\mathcal{Y}})$$

for all $q \geqslant 0$.

(5) *If $\mathcal{X}$ is locally of finite type and all the irreducible components of $\mathcal{X}_s$ are proper, then there is a spectral sequence*

$$E_2^{p,q} = H^p_c(\mathcal{X}_s, R^q\Psi_\eta(\mathcal{F})) \Longrightarrow H^{p+q}_c(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{F}).$$

2.7.4. Let $\mathcal{T}$ be a scheme of finite type over W and $\mathcal{F}$ be an étale abelian torsion sheaf on $\mathcal{T}_\eta$. Suppose $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}'$ are schemes of finite type over $\mathcal{T}$, and let $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_s$ and $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{X}'_s$ be subschemes. Then, any morphism of formal schemes $\varphi : \mathcal{X}'^\wedge_{/\mathcal{Y}'} \to \mathcal{X}^\wedge_{/\mathcal{Y}}$ over $\mathcal{T}^\wedge$ induces some morphisms of sheaves on $\mathcal{Y}'_s$

$$\psi_\eta(\varphi, \mathcal{F}) : \varphi_s^*(R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{|\mathcal{X}_\eta}))|_{\mathcal{Y}_s} \longrightarrow R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{|\mathcal{X}'_\eta})|_{\mathcal{Y}'_s},$$

for all integer $q \geqslant 0$.

Proposition 2.23 **(see [4], Theorem 4.1, p. 382).** — *Let $\mathcal{F}$ be an abelian étale constructible sheaf on $\mathcal{T}_\eta$ with torsion orders prime to* char k.

Given the schemes $\mathfrak{X} = \mathcal{X}'^{\wedge}_{/\mathcal{Y}'}$ and $\mathfrak{X}' = \mathcal{X}^{\wedge}_{/\mathcal{Y}}$ over $\mathcal{T}^{\wedge}$, there exists an ideal of definition $\mathcal{I}'$ of $\mathfrak{X}'$ such that for any pair of morphisms $\varphi, \phi : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ over $\mathcal{T}^{\wedge}$ that coincide modulo $\mathcal{I}'$, we have

$$\psi_\eta(\varphi, \mathcal{F}) = \psi_\eta(\phi, \mathcal{F})$$

for all $q \geqslant 0$.

Further more, let $f : \mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$. Then, any finite étale formal scheme $\mathsf{q} : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}'^{\wedge}_{/\mathcal{Y}'}$, with degree relatively prime to the torsion orders of $\mathcal{F}$, and any morphism $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}^{\wedge}_{/\mathcal{Y}}$ such that $\varphi_s = f \circ \mathsf{q}_s$ induce a morphism

$$\theta(\varphi, \mathcal{F}) = \frac{1}{\deg(q)} \operatorname{Tr} \circ q_{s*}\psi_\eta(\varphi, \mathcal{F}) \circ i : f^* R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{|\mathcal{X}_\eta})|_{\mathcal{Y}_s} \longrightarrow R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{|\mathcal{X}'_\eta})|_{\mathcal{Y}'_s},$$

where $\operatorname{Tr} : q_{s*}R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{/\mathcal{Z}}) = q_{s*}q_s^* R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{|\mathcal{X}_\eta})|_{\mathcal{Y}_s} \to R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{|\mathcal{X}'_\eta})|_{\mathcal{Y}'_s}$ is the trace map.

By closely following the argument in [4], one can prove the following mild generalization of proposition 2.23.

Proposition 2.24. — *Maintaining the notations of proposition 2.23. Given $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$, $\mathfrak{X} = \mathcal{X}'^{\wedge}_{/\mathcal{Y}'}$ and $\mathfrak{X}' = \mathcal{X}^{\wedge}_{/\mathcal{Y}}$ over $\mathcal{T}^{\wedge}$, there exists an ideal of definition $\mathcal{I}'$ of $\mathfrak{X}'$ such that for any finite étale formal scheme $\mathsf{q} : \mathcal{Z} \to \mathfrak{X}'$ and any pair of morphisms $\varphi, \phi : \mathcal{Z} \to \mathfrak{X}$ over $\mathcal{T}^{\wedge}$ that coincide modulo $\mathcal{I}'$, we have*

$$\operatorname{Tr} \circ \mathsf{q}_{s*}\psi_\eta(\varphi, \mathcal{F}) = \operatorname{Tr} \circ \mathsf{q}_{s*}\psi_\eta(\phi, \mathcal{F})$$

for all $q \geqslant 0$, where $\operatorname{Tr} : \mathsf{q}_{s*}R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{/\mathcal{Z}}) = \mathsf{q}_{s*}\mathsf{q}_s^* R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{/\mathfrak{X}'}) \to R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{/\mathfrak{X}'})$ is the trace map.

In particular, if there exists a morphism $f : \mathfrak{X}'_s = \mathcal{Y}' \to \mathfrak{X}_s = \mathcal{Y}$ such that $\varphi_s = \phi_s = f \circ \mathsf{q}_s$ and $\deg(\mathsf{q})$ *is relatively prime to the torsion orders of $\mathcal{F}$, then*

$$\theta(\varphi, \mathcal{F}) = \theta(\phi, \mathcal{F})$$

for all $q \geqslant 0$.

Proof. — Let us first remark that it suffices to find such an ideal $\mathcal{I}'$ separately for each q, since all the sheaves are constructible and equal to zero for $q \geqslant 1 + 2\dim(\mathfrak{X}_\eta)$.

For any étale morphism $\mathcal{U}_s \to \mathfrak{X}_s$ (resp. $\mathcal{U}'_s \to \mathfrak{X}'_s$, $\mathcal{V}_s \to \mathcal{Z}_s$), we denote by $\mathcal{U} \to \mathfrak{X}$ (resp. $\mathcal{U}' \to \mathfrak{X}'$, $\mathcal{V} \to \mathcal{Z}$) the corresponding étale morphism of formal schemes under the equivalence of category stated in proposition 2.21.

Our first step is to remark that there exists a finite étale covering $\{u_\alpha : \mathcal{U}_{s,\alpha} \to \mathfrak{X}_s\}$ such that the canonical morphisms

$$\oplus_\alpha u_{s\,!} H^q(\mathcal{U}_\eta, \mathcal{F}) \longrightarrow R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}_{/\mathfrak{X}})$$

is surjective. For any $\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{s,\alpha} \to \mathfrak{X}_s$, we write $\mathcal{U}'_s = f_s^*\mathcal{U}_s$ and $\mathcal{V}_s = q_s^*\mathcal{U}'_s$. Then, the two morphisms $\varphi, \phi : \mathcal{Z} \to \mathfrak{X}$ extend to two morphisms from $\mathcal{V}$ to $\mathcal{U}$, and $\mathcal{V} \to \mathcal{U}'$ is a finite étale morphism with degree equal to $\deg(q)$. Moreover, in order to prove the statement, it is sufficient to show that the associated morphisms $\varphi^*, \phi^* : H^q(\mathcal{U}_\eta, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V}_\eta, \mathcal{F})$ satisfy the condition $\mathrm{Tr} \circ \varphi^* = \mathrm{Tr} \circ \phi^*$, where $\mathrm{Tr} : H^q(\mathcal{V}_\eta, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}'_\eta, \mathcal{F})$ denote the trace map. Further more, we can assume $\mathcal{U} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathcal{U}' = \mathrm{Spf}(B)$ and $\mathcal{V} = \mathrm{Spf}(C)$.

Let $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$) be the maximal ideal of definition of A (resp. B). We observe that $\mathfrak{b}C$ is an ideal of definition of C. For any $0 < r < 1$, we set

$$U(r) = \{x \in \mathcal{U}_\eta \mid |f(x)| \geqslant r \; \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

and analogously define $U'(r) \subset \mathcal{U}'_\eta$ and $V'(r) \subset \mathcal{V}_\eta$. Then, the $U(r)$ (resp. $U'(r)$, $V(r)$) are some affinoid domains which exhaust $\mathcal{U}_\eta$ (resp. $\mathcal{U}'_\eta$, $\mathcal{V}_\eta$). For each r, the morphisms $\varphi, \phi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ and $q : \mathcal{V} \to \mathcal{U}'$ induce some morphisms $\varphi_r, \phi_r : V(r) \to U(r)$ and $q_r : V(r) \to U'(r)$. Moreover, it follows from Lemma 6.3.12 in [**2**], that there exists r such that the canonical morphism $j : H^q(\mathcal{U}'_\eta, \mathcal{F}) \to H^q(U'(r), \mathcal{F})$ is an injection. We fix such a number r, $0 < r < 1$, and consider the following commutative diagram.

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathcal{U}_\eta, \mathcal{F}) \arrow[r, shift left, "\varphi^*"] \arrow[r, shift right, "\phi^*"'] \arrow[d] & H^q(\mathcal{V}_\eta, \mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] \arrow[d] & H^q(\mathcal{U}'_\eta, \mathcal{F}) \arrow[d, hook, "j"] \\
H^q(U(r), \mathcal{F}) \arrow[r, shift left, "\varphi_r^*"] \arrow[r, shift right, "\phi_r^*"'] & H^q(V(r), \mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & H^q(U'(r), \mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

By Theorem 7.1 in [**3**], there exists $\varepsilon \in \mathfrak{S}(U(r))$ such that $\varphi_r^* = \phi_r^*$ on $H^q(U(r), \mathcal{F})$ if $d(\varphi_r, \phi_r) < \varepsilon$. Moreover, without loss of generality we may assume that ε is defined by triple $(U(r), \{f_i\}, \{t_i\})$, for some elements $f_i \in A$ and some $t_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *i.e.* $d(\varphi_r, \phi_r) < \varepsilon$ if $\max_{y \in V(r)} |(\varphi_r^* f_i - \phi_r^* f_i)(y)| \leqslant t_i$, for all i. Then, the ideal of definition $\mathfrak{b}^n$, for any $n \geqslant 1$ such that $r^n \leqslant t_i$ (for all i), possesses the property that, for any pair of morphisms $\varphi_r, \phi_r : V(r) \to U(r)$ which coincide modulo $\mathfrak{b}^n$, one has $d(\varphi_r, \phi_r) < \varepsilon$ (see Lemma 8.4 in [**3**]).

It follows that for $\mathfrak{J} = \mathfrak{b}^n$ we have $\varphi_r^* = \phi_r^*$ and thus also $\mathrm{Tr} \circ \varphi_r^* = \mathrm{Tr} \circ \phi_r^*$. Since the morphism j is injective, we deduce that $\mathrm{Tr} \circ \varphi^* = \mathrm{Tr} \circ \phi^*$. □

Finally, let us remark that if the morphism $\psi_\eta(\varphi, \mathcal{F})$ is an isomorphism then such is also the induced morphism $\theta(\varphi, \mathcal{F})$ on the vanishing cycles sheaves over $\mathcal{Y}'$ (one can define its inverse as $\frac{1}{\deg(q)} \mathrm{Tr} \circ \psi_\eta(\varphi, \mathcal{F})^{-1} \circ i$).

2.7.5. Let ℓ be a prime number, $\ell \neq p$, and $r \geqslant 1$ some integer. We recall the following result on the vanishing cycles $R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$.

***Lemma 2.25* (see [14], Lemma II.5.6, p. 47).** — *Suppose that R is a complete noetherian local W-algebra. The natural map*

$$R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathrm{Spf}\, R} \longrightarrow R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathrm{Spf}\, R[[T_1,\ldots,T_r]]}$$

is an isomorphism.

The above lemma can be reformulated as follows

Proposition 2.26. — *Let $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ be two formal schemes, locally finitely represented over W, and $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ be a smooth morphism.*

Then the map:

$$\psi_\eta(\pi, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) : \pi^* R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathcal{X}_\eta} \longrightarrow R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathcal{Y}_\eta}$$

is an isomorphism.

Proof. — It suffices to check that $\psi_\eta(\pi, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ induces an isomorphism on fibers. Thus, let y be a point of $\mathcal{Y}_s$ and consider the map

$$\psi_\eta(\pi, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_y : (R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathcal{X}_\eta})_{\pi(y)} \longrightarrow (R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathcal{Y}_\eta})_y$$

It follows from part 5 of proposition 2.22 that

$$(R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathcal{X}_\eta})_{\pi(y)} = R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathcal{O}^\wedge_{\mathcal{X},\pi(y)}}$$

and

$$(R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathcal{Y}_\eta})_y = R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\mathcal{O}^\wedge_{\mathcal{Y},y}}.$$

To say that the morphism π is smooth at the point y is equivalent to say that there exists an isomorphism $\mathcal{O}^\wedge_{\mathcal{Y},y} \simeq \mathcal{O}^\wedge_{\mathcal{X},\pi(y)}[[T1, \ldots, T_r]]$, compatible with the morphism $\pi^* : \mathcal{O}^\wedge_{\mathcal{X},\pi(y)} \to \mathcal{O}^\wedge_{\mathcal{Y},y}$. Therefore the previous lemma suffices to conclude. □

3. Igusa varieties

In [**14**] Harris and Taylor introduce natural analogues of the Igusa curves in the theory of elliptic modular curves and call them Igusa varieties. These form towers of finite étale coverings of the open Newton polygon strata in the reduction of the Shimura variety.

In this section we shall define some varieties we shall also call Igusa varieties which are the natural generalization of the ones introduced in [**14**]. These form a tower of finite étale coverings not of an open Newton polygon stratum but only of the central leaf inside it. (In the case considered by Harris and Taylor in [**14**], *i.e.* when the dimension of the pertinent Barsotti-Tate group is one, there is a unique leaf inside each open Newton polygon stratum, which is the stratum itself.)

3.1. The general case. — We shall recall the general construction underlying the notion of Igusa variety which was introduced by Harris and Taylor in the context of [**14**] (see section III.1, pp. 70-71).

3.1.1. Let $\mathbb{X}$ be a p-divisible groups defined over $\overline{\mathbb{F}}_p$ (*e.g.* $\mathbb{X} = \Sigma_\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, as in section 2.3).

The functor on $\overline{\mathbb{F}}_p$-schemes to groups which maps S to $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}[p^m]/S)$ is represented by a scheme $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}[p^m])$ of finite type over $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p$ (for all m). If $m_1 \geqslant m_2$ then there is a natural map $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}[p^{m_1}]) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{X}[p^{m_2}])$.

For each m we define $\mathrm{Aut}^1(\mathbb{X}[p^m])$ to be the intersection of the scheme theoretic images of $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}[p^{m'}])$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}[p^m])$ over all $m' \geqslant m$. Then the scheme theoretic image of $\mathrm{Aut}^1(\mathbb{X}[p^{m_1}])$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}[p^{m_2}])$ for $m_1 > m_2$ is in fact $\mathrm{Aut}^1(\mathbb{X}[p^{m_2}])$.

3.1.2. Suppose now that S is a reduced $\overline{\mathbb{F}}_p$-scheme and H a p-divisible group over S. We now consider the functor on S-schemes to sets which maps T/S to the set of isomorphisms over T $j_m : \mathbb{X}[p^m] \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} T \to H[p^m] \times_S T$. This functor is represented by a scheme $X_m(\mathbb{X}, H/S)$ of finite type over S.

We define $Y_m(\mathbb{X}, H/S)$ to be the intersection of the scheme theoretic images of

$$X_{m'}(\mathbb{X}, H/S) \longrightarrow X_m(\mathbb{X}, H/S)$$

over $m' \geqslant m$ and write $J_m(\mathbb{X}, H/S) = Y_m(\mathbb{X}, H/S)^{\mathrm{red}}$. We denote the universal isomorphism over $J_m(\mathbb{X}, H/S)$ by

$$j_m^{\mathrm{univ}} : \mathbb{X}[p^m] \longrightarrow H[p^m].$$

It follows from the definitions that there is a natural action of the group of automorphism of $\mathbb{X}/\overline{\mathbb{F}}_p$ on the schemes $J_m(\mathbb{X}, H/S)$, for all m, which is defined via composition on the right of the restrictions to the p^m-torsion with the universal isomorphism j_m^{univ}.

3.2. Igusa varieties over the central leaves. — We maintain the notations established in sections 2.1, 2.2 and 2.3. Inside each open Newton polygon stratum of the reduction in characteristic p of the Shimura variety, we consider the central leaf and define the Igusa varieties as covering spaces of the central leaves.

3.2.1. Let U^p be a sufficiently small open compact subgroup of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$. We denote by X the Shimura variety $X_{U^p(0)}$ over $\mathrm{Spec}\,E_u$, and write $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{U^p}$. Then, $X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{E_u}} \mathrm{Spec}\,E_u$. We denote by $\overline{X}$ the reduction $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{E_u}} \mathrm{Spec}\,k(u)$, where $k(u)$ is the residue field of $\mathcal{O}_{E_u}$ ($k(u) = \mathbb{F}_p$).

Let α be a Newton polygon of height h and dimension q and Σ_α be the Barsotti-Tate group over $\mathbb{F}_p$ defined in section 2.3.4. We denote by $\overline{X}^{(\alpha)}$ the open Newton polygon stratum inside $\overline{X}$ associated to α and by C_α the central leaf inside $\overline{X}^{(\alpha)}$, *i.e.* the leaf associated to Σ_α. We define the Igusa varieties as covering spaces of the central leaves C_α (for all α) as follows.

3.2.2. We briefly recall the notation introduced in 2.3.4. Let $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ be the slopes of the Newton polygon α. For each i, we denote by r_i the multiplicity of the slope λ_i in α. We define $\Sigma^i = \Sigma^i_\alpha = \Sigma_{\lambda_i}^{\oplus r_i}$ and $\Sigma = \Sigma_\alpha = \oplus_i \Sigma^i_\alpha$.

Lemma 3.1. — $\mathrm{Aut}^1(\Sigma^i[p^m])$ *is finite over* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *and*

$$\mathrm{Aut}^1\left(\Sigma^i[p^m]\right)^{\mathrm{red}} \simeq \mathrm{GL}_{r_i}\left(\mathcal{O}_{\lambda_i}/p^m\mathcal{O}_{\lambda_i}\right)$$

Proof. — The same proof of Lemma III.1.5 of [**14**] (pp. 70-71) applies to this lemma using the result in Proposition 2.8. □

We also see that

$$J_m\left(\Sigma^i, \Sigma^i/\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p\right) = \mathrm{Aut}^1\left(\Sigma^i[p^m]\right)^{\mathrm{red}} \simeq \mathrm{GL}_{r_i}\left(\mathcal{O}_{\lambda_i}/p^m\mathcal{O}_{\lambda_i}\right).$$

In fact if S is any reduced scheme over $\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p$ then

$$\begin{aligned} J_m\left(\Sigma^i, \Sigma^i/S\right) &= \left(J_m\left(\Sigma^i, \Sigma^i/\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p\right) \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} S\right)^{\mathrm{red}} \\ &\simeq \left(\left(\mathrm{GL}_{r_i}\left(\mathcal{O}_{\lambda_i}/p^m\mathcal{O}_{\lambda_i}\right)\right)_S\right)^{\mathrm{red}} \\ &= \left(\mathrm{GL}_{r_i}\left(\mathcal{O}_{\lambda_i}/p^m\mathcal{O}_{\lambda_i}\right)\right)_S \end{aligned}$$

(see [**14**], section III.1, pp. 70-71).

3.2.3. Let us consider the central leaf $C = C_\alpha$, *i.e.* the leaf of $\overline{X}^{(\alpha)}$ associated to the Barsotti-Tate $\Sigma = \Sigma_\alpha$.

We focus our attention on the Barsotti-Tate group $\mathcal{G} = \varepsilon\mathcal{A}[u^\infty]$ over the central leaf $C = C_\alpha$. We denote by C_r the irreducible components of C, by $\eta = \eta_r$ the generic point of C_r and by $\overline{\eta} = \overline{\eta}_r$ the associated geometric point (for all r).

It follows from the definition of C that $\mathcal{G}_{\overline{\eta}} \simeq \Sigma \times k(\overline{\eta})$ and thus, in particular, that $\mathcal{G}_{\overline{\eta}}$ is completely slope divisible (for any $\overline{\eta} = \overline{\eta}_r$). We deduce, by remark 2.13, that the Barsotti-Tate groups $\mathcal{G}_{\eta_r}$ are completely slope divisible, and also, by remark 2.14, that $\mathcal{G}/C_r$ is complete slope divisible, for all r. Thus the same it is true for $\mathcal{G}$ over C (by definition $C = \cup_r C_r$, but indeed $C = \coprod_r C_r$, since it is smooth).

We denote by $(0) \subset \mathcal{G}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$ the slope filtration of $\mathcal{G}$ over C and by $\mathcal{G}^i$ the subquotients $\mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, k)$. The $\mathcal{G}^i$ are slope divisible isoclinic Barsotti-Tate group of slope λ_i, and for all geometric points $x \in C$ we have ${\mathcal{G}^i}_x \simeq \Sigma^i$. (This follows from the fact that, for any geometric point x of C, $\mathcal{G}_x \simeq \Sigma$ and any isogeny between Barsotti-Tate groups endowed with slope filtrations respects the filtrations.)

Definition 3.2. — For each positive integer m we define the Igusa variety of level m

$$J_m = J_m(\Sigma_1, \mathcal{G}_1/C \times \overline{\mathbb{F}}_p) \times_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p} J_m(\Sigma_2, \mathcal{G}_2/C \times \overline{\mathbb{F}}_p) \times_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p} \cdots J_m(\Sigma_k, \mathcal{G}_k/C \times \overline{\mathbb{F}}_p)$$

and denote by $j_{m,i}^{\mathrm{univ}} : \Sigma^i[p^m] \to \mathcal{G}^i[p^m]$ the universal isomorphisms over J_m.

If $m' \geqslant m$ then there is a natural surjection $\mathrm{q}_{m',m} : J_{m'} \twoheadrightarrow J_m$ over $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$. The Igusa varieties J_m together with the morphisms $\mathrm{q}_{m',m}$ form a projective system of schemes over $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$. Moreover, there is a natural action of the group Γ on the tower of Igusa varieties, which is defined by composition on the left. If we write $\Gamma_m = \prod_i \mathrm{GL}_{r_i}\left(\mathcal{O}_{\lambda_i}/p^m\mathcal{O}_{\lambda_i}\right)$ then the action of Γ on J_m factors via the natural projection $\Gamma \twoheadrightarrow \Gamma_m$.

Proposition 3.3. — *The Igusa variety J_m over $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is finite étale and Galois with Galois group Γ_m.*

Proof. — It is sufficient to show that for any closed point x of $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ the following two conditions hold

- the group Γ_m acts faithfully and transitively on the points of $(J_m)^\wedge_x$;
- if y is a point of $(J_m)^\wedge_x$ then $(J_m)^\wedge_y \simeq (C \times \overline{\mathbb{F}}_p)^\wedge_x$;

or equivalently that $J_m \times_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p} \operatorname{Spec} \mathcal{O}^\wedge_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p,x} \simeq (\Gamma_m)_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}^\wedge_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p,x}}$.

Following the argument of Proposition III.1.7 in [**14**] (pp. 73-74) in order to conclude it suffices to prove the following lemma. □

Lemma 3.4. — *Maintaining the notations as above. For any closed point x in $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ and for all i*

$$\mathcal{G}^i \times_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p} \operatorname{Spec} \mathcal{O}^\wedge_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p,x} \simeq \Sigma^i \times_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p} \operatorname{Spec} \mathcal{O}^\wedge_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p,x}.$$

Proof. — By the Isogeny Theorem of de Jong and Oort (theorem 2.9), and the fact that over $\overline{\mathbb{F}}_p$ any two Barsotti-Tate groups with equal Newton polygons are isogenous, there exists an isogeny

$$\psi : \Sigma^i \times_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p} \operatorname{Spec} \mathcal{O}^\wedge_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p,x} \twoheadrightarrow \mathcal{G}^i \times_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p} \operatorname{Spec} \mathcal{O}^\wedge_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p,x}$$

over $\operatorname{Spec} \mathcal{O}^\wedge_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p,x}$. We choose an integer $d > 0$ such that the kernel of the isogeny ψ is contained in the p^d-torsion subgroup.

Let $\overline{\mathcal{M}}^{0,d}_{\Sigma^i}$ be the reduced fiber of the Rapoport-Zink space $\mathcal{M}^{0,d}_{\Sigma^i}$ and denote by $\mathcal{H}$ the universal Barsotti-Tate group over $\overline{\mathcal{M}}^{0,d}_{\Sigma^i}$. We consider the subset

$$Y = \{t \in \overline{\mathcal{M}}^{0,d}_{\Sigma^i} \mid \mathcal{H}_t \times k(t)^{\mathrm{ac}} \simeq \Sigma^i \times k(t)^{\mathrm{ac}}\}.$$

It follows from lemma 2.6 that Y is a constructible subset of $\overline{\mathcal{M}}^{0,d}_{\Sigma^i}$. We now show that Y is finite. In fact, if $t \in Y$, then $\mathcal{H}_t \times k(t)^{\mathrm{ac}} \simeq \Sigma^i \times k(t)^{\mathrm{ac}}$ and thus there exists an isogeny $\phi_t \in \operatorname{End}(\Sigma^i \times k(t)^{\mathrm{ac}}) = \operatorname{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\Sigma^i)$ with kernel contained in $\Sigma^i[p^d]$ such that

$$t = (\mathcal{H}_t, \beta_t) \simeq (\Sigma^i, \phi_t).$$

Thus the map which takes t to ϕ_t defines a bijection between Y and the set

$$\operatorname{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\Sigma^i) \cap p^d \operatorname{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\Sigma^i)^{-1} / \operatorname{Aut}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\Sigma^i) \simeq \mathrm{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{\lambda_i}) \cap p^d \mathrm{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{\lambda_i})^{-1} / \mathrm{GL}_{r_i}(\mathcal{O}_{\lambda_i}).$$

Since the set of matrixes

$$\begin{pmatrix} T^{a_1} & & & \\ & T^{a_2} & & x_{i,j} \\ & & \ddots & \\ & 0 & & T^{a_{r_i}} \end{pmatrix}$$

where $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{r_i} \geqslant 0$ are integers such that $a_i \leqslant d$ for all i, and $x_{i,j} \in \mathcal{O}_{\lambda_i}$ are such that $x_{i,j} = 0$ for $i < j$ and $\operatorname{val}_p(x_{i,j}) \leqslant a_j$ for $i > j$, is a system of representatives of the coset space $\mathrm{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{\lambda_i}) \cap p^d\mathrm{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{\lambda_i})^{-1} / \mathrm{GL}_{r_i}(\mathcal{O}_{\lambda_i})$, this set (and therefore Y) is finite. It follows that there is a reduced finite subscheme Y of $\overline{\mathcal{M}}^{0,d}_{\Sigma^i}$ such that, for any geometric point t of $\overline{\mathcal{M}}^{0,d}_{\Sigma^i}$, $t \in Y$ if and only if $\mathcal{H}_t \simeq \Sigma^i$.

By the universal property of the Rapoport-Zink space $\mathcal{M}^{0,d}_{\Sigma^i}$, we have that the pair $(\mathcal{G}^i \times_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}^{\wedge}_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p, x}, \psi)$ defines a morphism of schemes

$$u : \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}^{\wedge}_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p, x} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{0,d}_{\Sigma^i}.$$

Moreover, if we denote by η the generic point of $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}^{\wedge}_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p, x}$, then $u(\eta) \in Y$ and thus, since Y is finite and $\mathcal{O}^{\wedge}_{C\times\overline{\mathbb{F}}_p, x}$ a domain, the map u has to factor via a (closed) point in Y. □

Corollary 3.5. — *The Igusa varieties are smooth schemes over* $\mathrm{Spec}\, \overline{\mathbb{F}}_p$.

Proof. — It follows directly from propositions 2.7, and 3.3. □

3.2.4. We remark that the definition of the Igusa varieties can be easily given over any leaf of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ which is associated to a completely slope divisible Barsotti-Tate group, and moreover the result of proposition 3.3 also holds for those Igusa varieties.

3.3. The action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the Igusa varieties. — We defined the Igusa varieties as covering spaces of the central leaf of an open Newton polygon stratum inside the reduction of a Shimura variety with no level structure at p. In this section, we shall investigates how the Igusa varieties vary as the level structure away from p on the Shimura variety varies.

3.3.1. Let α be a Newton polygon of dimension q and height h. For any open compact (sufficiently small) subgroup U^p of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ and any positive integer m, we denote by

$$J_{U^p,m} = J_{\alpha,U^p,m}$$

the Igusa variety of level m over the central leaf $C_{U^p} = C_{\alpha,U^p}$ of the open Newton polygon stratum $\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p}$ inside the reduction of a Shimura variety with no level structure at p and structure of level U^p away from p, $\overline{X}_{U^p(0)}$.

For all open compact subgroup $V^p \subset U^p$, the natural projections between the Shimura varieties $\overline{X}_{V^p(0)} \to \overline{X}_{U^p(0)}$ preserve both the Newton polygon stratification and Oort's foliation. Equivalently, they induces some morphisms $\overline{X}^{(\alpha)}_{V^p} \to \overline{X}^{(\alpha)}_{U^p}$ between the open Newton polygon strata and

$$\mathrm{q}_{V^p,U^p} : C_{V^p} \longrightarrow C_{U^p}$$

between the corresponding central leaves. Moreover, these morphisms are finite and étale (see section 2.1.10).

It follows from the definition of the Igusa varieties that, for any level m, the morphisms $\mathrm{q}_{V^p,U^p} : C_{V^p} \to C_{U^p}$ give rise to some finite étale morphisms between the corresponding Igusa varieties of level m,

$$\mathrm{q}_{V^p,U^p} : J_{V^p,m} \longrightarrow J_{U^p,m},$$

such that $\mathrm{q}_{m',m} \circ \mathrm{q}_{V^p,U^p} = \mathrm{q}_{V^p,U^p} \circ \mathrm{q}_{m',m}$, for any integers $m' \geqslant m$ and for any open compact subgroups $V^p \subset U^p$ of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$.

In fact, for all levels V^p, m, let us denote a point x on the Igusa variety $J_{V^p,m}$ by a $(4+k)$-tuple $(A, \lambda, i, \overline{\mu}; j_{m,1}, \ldots, j_{m,k})$, where $(A, \lambda, i, \overline{\mu})$ is the quadruple associated to the point $\mathrm{q}_m(x) \in C_{V^p}$ and $j_{m,i} : \Sigma^i[p^m] \to G^i[p^m]$ (for all $i = 1, \ldots, k$) are the isomorphisms defining the Igusa structures on the isoclinic subquotients G^i of the Barsotti-Tate group $G = \varepsilon A[u^\infty]$. Then, the morphisms $\mathrm{q}_{V^p,U^p} : J_{V^p,m} \to J_{U^p,m}$ are defined by

$$(A, \lambda, i, \overline{\mu}; j_{m,1}, \ldots, j_{m,k}) \longmapsto (A, \lambda, i, \overline{\mu}; j_{m,1}, \ldots, j_{m,k}),$$

where the V^p-orbit $\overline{\mu}$ of μ determines a unique U^p-orbit (which we still denote by $\overline{\mu}$).

3.3.2. Analogously, for any $g \in G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, the corresponding morphisms between the reductions of the Shimura varieties

$$g : \overline{X}_{U^p} \longrightarrow \overline{X}_{g^{-1}U^p g}$$

(see section 2.1.11) preserve the Newton polygon stratification and Oort's foliation, and induce some morphisms between Igusa varieties of the same level m,

$$g : J_{U^p,m} \longrightarrow J_{g^{-1}U^p g,m},$$

for all $m \geqslant 0$ and $U^p \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, which commutes with the projections $\mathrm{q}_{m',m}$ and q_{V^p,U^p}. The morphisms $g : J_{U^p,m} \to J_{g^{-1}U^p g,m}$ are defined by

$$(A, \lambda, i, \overline{\mu}; j_{m,1}, \ldots, j_{m,k}) \longmapsto (A, \lambda, i, \overline{\mu \circ g}; j_{m,1}, \ldots, j_{m,k}),$$

where U^p-orbit $\overline{\mu}$ of μ determines a unique $g^{-1}U^p g$-orbit of $\mu \circ g$, which we denote by $\overline{\mu \circ g}$.

3.4. The groups acting on the Igusa varieties. — In this section we investigates which abstract groups naturally act on the tower of Igusa varieties. More precisely, we shall show that there is a natural action of the submonoid

$$\mathbb{Q}_p^\times \times S_\alpha \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$$

of $\mathbb{Q}_p^\times \times T_\alpha \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{Z}}$ on the Igusa varieties, where the action of $\mathbb{Q}_p^\times \times S$ is linear and the actions of Frob and Fr are σ-semilinear (*cf.* section 2.5). We also prove that this action commutes with the previously defined action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the Igusa varieties.

Let us remark that the action of the monoid $S = S_\alpha \subset T = T_\alpha$ (see definition 2.10) on the Igusa varieties $J_m/C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ extends the action of the group $\Gamma = \Gamma_\alpha$, and also that the action of $\mathbb{Q}_p^\times$ on the Igusa varieties is compatible with the action of $\mathbb{Q}_p^\times \subset G(\mathbb{Q}_p)$ on the Shimura varieties (see section 2.1.12).

3.4.1. Let $(g,\rho,1,1) \in \mathbb{Q}_p^\times \times S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$ and write $e_i = e_i(\rho)$ and $f_i = f_i(\rho)$, for all i (see section 2.3.6), and $e = e_1$. We also assume that $-\mathrm{val}_p(g) \geqslant e$.

For any positive integer m, such that $m \geqslant e$, we shall define a morphism

$$(g,\rho,1,1) : J_m \longrightarrow J_{m-e_1}.$$

We recall that defining such a morphism $(g,\rho,1,1)$ on J_m is equivalent to give a $(4+k)$-tuple $(\mathcal{B},\lambda',i',\overline{\mu}',j_{m-e,1},\ldots,j_{m-e,k})$ over J_m which represents a point of J_{m-e}.

Let $(\mathcal{A},\lambda,i,\overline{\mu},j_1,\ldots,j_k)$ be the universal object over J_m, we write $\mathcal{G} = \varepsilon\mathcal{A}[u^\infty]$ and denote by $\mathcal{G}^i$ its isoclinic subquotients.

Since $\rho \in S$, then ρ^{-1} is a well define isogeny and $\Sigma[p^{f_i}] \subset \ker(\rho_i^{-1}) \subset \Sigma[p^{e_i}] \subset \Sigma[p^e]$. We consider the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^i & \Sigma^i[p^{m-e}] \arrow[l, hook'] \arrow[r, "j_i\circ\rho_i"] & \dfrac{\mathcal{G}^i}{j_i(\ker(\rho_i^{-1}))}[p^{m-e}] \arrow[r, hook] & \dfrac{\mathcal{G}^i}{j_i(\ker(\rho_i^{-1}))} \\
\Sigma^i \arrow[u, two heads, "\rho_i^{-1}"] & \rho_i\Sigma^i[p^{m-e}] \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] & j_i(\rho_i\Sigma^i[p^{m-e}]) \arrow[r, hook] \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}^i \arrow[u, two heads] \\
\ker(\rho_i^{-1}) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \Sigma^i[p^m] \arrow[r, "j_i"] & \mathcal{G}^i[p^m] & j_i(\ker(\rho_i^{-1})) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

where $\rho_i : \Sigma^i \twoheadrightarrow \Sigma^i$ is the quasi-isogeny induced by ρ on the isoclinic subquotients and $j_i \circ \rho_i$ is defined as the isomorphism induced by j_i on the quotients, for each $i = 1,\ldots,k$. (The inclusion $\rho_i\Sigma^i[p^{m-e}] \subset \Sigma^i[p^m]$ follows from the inclusion $\ker(\rho_i^{-1}) \subset \Sigma^i[p^{e_i}] \subset \Sigma^i[p^e]$.) It is clear that since the isomorphism j_i are extendable to any higher level m', the same holds for the isomorphisms $j_i \circ \rho_i$.

For simplicity, we now write $\mathcal{K}_\rho^i = j_i(\ker(\rho_i^{-1})) \subset \mathcal{G}^i$.

Remark 3.6. — If $\rho \in S$, then there exists a unique subgroup $\mathcal{K}_\rho$ of $\mathcal{G}$ such that the corresponding subgroups inside the isoclinic subquotients of $\mathcal{G}$ are the $\mathcal{K}_\rho^i$ (for all i). Moreover, we have $\mathcal{G}[p^{f_k}] \subset \mathcal{K}_\rho \subset \mathcal{G}[p^{e_1}]$.

Let us argue by induction on k. If $k=1$, then $\mathcal{K}_\rho = \mathcal{K}_\rho^1$ and thus there is nothing to prove.

If $k>1$, we denote by $\mathcal{K}'_\rho$ the corresponding subgroup of $\mathcal{G}' = \mathcal{G}/\mathcal{G}^1$, then $\mathcal{G}'[p^{f_k}] \subset \mathcal{K}'_\rho \subset \mathcal{G}'[p^{e_2}]$. We define $\mathcal{K}_\rho = pr'|\,\mathcal{G}'[p^{e_2}]^{-1}(\mathcal{K}'_\rho) + i_1(\mathcal{K}_\rho^1)$, *i.e.* $\mathcal{K}_\rho$ is the unique subgroup which fits the following commutative diagram with exact rows. (We remark that we use the inequality $e_2 \leqslant f_1$ to deduce that $\mathcal{G}^1[p^{e_2}] \subset \mathcal{K}^1_\rho$.)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G}^1[p^{e_2}] \arrow[r] & \mathcal{G}[p^{e_2}] \arrow[r] & \mathcal{G}'[p^{e_2}] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}^1[p^{e_2}] \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, hook] & \mathcal{K}''_\rho \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{K}'_\rho \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}^1_\rho \arrow[r] & \mathcal{K}_\rho \arrow[r] & \mathcal{K}'_\rho \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

It is clear from the definition that $\mathcal{G}[p^{f_k}] \subset \mathcal{K}_\rho \subset \mathcal{G}[p^{e_1}]$, and thus we conclude.

3.4.2. We define the morphism

$$(g, \rho, 1, 1) : J_m \longrightarrow J_{m-e}$$

to be associated to the $(4+k)$-tuple $(\mathcal{A}/\langle\mathcal{K}_\rho\rangle, \lambda', i', \overline{\mu}', j'_{m-e,1}, \dots, j'_{m-e,k})$ where:

(1) $(\mathcal{A}/\langle\mathcal{K}_\rho\rangle, \lambda', i', \overline{\mu}')$ is the quadruple induced by the universal quadruple on J_m via the projection $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\langle\mathcal{K}_\rho\rangle$, where $\langle\mathcal{K}_\rho\rangle \subset \mathcal{A}[p^{-\operatorname{val}_p(g)}]$ is a finite flat subgroup associated to $\mathcal{K}_\rho \subset \mathcal{G}[p^e] \subset \mathcal{G}[p^{-\operatorname{val}_p(g)}]$;

(2) $j'_{m-e,i}$ denotes the isomorphism $j_i \circ \rho_i : \Sigma^i[p^{m-e}] \to (\mathcal{G}^i/\mathcal{K}^i_\rho)[p^{m-e}]$.

The subgroup $\langle\mathcal{K}_\rho\rangle \subset \mathcal{A}[p^e]$ is defined as

$$(\mathcal{O}_{B_u} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}_\rho) \oplus (\mathcal{O}_{B_u} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}_\rho)^\perp \subset \mathcal{A}[u^{-\operatorname{val}_p(g)}] \oplus \mathcal{A}[(u^c)^{-\operatorname{val}_p(g)}],$$

and the structures on $\mathcal{A}/\langle\mathcal{K}_\rho\rangle$ are the ones induced by the structures on $\mathcal{A}$. More precisely, the polarization λ' on $\mathcal{A}/\langle\mathcal{K}_\rho\rangle$ is induced by $p^{-\operatorname{val}_p(g)}\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\vee$, and the level structure is defined as

$$V \otimes \mathbb{A}^{\infty,p} \xrightarrow{\mu} V^p\mathcal{A} \longrightarrow V^p(\mathcal{A}/\langle\mathcal{K}_\rho\rangle).$$

3.4.3. It follows from the definition that for any $m \geqslant m' \geqslant e$

$$\mathfrak{q}_{m-e,m'-e} \circ (g, \rho, 1, 1) = (g, \rho, 1, 1) \circ \mathfrak{q}_{m,m'},$$

and that that the above definitions give rise to an action the submonoid

$$\{(g, \rho) \in \mathbb{Q}_p^\times \times S \mid -\operatorname{val}_p(g) \geqslant e_1(\rho)\} \subset \mathbb{Q}_p^\times \times S$$

on the system of Igusa varieties.

We claim that the above action extends to an action of the monoid $\mathbb{Q}_p^\times \times S$. To prove it, it suffices to show that the element $(p^{-1}, 1) \in \mathbb{Q}_p^\times \times S$ acts invertibly on the Igusa varieties. More precisely, we claim that the element $(p^{-1}, 1)$ acts on J_m as the element $v^c \in E^\times \subset G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, for any $v \in E^\times$ such that $\operatorname{val}_u(v) = 1$, $\operatorname{val}_{u^c}(v) = 0$ and $v \equiv 1 \mod (u^c)^m$.

In fact, the pertinent subgroup $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{G}[p]$ is simply (0) and $\langle(0)\rangle = \mathcal{A}[u^c] \subset \mathcal{A}[p]$. Thus, the multiplication $v^c : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ gives rise to an isomorphism $\mathcal{A}/\langle(0)\rangle \simeq \mathcal{A}$, and under this identification the polarization λ' is simply λ, the level structure $\overline{\mu}' = \overline{v^c \circ \mu}$ and the isomorphisms $j'_{m,i} = v^c \circ j_{m,i} = j_{m,i}$.

