ASTÉRISQUE 295

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (III)

édité par

Pierre Berthelot

Jean-Marc Fontaine

Luc Illusie

Kazuya Kato

Michael Rapoport

Société Mathématique de France 2004

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P. Berthelot
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.
E-mail : Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr
Url : http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/

J.-M. Fontaine
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : fontaine@math.u-psud.fr

L. Illusie
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : illusie@math.u-psud.fr

K. Kato
Department of mathematics, faculty of science, Kyoto university, Kyoto, 606-8502, Japon.
E-mail : kazuya@kusm.kyoto-u.ac.jp

M. Rapoport
Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Allemagne.
E-mail : rapoport@math.uni-koeln.de
Url : http://www.mi.uni-koeln.de

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F11, 11F67, 11F80, 11F85, 11G05, 11G16, 11G40, 11R33, 11R39, 11R56, 11S15, 11S20, 11S25, 11S80, 11S99, 14F30, 14F40, 14F42, 14G10, 14G35, 14G40, 22E50.

***Mots clefs.* —** Corps locaux, périodes p-adiques, représentations galoisiennes, forme modulaire, système d'Euler, groupe de Selmer, loi de réciprocité, fonction zêta p-adique, courbe elliptique, espace symétrique p-adique, transformée intégrale, résidu, représentation p-adique.

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (III)

édité par Pierre Berthelot, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie, Kazuya Kato, Michael Rapoport

***Résumé.* —** Ce volume est le dernier d'une série de trois consacrés aux méthodes p-adiques en géométrie arithmétique. Il traite de questions de nature arithmétique : représentations galoisiennes, fonctions L p-adiques de formes modulaires, théorie d'Iwasawa des formes modulaires.

***Abstract* (p-adic cohomologies and arithmetic applications (III))**

This volume is the last of three dealing with p-adic methods in arithmetic geometry. The themes appearing in this volume have an arithmetical flavour: Galois representations, p-adic L-functions of modular forms, Iwasawa theory of modular forms.

© Astérisque 295, SMF 2004

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles ix

Abstracts xi

Introduction xiii

J.-M. Fontaine — *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques* .. 1
0. Introduction 2
1. Le corps C et sa cohomologie continue 10
1.1. Cohomologie continue 10
1.2. La cohomologie de C et des $GL_h(C)$ 11
1.3. Différentes, groupes de ramification et extensions presqu'étales 12
1.4. Calcul de la cohomologie de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ 18
1.5. Calcul de la cohomologie de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ 19
2. C-représentations : la théorie de Sen 25
2.1. C, L et K_∞-représentations 25
2.2. Étude des K_∞-représentations 28
2.3. Le point de vue de Colmez 32
2.4. Quelques rappels sur les groupe pro-algébriques commutatifs 34
2.5. Le point de vue algébrique 36
2.6. Classification des C-représentations 38
2.7. C-représentations presque de Hodge-Tate 44
3. B_{dR}-représentations 45
3.1. Le corps B_{dR} des périodes p-adiques 45
3.2. La topologie de B_{dR} 48
3.3. Étude des B_{dR}^+-représentations : réduction aux $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations 51
3.4. Étude des $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations 54

3.5. Étude des B_{dR}-représentations : Première approche 58
3.6. Étude des B_{dR}-représentations : deuxième approche 61
3.7. Classification des B_{dR}-représentations 67
3.8. Connexions régulières et représentations de $\mathbb{DR}$ 69
4. Généralités sur les représentations p-adiques 73
4.1. Poids et types d'une représentation 73
4.2. Graduations, ν-graduations, filtrations et ν-filtrations 74
4.3. Applications aux représentations presque de Hodge-Tate 76
4.4. Représentations presque de Hodge-Tate de dimension 1 77
5. Représentations semi-stables et (φ, N)-modules filtrés 79
5.1. Les (φ, N)-modules filtrés 79
5.2. Les anneaux B_{cris} et B_{st} 82
5.3. Représentations semi-stables et (φ, N)-modules filtrés admissibles 83
5.4. L'anneau $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ 90
5.5. Les anneaux B^0, B^h_{st}, B^∞_{st},... 92
5.6. Quelques indications sur la preuve de « faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible (th. 5.9) » 100
6. L'action de C perdue et retrouvée 107
6.1. Le résultat 107
6.2. Preuve de la proposition 6.2 108
6.3. Preuve du théorème 6.1 111
Références 113

K. Kato — *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms* 117
Introduction 118
Chapter I. Euler systems in K_2 of modular curves and Euler systems in the spaces of modular forms 120
1. Siegel units 121
2. Euler systems in K_2 of modular curves 125
3. Eisenstein series 134
4. Euler systems in the space of modular forms 142
5. Euler systems on $X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$. 152
6. Projections to eigen cusp forms 160
7. The proofs of the zeta value formulas 163
Chapter II. p-adic Euler systems 179
8. Definitions of p-adic Euler systems 180
9. Relation with Euler systems in the spaces of modular forms 186
10. Generalized explicit reciprocity laws 189
11. Modular forms and B_{dR} 202
Chapter III. Iwasawa theory of modular forms (without p-adic zeta functions) 218
12. The main conjecture, I 219
13. The method of Euler systems 224
14. Finiteness of Selmer groups and Tamagawa number conjectures 234
15. The case of complex multiplication 250

Chapter IV. Iwasawa theory for modular forms (with p-adic zeta functions) . 267
16. The p-adic zeta function 268
17. The main conjecture, II 272
18. p-adic Birch Swinnerton-Dyer conjectures 280
Table of special Notation 284
References 286

P. Schneider & J. Teitelbaum — *Correction to "p-adic boundary values"* . . 291

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques
JEAN-MARC FONTAINE 1

Soient K un corps p-adique, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique, B_{dR} le corps des périodes p-adiques, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On commence par expliquer les calculs de Sen et Tate sur la cohomologie galoisienne continue de C et de $GL_h(C)$. On donne ensuite une classification, essentiellement due à Sen, des *C-représentations de G_K* (c'est-à-dire des C-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K) puis des *B_{dR}-représentations de G_K*. On applique ceci aux représentations p-adiques de G_K, puis on décrit les principaux faits de la théorie des *représentations p-adiques semi-stables*. On termine en prouvant que les seuls endomorphismes $\mathbb{Q}_p$-linéaires continus G_K-équivariants de C sont les homothéties par des éléments de K, puis que, lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie des C-représentations de G_K dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms
KAZUYA KATO 117

Si f est une forme modulaire, nous construisons un système d'Euler attaché à f, ce qui nous permet d'obtenir des bornes pour les groupes de Selmer de f. Une loi de réciprocité explicite permet de relier ce système d'Euler à la fonction zêta p-adique de f, ce qui nous permet d'obtenir un résultat de divisibilité en direction de la conjecture principale pour f ainsi que des minorations pour l'ordre d'annulation de cette fonction zêta p-adique. Dans le cas particulier où f est attachée à une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$, nous prouvons que la fonction zêta p-adique de E a un zéro en $s = 1$ d'ordre supérieur ou égal au rang du groupe des points rationnels de E.

Correction to "p-adic boundary values"
PETER SCHNEIDER & JEREMY TEITELBAUM 291
Correction à l'article « p-adic boundary values » paru dans *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (I), Astérisque **278** (2002), p. 51–125.