3.4.4. We remark that the above argument also shows that the action of $\mathbb{Q}_p^\times$ on the Igusa varieties is compatible, under the projections $\mathrm{q}_{m',m}$, with the action of $\mathbb{Q}_p^\times \subset G(\mathbb{Q}_p)$ on the reductions of the Shimura varieties (see section 2.1.12).

3.4.5. Let us now define the action of Fr. As in section 2.5.9, we define the σ-semilinear action of Fr on the Igusa varieties as a linear morphisms

$$\mathrm{Fr} : J_m \longrightarrow J_m^{(p)},$$

where $J_m^{(p)}$ are the pullbacks under the Frobenius $\sigma : \overline{\mathbb{F}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$ of the Igusa varieties $J_m/\overline{\mathbb{F}}_p$, for all m.

Let us denote by $C^{(p)}$ the pullback of the central leaf C under σ. Then, $C^{(p)}$ can be identified with the leaf $C_{\Sigma^{(p)}}$, and $J_m^{(p)}$ with the Igusa variety of level m over $C_{\Sigma^{(p)}}$.

Under the above identifications, the relative Frobenius on the central leaf

$$\mathrm{Fr} : C \longrightarrow C^{(p)}$$

is defined by setting

$$A = (A, \lambda, i, \overline{\mu}) \longmapsto A^{(p)} = (A^{(p)}, \lambda^{(p)}, i^{(p)}, \overline{\mu}^{(p)}),$$

where $A^{(p)}$ denotes the pullbacks of A under σ, endowed with the structures induced from the ones of A.

If G denotes the Barsotti-Tate group associated to an abelian varieties A, then $G^{(p)}$ is the Barsotti-Tate group associated to $A^{(p)}$ and, for all i

$$(G^{(p)})^i = (G^i)^{(p)}.$$

Then, for any level m, the relative Frobenius on the Igusa variety of level m

$$\mathrm{Fr} : J_m \longrightarrow J_m^{(p)}$$

is defined by setting

$$(A, j_{m,1}, \ldots, j_{m,k}) \longmapsto (A^{(p)}, j_{m,1}^{(p)}, \ldots, j_{m,k}^{(p)}),$$

and its action commutes with the action of the monoid $\mathbb{Q}_p^\times \times S$ on the Igusa varieties, *i.e.*

$$(j \circ (g, \rho, 1, 1))^{(p)} = j^{(p)} \circ (g, \rho, 1, 1)^{(p)},$$

for all $(g, \rho) \in \mathbb{Q}_p^\times \times S$.

3.4.6. We define the action of Frob on the Igusa varieties, as an analogue of the action of Frob on the Rapoport-Zink spaces (see section 2.5.8). As before, we define the σ-linear action of Frob as a linear morphism

$$\mathrm{Frob} : J_m \longrightarrow J_{m-1}^{(p)},$$

for all $m \geqslant 0$.

Let us consider the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^i \arrow[d, "F"] & \Sigma^i[p^m] \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\simeq", "j_{m,i}"'] \arrow[d, dotted] & \mathcal{G}^i[p^m] \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted] & \mathcal{G}^i \arrow[d, "F"] \\ \Sigma^{i\,(p)} & \Sigma^{i\,(p)}[p^{m-1}] \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\simeq", "j_{m,i}F^{-1}"'] & \mathcal{G}^{i\,(p)}[p^{m-1}] \arrow[r, hook] & \mathcal{G}^{i\,(p)} \end{tikzcd}$$

The isomorphisms $j_{m-1,i}F^{-1}$ are simply the restriction of the isomorphism $j_{m,i}^{(p)}$ to the p^{m-1}-torsion. Moreover, the subgroups $\mathcal{G}^i[F] = j_{m,i}(\Sigma^i[F])$ naturally piece together as the subquotients of the finite flat subgroup $\mathcal{G}[F]$.

Furthermore, we have $\mathcal{G}[F] \subset \mathcal{G}[p]$ and $\mathcal{A}[F] = \langle \mathcal{G}[F] \rangle \subset \mathcal{A}[p]$. Thus, analogously to the above definition of the action of $\mathbb{Q}_p^\times \times S$, we set the action of the element $(p^{-1}, 1, \mathrm{Frob}, 1)$ to be defined by the morphism associated to the $(6+k)$-tuple

$$(\mathcal{A}^{(p)}, \lambda^{(p)}, i^{(p)}, \overline{\mu}^{(p)}, j_{m-1,1}^{(p)}, \ldots, j_{m-1,k}^{(p)}),$$

or equivalently $(p^{-1}, 1, \mathrm{Frob}, 1) = \mathrm{q}_{m,m-1} \circ Fr$.

It follows that the action of Frob on the Igusa varieties is defined as

$$\mathrm{Frob} = (p, 1, 1, 1) \circ \mathrm{q}_{m,m-1} \circ Fr,$$

i.e. by the morphism associated to the $(6+k)$-tuple

$$(\mathcal{A}^{(p)}, \lambda^{(p)}, i^{(p)}, \overline{\mu}^{(p)} \circ (v^c)^{-1}, j_{m-1,1}^{(p)}, \ldots, j_{m-1,k}^{(p)}),$$

where $v \in E^\times$ is an element such that $\mathrm{val}_u(v) = 1$, $\mathrm{val}_{u^c}(v) = 0$ and $v \equiv 1 \mod (u^c)^m$ (see section 3.4.3).

It is clear that the action of Frob commutes with the previously defined action of $\mathbb{Q}_p^\times \times S \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$, and therefore there is an action of the monoid

$$\mathbb{Q}_p^\times \times S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$$

on the system of Igusa varieties. Moreover, it is easy to see that this action commutes with the previously defined action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$.

3.4.7. Let us remark that, as in section 2.5.13, depending of the choice of the Barsotti-Tate group $\Sigma/\mathbb{F}_p$ in its isogeny class, there is a natural isomorphism between J_m and $J_m^{(p)}$ (for any $m \geqslant 0$), which arise from the fact that the Barsotti-Tate group Σ is defined over $\mathbb{F}_p$, namely

$$\begin{aligned} \mathrm{frob} : J_m &\longrightarrow J_m^{(p)} \\ (A, j_{m,i}) &\longmapsto (A, j_{m,i} \circ \nu_{m,i}^{-1}), \end{aligned}$$

where $\nu_{m,i}$ denotes the restriction to $\Sigma^i[p^m]$ of the identification $\nu : \Sigma \simeq \Sigma^{(p)}$ (see section 2.3.7).

As in the case of the Rapoport-Zink space, the action of frob is invertible (and thus defines an effective descent datum on the Igusa varieties), but does not commute with the action of T_α (though frob^B does, see section 2.3.8).

Proposition 3.7. — *Maintaining the above notations. We remark that* $e(p^{-1}) = 1$ *and we write* $a = e(\mathrm{fr}^{-B}) = \lambda_1 B$.

(1) *If* $m \geqslant 1$, *the element* $(p^{-1}, p^{-1}, 1, 1) \in \mathbb{Q}_p^\times \times S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$ *acts on* J_m *as*

$$v \circ \mathrm{q}_{m,m-1},$$

where $v \in E^\times \subset G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ *is an element such that* $\mathrm{val}_u(v) = 1$, $\mathrm{val}_{u^c}(v) = 0$ *and* $v \equiv 1 \mod (u^c)^m$.

(2) *If* $m \geqslant a$, *the element* $\mathrm{fr}^{-B} \in S$ *acts on* J_m *as*

$$(p^B, 1, 1, 1) \circ \mathrm{q}_{m,m-a} \circ \mathrm{frob}^{-B} \circ \mathrm{Fr}^B,$$

where $\mathrm{Fr} : J_m \to J_m^{(p)}$ *denotes the* $\overline{\mathbb{F}}_p$*-linear relative Frobenius on the Igusa variety.*

(3) *If* $m \geqslant B$ *(and thus* $m \geqslant a$ *since* $a = \lambda_1 B \leqslant B$*), we have*

$$\mathrm{Frob}^B = \mathrm{q}_{m-a,m-B} \circ \mathrm{frob}^B \circ \mathrm{fr}^{-B}.$$

Proof

Part (1). — Let us consider the diagram in section 3.4, when $\rho_i^{-1} = p$. The induced isomorphisms $j_i \circ p$ are simply the restrictions of j_i on the p^{m-1}-torsions. Moreover, $\langle \mathcal{G}[p] \rangle = \mathcal{A}[u] \subset \mathcal{A}[p]$ and thus the multiplication $v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ gives rise to the necessary identifications.

Part (2). — We shall prove the element $(p^{-B}, \mathrm{fr}^{-B}, 1, 1)$ acts as $\mathrm{q}_{m,m-a} \circ \mathrm{frob}^{-B} \circ \mathrm{Fr}^B$. Let us consider the commutative diagram of Figure 1.

By definition of $\mathrm{fr}^B = \oplus_i \tau_i^{\lambda_i B} \in S$, we have that $\nu^B \circ \mathrm{fr}^B = F^B$ on Σ, or equivalently that

$$(\nu^i)^B \circ \tau_i^{\lambda_i B} = F^B$$

on Σ^i, for all i. In particular, it follows that $\ker(F^B) = \ker(\tau_i^{\lambda_i B})$ as subgroups of Σ^i, for all i.

Thus, maintaining the notations as in section 3.4, $\mathcal{K}^i_{\mathrm{fr}^{-B}} = \mathcal{G}^i[F^B]$, and $\mathcal{K}_{\mathrm{fr}^{-B}} = \mathcal{G}[F^B]$, *i.e.* there exists an isomorphism between $\mathcal{G}/\mathcal{K}_{\mathrm{fr}^{-B}}$ and $\mathcal{G}^{(p^B)}$, compatible with the projection $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{K}_{\mathrm{fr}^{-B}}$ and $F^B : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(p^B)}$. Moreover, the isomorphisms $j_{m,i} \circ \mathrm{fr}^{-B}$ can be identified with the restrictions of the isomorphisms $j_{m,i}^{(p^B)} \circ \nu_{m,i}^B$ over the p^{m-a}-torsion subgroups (we denote by $\nu_{m,i}^B$ the restriction of $(\nu^i)^B$ to the p^m-torsion subgroups).

Finally, we also have that $\langle \mathcal{G}[F^B] \rangle = \mathcal{A}[F^B] \subset \mathcal{A}[p^B]$ and thus, the Frobenius morphism $F^B : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{(p^B)}$ gives rise to an isomorphism $\mathcal{A}/\langle \mathcal{G}[F^B] \rangle \simeq \mathcal{A}^{(p^B)}$, which is compatible with the structures induced on the two quotients by the one on $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^i \arrow[r, "F^B"] \arrow[d, equal] & \Sigma^{i(p^B)} & \Sigma^{i(p^B)}[p^m] \arrow[l, hook'] \arrow[ddddd, bend left, "j^{(p^B)}_{m,i}"] \\
\Sigma^i \arrow[r, two heads, "\tau_i^{\lambda_i B}"] & \Sigma^i \arrow[u, "(\nu^i)^B"'] & \\
\Sigma^i[p^m] \arrow[u, hook] \arrow[r, dotted] \arrow[d, "j_{m,i}"] & \Sigma^i[p^{m-a}] \arrow[u, hook] \arrow[r, "\nu^B_{m-a,i}"] \arrow[d, "j_{m,i}\circ \mathrm{fr}^{-B}"] & \Sigma^{i(p^B)}[p^{m-a}] \arrow[uu, hook] \arrow[d, "j^{(p^B)}_{m-a,i}"] \\
\mathcal{G}^i[p^m] \arrow[r, dotted] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}^i/\mathcal{K}^i_{\mathrm{fr}^{-B}}[p^{m-a}] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}^{i(p^B)}[p^{m-a}] \arrow[dd, hook] \\
\mathcal{G}^i \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \mathcal{G}^i/\mathcal{K}^i_{\mathrm{fr}^{-B}} \arrow[d, "\simeq"] & \\
\mathcal{G}^i \arrow[r, "F^B"] & \mathcal{G}^{i(p^B)} & \mathcal{G}^{i(p^B)}[p^{m_i}] \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1

Part (3). — The equality follows from part (2) and the equality

$$\mathrm{Frob}^B = (p^B, 1, 1, 1) \circ \mathrm{q}_{m,m-B} \circ \mathrm{Fr}^B . \qquad \square$$

3.5. The cohomology of the Igusa varieties. — In this section, we shall reinterpret some of the above results in terms of the cohomology with compact supports of the Igusa varieties.

We shall observe that the cohomology groups of the Igusa varieties naturally form a direct limit, under the morphism corresponding to the projections $\mathrm{q}_{m',m}$ and q_{V^p,U^p}, and also that the action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}}$ on the system of Igusa varieties give rise to an action on the direct limit of the cohomology groups, which extends to an action of the group $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$.

Thus, the cohomology groups of the Igusa varieties are representations of the group $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$, or equivalently of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times T \times W_{\mathbb{Q}_p}$, where the action of the Weil group is unramified.

3.5.1. Let ℓ be a prime number, $\ell \neq p$, and $r \geqslant 1$ an integer.

For any integer $i \geqslant 0$, we consider the i-th étale cohomology groups with compact supports of the Igusa varieties $J_{U^p,m}$ over $\overline{\mathbb{F}}_p$, with coefficient in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$,

$$H^i_c(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

for any positive integer m and any open compact subgroup $U^p \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p})$.

The finite étale morphisms

$$\mathrm{q}_{m',m} : J_{U^p,m'} \longrightarrow J_{U^p,m} \quad \text{and} \quad \mathrm{q}_{V^p,U^p} : J_{V^p,m} \longrightarrow J_{U^p,m},$$

for all positive integers $m' \geqslant m$ and all open compact subgroups $V^p \subset U^p$ of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, induces some morphisms between the cohomology groups

$$(\mathrm{q}_{m',m})_* : H^i_c(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_c(J_{U^p,m'}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

and

$$(\mathrm{q}_{V^p,U^p})_* : H^i_c(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_c(J_{V^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}).$$

It is easy to see that the i-th cohomology groups of the Igusa varieties, together with the above morphisms, form an inductive system and we refer to the direct limit

$$H^i_c(J, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_{m,U^p} H^i_c(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

as the i-th cohomology group of the Igusa varieties, with $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-coefficients.

3.5.2. Let us now consider the action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$ on the system of Igusa varieties (see sections 3.4 and 3.3). It induces an action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$ on the direct limit of the cohomology groups, $H^i_c(J, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$, and moreover the action of Fr is trivial.

In fact, for any $(g, \rho) \in \mathbb{Q}_p^\times \times S$, the morphism $(g, \rho) : J_{U^p,m} \to J_{U^p,m-e}$ induces a morphism

$$(g, \rho)_* : H^i_c(J_{U^p,m-e}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_c(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

for any integer $m \geqslant e$ (where $e = e(\rho)$) and any open compact subgroup U^p.

Moreover, since $(g, \rho) \circ \mathrm{q}_{m',m} = \mathrm{q}_{m'-e,m-e} \circ (g, \rho)$ and $(g, \rho) \circ \mathrm{q}_{V^p,U^p} = \mathrm{q}_{V^p,U^p} \circ (g, \rho)$, the morphisms $(g, \rho)_*$ give rise to an endomorphism of the direct limit.

Analogously, for every $g \in G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, the morphism $g : J_{U^p,m} \to J_{g^{-1}U^p g,m}$ induces a morphism

$$g_* : H^i_c(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_c(J_{g^{-1}U^p g,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

for any positive integer $m \geqslant 0$ and any open compact subgroup U^p, and, since $g \circ \mathrm{q}_{V^p,U^p} = \mathrm{q}_{g^{-1}V^p g, g^{-1}U^p g} \circ g$ and $g \circ \mathrm{q}_{m',m} = \mathrm{q}_{m',m} \circ g$, the morphisms g_* give rise to an automorphism of the direct limit.

Similarly, the σ-semilinear morphisms $\mathrm{Frob}, \mathrm{Fr} : J_m \to J_m$ gives rise to an action on the étale cohomology groups, and moreover, since Frob and Fr commute with the projections $\mathrm{q}_{m',m}$ and q_{V^p,U^p}, it induces an action on the groups $H^i_c(J, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$.

We remark that the above action of Fr on the étale cohomology groups is trivial, since $\mathrm{Fr} : J_m \to J_m$ is the absolute Frobenius.

Remark 3.8. — The action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}}$ on $H^i_c(J, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ can be extended to an action of the group $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times T \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$ $(S \subset T)$.

Indeed, since $T = \langle S, p, \mathrm{fr}^B\rangle$, in order to prove that the action of S extends to an action of T it suffices to observe that the elements $p^{-1}, \mathrm{fr}^{-B} \in S$ act invertibly, or equivalently that the actions of $(p^{-1}, p^{-1}), (p^{-B}, \mathrm{fr}^{-B}) \in \mathbb{Q}_p^\times \times S$ are invertible. Since the action of (p^{-1}, p^{-1}) on the Igusa varieties is given by the morphism $v \circ \mathrm{q}_{m,m-1}$, where $v \in E^\times \subset G(\mathbb{Q})$ acts isomorphically, the induced action on the cohomology groups becomes invertible once one passes to the direct limit. On the other hand, the element $(p^{-B}, \mathrm{fr}^{-B})$ acts on the Igusa varieties as $\mathrm{q}_{m,m-a} \circ \mathrm{frob}^{-B} \circ Fr^B$, and thus the induced action on the direct limit $H_c^i(J, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ is invertible. (Since the action of frob on the Igusa varieties is invertible, such is also the induced action on the cohomology groups. On the other hand, we already remarked that the action of Fr on the étale cohomology groups is trivial and, therefore, in particular invertible.)

The same argument proves that to the action of Frob on $H_c^i(J, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ is invertible, since $\mathrm{Frob} = \mathrm{q}_{m,m-1} \circ Fr$.

In the following, we shall refer to the cohomology groups with compact supports of the Igusa varieties with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ as a representation of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times T \times W_{\mathbb{Q}_p}$, where the action of the Weil group is unramified (*i.e.* it factors through the projection $W_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow \sigma^{\mathbb{Z}}$) and the action of σ on the above spaces is defined to be equal to the action of Frob^{-1}.

Remark 3.9. — Let $U^p \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ be an open compact subgroup. For any integer $q \geqslant 0$, the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$H_c^q(J_{U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_m H_c^q(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$$

is admissible.

In fact, for any integer $m \geqslant 1$, let $\Gamma^m \subset \Gamma$ be the subgroup of automorphisms of Σ which restrict to the identity on $\Sigma[p^m]$. As m vary, they form a cofinal system of compact open subgroups of T and we have

$$H_c^q(J_{U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^{\Gamma^m} = H_c^q(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

which is finite. (The latter equality follows from the existence of a trace map on cohomology and the fact that the morphisms $\mathrm{q}_{m',m}$ are finite étale, of ℓ-prime degree.)

Let us remark that, on the other hand, the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations $H_c^q(J, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times T \times W_{\mathbb{Q}_p}$ are smooth, but not *a priori* admissible (*cf.* section 2.1.13).

For all integers $q \geqslant 0$, we define the ℓ-adic cohomology groups of the Igusa varieties

$$H_c^q(J, \mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_{U^p,m} \varinjlim_r H_c^q(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

It follows from the definition and remark 3.8 that they are ℓ-adic representations of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times T \times W_{\mathbb{Q}_p}$ and, moreover, are admissible.

4. A system of covers of the Newton polygon strata

In this section we shall study the geometry of the open Newton polygon strata $\overline{X}^{(\alpha)}$. For each Newton polygon α, we shall consider the product of the Igusa varieties J_m over the central leaf $C = C_\alpha$ with the reduced fiber $\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ of the truncated Rapoport-Zink space $\mathcal{M}^{n,d} = \mathcal{M}_\alpha^{n,d}$ (see section 2.5.10). For any positive integers m, n, d, such that $m \geqslant d$, we shall construct some morphisms

$$\pi_N : J_m \times_{\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \longrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p,$$

for all positive integers N sufficiently large. (In the special case of $n = d = N = 0$, $\overline{\mathcal{M}}^{0,0}$ is just a point and the morphisms π_0 are simply the morphisms

$$\mathrm{q}_m : J_m \longrightarrow C \times \overline{\mathbb{F}}_p \hookrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p,$$

for all $m \geqslant 0$.)

We shall show that the morphisms π_N are finite and surjective on geometric points for $m, n, d \gg 0$. As m, n, d, N vary, the morphisms π_N commute with the natural projections between Igusa varieties and the inclusions between the Rapoport-Zink spaces, and also $\pi_{N+1} = (\mathrm{Fr}^B \times 1) \circ \pi_N$, for all N (Fr denotes the Frobenius morphism of $\overline{X}^{(\alpha)}$ over $\mathbb{F}_p$ and B the positive integer we defined in section 2.3.8, which depends only on α).

4.1. The action of Frobenius on the slope filtration. — The definition of the morphisms π_N is based of the following key observation regarding the action of the powers of Frobenius on the slope filtration of a Barsotti-Tate group.

4.1.1. If G be a Barsotti-Tate group over a scheme S in characteristic p we denote by $G^{(p)}$ its twist by Frobenius and by $F : G \to G^{(p)}$ the Frobenius map.

Lemma 4.1. — *Let G be a Barsotti-Tate group over a scheme S in characteristic p. Assume that G has constant Newton polygon α with slopes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$ and for each i denote by b_i the denominator of λ_i (written in minimal form). We also write $B = \operatorname{lcm}(b_1, \ldots, b_k)$ and $\delta = \min(\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1} - \lambda_k)$.*

Suppose also that G has a slope filtration

$$(0) \subset G_1 \subset \cdots \subset G_k = G$$

over S as in theorem 2.12, and denote by G^i the corresponding subquotients.

Then, for any integer $n > 0$, there is a canonical isomorphism:

$$G^{(p^{nB})}[p^{n\delta B}] \simeq \prod_{i=1}^{k} G^{i\,(p^{nB})}[p^{n\delta B}].$$

Proof. — We prove the lemma by induction on the length k of the slope filtration of G. The case $k = 1$ is trivial as $G = G_1 = G^1$.

For $k \geqslant 2$ we write $H = G^k$, $G' = G_{k-1}$, $\lambda = \lambda_k$ and $\lambda' = \lambda_{k-1}$. As G is completely slope divisible, the quasi-isogeny $p^{-\lambda B}F^B$ is in fact an isogeny of G, H and G'. In particular, it is an isomorphism of H, since H is isoclinic of slope λ.

We consider the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G' \arrow[r] \arrow[d, "p^{-\lambda B}F^B"] & G \arrow[r] \arrow[d, "p^{-\lambda B}F^B"] & H \arrow[r] \arrow[d, "p^{-\lambda B}F^B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G'^{(p^B)} \arrow[r] & G^{(p^B)} \arrow[r] & H^{(p^B)} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

where the rows are exact and the vertical maps are isogenies. Since the last vertical morphism $H \to H^{(p^B)}$ is an isomorphism, it follows by the snake lemma that $G'[p^{-\lambda B}F^B] = G[p^{-\lambda B}F^B]$.

As G' is slope divisible with respect to λ' we can factor the isogeny $p^{-\lambda B}F^B$ on G' as $p^{-\lambda B}F^B = p^{(\lambda'-\lambda)B} \circ p^{-\lambda' B}F^B$. Thus $G'[p^{-\lambda B}F^B] \supset G'[p^{(\lambda'-\lambda)B}]$ and we have

$$H[p^{(\lambda'-\lambda)B}] \simeq \frac{G[p^{(\lambda'-\lambda)B}]}{G'[p^{(\lambda'-\lambda)B}]} \hookrightarrow \frac{G}{G'[p^{(\lambda'-\lambda)B}]} \longrightarrow \frac{G}{G'[p^{-\lambda B}F^B]} \simeq G^{(p^B)}$$

where the composite map is a section of the natural projection

$$G^{(p^B)}[p^{(\lambda'-\lambda)B}] \twoheadrightarrow H^{(p^B)}[p^{(\lambda'-\lambda)B}] \simeq H[p^{(\lambda'-\lambda)B}].$$

We conclude that

$$G^{(p^B)}[p^{(\lambda'-\lambda)B}] \simeq G'^{(p^B)}[p^{(\lambda'-\lambda)B}] \times H^{(p^B)}[p^{(\lambda'-\lambda)B}]$$

and therefore by inductive hypothesis (as $\lambda' - \lambda \geqslant \delta$)

$$G^{(p^B)}[p^{\delta B}] \simeq \prod_{i=1}^{k} G^{i\,(p^B)}[p^{\delta B}].$$

Since the above argument holds also if we replace B by nB (for any integer $n > 0$), we obtain the stated result. $\square$

Corollary 2.14 allow us to apply the previous theorem to the Barsotti-Tate group $\mathcal{G} = \varepsilon\mathcal{A}[p^\infty]$ over the central leaf C.

Corollary 4.2. — *Maintaining the notations of section 3, we denote by $\mathcal{G}$ the Barsotti-Tate group $\varepsilon\mathcal{A}[p^\infty]$ over the central leaf C. Let d be a positive integer.*

Then, for any integer N such that $N \geqslant d/\delta B$, there is a canonical isomorphism

$$\mathcal{G}^{(p^{NB})}[p^d] \simeq \prod_{i=1}^{k} \mathcal{G}^{i\,(p^{NB})}[p^d].$$

4.2. The morphisms π_N. — We denote by $\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ over $\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p$ the reduced fibers of the truncated Rapoport-Zink spaces associated to the Barsotti-Tate group Σ (see section 2.5.10). For all set of indexes $(m,n,d)\in\mathbb{Z}^3_{\geqslant 0}$, such that $m\geqslant d$, we shall introduce a system of maps

$$\pi_N : J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \longrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p,$$

indexed by the positive integers $N\geqslant d/\delta B$.

4.2.1. By the universal property of $\overline{X}^{(\alpha)}$ to define such a map is equivalent to define a quadruple $(A,\lambda,i,\overline{\mu})$ over $J_m\times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p}\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ such that the Newton polygon of the Barsotti-Tate group $\varepsilon A[p^\infty]$ is constant and equal to α.

We denote by $(\mathcal{A},\lambda,i,\overline{\mu})$ over $J_m\times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p}\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ the pullback of the universal quadruple over J_m/C and by $(\mathcal{H}',\beta^{\mathrm{univ}})$ the pullback of the universal pair over $\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$. Over $J_m\times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p}\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ we also have the data of the universal isomorphisms

$$j^{\mathrm{univ}}_{m,i} : \Sigma^i[p^m] \longrightarrow \mathcal{G}^i[p^m]$$

which, by corollary 4.2, induce an isomorphism

$$j^{\mathrm{univ}}_N = \oplus (j^{\mathrm{univ}}_{m,i})^{(p^{NB})}_{|[p^d]} : \Sigma^{(p^{NB})}[p^d] \longrightarrow \prod_i \mathcal{G}^{i\,(p^{NB})}[p^d] \simeq \mathcal{G}^{(p^{NB})}[p^d]$$

for any $N\geqslant d/\delta B$.

By the definition of the space $\mathcal{M}^{n,d}$, the kernel of the isogeny $p^n\beta^{\mathrm{univ}}:\Sigma\twoheadrightarrow\mathcal{H}'$ is contained in $\Sigma[p^d]$, and thus $\ker(p^n\beta^{\mathrm{univ}})^{(p^{NB})}\subset\Sigma^{(p^{NB})}[p^d]$.

We set

$$\mathcal{K}=\mathcal{K}_N=j^{\mathrm{univ}}_N(\ker(p^n\beta^{\mathrm{univ}})^{(p^{NB})})\subset\mathcal{G}^{(p^{NB})}[p^d].$$

We also write $\mathcal{K}_u=(\mathcal{O}_B)_u\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{K}\subset\mathcal{A}^{(p^{NB})}[u^d]$, and $\mathcal{K}_u^\perp\subset\mathcal{A}^{(p^{NB})}[(u^c)^d]$ for the annihilator of $\mathcal{K}_u\subset\mathcal{A}^{(p^{NB})}[u^d]$ under the λ-Weil pairing.

We set

$$\langle\mathcal{K}\rangle=\mathcal{K}_u\oplus\mathcal{K}_u^\perp\subset\mathcal{A}^{(p^{NB})}[p^d]$$

and define the morphism π_N to be determined by the quadruple which is the quotient of the universal quadruple $(\mathcal{A},\lambda,i,\overline{\mu})$ via the isogeny

$$\mathcal{A}^{(p^{NB})}\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\mathcal{A}^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}\rangle.$$

It is clear that the abelian variety $\mathcal{A}^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}\rangle$ inherits the structure of $\mathcal{A}^{(p^{NB})}$. More precisely, the induced polarization on $\mathcal{A}^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}\rangle$ is defined as the unique polarization $p^d\overline{\lambda}$ which fits the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{(p^{NB})} \arrow[r, "p^d\lambda^{(p^{NB})}"] \arrow[d, twoheadrightarrow] & \mathcal{A}^{(p^{NB})\vee} \\ \mathcal{A}^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}\rangle \arrow[r, "p^d\overline{\lambda}"'] & \left(\mathcal{A}^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}\rangle\right)^{\vee} \arrow[u] \end{tikzcd},$$

and the induced level structure away from p is defined as

$$V\otimes\mathbb{A}^{\infty,p} \xrightarrow{\mu^{(p^{NB})}} V^p(\mathcal{A}^{(p^{NB})}) \xrightarrow{v^{-n}(v^c)^{-d+n}} V^p(\mathcal{A}^{(p^{NB})}) \longrightarrow V^p(\mathcal{A}^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}\rangle),$$

where $v\in E^\times$ is an element such that $\mathrm{val}_u(v)=1$, $\mathrm{val}_{u^c}(v)=0$ and $v\equiv 1 \mod (u^c)^m$.

4.2.2. We remark that the above constructions and definitions hold for any finite flat p^d-torsion subgroup $\mathcal{K}$ of the Barsotti-Tate group associated to an abelian variety endowed with a polarization, an action of $\mathcal{O}_B$ and a level structure away from p.

4.2.3. We observe that in the case $n=d=0$, the space $\overline{\mathcal{M}}^{0,0}$ is just a point (namely, the point corresponding to the pair (Σ,id) over $\overline{\mathbb{F}}_p$) and the morphism π_0 on the Igusa variety J_m is simply the structure morphism

$$\mathrm{q}_m : J_m \longrightarrow C\times\overline{\mathbb{F}}_p \hookrightarrow \overline{X}^{(\alpha)}\times\overline{\mathbb{F}}_p,$$

for any $m\geqslant 0$.

4.2.4. Let us denote by Fr the Frobenius morphism of $\overline{X}^{(\alpha)}$ over $\mathbb{F}_p$, *i.e.* the $\mathbb{F}_p$-linear morphism defined by

$$(A,\lambda,i,\overline{\mu}) \longmapsto (A^{(p)},\lambda^{(p)},i^{(p)},\overline{\mu}^{(p)}),$$

and by σ the Frobenius of $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Proposition 4.3. — *Let $m\leqslant m, n\leqslant n', d\leqslant d', N\leqslant N'$ be some positive integers and U^p a level away from p.*

Let $(g^p,g_p)\in G(\mathbb{A}^{\infty,p})\times\mathbb{Q}_p^\times\subset G(\mathbb{A}^\infty)$, $(\rho,\mathrm{Frob}^r,\mathrm{Fr}^s)\in S\times\mathrm{Frob}^{\mathbb{N}}\times\mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$, and write $e=e(\rho)$ and $f=f(\rho)$.

(1) *If $m\geqslant d$ and $N\geqslant d/\delta B$, then on $J_{m'}\times_{\overline{\mathbb{F}}_p}\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$*

$$\pi_N\circ(\mathrm{q}_{m',m}\times 1)=\pi_N.$$

(2) *If $m\geqslant d'$, $N\geqslant d'/\delta B$ and $d'-d\geqslant(n'-n)h$, then on $J_m\times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p}\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$*

$$\pi_N\circ(1\times i^{n,d}_{n',d'})=\pi_N.$$

(3) *If* $m \geqslant d$ *and* $N \geqslant d/\delta B$, *then on* $J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$

$$\pi_{N'} = (\mathrm{Fr}^{(N'-N)B} \times 1) \circ \pi_N.$$

(4) *If* $m \geqslant d$ *and* $N \geqslant d/\delta B$, *then on* $J_{U^p,m} \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$

$$\pi_N \circ ((g^p, g_p) \times 1) = ((g^p, g_p) \times 1) \circ \pi_N.$$

(5) *If* $m \geqslant d + 2e - f$ *and* $N \geqslant (d + 2e - f)/\delta B$, *then on* $J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$

$$\pi_N \circ ((\rho, \mathrm{Frob}^r, \mathrm{Fr}^s) \times (\rho, \mathrm{Frob}^r, \mathrm{Fr}^s)) = (\mathrm{Fr}^s \times \sigma^{r+s}) \circ \pi_N.$$

Proof

Part (1). — It is straight forward that the definition of π_N (*i.e.* the definition of the isomorphism j_N^{univ}) that the morphism π_N, as m varies, depends only on the restrictions the isomorphisms $j_{m,i}^{\mathrm{univ}}$ over the p^d-torsion, for all i. Thus, $\pi_N \circ (\mathrm{q}_{m',m} \times 1) = \pi_N$.

Part (2). — Proving that $\pi_N \circ (1 \times i_{n',d'}^{n,d}) = \pi_N$ is equivalent to proving that the definition of the abelian variety $\mathcal{A}/\langle\mathcal{K}\rangle$ and its structures, associated to π_N, is independent on n, d.

Let us denote by $\mathcal{K}^{n,d}$ (resp. $\mathcal{K}^{n',d'}$) the subgroup of $\mathcal{G}^{(p^{NB})}$ associated to the morphism π_N on $J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ (resp. on $J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n',d'}$).

It suffices to consider the two cases $(n', d') = (n, d+1)$ and $(n', d') = (n+1, d+1)$.

Let us first consider the case $(n', d') = (n, d+1)$. The definition of $\mathcal{K}^{n,d} = \mathcal{K}$ does not depend on d, but the definition of $\langle\mathcal{K}\rangle$ does. In particular, we have

$$(\mathcal{K}_u^{n,d})^{\perp} = u^c(\mathcal{K}_u^{n,d+1})^{\perp}.$$

Thus, the isogeny $v^c : \mathcal{A}^{(p^{NB})} \to \mathcal{A}^{(p^{NB})}$ (where we choose an element $v \in E^{\times}$ such that $\mathrm{val}_u(v) = 1$, $\mathrm{val}_{u^c}(v) = 0$ and $v \equiv 1 \mod (u^c)^m$) induces an isomorphism

$$\mathcal{A}^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}^{n,d+1}\rangle \simeq \mathcal{A}^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}^{n,d}\rangle.$$

Moreover, the following diagrams commute:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{(p^{NB})} \arrow[r, "v^c"'] \arrow[d] \arrow[rrr, bend left, "p^{d+1}\lambda^{(p^{NB})}"] & \mathcal{A}^{(p^{NB})} \arrow[r, "p^d\lambda^{(p^{NB})}"] \arrow[d] & (\mathcal{A}^{(p^{NB})})^{\vee} \arrow[r, "(v^c)^{\vee}"'] & (\mathcal{A}^{(p^{NB})})^{\vee} \\
\dfrac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle\mathcal{K}^{n,d+1}\rangle} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[rrr, bend right, "p^{d+1}\overline{\lambda}"'] & \dfrac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle\mathcal{K}^{n,d}\rangle} \arrow[r, "p^d\overline{\lambda}"] & \Big(\dfrac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle\mathcal{K}^{n,d}\rangle}\Big)^{\vee} \arrow[u] \arrow[r, "\simeq"] & \Big(\dfrac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle\mathcal{K}^{n,d+1}\rangle}\Big)^{\vee} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

where $(v^c)^\vee = v$, and

$$\begin{tikzcd}
V \otimes \mathbb{A}^{\infty,p} \arrow[r, "\mu"] & V^p(\mathcal{A}^{(p^{NB})}) \arrow[r, "v^{-n}(v^c)^{-d+n}"] \arrow[dr, "v^{-n}(v^c)^{-d-1+n}"'] & V^p(\mathcal{A}^{(p^{NB})}) \arrow[r] & V^p\Big(\frac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle \mathcal{K}^{n,d}\rangle}\Big) \\
& & V^p(\mathcal{A}^{(p^{NB})}) \arrow[u, "v^c"'] \arrow[r] & V^p\Big(\frac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle \mathcal{K}^{n,d+1}\rangle}\Big). \arrow[u, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

Equivalently, the isomorphism

$$\frac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle \mathcal{K}^{n,d+1}\rangle} \simeq \frac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle \mathcal{K}^{n,d}\rangle}$$

gives rise to an equivalence between the two corresponding quadruples.

Let us now consider the case $(n', d') = (n+1, d+1)$. By definition of π_N, we have that

$$\mathcal{K}^{n,d} = p(\mathcal{K}^{n+1,d+1}),$$

and also

$$\mathcal{K}_u^{n,d} = u(\mathcal{K}_u^{n+1,d+1}) \text{ and } (\mathcal{K}_u^{n,d})^\perp = (\mathcal{K}_u^{n+1,d+1})^\perp.$$

Thus, the multiplication by v on $\mathcal{A}^{(p^{NB})}$ gives rise to an isomorphism between

$$\frac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle \mathcal{K}^{n+1,d+1}\rangle} \simeq \frac{\mathcal{A}^{(p^{NB})}}{\langle \mathcal{K}^{n,d}\rangle},$$

which indeed gives rise to an equivalence between the two corresponding quadruples (by an argument completely similar to the previous one).

Part (3). — The equality $\pi_{N'} = (\mathrm{Fr}^{(N'-N)B} \times 1)\pi_N$ follows from the fact that

$$j_{N'}^{\mathrm{univ}} = (j_N^{\mathrm{univ}})^{(p^{(N'-N)B})}.$$

Part (4). — By the very definition of the action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ on the Igusa varieties, we have that $\pi_0 \circ (g^p \times 1) = (g^p \times 1) \circ \pi_0$ on $J_{U^p,m}$, for any level U^p, m.

It suffices to remark that, for all $g^p \in G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, we have $g^p \circ \mathrm{Fr} = \mathrm{Fr} \circ g^p$ on $\overline{X}_{U^p}^{(\alpha)}$ to deduce from part (3) that $\pi_N \circ (g^p \times 1) = (g^p \times 1) \circ \pi_N$ on $J_{U^p,m} \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$, for all U^p, $m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$.

Analogously, the equality $\pi_N \circ (g_p \times 1) = (g_p \times 1) \circ \pi_N$, for any $g_p \in \mathbb{Q}_p^\times$, follows easily from the definitions and the observations in section 3.4.3.

Part (5). — Let $\rho \in S$ (*i.e.* $(1, \rho, 1, 1) \in S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$), then the action of $\rho \in S$ on the spaces $J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ is defined by the morphism

$$\rho \times \rho : J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \longrightarrow J_{m-e} \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n+e,d+e-f}.$$

Let us denote by $\mathcal{K}_\rho$ the unique subgroup of $\mathcal{G}$ such that $\mathcal{K}_\rho^i \simeq j_i(\ker(\rho_i^{-1}))$, for all i (*i.e.* the morphism ρ on the Igusa varieties is associated to the Barsotti-Tate group $\mathcal{G}/\mathcal{K}_\rho$).

In order to conclude that $\pi_N \circ ((\rho,1,1)\times(\rho,1,1)) = \pi_N$, it is enough to observe that

$$(j\rho)_N(\ker(\beta\rho)^{(p^{NB})}) = \frac{j_N(\ker(\beta)^{(p^{NB})})}{j_N(\ker(\rho^{-1})^{(p^{NB})})} = \frac{j_N(\ker(\beta)^{(p^{NB})})}{\mathcal{K}_\rho^{(p^{NB})}} \subset \left(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{K}_\rho}\right)^{(p^{NB})},$$

and that the induced structures on the quotient abelian variety are the same.

Let us now consider the action of the element $\mathrm{Frob} = (1, \mathrm{Frob}, 1) \in S \times \mathrm{Frob}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{Fr}^{\mathbb{N}}$. We remark that both $\pi_N \circ (\mathrm{Frob}\times\mathrm{Frob})$ and $(1\times\sigma)\circ\pi_N$ are σ-semilinear, and thus it suffices to compare the associated linear morphism (which can be done in terms of the universal property of $\overline{X}^{(\alpha)}$).

Indeed, it suffices to observe that the following diagram commutes, where $\mathcal{H}$ and $\widetilde{\mathcal{H}}$ denote respectively the Barsotti-Tate groups associated to the morphisms $(1\times\sigma)\circ\pi_N$ and $\pi_N \circ (\mathrm{Frob}\times\mathrm{Frob})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}'^{(p^{NB})} & & & \widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H} \\
\Sigma^{(p^{NB+1})} \arrow[u, "p^n\beta F^{-1}"'] & \Sigma^{(p^{NB+1})}[p^{m-a}] \arrow[l, hook'] \arrow[r, "j_N^{(p)}"] & \mathcal{G}^{(p^{NB+1})}[p^{m-a}] \arrow[r, hook] & \mathcal{G}^{(p^{NB+1})} \arrow[u] \\
\Sigma^{(p^{NB})} \arrow[u, two heads, "F"'] \arrow[uu, bend left=60, "p^n\beta"] & \Sigma^{(p^{NB})}[p^m] \arrow[l, hook'] \arrow[r, "j_N"] \arrow[u, dotted, two heads] & \mathcal{G}^{(p^{NB})}[p^m] \arrow[r, hook] \arrow[u, dotted, two heads] & \mathcal{G}^{(p^{NB})} \arrow[u, two heads] \arrow[uu, bend right=60]
\end{tikzcd}$$

Finally, the equality $\pi_N \circ (Fr \times Fr) = (Fr \times \sigma)\circ \pi_N$ is obvious. □

4.3. The morphism Π on $\overline{\mathbb{F}}_p$-points. — In this section, we shall focus our attention on the fibers of the morphisms π_N over the $\overline{\mathbb{F}}_p$-points of $\overline{X}^{(\alpha)}$.

Let us first establish some notations. It follows from the definitions that we have

$$\overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{(A,\lambda,i,\overline{\mu})/\overline{\mathbb{F}}_p \mid \alpha(\varepsilon A[u^\infty]) = \alpha\}/\sim,$$

where the abelian varieties A are considered up to prime-to-p isogenies,

$$J(\overline{\mathbb{F}}_p) = \varinjlim_m J_m(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{(B,\lambda,i,\overline{\mu};j)/\overline{\mathbb{F}}_p \mid j : \Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p} \longrightarrow \varepsilon B[u^\infty] \text{ isomorphism }\}/\sim,$$

where the abelian varieties B are also considered up to prime-to-p isogenies, and

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \varinjlim_{n,d} \mathcal{M}^{n,d}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{(H',\beta) \mid \beta : \Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p} \longrightarrow H' \text{ quasi-isogeny }\}/\sim,$$

where the Barsotti-Tate groups H' are considered up to isomorphisms.

We observe that the spaces $\overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ and $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ are naturally endowed with the discrete topology and $J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ with the inverse limit topology.

4.3.1. Let us remark that the action of the group T of the quasi-selfisogenies of $\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ on $\mathcal{M}$ (resp. the action of the monoid $S \subset T$ on the Igusa varieties J_m, for all m) gives rise to a continuous action on $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ (resp. on $J(\overline{\mathbb{F}}_p)$). These two actions are defined as

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p) &\longrightarrow \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p) \\ (H', \beta) &\longmapsto (H', \beta\rho), \end{aligned}$$

for any $\rho \in T$, and

$$\begin{aligned} \rho : J(\overline{\mathbb{F}}_p) &\longrightarrow J(\overline{\mathbb{F}}_p) \\ (B, \lambda, i, \overline{\mu}; j) &\longmapsto (B/\langle j \ker(\rho^{-1})\rangle, \lambda', i', \overline{\mu}'; j\rho), \end{aligned}$$

for any $\rho \in S$, where the Igusa structure on the abelian variety $B/\langle j\ker(\rho^{-1})\rangle$ is defined by the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & \varepsilon B[u^\infty] \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & B \arrow[d, two heads] \\ \Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p} \arrow[r, "j\rho"'] & \dfrac{\varepsilon B[u^\infty]}{j\ker(\rho^{-1})} \arrow[r, hook] & \dfrac{B}{\langle j\ker(\rho^{-1})\rangle}, \end{tikzcd}$$

the polarization λ' is defined as the polarization induced by the polarization $p^e\lambda$ on B (where $e = e_1(\rho)$) and the level structure $\overline{\mu}'$ is induced by the level structure $\overline{(v^c)^{-e}\mu}$ on B (for $v \in E^\times$ is such that $\mathrm{val}_u(v) = 1$ and $\mathrm{val}_{u^c}(v) = 0$.).

It is easy to see that the action of S on $J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ extends to a continuous action of T ($S \subset T$). In fact, the above definition extends directly to all the quasi-isogenies whose inverse is an isogeny, and moreover the action of $p^{-1} \in S$ is invertible. (Indeed, the element $p^{-1} \in S$ acts as

$$(B, \lambda, i, \overline{\mu}, j) \longmapsto (B/B[u], \lambda', i', \overline{\mu}', jp) \sim (B, \lambda, i, \overline{v(v^c)^{-1}\mu}, jvp^{-1}),$$

where the above equivalence is induced by the multiplication $v : B \to B$.)

4.3.2. Let $(y, z) \in J(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, and $y_m \in J_m(\overline{\mathbb{F}}_p)$ be the image of y under the projection $J(\overline{\mathbb{F}}_p) \to J_m(\overline{\mathbb{F}}_p)$). Let n, d be two positive integers such that $z \in \mathcal{M}^{n,d}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Then, for any $m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$, we define the point $\mathrm{Fr}^{-NB}\,\pi_N(y_m, z) \in \overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. It follows from proposition 4.3 that this point does not depend on the choice of the integers m, n, d, N. Thus, we can define a map

$$\begin{aligned} \Pi : J(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p) &\longrightarrow \overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p), \\ (y, z) &\longmapsto \mathrm{Fr}^{-NB}\,\pi_N(y_m, z) \in \overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p), \end{aligned}$$

for any set of integers m, n, d, N such that $m \geqslant d$, $N \geqslant d/\delta B$ and $(y_m, z) \in J_m(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{M}^{n,d}(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

The morphism Π can be also described as follows. Let $y = (B, \lambda, i, \overline{\mu}; j; H', \beta) \in J(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, and choose two positive integers n, d such that $p^n\beta$ and $p^{d-n}\beta^{-1}$ are two isogenies. We define the abelian variety A as

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p^n\beta"'] & \varepsilon B[u^\infty] \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & B \arrow[d, two heads] \\
H' & \dfrac{\varepsilon B[u^\infty]}{j\ker(p^n\beta)} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \dfrac{B}{\langle j\ker(p^n\beta)\rangle} \arrow[d, equal] \\
 & H & A
\end{tikzcd}$$

where the subgroup $\langle j\ker(p^n\beta)\rangle$ of B is defined as

$$(\mathcal{O}_{B_u} \otimes_{\mathbb{Z}_p} j\ker(p^n\beta)) \oplus (\mathcal{O}_{B_u} \otimes_{\mathbb{Z}_p} j\ker(p^n\beta))^\perp \subset B[u^d] \oplus B[(u^c)^d].$$

Then, the point $\Pi(y) \in \overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ is the class of the abelian variety A endowed with a polarization, a $\mathcal{O}_B$-action and a level structure away from p induced by the ones of B. More precisely, the polarization $p^d\overline{\lambda}$ of A is the unique prime-to-p polarization which fits the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "p^d\lambda"] \arrow[d, two heads] & B^\vee \\
B/\langle j\ker(p^n\beta)\rangle \arrow[r, "p^d\overline{\lambda}"] & (B/\langle j\ker(p^n\beta)\rangle)^\vee \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

and the level structure of A is defined as

$$V \otimes \mathbb{A}^{\infty,p} \xrightarrow{\mu} V^p(B) \xrightarrow{v^{-n}(v^c)^{-d+n}} V^p(B) \longrightarrow V^p(B/\langle j\ker(p^n\beta)\rangle).$$

4.3.3. It follows from the definition that the morphism Π is continuous and invariant under the action of T on $J(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, since the π_N are invariant under the action of the submonoid $S \subset T$.

Proposition 4.4. — *Let x be a point of $\overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Then, the fiber $\Pi^{-1}(x)$ is a free principal homogeneous space for the continuous action of T.*

Proof. — Let us remark that the action of T on $J(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ gives rise to an action of T on the fiber $\Pi^{-1}(x)$, since $\Pi \circ (\rho \times \rho) = \Pi$, for all $\rho \in T$. Moreover, since the action of T on $J(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ is continuous thus is the action of T on $\Pi^{-1}(x)$.

Let us denote by $(A, \lambda_A, i_A, \overline{\mu}_A)$ a quadruple associated to x and by $H = \varepsilon A[u^\infty]$ the corresponding Barsotti-Tate group.

We articulate the proof in three steps.

(1) If $(B,\lambda_B,i_B,\overline{\mu}_B;j;H',\beta')$ is a 7-tuple associated to an element $y\in\Pi^{-1}(x)$, then the Barsotti-Tate group H' is isomorphic to H, or equivalently

$$(B,\lambda_B,i_B,\overline{\mu}_B;j,H',\beta')\sim(B,\lambda_B,i_B,\overline{\mu}_B;j,H,\beta),$$

where $\beta=\delta\beta'$, for any isomorphism $\delta:H'\to H$.

(2) Any 7-tuple $(B,\lambda_B,i_B,\overline{\mu}_B;j,H,\beta)$, associated to an element $y\in\Pi^{-1}(x)$, is equivalent to a 7-tuple of the form

$$(A/\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle,\lambda,i,\overline{\mu};\overline{\gamma},H,\beta),$$

where n,d are any two integers such that $p^n\beta$ and $p^{d-n}\beta^{-1}$ are two isogenies, $(p^n\beta)^*:H\to\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ denotes the unique isogeny such that $p^n\beta\circ(p^n\beta)^*=(p^n\beta)^*\circ p^n\beta=p^d$, $\gamma\in\mathrm{Aut}(H)$, $\overline{\gamma}:\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}\to H/\gamma\ker(p^n\beta)^*$ is the isomorphism induced by γ, and the structures of $A/\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle$ are induced by the ones of A.

(3) To any 7-tuple of the form $(A/\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle,\overline{\gamma},H,\beta)$ one can associate a quasi-isogeny $\widehat{\beta}:\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}\to H$ in the same equivalent class of β, and the so defined map between $\Pi^{-1}(x)$ and $\mathrm{QIso}(\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p},H)$ is indeed an homeomorphism of T-spaces. (In particular, $\Pi^{-1}(x)$ is a free principal homogeneous space for the continuous action of T since $\mathrm{QIso}(\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p},H)$ is.)

Step (1). — It follows from the definition of Π that the isomorphism $j:\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}\to G$ induces an isomorphism between the quotients $H'\to H$.

Step (2). — Let us choose a prime-to-p isogeny

$$\varphi:B/\langle j(\ker p^n\beta)\rangle\longrightarrow A$$

which gives rise to an equivalence between the corresponding two quadruple associated to the point $x=\Pi(y)$, and consider the commutative diagram of Figure 2, where γ is the unique automorphism of H which makes the diagram commute.

It follows from the commutativity of the diagram that there exists an isogeny

$$\psi:B\longrightarrow A/\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle$$

which fits in the diagram and also that ψ has degree prime to p (since the restriction of ψ to G give rise to an isomorphism between the pertinent Barsotti-Tate groups).

The isogeny ψ gives rise to an equivalence of 7-tuples

$$(B,\lambda_B,i_B,\overline{\mu}_B;j;H,\beta)\sim(A/\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle,\lambda',i,\overline{\mu}';\overline{\gamma},H,\beta),$$

where λ' is the polarization on the quotient $A\twoheadrightarrow A/\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle$ induced by the $p^d\lambda_A$ and $\overline{\mu}'$ is the level structure induced by $p^{-d}v^n(v^c)^{d-n}\overline{\mu}_A=v^{n-d}(v^c)^{-n}\overline{\mu}_A$ (where $v\in E^\times$ is an element such that $\mathrm{val}_u(v)=1$ and $\mathrm{val}_{u^c}(v)=0$).

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "j"] \arrow[d, two heads] \arrow[dd, bend right, "p^n\beta"'] \arrow[dddd, bend right=60, "p^d"'] & G \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & B \arrow[d, two heads] \arrow[dddd, bend left=60, "p^d"] \\
\dfrac{\Sigma}{\ker(p^n\beta)} \arrow[r, "\overline{j}"] \arrow[d, equal] & \dfrac{G}{j(\ker(p^n\beta))} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_{|G}"] & \dfrac{B}{\langle j(\ker(p^n\beta))\rangle} \arrow[d, "\varphi"] \\
H \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, two heads] \arrow[dd, bend right, "(p^n\beta)^*"'] & H \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads] \\
\dfrac{H}{\ker(p^n\beta)^*} \arrow[r, "\overline{\gamma}"] \arrow[d, equal] & \dfrac{H}{\gamma(\ker(p^n\beta)^*)} \arrow[r, hook] & \dfrac{A}{\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle} \\
\Sigma \arrow[r, "j"'] & G \arrow[r, hook] \arrow[u, "\psi_{|G}"] & B \arrow[u, dashed, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2

Step (3). — We now consider the following commutative diagram.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, "p^d"] & A/\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle \arrow[r, two heads] & A/A[p^d] \arrow[r, equal] & A \\
H \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook] & H/\gamma\ker(p^n\beta)^* \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook] & H/H[p^d] \arrow[r, equal] \arrow[u, hook] & H \arrow[u, hook] \\
H \arrow[r, dotted, "(p^n\beta)^*"'] \arrow[u, dotted, "\gamma"] & \Sigma \arrow[rr, dotted, "p^n\beta"'] \arrow[u, "\overline{\gamma}"] \arrow[urr, "p^n\widehat{\beta}"] & & H \arrow[u, dotted, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

It exists a unique quasi-isogeny $\widehat{\beta} : \Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to H$ in the same equivalent class of β, which fits in the diagram (*i.e.* in the diagram $\widehat{\beta} = \gamma\beta$).

In order to show that the map

$$\begin{aligned} f : \Pi^{-1}(x) &\longrightarrow \mathrm{QIso}(\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}, H) \\ (A/\langle\gamma\ker(p^n\beta)^*\rangle, \lambda', i, \overline{\mu}'; \overline{\gamma}, H, \beta) &\longmapsto \widehat{\beta} \end{aligned}$$

is a bijection, it suffices to construct its inverse.

We define the map

$$\begin{aligned} g : \mathrm{QIso}(\Sigma, H) &\longrightarrow \Pi^{-1}(x) \\ \widehat{\beta} &\longmapsto (A/\langle \ker(p^n\widehat{\beta})^*\rangle, \lambda', i, \overline{\mu}'; \overline{1}, H, \widehat{\beta}), \end{aligned}$$

for some integers $n, d \geqslant 0$ such that $p^n\widehat{\beta}$ and $p^{d-n}\widehat{\beta}^{-1}$ are isogenies.

We check that the definition of $g(\widehat{\beta})$ does not depend on the choice of the integers n, d. It suffices to consider the two cases when we replace n, d by $n, d+1$ and by $n+1, d+1$.

Let us denote by $(p^n\widehat{\beta})^*$ and δ the two isogenies such that $(p^n\widehat{\beta})^*(p^n\widehat{\beta}) = (p^n\widehat{\beta})(p^n\widehat{\beta})^* = p^d$ and $\delta p^n\widehat{\beta} = p^n\widehat{\beta}\delta = p^{d+1}$. Then, we have $p(p^n\widehat{\beta})^*(p^n\widehat{\beta}) = (p^n\widehat{\beta})p(p^n\widehat{\beta})^* = p^{d+1}$, or equivalently $\delta = p(p^n\widehat{\beta})^*$. Thus, the multiplication by p on H gives rise to an isomorphism

$$H/\gamma \ker \delta \simeq H/\gamma \ker(p^n\widehat{\beta})^*,$$

i.e. $p(\gamma \ker \delta) = \gamma \ker(p^n\widehat{\beta})^* \subset H[p^d]$. It follows that

$$(\mathcal{O}_{B_u} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \gamma \ker \delta)^{\perp} = (\mathcal{O}_{B_u} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \gamma \ker(p^n\widehat{\beta})^*)^{\perp} \subset A[(u^c)^d],$$

and therefore $u\langle \gamma \ker \delta\rangle = \langle \gamma \ker(p^n\widehat{\beta})^*\rangle \subset A[p^d]$, *i.e.* the multiplication $v : A \to A$ gives rise to an isomorphism

$$A/\langle \gamma \ker \delta\rangle \simeq A/\langle \gamma \ker(p^n\widehat{\beta})^*\rangle.$$

It is easy to check that, under the above identification, the induced structures on the quotients abelian varieties agree.

Let us suppose now that $p^n\widehat{\beta}$ and $p^{d-n}\widehat{\beta}^{-1}$ are isogenies, then also $p^{n+1}\widehat{\beta}$ and $p^{(d+1)-(n-1)}\widehat{\beta}^{-1}$ are isogenies. Let $(p^n\widehat{\beta})^*$ be the isogeny such that $(p^n\widehat{\beta})^*(p^n\widehat{\beta}) = (p^n\widehat{\beta})(p^n\widehat{\beta})^* = p^d$, then $(p^n\widehat{\beta})^*(p^{n+1}\widehat{\beta}) = (p^{n+1}\widehat{\beta})(p^n\widehat{\beta})^* = p^{d+1}$.

Let us write $\mathcal{K}_i = (\mathcal{O}_{B_u} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \gamma \ker(p^n\widehat{\beta}))^{\perp} \subset A[(u^c)^i]$ for $i = d, d+1$, then

$$\mathcal{K}_d = u^c \mathcal{K}_{d+1},$$

and therefore the multiplication $v^c : A \to A$ gives rise to an isomorphism

$$A/\langle \gamma \ker(p^n\widehat{\beta})^*\rangle_{d+1} \simeq A/\langle \gamma \ker(p^n\widehat{\beta})^*\rangle_d.$$

Again, it is easy to check that, under the above identification, the induced structures on the quotients abelian varieties agree.

The same diagram we used to define the quasi-isogeny $\widehat{\beta}$ shows that the maps f and g are inverse of each others. Moreover, it is a direct consequence of the definitions that the morphisms f, g are continuous, *i.e.* homeomorphisms.

Finally, in order to prove that the bijection f is compatible with the action of the group T, we consider the following diagram, for any $\rho \in T$. (Without loss of generality, we may assume that both $\widehat{\beta}\rho$ and ρ^{-1} are isogenies.)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, "p^{d'}"] & A/\langle\ker(\widehat{\beta})^*\rangle \arrow[r, two heads] & A/\langle\ker(\widehat{\beta}\rho)^*\rangle \arrow[r, two heads] & A \\
H \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\widehat{\beta}^*"'] & H/\ker(\widehat{\beta})^* \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & H/\ker(\widehat{\beta}\rho)^* \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & H \arrow[u, hook] \\
& \Sigma \arrow[r, "\rho^{-1}"'] & \Sigma \arrow[ur, "\widehat{\beta}\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

The commutativity of the diagram implies that the quasi-isogeny associated to the image of $(A/\langle\ker(p^n\beta)^*\rangle, \lambda', i, \overline{\mu}'; \overline{1}, H, \widehat{\beta})$ via ρ maps to the quasi-isogeny $\widehat{\beta}\rho$. $\square$

Let us remark that it follows from the above proposition that $\Pi^{-1}(x)$ is not empty, for any $x \in \overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. In fact, for any $x \in \overline{X}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, the associated Barsotti-Tate group over $\overline{\mathbb{F}}_p$ has Newton polygon equal to $\alpha = \alpha(\Sigma)$, and any two Barsotti-Tate groups over a perfect field of characteristic p with the same Newton polygon are isogenous.

Moreover, under the identification $\Pi^{-1}(x) \simeq \mathrm{QIso}(\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}, H)$, the natural map $\Pi^{-1}(x) \twoheadrightarrow \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ corresponds to the projection

$$\mathrm{QIso}(\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}, H) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Aut}(H)\backslash\, \mathrm{QIso}(\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}, H).$$

4.3.4. Let us also remark that it follows from proposition 3.3 that, for any integer $m > 0$, the projection

$$\mathfrak{q}_{\infty,m} : J(\overline{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow J_m(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

is surjective and the action of $\Gamma = \mathrm{Aut}(\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \subset T$ on $J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ is such that

$$J_m(\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq J(\overline{\mathbb{F}}_p)/\Gamma_m,$$

where $\Gamma_m \subset \Gamma$ is the subgroup of the automorphisms of $\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ which induce the identity on the p^m-torsion subgroup.

4.3.5. Finally, we remark that all the above results remain true is in place of $\overline{\mathbb{F}}_p$ we consider any algebraically closed field k over $\overline{\mathbb{F}}_p$.

4.3.6. The following results are implied by the previous analysis of the fibers of Π.

Proposition 4.5. — *For any positive integers m, n, d, N such that $m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$, the morphism $\pi_N : J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is quasi-finite.*

Proof. — Let x be a point of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, defined over an algebraically closed field k, and denote by H the corresponding Barsotti-Tate group. We claim that $\pi_N^{-1}(x)$ is finite.

It follows from the equality $\Pi = \mathrm{Fr}^{-NB}\,\pi_N$ and the surjectivity of the projection $\mathrm{q}_{\infty,m}$ that

$$\pi_N^{-1}(x) = (\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)(\Pi^{-1}(\mathrm{Fr}^{-NB}\,x) \cap J(k) \times \mathcal{M}^{n,d}(k)),$$

where we can identify

$$\Pi^{-1}(\mathrm{Fr}^{-NB}\,x) \cap J(k) \times \mathcal{M}^{n,d}(k) \simeq \mathrm{QIso}(\Sigma, H^{(p^{-NB})})^{n,d} = \mathrm{QI}^{n,d},$$

the subset of quasi-isogenies β such that $p^n\beta$ and $p^{d-n}\beta^{-1}$ are isogenies. Moreover, under the above identification, the projection $\pi_N^{-1}(x) \to \mathcal{M}^{n,d}(k)$ corresponds to the projection

$$\mathrm{QI}^{n,d} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})\backslash\, \mathrm{QI}^{n,d}.$$

We claim that the quotient $\mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})\backslash\, \mathrm{QI}^{n,d}$ is finite. In fact, if we choose an element $\beta_0 \in \mathrm{QI}$, then under the corresponding isomorphism $T \simeq \mathrm{QI}$ (which is defined by $\rho \mapsto \beta_0\rho$), the subset $\mathrm{QI}^{n,d}$ corresponds to a compact subset K of T and the quotient $\mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})\backslash\, \mathrm{QI}^{n,d}$ to the quotient $\beta_0\,\mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})\beta_0^{-1}\backslash K$.

Since $\beta_0\,\mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})\beta_0^{-1}$ is an open subgroup of T, the quotient

$$\beta_0\,\mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})\beta_0^{-1}\backslash K$$

is indeed finite.

It remains to prove that the image under $\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1$ of the coset $\mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})\beta$ is finite, for any $\beta \in \mathrm{QI}^{n,d}$. Equivalently, it suffices to know that there is an open subgroup R of $\mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})$ such that the image of $R\beta$ is constant. Indeed, the subgroup $\mathrm{Aut}(H^{(p^{-NB})})^{m+d}$ of the automorphisms of $H^{(p^{-NB})}$ which induce the identity over the p^{m+d}-torsion subgroup has such property. □

Proposition 4.6. — *If the positive integers m, n, d, N are sufficiently large ($m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$), the morphism π_N is surjective on geometric points.*

Proof. — Since the scheme $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is of finite type over $\mathbb{F}_p$, it suffices to show that for any geometric point x of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ there exist some integers $m, n, d, N \geqslant 0$ ($m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$) such that the set

$$\pi_N^{-1}(x) = \{(y,t) \in J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \mid \pi_N(y,t) = x\}$$

is not empty. Let us recall that

$$\pi_N^{-1}(x) = (\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)(\Pi^{-1}(\mathrm{Fr}^{-NB}\,x) \cap J(k) \times \mathcal{M}^{n,d}(k)),$$

and that, for all $x' \in \overline{X}^{(\alpha)}(k)$, the fibers $\Pi^{-1}(x')$ are not empty. Since $\mathcal{M}(k) = \varinjlim_{n,d} \mathcal{M}^{n,d}(k)$, it follows that the set $\pi_N^{-1}(x)$ is also not empty. □

4.4. The leaves are closed. — From the fact that the morphisms π_N are quasi finite we can deduce that the leafs are closed subschemes of the Newton polygon strata. (We recall that the following result is originally due to Oort, see [**23**].)

Proposition 4.7. — *For any Barsotti-Tate group $H/\overline{\mathbb{F}}_p$ the corresponding leaf C_H is a closed smooth subscheme of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$.*

Proof. — By proposition 2.7, we already know that the leaves are smooth locally closed subschemes of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. We now show that they are also closed, by showing that all the leaves have the same dimension and that if a given leaf C_H is not closed, then there exists a Barsotti-Tate group $H'/\overline{\mathbb{F}}_p$, not isomorphic to H, such that $\overline{C}_H \supset C_{H'}$ (which implies that $C_{H'} \subset \overline{C}_H - C_H$ since $C_{H'} \cap C_H = \varnothing$). These two facts are clearly in contradiction, therefore we conclude that all the leaves of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ are closed.

Let H be any Barsotti-Tate group defined over $\overline{\mathbb{F}}_p$ with Newton polygon equal to α, and choose an isogeny $\gamma : \Sigma \twoheadrightarrow H$. We also choose a positive integer d such that $p^d\gamma^{-1}$ is an isogeny.

Let N be an integer such that $N \geqslant d/\delta B$ and define $H' = H^{(p^{-NB})}$ and $\beta = \gamma^{(p^{-NB})}$. Then, the pair (H', β) defines a point $t \in \overline{\mathcal{M}}^{0,d}(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

Let $m \geqslant d$ and consider the morphism

$$f = \pi_N \circ (1 \times t) : J_m \longrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p.$$

It follows from the definition that, for every point $y \in J_m$, we have

$$(f^*\mathcal{G})_y = (\mathcal{G}^{(p^{NB})}/\mathcal{K}_\beta)_y \simeq \Sigma^{(p^{NB})}/\ker \beta^{(p^{NB})} \simeq H'^{(p^{NB})} = H.$$

Thus, the morphism f factors through the leaf $C_H \subset \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. Moreover, $f : J_m \to C_H$ is quasi-finite and surjective.

In particular, we deduce that the dimension of C_H is equal to the dimension of J_m, or equivalently to the dimension of the central leaf $C = C_\alpha$.

Let us now suppose that there is a leaf C_H which is not a closed subspace of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. Then, there exists a Barsotti-Tate group $H'/\overline{\mathbb{F}}_p$ (H' not isomorphic to H) such that $C_{H'} \cap \overline{C}_H$ is not empty (*e.g.* for any closed point $x = (A_x, \lambda_x, i_x, \overline{\mu}_x) \in \overline{C}_H - C_H$ the Barsotti-Tate group $H' = \mathcal{G}_x$ satisfies the above assumption). We claim that $C_{H'} \subset \overline{C}_H$.

Let x be a point of $C_{H'} \cap \overline{C}_H$. Then there exists a point $y \in C_H$ which specializes to x, or equivalently (by Serre-Tate's Theorem) there exists a local domain $R/\overline{\mathbb{F}}_p$, with residue field $k(x)$ and fraction field $k(y)$, and a morphism $p_x : \operatorname{Spec} R \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ associated the data of the quadruple $(A_x, \lambda_x, i_x, \overline{\mu}_x)$ and a deformation G/R of the Barsotti-Tate group H', such that $G_{k(y)} \simeq H$.

Then, for any other point $z = (A_z, \lambda_z, i_z, \overline{\mu}_z) \in C_{H'}$, let us choose an isomorphism $\mathcal{G}_z \simeq H'$ and define $p_z : \operatorname{Spec} R \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ to be the morphism associated the data of the quadruple $(A_z, \lambda_z, i_z, \overline{\mu}_z)$ and the Barsotti-Tate group G/R, viewed as a deformation of $\mathcal{G}_z$ via the chosen isomorphism $\mathcal{G}_z \simeq H'$. Then, the generic point η of $\operatorname{Spec} R$ give rise to a point $t \in C_H$ which specialises to z, and thus $C_{H'} \subset \overline{C}_H$. $\square$

It follows from the fact that the central leaf is closed that the morphisms π_N are proper.

Proposition 4.8. — *For any positive integers m, n, d, N such that $m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$, the morphism $\pi_N : J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is proper.*

Proof. — By the Valuative Criterium of Properness (see [**15**], Theorem 4.7, p. 101) it suffices to show that:

• if R is a complete discrete valuation ring over $\overline{\mathbb{F}}_p$, K its fraction field and η : $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$ the morphism corresponding to the natural inclusion of R in K, then for any pair of morphisms (F, f) such that $\pi_N \circ F = f \circ \eta$ there exists a map $\phi : \operatorname{Spec} R \to J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ such that the following diagram commutes.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\eta"'] & J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \arrow[d, "\pi_N"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\phi"] & \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p
\end{tikzcd}$$

A morphism $f : \operatorname{Spec} R \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ corresponds to a quadruple $(A, \lambda, i, \overline{\mu})$ defined over R, and a morphism $F = (F_1, F_2)$ corresponds to a $(6+k)$-tuple $(B, \lambda', i', \overline{\mu}'; \jmath_{m,1}, \ldots, \jmath_{m,k}; H', \beta)$ defined over K. The equality $f \circ \eta = \pi_N \circ F$ implies that the quadruple $(A_K, \lambda_K, i_K, \overline{\mu}_K)$ is equivalent to the quotient of the quadruple $(B, \lambda', i', \overline{\mu}')^{(p^{NB})}$ via the projection $B^{(p^{NB})} \twoheadrightarrow B^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}\rangle$, where $\mathcal{K} = \jmath_N(\ker p^n\beta)^{(p^{NB})}$. Indeed, we may substitute the quadruple associated to f so that its generic fiber is isomorphic to the quotient of the quadruple corresponding to $B^{(p^{NB})}$.

Finally, defining a morphism ϕ such that the above diagram commutes is equivalent to defining an integral model $(\widehat{B}, \widehat{\lambda}', \widehat{\imath}', \widehat{\overline{\mu}}'; \widehat{\jmath}_{m,1}, \ldots, \widehat{\jmath}_{m,k}; \widehat{H}', \widehat{\beta})$ over R of the $(6+k)$-tuple $(B, \lambda', i', \overline{\mu}'; \jmath_{m,1}, \ldots, \jmath_{m,k}; H', \beta)$, with the property that there exists a prime-to-p isogeny between A and $\widehat{B}^{(p^{NB})}/\langle\widehat{\mathcal{K}}\rangle$ (where $\widehat{\mathcal{K}} = \widehat{\jmath}_N(\ker p^n\widehat{\beta})^{(p^{NB})}$), compatible with the given structures on the abelian varieties. In particular, this property implies the existence of an isomorphism between the quotient $\widehat{G}/\widehat{\mathcal{K}}$ of $\widehat{G} = \varepsilon\widehat{B}[u^\infty]$ and $H = \varepsilon A[u^\infty]$ over R.

Let us consider the isogeny

$$\psi : B^{(p^{NB})} \twoheadrightarrow B^{(p^{NB})}/\langle\mathcal{K}\rangle \simeq A_K,$$

then $p^d\psi^{-1} : A_K \to B^{(p^{NB})}$ is also an isogeny, of degree a power of p, with kernel contained in the p^d-torsion subgroup. If we consider the subgroup $\mathcal{F} \subset H[p^d]$ which is the closure of $\ker(p^d\psi^{-1}_{|H}) \subset H[p^d]_K$ in $H[p^d]$, then the quotient $A/\langle\mathcal{F}\rangle$, endowed with the induced structures, has generic fiber equivalent to the quadruple $(B, \lambda', i', \overline{\mu}')^{(p^{NB})}$.

This fact implies the existence of a quadruple $(\widehat{B}, \widehat{\lambda}', \widehat{i}', \overline{\mu}')$, defined over R, whose generic fiber is equivalent to $(B, \lambda', i', \overline{\mu}')$ and such that $(\widehat{B}, \widehat{\lambda}', \widehat{i}', \overline{\mu}')^{(p^{NB})}$ is equivalent to the quadruple associated to $A/\langle\mathcal{F}\rangle$. In fact, the quadruple associated to the abelian variety $A/\langle\mathcal{F}\rangle$ over R defines a morphism $g : \operatorname{Spec} R \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ such that $g \circ \eta = (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1) \circ (\mathrm{q}_m \circ F_1)$. Since the morphism $\mathrm{Fr} \times 1$ on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is finite, there exists a morphism $g' : \operatorname{Spec} R \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ such that $g' \circ \eta = (\mathrm{q}_m \circ F_1)$, or equivalently a quadruple $(\widehat{B}, \widehat{\lambda}', \widehat{i}', \overline{\mu}')$, defined over R, with the above properties.

We remark that, since the abelian variety $\widehat{B}$ is isogenous to A, the Barsotti-Tate group $\widehat{G} = \varepsilon\widehat{B}[u^\infty]$ has constant Newton polygon equal to α and thus the quadruple $(\widehat{B}, \widehat{\lambda}', \widehat{i}', \overline{\mu}')/R$ defines a morphism

$$g_1 : \operatorname{Spec} R \longrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$$

such that $g_1 \circ \eta = \mathrm{q}_m \circ F_1$.

Moreover, since the map $g_1 \circ \eta = \mathrm{q}_m \circ F_1$ factors through the central leaf $C \times \overline{\mathbb{F}}_p \subset \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, which is a closed subscheme of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, we deduce that the morphism g_1 also factors through the $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$.

Finally, from the equality $g_1 \circ \eta = \mathrm{q}_m \circ F_1$, where $\mathrm{q}_m : J_m \to C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is finite, we deduce that the morphism g_1 can be lifted to a morphism

$$\phi_1 : \operatorname{Spec} R \longrightarrow J_m$$

(*i.e.* such that $\mathrm{q}_m \circ \phi_1 = g_1$) with the property that $\phi_1 \circ \eta = F_1$. Equivalently, the quadruple $(\widehat{B}, \widehat{\lambda}', \widehat{i}', \overline{\mu}')/R$ can be extended to a $(4+k)$-tuple

$$(\widehat{B}, \widehat{\lambda}', \widehat{i}', \overline{\mu}'; \widehat{j}_{m,1}, \ldots, \widehat{j}_{m,k})/R$$

whose generic fiber is $(B, \lambda', i', \overline{\mu}'; j_{m,1}, \ldots, j_{m,k})$.

Let us now consider the isogeny

$$\Psi : \widehat{B}^{(p^{NB})} \longrightarrow A,$$

whose generic fiber is ψ, and define $\widehat{\mathcal{K}} = \ker(\Psi_{|\widehat{G}^{(p^{NB})}}) \subset \widehat{G}^{(p^{NB})}[p^d]$.

Then, the isogeny

$$\Sigma_R \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \Sigma_R/\widehat{j}_N^{-1}(\widehat{\mathcal{K}})$$

defines a morphism $\phi_2 : \operatorname{Spec} R \to \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ such that $\phi_2 \circ \eta = F_2$.

Therefore, the morphism $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ makes the above diagram commute. □

Corollary 4.9. — *For any positive integers m, n, d, N such that $m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$, the morphism $\pi_N : J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is finite.*

Proof. — It follows from propositions 4.5 and 4.8, together with the general fact that a morphism is finite if it is proper and quasi finite. □

5. Group action on cohomology

In this section we shall show that the action of S on the systems of covers $J_m \times_{\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ induces an action on the corresponding étale cohomology with compact supports, which extends to an action of T. Moreover, we shall see that via such an action of T it is possible to recover the cohomology with compact supports of $\overline{X}^{(\alpha)}$ from the cohomology with compact supports of the spaces $J_m \times_{\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$. More precisely, we shall prove that for any abelian torsion étale sheaf $\mathcal{L}$ on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (with torsion orders prime to p), there exists a spectral sequence involving the group homology of T and the étale cohomology with compact supports of the covers $J_m \times_{\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$, with coefficients in the pull back of $\mathcal{L}$, which converges to the étale cohomology with compact supports of $\overline{X}^{(\alpha)}$, with coefficient in $\mathcal{L}$.

We are especially grateful to J. de Jong for his help in finding correct statements and proofs of the following results.

5.1. The cohomology of étale sheaves with the action of a group. — In the following, we shall introduce some general results regarding the cohomology with compact supports of an abelian torsion étale sheaf, endowed with the action of an abstract p-adic group which acts trivially on the scheme.

5.1.1. We first recall some notations and results from the theory of representations of a p-adic group over $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, for a prime number $\ell \neq p$ and an integer $r \geqslant 1$ (see **[5]** for a survey of the theory over $\mathbb{C}$).

Let G be a p-adic group (*e.g.* $G = T$). Thus, G is a topological group such that the unit element has a basis of open neighborhoods consisting of open compact subgroups K of G. Further more, there exists an open compact subgroup K_0 of G which is a pro-p-group, *i.e.* for any open subgroup $K' \subset K_0$ the index $[K_0 : K]$ is a power of p. In the following, any time we consider a open compact subgroup of G we always mean a open compact subgroup contained in K_0. (In the case of $G = T$, one can choose $K_0 = \Gamma_1$). Finally, let us choose a left invariant Haar measure μ on G, with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, such that $\mu(K_0) = 1$, *i.e.* for any open compact subgroup $K \subset K_0$, we set $\mu(K) = [K_0 : K]^{-1}$.

We define the Hecke algebra of G with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_r(G)$, to be the space of locally constant compactly supported functions on G with values in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$. Then $\mathcal{H}_r(G)$ has a natural structure of algebra without a unit on $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$. Let $f \in \mathcal{H}_r(G)$, then there exist an open compact subgroup K of G, finitely many elements $g_i \in G$ and constants $c_i \in \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ such that $f = \sum_i c_i \chi_{g_i K}$, where we denote by χ_C the characteristic function of C, for any open compact subset C of G.

Let V be a representation of G, with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$. We say that V is smooth if $V = \varinjlim_K V^K$, where K varies among the open compact subgroups of G and V^K denotes the submodule of the K-invariant elements of V. If V is a smooth representation of G, with coefficient in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, then there is a natural action of $\mathcal{H}_r(G)$ on V. (If we write $f = \sum_i c_i\chi_{g_iK} \in \mathcal{H}_r(G)$ and $v \in V^K$, for some open compact subgroup K of G, then $f \cdot v = \mu(K)\sum_i c_i g_i v$.)

5.1.2. We say that a $\mathcal{H}_r(G)$-module V is non degenerate if the natural map

$$\mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} V \longrightarrow V$$

is an epimorphism. Any G-smooth representation V is non degenerate as $\mathcal{H}_r(G)$-module.

In general, for any $\mathcal{H}_r(G)$-module V, the above morphism gives rise to an isomorphism

$$\mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} V \xrightarrow{\sim} \varinjlim_K e_K V,$$

where K varies among the open compact subgroups of G and $e_K = \mu(K)^{-1}\chi_K$. In fact, for any $f \in \mathcal{H}_r(G)$ there exists an open compact subgroup K such that $f = fe_K = e_K f$, which implies that the image of $\mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} V$ in V is exactly $\varinjlim_K e_K \cdot V$. Moreover, suppose $\sum_i f_i \otimes v_i$ is an element in the kernel of the map, and choose K an open compact subgroup such that $f_i = f_i e_K = e_K f_i$ for all i, then $\sum_i f_i \otimes v_i = e_K \otimes \sum_i f_i \cdot v_i$. Saying that the image is zero is equivalent to saying that $(\sum_i f_i \cdot v_i) = 0$, which implies that $e_K \otimes \sum_i f_i \cdot v_i = 0$.

It follows, in particular, that $\mathcal{H}_r(G)$ is a flat $\mathcal{H}_r(G)$-module (for all K, the functors $V \mapsto e_K V$ are exact and the direct limit functor is also exact).

5.1.3. For any smooth representation V of G, we denote by V_G the module of the coinvariants of V, then

$$V_G \simeq \Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} V,$$

where $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ is the trivial representation of G (thus the action of $f = \sum_i c_i\chi_{g_iK} \in \mathcal{H}_r(G)$ on $1 \in \Lambda$ is defined as $f \cdot 1 = \mu(K)(\sum_i c_i)$). In fact, let us consider the natural morphism $V \twoheadrightarrow V_G$, $v \mapsto [v]$. For any $f = \sum_i c_i\chi_{g_iK} \in \mathcal{H}_r(G)$ and $v \in V^K$, the equality $fv = \mu(K)\sum_i c_i g_i v$ implies that $[fv] = \mu(K)(\sum_i c_i)[v]$. We deduce that the morphism $V \twoheadrightarrow V_G$ gives rise to a morphism $\Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} V \to V_G$, which is obviously surjective. Indeed, it is an isomorphism. Let $1 \otimes v \in \Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} V$ be an element in the kernel of the above map, then there exist finitely many $g_i \in G$ and $v_i \in V$ such that $v = \sum_i (g_i - 1)v_i$. Let K be an open compact subgroup of G such that $v_i \in V^K$, for all i. Then $\mu(K)v = \sum_i(\chi_{g_iK} - \chi_K)v_i$, and thus $1 \otimes \mu(K)v = 0$. Since $\mu(K) \in (\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^\times$, it follows that $1 \otimes v = 0$.

5.1.4. Let W be a $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module, we denote by $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G(W) = C_c^\infty(G, W)$ the space of locally constant functions $G \to W$ with compact supports. Then,

$$\text{c-Ind}_{\{1\}}^G(W) \simeq \mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} W.$$

(The natural morphism of G-representations $\mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} W \to \text{c-Ind}_{\{1\}}^G(W)$, which sends any element $f \otimes w$ to the map $g \mapsto f(g^{-1})w$, is indeed an isomorphism.)

It follows that $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G$ is an exact functor. (It is clearly left exact and, from the above equality, it is also right exact.)

We deduce from the above isomorphisms that, for any $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module W, we have $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G(W)_G \simeq W$. Moreover, the G-representation $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G(W)$ is acyclic for the coinvariant functor. In fact, let us consider the two functors $W \mapsto \text{c-Ind}_{\{1\}}^G(W)$ and $V \mapsto V_G$. Since $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G()$ is exact, in order to compute the derived functors of $()_G \circ \text{c-Ind}_{\{1\}}^G()$ as the composition of the derived functors of $()_G$ and $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G()$, it is enough to check that, for any free $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module L, $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G(L)$ is a flat $\mathcal{H}_r(G)$-module (and indeed $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G(L) \simeq \mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} L$ is flat, since $\mathcal{H}_r(G)$ is a flat $\mathcal{H}_r(G)$-module). Since $()_G \circ \text{c-Ind}_{\{1\}}^G()$ is simply the identity on the category of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-modules, it follows that all the higher derived functors of $()_G$ vanish on the image of $\text{c-Ind}_{\{1\}}^G()$.