ABSTRACTS

Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques
Jean-Marc Fontaine 1

Let K be a p-adic field, $\overline{K}$ an algebraic closure of K, C the p-adic completion of $\overline{K}$, B_{dR} the field of p-adic periods, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. We first explain Sen and Tate's computations of the continuous Galois cohomology of C and $GL_h(C)$. We give a classification (mainly due to Sen) of *C-representations of G_K* (that is of finite dimensional C-vector spaces endowed with a semi-linear and continuous action of G_K). We continue with a *classification of B_{dR}-representations of G_K*. Then we apply these results to p-adic Galois representations and we review the main facts of the theory of semi-stable Galois representations. We finish by proving that
a) the only continous $\mathbb{Q}_p$-linear endomorphisms of C, commuting with the action of G_K, are multiplications by elements of K,
b) the forgetful functor from the category of C-representations of G_K to the category of p-adic Banach spaces equipped with a linear and continuous action of G_K is fully faithful.

p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms
Kazuya Kato 117

If f is a modular form, we construct an Euler system attached to f from which we deduce bounds for the Selmer groups of f. An explicit reciprocity law links this Euler system to the p-adic zeta function of f which allows us to prove a divisibility statement towards Iwasawa's main conjecture for f and to obtain lower bounds for the order of vanishing of this p-adic zeta function. In particular, if f is associated to an elliptic curve E defined over $\mathbb{Q}$, we prove that the p-adic zeta function of f has a zero at $s = 1$ of order at least the rank of the group of rational points on E.

Correction to "p-adic boundary values"
PETER SCHNEIDER & JEREMY TEITELBAUM 291

Correction to the article "p-adic boundary values" published in *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (I), Astérisque **278** (2002), p. 51–125.

INTRODUCTION

Un semestre spécial, consacré aux cohomologies p-adiques et à leurs applications arithmétiques, a eu lieu, du 17 février au 11 juillet 1997, dans le cadre du centre Émile Borel, situé à Paris dans les locaux de l'institut Henri Poincaré.

Les principaux thèmes abordés ont été :
- les théorèmes de comparaison entre différentes cohomologies p-adiques des variétés algébriques sur les corps locaux, les représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un tel corps,
- les groupes p-divisibles et la théorie de Dieudonné cristalline, la cohomologie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, les équations différentielles p-adiques,
- l'uniformisation p-adique, l'étude des espaces symétriques p-adiques, des courbes hyperboliques p-adiques, de la cohomologie des variétés de Shimura,
- la géométrie et la cohomologie logarithmiques,
- les fonctions L p-adiques, leurs relations avec les systèmes d'Euler, en particulier dans le cas des formes modulaires.

Les activités structurées ont consisté en

a) Douze cours :
- P. Berthelot (Rennes) : *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques*,
- C. Breuil (CNRS, Orsay) : *Cohomologie log cristalline et cohomologie étale de torsion* (Cours Peccot du Collège de France),
- G. Christol (Paris VI) : *Equations différentielles p-adiques*,
- G. Faltings (MPI, Bonn) : *Almost étale extensions*,
- J.-M. Fontaine (Orsay) : *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques*,
- L. Illusie (Orsay) et A. Ogus (Berkeley) : *Géométrie logarithmique*,
- K. Kato (Tokyo) : *Euler systems and p-adic L-functions*,
- W. Messing (Minneapolis) : *Topologie et cohomologie syntomiques et log syntomiques*,

– S. Mochizuki (RIMS, Kyoto) : *The Ordinary and Generalized Ordinary Moduli of Hyperbolic Curves*,
– M. Rapoport (Cologne) : *Aspects p-adiques des variétés de Shimura*,
– P. Schneider (Münster) : *Analysis on p-adic symmetric spaces*,
– T. Zink (Bielefeld) : *Cartier theory and its connection to crystalline Dieudonné theory.*

b) Un séminaire avec un ou deux exposés chaque semaine.

c) Deux colloques :
– *Problèmes de coefficients en cohomologie cristalline et en cohomologie rigide*, du 28 au 30 avril,
– *Arithmétique des fonctions L et méthodes p-adiques*, du 30 juin au 4 juillet.

d) Un groupe de travail sur *le théorème de comparaison de Tsuji*, du 20 au 29 mai.

Les organisateurs ont demandé à tous ceux qui avaient fait un cours de le rédiger ou de nous faire parvenir un texte sur un sujet voisin. Nous avons également invité Takeshi Tsuji à écrire un résumé de sa démonstration, maintenant publiée[(1)], de la *conjecture* C_{st}.

Nous tenons à remercier les auteurs non seulement pour leur contribution mais aussi pour leur patience ; nous espérons qu'ils voudront bien nous excuser du retard avec lequel ces volumes paraissent.

Les articles ont été examinés par des rapporteurs que nous remercions pour leur aide aussi désintéressée qu'utile.

Enfin, nous pensons que tous ceux qui ont participé à ce semestre seront d'accord avec nous pour saluer l'atmosphère agréable dans laquelle il s'est déroulé. Nous remercions chaleureusement Joseph Oesterlé, alors directeur du Centre Émile Borel, son équipe et tout le personnel de l'Institut Henri Poincaré pour leur gentillesse, leur compétence, leur efficacité et leur dévouement. Ils se joindront sûrement à nous pour accorder une mention spéciale à Madame Nocton, notre bibliothécaire — tous les mathématiciens qui ont travaillé à Paris la connaissent et savent combien son rôle a été précieux ; et une autre à notre secrétaire — Florence Damay — qui a quitté le Centre Émile Borel juste à la fin de notre semestre ; elle en fut la cheville ouvrière mais aussi le sourire, avec une formidable aptitude à comprendre et résoudre les problèmes extra-mathématiques rencontrés par les très nombreux participants.

Les éditeurs

(1) *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411

Astérisque
295, 2004, p. 1–115

ARITHMÉTIQUE DES REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES p-ADIQUES

par

Jean-Marc Fontaine

***Résumé.* —** Soient K un corps p-adique, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique, B_{dR} le corps des périodes p-adiques, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On commence par expliquer les calculs de Sen et Tate sur la cohomologie galoisienne continue de C et de $GL_h(C)$. On donne ensuite une classification, essentiellement due à Sen, des *C-représentations de G_K* (c'est-à-dire des C-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K) puis des *B_{dR}-représentations de G_K*. On applique ceci aux représentations p-adiques de G_K, puis on décrit les principaux faits de la théorie des *représentations p-adiques semi-stables*. On termine en prouvant que les seuls endomorphismes $\mathbb{Q}_p$-linéaires continus G_K-équivariants de C sont les homothéties par des éléments de K, puis que, lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie des C-représentations de G_K dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

Table des matières

0. Introduction 2
1. Le corps C et sa cohomologie continue 10
2. C-représentations : la théorie de Sen 25
3. B_{dR}-représentations 45
4. Généralités sur les représentations p-adiques 73
5. Représentations semi-stables et (φ, N)-modules filtrés 79
6. L'action de C perdue et retrouvée 107
Références 113

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F80, 11F85, 11S15, 11S20, 11S25.
***Mots clefs.* —** Corps locaux, périodes p-adiques, représentations galoisiennes.

© Astérisque 295, SMF 2004

0. Introduction

Dans ce texte on s'intéresse aux représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un corps p-adique et en particulier, on définit toute une hiérarchie parmi ces représentations (représentations presque de Hodge-Tate, de Hodge-Tate, de de Rham, semi-stables, cristallines).

Ce texte contient des résultats classiques (notamment la théorie de Sen [**Sen69**], objet essentiel des chapitres 1 et 2) ou déjà publiés ailleurs (notamment le théorème *faiblement admissible implique admissible* [**CF00**], dont on parle dans le chapitre 5, on ne donne ici qu'une esquisse de la preuve). Il contient aussi des résultats non publiés ailleurs comme

– l'analogue de la théorie de Sen lorsque l'on remplace le corps $\mathbb{C}_p$ par le corps B_{dR} (chapitre 3),

– la notion de représentation p-adique *presque de Hodge-Tate* et de représentation p-adique *presque de de Rham* et le fait que ces deux notions coïncident (chapitre 4),

– le fait qu'il n' y a pas d'autre $\mathbb{Q}_p$-endomorphisme continu de $\mathbb{C}_p$, Galois-équivariant, que les homothéties par un élément du corps de base (chapitre 6). Ceci est — avec une version renforcée du lemme fondamental de [**CF00**] due à Pierre Colmez [**Co02**] — à la base de la théorie des *presque* $\mathbb{C}_p$*-représentations*, développée ailleurs [**Fo03**].

Rentrons un peu plus dans les détails. Dans tout ce texte, K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et on note I_K le sous-groupe d'inertie. On note C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique (corps souvent noté $\mathbb{C}_p$ lorsque k est algébrique sur $\mathbb{F}_p$) et B_{dR} le corps des périodes p-adiques (la définition de B_{dR} est rappelée au chapitre 3). Il est muni d'une topologie naturelle. Le groupe G_K opère continûment sur C et sur B_{dR}.

Une *représentation p-adique de* G_K consiste en la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K. Avec comme morphismes les applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires G_K-équivariantes, les représentations p-adiques de G_K forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

Plus généralement, soient J un groupe topologique et B un corps muni d'une topologie et d'une action continue de J (compatible avec la structure de corps). On appelle B*-représentation de* J la donnée d'un B-espace vectoriel W de dimension finie muni d'une action semi-linéaire et continue de J (dire que l'action est semi-linéaire signifie

i) que l'on a $g(w_1 + w_2) = g(w_1) + g(w_2)$ si $g \in J$ et $w_1, w_2 \in W$,

ii) et que l'on a $g(bw) = g(b)g(w)$ si $g \in J$, $b \in B$ et $w \in W$).

Avec comme morphismes les applications B-linéaires J-équivariantes, les B-représentations de J forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{Rep}_B(J)$.

Si l'action de J sur B est non triviale, cette catégorie n'est pas B-linéaire. Dans tous les cas, si $E = B^J$, E est un corps et $\mathrm{Rep}_B(J)$ est E-linéaire.

On sait aussi définir la représentation unité (c'est B muni de l'action donnée de J), le produit tensoriel de deux B-représentations W_1 et W_2 (c'est $W_1 \otimes_B W_2$ avec $g(w_1 \otimes w_2) = g(w_1) \otimes g(w_2)$ si $g \in J$, $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$) et la représentation duale de la B-représentation W (c'est le B-espace vectoriel dual W^* de W, avec $(g(\eta))(w) = g(\eta(g^{-1}(w)))$ si $g \in J$, $\eta \in W^*$ et $w \in W$).

Muni de ces structures, $\mathrm{Rep}_B(J)$ devient ce que l'on appelle *une catégorie tannakienne sur* E (*cf.* par exemple, [**DM82**]).

Une sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Rep}_B(J)$ est une sous-catégorie strictement pleine (*i.e.* une sous-catégorie pleine telle que, si W est un objet de cette catégorie, alors tout objet de $\mathrm{Rep}_B(J)$ isomorphe à W aussi) qui contient l'objet-unité B et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual.

Ceci s'applique en particulier à $B = \overline{K}$, C ou B_{dR} et $J = G_K$. Si V est une représentation p-adique de G_K de dimension h, $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est de manière naturelle une B-représentation de G_K. Disons que V est *B-admissible* si cette B-représentation est triviale (*i.e.* isomorphe à B^h). Les représentations B-admissibles forment une sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

Proposition 0.0. — *Soit V une représentation p-adique de G_K. Pour que V soit $\overline{K}$-admissible, il faut et il suffit que le noyau de l'action de G_K sur V soit un sous-groupe ouvert de G_K.*

Démonstration. — Le fait que la condition est nécessaire résulte immédiatement de ce que l'action de G_K sur $\overline{K}$ est discrète. Réciproquement, supposons que le noyau N de l'action de G_K sur V soit ouvert dans G_K et soit $L = \overline{K}^N$. Soit h la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Choisissons une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$ de V sur $\mathbb{Q}_p$; elle s'identifie aussi, de façon évidente, à une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur L ainsi qu'à une base de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur $\overline{K}$. L'action de G_K sur V se factorise à travers le groupe $J = \mathrm{Gal}(L/K)$. Pour tout $g \in J$, notons $\rho(g)$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes de $g(e_j)$ sur la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$. On obtient ainsi un homomorphisme $\rho : \mathrm{Gal}(L/K) \to GL_h(\mathbb{Q}_p)$ que l'on peut voir, via l'inclusion $GL_h(\mathbb{Q}_p) \subset GL_h(L)$ comme un 1-cocycle de J à valeurs dans $GL_h(L)$. On voit que remplacer ce cocycle par un cocycle équivalent revient à changer la base du L-espace vectoriel $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Comme l'ensemble pointé $H^1(J, GL_h(L))$ est trivial (*cf.* par exemple [**CL**], chap. X, prop. 3), il existe une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur L formée d'éléments fixes par J. C'est aussi une base de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ formée d'éléments fixes par G_K et l'existence d'une telle base permet de définir un isomorphisme de $\overline{K}^h$ sur $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui commute à l'action de G_K. □

– C'est un théorème profond de Sen dont nous ne parlons pas ici (*cf.* [**Sen73**], cor. 1), que V est C-admissible si et seulement si le noyau de l'action de I_K est un

sous-groupe ouvert de I_K (en particulier, lorsque k est algébriquement clos, si une représentation p-adique de G_K est C-admissible, elle est déjà $\overline{K}$-admissible).

– Il n'existe pas (à notre connaissance) de caractérisation de ce type pour les représentations p-adiques de G_K qui sont *de de Rham* (c'est ainsi qu'on appelle les représentations B_{dR}-admissibles).

Si V est une représentation p-adique de G_K, $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (resp. $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$) est une C-représentation (resp. une B_{dR}-représentation) de G_K qui est non triviale si et seulement si V n'est pas C-admissible (resp. n'est pas de de Rham). D'où l'intérêt qu'il y a à étudier les catégories $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ et $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$[(1)]. L'étude de la première est la théorie de Sen. Nous la reprenons, la poussons « jusqu'au bout » et nous intéressons aussi à la seconde. On obtient une classification complète de ces représentations. Si $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$) désigne l'ensemble des orbites de $\overline{K}$ (resp. $\overline{K}/\mathbb{Z}$) sous l'action de G_K, les classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$ sont paramétrées par $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$). Les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$ sont paramétrées par $\mathcal{C}(\overline{K}) \times \mathbb{N}^*$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}^*$).

Décrivons maintenant le contenu des différents chapitres.

L'objectif essentiel du chapitre 1 est d'exposer les résultats de Tate et Sen sur la cohomologie continue du corps C. Ils reposent sur une étude fine de la ramification dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K (*i.e.* l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞ de K contenue dans le sous-corps de $\overline{K}$ engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p).

Le point crucial est *le théorème fondamental de Tate* (th. 1.8) qui est à la base de toute la théorie des périodes p-adiques et qui, comme on le dit maintenant ([**Fa02**], § 2), signifie que l'anneau des entiers $\mathcal{O}_M$ de toute extension finie M de K_∞ est *presqu'étale* sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K_\infty}$ de K_∞. De façon précise, si $\mathrm{tr}_{M/K_\infty} : M \to K_\infty$ est la trace et si $\mathfrak{m}_{K_\infty}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$, ou bien $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) = \mathcal{O}_{K_\infty}$, ou bien $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) = \mathfrak{m}_{K_\infty}$.