5.1.5. We denote by $G - \mathfrak{Ab}(X)$ the category of abelian ℓ^r-torsion étale sheaves over X, together with an action of G which is trivial on X.

Definition 5.1. — We say that a sheaf $\mathcal{F} \in G - \mathfrak{Ab}(X)$ is smooth if

$$\mathcal{F} = \varinjlim_K \mathcal{F}^K,$$

where K varies among the open compact subgroups of G and $\mathcal{F}^K \in G - \mathfrak{Ab}(X)$ is the subsheaf of the K-invariants section of $\mathcal{F}$.

We denote by $G - \mathfrak{SmAb}(X)$ the full subcategory of $G - \mathfrak{Ab}(X)$ whose objects are the smooth objects of $G - \mathfrak{Ab}(X)$.

5.1.6. We write $G - \mathfrak{Ab}$ for the category of abelian ℓ^r-torsion groups, together with an action of G, and $G - \mathfrak{SmAb}$ for the full subcategory of $G - \mathfrak{Ab}$ whose objects are smooth for the action of G.

Then, the functors of étale cohomology with compact supports on X on $\mathfrak{Ab}(X)$ give rise to some functors

$$H_c^i(X, -) : G - \mathfrak{SmAb}(X) \longrightarrow G - \mathfrak{SmAb}.$$

In fact, for any sheaf $\mathcal{F} \in G - \mathfrak{SmAb}(X)$, we have

$$H_c^i(X, \mathcal{F}) = H_c^i(X, \varinjlim_K \mathcal{F}^K) = \varinjlim_K H_c^i(X, \mathcal{F}^K),$$

and the action of K on $H_c^i(X, \mathcal{F}^K)$ is trivial, for all open compact subgroups K.

5.1.7. Let us denote by $\mathcal{H}_r(G) - \mathfrak{Mod}(X)$ the category of sheaf of $\mathcal{H}_r(G)$-modules over X. Then, there is a natural inclusion

$$G - \mathfrak{SmAb}(X) \hookrightarrow \mathcal{H}_r(G) - \mathfrak{Mod}(X).$$

In fact, let $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in G - \mathfrak{SmAb}(X)$ and $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. For any étale open U of X, $\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)$ are two smooth representations of G and $\phi(U)$ a morphism compatible with the action of G, thus $\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)$ are also two $\mathcal{H}_r(G)$-modules and the morphism $\phi(U)$ a morphism of $\mathcal{H}_r(G)$-modules.

5.1.8. We remark that, if $\mathcal{F}$ is a smooth G-sheaf, then the sheaf $C(\mathcal{F})$, which is defined as

$$C(\mathcal{F})(U) = \{f : U \longrightarrow \textstyle\prod_{x\in X} \mathcal{F}_x \mid f(x) \in \mathcal{F}_x \ \forall x\},$$

for any étale open U of X, is not a smooth sheaf, but it is naturally an object of $\mathcal{H}_r(G) - \mathfrak{Mod}(X)$. For any open compact subgroup K of G, it follows from the equality $e_K\mathcal{F}_x = (e_K\mathcal{F})_x$ that $e_K C(\mathcal{F}) = C(e_K\mathcal{F})$, and indeed $C(\mathcal{F}) \neq \varinjlim_K C(e_K\mathcal{F})$.

5.1.9. Let us consider the derived functor

$$\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} () : D^-(X, \mathcal{H}_r(G) - \mathfrak{Mod}) \longrightarrow D^-(X, \mathcal{H}_r(G) - \mathfrak{Mod}).$$

If $\Lambda_\bullet$ is a flat resolution of Λ, then $\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{K}_\bullet \simeq \Lambda_\bullet \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{K}_\bullet$ (see [1], proposition 4.1.7, p. 73). We remark that it is possible to choose a flat resolution of Λ such that all the modules Λ_i are of the form $L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)$, for some free $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module L. Let us also remark that, for any $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_r(G) - \mathfrak{Mod}$ and $x \in X$, we have

$$(\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{F})_x = \Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{F}_x.$$

Theorem 5.2. — *Let $\mathcal{K}_\bullet \in D^-(X, \mathcal{H}_r(G) - \mathfrak{Mod})$, then*

$$\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} R^\bullet f_!(\mathcal{K}_\bullet) \simeq R^\bullet f_!(\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{K}_\bullet)$$

Proof. — In [7] (Section 4.9.1, pp. 95-96), this statement is proved under some conditions on the ground algebra which are not satisfied by $\mathcal{H}_r(G)$. Nevertheless the same argument works.

Deligne's first remark is that we can assume without loss of generality that f is proper. In fact, for any f, we have $Rf_! = R\overline{f}_* j_!$, for some open embedding j and some proper map $\overline{f}$. Since taking the tensor product commutes with the extension by zero, it suffices to prove the statement for $\overline{f}$.

Given any complex of sheaves of $\mathcal{H}_r(G)$-modules $\mathcal{K}_\bullet$, we can replace $\mathcal{K}_\bullet$ by the complex of its truncated Godement resolutions, which has the property of being acyclic for the functor Rf_*.

Let L be a free $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module and consider the $\mathcal{H}_r(G)$-module $L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)$. Let us first assume L of finite type. Then

$$L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} Rf_*(K_.) \simeq Rf_*(L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} K_.)$$

In fact, for any $\mathcal{H}_r(G)$-module V, we have

$$L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} V \simeq L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \varinjlim_K e_K V \simeq \varinjlim_K e_K(L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} V).$$

Since L is free of finite type over $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ and the functor Rf_* commutes with direct limits and finite direct sums, it suffices to check that $Rf_*(e_K\mathcal{K}_\bullet) \simeq e_K Rf_*(\mathcal{K}_\bullet)$. Such an equality follows from the observations of section 5.1.8 (which apply since the sheaves of the complex $\mathcal{K}_\bullet$ are all of the form $C(\mathcal{F})$, for some sheaf $\mathcal{F}$ of $\mathcal{H}_r(G)$-modules). In particular

$$Rf_*(L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} K_.) \simeq f_*(L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G) \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} K_.).$$

By passing to the direct limit, one shows that the same holds for any free $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module L.

We now consider a flat resolution $\Lambda_\bullet$ of the $\mathcal{H}_r(G)$-module Λ, such that all the modules Λ_i are of the form $L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)$, for some free $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module L. Then

$$\begin{aligned} R^\bullet f_*(\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{K}_\bullet) &\simeq R^\bullet f_*(\Lambda_\bullet \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{K}_\bullet) \simeq f_*(\Lambda_\bullet \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{K}_\bullet) \\ &\simeq \Lambda_\bullet \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} f_*(\mathcal{K}_\bullet) \simeq \Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} R^\bullet f_*(\mathcal{K}_\bullet). \end{aligned} \quad \square$$

5.1.10. We are interested in applying the above theorem to the following case.

Definition 5.3. — We say that an object $\mathcal{F} \in G - \mathfrak{SmAb}(X)$ has property $\mathcal{P}$ if

$$\mathcal{F}_x \simeq \text{c-Ind}^G_{\{1\}}(L_x),$$

for any geometric point x in X and some abelian ℓ^r-torsion group L_x.

Let $\mathcal{F}$ be an object in $G - \mathfrak{SmAb}(X)$, which has property $\mathcal{P}$, and consider the complex $\mathcal{H}_\bullet(G, \mathcal{F}) := \Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{F}$. Then, it follows from the acyclicity of the stalks of $\mathcal{F}$ that

$$\mathcal{H}_i(G,\mathcal{F}) = \begin{cases} \Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{F} & \text{for } i = 0, \\ 0 & \text{for } i \neq 0. \end{cases}$$

Corollary 5.4. — *Let $\mathcal{F}$ be an object in $G - \mathfrak{SmAb}(X)$ which has property $\mathcal{P}$. Then there is a spectral sequence*

$$E_2^{p,q} = H_p(G, H^q_c(X,\mathcal{F})) \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{F}_G).$$

Proof. — By applying theorem 5.2 to the sheaf $\mathcal{F}$, we obtain a quasi-isomorphism of complexes

$$\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} R^\bullet f_!(\mathcal{F}) \simeq R^\bullet f_!(\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{F}) \simeq R^\bullet f_!(\Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{F}).$$

On one hand, the homology of the complex $R^\bullet f_!(\Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} \mathcal{F})$ is simply $H^n_c(X, \mathcal{F}_G)$. On the other hand, the homology of $\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} R^\bullet f_!(\mathcal{F})$ is computed by the two spectral sequences associated to the double complex. In particular, the spectral sequence $E_2^{p,q} = H_p(G, H^q_c(X,\mathcal{F}))$ abuts to it. $\square$

5.2. The étale sheaf $\mathcal{F}$. — We now return to the study of the Newton polygon stratum $\overline{X}^{(\alpha)}$, for some polygon α. Let $\mathcal{L}$ be an abelian torsion étale sheaf over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, with torsion orders prime to p. Let m, n, d ($m \geqslant d$) be some positive integers. In section 4.2, for any integer $N \geqslant d/\delta B$, we constructed a morphism $\pi_N : J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. We now consider the restrictions $\dot{\pi}_N$ of the morphisms π_N to the open $J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{U}^{n,d}$ in $J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$. (The need for substituting the morphism π_N with its restriction on the open $J_m \times_{\operatorname{Spec} k} \overline{U}^{n,d}$ is purely technical. It corresponds to the fact that the description of $\overline{\mathcal{M}}$ as the union of an increasing sequence of opens, namely the $\overline{U}^{n,d}$, is the appropriate one to be considered when computing the cohomology with compact supports.)

For each m, n, d ($m \geqslant d$), we define the abelian étale sheaf over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$

$$\mathcal{F}_m^{nd} = (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L}),$$

for some index N sufficiently large (*e.g.* any $N \geqslant d/\delta B$). We shall see that the definition of $\mathcal{F}_m^{n,d}$ does not depend on N. We shall also prove that the sheaves $\mathcal{F}_m^{n,d}$ form a direct system and thus, to the abelian torsion étale sheaf $\mathcal{L}$ over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, we may associate the abelian étale sheaf over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$:

$$\mathcal{F} = \varinjlim_{m,n,d} \mathcal{F}_m^{nd},$$

together with a natural morphism $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$.

We shall show that the action of S on the covering spaces $J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ induces an action on the sheaf $\mathcal{F}$ (trivial on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$), which extends to a smooth action of the group $T \supset S$ with the property of leaving invariant the morphism $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$. Moreover, we shall prove that, if the sheaf $\mathcal{L}$ is endowed with an action of $W_{\mathbb{Q}_p}$, which is compatible with the action of Frobenius $1 \times \sigma$ on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, then the action of $\mathrm{Frob}^{\mathbb{N}}$ on the $J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ enable us to define an action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ on the sheaf $\mathcal{F}$, also compatible with the action of Frobenius $1 \times \sigma$ on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, which commutes with the morphism $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$ and with the action of T on $\mathcal{F}$.

Finally, for any point x in $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, we shall prove that

$$\mathcal{F}_x = C_c^\infty(\Pi^{-1}(x), \mathcal{L}_x) \simeq \text{c-Ind}_{\{1\}}^G(\mathcal{L}_x).$$

In particular, for all $\mathcal{L}$, the associated sheaf $\mathcal{F} \in T - \mathfrak{SmAb}(\overline{X}^{(\alpha)})$ has property $\mathcal{P}$ (see definition 5.3).

5.2.1. We start by showing that it is possible to define a sheaf $\mathcal{F}$ as as above.

Proposition 5.5. — *Let $\mathcal{L}$ be an abelian sheaf over $\overline{X}^{(\alpha)}$, with torsion orders relatively prime to p. For any m, n, d ($m \geqslant d$), we define*

$$\mathcal{F}_m^{nd} = (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L}),$$

for some integer $N \geqslant d/\delta B$.

(1) *The sheaves $\mathcal{F}_m^{n,d}$ are independent on the integers N.*

(2) *The sheaves $\mathcal{F}_m^{n,d}$ form a direct system under the morphisms*

$$(\mathrm{q}_{m',m} \times 1)^* : \mathcal{F}_m^{n,d} \longrightarrow \mathcal{F}_{m'}^{n,d} \quad \textit{and} \quad (1 \times i_{n',d'}^{n,d})_! : \mathcal{F}_m^{n,d} \longrightarrow \mathcal{F}_m^{n',d'},$$

for all integers $m' \geqslant m, d' - d \geqslant (n'-n)h \geqslant 0$.

(3) *There exists a natural morphism $\varsigma_! : \mathcal{F} \to \mathcal{L}$.*

Proof

Part (1). — Let m, n, d be some positive integers such that $m \geqslant d$. For any integers $N' \geqslant N \geqslant d/\delta B$, we have an equality of morphisms on $J_m \times \overline{U}^{n,d}$:

$$\pi_{N'} = (\mathrm{Fr}^{(N'-N)B} \times 1) \circ \pi_N.$$

Thus, $(\pi_{N'})_! = (\mathrm{Fr}^{(N'-N)B} \times 1)_!(\pi_N)_!$ and $(\pi_{N'})^* = (\pi_N)^*(\mathrm{Fr}^{(N'-N)B} \times 1)^*$.

In particular, it follows that

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m^{n,d} &= (\mathrm{Fr}^{N'B} \times 1)^*(\dot{\pi}_{N'})_!(\dot{\pi}_{N'})^*(\mathrm{Fr}^{N'B} \times 1)_!(\mathcal{L}) \\
&= (\mathrm{Fr}^{N'B} \times 1)^*(\mathrm{Fr}^{(N'-N)B} \times 1)_!(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{(N'-N)B} \times 1)^*(\mathrm{Fr}^{N'B} \times 1)_!(\mathcal{L}) \\
&\simeq (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

(since Fr is a purely inseparable finite morphism, there are canonical isomorphisms $1 \simeq \mathrm{Fr}^* \, Fr_! \simeq Fr_! \, \mathrm{Fr}^*$).

Part (2). — From the equality $\dot{\pi}_N \circ \mathrm{q}_{m',m} = \dot{\pi}_N$ (for all $m' \geqslant m$) and the existence of a canonical morphism $q^* : \mathcal{D} \to q_! q^* \mathcal{D}$, for any étale sheaf $\mathcal{D}$ and any finite morphism q, we deduce the existence of a morphism

$$(\mathrm{q}_{m',m} \times 1)^* : \mathcal{F}_m^{n,d} \longrightarrow \mathcal{F}_{m'}^{n,d}.$$

In fact, from the equality $\dot{\pi}_N \circ (\mathrm{q}_{m',m} \times 1) = \dot{\pi}_N$ we deduce that $(\dot{\pi}_N)_! \circ (\mathrm{q}_{m',m})_! = (\dot{\pi}_{m'}^{n,d})_!$ and $(\mathrm{q}_{m',m})^* \circ (\dot{\pi}_N)^* = (\dot{\pi}_{m'}^{n,d})^*$. Thus, there is a morphism

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m^{nd} &= (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L}) \\
&\longrightarrow (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\mathrm{q}_{m',m})_!(\mathrm{q}_{m',m})^*(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L}) \\
&= (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L}) = \mathcal{F}_{m'}^{nd}.
\end{aligned}$$

Analogously, from the equality $\dot{\pi}_m^{n',d'} \circ (1 \times i_{n',d'}^{n,d}) = \dot{\pi}_N$ (for any $N \geqslant d'/\delta B$) and the existence of a canonical morphism $i_! : i_! i^* \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, for any étale sheaf $\mathcal{D}$ and any open embedding i, we deduce the existence of a morphism

$$(1 \times i_{n',d'}^{n,d})_! : \mathcal{F}_m^{n,d} \longrightarrow \mathcal{F}_m^{n',d'}.$$

It is straight forward that these morphism respect the required commutativity rules and thus that the sheaves $\mathcal{F}_m^{n,d}$ form a direct limit.

Part (3). — For any positive integers m, n, d, N $(m, N \geqslant d)$, there is a natural morphism

$$\begin{aligned}(\dot{\pi}_N)_! : \mathcal{F}_m^{nd} = (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L}) \\ \longrightarrow (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{L}.\end{aligned}$$

It is clear that the morphism $(\dot{\pi}_N)_!$ does not dependent on the integer N. We define $\varsigma_! = \frac{1}{[J_m:J_1]}(\dot{\pi}_N)_!$. Then, it is straight forward that the morphisms $\varsigma_!$ on $\mathcal{F}_m^{n,d}$ commutes with the morphisms $(\mathrm{q}_{m',m} \times 1)^*$ and $(1 \times i_{n',d'}^{n,d})_!$, and thus give rise to a morphism $\varsigma_! : \mathcal{F} \to \mathcal{L}$. □

It follows from the above proposition that, to any abelian torsion sheaf $\mathcal{L}$ over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, with torsion orders prime to p, we can associate a sheaf

$$\mathcal{F} = \varinjlim_{m,n,d} \mathcal{F}_m^{nd},$$

together with a morphism $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$.

Proposition 5.6. — *Let $\mathcal{L}$ be an abelian étale torsion sheaf over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (with torsion order prime to p), and consider the associated étale sheaf $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$.*

The action of the monoid S on the systems of covering spaces $J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ induces an action of S on the étale sheaf $\mathcal{F}$, which extends to a smooth action of the group T on $\mathcal{F}$.

The morphism $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$ is invariant under the action of T.

Proof. — Let $\rho \in S$ and write $e = e(\rho)$ and $f = f(\rho)$, then, for all $m \geqslant d + 2e - f$ and $N \geqslant (d + e - f)/\delta B$, the morphism $\rho \times \rho : J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \to J_{m-e} \times \overline{\mathcal{M}}^{n+e,d+e-f}$ restricts to a morphism

$$\dot{\rho} : J_m \times \overline{U}^{n,d} \longrightarrow J_{m-e} \times \overline{U}^{n+e,d+e-f}$$

such that $\dot{\pi}_N \circ \dot{\rho} = \dot{\pi}_N$, since $\pi_N(\rho \times \rho) = \pi_N$.

Let us also remind that on the Rapoport-Zink space $\overline{\mathcal{M}}$ the action of ρ is invertible. In particular, there are morphisms

$$\dot{\rho}^{-1} : \overline{U}^{n',d'} \longrightarrow U^{n'-f,d'+e-f}$$

such that $\dot{\rho}^{-1} \circ \dot{\rho} = i$ and $\dot{\rho} \circ \dot{\rho}^{-1} = i$.

We consider the following diagram (where we right $s = e - f$).

$$\begin{tikzcd}
J_m \times \overline{U}^{n+f,d-s} \arrow[r, "\dot\rho \times 1"] \arrow[d, "1 \times \dot\rho^{-1}"] \arrow[dd, bend right=60, "1 \times i"'] & J_{m-e} \times \overline{U}^{n+f,d-s} \arrow[d, "1 \times \dot\rho^{-1}"'] \arrow[dd, bend left=60, "1 \times i"] \\
J_m \times \overline{U}^{n,d} \arrow[r, "\dot\rho \times 1"] \arrow[d, "1 \times \dot\rho"] \arrow[dr, "\dot\rho \times \dot\rho"] \arrow[dd, bend right=60, "\dot\pi_N"'] & J_{m-e} \times \overline{U}^{n,d} \arrow[d, "1 \times \dot\rho"] \\
J_m \times \overline{U}^{n+e,d+s} \arrow[r, "\dot\rho \times 1"] & J_{m-e} \times \overline{U}^{n+e,d+s} \arrow[d, "\dot\pi_N"] \\
\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p \arrow[r, equal] & \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p
\end{tikzcd}$$

We define the action of ρ on the direct system of sheaves $\mathcal{F}_m^{n,d}$

$$\rho = (1 \times \dot\rho^{-1})_! \circ (\dot\rho \times 1)^* : \mathcal{F}_{m-e}^{n+f,d-(e-f)} \longrightarrow \mathcal{F}_m^{n,d}$$

as follows (where we write $f = \mathrm{Fr}^{NB} \times 1$ on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{m-e}^{n+f,d-(e-f)} &= (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^* (\dot\pi_N)_! (\dot\pi_N)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (\mathcal{L}) \\
&\longrightarrow f^* (\dot\pi_N)_! (\dot\rho \times 1)_! (\dot\rho \times 1)^* (\dot\pi_N)^* f_! (\mathcal{L}) \\
&= f^* (\dot\pi_N)_! (1 \times i)_! (\dot\rho \times 1)_! (\dot\rho \times 1)^* (1 \times i)^* (\dot\pi_N)^* f_! (\mathcal{L}) \\
&= f^* (\dot\pi_N)_! (\dot\rho \times 1)_! (1 \times i)_! (1 \times i)^* (\dot\rho \times 1)^* (\dot\pi_N)^* f_! (\mathcal{L}) \\
= f^* (\dot\pi_N)_! (\dot\rho \times 1)_! (1 \times \dot\rho)_! & (1 \times \dot\rho^{-1})_! (1 \times \dot\rho^{-1})^* (1 \times \dot\rho^{-1})^* (\dot\rho \times 1)^* (\dot\pi_N)^* f_! (\mathcal{L}) \\
&\longrightarrow f^* (\dot\pi_N)_! (\dot\rho \times 1)_! (1 \times \dot\rho)_! (1 \times \dot\rho)^* (\dot\rho \times 1)^* (\dot\pi_N)^* f_! (\mathcal{L}) \\
&= f^* (\dot\pi_N)_! (\dot\rho \times \dot\rho)_! (\dot\rho \times \dot\rho)^* (\dot\pi_N)^* f_! (\mathcal{L}) \\
&= f^* (\dot\pi_N)_! (\dot\pi_N)^* f_! (\mathcal{L}) = \mathcal{F}_m^{n,d}.
\end{aligned}$$

It follows from the definition that, for all $\rho \in S$, the morphisms ρ commute with the structure morphisms of the direct limit $(q \times 1)^*$ and $(1 \times i)_!$, and also that $\dot\pi_{N\,!} \circ \rho = \dot\pi_{N\,!}$. Therefore, the above construction gives rise to an action of S on $\mathcal{F}$, under which the morphism $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$ is invariant.

Since $T = \langle S, p, \mathrm{fr}^B \rangle$, the action of S on $\mathcal{F}$ extends to an action of T if the elements $p^{-1}, \mathrm{fr}^{-B} \in S$ act invertibly on $\mathcal{F}$. The element $p^{-1} \in S$ acts isomorphically on the space $\overline{\mathcal{M}}$ and on J_m via the morphism $v(v^c)^{-1} \circ \mathrm{q}_{m',m}$, for some element $v \in E^\times$ such that $\mathrm{val}_u(v) = 1$, $\mathrm{val}_{u^c}(v) = 0$ and $v \equiv 1 \mod (u^c)^m$. Thus, the induced action on the sheaves $\mathcal{F}_m^{n,d}$ becomes invertible once one passes to the direct limit $\mathcal{F}$. On the other hand, the element $\mathrm{fr}^{-B} \in S$ also acts isomorphically on the space $\overline{\mathcal{M}}$ and on

J_m we have $\mathrm{fr}^{-B} = (v^c)^{-B} \circ \mathrm{q}_{m,m-a} \circ \mathrm{frob}^{-B} \circ \mathrm{Fr}^B$, where Fr is the relative Frobenius morphism on the Igusa varieties over $\overline{\mathbb{F}}_p$ (a purely inseparable finite morphism). We can therefore deduce that the induced action of fr^{-B} on $\mathcal{F}$ is also invertible.

Finally, in order to prove that the action of T on $\mathcal{F}$ is smooth, it suffices to check that for any m, n, d ($m \geqslant d$) the action of Γ^m on the sheaf $\mathcal{F}_m^{n,d}$ is trivial, which follows from the fact that the action of Γ^m on the space $J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ is trivial (see section 2.5.12 and proposition 3.3). □

5.2.2. We are interested in the case when the sheaf $\mathcal{L}$ is naturally endowed with an action of the Weil group $W_{\mathbb{Q}_p}$, which is compatible with the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, *e.g.* $\mathcal{L}$ the pullback over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ of a sheaf over $\overline{X}^{(\alpha)}$ or some vanishing cycle sheaf.

Definition 5.7. — We say that a sheaf $\mathcal{L}$ on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ has an action of $W_{\mathbb{Q}_p}$, compatible with the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ if, for all $\tau \in W_{\mathbb{Q}_p}$, there are some isomorphisms $(1 \times \overline{\tau})^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$, where $\overline{\tau}$ denotes the image of τ in $\sigma^{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$, such that $\tau \circ \tau' = \tau' \tau$.

Proposition 5.8. — *Maintaining the notations of proposition 5.6. Let us further assume that the étale sheaf $\mathcal{L}$ is endowed with an action of the Weil group $W_{\mathbb{Q}_p}$.*

Then, there is an induced action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ on the étale sheaf $\mathcal{F}$, which commutes with the action of T on $\mathcal{F}$ and with the morphism $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$.

Proof. — Let us consider the action of Frob on the covering spaces $J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$. From the equality $\pi_N \circ (\mathrm{Frob} \times \mathrm{Frob}) = (1 \times \sigma) \circ \pi_N$, we deduce that

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^* (\dot{\pi}_N)_! (\mathrm{Frob} \times \mathrm{Frob})_! (\mathrm{Frob} \times \mathrm{Frob})^* (\dot{\pi}_N)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (\mathcal{L}) \\
&\qquad = (1 \times \sigma)_! (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^* (\dot{\pi}_N)_! (\dot{\pi}_N)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (1 \times \sigma)^* (\mathcal{L}).
\end{aligned}
$$

Let us also recall that the action of Frob on the Rapoport-Zink space is invertible. In particular, we have

$$\mathrm{Frob}^{-1} : U^{n',d'} \longrightarrow U^{n',d'+1},$$

where $\mathrm{Frob}^{-1} \circ \mathrm{Frob} = i$ and $\mathrm{Frob} \circ \mathrm{Frob}^{-1} = i$.

Let $\tau \in W_{\mathbb{Q}_p}$ and assume for the moment that $\overline{\tau} = \sigma^r$, for some $r \geqslant 0$. We define the action of τ on the system of sheaves $\mathcal{F}_m^{n,d}$ as

$$
\begin{aligned}
&\tau \circ (1 \times \mathrm{Frob}^{-r})_! (\mathrm{Frob}^r \times 1)^* : (1 \times \sigma^r)^* \mathcal{F}_{m-r}^{n,d-r} \\
&\longrightarrow (1 \times \sigma^r)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^* (\dot{\pi}_N)_! (\mathrm{Frob}^r \times \mathrm{Frob}^r)_! (\mathrm{Frob}^r \times \mathrm{Frob}^r)^* (\dot{\pi}_N)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (\mathcal{L}) \\
&\qquad = (1 \times \sigma^r)^* (1 \times \sigma^r)_! (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^* (\dot{\pi}_N)_! (\dot{\pi}_N)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (1 \times \sigma^r)^* (\mathcal{L}) \\
&\qquad \simeq (1 \times \sigma^r)^* (1 \times \sigma^r)_! \mathcal{F}_m^{n,d} \simeq \mathcal{F}_m^{n,d}.
\end{aligned}
$$

Thus, the action of τ on $\mathcal{F}_m^{n,d}$ satisfies the equality

$$\varsigma_! \circ \tau = \tau \circ \varsigma_! : (1 \times \overline{\tau})^* \mathcal{F}_m^{n,d} \longrightarrow \mathcal{L}.$$

The compatibility of the action of Frob with the morphisms $\mathrm{q}_{m',m} \times 1$ and $1 \times i^{n,d}_{n',d'}$ and with the action of S on the spaces $J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ implies that the above action of τ on the étale sheaves $\mathcal{F}_m^{n,d}$ gives rise to an action of τ on the direct limit $\mathcal{F}$, $(1 \times \overline{\tau})^* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, which commutes with the action of T on $\mathcal{F}$ and with the projection $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$.

Moreover, since the action of Frob on the Rapoport-Zink space $\mathcal{M}$ is invertible and on the Igusa varieties J_m is defined by the morphisms $\mathrm{Frob} = \mathrm{q}_{m,m-1} \circ \mathrm{Fr}$ (where Fr is a purely inseparable morphism), we deduce that the action of τ on $\mathcal{F}$ is invertible, and thus we can extend the above action to an action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ on $\mathcal{F}$. □

5.2.3. We now focus our attention of the stalk $\mathcal{F}_x$ of the sheaf $\mathcal{F}$, at a point x of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. It follows from the fact that the morphisms π_N are finite that

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x &= \varinjlim_{m,n,d} \left((\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^* (\dot{\pi}_N)_! (\dot{\pi}_N)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (\mathcal{L})\right)_x \\
&= \varinjlim_{m,n,d} \left((\dot{\pi}_N)_! (\dot{\pi}_N)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (\mathcal{L})\right)_{\mathrm{Fr}^{NB}(x)} \\
&= \varinjlim_{m,n,d} \prod_{\dot{\pi}_N(y)\,\mathrm{Fr}^{NB}(x)} \left((\dot{\pi}_N)^* (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (\mathcal{L})\right)_y \\
&= \varinjlim_{m,n,d} \prod_{\dot{\pi}_N(y)=\mathrm{Fr}^{NB}(x)} \left((\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (\mathcal{L})\right)_{\dot{\pi}_N(y)} \\
&= \varinjlim_{m,n,d} \prod_{\dot{\pi}_N(y)=\mathrm{Fr}^{NB}(x)} \left((\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_! (\mathcal{L})\right)_{\mathrm{Fr}^{NB}(x)} \\
&= \varinjlim_{m,n,d} \prod_{\dot{\pi}_N(y)=\mathrm{Fr}^{NB}(x)} (\mathcal{L})_x.
\end{aligned}$$

Under the above identification, the morphisms

$$(\mathrm{q}_{m',m} \times 1)^* : (\mathcal{F}_m^{n,d})_x \longrightarrow (\mathcal{F}_{m'}^{n,d})_x$$

is defined as

$$(\mathrm{q}_{m',m} \times 1)^* (s)_y = s_{(\mathrm{q}_{m',m} \times 1)(y)},$$

for all $y \in J_{m'} \times \overline{U}^{n,d}$ and the morphisms

$$(1 \times i^{n,d}_{n',d'})_! : (\mathcal{F}_m^{n,d})_x \longrightarrow (\mathcal{F}_m^{n',d'})_x$$

as

$$(1 \times i^{n,d}_{n',d'})_! (s)_y = \begin{cases} s_y & \text{if } y \in J_m \times \overline{U}^{n,d}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for all $y \in J_m \times \overline{U}^{n',d'}$.

The projection $\varsigma_! : (\mathcal{F}_m^{n,d})_x \to \mathcal{L}_x$ is defined as

$$\varsigma_!(s) = \frac{1}{[J_m : J_1]} \sum_{\dot{\pi}_N(y)=\mathrm{Fr}^{NB}(x)} s(y),$$

for $y \in J_m \times \overline{U}^{n,d}$.

Finally, the action of T on $\mathcal{F}_x$ is defined as

$$\rho(s)_y = s_{\rho(y)},$$

for all $\rho \in T$, $s \in \mathcal{F}_x$, $y \in J_m \times \overline{U}^{n,d}$ and $m, n, d \gg 0$.

Proposition 5.9. — *Let $\mathcal{L}$ be an abelian torsion étale sheaf on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, with torsion orders prime to p, and x a geometric point of $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. We denote by $\mathcal{F}$ the sheaf on $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ associated to $\mathcal{L}$, $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$.*

Then,

$$\mathcal{F}_x = C_c^\infty(\Pi^{-1}(x), \mathcal{L}_x)$$

as representations of T (see section 4.3 for the definition of $\Pi^{-1}(x)$).

Proof. — We use the identification

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{m,n,d} \prod_{\dot{\pi}_N(y)=\mathrm{Fr}^{NB}(x)} (\mathcal{L})_x.$$

Then, there is a natural isomorphism of T-modules

$$\Theta : \mathcal{F}_x \longrightarrow C_c^\infty(\Pi^{-1}(x), \mathcal{L}_x)$$

defined by

$$\Theta(s)(y) = s_{(\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)(y)} \quad (\exists\, m \gg 0),$$

for all $y \in \Pi^{-1}(x)$.

In fact, let $s \in \mathcal{F}_x$ and $y = (y_1, y_2) \in \Pi^{-1}(x) \subset J(k) \times \overline{\mathcal{M}}(k)$. Then, there exist two integers $n, d \geqslant 0$ such that $y_2 \in U^{n,d}(k)$. Then, for any $m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$,

$$\dot{\pi}_N(\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)(y) = \mathrm{Fr}^{NB}\,\Pi(y) = \mathrm{Fr}^{NB}(x).$$

Further more, if m, n, d are sufficiently large (*e.g.* such that $s \in \mathcal{F}_x$ is the image of an element of $(\mathcal{F}_m^{n,d})_x$), then $s_{(\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)(y)} \in \mathcal{L}_x$.

It is also clear that the value $s_{(\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)(y)} \in \mathcal{L}_x$ is independent on the choice of the integers m, n, d, N (since, for all $m' \geqslant m$, $\mathrm{q}_{\infty,m} = \mathrm{q}_{m',m} \circ \mathrm{q}_{\infty,m'}$).

In order to prove that the map $\Theta(s)$ is indeed an element of $C_c^\infty(\Pi^{-1}(x), \mathcal{L}_x)$ (for any $s \in \mathcal{F}_x$), it remains to prove that it has compact support and is invariant under the action of an open subgroup of T.

Let $s \in \mathcal{F}_x$ and denote by m, n, d ($m \geqslant d$) some positive integers such that s arises as the image of an element in $(\mathcal{F}_m^{n,d})_x$. Then, it follows from the definition that the support of $\Theta(s)$ is contained in $\Pi^{-1}(x) \cap J(k) \times \overline{\mathcal{M}}^{n,d}(k)$, which is compact, and thus is itself compact. Moreover, the function $\Theta(s)$ factors through the quotient $(\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)\Pi^{-1}(x)$ and in particular takes non zero values only on the set

$$(\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)(\Pi^{-1}(x) \cap J(k) \times \overline{\mathcal{M}}^{n,d}(k)) \subset (\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)\Pi^{-1}(x),$$

which is finite (see the proof of proposition 4.5). Therefore, for all $\rho \in \Gamma^m$,we have

$$\Theta(s)^\rho = \Theta(s) \circ \rho = \Theta(s).$$

It also follows directly from the definitions that the the map Θ is injective. To prove that Θ is surjective, it suffices to show that for any $f \in C_c^\infty(\Pi^{-1}(x), \mathcal{L}_x)$ there exist some positive integers m, n, d such that the support of f is contained in $\Pi^{-1}(x) \cap J(k) \times \overline{\mathcal{M}}^{n,d}(k)$ (which is equivalent to say that f has compact support) and f factors via the quotients $(\mathrm{q}_{\infty,m} \times 1)\Pi^{-1}(x) \subset J_m(k) \times \overline{\mathcal{M}}(k)$ (and in fact, it is enough to choose m such that Γ^m is contained in the open subgroup of Γ which fixes f).

Finally, the map Θ is a morphism of T-modules, because, for all $s \in \mathcal{F}_x$ and $y \in \Pi^{-1}(x)$, we have

$$\Theta(s)^\rho(y) = \Theta(s)\rho(y) = s_{(\mathrm{q}_{\infty,m}\times 1)\rho(y)} = s_{\rho(\mathrm{q}_{\infty,m}\times 1)(y)} = \dot{\rho}_*(s)_y. \qquad \square$$

Corollary 5.10. — *Maintaining the above notations. For any geometric point $x \in \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, there is a non canonical isomorphism of T-representations*

$$\mathcal{F}_x \simeq \text{c-Ind}_{\{1\}}^T(L_x).$$

In particular, the sheaf $\mathcal{F}/\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ has property $\mathcal{P}$ (see definition 5.3).

Proof. — By proposition 4.4, there exists a non canonical isomorphism $\Pi^{-1}(x) \simeq T$ and thus

$$\mathcal{F}_x = C_c^\infty(\Pi^{-1}(x), \mathcal{L}_x) \simeq C_c^\infty(T, \mathcal{L}_x) = \text{c-Ind}_{\{1\}}^T(L_x). \qquad \square$$

5.3. The cohomology of the Newton polygon strata. — We shall now apply the results of section 5.1 to the case when $G = T$, $X = \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ and $\mathcal{F}$ is the sheaf defined in section 5.2, attached to an abelian torsion étale sheaf $\mathcal{L}$ over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$.

Corollary 5.4 may be applied to obtain the following result.

Theorem 5.11. — *Let $\mathcal{L}$ be a torsion abelian étale sheaf over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (with torsion orders prime to p), endowed with an action of the Weil group $W_{\mathbb{Q}_p}$. Then, there is a spectral sequence*

$$E_2^{p,q} = H_p(T, \varinjlim_{m,n,d} H_c^q(J_m \times_{\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{U}^{n,d}, (\dot{\pi}_N)^*\mathcal{L})) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{L}),$$

which is compatible with the action of the Weil group $W_{\mathbb{Q}_p}$.

Proof. — Let us consider the the abelian torsion étale sheaf over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$

$$\mathcal{F} = \varinjlim_{m,n,d} \mathcal{F}_m^{n,d} = \varinjlim_{m,n,d} (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L}).$$

Then, corollary 5.4 applied to the case we are considering implies the existence of a spectral sequence

$$H_p(T, H_c^q(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{F})) \Longrightarrow H_c^n(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{F}_T).$$

Let us focus on the terms of the above spectral sequence. It follows from the definition of the sheaf $\mathcal{F}$ and from the fact that the morphisms π_N are finite that

$$\begin{aligned} H_c^q(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{F}) &= H_c^q(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \varinjlim_{m,n,d} \mathcal{F}_m^{n,d}) \\ &= \varinjlim_{m,n,d} H_c^q(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{F}_m^{n,d}) \\ &= \varinjlim_{m,n,d} H_c^q(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, (\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)^*(\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathrm{Fr}^{NB} \times 1)_!(\mathcal{L})) \\ &= \varinjlim_{m,n,d} H_c^q(\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, (\dot{\pi}_N)_!(\dot{\pi}_N)^*(\mathcal{L})) \\ &= \varinjlim_{m,n,d} H_c^q(J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{U}^{n,d}, (\dot{\pi}_N)^*(\mathcal{L})), \end{aligned}$$

where the above identifications are compatible with the action of the group $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$ (see propositions 5.6 and 5.8).

On the other hand, the morphism $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$ gives rise to a morphism $\mathcal{F}_T \to \mathcal{L}$ which is also compatible with the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$. Indeed, the morphism $\mathcal{F}_T \to \mathcal{L}$ is bijective, since such are the induced maps on stalks $(\mathcal{F}_T)_x = (\mathcal{F}_x)_T \to \mathcal{L}_x$, for all $x \in \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (this fact follows from corollary 5.10). □

5.4. Using Künneth formula. — In the following, we use Künneth formula for étale cohomology with compact supports to rewrite the result of the previous theorem in terms of the cohomology groups of the Igusa varieties and the Rapoport-Zink spaces, separately.

5.4.1. Let us first establish some general results relative the tensor product of smooth representations with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ of a p-adic group G.

Let M, N be two smooth $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of G. Then, the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module $M \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} N$ in naturally endowed with an action of G, namely $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$. (Indeed, for all $i \geqslant 0$, the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-modules $\mathrm{Tor}^i_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}}(M, N)$ also have a natural smooth action of G.)

We remark that the $\mathcal{H}_r(G)$-module associated to $M \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} N$ is not the module $M \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} N$. On the other hand, there is a natural isomorphism

$$M^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} N \simeq \Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} (M \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} N),$$

where M^{op} denotes the right $\mathcal{H}_r(G)$-modules associated to the right $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation of G which underlying $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module is M and the right action of G is defined as $m \cdot g = g^{-1}m$, for all $g \in G$ and $m \in M$. Indeed, let us consider the natural epimorphism

$$M \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} N \longrightarrow M^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} N.$$

For any $m \in M$, $n \in N$, $g \in G$ and open compact subgroup K of G, we have $\chi_{gK}(m \otimes n) = \mu(K)gm \otimes gn \in M \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} N$. and also

$$\begin{aligned} m \otimes n = gm \cdot g \otimes n = \mu(K)^{-1}\chi_{gK}gm \otimes n = \mu(K)^{-1}\chi_{gK}(gm \otimes n) \\ = gm \otimes \mu(K)^{-1}\chi_{gK}n = gm \otimes gn \in M^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} N. \end{aligned}$$

Thus, the above morphism induces a morphism between $\Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} (M \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} N)$ and $M^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} N$. Such a morphism is clearly surjective and indeed is also injective.

Proposition 5.12. — *Let $M_\bullet, N_\bullet$ be two complexes, bounded from above, of smooth $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of G, then*

$$\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} (M_\bullet \otimes^{L^\bullet}_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} N_\bullet) \simeq M_\bullet^{\mathrm{op}} \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} N_\bullet.$$

Proof. — First, we replace the complex $N_\bullet$ with its Cartan-Eilenberg resolution $P_\bullet$. Since any smooth representation of G admits a resolution by protectives of the form $L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)$, for some free $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module L, we can assume without loss of generality that $P_\bullet = L_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)$.

We remark that, if L is a free $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module, then $P = L \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)$ is a flat $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module, and thus

$$M_\bullet \otimes^{L^\bullet}_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} N_\bullet \simeq M_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} (L_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)) \simeq (M_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} L_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)),$$

where the latter is a complex of acyclic objects for the functor $\Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} ()$ (see section 5.1.4). Therefore,

$$\begin{aligned} \Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} (M_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} L_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)) &\simeq \Lambda \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} (M_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} L_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)) \\ &\simeq M_\bullet^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathcal{H}_r(G)} (L_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)) \\ &\simeq M_\bullet^{\mathrm{op}} \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(G)} (L_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r(G)). \end{aligned}$$ □

5.4.2. We apply the above proposition to the study of the cohomology of the open Newton polygon strata. To avoid ambiguities, let us reintroduce in our notation the datum of the level $U^p \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ of the Shimura variety we are studying. In the following, $\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p}$ denotes the Newton polygon stratum associated to a Newton polygon α, and J_{m,U^p} denotes the Igusa varieties of level m over the central leaf of $\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p}$.

For all $i \geqslant 0$, we write

$$H^i_c(J_{U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_m H^i_c(J_{U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$$

for the cohomology groups with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ of the Igusa varieties of level U^p, viewed as a module endowed with an action of $T \times (W_{\mathbb{Q}_p}/I_p)$ (see section 3.5).

We also write

$$H^i_c(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{G}) = \varinjlim_{n,d} H^i_c(\overline{U}^{n,d}, \mathcal{G}_{|\overline{U}^{n,d}})$$

for the cohomology groups with coefficients in an abelian torsion sheaf $\mathcal{G}$ (with torsion orders relatively prime to p) of the reduction of the Rapoport-Zink space without level structure. If the sheaf $\mathcal{G}$ is endowed with an action of the Weil group, we view the above cohomology groups as modules endowed with an action of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$ (see section 2.5.14), where the action of T on the cohomology groups arises from the opposite action of T on $\overline{\mathcal{M}}$.

Finally, we denote by $\overline{pr} : J_m \times \overline{U}^{n,d} \to \overline{\mathcal{M}}$ the projection to the second factor of the product.

Theorem 5.13. — *Let U^p be a sufficiently small open compact subgroup of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, $r \geqslant 1$ an integer, $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{G}$) an étale sheaf of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-modules over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (resp. $\overline{\mathcal{M}}$), endowed with an action of the Weil group.*

Suppose that, for any m, n, d ($m \geqslant d$), there exist an integer $N \geqslant d/\delta B$ and an isomorphism of étale sheaves over $J_m \times U^{n,d}$

$$\dot{\pi}_N^* \mathcal{L} \simeq \overline{pr}^* \mathcal{G}$$

invariant under the action of the Weil group, and also that, as m, n, d vary, these isomorphisms are compatible under the natural transition maps.

Then, there is a spectral sequence of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-modules, compatible with the actions of Weil group,

$$\bigoplus_{t+s=q} \mathrm{Tor}^p_{\mathcal{H}_r(T)}(H^s_c(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{G}), H^t_c(J_{U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \Longrightarrow H^{p+q}_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{L}).$$

Proof. — Let us consider the abelian torsion étale sheaf $\mathcal{F}$ over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ associated to the sheaf $\mathcal{L}$ (see section 5.2). We also write $f : \overline{X}^{(\alpha)}_{U^p} \times \overline{\mathbb{F}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$, $g_m : J_{m,U^p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ and $h^{n,d} : \overline{U}^{n,d} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ for the structure morphisms. Then, as we remarked in the proof of theorem 5.11, it follows from the definition of $\mathcal{F}$ (and the equality $R^\bullet \dot{\pi}_{N\,!} \simeq \dot{\pi}_{N\,!}$) that

$$R^\bullet f_!(\mathcal{F}) \simeq \varinjlim_{m,n,d} R^\bullet (g_m \times h^{n,d})_!(\dot{\pi}_N^* \mathcal{L}).$$

Since $\dot{\pi}_N^* \mathcal{L} \simeq \overline{pr}^* \mathcal{G}$, one can use Künneth formula for étale cohomology with compact support to obtain

$$\begin{aligned} \varinjlim_{m,n,d} R^\bullet (g_m \times h^{n,d})_!(\dot{\pi}_N^* \mathcal{L}) &\simeq \varinjlim_{m,n,d} R^\bullet g_{m\,!}(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \otimes^{L^\bullet} R^\bullet h^{n,d}_!(\mathcal{G}) \\ &\simeq \varinjlim_{m} R^\bullet g_{m\,!}(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \otimes^{L^\bullet} \varinjlim_{n,d} R^\bullet h^{n,d}_!(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Thus, by proposition 5.12, we have

$$\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(T)} R^\bullet f_!(\mathcal{F}) \simeq \Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(T)} (\varinjlim_{n,d} R^\bullet h^{n,d}_!(\mathcal{G}) \otimes^{L^\bullet} \varinjlim_m R^\bullet g_{m\,!}(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))$$
$$\simeq (\varinjlim_{n,d} R^\bullet h^{n,d}_!(\mathcal{G}))^{\mathrm{op}} \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(T)} \varinjlim_m R^\bullet g_{m\,!}(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}).$$

Finally, by theorem 5.2 be conclude that there is a quasi-isomorphism

$$R^\bullet f_!(\mathcal{L}) \simeq R^\bullet f_!(\Lambda \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(T)} \mathcal{F}) \simeq (\varinjlim_{n,d} R^\bullet h^{n,d}_!(\mathcal{G}))^{\mathrm{op}} \otimes^{L^\bullet}_{\mathcal{H}_r(T)} (\varinjlim_m R^\bullet g_{m\,!}(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})),$$

or equivalently that there exists a spectral sequence

$$\bigoplus_{t+s=q} \mathrm{Tor}^p_{\mathcal{H}_r(T)}(H^s_c(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{G}), H^t_c(J_{U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \Longrightarrow H^{p+q}_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{L}).$$

The compatibility of the above spectral sequence with the actions of the Weil group follows from the fact that all the above quasi-isomorphisms commute with the action of the Weil group. □

The following description of the cohomology groups of the open Newton polygon strata is a special case of the theorem above.

Theorem 5.14. — *Let U^p be a sufficiently small open compact subgroup of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, and $r \geqslant 1$ an integer.*

Then, there is a spectral sequence of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-modules, endowed with an unramified action of Weil group,

$$\bigoplus_{t+s=q} \mathrm{Tor}^p_{\mathcal{H}_r(T)}(H^s_c(\overline{\mathcal{M}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), H^t_c(J_{U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \Longrightarrow H^{p+q}_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}).$$

Proof. — The corollary follows directly from theorem 5.13, applied to the sheaves $\mathcal{L} = \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ and $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$. □

6. Formally lifting to characteristic zero

In this section we shall investigate the possibility of lifting the constructions of sections 3 and 4 to characteristic zero.

First, we shall lift the varieties over $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$ (resp. $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p$) to formal schemes over $\mathrm{Spf}\,\mathbb{Z}_p$ (resp. $\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, where $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$). The truncated Rapoport-Zink spaces $\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ are by their very definition the reduced fibers of the formal schemes $\mathcal{M}^{n,d}$ over $\mathrm{Spf}\,\mathbb{Z}_p$. The open Newton polygon stratum $\overline{X}^{(\alpha)}$ and the central leaf C also have natural lifts to formal schemes over $\mathrm{Spf}\,\mathbb{Z}_p$, namely the formal completions along them of the Shimura variety $\mathcal{X}$ over $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{E_u}$. We shall write $\mathfrak{X}^{(\alpha)}$ and $\mathfrak{C}$ for the lifts of $\overline{X}^{(\alpha)}$ and C respectively.

For the Igusa varieties J_m over $\overline{\mathbb{F}}_p$, a natural choice of lifts $\mathcal{J}_m$ over $\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ are their images under the equivalence between the category of finite étale covers of $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$

and the category of finite étale covers of $\mathfrak{C} \times \operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$. Thus, the varieties $\mathcal{J}_m$ are by definition equipped with morphisms $q_m : \mathcal{J}_m \to \mathfrak{C} \times \operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ which lift the morphism $\mathrm{q}_m : J_m \to C \times \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p$. In this section we shall investigate the possibility of extending the morphisms π_N on the formal schemes $\mathcal{J}_m \times_{\operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$, for all positive integers m, n, d, N ($m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$).

Let us remark that for the purpose of all the following constructions, it suffices to assume that $\mathcal{J}_0$ is any formally smooth formal scheme over $\operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ which reduces modulo p to $J_0 = C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (not necessarily $\mathfrak{C} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$), and $\mathcal{J}_m \to \mathcal{J}_0$ are the finite étale covers corresponding to $J_m \to J_0$.

6.1. From $\overline{\mathbb{F}}_p$-schemes to formal $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$-schemes. — The goal of this section is to introduce some formal schemes over $\operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ whose reduced fibers are naturally identified with the schemes over $\overline{\mathbb{F}}_p$ we studied in sections 3 and 4. We shall maintain the notations established in section 3.2.

6.1.1. By definition, $\overline{X}^{(\alpha)}$ (resp. C) is a locally closed subscheme of the reduction $\overline{X}$ of the Shimura variety $\mathcal{X}$ over $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{E_u}$ (and under our assumptions $\mathcal{O}_{E_u} = \mathbb{Z}_p$). We define $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{X}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{C}$) to be the formal completion of $\mathcal{X}$ along $\overline{X}$ (resp. $\overline{X}^{(\alpha)}$, C). Then $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{X}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{C}$) is a formal scheme over $\operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p$ with reduced fiber $\overline{X}$ (resp. $\overline{X}^{(\alpha)}$, C). Moreover, there are natural inclusions $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{X}^{(\alpha)} \hookrightarrow \mathcal{X}$ which lay above $C \hookrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \hookrightarrow \overline{X}$.

We observe that since $\mathcal{X}$ is a smooth variety over $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{E_u}$ the formal schemes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^{(\alpha)}$ and $\mathfrak{C}$ are formally smooth over $\operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p$.

6.1.2. By a result of Grothendieck (see [**12**], Exp. I, 8.4), there is an equivalence between the category of finite étale covers of $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ and the category of the finite étale covers of $\mathfrak{C} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$. For any $m \geqslant 0$, we define the formal scheme $\mathcal{J}_m$ over $\mathfrak{C} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ to be the image of $J_m/C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ under the equivalence of categories. Then $\mathcal{J}_m$ is characterised by the following properties:

(1) $\mathcal{J}_m$ is finite étale and Galois over $\mathfrak{C} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ with Galois group Γ_m;

(2) the reduce fiber of $\mathcal{J}_m$ is J_m and $(q_m)^{\mathrm{red}} = \mathrm{q}_m$, where $q_m : \mathcal{J}_m \to \mathfrak{C} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ is the structure morphism.

It also follows from the above equivalence of categories that there exist unique morphisms

$$q_{m',m} : \mathcal{J}_{m'} \longrightarrow \mathcal{J}_m$$

such that $(q_{m',m})^{\mathrm{red}} = \mathrm{q}_{m',m}$ and $q_{m'} = q_m \circ q_{m',m}$, for all $m' \geqslant m$.

Moreover, by Artin's Approximation Theorem, the formal schemes $\mathcal{J}_m$ have the following universal property (for all m).

Remark 6.1. — For any formal $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$-scheme S and any two morphisms $f : S \to \mathfrak{C}$ and $\overline{f}_m : S^{\mathrm{red}} \to J_m$ such that $\mathrm{q}_m \circ \overline{f}_m = f^{\mathrm{red}}$ there exists a unique morphism $f_m : S \to \mathcal{J}_m$ such that $q_m \circ f_m = f$ and $(f_m)^{\mathrm{red}} = \overline{f}_m$.

6.1.3. In the next sections, we shall use extensively some results of Grothendieck in the theory of deformations of Barsotti-Tate groups. For conveniency we report them here below.

Theorem 6.2 **(See [17], Theorem 4.4, pp. 171-177, Corollary 4.7, pp. 178-179)**
Let $i : S \hookrightarrow S'$ be a nil-immersion of schemes, where S' is affine.
Suppose G is a trunctated Barsotti-Tate group over S of length n. Then

(1) *There exists a truncated Barsotti-Tate group G' over S' of length n such that $i^*(G') = G$.*

(2) *If there exists a Barsotti-Tate group H over S such that $G = H(n)$ (where $H(n)$ denotes the n-th truncate of H), then for any deformation G' over S' of G there exists a deformation H' over S' of H such that $G' = H'(n)$.*

(3) *For any $r \leqslant n$, the natural map*

$$\mathrm{Def}(G, i) \longrightarrow \mathrm{Def}(G(r), i),$$

which maps a deformation G'/S' of G to its r-th truncate $G'(r)$, is a surjection.

(4) *Let N be an integer $\geqslant 1$. Suppose that the nil-immersion i is defined by an ideal $\mathcal{I}$ such that $\mathcal{I}^2 = (0)$ and $p^N \in \mathcal{I}$. Then the map in part (3) is a bijection for all $n \geqslant r \geqslant N$.*

(5) *Under the assumption of parts (2) and (4), the map*

$$\mathrm{Def}(H, i) \longrightarrow \mathrm{Def}(H(r), i)$$

which maps a deformation H'/S' of H to its r-th truncate $H'(r)$, is a bijection for all $r \geqslant N$.

Let us remark that parts (4) and (5) of the above theorem hold also without assuming that the scheme S' is affine.

6.2. The morphisms $\pi_N(t)$. — We now investigate the problem of lifting the morphism $\pi_N : J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \to \overline{X}^{(\alpha)}$ to a morphism over $\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, *i.e.* to a morphism $\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d} \to \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times_{\mathrm{Spf}\,\mathbb{Z}_p} \mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, for any positive integers m, n, d, N ($m \geqslant d$ and $N \geqslant d/\delta B$).

We shall show that, for any positive integer t such that $m \geqslant d + t/2$ and $N \geqslant (d+t/2)/\delta B$, it is possible to define a morphism $\pi_N(t)$ on the subscheme of $\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$ cut by the t-th power of the maximal ideal of definition $\mathcal{I}$ ($p \in \mathcal{I}$), such that

$$(\pi_N(t))^{\mathrm{red}} \circ (1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB} = \pi_N,$$

where $\widetilde{\mathrm{Fr}} = \mathrm{frob}^{-1} \circ \mathrm{Fr}$ on $\overline{\mathcal{M}}^{n,d}$, and also

$$\pi_N(t)^* \mathcal{H}[p^{[t/2]}] \simeq \mathcal{H}'[p^{[t/2]}],$$

where $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}'$ denote the universal Barsotti-Tate groups over $\mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \mathrm{Spf}\, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ and $\mathcal{M}^{n,d}$, respectively. (For any positive integer t, we denote by $[t/2]$ the minimal integer greater than or equal to $t/2$.) Moreover, the morphisms $\pi_N(t)$ are compatible with the projections $q_{m',m} \times 1$ and with the inclusions $1 \times i^{n,d}_{n',d'}$.

6.2.1. Let t be a positive integer and $\mathcal{Y}$ a formal scheme over $\mathrm{Spf}\, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$. We denote by $\mathcal{Y}(t)$ the closed subscheme of $\mathcal{Y}$ which is defined by the t-th power of its maximal ideal of definition $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \supset (p)$) and regard $\mathcal{Y}(t)$ as a scheme over $\mathrm{Spec}\, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}/(p^t) = \mathrm{Spec}\, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}(t)$. For any $t' \geqslant t$, we denote by $i_{t,t'}$ the natural inclusion $\mathcal{Y}(t) \hookrightarrow \mathcal{Y}(t')$. For any morphism $f : \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$ between formal schemes over $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, we denote by $f(t) : \mathcal{Y}_1(t) \to \mathcal{Y}_2(t)$ the restriction of f to $\mathcal{Y}_1(t)$, viewed as a morphism between $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}(t)$-schemes.

6.2.2. For any slope $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, we fix a Barsotti-Tate group $\widehat{\Sigma}_\lambda$ over $\mathbb{Z}_p$ such that $\widehat{\Sigma}_\lambda \times_{\mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p} \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_p \simeq \Sigma_\lambda$. We define

$$\widehat{\Sigma}^i = \widehat{\Sigma}_{\lambda_i}^{\oplus r_i} \qquad \text{and} \qquad \widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}_\alpha = \oplus_i \widehat{\Sigma}^i,$$

for all $i = 1, \ldots, k$. Thus, we have $\widehat{\Sigma}^i \times_{\mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p} \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_p \simeq \Sigma^i$ and $\widehat{\Sigma} \times_{\mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p} \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_p \simeq \Sigma$.

Proposition 6.3. — *Maintaining the same notations as in section 3.2.3. Let t be a positive integer and set $m_0 = [t/2]$ (i.e. $m_0 = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geqslant t/2\}$). For all $i = 1, \ldots, k$, there exists a unique deformation $\widehat{\mathcal{G}}^i$ of $\mathcal{G}^i$ over $\mathcal{J}_{m_0}(t)$ such that*

- *for all $m \geqslant m_0$, there is an isomorphism $\widehat{j}_{m,i} : \widehat{\Sigma}^i[p^m] \to \widehat{\mathcal{G}}^i[p^m]$ over $\mathcal{J}_m(t)$ which lifts $j^{\mathrm{univ}}_{m,i}$;*
- *for any $m' \geqslant m \geqslant m_0$, the isomorphism $\widehat{j}_{m',i} : \widehat{\Sigma}^i[p^{m'}] \simeq \widehat{\mathcal{G}}^i[p^{m'}]$ restricts on the p^m-torsions to the pullback of $\widehat{j}_{m,i}$.*

Proof. — As a direct consequence of part (5) of theorem 6.2 (when $N = m$), we know that for any $m \geqslant t/2$ there exists a unique deformation $\widehat{\mathcal{G}}^i_m$ over $\mathcal{J}_m(t)$ of $\mathcal{G}^i$ such that $\widehat{\mathcal{G}}^i_m[p^m]$ is the deformation of $\mathcal{G}^i[p^m]$ defined as $(\widehat{\Sigma}^i[p^m], (j^{\mathrm{univ}}_{m,i})^{-1})$.

It also follows from the uniqueness of construction that, for any $m \geqslant m_0$, $\widehat{\mathcal{G}}^i_m$ over $\mathcal{J}_m(t)$ can be identified to the pullback of the Barsotti-Tate group $\widehat{\mathcal{G}}^i = \widehat{\mathcal{G}}^i_{m_0}/\mathcal{J}_{m_0}(t)$. Moreover, under these identifications, we obtain a compatible system of isomorphisms

$$\widehat{j}_{m,i} : \widehat{\Sigma}^i[p^m] \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}}^i[p^m]$$

defined over $\mathcal{J}_m(t)$, for all $m \geqslant t/2$, which has the stated properties. □

6.2.3. We remark that the Barsotti-Tate group $\widehat{\mathcal{G}}^i$ may be also interpreted as a deformation of the group $\mathcal{G}^{i\,(p^{rB})}$ via the isomorphism

$$(p^{-\lambda_i B}F^B)^{-r} : \mathcal{G}^{i\,(p^{rB})} \longrightarrow \mathcal{G}^i.$$

We write $\widehat{\mathcal{G}}^{i\,(p^{rB})} = \widehat{\mathcal{G}}^i$ when viewed as a deformation of the Barsotti-Tate group $\mathcal{G}^{i\,(p^{rB})}$ (for each $i = 1, \ldots, k$).

Corollary 6.4. — *Maintaining the notations of proposition 6.3. Let t be a positive integer and set $m_0 = [t/2]$.*

For all positive integers r such that $r\delta B \geqslant t/2$, there exists a unique deformation $\widehat{\mathcal{G}}^{(p^{rB})}$ of $\mathcal{G}^{(p^{rB})}$ over $\mathcal{J}_{m_0}(t)$ such that

$$\widehat{\mathcal{G}}^{(p^{rB})}[p^{r\delta B}] \simeq \prod_{i=1}^{k} \widehat{\mathcal{G}}^{i\,(p^{rB})}[p^{r\delta B}].$$

Proof. — In lemma 4.1 we proved the existence of a canonical isomorphism

$$\mathcal{G}^{(p^{rB})}[p^{r\delta B}] \simeq \prod_{i=1}^{k} \mathcal{G}^{i\,(p^{rB})}[p^{r\delta B}],$$

over the central leaf $C \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (and therefore also over J_{m_0}).

Thus, the finite flat group scheme $\prod_i \widehat{\mathcal{G}}^{i\,(p^{rB})}[p^{r\delta B}]$ over $\mathcal{J}_{m_0}(t)$ can be viewed as a deformation of $\mathcal{G}^{(p^{rB})}[p^{r\delta B}] \subset \mathcal{G}^{(p^{rB})}$.

It follows from part (5) of theorem 6.2 that, if $r\delta B \geqslant t/2$, then the above deformation of $\mathcal{G}^{(p^{rB})}[p^{r\delta B}]$ determines a unique deformation $\widehat{\mathcal{G}}^{(p^{rB})}$ of the Barsotti-Tate group $\mathcal{G}^{(p^{rB})}$ over $\mathcal{J}_{m_0}(t)$. □

6.2.4. We remark that the previous corollary can be reformulated as follows.

Corollary 6.5. — *Let m, t be two positive integers and assume $m \geqslant t/2$. To any choice of a Barsotti-Tate group $\widehat{\Sigma}$ as in 6.2.2, we can associate some liftings of powers of the Frobenius morphism on the Igusa variety J_m over $\overline{\mathbb{F}}_p$, i.e. some σ^{NB}-semilinear morphisms*

$$\mathrm{Frob}^{NB} : \mathcal{J}_m(t) \longrightarrow \mathcal{J}_{m-NB}(t),$$

for all integers $N \geqslant t/2\delta B$, which reduces to the morphisms Frob^{NB} *on J_m over $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Proof. — Let us recall that the σ-semilinear morphism Frob : $J_m \to J_{m-1}$ is defined as the map associated to the linear morphism Frob : $J_m \to J_{m-1}^{(p)}$ which maps $(A, j_{m,i})$ to $(A^{(p)}, j_{m-1,i}^{(p)})$.

Let us denote by $\mathcal{J}_m^{(p)}$ the pullback of $\mathcal{J}_m$ under the Frobenius on $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$. Then, defining a σ^{NB}-semilinear morphism $\mathrm{Frob}^{NB} : \mathcal{J}_m(t) \to \mathcal{J}_{m-NB}(t)$, which reduces to Frob^{NB} over J_m, is equivalent to defining a linear morphism

$$\mathcal{J}_m(t) \longrightarrow \mathcal{J}_{m-NB}^{(p^{NB})}(t),$$

which reduces to the morphism $\mathrm{Frob}^{NB} : J_m \to J_{m-NB}^{(p^{NB})}$ (we remark that $\mathcal{J}_m^{(p)}$ reduces to the scheme $J_m^{(p)}$ over $\overline{\mathbb{F}}_p$).

By the universal property of the formal Igusa varieties (see remark 6.1), defining a morphism $\mathcal{J}_m \to \mathcal{J}_{m-N}^{(p^{NB})}$, which reduces to the NB-th power of the Frobenius morphism on the Igusa varieties over $\overline{\mathbb{F}}_p$, is equivalent to defining a deformation of the Barsotti-Tate group $\mathcal{G}^{(p^{NB})}/J_m$ over $\mathcal{J}_m$.

We define the morphism Frob^{NB} on $\mathcal{J}_m(t)$ to be the lifting of the morphism Frob^{NB} on J_m associated to the deformation $\widehat{\mathcal{G}}^{(p^{NB})}$ of the Barsotti-Tate group $\mathcal{G}^{(p^{NB})}$ defined in corollary 6.4 (which depends on a choice of the Barsotti-Tate group $\widehat{\Sigma}$ as in 6.2.2). □

6.2.5. Let us focus our attention on the morphism $\widetilde{\mathrm{Fr}} = \mathrm{frob}^{-1} \circ \mathrm{Fr}$ on $\overline{\mathcal{M}}$. We remark that, although $\widetilde{\mathrm{Fr}}$ does not commutes with the action of T on $\overline{\mathcal{M}}$, its B-th power does (see section 2.5.13).

Proposition 6.6. — *Let t be a positive integer. For any integers m, n, d such that $m \geqslant d + t/2$, there exist some morphisms*

$$\pi_N(t) : (\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t) \longrightarrow (\mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})(t),$$

for all $N \geqslant (d + t/2)/\delta B$, with the following properties:

- $\pi_N(1) \circ (1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB} = \pi_N$,
- $\pi_N(1) \circ (\rho \times \rho) = \pi_N(1)$, *for all* $\rho \in S$,
- $\pi_N(t)^*\mathcal{H}[p^{[t/2]}] \simeq \mathcal{H}'[p^{[t/2]}]$,
- $\pi_N(t)(t-1) = \pi_N(t-1)$,
- $\pi_N(t) \circ (q_{m',m} \times 1)(t) = \pi_N(t)$, *for all* $m' \geqslant m$.
- $\pi_N(t) \circ (1 \times i_{n,d}^{n',d'})(t) = \pi_N(t)$, *for all* $d - d' \geqslant n - n' \geqslant 0$.

Proof. — Let us start by constructing some morphisms

$$\pi_N(1) : J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \longrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$$

such that $\pi_N(1) \circ (1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB} = \pi_N$, for any set of positive integers m, n, d, N with $m \geqslant d + 1/2$ (*i.e.* $m \geqslant d + 1$) and $N \geqslant (d+1)/\delta B$.

We consider the commutative diagram of Figure 3, where we use the notations of section 4.2 and also write $\mathcal{K} = j_N(\nu^N \ker(p^n\beta))$ and $\nu = \oplus_i p^{-\lambda_i B} F^B$, the B-th power of the natural identification between Σ and $\Sigma^{(p)}$ over $\mathbb{F}_p$. We define

$$\pi_N(1) : J_m \times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{\mathcal{M}}^{n,d} \longrightarrow \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$$

to be the morphism associated to the abelian variety $\overline{\mathcal{A}}$ endowed with the structures induced from the ones of $\mathcal{B}$. It follows from the definition that

$$\pi_N(1) \circ (1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB} = \pi_N,$$

$$\begin{tikzcd}
\nu^N(\ker(p^n\beta)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{K} \arrow[d, hook] & \\
\Sigma^{(p^{NB})}[p^d] \arrow[r, "j_N"] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}^{(p^{NB})}[p^d] \arrow[d, hook] & \\
\Sigma^{(p^{NB})} & \mathcal{G}^{(p^{NB})} \arrow[r, hook] \arrow[dd, two heads] & \mathcal{B}^{(p^{NB})} \arrow[dd, two heads] \\
\Sigma \arrow[u, "\nu^N"'] \arrow[d, two heads, "p^n\beta"] & & \\
\mathcal{H}' & \overline{\mathcal{H}} = \dfrac{\mathcal{G}^{(p^{NB})}}{\mathcal{K}} \arrow[r, hook] & \overline{\mathcal{A}} = \dfrac{\mathcal{B}^{(p^{NB})}}{\langle\mathcal{K}\rangle}
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3

and also that the morphisms $\pi_N(1)$ are compatible with the projections $\mathrm{q}_{m',m} \times 1$ and the inclusions $1 \times i_{n,d}^{n',d'}$.

Finally, we remark that the isomorphism

$$j_N : \Sigma^{(p^{NB})}[p^{d+1}] \longrightarrow \mathcal{G}^{(p^{NB})}[p^{d+1}]$$

induces an isomorphism on the quotients $\mathcal{H}'[p] \simeq \overline{\mathcal{H}}[p] = \pi_N(1)[M]^*\mathcal{H}[p]$.

We claim that the morphisms $\pi_N(1)$ are invariant under the action of $S \subset T$. In fact, since the morphism $\widetilde{\mathrm{Fr}}$ commutes with the action of T on $\overline{\mathcal{M}}$ and π_N is invariant under the action of S, the equality $\pi_N = \pi_N(1) \circ (1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB}$ implies that for all $\rho \in S$

$$\pi_N(1) \circ (1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB} = \pi_N(1) \circ (\rho \times \rho) \circ (1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB}.$$

Since all the schemes we are considering are reduced, we deduce that $\pi_N(1) = \pi_N(1) \circ (\rho \times \rho)$.

We now construct the morphisms

$$\pi_N(t) : (\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t) \longrightarrow (\mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})(t)$$

as extensions of the morphisms $\pi_N(1)$, when $m \geqslant d + t/2$ and $N \geqslant (d + t/2)/\delta B$.

By the universal property of $\mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, defining a morphism $\pi_N(t)$ is equivalent to defining a deformation over $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$ of the Barsotti-Tate group $\overline{\mathcal{H}}$, or also (by part (5) of theorem 6.2) to defining a deformation over $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$ of the truncated Barsotti-Tate group $\overline{\mathcal{H}}[p^{[t/2]}]$.

For all $i = 1, \ldots, k$, the isomorphisms $\widehat{j}_{m,i} : \widehat{\Sigma}^i[p^m] \to \widehat{\mathcal{G}}^i[p^m]$ over $\mathcal{J}_m(t)$ give rise to an isomorphism

$$\widehat{j}_N : \widehat{\Sigma}[p^{d+[t/2]}] \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}}^{(p^{NB})}[p^{d+[t/2]}] \simeq \prod_{i=1}^{k} \widehat{\mathcal{G}}^{i\,(p^{NB})}[p^{d+[t/2]}],$$

which induces an isomorphism on the quotients

$$\widehat{j}'_N : \mathcal{H}'[p^{[t/2]}] \simeq \overline{\mathcal{H}}[p^{[t/2]}] = \pi_N(1)^*\mathcal{H}[p^{[t/2]}].$$

We define $\pi_N(t)$ to be the morphism associated to the deformation $\widehat{\mathcal{H}}[p^{[t/2]}]$ of the truncated Barsotti-Tate group $\overline{\mathcal{H}}[p^{[t/2]}]$ defined as $(\mathcal{H}'[p^{[t/2]}], \widehat{j}'^{-1}_N)$.

It is therefore tautological that $\mathcal{H}'[p^{[t/2]}] \simeq \widehat{\mathcal{H}}[p^{[t/2]}] = \pi_N(t)^*\mathcal{H}[p^{[t/2]}]$, and moreover it is a direct consequence of the definition that the morphisms $\pi_N(t)$ commute with the projections $(q_{m',m} \times 1)(t)$ and the inclusions $(1 \times i^{n',d'}_{n,d})(t)$, and that $\pi_N(t)(t-1) = \pi_N(t-1)$. □

Proposition 6.7. — *Let t, m, n, d, N be some positive integer such that $m \geqslant d + t/2$ and $N \geqslant (d + t/2)/\delta B$.*

The morphism

$$\mathrm{id} \times \pi_N(t) : (\mathcal{J}_m \times_{\operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t) \longrightarrow (\mathcal{J}_m \times_{\operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \operatorname{Spf} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})(t)$$

is étale.

Proof. — Let $y = (y_1, y_2)$ be a geometric point of $J_m \times \overline{\mathcal{M}}^{n,d}$ and $x = \pi_N(t)(y) \in \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$.

We need to prove the morphism

$$(\mathrm{id} \otimes \pi_N(t))^* : \mathcal{O}^{\wedge}_{\mathcal{J}_m, y_1} \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{O}^{\wedge}_{\mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}, x}/\mathfrak{a}^t \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{J}_m, y_1} \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{O}^{\wedge}_{\mathcal{M}, y_2}/\mathcal{I}^t,$$

where $\mathfrak{a}$ and $\mathcal{I}$ denote the maximal ideal of definitions of the respective algebras, is an isomorphism.

Let us denote by B (resp. A) the abelian variety associated to the point y_1 (resp. x), and by G (resp. H) the corresponding Barsotti-Tate group $\varepsilon B[u^\infty]$ (resp. $\varepsilon A[u^\infty]$). We also write $j_{m,i} : \Sigma^i[p^m] \to G^i[p^m]$ for the isomorphisms associated to y_1 $(i = 1, \ldots, k)$ and $\beta : \Sigma \to H'$ for the quasi-isogeny associated to y_2.

We recall that the complete local rings $\mathcal{O}^{\wedge}_{\mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}, x}$ and $\mathcal{O}^{\wedge}_{\mathcal{M}, y_2}$ are by definition the deformation rings of the Barsotti-Tate groups H and H', respectively. We denote by $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}'$ the corresponding universal objects.

We now choose an isomorphism $j : \Sigma \to G^{(p^{NB})}$ which extends the isomorphism $\oplus_i j_{m,i}$ between the p^m-torsion subgroups. Then j induces an isomorphism j' between

H and H', *i.e.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(p^n\beta) \arrow[r] \arrow[d, "\oplus_i j_{m,i}"] & \Sigma \arrow[r, "p^n\beta"] \arrow[d, "j"] & H' \arrow[r] \arrow[d, "j'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_{j,\beta} \arrow[r] & G^{(p^{NB})} \arrow[r, "\overline{s}"] & H \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

By the very definition of the morphism $\pi_N(t)$, over $\mathcal{O}_{\mathcal{J}_m,y_1} \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{O}^\wedge_{\mathcal{M},y_2}/\mathcal{I}^t$ there exists an isomorphism $\pi_N(t)^*\mathcal{H}[p^{[t/2]}] \simeq \mathcal{H}'[p^{[t/2]}]$, which reduces modulo $\mathcal{I}$ to $j'_{|[p^{[t/2]}]}$, and moreover (by part (5) of theorem 6.2) such an isomorphism extends to an isomorphism $\pi_N(t)^*\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}'$, which reduces modulo $\mathcal{I}$ to j'. This fact is equivalent to saying that the morphism $(\mathrm{id}\otimes\pi_N(t))^*$ is an isomorphism. □

6.3. The morphisms $\pi_N[t, V]$. — In this section, we shall discuss the possibility of extending the morphisms $\pi_N(t)$ on the formal schemes $\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$.

We shall prove that the morphism $\pi_N(t)$ may be extended Zariski locally to a morphism over $\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, *i.e.* for any open affine $V \subset \mathcal{J}_m \times U^{n,d}$ the morphism $\pi_N(t)_{|V(t)}$ lifts to a morphism on V.

Proposition 6.8. — *Let m, n, d, N, t be some positive integers such that $m \geqslant d + t/2$ and $N \geqslant (d + t/2)/\delta B$.*

For any affine open V of $\mathcal{J}_m \times U^{n,d} \subset \mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$, there exists a morphism

$$\pi_N[t, V] : V \longrightarrow \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$$

such that $\pi_N[t, V](t) = \pi_N(t)_{|V(t)}$ and also $\pi_N[t, V]^*\mathcal{H}[p^{[t/2]}] \simeq \mathcal{H}'[p^{[t/2]}]$.

Proof. — Let us recall that over $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$ there exists an isomorphism

$$\pi_N(t)^*\mathcal{H}[p^{[t/2]}] \simeq \mathcal{H}'[p^{[t/2]}].$$

Under such an identification, the finite flat group scheme $\mathcal{H}'[p^{[t/2]}]$ over $\mathcal{J}_m \times \mathcal{M}^{n,d}$ gives rise to a deformation of the group $\widehat{\mathcal{H}}[p^{[t/2]}]/(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$.

Moreover, it follows from part (2) of theorem 6.2 that over any open affine V of $\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$, there exists a deformation $\widetilde{\mathcal{H}}/V$ of the Barsotti-Tate group $\widehat{\mathcal{H}}/V(t)$ such that $\widetilde{\mathcal{H}}[p^{[t/2]}] \simeq \mathcal{H}'[p^{[t/2]}]$.

We define $\pi_N[t, V]$ on V to be the lifting of the morphism $\pi_N(t)_{|V(t)}$ associated to the Barsotti-Tate group $\widetilde{\mathcal{H}}/V$. □

Proposition 6.9. — *Maintaining the notations as above, we assume $t > 1$. Then, the morphism $\pi_N[t, V] : V \to \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ is formally smooth.*

Proof. — Let $y = (y_1, y_2)$ be a geometric point of V and $x = \pi_N[t, V](y) = \pi_N(t)(y) \in \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$.

In order to conclude, it suffices to prove the morphism

$$\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\pi_N[t,V]^* : \mathcal{O}^{\wedge}_{\mathcal{J}_m,y_1}\,\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}}\,\mathcal{O}^{\wedge}_{\mathfrak{X}^{(\alpha)}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}},x} \longrightarrow \mathcal{O}^{\wedge}_{V,y} = \mathcal{O}_{\mathcal{J}_m,y_1}\,\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}}\,\mathcal{O}^{\wedge}_{\mathcal{M},y_2}$$

is an isomorphism. In fact, we may then deduce that the morphism $\pi_N[t,V]$ is smooth at the point y from the smoothness of the formal scheme $\mathcal{J}_m/\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ (see section 6.1.2).

From the equality $\pi_N[t,V](t)=\pi_N(t)_{|V(t)}$, we deduce that

$$(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\pi_N[t,V])^*(t) = (\mathrm{id}\otimes\pi_N(t))^*$$

and therefore, in particular, is an isomorphism (see proposition 6.7). For $t>1$, this suffices to deduce that $(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\pi_N[t,V])^*$ is an isomorphism, since the complete local rings $\mathcal{O}^{\wedge}_{\mathcal{J}_m,y_1}\,\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}}\,\mathcal{O}^{\wedge}_{\mathfrak{X}^{(\alpha)}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}},x}$ and $\mathcal{O}^{\wedge}_{V,y}$ are both power series rings over an algebraically closed field, of the same dimension. (Indeed, it is a general fact that, if A,B are two power series ring over an algebraically closed field k, of the same dimension, and $\phi : A\to B$ a morphism of k-algebras, such that the morphism induced modulo the squares of the maximal ideals of definitions of A and B, $A/\mathfrak{a}^2\to B/\mathfrak{b}^2$, is an isomorphisms, then ϕ is also an isomorphism.) □

6.4. The morphisms $\widehat{y}_N$. — In this section, for any integers $n,d\geqslant 0$ and $N\geqslant 1$, we shall associate to a point $y\in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ a compatible system of points $y_m^{\wedge}\in\mathcal{J}_m(\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})$ and some morphisms $\widehat{y}_N : U^{n,d}\to\mathfrak{X}^{(\alpha)}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, which canonically lift the morphisms $\pi_N(1)\circ(y_m,\mathrm{id})$ and such that $\widehat{y}_N(t)=\pi_N(t)\circ(y_m^{\wedge},\mathrm{id})$ over $U^{n,d}(t)$, for all $t>0$. We maintain the notations introduced in section 4.3.

6.4.1. Let $y\in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ be a point associated to a quintuple $(B,\lambda,i,\overline{\mu};j)$, and write $G=\varepsilon B[u^{\infty}]$. Thus $j:\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}\to G$ is an isomorphism.

To the point $y\in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$, we associated a compatible system of morphisms

$$y_m^{\wedge} : \mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} \longrightarrow \mathcal{J}_m,$$

for all $m\geqslant 0$. Each $y_m^{\wedge}$ is defined by the data of the point $y_m=\mathrm{q}_{\infty,m}(y)\in J_m(\overline{\mathbb{F}}_p)$ and the deformation $\widehat{G}=(\widehat{\Sigma},j)/\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ of the Barsotti-Tate group $G/\overline{\mathbb{F}}_p$.

For any integers $n,d\geqslant 0$, we define the morphisms

$$\widehat{y}_N : U^{n,d} \longrightarrow \mathfrak{X}^{(\alpha)}\times\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$$

for all $N\geqslant 1$, as follows. For any $m\geqslant d+1$, we consider the morphisms

$$\widehat{y}_N(1)=\pi_N(1)\circ(y_m,\mathrm{id}) : \overline{U}^{n,d} \longrightarrow J_m\times_{\overline{\mathbb{F}}_p}\overline{U}^{n,d} \longrightarrow \overline{X}^{(\alpha)}\times\overline{\mathbb{F}}_p.$$

We remark that the morphisms $\widehat{y}_N(1)$ do not depend on the choice of the integer $m\geqslant d+1$. If $(\mathcal{H}',\beta)$ denotes the universal object over $U^{n,d}$ and $\mathcal{H}$ the universal Barsotti-Tate group over $\overline{X}^{(\alpha)}\times\overline{\mathbb{F}}_p$, then it follows from the definitions that the isomorphism $j:\Sigma_{\overline{\mathbb{F}}_p}\to G$ give rise to an isomorphism

$$\overline{j} : \mathcal{H}'\times\overline{U}^{n,d} \simeq H = (y_m,\mathrm{id})^*\pi_N(1)^*\mathcal{H}.$$

Thus, to extend the morphism $\pi_N(1) \circ (y_m, \mathrm{id})$ to a morphism from $U^{n,d}$ to $\mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, it suffices to define a deformation $\widehat{H}$ over $U^{n,d}$ of the Barsotti-Tate group $H/\overline{U}^{n,d}$. We set $\widehat{H} = (\mathcal{H}', \bar{\jmath})$ and denote the corresponding morphism by $\widehat{y}_N$.

The following properties of the morphisms $\widehat{y}_N$ are direct consequences of the definition.

Proposition 6.10. — *Maintaining the above notations. Let n, d be two positive integers and $y \in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$.*

Then, for all $N \geqslant 1$, the morphisms $\widehat{y}_N : U^{n,d} \to \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ satisfy the conditions

(1) over $U^{n,d}$ we have $\widehat{y}_N^* \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}'$;

(2) for any integers $t \geqslant 1$, $m \geqslant d + t/2$ and $N \geqslant (d+t/2)/\delta B$, over $U^{n,d}(t)$ we have $\widehat{y}_N(t) = \pi_N(t) \circ (y_m^{\wedge}, \mathrm{id})(t)$;

(3) for any $\rho \in T$, over $U^{n,d}$ we have $\widehat{y}_N \circ \rho = \widehat{\rho y}_N$.

Finally, let us remark that the same argument we used in the proof of proposition 6.7 shows the following fact.

Proposition 6.11. — *Let n, d be two positive integers and $y \in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Then, for all $N \geqslant 1$, the morphisms $\widehat{y}_N : U^{n,d} \to \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ are étale.*

7. Shimura varieties with level structure at p

In this section we shall focus our attention to the study of Shimura varieties with level structure at p. Our goal is to compare the rigid analytic spaces associated to the Shimura varieties with level structure at p to the the Rapoport-Zink spaces with level structure.