Posons $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$, $\Gamma = G_K/H_K$ et notons L l'adhérence de K_∞ dans C. Les principaux résultats (dus à Tate et Sen) sont (th. 1.1) que $C^{H_K} = L$ et que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, GL_h(C)) = 1$; puis (th. 1.2) que $L^\Gamma = C^{G_K} = K$ et que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, l'application naturelle $H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \to H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(L)) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, GL_h(C))$ est bijective.

Dans le chapitre 2, on étudie la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$. Le premier théorème de Sen dit que, pour toute C-représentation W de G_K, l'application C-linéaire $C \otimes_L W^{H_K} \to W$ déduite de l'inclusion de W^{H_K} dans W est un isomorphisme.

(1) Le fait que $\overline{K}$ n'est pas complet rend illusoire l'étude de la catégorie $\mathrm{Rep}_{\overline{K}}(G_K)$.

Autrement dit, le foncteur $W \mapsto W^{H_K}$ définit une $\otimes$-équivalence de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ sur la catégorie $\mathrm{Rep}_L(\Gamma)$ des L-représentations de Γ [(2)].

Le deuxième théorème de Sen nous dit que, si X est une L-représentation de Γ et si X_f désigne le sous-K_∞-espace vectoriel de X réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de X stable par G_K, l'application L-linéaire déduite par extension des scalaires de l'inclusion de X_f dans X est un isomorphisme. Autrement dit, le foncteur $X \mapsto X_f$ définit une $\otimes$-équivalence de $\mathrm{Rep}_L(\Gamma)$ sur la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)$ des K_∞-représentations de Γ.

Enfin, si Y est une K_∞-représentation de Γ, le fait que l'action de Γ sur K_∞ soit discrète implique que l'action de l'algèbre de Lie du groupe de Lie p-adique Γ est linéaire. De façon terre à terre, notons $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère qui définit l'action de G_K sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. En composant avec le logarithme p-adique, on obtient un homomorphisme continu de G_K dans le groupe additif de $\mathbb{Z}_p$ qui se factorise à travers Γ (et on note encore $\log\chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_p$ l'application ainsi obtenue). Alors le troisième théorème de Sen dit que, si Y est une K_∞-représentation de G_K, il existe un et un seul endomorphisme s de ce K_∞-espace vectoriel ayant la propriété que, pour tout $y \in Y$, il existe un sous-groupe ouvert Γ_y de Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma_y$, on a

$$\gamma(y) = \exp(\log\chi(\gamma)\cdot s)(y)$$

(il est immédiat qu'étant donné un endomorphisme s de Y, on peut définir l'endomorphisme $\exp(\log\chi(\gamma)\cdot s)$ pour tout γ appartenant à un sous-groupe ouvert suffisamment petit de Γ).

En résumé, pour tout corps E, notons $\mathcal{S}_E$ la catégorie (tannakienne en un sens évident) des E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un endomorphisme. On dispose d'un $\otimes$-foncteur

$$\Delta_{\mathrm{Sen}} : \mathrm{Rep}_C(G_K) \longrightarrow \mathcal{S}_{K_\infty}.$$

C'est celui qui associe à W le K_∞-espace vectoriel de dimension finie $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W) = (W^{H_K})_f$ muni de l'endomorphisme défini par le théorème précédent. En fait la connaissance de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ détermine W à isomorphisme près (il suffit même de connaître le C-espace vectoriel W muni de son endomorphisme s_W déduit par l'extension des scalaires de K_∞ à C de s). On appelle s_W *l'endomorphisme de Sen de* W.

Nous décrivons ensuite une interprétation due à Colmez des résultats de Sen. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons K_r l'unique extension de K de degré p^r contenue dans K_∞ et posons $G_{K_r} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_r)$. Choisissons un générateur t du module de Tate, noté additivement, du groupe multiplicatif et introduisons l'anneau $B_{\mathrm{Sen}} = C\{\{\log t\}\}$

[(2)] une $\otimes$-équivalence entre deux catégories tannakiennes sur un corps E est une équivalence de catégories, commutant, en un sens évident (mais néanmoins pénible à formuler de façon précise), à l'objet-unité, au produit tensoriel et au dual (*cf.* par exemple [**DM82**]).

des séries formelles en $\log t$ à coefficients dans C de rayon de convergence non nulle. On peut alors décrire B_{Sen} comme une réunion croissante de sous-$C[\log t]$-algèbres topologiques $B_{\mathrm{Sen},r}$, pour $r \in \mathbb{N}$, avec action semi-linéaire continue de G_{K_r} sur $B_{\mathrm{Sen},r}$, le groupe G_K agissant sur $\log t$ via la formule

$$g(\log t) = \log(\chi(g)) + \log t \quad \text{pour tout } g \in G_K.$$

Pour toute C-représentation de G_K, soit $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ la réunion des $(B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W)^{G_{K_r}}$. C'est un sous-$K_\infty$-espace vectoriel de dimension finie de $B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$. On construit un isomorphisme canonique de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ sur $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ et on montre que l'endomorphisme de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ déduit par transport de structure de l'endomorphisme de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ défini par la théorie de Sen est induit par la C-dérivation continue $-\partial/\partial \log t$ de B_{Sen}.

On donne enfin une variante *algébrique* de la construction de Colmez. Elle consiste à remarquer que l'on ne change pas le résultat en remplaçant B_{Sen} par la sous-C-algèbre $B_{\mathrm{Sen}}^{\mathrm{alg}}$ de base (en tant que C-espace vectoriel) les $t^{(\alpha)}(\log t)^m$ pour $\alpha \in \overline{K}$ et $m \in \mathbb{N}$, où l'on a posé $t^{(\alpha)} = \exp(\alpha.\log t)$.

Ce dernier résultat peut s'interpréter ainsi : Pour tout corps E, si E^s désigne une clôture séparable de E notons $\mathbb{S}_E^m$ le groupe proalgébrique commutatif diagonalisable défini sur E dont le groupe des caractères $\mathrm{Hom}_{E^s}(\mathbb{S}_E^m \times E^s, \mathbb{G}_m)$ est E^s, muni de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(E^s/E)$; posons aussi $\mathbb{S}_E = \mathbb{S}_E^m \times \mathbb{G}_a$. Alors la catégorie $\mathcal{S}_E$ s'identifie à la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de $\mathbb{S}_E$, tandis que $B_{\mathrm{Sen}}^{\mathrm{alg}}$ peut s'identifier à $C \otimes_{K_\infty} \mathcal{B}_{K_\infty}$ où $\mathcal{B}_{K_\infty}$ désigne l'algèbre affine de $\mathbb{S}_{K_\infty}$.

On donne ensuite la liste des objets simples et des indécomposables, à isomorphisme près, de la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$. On termine avec quelques mots sur certaines représentations particulières : les représentations de Hodge-Tate et les représentations presque de Hodge-Tate.

Dans le chapitre 3, on rappelle la définition du corps B_{dR}, puis on étudie la catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$.

On procède d'abord à la Sen :

(1) Posons $L_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}^{H_K}$. Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, l'application B_{dR}-linéaire $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{L_{\mathrm{dR}}} W^{H_K} \to W$ évidente est un isomorphisme. Autrement dit, le foncteur $W \to W^{H_K}$ définit une $\otimes$-équivalence entre $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$ et $\mathrm{Rep}_{L_{\mathrm{dR}}}(\Gamma)$.