In order to do it, we shall first define some integral models for the Shimura varieties and the Rapoport-Zink spaces, as formal schemes over $\mathfrak{X}$ and $\mathcal{M}$, respectively. These integral models naturally form a system, as the level varies, and they are endowed with an action of a certain submonoid $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+ \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ (such that $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+, p\mathbb{I}_h \rangle = \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ and $p^{-1}\mathbb{I}_h \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$), which is compatible with the action of the group $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ on the corresponding rigid analytic spaces.

For any integer $m, n, d, t > 0$, we shall consider the morphisms

$$\pi_N(t) : (\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t) \longrightarrow (\mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})(t)$$

(for all N) and the projections $pr(t) : (\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t) \to \mathcal{M}(t)$, and compare the two towers of covering spaces over $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$ which are obtained as the pullbacks of the Shimura varieties (via $\pi_N(t)$) and of the Rapoport-Zink spaces (via $pr(t)$), with level structure at p. In particular, we shall prove that, for all level $M \leqslant t/2$, the corresponding two spaces over $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$ are indeed isomorphic and that these isomorphisms are compatible with the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the two sides.

Moreover, for any open affine V of $\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$ and any level $M \leqslant t/2$, we shall consider the morphisms $\pi_N[t,V] : V \to \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ and $pr_V : V \to \mathcal{M}$, which reduce over $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}(t)$ to the restrictions of $\pi_N(t)$ and $pr(t)$ on $V(t)$, respectively. We shall prove that the two covering spaces of V^{rig}, which are obtained as the pullbacks of the Shimura variety with structure of level M at p and of the Rapoport-Zink space of the same level, are also isomorphic and that, as in the previous case, these isomorphisms are compatible with the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$.

As a consequence of these two facts, we shall deduce that the pullbacks of the vanishing cycles of the Shimura varieties with level structure at p are isomorphic to the pullbacks of the vanishing cycles of the corresponding Rapoport-Zink spaces, and that such isomorphisms are compatible with the group actions.

7.1. Integral models for Shimura varieties with level structure at p

In [**20**] Katz and Mazur develop Drinfeld's notion of full level structure for elliptic modules into the notion of full set of sections and A-generators for finite flat group schemes, where A is a finite abstract group.

In this section, we shall use their work to define some integral models for the Shimura varieties with level structure at p.

7.1.1. We first introduce some notations. Let $A = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h$ be the abstract p-divisible group of height h and denote by $A[p^M]$ its p^M-torsion subgroup (then $A[p^M] \simeq (\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^h$).

Let us consider the group of the quasi-isogenies of A, $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$, and define

$$\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+ = \{g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \mid g^{-1} \in M_h(\mathbb{Z}_p)\}.$$

Then $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ is a submonoid of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ such that $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+, p\mathbb{I}_h\rangle = \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ and $p^{-1}\mathbb{I}_h \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$.

For any $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, we denote by $A[g^{-1}]$ the kernel of the isogeny $g^{-1} : A \twoheadrightarrow A$, by $e = e(g)$ the minimal integer such that $A[g^{-1}] \subset A[p^e]$ and write $d(g) = \log_p(\#A[g^{-1}])$ (thus $d(g) \leqslant e(g)h$). The morphism g^{-1} induces an inclusion of groups

$$A[p^{M-e}] \hookrightarrow A[p^M]/A[g^{-1}].$$

If $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$, then $A[g^{-1}] = (0)$, $e(g) = d(g) = 0$, and the corresponding inclusion $A[p^M] \hookrightarrow A[p^M]$ is simply the automorphism of $A[p^M]$ induced by restriction from $g^{-1} : A \to A$. In particular, if $g^{-1} \equiv \mathbb{I}_h \mod (p^M)$, this inclusion is just the identity.

7.1.2. For any positive integer M, we define $\mathfrak{X}_M$ over $\mathfrak{X}$ to be the scheme

$$\mathfrak{X}_M = W(A[p^M], \mathcal{H}[p^M]/\mathfrak{X}),$$

where $\mathcal{H}/\mathfrak{X}$ is the Barsotti-Tate group $\varepsilon\mathcal{A}[u^\infty]$ associated to the universal abelian variety $\mathcal{A}$ over $\mathfrak{X}$. We recall that the scheme $W(A[p^M], \mathcal{H}[p^M]/\mathfrak{X})$ is the universal space for the existence of a set of $A[p^M]$-generators $\{P_1,\dots,P_h\}$ of $\mathcal{H}[p^M]/\mathcal{X}$ and is endowed with a natural action of the group of automorphisms of $A[p^M]$, namely $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})$ (notations as in section 2.6.3).

For any $M \geqslant 0$, we regard the scheme $\mathcal{X}_M$ as endowed with the action of the group $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$, via the projection $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})$.

Proposition 7.1. — *Let M be a positive integer.*

(1) *The scheme $\mathcal{X}_M$ is finite over $\mathcal{X}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{E_u}$, and we have*

$$\mathcal{X}_M \times_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{E_u}} \operatorname{Spec} E_u = X_M \times_{\operatorname{Spec} E} \operatorname{Spec} E_u.$$

(2) *For any $M' \geqslant M$, there is a natural morphism $\phi_{M',M} : \mathcal{X}_{M'} \longrightarrow \mathcal{X}_M$ over $\mathcal{X}$ which is induced by the map $p^{M'-M} : \mathcal{H}[p^{M'}] \twoheadrightarrow \mathcal{H}[p^M]$ (or equivalently by the inclusion $\mathcal{H}[p^M] \hookrightarrow \mathcal{H}[p^{M'}]$), and we have*

$$\phi_{M',M} \times 1_{E_u} = \mathrm{f}_{M',M} \times 1_{E_u},$$

where $\mathrm{f}_{M',M} : X_{M'} \longrightarrow X_M$ is the natural projection.

(3) *For any $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ and any $M' \geqslant M$, we have*

$$g \circ \phi_{M',M} = \phi_{M',M} \circ g.$$

Moreover, the restriction of the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ on $\mathcal{X}_M$ to the generic fiber $X_M \times_{\operatorname{Spec} E} \operatorname{Spec} E_u$ coincides with the restriction to $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ of the action of $G(\mathbb{Q}_p)$ the Shimura varieties X_M.

Proof

Part (1). — The fact that $\mathcal{X}_M$ is finite over $\mathcal{X}$ follows from the more general fact that $W(A, Z/S)$ is finite over S, for any finite abstract group A and finite flat group scheme Z/S (see section 2.6.3).

We observe that the E_u-scheme $\mathcal{X}_M \times_{\mathcal{O}_{E_u}} E_u$ is the universal space for the existence of a set of $(\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^n$-generators on $\mathcal{H}[p^M]$ over $\mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_{E_u}} E_u = X \times_E E_u$, *i.e.*

$$\mathcal{X}_M \times_{\mathcal{O}_{E_u}} E_u = W(A[p^M], \mathcal{H}[p^M]/X \times_E E_u).$$

Since p is invertible in E_u, the group scheme $\mathcal{H}[p^M]$ is étale over $X \times_E E_u$. Thus the datum of a set of $(\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^n$-generators of $\mathcal{H}[p^M]$ is equivalent to the datum of an isomorphism

$$(\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^n_X \longrightarrow \mathcal{H}[p^M],$$

defined over $\mathcal{X}_M \times_{\mathcal{O}_{E_u}} E_u$ by setting $e_i = (0,\dots,1,\dots,0) \mapsto P_i$, for $i = 1,\dots,n$ (see section 2.6.2).

We conclude that $\mathcal{X}_M \times_{\mathcal{O}_{E_u}} E_u = X_M \times_E E_u$ over $X \times_E E_u$, since they are defined by equivalent universal properties.

Part(2). — If the morphism $\phi_{M',M}$ exists, then it follows directly the definitions that its generic fiber over E_u agrees the natural projection between Shimura varieties. Moreover, by the defining universal properties, proving the existence of the morphism $\phi_{M',M}$ is equivalent to showing that, if $\{P_1,\dots,P_n\}$ is the universal set of $\left(\mathbb{Z}/p^{M'}\mathbb{Z}\right)^n$-generators of $\mathcal{H}[p^{M'}]$ over $\mathfrak{X}_{M'}$, then $\{p^{M'-M}P_1,\dots,p^{M'-M}P_n\}$ is a set of $\left(\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}\right)^n$-generators of $\mathcal{H}[p^M]$ over $\mathfrak{X}_{M'}$. We postpone the proof of this fact to lemma 7.2.

Part (3). — It follows directly from the definitions. □

Lemma 7.2. — *Let M be a positive integer and H a Barsotti-Tate group of height h over a scheme S.*

Suppose that $P_1,\dots,P_h \in H[p^{M+1}](S)$ form a set of $\left(\mathbb{Z}/p^{M+1}\mathbb{Z}\right)^n$-generators of $H[p^{M+1}]$. Then $\{pP_1,\dots,pP_h\}$ is a set of $\left(\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}\right)^n$-generators of $H[p^M]/S$.

Proof. — For any affine S-scheme $\operatorname{Spec} R$, we write $B' = H^0(H[p^{M+1}]_R,\mathcal{O})$ and $B = H^0(H[p^M]_R,\mathcal{O})$. The morphism $p : H[p^{M+1}] \twoheadrightarrow H[p^M]$ induces a morphism of R-algebras $p^* : B \hookrightarrow B'$ such that B' is a locally free B-module of rank p^h. Thus, for any $g \in B$, we have $\det_{B'/R}(T - p^*(g)) = \left(\det_{B/R}(T-g)\right)^{p^h}$

The points $P_1,\dots,P_h \in H[p^{M+1}](S)$ form a set of $\left(\mathbb{Z}/p^{M+1}\mathbb{Z}\right)^h$-generators of $H[p^{M+1}]$. Thus, for any $f \in B'$, we have

$$\det_{B/R}(T-f) = \prod_{(a_i)\in(\mathbb{Z}/p^{M+1})^h} T - f\Big(\sum_{i=1}^h a_iP_i\Big).$$

In particular, for any $g \in B$, we have

$$\begin{aligned}\det_{B'/R}(T-p^*(g)) &= \prod_{(a_i)\in(\mathbb{Z}/p^{M+1})^h} T - p^*(g)\Big(\sum_{i=1}^h a_iP_i\Big)\\ &= \prod_{(a_i)\in(\mathbb{Z}/p^{M+1})^h} T - g\Big(p\sum_{i=1}^h a_iP_i\Big)\\ &= \Bigg(\prod_{(a_i)\in(\mathbb{Z}/p^{M})^h} T - g\Big(\sum_{i=1}^h a_ipP_i\Big)\Bigg)^{p^h}.\end{aligned}$$

Then $\left(\det_{B/R}(T-g)\right)^{p^h} = \left(\prod_{(a_i)\in(\mathbb{Z}/p^M)^h} T - g\left(\sum_{i=1}^h a_ipP_i\right)\right)^{p^h}$, which implies

$$\det_{B/R}(T-g) = \prod_{(a_i)\in(\mathbb{Z}/p^{M})^h} T - g\Big(\sum_{i=1}^h a_ipP_i\Big).$$ □

7.1.3. In order to extend the above action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ on the integral models of the Shimura varieties to an action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, we need to introduce some other integral models over $\mathcal{O}_{E_u}$.

Let $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, we write $e = e(g)$ and $d = d(g)$. Let M be a positive integer, $M \geqslant e$. We consider the space $\mathcal{X}_M$ and denote by $a_M : A[p^M] \to \mathcal{H}[p^M](\mathcal{X}_M)$ the universal $A[p^M]$-generator over $\mathcal{X}_M$.

We define $\mathcal{X}_{M,g}/\mathcal{X}_M$ to be the universal space for the existence of a finite flat subgroup $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}[p^e]$, of order d, such that

$$a_M(A[g^{-1}]) \subset \mathcal{E}(\mathcal{X}_{M,g}),$$

and the induced morphisms on the subquotients

$$A[p^{M-e}] \longrightarrow (\mathcal{H}/\mathcal{E})[p^{M-e}](\mathcal{X}_{M,g})$$

is a $A[p^{M-e}]$-generator.

Proposition 7.3. — *Maintaining the above notations.*

(1) *The scheme $\phi_{M,g} : \mathcal{X}_{M,g} \to \mathcal{X}_M$ exists and is proper. Moreover,*

$$\mathcal{X}_{M,g} \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{E_u}} \operatorname{Spec} E_u = X_M \times_{\operatorname{Spec} E} \operatorname{Spec} E_u$$

and $\phi_{M,g} \times 1_{E_u} = 1_{X_M} \times 1_{E_u}$.

(2) *For any $M' \geqslant M$, there is a natural morphism $\phi_{M',M,g} : \mathcal{X}_{M',g} \to \mathcal{X}_{M,g}$ over $\mathcal{X}$, which is induced by the inclusion $\mathcal{H}[p^M] \hookrightarrow \mathcal{H}[p^{M'}]$, and we have*

$$\phi_{M,g} \circ \phi_{M',M,g} = \phi_{M',g} \circ \phi_{M',M}$$

and thus also $\phi_{M',M,g} \times 1_{E_u} = \mathrm{f}_{M',M} \times 1_{E_u}$.

(3) *There is a natural proper morphism*

$$g : \mathcal{X}_{M,g} \longrightarrow \mathcal{X}_{M-e}$$

such that $g \circ \phi_{M',M,g} = \phi_{M',M} \circ g$, for any $M' \geqslant M$ and $g \times 1_{E_u} = g \times 1_{E_u}$.

(4) *For any $\gamma \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$, there is a natural identification*

$$\mathcal{X}_{M,g} \simeq \mathcal{X}_{M,g\gamma}$$

over $\mathcal{X}_M$ and, under such identification, we have

$$\phi_{M,g\gamma} = \gamma \circ \phi_{M,g}.$$

(5) *For any positive integer $r \leqslant M$, the morphism*

$$\phi_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h} : \mathcal{X}_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h} \longrightarrow \mathcal{X}_M$$

is an isomorphism and $f_{M,M-r} = p^{-r}\mathbb{I}_h \circ \phi^{-1}_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h}$.

Proof

Part (1). — It follows from the general theory of Hilbert Spaces and from proposition 2.19 that the scheme $\mathcal{X}_{M,g}$ exists and is proper over $\mathcal{X}_M$. Moreover, the remark of section 2.6.2 implies that the generic fiber of $\mathcal{X}_{M,g}$ can be identified with $X_M \times_E E_u$.

Part (2). — The statement follows from lemma 7.2, using the same argument of part (2) of proposition 7.1.

Part (3). — Let $\mathcal{A}$ be the universal abelian variety over $\mathfrak{X}_{M,g}$ and consider the subgroup $\langle\mathcal{E}\rangle \subset \mathcal{A}[p^e]$, associated to $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}[p^e]$. We define the morphism

$$g : \mathfrak{X}_{M,g} \longrightarrow \mathfrak{X}_{M-e}$$

to be associated to the quintuple $(\mathcal{A}/\langle\mathcal{E}\rangle, \lambda', i', \overline{\mu}'; a'_{M-e})$ where there structures on the abelian varieties $\mathcal{A}/\langle\mathcal{E}\rangle$ are induced by the ones on $\mathcal{A}$ via the isogeny $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\langle\mathcal{E}\rangle$:

- λ' is the polarization induced by $p^e\lambda$;
- i' is the B-action induce by i;
- μ' is the level structure induced by $\mu \circ v^e$, for $v \in E^\times$ such that $\mathrm{val}_u(v) = 0$ and $\mathrm{val}_{u^c}(v) = 1$;
- $a'_{M-e} : A[p^{M-e}] \to (\mathcal{H}/\mathcal{E})[p^{M-e}](\mathfrak{X}_{M,g})$ denotes the $A[p^{M-e}]$-generator induced by a_M on the p^{M-e}-torsion subgroup of the Barsotti-Tate group $\mathcal{H}/\mathcal{E} = \varepsilon\mathcal{A}/\langle\mathcal{E}\rangle[u^\infty]$.

It follows from the definition that the morphisms g commute with the projections among integral models of the Shimura varieties of different levels and that their restrictions to the generic fibers agree with the previously defined action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+ \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ on the Shimura varieties.

It remains to prove that the morphisms $g : \mathfrak{X}_{M,g} \to \mathfrak{X}_{M-e}$ are proper. By the Valuative Criterium of Properness (see [**15**], Theorem 4.7, p. 101) it suffices to show that:

- if R is a complete discrete valuation ring over $\overline{\mathbb{F}}_p$, K its fraction field and η : $\mathrm{Spec}\, K \to \mathrm{Spec}\, R$ the morphism corresponding to the natural inclusion of R in K, then for any pair of morphisms (F, f) such that $g \circ F = f \circ \eta$ there exists a map $\phi : \mathrm{Spec}\, R \to \mathfrak{X}_{M,g}$ such that the following diagram commutes.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\, K \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\eta"] & \mathfrak{X}_{M,g} \arrow[d, "g"] \\
\mathrm{Spec}\, R \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\phi"] & \mathfrak{X}_{M-e}
\end{tikzcd}$$

Let $(A, \lambda, i, \overline{\mu}; E \subset H[p^e], a_M)$ (where $H = \varepsilon A[u^\infty]$) be the sixtuple defined over K, associated to the morphism F, and $(\mathcal{B}, \lambda', i', \overline{\mu}'; b'_{M-e})$ the quintuple over R, associated to f. Then, the equality $g \circ F = f \circ \eta$ implies that there is an equivalence of quintuple

$$(\mathcal{B}, \lambda', i', \overline{\mu}'; b'_{M-e})_K \simeq (A/\langle E\rangle, \lambda', i', \overline{\mu}; a'_{M-e}).$$

We fix an isogeny $\psi : \mathcal{B}_K \to A/\langle E\rangle$, giving rise to the above equivalence (then, ψ induces an isomorphism $\varepsilon\mathcal{B}_K \simeq H/E$).

Let us now consider the projection $q : A \twoheadrightarrow A/\langle E\rangle$. Since $E \subset H[p^e]$, it follows that there exists an isogeny $q' : A/\langle E\rangle \twoheadrightarrow A$ such that $q \circ q' = p^e$.

Let us write $F = \psi^{-1}(\ker q') \subset \mathcal{B}_K[p^e]$ and $\mathcal{F} = \overline{F} \subset \mathcal{B}[p^e]$ its Zariski closure. Then, $\mathcal{F}$ is a finite flat subgroup of the abelian variety $\mathcal{B}$ and the quotient $\mathcal{B}/\mathcal{F}$, together with the appropriate induced structures, defines an integral model over R

for the quadruple $(A, \lambda, i, \overline{\mu})$. Moreover, the finite flat subgroup $\mathcal{E} = \varepsilon(\mathcal{B}[p^e]/\mathcal{F})[u^e]$ restricts over K to the subgroup E. Finally, it follows from proposition 2.19 that it is possible to define an $A[p^M]$-generator b_M of $\varepsilon(\mathcal{B}/\mathcal{F})[p^M]$ over R, compatible with a_M.

The morphism ϕ, associated to the abelian variety $\mathcal{B}/\mathcal{F}$ together with the finite flat subgroup $\mathcal{E}$ and the $A[p^M]$-generator b_M, has the required property.

Part (4). — Let $\gamma \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$. Then, for any $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, $g\gamma \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and moreover $A[g^{-1}] = A[(g\gamma)^{-1}]$ (thus also $e(g) = e(g\gamma)$ and $d(g) = d(g\gamma)$).

Now, suppose $\mathcal{E}$ is a subgroup of $\mathcal{H}[p^e]$ such that $a_M(A[g^{-1}]) = a_M(A[(g\gamma)^{-1}]) \subset \mathcal{E}$ and denote by

$$a'_{M-e} : A[p^{M-e}] \longrightarrow (\mathcal{H}/\mathcal{E})[p^{M-e}](\mathfrak{X}_{M,g})$$

the morphism of groups induced by a_M via g. Then, $a'_{M-e} \circ \gamma$ is the morphism induced by a_M via $g\gamma$. It follows, in particular, that a'_{M-e} is a $A[p^{M-e}]$-generator of $(\mathcal{H}/\mathcal{E})[p^{M-e}]$ if and only if $a'_{M-e} \circ \gamma$ is one. Thus, we may identify $\mathfrak{X}_{M,g} \simeq \mathfrak{X}_{M,g\gamma}$ and under this identification we have $\phi_{M,g\gamma} = \gamma \circ \phi_{M,g}$.

Part (5). — Let r be an integer, $0 \leqslant r \leqslant M$. Then $p^{-r}\mathbb{I}_h \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and we have $e(p^{-r}\mathbb{I}_h) = r$ and $d(p^{-r}\mathbb{I}_h) = rh$. Let $\mathcal{E}$ be the universal finite flat subgroup of $\mathcal{H}$ over $\mathfrak{X}_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h}$. By definition, $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}[p^r]$ and has order rh, *i.e.* the same order of $\mathcal{H}[p^r]$. Therefore $\mathcal{E} = \mathcal{H}[p^r]$. (This equality of subgroup implies that the morphism $\phi_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h}$ is a closed embedding.) Moreover, it follows from lemma 7.2 that the subgroup $\mathcal{H}[p^r]/\mathfrak{X}_M$ has all the required universal properties. We therefore conclude that the morphism $\phi_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h}$ is an isomorphism.

Finally, the equality $f_{M,M-r} = p^{-r}\mathbb{I}_h \circ \phi_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h}$ is a direct consequence of the equality $\mathcal{E} = \mathcal{H}[p^{-r}]$. □

7.1.4. In the following we will refer to the data of the morphisms $g : \mathfrak{X}_{M,g} \to \mathfrak{X}_{M-e}$, for $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, as the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the integral models of the Shimura varieties.

We remark that the above action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ preserves the Newton polygon stratification of the special fibers.

7.1.5. For all $M \geqslant 0$ and $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ $(M \geqslant e = e(g))$, we denote by $\varphi_{M,g} : \mathfrak{X}_{M,g} \to \mathfrak{X}_M$ (resp. $\varphi_M : \mathfrak{X}_M \to \mathfrak{X}$) the formal scheme over $\mathfrak{X}$ associated to $\mathfrak{X}_{M,g} \to \mathfrak{X}_M$ (resp. $\mathfrak{X}_M \to \mathfrak{X}$), and by $\varphi_{M',M,g} : \mathfrak{X}_{M',g} \to \mathfrak{X}_{M,g}$ (resp. $\varphi_{M',M} : \mathfrak{X}_{M'} \to \mathfrak{X}_M$ and $g : \mathfrak{X}_{M,g} \to \mathfrak{X}_{M-e}$) the morphism induced by $\phi_{M',M,g}$ (resp. $\phi_{M',M}$ and g), for any $M' \geqslant M$.

7.2. Integral models for Rapoport-Zink spaces with level structure

In the following we define some formal schemes over $\mathcal{M}$, which are the analogues of the formal schemes $\mathfrak{X}_{M,g}/\mathfrak{X}$, such that the associated rigid-analytic spaces are the covering spaces $\mathcal{M}_M^{\mathrm{rig}}/\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$ by defined Rapoport and Zink (see section 2.5).

7.2.1. Let us recall that Zariski locally the Rapoport-Zink space $\mathcal{M}$ is defined as the p-adic completion of the a closed subscheme U of a Grassmannian variety associated to the algebra of functions of $\Sigma[p^d]$, for some positive integer d.

For any such scheme $U/\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, let us denote by $\mathcal{H}'$ the universal Barsotti-Tate group over U. For any integer $M \geqslant 0$, we define

$$U_M = W(A[p^M], \mathcal{H}'[p^M]/U)$$

and denote by $\delta_M : U_M \to U$ the natural morphism and by $b_M : A[p^M] \to \mathcal{H}'[p^M]$ the universal $A[p^M]$-generator over U_M.

Moreover, for any $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and $M \geqslant e = e(g)$, we define $U_{M,g}/U_M$ to be the universal space for the existence of a finite flat subgroup $\mathcal{E}' \subset \mathcal{H}'[p^e]$, of order $d = d(g)$, such that

$$b_M(A[g^{-1}]) \subset \mathcal{E}'(U_{M,g}),$$

and the induced morphisms on the subquotients

$$A[p^{M-e}] \longrightarrow (\mathcal{H}'/\mathcal{E}')[p^{M-e}](\mathfrak{X}_{M,g})$$

is a $A[p^{M-e}]$-generator. We denote by $\delta_{M,g} : U_{M,g} \to U$ the natural morphism.

As the p-adic completion of U varies among an open cover of $\mathcal{M}$, the p-adic completions of the spaces $U_{M,g}$ (resp. U_M) describe a formal scheme $\delta_{M,g} : \mathcal{M}_{M,g} \to \mathcal{M}$ (resp. $\delta_M : \mathcal{M}_M \to \mathcal{M}$), for all M, g. It follows from the construction that all the formal schemes $\mathcal{M}_{M,g}$ and $\mathcal{M}_M$ are formally locally of finite type over $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$.

It is also a direct consequence of the definitions that the above spaces naturally form a system, *i.e.* there are some morphisms $\delta_{M',M,g} : \mathcal{M}_{M',g} \to \mathcal{M}_{M,g}$ and $\delta_{M',M} : \mathcal{M}_{M'} \to \mathcal{M}_M$, associated to the inclusions $\mathcal{H}'[p^M] \hookrightarrow \mathcal{H}'[p^{M'}]$, which satisfy the obvious commutativity laws.

7.2.2. For any positive integers n, d, we denote by $\mathcal{M}_{M,g}^{n,d}$ and $\mathcal{M}_M^{n,d}$ the pullbacks over $\mathcal{M}^{n,d} \subset \mathcal{M}$ of the spaces $\mathcal{M}_{M,g}$ and $\mathcal{M}_M$ respectively, for all g, M.

Then, for any $n' \geqslant n$ and $d' - d \geqslant (n' - n)h$, the inclusions $i = i_{n',d'}^{n,d} : \mathcal{M}^{n,d} \hookrightarrow \mathcal{M}^{n',d'}$ naturally give rise to some morphisms

$$i_{M,g} = (i_{n',d'}^{n,d})_{M,g} : \mathcal{M}_{M,g}^{n,d} \longrightarrow \mathcal{M}_{M,g}^{n',d'}$$

and

$$i_M = (i_{n',d'}^{n,d})_M : \mathcal{M}_M^{n,d} \longrightarrow \mathcal{M}_M^{n',d'},$$

and the restriction of the morphisms $\delta_{M',M}$ and $\delta_{M',M,g}$ to some morphisms

$$\delta_{M',M,g}^{n,d} : \mathcal{M}_{M'}^{n,d} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_M^{n,d}$$

and

$$\delta_{M',M,g}^{n,d} : \mathcal{M}_{M',g}^{n,d} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{M,g}^{n,d}.$$

Proposition 7.4. — *Maintaining the above notations.*

(1) *The formal schemes* $\delta_M : \mathcal{M}_M \to \mathcal{M}$ *(resp.* $\delta_{M,g} : \mathcal{M}_{M,g} \to \mathcal{M}_M$*) are finite (resp. proper).*

Moreover, there are natural identifications

$$(\mathcal{M}_{M,g})^{\mathrm{rig}} = (\mathcal{M}_M)^{\mathrm{rig}} = \mathcal{M}_M^{\mathrm{rig}},$$

which are compatible with the natural projections.

(2) *For any* $M \geqslant 0$*, there is an action of* $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ *on* $\mathcal{M}_M$*, which is compatible with the action of* $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ *on the corresponding rigid analytic space, and commutes with the projections* $\delta_{M',M}$*, for any* $m' \geqslant M$*.*

(3) *For any* $M \geqslant e(g) = e$*, there exist some proper morphisms*

$$g : \mathcal{M}_{M,g} \longrightarrow \mathcal{M}_{M-e}$$

which are compatible, under the above identifications, with the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+ \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ *on the rigid analytic Rapoport-Zink spaces.*

(4) *For any* $\gamma \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$*, there is a natural identification* $\mathcal{M}_{M,g} \simeq \mathcal{M}_{M,g\gamma}$ *over* $\mathcal{M}_M$*, and, under such identification, we have* $\delta_{M,g\gamma} = \gamma \circ \delta_{M,g}$*.*

(5) *For any positive inter* $r \leqslant M$*, the morphism* $\delta_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h} : \mathcal{M}_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h} \to \mathcal{M}_M$ *is an isomorphism and* $\delta_{M,M-r} = p^{-r}\mathbb{I}_h \circ \delta^{-1}_{M,p^{-r}\mathbb{I}_h}$*.*

(6) *There exist some* σ*-linear automorphisms*

$$\mathrm{Frob} : \mathcal{M}_M \longrightarrow \mathcal{M}_M \text{ and } \mathrm{Frob} : \mathcal{M}_{M,g} \longrightarrow \mathcal{M}_{M,g}$$

such that $\delta_M \circ \mathrm{Frob} = \mathrm{Frob} \circ \delta_M$*,* $\delta_{M,g} \circ \mathrm{Frob} = \mathrm{Frob} \circ \delta_{M,g}$ *and* $g \circ \mathrm{Frob} = \mathrm{Frob} \circ g$*.*

(7) *For any* $\rho \in T$*, there exist some automorphisms*

$$\rho : \mathcal{M}_M \longrightarrow \mathcal{M}_M \text{ and } \rho : \mathcal{M}_{M,g} \longrightarrow \mathcal{M}_{M,g}$$

which define an action of T *on the integral models of the Rapoport-Zink spaces compatible with the action of* T *on the corresponding rigid analytic spaces.*

Moreover, for any $\rho \in T$*, we have* $\delta_M \circ \rho = \rho \circ \delta_M$*,* $\delta_{M,g} \circ \rho = \rho \circ \delta_{M,g}$ *and* $g \circ \rho = \rho \circ g$*.*

Proof

Part (1). — The same arguments of propositions 7.1 and 7.3 apply but, in order to deduce the above identifications among the corresponding rigid analytic spaces, one should also check that the construction of the space $\underline{\mathrm{Isom}}(X, Y)/S$, for X, Y two finite flat group schemes over S, commutes with analytification (and this is proved in [**6**],Theorem 3.5.6, p. 61).

Part (2). — Let M be a positive integer and $\gamma \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$. We first define, for all n, d, some morphisms

$$\gamma^{n,d} : \mathcal{M}_M^{n,d} \longrightarrow \mathcal{M}_M^{n,d}.$$

Let $(\mathcal{H}, \beta : \Sigma \to \overline{\mathcal{H}}; a_M)$ be the universal triple over $\mathcal{M}_M^{n,d}$ (where $\overline{\mathcal{H}}$ denotes the restriction of $\mathcal{H}$ to the locus $p = 0$). Then, we define $\gamma^{n,d}$ to be the morphism associated to the triple

$$(\mathcal{H}, \beta : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}; a_M \circ \gamma_{|A[p^M]}).$$

It follows from the definition that the morphisms $\gamma^{n,d}$ commutes with the inclusions i_M, and thus give rise to a morphism $\gamma : \mathcal{M}_M \to \mathcal{M}_M$. Moreover, it is easy to see that the morphisms γ define an action of $\mathrm{GL}_(\mathbb{Z}_p)$ on the $\mathcal{M}_M$ with the required properties.

Part (3). — As in part (2), we first define, for all n, d, some morphisms

$$g : \mathcal{M}_{M,g}^{n,d} \longrightarrow \mathcal{M}_{M-e}^{n,d+e}.$$

Let $(\mathcal{H}, \beta : \Sigma \to \overline{\mathcal{H}}; \mathcal{E} \subset \mathcal{H}[p^e], a_M)$ be the universal quadruple over $\mathcal{M}_{M,g}^{n,d}$ (where $\overline{\mathcal{H}}$ denotes the restriction of $\mathcal{H}$ to the locus $p = 0$). Then, we define g to be the morphism associated to the triple

$$(\mathcal{H}/\mathcal{E}, \beta \circ p_{\overline{\mathcal{E}}} : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}/\overline{\mathcal{E}}; a'_{M-e})$$

where $\overline{\mathcal{E}}$ denotes the restriction of $\mathcal{E}$ to the locus $p = 0$, $p_{\overline{\mathcal{E}}} : \overline{\mathcal{H}} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{H}}/\overline{\mathcal{E}}$ the natural projection and a'_{M-e} the induced $A[p^{M-e}]$-generator of $(\mathcal{H}/\mathcal{E})[p^{M-e}]$.

It follows from the definition that the morphisms g commutes with the inclusions $i_{M,g}$ and i_{M-e}, and thus give rise to a morphism $g : \mathcal{M}_{M,g} \to \mathcal{M}_{M-e}$.

The same argument we used to prove part (3) of proposition 7.3 shows here that the morphism g we have defined is proper. It is also an easy consequence of the definition that the above morphism is compatible with the previously defined action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+ \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ on the rigid analytic Rapoport-Zink spaces.

Parts (4) and (5). — The same arguments used to prove parts (4) and (5) of proposition 7.3 apply here.

Part (6). — Let us identify $\mathcal{M}_M = \mathcal{M}_{M,\mathbb{I}_h}$ and define the σ-linear morphism on $\mathcal{M}_{M,g}$, for all M, g ($M \geqslant e(g)$). We use the universal property of $\mathcal{M}_{M,g}$ to define Frob to be the morphism

$$(H, \beta; a_M, E) \longmapsto (H, \beta \circ F^{-1}; a_M, E).$$

It is clear that the morphism Frob as all the required properties.

Part (7). — As in part (6), we identify $\mathcal{M}_M = \mathcal{M}_{M,\mathbb{I}_h}$ and define, for any $\rho \in T$, some automorphisms ρ of $\mathcal{M}_{M,g}$, for all M, g ($M \geqslant e(g)$). We set ρ to be the automorphism of $\mathcal{M}_{M,g}$ defined by

$$(H, \beta; a_M, E) \longmapsto (H, \beta \circ \rho; a_M, E).$$

Again, it is a direct consequence of the definition that the above morphisms define an action of T with the required properties. □

7.2.3. We refer to the data of the morphisms $g : \mathcal{M}_{M,g} \to \mathcal{M}_{M-e}$, for $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, as the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the integral models of the Rapoport-Zink spaces.

7.3. Comparing the spaces $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ and $\mathcal{M}_{M,g}$. — The goal of this section is to compare, for any Newton polygon α of dimension q and height h, the spaces $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ and $\mathcal{M}_{M,g}$ (for any $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and integer $M \geqslant e(g)$), in terms of the associated covers over $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$ (for all $t > 0$) and over any affine open V of $\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$.

In the first case, we shall consider the morphisms

$$\pi_N(t) : (\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t) \longrightarrow \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} \subset \mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}},$$

for $N \geqslant (d + t/2)/\delta B$, and the projection onto the second factor

$$pr(t) : (\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t) \longrightarrow \mathcal{M},$$

and we shall compare the two systems of spaces $\pi_N(t)^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})$ and $pr(t)^*\mathcal{M}_{M,g}$ over $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$, as g, M vary.

In the second case, for any affine open V of $\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$, we shall consider the morphism

$$\pi_N[t, V] : V \longrightarrow \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} \subset \mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}},$$

for $N \geqslant (d + t/2)/\delta B$, and the projection

$$pr_V = pr_{|V} : V \longrightarrow \mathcal{M},$$

and compare the spaces $\pi_N[t, V]^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})$ and $pr_V^*\mathcal{M}_{M,g}$ over V.

We shall prove that, in both cases, when $[t/2] \geqslant M$, the pullbacks of $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ and $\mathcal{M}_{M,g}$ we consider are indeed isomorphic.

7.3.1. Let α be a Newton polygon of dimension q and height h, and m, n, d be some positive integers. Let $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and $M \geqslant e = e(g)$ and assume $m - d \geqslant M$. For any positive integers t, N such that $m - d \geqslant [t/2] \geqslant M$ and $N \geqslant (d + t/2)/\delta B$, we consider the spaces

$$\pi_N(t)^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}) = \mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} \times_{\mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}, \pi_N(t)[M]} (\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$$

and

$$pr(t)^*\mathcal{M}_{M,g} = \mathcal{M}_{M,g} \times_{\mathcal{M}, pr(t)} (\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t).$$

We also denote respectively by $f_{M,g}(t)$ and $g_{M,g}(t)$ the natural projections to $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$. (Let us remark that the morphisms $g_{M,g}(t)$ are the restrictions of some morphisms defined over $\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, namely $g_{M,g} : pr^*\mathcal{M}_{M,g} \to \mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d}$, but this is not true for the morphisms $f_{M,g}(t)$.)

Proposition 7.5. — *Maintaining the notations as above.*

There exist some isomorphisms

$$\xi_N(t)[M, g] : \pi_N(t)^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow pr(t)^*\mathcal{M}_{M,g},$$

such that $g_{M,g}(t) \circ \xi_N(t)[M,g] = f_{M,g}(t)$, *which are compatible with the actions of* $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ *on the two systems of spaces.*

Proof. — Let us first consider the case $g = \mathbb{I}_h$. We write $\mathfrak{X}_{M,\mathbb{I}_h} = \mathfrak{X}_M$ and $\mathcal{M}_{M,\mathbb{I}_h} = \mathcal{M}_M$.

We recall that, for any S-scheme T, we have $W(A, Z/S)_T = W(A, Z_T/T)$ (see section 2.6.3). Thus, it follows from the definitions that

$$\pi_N(t)^*(\mathfrak{X}_M \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}) = W((\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^n, \widehat{\mathcal{H}}_N[p^M]/(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t))$$

and

$$pr(t)^*\mathcal{M}_M = W((\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^n, \mathcal{H}'[p^M]/(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)),$$

where $\widehat{\mathcal{H}}_N = \pi_N(t)^*\mathcal{H}$, and $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}'$ are the universal Barsotti-Tate group over $\mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ and the Rapoport-Zink space $\mathcal{M}^{n,d}$, respectively.

We recall that, for any two finite flat group schemes Z, Z' over a scheme S, we have $W(A, Z/S) \simeq W(A, Z'/S)$ if $Z \simeq Z'$ (see section 2.6.3). Therefore, in order to conclude, it suffices to show that there exists an isomorphism of finite flat group schemes over $(\mathcal{J}_m \times_{\mathrm{Spf}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}} \mathcal{M}^{n,d})(t)$

$$\widehat{\mathcal{H}}_N[p^M] \longrightarrow \mathcal{H}'[p^M].$$

Indeed, such an isomorphism exists by the very definition of the morphisms $\pi_N(t)$, since we assumed $[t/2] \geqslant M$. The corresponding isomorphism

$$\xi_N(t)[M] = \xi_N(t)[M, \mathbb{I}_h] : \pi_N(t)^*(\mathfrak{X}_M \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow pr(t)^*\mathcal{M}_M$$

has the required properties.

Let $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$. The above isomorphism $\xi_N(t)[M, \mathbb{I}_h]$, together with the isomorphism of finite flat group schemes $\widehat{\mathcal{H}}_N[p^M] \to \mathcal{H}'[p^M]$, enables us to identify the schemes $\pi_N(t)^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})$ and $pr(t)^*\mathcal{M}_{M,g}$, as spaces defined by the same universal property. Moreover, it is clear that these identifications are compatible with the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$. □

7.3.2. Let V be an affine open of $\mathcal{J}_m \times U^{n,d}$. We proved (see proposition 6.8) that, for any positive integers t, N such that $m \geqslant d + t/2$ and $N \geqslant (d + t/2)/\delta B$, there exists a morphism $\pi_N[t, V]$ on V which restricts to $\pi_N(t)_{|V(t)}$ on $V(t)$. Thus, if we consider the spaces

$$\pi_N[t, V]^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}) = \mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} \times_{\mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}, \pi_N[M,t,V]} V$$

and

$$pr_V^*\mathcal{M}_{M,g} = \mathcal{M}_{M,g} \times_{\mathcal{M}, pr_V} V,$$

then over $V(t)$ we have

$$(\pi_N[t, V]^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}))_{|V(t)} = (\pi_N(t)^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}))_{|V(t)}$$

and

$$(pr_V^*\mathcal{M}_{M,g})_{|V(t)} = (pr(t)^*\mathcal{M}_{M,g})_{|V(t)}.$$

We investigate the possibility of extending the restrictions over $V(t)$ of the isomorphisms $\xi_N(t)[M,g]$ to an isomorphism over V.

Proposition 7.6. — *Maintaining the notations as above. For any affine open V of $\mathcal{J}_m \times U^{n,d}$, there exists an isomorphism of formal schemes over V*

$$\xi_N[t,V][M,g] : \pi_N[t,V]^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow pr_V^*\mathcal{M}_{M,g}$$

which extends the isomorphism $\xi_N(t)[M,g]_{|V(t)}$ and is compatible with the actions of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the two systems of spaces.

Proof. — The statement follows directly from the definitions of the morphisms $\pi_N[t,V]$ and $\xi_N(t)[M,g]$. In fact, to extend the isomorphism $\xi_N(t)[M,g]_{|V(t)}$ to an isomorphism over V, compatible with the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, it suffices to extend the isomorphism over $V(t)$

$$\pi_N(t)^*\mathcal{H}[p^M] \longrightarrow \mathcal{H}'[p^M]$$

to an isomorphism over V between the p^M-torsion subgroups of the Barsotti-Tate group $\pi_N[t,V]^*\mathcal{H}/V$ and $\mathcal{H}'/V$. Such an isomorphism exists by the very definition of $\pi_N[t,V]$ and the assumption $[t/2] \geqslant M$. □

7.3.3. Finally, let us recall that, in section 6.4, for all n,d, we introduced some morphisms

$$\widehat{y}_N : U^{n,d} \longrightarrow \mathfrak{X}^{(\alpha)} \times \operatorname{Spf}\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} \subset \mathfrak{X} \times \operatorname{Spf}\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$$

associated to a point $y \in J_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p)$, for all $N \geqslant 1$, such that over $U^{n,d}$ we have $\widehat{y}_N(t) = \pi_N(t) \circ (y_m^\wedge, \mathrm{id})(t)$, for all $t \geqslant 1$ and m, N sufficiently large, and also $\widehat{y}_N^*\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}'$. Arguing as in the proofs of propositions 7.5 and 7.6, we conclude that there exist some isomorphisms over $U^{n,d}$

$$\xi_{y,N}[M,g] : \widehat{y}_N^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow U_{M,g}^{n,d},$$

which extends the isomorphism $(y_m, \mathrm{id})(t)^*\xi_N(t)[M,g]$ from $\widehat{y}_N(t)^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}) = (y_m, \mathrm{id})(t)^*\pi_N(t)^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})$ to $(y_m, \mathrm{id})(t)^*pr(t)^*\mathcal{M}_{M,g} = U_{M,g}^{n,d}(t)$, and which are compatible with the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$.

7.4. The vanishing cycles sheaves on Shimura varieties. — We shall now use Berkovich's theory of vanishing cycles for rigid analytic spaces to prove that the vanishing cycles sheaves $R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ on a Shimura variety with level structure at p and the vanishing cycles sheaves $R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ on the Rapoport-Zink space of the same level are isomorphic once pulled back over the covering spaces $J_m \times \overline{U}^{n,d}$. Moreover, such isomorphisms between the vanishing cycles sheaves are compatible with the action of the Weil group and $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$.

7.4.1. Let ℓ be a prime number, $\ell \neq p$. We fix an integer $r \geqslant 1$, a level $M > 0$ and $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ (where $M \geqslant e = e(g)$), and study the vanishing cycles of the constant étale sheaf $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ on the Shimura variety $\mathfrak{X}_{M,g}$.

7.4.2. Let m, n, d be some positive integers, $m \geqslant d + M$. We choose a finite cover $\mathcal{V}$ of affine opens V of $\mathcal{J}_m \times U^{n,d}$, and write $V_{M,g}$ for the pullback of $\mathcal{J}_m \times U^{n,d}_{M,g}$ over V, for all $V \in \mathcal{V}$.

Let $\mathcal{I}$ denote an ideal of definition of $\mathcal{J}_m \times U^{n,d}_{M,g}$, and choose a positive integer $t = t_{M,r,\mathcal{V}} \geqslant 2M$ such that, for all $W = V_1 \cap V_2$ for some $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ (possibly $V_1 = V_2$), the ideals $\mathcal{I}^t_{|W}$ satisfy the property in the statement of proposition 2.24 for $\mathfrak{X}' = W_{M,g}$ and $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ respectively.

Let $m' \geqslant m$ such that $m' \geqslant d + t/2$ and choose $N \geqslant (d+t/2)/\delta B$. For each $V \in \mathcal{V}$, we write $V_{m'}$ (resp. $V_{m',M,g}$) for the pullback of $\mathcal{J}_{m'} \times U^{n,d}$ (resp. $\mathcal{J}_{m'} \times U^{n,d}_{M,g}$) over V. Then, for each $V \in \mathcal{V}$, $V_{m',M,g} \to V_{M,g}$ is finite étale with degree equal to $[J_{m'} : J_m]$, which is a p-power (and thus, in particular, relatively prime to ℓ). For simplicity, we write $\pi_V = \pi_N[t, V_{m'}]$, $\xi_V = \xi_N[t, V_{m'}][M, g]$ and $\overline{\pi}_N = \pi_N(1)$.

For any $V \in \mathcal{V}$, we use the isomorphism ξ_V to identify the spaces $V_{m',M,g}$ and $\pi_V^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})$ and write

$$\varpi_V : V_{m',M,g} \longrightarrow \mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$$

for the pullback of the morphism $\pi_V : V_{m'} \to \mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, under the projection $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} \twoheadrightarrow \mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$.

We remark that the morphism $(\pi_V)_s : \overline{V}_{m'} \to \overline{X}$ factors as $\overline{\pi}_N \circ (\mathrm{q}_{m',m} \times 1)_{|\overline{V}}$, and thus the morphism $(\varpi_V)_s$ factors via the projection $\overline{V}_{m',M,g} \to \overline{V}_{M,g}$, *i.e.*

$$(\varpi_V)_s = \overline{\varpi}_N \circ (\mathrm{q}_{m,m'} \times 1)_{|\overline{V}_{M,g}},$$

where $\overline{\varpi}_N : J_m \times \overline{U}^{n,d}_{M,g} \to \overline{X}_{M,g} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ denotes the pullback of the morphism $\overline{\pi}_N$.

We deduce that the morphism ϖ_V gives rise to a morphism of objects in the derived category of étale sheaves over $\overline{V}_{M,g}$

$$\theta_V : \overline{\varpi}_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta})_{|\overline{V}_{M,g}} \longrightarrow R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{J}_m \times U^{n,d}_{M,g})_\eta})_{|\overline{V}_{M,g}}$$

(see proposition 2.24).

Proposition 7.7. — *The morphisms θ_V, for $V \in \mathcal{V}$, piece together in an isomorphism between the vanishing cycles sheaves over $J_m \times \overline{U}^{n,d}_{M,g}$*

$$\theta = \theta_{M,g} : \overline{\varpi}_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta}) \longrightarrow R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{J}_m \times U^{n,d}_{M,g})_\eta}),$$

Moreover, the isomorphisms $\theta_{M,g}$ are compatible with the morphisms induced by changes of level and by the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ *on the Shimura varieties $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ and on the spaces $\mathcal{J}_m \times U^{n,d}_{M,g}$, respectively.*

Proof. — First, we prove that the morphisms θ_V, $V \in \mathcal{V}$, give rise to a global morphism between the above vanishing cycles sheaves over $J_m \times U^{n,d}_{M,g}$.

Indeed, for each $W = V_1 \cap V_2$, $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, we consider the restriction to $W_{m',M,g}$ of the two morphism ϖ_{V_i}, $i = 1, 2$. By definition, we have $(\pi_{V_1})_{|W_{m'}}(t) = (\pi_{V_2})_{|W_{m'}}(t)$ which implies that we also have $(\varpi_{V_1})_{|W_{m',M,g}}(t) = (\varpi_{V_2})_{|W_{m',M,g}}(t)$. It follows from proposition 2.24 and from our choice of the integer t that the induced morphisms $\theta_{V_i|\overline{W}_{M,g}}$ $(i = 1, 2)$ between the vanishing cycles sheaves agree.

Moreover, since for all $V \in \mathcal{V}$ the morphisms ϖ_V are formally smooth (because such are the morphism π_V), it follows from proposition 2.26 that the corresponding morphisms between the vanishing cycles of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ over the special fiber $\overline{V}_{m',M,g}$ of $V_{m',M,g}$ are isomorphisms and thus such are also the morphisms θ_V.

Finally, the compatibility of the $\theta_{M,g}$ with the morphisms associated to changes of level and the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ follows from the corresponding property of the isomorphisms ξ_V, for all V. □

Corollary 7.8. — *Let $\mathfrak{p} : \mathcal{J}_m \times U^{n,d}_{M,g} \to \mathcal{M}_{M,g}$ be the natural projection.*

There exists an isomorphism of objects in the derived category of étale sheaves over $J_m \times \overline{U}^{n,d}_{M,g}$

$$\zeta = \zeta_{M,g} : \overline{\varpi}^*_N R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g}\times\widehat{\mathbb{Z}}^{\mathrm{nr}}_p)_\eta}) \longrightarrow \mathfrak{p}^*_s R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/\mathcal{M}_{M,g_\eta}}),$$

which is compatible with the morphisms induced by changes of level and by the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the Shimura varieties and the Rapoport-Zink spaces, respectively.

Proof. — Since the formal Igusa varieties are formally smooth over $\widehat{\mathbb{Z}}^{\mathrm{nr}}_p$, it follows from proposition 2.26 that the morphism $\mathfrak{p}$ gives rise to an isomorphism between the vanishing cycles

$$\mathfrak{p}^*_s R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/\mathcal{M}_{M,g_\eta}}) \simeq R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{J}_m\times U^{n,d}_{M,g})_\eta}).$$

It is also clear from the definitions that such isomorphisms is compatible with the morphisms induced by changes of level and by the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the Rapoport-Zink spaces $\mathcal{M}_{M,g}$ and on the $\mathcal{J}_m \times U^{n,d}_{M,g}$, respectively.

Thus, proposition 7.7 implies the existence of an isomorphism as in the statement.

□

Under some further assumptions on the integer $t \geqslant 0$, it is possible to describe the stalks of the isomorphisms ζ in terms of the morphisms $\widehat{y}_N$ (see section 6.4).

7.4.3. Let us assume that the affine opens $V \in \mathcal{V}$ are of the form $V = V^1 \times V^2$, where V^2 varies in an open cover $\mathcal{U}$ of $U^{n,d}$. Then, for any $V^2 \in \mathcal{U}$, we write $V^2_{M,g}$ for the pullback of V^2 over $U^{n,d}_{M,g} \to U^{n,d}$). We also assume that the integer t we chose is sufficiently large such that, for any open $V^2 \in \mathcal{U}$ and any two morphisms from $V^2_{M,g}$ to $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}^{\mathrm{nr}}_p$, which coincide modulo the t-th power of the maximal ideal, the induced morphisms between the vanishing cycles of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ agree.

Let $y \in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ and $N \geqslant d/\delta B$. We denote by

$$\widetilde{y}_N : U^{n,d}_{M,g} \longrightarrow \mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$$

the pullback under $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}} \to \mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ of the morphism $\widehat{y}_N : U^{n,d} \to \mathfrak{X} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, composed with the isomorphism $\xi_{y,N}[M,g]^{-1} : U^{n,d}_{M,g} \simeq \widehat{y}_N^*(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})$ (see section 7.3.3).

Proposition 7.9. — *Maintaining the above notations and assumptions. Let (y_m, z) be a geometric closed point of $J_m \times \overline{U}^{n,d}_{M,g}$.*

The morphisms

$$\zeta_{(y_m,z)} : \varpi_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta})_{(y_m,z)} \longrightarrow \mathfrak{p}_s^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/\mathcal{M}_{M,g_\eta}})_{(y_m,z)}$$

agree with the morphisms

$$\psi_\eta(\widetilde{y}_N, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_z : \widetilde{y}^*_{N\,s} R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta})_z \longrightarrow R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/\mathcal{M}_{M,g_\eta}})_z,$$

when we choose $y \in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ such that $\mathrm{q}_{\infty,m}(y) = y_m$ (and thus $\widetilde{y}_N(z) = \varpi_N(y_m, z)$ and $\mathfrak{p}(y_m, z) = z$).

Proof. — Let us choose $V = V^1 \times V^2 \in \mathcal{V}$ such that $y_m^\wedge \in V^1$ and $(y_m, z) \in \overline{V}_{M,g}$. Then, over V^2, we have

$$\pi_N[t, V] \circ (y_m^\wedge, \mathrm{id}) \equiv \widehat{y}_{N\,|V^2}$$

modulo the t-th power of the maximal ideal of definition of $U^{n,d}$. Since $pr \circ (y_m, \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ on $U^{n,d}$, we conclude. □

We remark that the above description of the stalks of the morphism ζ provides an alternative proof of the fact that the isomorphisms θ_V piece together, as V varies in $\mathcal{V}$.

7.4.4. We now focus our attention on the action of the inertia group I_p on the vanishing cycles sheaves $\varpi_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta}) \simeq \mathfrak{p}_s^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})$. In particular, we are interested in the possibility of extending its action to an action of the Weil group $W_{\mathbb{Q}_p} \supset I_p$.

Let us remark that it is a direct consequence of the definitions that the action of the inertia group I_p on these vanishing cycles sheaves commutes with the isomorphisms $\zeta_{M,g}$ and with the morphisms induced by changes of level and by the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$. We are interested in defining an action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ with the same property.

Remark 7.10. — Maintaining the above notations.

(1) Let us consider the natural identification

$$R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta}) = R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta})$$

over $\overline{X}_{M,g} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. Then, the action of I_p on the left hand side is simply the restriction to I_p of the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ on the right hand side.

Moreover, the action of the Weil group on the right hand side is compatible with the morphisms induced by changes of level and by the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the Shimura varieties.

(2) The action of I_p on the vanishing cycles $R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})$ over $\overline{\mathcal{M}}_{M,g}$ naturally extends to an action of $W_{\mathbb{Q}_p}$, which is compatible with the morphisms induced by changes of level and by the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the Rapoport-Zink spaces.

Indeed, the first statement is obvious. (To conclude the compatibility between the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ and the morphisms induced by changes of level and by the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, it suffices to recall that both the projections $\mathfrak{X}_{M',g}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}\to\mathfrak{X}_{M,g}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, for $M'\geqslant M$, and the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ on the Shimura varieties $\mathfrak{X}_{M,g}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ arise from morphisms defined over $\mathbb{Z}_p\subset\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, and thus the corresponding induced morphisms on the vanishing cycles sheaves $R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta})$ over $\overline{X}_{M,g}\times\overline{\mathbb{F}}_p$ commute with the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$.)

As for the second statement, the possibility of extending the action of I_p on the vanishing cycles sheaves to an action of $W_{\mathbb{Q}_p}$, which is compatible with the morphisms induced by changes of level and by the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, follows from the existence of a descent datum for the Rapoport-Zink spaces $\mathcal{M}_{M,g}/\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$, which commutes with natural projections and with the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, namely the σ-linear automorphism Frob of $\mathcal{M}_{M,g}$ (see part (6) of proposition 7.4).

7.4.5. Let us remark that the actions of $W_{\mathbb{Q}_p}$ on the above vanishing cycles sheaves give rise to an action of $W_{\mathbb{Q}_p}$ on their pullbacks over $J_m\times\overline{U}^{n,d}_{M,g}$.

In fact, let $\tau\in W_{\mathbb{Q}_p}$ and define $r=r(\tau)$ to be the integer such that the image of τ in the absolute Galois group of $\mathbb{F}_p$ is $\overline{\tau}=\sigma^{r(\tau)}$. Then, the actions of $\tau\in W_{\mathbb{Q}_p}$ on the above vanishing cycles sheaves are defined by some isomorphisms

$$(1\times\sigma^r)^*R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta})\simeq R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta})$$

over $\overline{X}_{M,g}\times\overline{\mathbb{F}}_p$ and

$$(\mathrm{Frob}^r)^*R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})\simeq R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})$$

over $\overline{\mathcal{M}}_{M,g}$.

Let us assume $m\geqslant d+2+t/2+M$ and $N\geqslant(d+1+t/2+M)/\delta B$, and consider the morphism

$$\mathrm{Frob}\times\mathrm{Frob}:J_m\times\overline{U}^{n,d}_{M,g}\longrightarrow J_{m-1}\times\overline{U}^{n+1,d+1}_{M,g}.$$

Then, we have $\overline{\varpi}_N\circ(\mathrm{Frob}\times\mathrm{Frob})=(1\times\sigma)\circ\overline{\varpi}_N$ and $\overline{\mathfrak{p}}\circ(\mathrm{Frob}\times\mathrm{Frob})=\mathrm{Frob}\circ\overline{\mathfrak{p}}$.

Thus, for $r=r(\tau)\geqslant 0$, the above isomorphisms on the vanishing cycles sheaves over $\overline{X}_{M,g}\times\overline{\mathbb{F}}_p$ and $\overline{\mathcal{M}}_{M,g}$ give rise to some isomorphisms on the pullbacks over

$J_m \times \overline{U}^{n,d}_{M,g}$, namely

$$\overline{\varpi}^*_N(\tau) : (\mathrm{Frob}^r \times \mathrm{Frob}^r)^* \overline{\varpi}^*_N R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}) \\ \simeq \overline{\varpi}^*_N(1 \times \sigma^r)^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}) \simeq \overline{\varpi}^*_N R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta})$$

and

$$\overline{\mathfrak{p}}^*(\tau) : (\mathrm{Frob}^r \times \mathrm{Frob}^r)^* \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}) \\ \simeq \overline{\mathfrak{p}}^*(\mathrm{Frob}^r)^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}) \simeq R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}).$$

Proposition 7.11. — *Maintaining the above notations. Let $\tau \in W_{\mathbb{Q}_p}$ such that $r = r(\tau) \geqslant 0$. The isomorphism*

$$\zeta : \overline{\varpi}^*_N R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta}) \longrightarrow \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})$$

satisfy the equality $\zeta \circ \overline{\varpi}^*_N(\tau) = \overline{\mathfrak{p}}^*(\tau) \circ (\mathrm{Frob}^r \times \mathrm{Frob}^r)^*(\zeta)$.

Proof. — First, let us remark that we already know that the statements holds for any $\tau \in I_p$, *i.e.* when $r(\tau) = 0$. Thus, it suffices to check that the statement for a single element $\widetilde{\sigma} \in W_{\mathbb{Q}_p}$ such that $r(\widetilde{\sigma}) = 1$, (*i.e.* for a lift $\widetilde{\sigma}$ of the Frobenius element σ),

Let $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{M,g} = \overline{\varpi}^*_N R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}) \simeq \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})$. We need to show that the two morphisms

$$\overline{\varpi}^*_N(\widetilde{\sigma}), \overline{\mathfrak{p}}^*(\widetilde{\sigma}) : (\mathrm{Frob} \times \mathrm{Frob})^* \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

agree.

By the universal property of $\mathfrak{X}_{M,g}$, the descent datum on $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ is equivalent to the datum of a prime-to-p isogency

$$\sigma : (1 \times \sigma)^* \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A},$$

where $\mathcal{A}$ is the universal abelian variety over $(\mathfrak{X}_{M,g})_s \times \overline{\mathbb{F}}_p$, such that σ induces isomorphisms $(1 \times \sigma)^* \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}$ and $(1 \times \sigma)^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$, where $\mathcal{H}$ and $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{A}$) are respectively the universal Barsotti-Tate group and flat subgroup over $\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$.

Analogously, the descent datum on $\mathcal{M}_{M,g}$ is equivalent to the datum of an isomorphism

$$\sigma : \mathrm{Frob}^* \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}',$$

where $\mathcal{H}'$ is the universal Barsotti-Tate group over $\mathcal{M}_{M,g}$, which restricts to an isomorphism $\mathrm{Frob}^* \mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'$ on the subgroup $\mathcal{E}' \subset \mathcal{H}'$.

Moreover, the identification between the vanishing cycle sheaves

$$\overline{\varpi}^*_N R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}) \simeq \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})$$

arises from the isomorphism

$$H[p^M] = \mathfrak{p}^* \mathcal{H}'[p^M] \simeq \varpi^*_V \mathcal{H}[p^M],$$

over the affine opens $V_{m'}$ of $\mathcal{J}_{m'} \times U^{n,d}_{M,g}$, $V \in \mathcal{V}$.

Thus, the two actions of $\widetilde{\sigma} \in W_{\mathbb{Q}_p}$ on the vanishing cycles can be interpreted as arising from the descent data

$$\varpi_V^*(\sigma) : \varpi_V^*(1 \times \sigma)^* \mathcal{H}[p^M] \longrightarrow \varpi_V^* \mathcal{H}[p^M]$$

and

$$\mathfrak{p}^*(\sigma) : \mathfrak{p}^* \operatorname{Frob}^* \mathcal{H}'[p^M] \longrightarrow \mathfrak{p}^* \mathcal{H}'[p^M].$$

On $J_m \times \overline{U}_{M,g}^{n,d}$ we have

$$\begin{aligned} \overline{\varpi}_N^*(1 \times \sigma)^* &= (\operatorname{Frob} \times \operatorname{Frob})^* \overline{\varpi}_N^*, \\ \overline{\mathfrak{p}}^* \operatorname{Frob}^* &= (\operatorname{Frob} \times \operatorname{Frob})^* \overline{\mathfrak{p}}^*, \end{aligned}$$

and also, under the identification $\overline{H}[p^M] = \overline{\mathfrak{p}}^* \mathcal{H}'[p^M] \simeq \overline{\varpi}_N^* \mathcal{H}[p^M]$,

$$\overline{\varpi}_N^*(\sigma)_s = \overline{\mathfrak{p}}^*(\sigma)_s : (\operatorname{Frob} \times \operatorname{Frob})^* \overline{H}[p^M] \longrightarrow \overline{H}[p^M].$$

Therefore, the isomorphism

$$\overline{\varpi}_N^*(\widetilde{\sigma})^{-1} \circ \overline{\mathfrak{p}}^*(\widetilde{\sigma}) : \mathfrak{p}^* \operatorname{Frob}^* \mathcal{H}'[p^M] \longrightarrow \varpi_V^*(1 \times \sigma)^* \mathcal{H}[p^M]$$

can be viewed as an isomorphism between two deformations of the group scheme $(\operatorname{Frob} \times \operatorname{Frob})^* \overline{H}[p^M]$, which reduces to the identity on the special fiber. It follows that it gives rise to an identification of the two deformations, and thus, equivalently, that the morphism $\overline{\varpi}_N^*(\widetilde{\sigma})^{-1} \circ \overline{\mathfrak{p}}^*(\widetilde{\sigma})$ on the vanishing cycle sheaves is simply the identity. □

7.4.6. We now investigate the action of T on the vanishing cycles sheaves we studied.

From the equality $\overline{\pi}_N \circ (\rho \times \rho) = \overline{\pi}_N$, for any $\rho \in S$, we deduce that $\overline{\varpi}_N \circ (\rho \times \rho) = \overline{\varpi}_N$ and thus $\overline{\varpi}_N^* \simeq (\rho \times \rho)^* \circ \overline{\varpi}_N^*$. It follows that there is a natural action of S on the vanishing cycles sheaves $\overline{\varpi}_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta})$, *i.e.* for any $\rho \in S$ there is an isomorphism

$$\rho : (\rho \times \rho)^* \overline{\varpi}_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta}) \simeq \overline{\varpi}_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_M \times \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}})_\eta}),$$

such that $(\rho_1\rho_2)^* = \rho_2^*\rho_1^*$, for any $\rho_1, \rho_2 \in S$.

Clearly, the above action of S commutes with the action of $I_p \times \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, and indeed it commutes also with the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$, since the action of $\rho \in S$ on the schemes $J_m \times \overline{U}_{M,g}^{n,d}$ commutes with the morphism $\operatorname{Frob} \times \operatorname{Frob}$.

On the other hand, from the equality $\overline{\mathfrak{p}} \circ (\rho \times \rho) = \rho \circ \overline{\mathfrak{p}}$, for any $\rho \in S$, we deduce that there is an isomorphism

$$(\rho \times \rho)^* \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}) \simeq \overline{\mathfrak{p}}^* \rho^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}).$$

Moreover, since the action of the monoid $S \subset T$ on the reduced fibers of the Rapoport-Zink spaces extends to an action of the group T on the Rapoport-Zink spaces over $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{nr}}$ (see part (7) of proposition 7.4), there are also some isomorphisms

$$\rho^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}) \simeq R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}).$$

Thus, by composing the above two isomorphisms, we define an action of S on the vanishing cycles $\overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})$, *i.e.* for any $\rho \in S$ we define an isomorphism

$$\rho : (\rho \times \rho)^* \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}) \simeq \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}),$$

such that $(\rho_1\rho_2)^* = \rho_2^*\rho_1^*$, for any $\rho_1, \rho_2 \in S$.

Proposition 7.12. — *Maintaining the above notations. Let $\rho \in S \subset T$. The isomorphisms*

$$\zeta : \overline{\varpi}_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}) \longrightarrow \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})$$

satisfy the equality $\zeta \circ \rho = \rho \circ (\rho \times \rho)^*(\zeta)$.

Proof. — Clearly, it suffices to check that the above equality on the stalks of the geometric points of $J_m \times \overline{U}_{M,g}^{n,d}$. Without loss of generality we may assume that our choice of the integer t is compatible with the properties stated in section 7.4.3, and thus we can apply the description of the stalks of the isomorphism ζ, we gave in proposition 7.9.

Let $\rho \in S$ and (y_m, z) be a geometric point of $J_m \times \overline{U}_{M,g}^{n,d}$. We need to prove that the following diagram commutes, for all $q \geqslant 0$.

$$\begin{array}{ccc}
R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}))_{\overline{\varpi}_N(\rho y_m, \rho z)} & = & R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}))_{\overline{\varpi}_N(y_m, z)} \\
\big\downarrow \zeta_{(\rho y_m, \rho z)} & & \big\downarrow \zeta_{(y_m, z)} \\
R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})_{\rho z} & \xrightarrow{\quad \rho_z \quad} & R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})_z
\end{array}$$

Let $y \in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ be a point such that $\mathrm{q}_{\infty,m}(y) = y_m$. Then, $\rho(y) \in J(\overline{\mathbb{F}}_p)$ and $\mathrm{q}_{\infty,m}(\rho y) = \rho y_m$. By proposition 7.9, we know that $\zeta_{(y_m,z)} = \psi_\eta(\widehat{y}_N, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_z$ and $\zeta_{(\rho y_m, \rho z)} = \psi_\eta(\widehat{\rho y}_N, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{\rho z}$. Thus, the commutativity of the above diagram follows from the equality $\widehat{y}_N \circ \rho = \widehat{\rho y_m}_{\infty N}$ (in the diagram we denote by ρ_z the morphism $\psi_\eta(\rho, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_z$). $\square$

7.4.7. The results of this section on the vanishing cycles sheaves of the Shimura varieties and of the Rapoport-Zink spaces can be summarised in the following proposition.

In the following, we write $W_{\mathbb{Q}_p}^+ = \{\tau \in W_{\mathbb{Q}_p} \mid r(\tau) \geqslant 0\}$. Thus, $W_{\mathbb{Q}_p} = \langle W_{\mathbb{Q}_p}^+, \widetilde{\sigma}\rangle$, for some $\widetilde{\sigma} \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ such that $r(\widetilde{\sigma}) = 1$ (see section 7.4.5).

Theorem 7.13. — *With the above notations. There exist some quasi-isomorphisms of complexes in the derived category of abelian torsion étale sheaves over $J_m \times U^{n,d}$*

$$\overline{\varpi}_N^* R\Psi_\eta R(\varphi_M \varphi_{M,g})_*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}) \simeq \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta R(\delta_M \delta_{M,g})_*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}),$$

compatible with the actions of $W_{\mathbb{Q}_p}^+ \times S \times \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and the changes of level M, g.

Proof. — In propositions 7.7, 7.11 and 7.12, we proved that the quasi-isomorphisms ζ's over $J_m \times \overline{U}^{n,d}_{M,g}$

$$\overline{\varpi}_N^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}) \simeq \overline{\mathfrak{p}}^* R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta}),$$

have the required properties. By applying the derived functor associated to the (proper) projections $J_m \times \overline{U}^{n,d}_{M,g} \to J_m \times \overline{U}^{n,d}$, we obtain the quasi-isomorphisms in the statement (after using the proper base change theorem and part (2) of proposition 2.22). □

8. The cohomology of Shimura varieties

In this last section, we shall compute the ℓ-adic cohomology of the Shimura varieties as a (virtual) representation of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$ ($\ell \neq p$), in terms of the ℓ-adic cohomologies of the Igusa varieties and of the Rapoport-Zink spaces.

More precisely, we shall apply theorem 5.13 to the complex of A-R ℓ-adic étale sheaves

$$\mathcal{L} = (R\Psi_\eta R(\varphi_M \varphi_{M,g})_*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta})_{|\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p})_r$$

over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$, for each Newton polygon α, to relate the cohomology groups with compact supports of the Newton polygon strata to the cohomology of the Igusa varieties and of the Rapoport-Zink space, in the case of level structure at p. As the Newton polygon stratum varies in the stratification of the reduction of the Shimura varieties and the level (both at p and away from p) changes, the above descriptions combine into a formula which computes the cohomology of the Shimura varieties, in terms of the cohomologies of the Igusa varieties and of the Rapoport-Zink spaces.

We choose to formulate the main result of this section (Theorem 8.11) as an equality of virtual ℓ-adic representations of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$, even though what we really prove is a stronger version of this result which regards the corresponding $\mathbb{Z}_\ell$-representations and can be formulated as the existence of quasi-isomorphisms in the derived category of A-R ℓ-adic systems, compatible with the action of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$. Indeed, we prove more, as we prove the existence of such quasi-isomorphisms for ℓ^r-torsion coefficients, for all $r \geqslant 1$ (which translates in a result regarding the corresponding $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations).

On the other hand, since the cohomology groups of Shimura varieties both with $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-coefficients and with $\mathbb{Z}_\ell$-coefficients are not *a priori* admissible representations of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$, the above two results in the derived categories can not be stated as equalities in the appropriate Grothendieck groups, which is why we prefer to state the theorem for ℓ-adic coefficients.

8.1. The Newton polygon decomposition. — We shall start by explaining how it is possible to compute the ℓ-adic cohomology of the Shimura varieties in terms of the cohomology of the Newton polygon strata of their special fibers, with coefficients in the ℓ-adic vanishing cycles sheaves.

8.1.1. We recall that our final goal is to study the virtual $\mathbb{Q}_\ell$-representation of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$H^\bullet(X, \mathbb{Q}_\ell) = \sum_i (-1)^i H^i(X, \mathbb{Q}_\ell),$$

where

$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_U H^i_{\text{ét}}(X_U \times_E (\widehat{E}_u^{\text{nr}})^{\text{ac}}, \mathbb{Q}_\ell),$$

and U varies among the sufficiently small open compact subgroups of $G(\mathbb{A}^\infty)$. (In the following we shall consistently use the upper index $\bullet$ to denote the corresponding alternating sum of representations inside the appropriate Grothendieck group.)

Let us also observe that if we restrict our attention to the open compact subgroups of $G(\mathbb{A}^\infty)$ of the form

$$U = U^p(M) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \ker(\mathcal{O}_{B_u^{\text{op}}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_u^{\text{op}}}/u^M)^\times),$$

for some integer $M \geqslant 0$ and some sufficiently small open compact subgroup $U^p \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, then we compute

$$H^\bullet(X, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathbb{Z}_p^\times} = \varinjlim_{U^p, M} H^\bullet_{\text{ét}}(X_{U^p(M)} \times_E (\widehat{E}_u^{\text{nr}})^{\text{ac}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

8.1.2. In the following we restrict our attention to such levels $U = U^p(M)$, and relay on the theory of vanishing cycles to express the cohomology of the Shimura varieties in terms of the the cohomology of the special fibers of their integral models.

Let $r \geqslant 1$. For any level $U^p(M)$, we consider the integral models of the Shimura varieties $\mathfrak{X}_{U^p,M} = \mathfrak{X}_{U^p,M,\mathbb{I}_h}$. Then, there exist quasi-isomorphisms

$$i_{U^p,M} : R\Gamma(X_U \times_E (\widehat{E}_u^{\text{nr}})^{\text{ac}}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \simeq R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{U^p,M})_\eta})),$$

such that $g^* \circ i_{U^p,M} = i_{U^p,M} \circ g^*$, for all $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ and $p^{-1}\mathbb{I}_h^* \circ i_{U^p,M} = i_{U^p,M-1} \circ p^{-1}\mathbb{I}_h^*$, for $M \geqslant 1$.

Further more, for any $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and $M \geqslant e = e(g)$, let us consider the integral models $\mathfrak{X}_{U^p,M,g}$, together with the projections $\phi_{U^p,M,g} : \mathfrak{X}_{U^p,M,g} \to \mathfrak{X}_{U^p,M}$ and the morphisms $g : \mathfrak{X}_{U^p,M,g} \to \mathfrak{X}_{U^p,M-e}$. They give rise to quasi-isomorphisms

$$\begin{aligned}\phi^*_{U^p,M,g} : R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{U^p,M})_\eta}))&\\ \simeq R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M,g} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{U^p,M,g})_\eta})),&\end{aligned}$$

and to some morphisms

$$\begin{aligned}g^* : R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M-e} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{U^p,M})_\eta}))&\\ \longrightarrow R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M,g} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{U^p,M,g})_\eta})),&\end{aligned}$$

such that $(\phi^{*-1}_{U^p,M-e,g} \circ g^*) \circ i_{U^p,M} = i_{U^p,M-e} \circ g^*$, for all $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and $M \geqslant e = e(g)$. We deduce that the morphisms $\phi^{*-1}_{U^p,M-e,g} \circ g^*$ define a quasi-action (*i.e.* an action via quasi-isomorphisms) of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ on the direct limit, as M varies, of the complexes $R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{X}_{U^p,M})_\eta}))$. It is also clear that this quasi-action extends the previously defined action of $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$.

On the other hand, as the integer r varies, the above complexes form an A-R ℓ-adic system, also endowed with a quasi-action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$, as the level M varies. We us denote by

$$H^i(R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathcal{X}_{U^p,M})_\eta})))$$

the i-th cohomology group of the A-R ℓ-adic complex. Then, for all i, the $\mathbb{Q}_\ell$-vector spaces

$$\varinjlim_{U^p,M} H^i(R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathcal{X}_{U^p,M})_\eta}))) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

are admissible representations of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$, and there is an equality in the Grothendieck group of virtual ℓ-adic representations of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$H^\bullet(X, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathbb{Z}_p^\times} = \varinjlim_{U^p,M} H^\bullet(R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathcal{X}_{U^p,M})_\eta}))) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

We remark that as virtual representations of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times \langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p} \subset G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\begin{aligned}\varinjlim_{U^p,M} & H^\bullet(R\Gamma(\overline{X}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathcal{X}_{U^p,M})_\eta}))) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \\ &= \varinjlim_{U^p,M} H^\bullet(\overline{X}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R^\bullet\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathcal{X}_{U^p,M})_\eta}))) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.\end{aligned}$$

8.1.3. We now consider the Newton polygon stratification of the reductions modulo p of the integral models $\mathcal{X}_{U^p,M,g}$ of the Shimura varieties. For any level U^p, M, g, the stratification gives rise to a sequence of exact triangles in the derived category computing the cohomology of the special fibers of the Shimura varieties in terms of the cohomology with compact supports of the corresponding Newton polygon strata (see [**11**], Theorem I.8.7(3), pp. 91–94). Since both the morphisms corresponding to changes of level and the action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+ \times W_{\mathbb{Q}_p}$ preserve the Newton polygon stratification of the special fibers, the corresponding exact triangles in the derived category are compatible under the morphisms $\phi^*_{U^p,M,g}$, g^* (for any $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$) and the group action.

We deduce that, for all Newton polygons α, the morphisms $\phi^{*-1}_{U^p,M,g} \circ g^*$ define a quasi-action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ on the direct limit (as the level M varies) of the complexes

$$R\Gamma_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{X}_{U^p,M})_\eta})_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M}}),$$

and also of the corresponding complexes of A-R ℓ-adic systems

$$R\Gamma_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathcal{X}_{U^p,M})_\eta})_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M}}).$$

Thus, we obtain the following decomposition of the cohomology of Shimura varieties.

Proposition 8.1. — *There is an equality of virtual $\mathbb{Q}_\ell$-representations of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$*

$$H^\bullet(X, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathbb{Z}_p^\times} = \sum_\alpha \varinjlim_{U^p, M} H^\bullet(R\Gamma_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathfrak{X}_{U^p,M})_\eta})_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M}})) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

where U^p varies among the sufficiently small open compact subgroup of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ and M among the positive integers.

We remark that as virtual representations of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times \langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p} \subset G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\begin{aligned}\varinjlim_{U^p,M} & H^\bullet(R\Gamma_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathfrak{X}_{U^p,M})_\eta})_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M}})) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \\ &= \varinjlim_{U^p,M} H^\bullet_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R^\bullet\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathfrak{X}_{U^p,M})_\eta})_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M}}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.\end{aligned}$$

8.1.4. We now focus our attention on the cohomology groups

$$H^i(R\Gamma_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}_{\ell/(\mathfrak{X}_{U^p,M})_\eta})_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M}}))$$

and use theorems 5.13 and 7.13 to relate them to the cohomology of the Igusa varieties and of the Rapoport-Zink spaces of the same level.

First, we recall some notations. For all $i \geqslant 0$, we write

$$H^i_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_m H^i_c(J_{\alpha,U^p,m}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$$

for the cohomology groups with coefficients in $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ of the Igusa varieties of level U^p and Newton polygon α, viewed as a module endowed with an action of $T_\alpha \times W_{\mathbb{Q}_p}$ (we recall that the action of the Weil group is unramified).

We also write $\mathcal{M}_{\alpha,M,g}$ (and $\mathcal{M}_{\alpha,M} = \mathcal{M}_{\alpha,M,\mathbb{I}_h}$) for the formal Rapoport-Zink space, of level M, g ($M \geqslant e(g)$) and Newton polygon α, and $\{U^{n,d}_{\alpha,M,g}\}_{n,d}$ for our usual choice of an open cover of $\mathcal{M}_{\alpha,M,g}$. Thus, for any abelian torsion étale sheaf $\mathcal{F}$ (with torsion orders prime to p), we have

$$H^i_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M,g}, \mathcal{F}) = \varinjlim_{n,d} H^i_c(\overline{U}^{n,d}_{\alpha,M,g}, \mathcal{F}_{|\overline{U}^{n,d}_{\alpha,M,g}}).$$

We view the above cohomology groups as representations of $T_\alpha \times W_{\mathbb{Q}_p}$, where the action of T_α is the one induced by the opposite of the action of T_α we considered so far (see section 2.5.14).

Theorem 8.2. — *Let α be a Newton polygon of dimension q and height h. For any sufficiently small open compact subgroup $U^p \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, and any integers $M \geqslant 0$ and*

$r \geqslant 1$, there are some isomorphisms of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$H^i(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{\alpha,M})_\eta})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} R\Gamma_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))$$
$$\simeq H^i(R\Gamma_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{U^p,M})_\eta})_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M}})),$$

for all $i \geqslant 0$.

As the levels U^p, M vary, the above representations are endowed with an action of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$, and the two actions on the direct limit representations are compatible under the above isomorphisms.

Moreover, the above isomorphisms are compatible with the natural projections as the integer $r \geqslant 1$ varies.

Proof. — The equality $\overline{\pi}_N \circ (1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB} = \dot{\pi}_N$, together with the fact that $\widetilde{\mathrm{Fr}}$ is purely inseparable and finite, implies that, for any abelian étale sheaf $\mathcal{L}$ over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ (with torsion orders relatively prime to p), we have

$$\dot{\pi}_{N\,!}\dot{\pi}^*\mathcal{L} \simeq \overline{\pi}_{N\,!}(1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB}_!(1 \times \widetilde{\mathrm{Fr}})^{NB\,*}\overline{\pi}^*_N\mathcal{L} \simeq \overline{\pi}_{N\,!}\overline{\pi}^*_N\mathcal{L}.$$

Thus, in all the constructions of section 5, we can replace $\dot{\pi}_N$ with $\overline{\pi}_N$.

Let $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ ($M \geqslant e(g)$, and consider the complex of torsion abelian sheaves

$$\mathcal{L} = R\Psi_\eta(R(\varphi_M\varphi_{M,g})_*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}))$$

over $\overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$. Then, theorems 5.13 and 7.13 (together with Berkovich's comparison theorem which allows us to identify classical vanishing cycles with rigid analytic vanishing cycles) imply the existence of quasi-isomorphisms, compatible with the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$

$$R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_\alpha, R\Psi_\eta R(\delta_M\delta_{M,g})_*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{M,g})_\eta})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} R\Gamma_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$$
$$\simeq R\Gamma_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p(0)} \times \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta R(\varphi_M\varphi_{M,g})_*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathfrak{X}_{M,g})_\eta}))_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p(0)} \times \overline{\mathbb{F}}_p}).$$

By part (2) of proposition 2.22, we can rewrite the above quasi-isomorphisms as

$$R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{M,g}, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/\mathcal{M}_{M\,\eta}})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} R\Gamma_c(J_{U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$$
$$\simeq R\Gamma_c(\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p,M,g} \times \overline{\mathbb{F}}_p, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/\mathfrak{X}_{M\,\eta}}))_{|\overline{X}^{(\alpha)}_{U^p} \times \overline{\mathbb{F}}_p}).$$

These quasi-isomorphisms commute with the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ on the two hand side when $g = \mathbb{I}_h$, and also with the maps induced by the projections $\delta_{M,g}$, $\phi_{U^p,M,g}$, and by the morphisms associated to the elements $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$.

In particular, when $g = \mathbb{I}_h$, the above quasi-isomorphisms give rise to the isomorphisms of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$ in the statement.

Further more, we deduce that the morphisms $(\delta_{M,g} \times 1)^{*-1} \circ g^*$ define a quasi-action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ on the direct limit (as M varies) of the complexes

$$R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{M,g}, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/\mathcal{M}_{M\,\eta}})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} R\Gamma_c(J_{U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}),$$

which is compatible under the above isomorphisms with the quasi-action of the right hand side. Thus, we conclude. □

8.1.5. We remark that, for all level U^p, M, there are $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$-equivariant spectral sequences

$$\oplus_{s+t+q=p'} \mathrm{Tor}^p_{\mathcal{H}_r(T_\alpha)}(H^t_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), H^s_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))$$

which abut the representations

$$H^n(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}_{/(\mathcal{M}_{\alpha,M})_\eta})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} R\Gamma_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})),$$

for all $n = p + p' \geqslant 0$.

As U^p, M vary, the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-modules

$$\varinjlim_{U^p,M} \oplus_{s+t+q=p'} \mathrm{Tor}^p_{\mathcal{H}_r(T_\alpha)}(H^t_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), H^s_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))$$

are naturally endowed with an action of $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times \langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p}$. Moreover, this action induces an action on the limit of convergence which simply is the restriction to $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times \langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p}$ of the action of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$.