(2) Posons $\underline{t} = t^{(1)}$. Le corps L_{dR} contient le corps des séries formelles $K_\infty((\underline{t}))$ qui est stable par Γ. On peut associer, de façon canonique et fonctorielle, à toute L_{dR}-représentation X de Γ, un sous-$K_\infty((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie X_f stable par Γ et on définit ainsi une $\otimes$-équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_{L_{\mathrm{dR}}}(\Gamma)$ et $\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)$.

(3) Comme l'action de Γ sur $K_\infty((\underline{t}))$ n'est pas discrète, si Y est une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ l'action de l'algèbre de Lie de Γ sur Y ne définit plus un endomorphisme mais une connection régulière.

Pour tout corps E de caractéristique 0, notons $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ la catégorie tannakienne sur E (en un sens évident) des $E((\underline{t}))$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une connection régulière. La construction qui précède définit un foncteur

$$\Delta_{\mathrm{dR}} : \mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K) \longrightarrow \mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}.$$

Ici encore la connaissance de $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ détermine W à isomorphisme près.

Ensuite on transpose la variante algébrique de la construction de Colmez. Pour tout corps E de caractéristique 0, notons $\mathbb{DR}_E^m$ le sous-groupe de $\mathbb{S}_E^m$ dont le groupe des caractères est le quotient de E^s par $\mathbb{Z}$ et posons $\mathbb{DR}_E = \mathbb{DR}_E^m \times \mathbb{G}_a$. On peut considérer l'anneau $B_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{alg}} = B_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_\infty(\underline{t})} \mathcal{B}_{K_\infty}$ et définir, pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, un sous-K_∞-espace vectoriel de dimension finie, canonique et fonctoriel $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ de $B_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{alg}} \otimes_{B_{\mathrm{dR}}} W$, de manière analogue à ce qu'on avait fait pour les C-représentations. Comme on a fait le produit tensoriel au-dessus de $K_\infty(\underline{t})$ et non de K_∞, cet espace vectoriel n'est pas muni d'une action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$ mais seulement de son sous-groupe $\mathbb{DR}_{K_\infty}$.

Une façon d'expliquer comment passer de $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ à $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ consiste alors à construire une $\otimes$-équivalence entre la catégorie tannakienne $\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$ sur K_∞ et la catégorie des représentations K_∞-linéaires de dimension finie de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$ (pour cette équivalence, on peut remplacer K_∞ par n'importe quel corps de caractéristique 0).

Enfin, on donne la liste complète des classes d'isomorphisme d'objets simples et d'objets indécomposables de la catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$.

Dans le chapitre 4, on applique les résultats des chapitres 2 et 3 à l'étude des représentations p-adiques de G_K. Pour tout sous-groupe X de $\overline{K}$ stable par G_K, notons $\mathbb{S}_{X,K}^m$ le quotient de $\mathbb{S}_K$ de groupe des caractères X, $\mathbb{S}_{X,K_\infty}^m$ son extension des scalaires à K_∞ et $\mathbb{S}_{X,K}$ (resp. $\mathbb{S}_{X,K_\infty}$) le produit de $\mathbb{S}_{X,K}^m$ (resp. $\mathbb{S}_{X,K_\infty}^m$) par $\mathbb{G}_a$.

On dit alors qu'une représentation p-adique V est *de type* S_X (resp. est *de type* S_X^m) si l'action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$ sur $\Delta_{\mathrm{Sen}}(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ (ou sur $D_{\mathrm{Sen},\infty}(C \otimes V)$, cela revient au même) se factorise à travers $\mathbb{S}_{X,K_\infty}$ (resp. $\mathbb{S}_{X,K_\infty}^m$). Il revient au même de demander que les valeurs propres de l'endomorphisme de Sen s sur $C \otimes V$ soient dans X (resp. et que s soit semi-simple). Les représentations de type S_X (resp. de type S_X^m) forment une sous-catégorie tannakienne de la catégorie des représentations p-adiques de G_K. Le fait d'être de type S_X est stable par extension.

Les représentations de type $S_{\mathbb{Z}}^m$ sont ce que l'on appelle d'habitude *les représentations de Hodge-Tate*. Nous appelons *représentations presque de Hodge-Tate* les représentations de type $S_{\mathbb{Z}}$.

De même, pour tout sous-groupe X de $\overline{K}$ contenant $\mathbb{Z}$ et stable par G_K, notons $\mathbb{DR}_{X,K}^m$ le quotient de $\mathbb{DR}_K^m$ de groupe des caractères $X/\mathbb{Z}$, $\mathbb{DR}_{X,K_\infty}^m$ son extension des scalaires à K_∞ et $\mathbb{DR}_{X,K}$ (resp. $\mathbb{DR}_{X,K_\infty}$) le produit de $\mathbb{DR}_{X,K}^m$ (resp. $\mathbb{DR}_{X,K_\infty}^m$) par $\mathbb{G}_a$.

On dit qu'une représentation p-adique V est *de type* dR_X (resp. est *de type* dR_X^m) si l'action de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$ sur $D_{\mathrm{dR},\infty}(B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ se factorise à travers $\mathbb{DR}_{X,K_\infty}$

(resp. $\mathbb{DR}^m_{X,K_\infty}$). Les représentations de type dR_X (resp. de type dR^m_X) forment une sous-catégorie tannakienne de la catégorie des représentations p-adiques de G_K. Le fait d'être de type dR_X est stable par extension.

Les *représentations de de Rham* sont les représentations qui sont de type $dR^m_{\mathbb{Z}}$. On dit qu'une représentation est *presque de de Rham* si elle est de type $dR_{\mathbb{Z}}$.

Si X est un sous-groupe de $\overline{K}$ contenant $\mathbb{Z}$ et stable par G_K, pour toute représentation p-adique V de G_K, on a les implications suivantes

$$\begin{array}{ccc} V \text{ est de type } dR^m_X & \Longrightarrow & V \text{ est de type } S^m_X \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ est de type } dR_X & \Longleftrightarrow & V \text{ est de type } S_X \end{array}$$

En particulier, toute représentation de de Rham est de Hodge-Tate (mais il existe des représentations de Hodge-Tate qui ne sont pas de de Rham), tandis qu'une représentation est presque de de Rham si et seulement si elle est presque de Hodge-Tate.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des *représentations p-adiques semi-stables de G_K*. Les démonstrations des résultats déjà publiés ailleurs n'y sont en général pas complètes. En revanche, on décrit complètement la construction des anneaux A_{cris}, B_{cris} et B_{st}, on étudie la notion de (φ, N)-*module filtré* et on énonce le théorème principal de la théorie qui donne une $\otimes$-équivalence entre la catégorie des représentations p-adiques semi-stables de G_K et celle des (φ, N)-modules filtrés sur K qui sont faiblement admissibles. C'est la conjonction de l'équivalence « classique » entre représentations p-adiques semi-stables et (φ, N)-*modules filtrés admissibles* et le résultat principal de [**CF00**] qui dit que tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible est admissible. La preuve de ce résultat est esquissée dans le § 5.6. Dans les § 5.4 et 5.5, on trouve différents résultats non publiés sur la structure de B_{st} qui nous paraissent intéressants :

– dans le § 5.4, on montre qu'il existe un sous-anneau $BW(R)$ de A_{cris}, contenant $\varphi(A_{\mathrm{cris}})$ que l'on peut décrire simplement comme le complété pour la topologie p-adique d'un certain anneau de bivecteurs de Witt (la description de $BW(R)$ se trouve essentiellement dans [**Fo82**] mais pas le lien avec A_{cris}) ;

– dans le § 5.5, on explique comment décrire le sous-anneau B^0 de B_{cris} formé des éléments b vérifiant $\varphi(b) = b$ comme sous-anneau de B_{dR} ; puis comment construire la *partie de pentes finies* de B_{st} (qui est la seule utile pour construire les représentations p-adiques semi-stables) à partir de B^0.

Enfin l'objet du chapitre 6 est la preuve du résultat suivant : l'application naturelle $K \to \mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C)$ est un isomorphisme.

Une conséquence frappante de ce théorème est que, lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

A l'origine de ce texte, il y a un cours que j'ai fait au centre Émile Borel du 20 février au 15 mai 1997 dans le cadre du semestre spécial consacré aux cohomologies p-adiques et à leurs applications arithmétiques. Dans ce cours, j'avais expliqué les fondements de la théorie des périodes p-adiques (ceux des résultats du chapitre 1 dont on a besoin pour introduire la notion de représentations de Hodge-Tate), défini les représentations de de Rham, puis les représentations semi-stables et les (φ, N)-modules filtrés, expliqué l'équivalence de catégorie entre représentations p-adiques semi-stables et (φ, N)-modules filtrés admissibles et la conjecture A qui dit que tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible est admissible. J'avais aussi décrit les grandes lignes d'une théorie en grande partie conjecturale des *presque-C-représentations de G_K* (espaces de Banach p-adiques munis d'une action linéaire continue de G_K, isomorphe, à des espaces de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ près, à des C-représentations). J'avais prouvé quelques résultats partiels (notamment ceux que l'on trouve ici au chapitre 6) et expliqué pourquoi cette théorie devait impliquer la conjecture A. Cette conjecture a depuis été prouvée [**CF00**]. Mieux, des résultats ultérieurs de Colmez [**Co02**] contiennent ce qui est nécessaire pour développer la théorie des presque-C-représentations et je l'ai fait ailleurs [**Fo03**]. Du coup, cette rédaction ne contient pas tout ce que j'avais expliqué dans mon cours. En revanche, j'ai essayé de rédiger soigneusement la théorie de Sen, ses développements et ses transpositions au cas de B_{dR}.

Comme le cours du centre Émile Borel, ce texte ne demande que très peu de prérequis : les quatre premiers chapitres du livre de Serre sur les corps locaux (cité [**CL**]) et la connaissance de quelques rudiments de cohomologie des groupes sont plus qu'il n'en faut pour pouvoir le lire. Le langage des représentations linéaires des groupes pro-algébriques affines et plus abstraitement des catégories tannakiennes est souvent utilisé : le lecteur constatera que ce n'est ici qu'un langage commode et que nous n'utilisons aucun résultat profond de cette théorie.

Un long délai s'est écoulé entre la rédaction de ce texte et sa parution et beaucoup de progrès ont été faits dans l'étude des représentations p-adiques de G_K. Deux des conjectures les plus importantes du sujet ont été démontrées. La première est la conjecture A dont je viens de parler. La seconde (conjecture B) est le fait que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable.

Le progrès conceptuel le plus important est le lien, établi par Berger [**Be02**], entre la théorie des représentations p-adiques de G_K et la théorie des équations différentielles p-adiques sur l'anneau de Robba. Dans [**Be02**], Berger utilise la théorie des (φ, Γ)-modules développée dans [**Fo91**] et le théorème de surconvergence de Cherbonnier-Colmez [**CC98**] pour associer à toute représentation p-adique V de G_K un module muni d'une connexion régulière et d'un Frobenius sur un localisé convenable d'un anneau de Robba. Après une extension des scalaires convenable, cette connexion devient la connexion régulière associé à $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ dont on a parlé plus haut. Si la représentation est de de Rham, cette dernière connexion est triviale, ce qui permet à Berger

d'étendre la sienne en une connexion sur l'anneau de Robba et de ramener la preuve de la conjecture B à une conjecture de Crew sur les équations différentielles p-adiques. A peu près au même moment, cette conjecture de Crew est établie indépendamment par André [**An02**] et Mebkhout [**Me02**] puis par Kedlaya [**Ke04**].

Depuis, j'ai obtenu [**Fo04**] une autre preuve de la conjecture B, conceptuellement très proche de la première preuve de la conjecture A et reposant sur la version forte du lemme fondamental de Colmez. De façon symétrique, Berger vient de m'annoncer une nouvelle preuve de la conjecture A, conceptuellement très proche de sa preuve de la conjecture B et reposant sur les travaux de Kedlaya.

Je voudrais remercier les auditeurs de mon cours au centre Émile Borel pour leur patience, leurs questions et leurs remarques. Je voudrais aussi remercier Olivier Brinon, Pierre Colmez et le referee pour leurs suggestions et leurs critiques pertinentes.

1. Le corps C et sa cohomologie continue

1.1. Cohomologie continue. — Soit H un groupe topologique. Soit M un H-module topologique (*i.e.* un groupe topologique abélien muni d'une action additive et continue de H). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $C^n_{\mathrm{cont}}(H, M)$ le groupe des *n-cochaînes continues de H à valeurs dans M*, *i.e.* le groupe des fonctions continues sur H^n à valeurs dans M. En particulier, $C^0_{\mathrm{cont}}(H, M) = M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur bord $d_n : C^n_{\mathrm{cont}}(H, M) \to C^{n+1}_{\mathrm{cont}}(H, M)$ par les formules usuelles : en particulier,

i) si $a \in M = C^0_{\mathrm{cont}}(H, M)$ et $h_1 \in H$, on a $d_0 a(h_1) = (h_1 - 1)a$,

ii) si $f \in C^1_{\mathrm{cont}}(H, M)$ et $h_1, h_2 \in H$, on a

$$d_1 f(h_1, h_2) = h_1(f(h_2)) - f(h_1 h_2) + f(h_1),$$

iii) si $f \in C^2_{\mathrm{cont}}(H, M)$ et $h_1, h_2, h_3 \in H$, on a

$$d_2 f(h_1, h_2, h_3) = h_1(f(h_2, h_3)) - f(h_1 h_2, h_3) + f(h_1, h_2 h_3) - f(h_1, h_2).$$

On obtient ainsi un complexe de groupes abéliens. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Z^n_{\mathrm{cont}}(H, M) = \operatorname{Ker} d_n$ le groupe des *n-cocycles continus* de H à valeurs dans M, $B^n_{\mathrm{cont}}(H, M) \subset Z^n_{\mathrm{cont}}(H, M)$ le groupe des *n-cobords* (on a $B^0_{\mathrm{cont}}(H, M) = 0$ et $B^n_{\mathrm{cont}}(H, M) = \operatorname{Im} d_{n-1}$ si $n > 0$) et $H^n_{\mathrm{cont}}(H, M) = Z^n_{\mathrm{cont}}(H, M)/B^n_{\mathrm{cont}}(H, M)$ le *n-ième groupe de cohomologie continue*. En particulier $H^0_{\mathrm{cont}}(H, M) = M^H$.

Il est immédiat que, si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de H-modules topologiques, alors on a une « suite exacte à six termes »

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathrm{cont}}(H,M') \longrightarrow H^0_{\mathrm{cont}}(H,M) \longrightarrow H^0_{\mathrm{cont}}(H,M'') \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H,M') \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H,M) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H,M).$$

Remarque. — Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte courte de H-modules topologiques telle qu'il existe une section (ensembliste) continue de la projection de M sur M'', alors la suite exacte à six termes se prolonge en une suite exacte longue comme on pense ([**Ta76**], § 2).