8.2. The cohomology of the Rapoport-Zink spaces. — In this section, we shall study the cohomology of the Rapoport-Zink more closely. In particular, we have two goals in mind. On one hand, we want to relate the cohomology of the rigid analytic Rapoport-Zink spaces to the cohomology of their special fibers, with coefficients in the vanishing cycles sheaves, as it appears in theorem 8.2. On the other hand, there is the proof of the admissibility of the representations associated to the cohomology groups of the Igusa varieties and the Rapoport-Zink spaces, which we prove in lemma 8.9. (The admissibility of these representations is an obvious prerequisite for describing our final result as an equality of virtual representations.)

We are very grateful to L. Fargues for explaining to us the results of this section and correcting an early mistake.

8.2.1. Let α be a Newton polygon of dimension q and height h. We denote by $\mathcal{M}_\alpha$ the Rapoport-Zink space (without level structure) associated to the Barsotti-Tate group $\Sigma^{(\alpha)}$ and, for any positive integer M, we write $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M}$ for the Rapoport-Zink rigid analytic space of level M over $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_\alpha$.

8.2.2. We start by considering the case of cohomology with ℓ^r-torsion coefficients, for any $r \geqslant 1$. We recall that the j-th cohomology group of the Rapoport-Zink spaces associated to the Newton polygon α is defined to be the representation of $T_\alpha \times \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$H^j_c(\mathcal{M}_\alpha, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \varinjlim_M H^j_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$$

(see section 2.5), where the action of T_α is the one induced by the left action of T_α on $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M}$ (for all M) (see [**26**], Remark 1.3(i), p. 425).

On the other hand, because of theorem 8.2, we are induced to consider the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $T_\alpha \times \langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$H_c^j(\overline{\mathcal{M}}_\alpha \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) = \varinjlim_{M} H_c^j(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})),$$

for all $j, q \geqslant 0$.

The goal of this section is to understand the relation between the cohomology groups of the rigid analytic Rapoport-Zink spaces and these modules.

More precisely, we shall establish a link between the $W_{\mathbb{Q}_p}$-representations

$$\mathrm{Tor}^k_{\mathcal{H}_r(T_\alpha)}(H_c^j(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), \Pi)$$

and

$$\mathrm{Ext}^s_{T_\alpha\text{-smooth}}(H_c^t(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), \Pi)$$

for any smooth $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation Π of T_α, and all levels M. (The above derived functors are computed in the category of smooth $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $T_\alpha \times W_{\mathbb{Q}_p}$).

8.2.3. Let us fix the level M of the formal Rapoport-Zink space $\mathcal{M}_{\alpha,M} = \mathcal{M}_{\alpha,M,\mathbb{I}_h}$, which we now simply denote by $\mathcal{M}$, and write $\{U^{n,d} = U^{n,d}_{\alpha,M}\}_{n,d}$ for the usual open cover of $\mathcal{M}$.

By proposition 4.6, there exist some positive integers m, n, d such that the morphism $\dot{\pi}_N : J_m \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{U}^{n,d} \to \overline{X}^{(\alpha)} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ is surjective on geometric points, for some $N \geqslant d/\delta B$. Equivalently, there exist some integers n, d such that the reduced fiber of the Rapoport-Zink space $\overline{\mathcal{M}}$ is covered by the opens ρU, as ρ varies in T and $U = \overline{U}^{n,d}$. Indeed, since the maximal open compact subgroup $\Gamma \subset T$ stabilizes the open U, it suffices to let ρ vary among a set of representatives of the cosets in T/Γ.

For any positive integer s, we set

$$(T/\Gamma)^{s+1}_{\neq} = \{t = (\rho_0\Gamma, \ldots, \rho_s\Gamma) \in (T/\Gamma)^{s+1} \mid \rho_i\Gamma \neq \rho_j\Gamma \; \forall i \neq j\}$$

and for any $t = (\rho_0\Gamma, \ldots, \rho_s\Gamma) \in (T/\Gamma)^{s+1}_{\neq}$, we write $tU = \rho_0 U \cap \cdots \cap \rho_s U$ and $j_{tU} : tU \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}$ for the natural inclusion.

Let $\mathcal{F}$ be an abelian étale torsion sheaf over $\overline{\mathcal{M}}$, with torsion orders prime to p. For any integer $s \geqslant 0$, we define an abelian étale torsion sheaf over $\overline{\mathcal{M}}$

$$C_s(U, \mathcal{F}) = \oplus_{t \in (T/\Gamma)^{s+1}_{\neq}} j_{tU\,!}(\mathcal{F}_{|tU}).$$

Moreover, let $t \in (T/\Gamma)^{s+1}_{\neq}$, $s \geqslant 1$, and write $t^i = (\rho_0\Gamma, \ldots, \widehat{\rho_i\Gamma}, \ldots, \rho_s\Gamma) \in (T/\Gamma)^s_{\neq}$, for all $i = 0, \ldots, s$. Then, the natural inclusions $tU \subset t^iU$ give rise to some morphisms

$$j_{tU\,!}(\mathcal{F}_{|tU}) \longrightarrow j_{t^iU\,!}(\mathcal{F}_{|t^iU}),$$

and analogously, for any $\rho \in T$, the inclusion $\rho U \subset \overline{\mathcal{M}}$ gives rise to a morphism

$$j_{\rho U\,!}(\mathcal{F}_{|\rho U}) \longrightarrow \mathcal{F}.$$

These maps induce some morphisms $C_s(U,\mathcal{F}) \to C_{s-1}(U,\mathcal{F})$ and $C_0(U,\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ such that the corresponding complex of sheaves over $\overline{\mathcal{M}}$

$$\cdots \longrightarrow C_s(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots C_0(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

is exact (we adopt the same alternating sign convention of the usual Čech complex). Equivalently, there is a quasi-isomorphism in the derived category of abelian torsion sheaves over $\overline{\mathcal{M}}$ between the complex $C_\bullet(U,\mathcal{F})$ and the sheaf $\mathcal{F}$.

8.2.4. Let us now focus our attention of the action of the group T on $\overline{\mathcal{M}}$. This action gives rise to an action of T on the cohomology groups $H^i_c(\overline{\mathcal{M}},\mathcal{F})$ and $H^i_c(\overline{\mathcal{M}},C_s(U,\mathcal{F}))$, for all i and s.

Moreover, for all $i,s \geqslant 0$, we can identify

$$H^i_c(\overline{\mathcal{M}},C_s(U,\mathcal{F})) = \oplus_{t\in(T/\Gamma)^{s+1}_{\neq}} H^i_c(tU,\mathcal{F}),$$

where the action of T can be interpreted, on the right hand side, as arising from the isomorphisms

$$\gamma : tU \longrightarrow \gamma tU,$$

which are induced by restriction from the action of γ on $\overline{\mathcal{M}}$, for all $\gamma \in T$ (if $t = (\rho_0\Gamma,\dots,\rho_s\Gamma) \in (T/\Gamma)^{s+1}_{\neq}$, we write $\gamma t = (\gamma\rho_0\Gamma,\dots,\gamma\rho_s\Gamma)$).

For any $s \geqslant 0$, let $t \in (T/\Gamma)^{s+1}_{\neq}$, $t = (\rho_0\Gamma,\dots,\rho_p\Gamma)$. If $s \geqslant 1$, we write $\varepsilon = \varepsilon_t = [(\rho_0^{-1}\rho_1,\dots,\rho^{-1}\rho_s)] \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}$ and $U_\varepsilon = U \cap \rho_0^{-1}\rho_1 U \cap \cdots \cap \rho_0^{-1}\rho_s U$. If $s=0$, we write $\Gamma\backslash(T/\Gamma)^0_{\neq} = \{\overline{\varepsilon}\}$ and $U_{\overline{\varepsilon}} = U$.

Then, the action of $\rho_0 \in T$ gives rise to some isomorphisms

$$H^i_c(tU,\mathcal{F}) \simeq H^i_c(U_\varepsilon,\mathcal{F}),$$

for all i, and thus to an identification of T-representations

$$\oplus_{t\in(T/\Gamma)^{s+1}_{\neq}} H^i_c(tU,\mathcal{F}) = \oplus_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}} \text{c-Ind}^T_{\Gamma_\varepsilon}(H^i_c(U_\varepsilon,\mathcal{F})),$$

where $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap \varepsilon_1\Gamma\varepsilon_1^{-1} \cap \cdots \cap \varepsilon_s\Gamma\varepsilon_s^{-1}$ is an open compact subgroup of T, for any $\varepsilon = [(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s)] \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}$ and $s \geqslant 0$ (for $s=0$, we write $\Gamma_{\overline{\varepsilon}} = \Gamma$).

8.2.5. Let $s \geqslant 1$, and for each $\varepsilon = [(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s)] \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}$ consider the open $U_\varepsilon \subset \mathcal{M}$. We claim that the set

$$\{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq} | U_\varepsilon \neq \varnothing\}$$

is finite, and empty for s sufficiently large. In fact, for any $\rho \in T$, the set $U \cap \rho U = \varnothing$ unless $\rho \in T^{d,d}$, *i.e.* unless both $p^d\rho$ and $p^d\rho^{-1}$ are isogenies. (This fact follows from the equalities $p^d\rho = (p^{d-n}\beta^{-1})(p^n\beta\rho)$ and $p^d\rho^{-1} = (p^{d-n}\rho^{-1}\beta^{-1})(p^n\beta)$, for some $\beta \in U \cap \rho U$.) Thus, if $U_\varepsilon \neq \varnothing$, then $\varepsilon \in \Gamma\backslash(T^{d,d}/\Gamma)^s_{\neq}$. Since $T^{d,d} \subset T$ is compact, the set $T^{d,d}/\Gamma$ is finite and moreover $(T^{d,d}/\Gamma)^s_{\neq} = \varnothing$ if $s > \#(T^{d,d}/\Gamma)$.

It follows that the complex $C_\bullet(U,\mathcal{F})$ is bounded (indeed $C_s(U,\mathcal{F}) = 0$ if $s > \#(T^{d,d}/\Gamma)$), and thus the above considerations give rise to the following proposition.

Proposition 8.3. — *Let $\mathcal{F}$ be an object in the derived category of abelian ℓ^r-torsion sheaves over $\overline{\mathcal{M}}$.*

Then, there is a spectral sequence of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$E_1^{s,t} = \oplus_{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}} \text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T H_c^t(U_\varepsilon, \mathcal{F}) \Longrightarrow H_c^{s+t}(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{F}).$$

In particular, if $\mathcal{F}$ is a constructible sheaf, the representations $H_c^k(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{F})$ are smooth of finite type for the action of T, for all $k \geqslant 0$.

Proof. — The above spectral sequence arises from the quasi-isomorphism in the derived category

$$R^\bullet\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{F}) \simeq R^\bullet\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}, C_\bullet(U, \mathcal{F})) \simeq \oplus_{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T R^\bullet\Gamma_c(U_\varepsilon, \mathcal{F}).$$

For $\mathcal{F}$ a constructible sheaf, the cohomology groups $H_c^t(U_\varepsilon, \mathcal{F})$ are finite, for all $\varepsilon, t \geqslant 0$. Moreover, the set $\Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}$ is finite, for any $s \geqslant 0$, and thus the representations $\oplus_{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}} \text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T H_c^t(U_\varepsilon, \mathcal{F})$ are smooth of finite type for the action of T. It follows from the fact that the category of smooth representations of finite type of T is noetherian and closed under extensions (see [**8**]) that the representations $H_c^k(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{F})$ are also smooth of finite type. □

Lemma 8.4. — *Let Λ denote $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ (for some $r \geqslant 1$) or $\mathbb{Q}_\ell$, and denote by $\Lambda(T_\alpha)$ the Hecke algebra of T_α with coefficients in Λ.*

Let M be a finite smooth Λ-representation of $K \times \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$, for $K \subset T$ a open compact subgroup, and denote by $M^\vee$ its dual.

For any admissible Λ-representation Π of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$, and any integer $j \geqslant 0$, there exists an isomorphism

$$\mathrm{Ext}^j_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_K^T M^\vee, \Pi) \simeq \mathrm{Tor}^j_{\Lambda(T)}(\text{c-Ind}_K^T M, \Pi),$$

equivariant for the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$.

Moreover, the above modules are finite and vanish for j sufficiently large.

Proof. — The vanishing of the modules $\mathrm{Ext}^j_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_K^T M^\vee, \Pi)$ for j sufficiently large (*e.g.* j greater than the rank of T) is proved in [**10**] (lemma 4.3.12, pp. 69-70).

On the other hand, if $F_\bullet \to \Pi$ is a projective resolution of Π, then one can use such resolution to compute both

$$\mathrm{Tor}^j_{\mathcal{H}_r(T)}(\text{c-Ind}_K^T M, \Pi) = H^j(\text{c-Ind}_K^T M \otimes_{\Lambda(T)} F_\cdot)$$

and

$$\mathrm{Ext}^j_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_K^T M^\vee, \Pi) = H^j(\mathrm{Hom}_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_K^T M^\vee, F_\cdot)).$$

Thus, in order to conclude, it suffices to prove that for any smooth projective representation F, there exists an isomorphism

$$\text{c-Ind}_K^T M \otimes_{\Lambda(T)} F \simeq \mathrm{Hom}_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_K^T M^\vee, F),$$

equivariant for the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$, and that the above modules are finite.

By Frobenius reciprocity, we have a canonical isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_K^T M^\vee, F) \simeq \mathrm{Hom}_{K\text{-smooth}}(M^\vee, F_{|K}),$$

where we denote by $F_{|K}$ the restriction of the T-representation F to the compact subgroup $K \subset T$. Moreover, since the K-representation M is smooth and finite, there exists an open compact normal subgroup $K' \subset K$ such that $M = M^{K'}$ (and thus also $M^\vee = (M^\vee)^{K'}$). We deduce that

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-smooth}}(M^\vee, F_{|K}) \simeq \mathrm{Hom}_{K\text{-smooth}}(M^\vee, F^{K'}),$$

which is indeed finite since the representation F is admissible.

Further more, we can rewrite

$$\mathrm{Hom}_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_K^T M^\vee, F) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(M^\vee, F)^K \simeq (M^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}} F)^K$$

and, analogously,

$$\text{c-Ind}_K^T M \otimes_{\Lambda(T)} F \simeq (M^{\mathrm{op}} \otimes_\Lambda F)_K.$$

For any Λ-representation V of K, the morphism $e_K : V \to V$ gives rise to an isomorphism $V_K \simeq V^K$. □

It is a direct consequence of the above lemma that, for any smooth $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations V of T of finite type and any admissible representations Π, the modules $\mathrm{Tor}^j_{\mathcal{H}_r(T)}(V, \Pi)$ are finite. (In fact, any smooth representation of finite type V admits a resolution by representations of the form $\oplus_{i\in I}\,\text{c-Ind}_{K_i}^T M_i$, for some open compact subgroups $K_i \subset T$, some finite free $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-modules M_i, endowed with an action of K_i, and some finite set I.)

Moreover, it also follows from lemma 4.3.12 in [**10**] that the above modules vanish for j sufficiently large.

In particular, one can combine the above lemma and proposition 8.3 to obtain the following corollary.

Corollary 8.5. — *Let $\mathcal{F}$ be a constructible sheaves over $\overline{\mathcal{M}}$ and Π be an admissible $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$.*

There is an equality of virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $W_{\mathbb{Q}_p}$.

$$\mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(H^\bullet_c(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{F}), \Pi) = \sum_{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T H^\bullet_c(U_\varepsilon, \mathcal{F}), \Pi).$$

8.2.6. Let us remark that, in particular, the above corollary applies to the case of $\mathcal{F} = R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$, for any $q \geqslant 0$. (The complex of vanishing cycles sheaves of the integral model $\mathcal{M}$ is indeed bounded and constructible since, locally on $\overline{\mathcal{M}}$, they can be identified to the vanishing cycles sheaves of some schemes of finite type.)

Further more, in the case of the complex $\mathcal{F} = R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$, we obtain the following result. (We reintroduce the level M in our notations.)

Corollary 8.6. — *Let* Π *be an admissible* $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$*-representations of* $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$.

There is an equality of virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$*-representations of* $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\varinjlim_M \mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(H^\bullet_c(\overline{\mathcal{M}}_M, R^\bullet\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), \Pi)$$
$$= \sum_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \varinjlim_M \mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(\text{c-Ind}^T_{\Gamma_\varepsilon}\ H^\bullet_c(U_{\varepsilon,M}, R^\bullet\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), \Pi).$$

Proof. — It suffices to remark that the quasi-isomorphisms in the derived category

$$R^\bullet\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_M, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \simeq \oplus_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \text{c-Ind}^T_{\Gamma_\varepsilon}\ R^\bullet\Gamma_c(U_{\varepsilon,M}, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))$$

are equivariant under the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ and the morphisms $p^{-1}\mathbb{I}^*_h$, as M varies. □

Since we are interested in applying the above corollary to the case of Π equal to the cohomology of the Igusa varieties, let us recall that the representations of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$ associated to the cohomology of the Igusa varieties of level U^p (for any sufficiently small open compact subgroup U^p of $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$) are indeed admissible (see remark 3.9).

8.2.7. We now focus our attention on the cohomology groups

$$R\Gamma^j_c(U_\varepsilon, R^q\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})),$$

for all integer $j, q \geqslant 0$ and any $\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}$, for some $s \geqslant 0$, as representations of $\Gamma_\varepsilon \times \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$. We recall that $\Gamma_\varepsilon \subset T$ is an open compact subgroup and U_ε an open subscheme, of finite type, of the reduction $\overline{\mathcal{M}}$ of the formal Rapoport-Zink space $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\alpha,M,g}$.

For all ε, we denote by $U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon$ the closure of the open $U_\varepsilon \subset \overline{\mathcal{M}}$. Then, the complement $U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon - U_\varepsilon$ is also a closed subscheme of $\overline{\mathcal{M}}$. In particular, both $U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon$ and $U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon - U_\varepsilon$ proper schemes.

For any object $\mathcal{F}$ in the derived category of abelian torsion étale sheaves, the inclusion $U_\varepsilon \subset U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon$ gives rise to an exact triangle

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_c(U_\varepsilon, \mathcal{F}) \arrow[rr] & & R\Gamma(U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon, \mathcal{F}) \arrow[dl] \\
& R\Gamma(U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon - U_\varepsilon, \mathcal{F}) \arrow[ul, "+1"] &
\end{tikzcd}$$

and in particular, for $\mathcal{F} = R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$, part (2) of proposition 2.22 implies that there is an exact triangle

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_c(U_\varepsilon, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \arrow[r] & R\Gamma(\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
& R\Gamma(\mathrm{sp}^{-1}(U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon - U_\varepsilon) \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \arrow[ul, "+1"]
\end{tikzcd}$$

where $\mathrm{sp}: \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} = (\mathcal{M}_{\alpha,M})_\eta \to \overline{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}_{\alpha,M})_s$ denotes the reduction map (see section 2.7.1).

Let us recall that the rigid analytic spaces $\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon$ and $\mathrm{sp}^{-1}(U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon - U_\varepsilon) = \mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon - \mathrm{sp}^{-1}U_\varepsilon$ are by definition some open subspaces of $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} = \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M}$, and therefore in particular they are smooth. Thus, Poincaré duality implies that

$$H^q(\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)) \simeq H^{2D-q}_c(\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^\vee,$$

and

$$H^q(\mathrm{sp}^{-1}(U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon - U_\varepsilon) \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)) \simeq H^{2D-q}_c(\mathrm{sp}^{-1}(U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon - U_\varepsilon) \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^\vee,$$

where $D = q(h-q)$ the dimension of the Rapoport-Zink spaces and $M^\vee$ denotes the dual of M, for any $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-module M.

8.2.8. The cohomology with compact supports of the rigid analytic space $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$ can be described in terms of the above cohomology with compact supports of the opens $\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_\varepsilon$. Indeed, in [**10**] (section 4.3, pp. 67 – 72) Fargues proves the analogue of proposition 8.3 for the cohomology with compact support of the rigid analytic space $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$. In his result, the role of the open $U = \overline{U}^{n,d} \subset \overline{\mathcal{M}}$ is played by any $V \subset \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}$, such that $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} = \cup_{\rho\in T}\rho V$, for V either an open subset or a closed analytic domain (*e.g.* $V = \mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}, \mathrm{sp}^{-1}U$).

In particular, there is an equality of virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(H^\bullet_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi)\\ &\qquad = \sum_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}^T_{\Gamma_\varepsilon} H^\bullet_c(V_\varepsilon \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi),\end{aligned}$$

for any admissible $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation Π of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$.

8.2.9. Let us now reintroduce the level at p, M, in our notations and consider how the previous construction behaves, as M varies, under the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$.

Let V_0 be an open subset or a closed analytic domain of the Rapoport-Zink space with no level structure $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_0$ such that $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_0 = \cup_{\rho\in T}\rho V_0$. We denote by V_M the pullback of V_0 under the projection $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_M \to \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_0$, for all $M \geqslant 1$. Then, $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_M = \cup_{\rho\in T}\rho V_M$ and the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ on the system of rigid analytic Rapoport-Zink spaces preserves such decompositions.

We deduce that, for any admissible $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation Π of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$, there is an equality of virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\begin{aligned}&\varinjlim_M \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(H^\bullet_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_M \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi)\\ &\qquad = \sum_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \varinjlim_M \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}^T_{\Gamma_\varepsilon} H^\bullet_c(V_{\varepsilon,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi).\end{aligned}$$

Finally, we remark that the analogous results also hold for the ℓ-adic cohomology groups. More precisely, in [**10**] Fargues proves that, for all $M \geqslant 0$, there is a spectral sequence of $\mathbb{Q}_\ell$-representations of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$E_1^{s,t} = \oplus_{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^s_{\neq}} \text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T H_c^t(V_{\varepsilon,M}, \mathbb{Q}_\ell(D)) \Longrightarrow H_c^{s+t}(\mathcal{M}_M^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Q}_\ell(D)),$$

and thus the equality of virtual $\mathbb{Q}_\ell$-representations of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\begin{aligned}&\varinjlim_M \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(H_c^\bullet(\mathcal{M}_M^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell(D)), \Pi)\\ &\qquad = \sum_{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \varinjlim_M \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T H_c^\bullet(V_{\varepsilon,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell(D)), \Pi),\end{aligned}$$

for any admissible $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation Π of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$. (We recall that the ℓ-adic cohomology groups of the Rapoport-Zink spaces are defined as the smooth $\mathbb{Q}_\ell$-representations of $T_\alpha \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$H_c^j(\mathcal{M}_{\alpha,M}^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_{n,d}(\varinjlim_r H_c^j((U_{\alpha,M}^{n,d})^{\mathrm{rig}} \times_K \times \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell),$$

for all $j \geqslant 0$ and any level $M \geqslant 0$.)

Theorem 8.7. — *Let Π be an admissible $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$.*

Then, there is an equality of virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\begin{aligned}&\varinjlim_M \mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(H_c^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_M, R^\bullet\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), \Pi)\\ &\qquad\qquad = \varinjlim_M \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(H_c^\bullet(\mathcal{M}_M^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi),\end{aligned}$$

where $D = q(h-q)$ the dimension of the Rapoport-Zink space $\mathcal{M}$.

Proof. — Combining lemma 8.4 and corollary 8.6 with the equalities corresponding to the exact triangles in section 8.2.7 and Poincaré duality, we obtain (for all $M \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(H_c^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_M, R^\bullet\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), \Pi)\\ &\quad = \sum_{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T H_c^\bullet(U_\varepsilon, R^\bullet\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), \Pi)\\ &\quad = \sum_{\varepsilon \in \Gamma\backslash(T/\Gamma)^\bullet_{\neq}} \Big(\mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T H^\bullet(\mathrm{sp}^{-1}U_\varepsilon^{\mathrm{cl}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), \Pi)\\ &\qquad - \mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^T H^\bullet(\mathrm{sp}^{-1}(U_\varepsilon^{\mathrm{cl}} - U_\varepsilon) \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), \Pi)\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^{\bullet}_{\neq}} \Big(\mathrm{Tor}^{\bullet}_{\mathcal{H}_r(T)}(\text{c-Ind}^{T}_{\Gamma_\varepsilon}\ H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D))^{\vee},\Pi)$$
$$- \mathrm{Tor}^{\bullet}_{\mathcal{H}_r(T)}(\text{c-Ind}^{T}_{\Gamma_\varepsilon}\ H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}(U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}-U_\varepsilon)\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D))^{\vee},\Pi)\Big)$$
$$= \sum_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^{\bullet}_{\neq}} \Big(\mathrm{Ext}^{\bullet}_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}^{T}_{\Gamma_\varepsilon}\ H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)),\Pi)$$
$$- \mathrm{Ext}^{\bullet}_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}^{T}_{\Gamma_\varepsilon}\ H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}(U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}-U_\varepsilon)\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)),\Pi)\Big).$$

Let us consider the open $V=\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}$ (resp. the closed analytic domain $V=\mathrm{sp}^{-1}U_\varepsilon$). Then, for all $\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^{s}_{\neq}$, $s\geqslant 0$, we have $V_\varepsilon=\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}$ (resp. $V_\varepsilon=\mathrm{sp}^{-1}U_\varepsilon$). It follows that there are equalities of virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)\times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\varinjlim_{M}\mathrm{Ext}^{\bullet}_{T\text{-smooth}}(H^{\bullet}_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}\times_K\overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)),\Pi)$$
$$=\varinjlim_{M}\sum_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^{\bullet}_{\neq}}\mathrm{Ext}^{\bullet}_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}^{T}_{\Gamma_\varepsilon}\ H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)),\Pi)$$
$$=\varinjlim_{M}\sum_{\varepsilon\in\Gamma\backslash(T/\Gamma)^{\bullet}_{\neq}}\mathrm{Ext}^{\bullet}_{T\text{-smooth}}(\text{c-Ind}^{T}_{\Gamma_\varepsilon}\ H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}U_{\varepsilon}\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)),\Pi).$$

Further more, the open inclusions $\mathrm{sp}^{-1}(U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}-U_\varepsilon)=\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}-\mathrm{sp}^{-1}U_\varepsilon\hookrightarrow\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}$ give rise to the equalities

$$H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}(U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}-U\varepsilon)\times_K\overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)),\Pi)$$
$$=H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}U^{\mathrm{cl}}_{\varepsilon}\times_K\overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)),\Pi)-H^{\bullet}_c(\mathrm{sp}^{-1}U_{\varepsilon}\times_K\overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)),\Pi).$$

Substituting the terms on the right hand side of our formula, accordingly with the last three equalities, we deduce the equality in the statement. □

8.2.10. Finally, it is possible to improve theorem 8.7, by considering the integral models $\mathcal{M}_{\alpha,M,g}$, for all $g\in\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$.

Let us consider the $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-modules

$$H^n(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_M,R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))\otimes^{L}_{\mathcal{H}_r(T)}\Pi)$$

for any admissible representation Π of $T\times W_{\mathbb{Q}_p}$ and $n\geqslant 0$. For all $n\geqslant 0$, the direct limits

$$\varinjlim_{M}H^n(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_M,R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))\otimes^{L}_{\mathcal{H}_r(T)}\Pi)$$

are naturally endowed with an action of $\langle\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p),p\mathbb{I}_h\rangle\times W_{\mathbb{Q}_p}$, and also with the morphisms induced by the maps

$$\delta^{*-1}_{M,g}\circ g^*: R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{M-e},R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))\longrightarrow R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{M},R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})),$$

for all $g\in\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$ and $M\geqslant e=e(g)$.

By corollary 8.6, we can write

$$\varinjlim_M H^\bullet(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} \Pi) = \varinjlim_M \mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T)}(H^\bullet_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R^\bullet\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})), \Pi)$$

as virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$.

Then, Theorem 90 implies that there in an equality of virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\varinjlim_M H^\bullet(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} \Pi) = \varinjlim_M \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(H^\bullet_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(-D)), \Pi),$$

where the virtual representation on the right hand side is the restriction to the subgroup $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p}$ of a representation of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$.

Proposition 8.8. — *Let Π be an admissible $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representation of $T \times W_{\mathbb{Q}_p}$.*

The morphisms induced by the maps $\delta^{*-1}_{M,g} \circ g^*$, $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, on the modules

$$\varinjlim_M H^n(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_M, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} \Pi),$$

define an action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ which extends the action of $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \subset \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ and commutes with the action of $W_{\mathbb{Q}_p}$.

Moreover, there is an equality of virtual $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$-representations of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\varinjlim_M H^\bullet(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{\alpha,M}, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} \Pi) = \varinjlim_M \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(H^\bullet_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi).$$

Proof. — First, let us remark that the equalities in theorem 8.7 arise from some quasi-isomorphisms

$$R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_M, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} \Pi \simeq R\,\mathrm{Hom}_{T\text{-smooth}}(R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi)$$

which are compatible not only with the action of $\langle \mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p), p\mathbb{I}_h\rangle \times W_{\mathbb{Q}_p}$, but also with the morphisms associated to the elements $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, as M varies.

As the level M varies, the action of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)$ on the complex on the right hand side give rise to an action on the cohomology groups

$$\varinjlim_M H^\bullet(R\,\mathrm{Hom}_{T\text{-smooth}}(R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi))$$

$$\varinjlim_M \mathrm{Ext}^\bullet_{T\text{-smooth}}(H^\bullet_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi).$$

It follows, in particular, that the morphisms induced on the complex on the left hand side by the maps $\delta_{M,g}^{*-1} \circ g^*$, $g \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)^+$, are quasi-isomorphisms and that, for all $n \geqslant 0$, there is an isomorphisms of $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ representations of $\mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\begin{aligned}&\varinjlim_{M} H^n(R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_M, R\Psi_\eta(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \otimes^L_{\mathcal{H}_r(T)} \Pi)\\ &\qquad = \varinjlim_{M} H^n(R\operatorname{Hom}_{T\text{-smooth}}(R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(D)), \Pi)). \quad \square\end{aligned}$$

8.3. An equality in the Grothendieck group. — In the following, we shall apply combine the results of the previous sections in a formula describing the ℓ-adic cohomology of the Shimura varieties, in terms of the ℓ-adic cohomology of the Igusa varieties and the Rapoport-Zink spaces, as virtual representations.

8.3.1. First, we recall the notations for the ℓ-adic-cohomology groups of the Igusa varieties.

For any level away from p, U^p and any Newton polygons α, of dimension q and height h, we define, for all integer $j \geqslant 0$,

$$H^j_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_{m}(\varinjlim_{r} H^j_c(J_{\alpha,U^p,m} \times_{\mathbb{F}_p} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell)$$

as an admissible representation of $T_\alpha \times W_{\mathbb{Q}_p}$, and

$$H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_{U^p} H^j_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Q}_\ell)$$

as an admissible $\mathbb{Q}_\ell$-representation of $T_\alpha \times G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times W_{\mathbb{Q}_p}$.

Lemma 8.9. — *Let α be a Newton polygon, of dimension q and height h. For all positive integers d, e, f, the ℓ-adic representations of $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$*

$$\begin{aligned}&\varinjlim_{U^p,M} \operatorname{Ext}^d_{T_\alpha\text{-smooth}}(H^e_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell), H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Q}_\ell))\\ &= \varinjlim_{U^p,M} (\varinjlim_{r} \operatorname{Ext}^d_{T_\alpha\text{-smooth}}(H^e_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), H^j_c(J_{\alpha,U^p}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.\end{aligned}$$

Moreover, they are admissible and vanish for d, e, f sufficiently large.

Proof. — It follows from the definitions that it is enough to show that, for all level U^p, M,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ext}^d_{T_\alpha\text{-smooth}}(H^e_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell), H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Q}_\ell))\\ &\qquad = \varinjlim_{r} \operatorname{Ext}^d_{T_\alpha\text{-smooth}}(H^e_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,\end{aligned}$$

and that they are finite dimensional vector spaces, which vanish for d, e, f sufficiently large.

Let us fix a level U^p, M. We choose an closed analytic domain $V_0 \subset \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,0}$ as in section 8.2.9, and denote by V_M its pullback under the projection $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \to \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,0}$.

The equalities in section 8.2.9 reduce the proof of lemma to showing that for all $\varepsilon \in \Gamma\backslash(T_\alpha/\Gamma)^s_{\neq}$, $s \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^\bullet_{T_\alpha\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^{T_\alpha} H^\bullet_c(V_{\varepsilon,M}\times_K \overline{K},\mathbb{Q}_\ell), H^\bullet_c(J_{\alpha,U^p},\mathbb{Q}_\ell))\\&= \varinjlim_r(\mathrm{Ext}^\bullet_{T_\alpha\text{-smooth}}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^{T_\alpha} H^\bullet_c(V_{\varepsilon,M}\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), H^\bullet_c(J_{\alpha,U^p},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell,\end{aligned}$$

or equivalently, up to Tate twist, that

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}(T_\alpha)}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^{T_\alpha} H^\bullet(V_{\varepsilon,M}\times_K \overline{K},\mathbb{Q}_\ell), H^\bullet_c(J_{\alpha,U^p},\mathbb{Q}_\ell))\\&= \varinjlim_r(\mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(T_\alpha)}(\text{c-Ind}_{\Gamma_\varepsilon}^{T_\alpha} H^\bullet(V_{\varepsilon,M}\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), H^\bullet_c(J_{\alpha,U^p},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell,\end{aligned}$$

where we write $\mathcal{H}(T_\alpha)$ for the Hecke algebra of T_α with coefficients in $\mathbb{Q}_\ell$. (The equivalence between the two equalities follows from Poincaré duality and lemma 8.4.)

Since the ℓ-adic cohomology groups $H^i_c(V_{\varepsilon,M},\mathbb{Q}_\ell)$ are finite dimensional, for all $i \geqslant 0$, there exists an open compact normal subgroup $K_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon$ which acts on them trivially. Indeed, we can choose K_ε such that is acts trivially on the representations $H^i_c(V_{\varepsilon,M},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$, for all $i \geqslant 0$ and $r \geqslant 1$.

Let m_ε be a positive integer such that $\Gamma^{m_\varepsilon} \subset K_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon$ (we remark that m_ε exists since the subgroups Γ^m, $m \geqslant 0$, form a basis of open subgroups of T_α). Then, proving the previous equality of virtual $\mathbb{Q}_\ell$-representations of $W_{\mathbb{Q}_p}$ is equivalent to proving that

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}(\Gamma_\varepsilon/K_\varepsilon)}(H^\bullet(V_{\varepsilon,M}\times_K \overline{K},\mathbb{Q}_\ell), H^\bullet_c(J_{\alpha,U^p,m_\varepsilon},\mathbb{Q}_\ell))\\&= \varinjlim_r(\mathrm{Tor}^\bullet_{\mathcal{H}_r(\Gamma_\varepsilon/K_\varepsilon)}(H^\bullet(V_{\varepsilon,M}\times_K \overline{K},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}), H^\bullet_c(J_{\alpha,U^p,m_\varepsilon},\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell.\end{aligned}$$

which follows from the next lemma. □

Lemma 8.10. — *Let G be an abstract finite group of order a power of p, and write $\mathcal{H}(G)=\mathbb{Q}_\ell[G]$ and $\mathcal{H}_r(G)=\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}[G]$, for all $r \geqslant 1$.*

Let $(M_r)_{r\geqslant 1}$ and $(N_r)_{r\geqslant 1}$ be two A-R ℓ-adic systems, such that $\ell^r M_r = 0 = \ell^r N_r$, which are endowed with an action of G. We write $M = \varinjlim_r M_r$ and $N = \varinjlim_r N_r$.

Then, for all $i \geqslant 0$, we have

$$\mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}(G)}(M\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell, N\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_r \mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}_r(G)}(M_r,N_r)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell.$$

Proof. — Let us remark that without loss of generality we may replace M_r (resp. N_r) by $M/\ell^r = M\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ (resp. $N/\ell^r = N\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$), for all $r \geqslant 1$, since the two modules differ by a torsion module of bounded order. Thus, it suffices to prove that, for all $i \geqslant 0$,

$$\mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}(G)}(M\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell, N\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_r \mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}_r(G)}(M/\ell^r,N/\ell^r)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell.$$

Let us remark that the modules $\mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}_r(G)}(M/\ell^r, N/\ell^r)$ clearly satisfy the M-L condition and thus the functors

$$N \longmapsto \mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}_r(G)}(M/\ell^r, N/\ell^r) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,$$

for $i \geqslant 0$, form a δ-functor from the category of finitely generated $\mathbb{Z}_\ell$-modules, endowed with an action of G, to the category of finite dimensional $\mathbb{Q}_\ell$-vector spaces.

Moreover, it is easy to see that, as a δ-functor, it is effaceable (*e.g.* any finitely generated $\mathbb{Z}_\ell$-module, endowed with an action of G, admits an epimorphism from a module of the form $\mathrm{Ind}^G_{\{1\}}(\mathbb{Z}_\ell^r) = \mathbb{Z}_\ell^{r|G|}$, for some integer $r \geqslant 0$, which is acyclic for the above δ-functor).

For any finitely generated $\mathbb{Z}_\ell$-module N, endowed with an action of G, let $N \mapsto \mathrm{Tor}^i_G(M, N)$ be the derived functors of $N \mapsto (M^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} N)_G$, for $i \geqslant 0$.

Then, we can identify

$$\mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}(G)}(M \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell, N \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Tor}^i_G(M, N) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,$$

and deduce the existence of a natural morphisms of δ-functors

$$\mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}(G)}(M \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell, N \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \varinjlim_r \mathrm{Tor}^i_{\mathcal{H}_r(G)}(M/\ell^r, N/\ell^r) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

Then, in order to conclude it suffices to remark that the above morphism is indeed an isomorphism for $i = 0$. □

We have finally completed all the steps necessary to obtain the following description of the ℓ-adic cohomology of the Shimura varieties.

Theorem 8.11. — *There is an equality of virtual representations of the group* $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$

$$\begin{aligned}\sum_t (-1)^t H^t(X, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathbb{Z}_p^\times} \\ = \sum_{\alpha,d,e,f} (-1)^{d+e+f} \varinjlim_M \mathrm{Ext}^d_{T_\alpha\text{-smooth}}(H^e_c(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\alpha,M} \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell(D)), H^j_c(J_\alpha, \mathbb{Q}_\ell))\end{aligned}$$

where d, e, f are positive integers and α varies among the Newton polygons of dimension q and height h.

Proof. — This follows from proposition 8.1, theorem 8.2, proposition 8.8 and lemma 8.9. □

We conclude by remarking that theorem 8.11 is compatible with corollary 4.5.1 in [**10**].

References

[1] M. Artin, A. Grothendieck & J.L. Verdier (eds.) – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4)*, Lect. Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.

[2] V.G. Berkovich – Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math* **78** (1994), p. 5–161.

[3] ______, Vanishing cycles for formal schemes, *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 539–571.

[4] ______, Vanishing cycles for formal schemes, II, *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 367–390.

[5] P. Cartier – Representations of p-adic groups: a survey, in *Automorphic forms, representations and L-functions (Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1979, p. 111–155.

[6] B. Conrad – Modular curves, descent theory, and rigid analytic spaces, in preparation.

[7] P. Deligne – Cohomolgie étale, in *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA $4\frac{1}{2}$)*, Lect. Notes in Math., vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, avec la collaboration de J.F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.L. Verdier.

[8] P. Deligne, D. Kazhdan & M.F. Vignéras – *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984.

[9] V.G. Drinfel'd – Elliptic modules, *Mat. Sb. (N.S.)* **136** (1974), p. 594–627, 656.

[10] L. Fargues – Cohomologie d'espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales, ce volume.

[11] R. Freitag & R. Kiehl – *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Results in Mathematics and Related Areas (3), vol. 13, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.

[12] A. Grothendieck – *Séminaire de Géométrie Algébrique. I. Revêtements étales et Groupes Fondemental*, Lect. Notes in Math., vol. 224, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[13] ______, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Sém. Math. Sup. Univ. Montréal, Presses Univ. Montréal, 1974.

[14] M. Harris & R. Taylor – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[15] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[16] J. Igusa – Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions, *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 561–577.

[17] L. Illusie – Déformations de groupes de Barsotti-Tate (d'après A. Grothendieck), in *Seminar on Arithmetic bundles: the Mordell conjecture (Paris, 1983/84)*, Astérisque, vol. 127, Société Mathématique de France, Paris, 1985, p. 151–198.

[18] A.J. de Jong & F. Oort – Purity of the stratification by Newton polygons, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), no. 1, p. 209–241.

[19] N. Katz – Slope Filtration of F-crystals, in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978)*, Astérisque, vol. 63, Société Mathématique de France, Paris, 1979, p. 113–163.

[20] N. Katz & B. Mazur – *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Mathematics Studies, vol. 108, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[21] R.E. KOTTWITZ – Shimura varieties ans λ-adic representations, in *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, 1990, p. 161–209.

[22] ———, Points on some Shimura varieties over finite fields, *J. Amer. Math. Soc* **5** (1992), no. 2, p. 373–444.

[23] F. OORT – Foliations in moduli spaces of abelian varieties, in preparation.

[24] ———, Moduli of abelian varieties and Newton polygons, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312** (1991), no. 5, p. 385–389.

[25] F. OORT & TH. ZINK – Families of p-divisible groups with constant Newton polygon, to appear.

[26] M. RAPOPORT – Non-Archimedean period domains, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, 1995, p. 423–434.

[27] M. RAPOPORT & TH. ZINK – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, no. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[28] TH. ZINK – On Oort's foliation, Handwritten notes of F. Oort's talk in Essen.

[29] ———, On the slope filtration, *Duke Math. J* **109** (2001), no. 1, p. 79–95.

E. MANTOVAN, Department of Mathematics, 970 Evans Hall 3840, University of California, Berkeley, CA 94720-3840, U.S.A. • *E-mail :* mantovan@math.berkeley.edu