Enfin, si H' est un sous-groupe fermé invariant de H, il est immédiat que, pour tout H-module topologique la suite dite *d'inflation-restriction*

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H/H', M^H) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H,M) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H',M)^{H/H'}$$

est exacte.

Le cas non abélien. — De la même façon, soit M un groupe topologique (pas nécessairement commutatif), muni d'une action multiplicative et continue du groupe topologique H. On note $Z^1_{\mathrm{cont}}(H,M)$ le sous-ensemble de l'ensemble $C^1_{\mathrm{cont}}(H,M)$ des fonctions continues de H à valeurs dans M vérifiant $f(h_1h_2) = f(h_1)h_1(f(h_2))$ pour $h_1, h_2 \in H$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(H,M)$ le quotient de $Z^1_{\mathrm{cont}}(H,M)$ par la relation d'équivalence

$$f \simeq f' \iff \text{il existe } a \in M \text{ tel que } f'(h) = af(h)h(a^{-1}) \text{ pour tout } h \in H.$$

C'est un ensemble pointé, *i.e.* qui contient un élément privilégié, à savoir la classe, notée 1, du 1-cocycle trivial.

Si H' est un sous-groupe fermé invariant de H, la suite *d'inflation-restriction*

$$1 \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H/H', M^H) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H,M) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(H',M)^{H/H'}$$

est maintenant une suite exacte d'ensembles pointés.

1.2. La cohomologie de C et des $GL_h(C)$. — On note $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$, $\mathcal{O}_C = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$ le complété de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ pour la topologie p-adique et $C = \mathcal{O}_C[1/p]$ son corps des fractions. On note v_p la valuation de C normalisée par $v_p(p) = 1$ et $|\ |$ la valeur absolue p-adique. Pour tout $c \in C$, on a donc $|c| = p^{-v_p(c)}$. Cette valuation fait de C un corps valué complet et le lemme de Krasner ([**La70**], p. 43) implique que C est algébriquement clos.

L'action de G_K sur $\overline{K}$ s'étend par continuité à C.

On note χ *le caractère cyclotomique*, *i.e.* l'homomorphisme continu de G_K dans le groupe des unités p-adiques qui donne l'action de G_K sur les racines de l'unité d'ordre p.

Notons $\log : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p$ le logarithme p-adique usuel (on a donc $\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-1)^n/n$ si $x - 1 \in p\mathbb{Z}_p$ et $\log(x) = \frac{1}{(p-1)}\log(x^{p-1})$ en général).

L'application $\log\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p$ est continue. On note H_K son noyau et Γ_K (ou Γ s'il n'y a pas de risque de confusion) le quotient G_K/H_K. On note K_∞ la $\mathbb{Z}_p$-*extension cyclotomique de* K, *i.e.* l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension de K contenue dans le sous-corps de $\overline{K}$ engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. On a donc $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. On note L l'adhérence de K_∞ dans C.

Le but de la fin de ce chapitre est de démontrer les deux théorèmes suivants dont les parties (i) sont dues à Tate ([**Ta67**], prop. 8 et 10) et les parties (ii) à Sen ([**Sen80**], th. 1) :

Théorème 1.1

i) On a $C^{H_K} = L$.

ii) Pour tout entier $h \geqslant 1$, $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, GL_h(C)) = 1$.

Ce théorème implique donc que $C^{G_K} = L^\Gamma$ et que, pour tout entier $h \geqslant 1$, $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, GL_h(C)) = H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(L))$.

Théorème 1.2

i) On a $C^{G_K} = L^\Gamma = K$.

ii) Pour tout entier $h \geqslant 1$, *l'application*

$$H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(L)) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, GL_h(C)),$$

induite par l'inclusion de $GL_h(K_\infty)$ *dans* $GL_h(C)$, *est bijective.*

Remarque. — Tate montre aussi que $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 et que, si $\eta : \Gamma \to \mathbb{Z}_p$ est un homomorphisme non trivial, $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(\eta)) = 0$ ([**Ta67**], th. 1 et 2). Ces résultats dont la démonstration directe est voisine de ceux de Sen en sont aussi des conséquences immédiates.

Dans le § 1.3, on fait quelques rappels sur la théorie de la ramification telle qu'elle est développée dans les chapitres III et IV de [**CL**] et on prouve le théorème fondamental de Tate. Dans le § 1.4, on en déduit le théorème 1.1. Enfin on prouve le théorème 1.2 dans le § 1.5.

Remarque. — Essentiellement la même démonstration permet de montrer aussi que $H^n_{\mathrm{cont}}(G_K, C) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

1.3. Différentes, groupes de ramification et extensions presqu'étales

On note $\mathfrak{m}_C$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$. Pour tout sous-corps E de C, on pose $\mathcal{O}_E = E \cap \mathcal{O}_C$ et $\mathfrak{m}_E = E \cap \mathfrak{m}_C$. L'anneau $\mathcal{O}_E$ est un anneau de valuation, de corps des fractions E et $\mathfrak{m}_E$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_E$. Si E est une extension finie de K, $\mathcal{O}_E$ est un anneau de valuation discrète complet. On note alors v_E l'unique valuation de C normalisée par $v_E(E^*) = \mathbb{Z}$ et $e_E = v_E(p)$ l'indice de ramification absolu de E. Pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_E$, on note $v_E(\mathfrak{a})$ la valuation d'un générateur quelconque de $\mathfrak{a}$.

Dans toute la suite de ce chapitre, les extensions de K considérées sont toujours supposées contenues dans $\overline{K}$.

Soient E une extension finie de K et F une extension finie de E. Soit $\mathrm{tr} : F \to E$ la trace. L'application de $F \times F$ dans E qui envoie (x, y) sur $\mathrm{tr}(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée qui permet d'identifier F en tant que E-espace vectoriel à son dual.

Appelons *réseau de F* tout sous-$\mathcal{O}_E$-module de type fini contenant une base de F sur E. Si V est un réseau de F, on définit le *réseau dual* V^* par

$$V^* = \{x \in F \mid \mathrm{tr}(xy) \in \mathcal{O}_E, \text{ pour tout } y \in V\}.$$

Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ est une base de V sur $\mathcal{O}_E$, alors V^* est le réseau dont une base sur $\mathcal{O}_E$ est la base duale $\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_d^*\}$ de $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$.

Par définition, la *codifférente de l'extension F/E* est le réseau dual $\mathcal{D}_{F/E}^{-1} = (\mathcal{O}_F)^*$ de $\mathcal{O}_F$. C'est un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_F$ contenant $\mathcal{O}_F$. La *différente de l'extension F/E* est l'idéal $\mathcal{D}_{F/E}$ de $\mathcal{O}_F$ inverse de $\mathcal{D}_{F/E}^{-1}$.

Soit r l'unique entier tel que $\mathfrak{m}_E^r = \mathcal{D}_{F/E} \cap \mathcal{O}_E$. On a $\mathfrak{m}_E^r \mathcal{D}_{F/E}^{-1} \subset \mathcal{O}_F$. Si $\{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$ est une base de $\mathcal{O}_F$ sur $\mathcal{O}_E$ et si $\{a_1^*, a_2^*, \ldots, a_d^*\}$ est la base duale et b un générateur de $\mathfrak{m}_E^r$, alors $ba_1a_1^* \in \mathcal{O}_F$ et $\mathrm{tr}(ba_1a_1^*) = b$. Comme $\mathrm{tr}(\mathcal{O}_F)$ est un idéal de $\mathcal{O}_E$, on en déduit que

$$\mathfrak{m}_E^r \subset \mathrm{tr}(\mathcal{O}_F) \tag{1}$$

On sait ([**CL**], chap. III, prop. 12) qu'il existe $x \in \mathcal{O}_F$ qui engendre $\mathcal{O}_F$ en tant que $\mathcal{O}_E$-algèbre et qu'alors (*loc.cit.*, cor. 2 à la prop. 11), si P désigne le polynôme minimal de x sur E, $\mathcal{D}_{F/E}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_E$ en engendré par $P'(x)$.

Supposons maintenant l'extension F/E galoisienne et soit $J = \mathrm{Gal}(F/E)$. Pour tout $g \in J$, on pose $i_J(g) = v_F((g-1)x)$. Si $g = 1$, $i_J(g) = +\infty$. Sinon, on a aussi $i_J(g) = v_F((g-1)\mathcal{O}_F)$ et c'est un entier qui ne dépend pas du choix du générateur x de la $\mathcal{O}_E$-algèbre $\mathcal{O}_F$.

On a $P(X) = \prod_{g \in J}(X - g(x))$, d'où l'on déduit que $P'(x) = \prod_{g \neq 1}(x - g(x))$. Par conséquent

$$v_F(\mathcal{D}_{F/E}) = \sum_{g \neq 1} i_J(g) \tag{2}$$

Pour tout nombre réel i, on pose $J_i = \{g \in J \mid i_J(g) \geqslant i + 1\}$. Bien sûr, si $\{i\}$ désigne le plus petit entier $\geqslant i$, on a $J_i = J_{\{i\}}$. On sait ([**CL**], chap. IV, prop. 1 et cor. 1 et 3 à la prop. 7) que les J_i sont des sous groupes invariants de J, que $J_{-1} = J$, $J_i = \{1\}$ pour $i >> 0$, J_0 est le groupe d'inertie (en particulier son ordre est égal à l'indice de ramification $e_{F/E}$ de l'extension F/E), J_1 est un p-groupe et, pour chaque entier $i \geqslant 1$, J_i/J_{i+1} est un groupe abélien annulé par p.

Les *nombres de ramification* de l'extension F/E sont les entiers i tels que $J_{i+1} \neq J_i$.

Soient J' un sous-groupe de J et $E' = F^{J'}$. Il est clair que, pour tout $g \in J'$, $i_{J'}(g) = i_J(g)$. Si J' est invariant dans J, pour tout $\overline{g} \in J/J'$, on a (*loc.cit.*, prop. 3)

$$i_{J/J'}(\overline{g}) = \frac{1}{e_{F/E'}} \sum_{g \mapsto \overline{g}} i_J(g). \tag{3}$$

Proposition 1.3. — *Soient E une extension finie de K, F une extension cyclique ramifiée de degré p de E, $\mathrm{tr}_{F/E} : F \to E$ la trace et i l'unique nombre de ramification de l'extension F/E. Alors*

i) on a $i \leqslant e_F/(p-1)$;

ii) si $x \in F$, $v_F(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geqslant v_F(x) + (p-1)i$.

Démonstration. — Soit τ un générateur de $\mathrm{Gal}(F/E)$. On vérifie facilement que, pour tout $x \in F$, on a $v_F((\tau-1)x) \geqslant v_F(x) + i$, avec égalité si et seulement si $v_F(x)$ est premier à p. On voit aussi qu'il existe un polynôme $P(T) \in \mathbb{Z}[T]$, vérifiant $P(1) = 1$ tel que

$$1 + T + T^2 \cdots + T^{p-1} = (T-1)^{p-1} + pP(T).$$

Pour tout $x \in F$, on a donc

$$\mathrm{tr}_{F/E}(x) = (\tau-1)^{p-1}(x) + pP(\tau)(x) \tag{4}$$

et $v_F(pP(\tau)(x)) = e_F + v_F(x)$.

Supposons d'abord i divisible par p et choisissons $y \in F$ tel que $v_F(y) = 1$. On a $v_F((\tau-1)^{p-1}(y)) = (p-1)i + 1$ qui n'est pas divisible par p ; comme $v_F(pP(\tau)(y)) = e_F + 1$ ne l'est pas non plus (e_F est divisible par p) et comme $v_F(\mathrm{tr}_{F/E}(y)) = pv_E(\mathrm{tr}_{F/E}(y))$, on doit avoir $e_F + 1 = (p-1)i + 1$ et on a bien (i) dans ce cas.

Si au contraire i est premier à p et si on choisit $y \in F$ tel que $v_F(y) = i$, on a $v_F((\tau-1)^{p-1}(y)) = (p-1)i + i = pi$ tandis que $v_F(pP(\tau)(y)) = e_F + i$ est premier à p. Toujours puisque $v_F(\mathrm{tr}_{F/E}(y))$ doit être divisible par p, on doit avoir $pi < e_F + i$ d'où (i).

Dans les deux cas, pour tout $x \in F$, (4) montre que

$$v_F(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geqslant v_F(x) + \min\{(p-1)i, e_F\} = v_F(x) + (p-1)i. \qquad \square$$

La proposition suivante est un cas particulier d'un résultat de Sen ([**Sen69**], th. 1 ; voir aussi [**Lu95**]) :

Proposition 1.4. — *Soient n un entier $\geqslant 1$ et F une extension cyclique totalement ramifiée de degré p^n d'une extension finie E de K. Soit γ un générateur de $\mathrm{Gal}(F/E)$. Alors,*

i) L'extension F/E a exactement n nombres de ramification distincts,

$$i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1},$$

tous strictement positifs,

ii) pour $1 \leqslant r \leqslant n-1$, on a $i_r \equiv i_{r-1} \pmod{p^r}$,

iii) pour tout $y \in F$ non nul, il existe $\lambda \in E$ tel que

$$v_p(y-\lambda) \geqslant v_p((\gamma-1)y) - 1/(p-1).$$

Lemme 1.5. — *Soient m et n des entiers $\geqslant 1$ vérifiant $n \geqslant m-1$ et $i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}$ des entiers vérifiant $i_r \equiv i_{r-1} \pmod{p^r}$ pour $1 \leqslant r \leqslant m-1$. Alors les $j + i_{v_p(j)}$ pour $j \in \mathbb{Z}$ vérifiant $0 < j < p^n$ et $v_p(j) < m$ sont tous distincts* mod p^n.

Démonstration du lemme. — Supposons qu'il existe j, j' distincts comme ci-dessus et un entier $a \in \mathbb{Z}$ tels que $j' + i_{v_p(j')} = j + i_{v_p(j)} + p^n a$. On peut supposer que $s = v_p(j) < s' = v_p(j')$ et on a donc $0 \leqslant s \leqslant m-2$. Mais alors $j'-j = (i_s - i_{s'}) + p^n a$. On a $v_p(j'-j) = s$, tandis que $v_p((i_s - i_{s'}) + p^n a) \geqslant \min\{s+1, n\} = s+1$, d'où une contradiction. □

Prouvons alors la proposition 1.4. — Notons E' (resp. F') l'unique extension de degré p (resp. p^{n-1}) de E contenue dans F. L'assertion (i) résulte immédiatement des propriétés des groupes de ramification rappelées plus haut de même que le fait que, si $n \geqslant 2$, les nombres de ramification de l'extension F'/E sont $i_0, i_1, \ldots, i_{n-2}$ et ceux de l'extension F/E' sont $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$.

Soit π une uniformisante de F de sorte que $v_F(\pi) = 1$. Posons $J = \mathrm{Gal}(F/E)$. Pour tout entier r vérifiant $1 \leqslant r < p^n$, on a $i_J(\gamma^r) = i_{v_p(r)}$ et $v_F(\gamma^r - 1)(\pi) = i_{v_p(r)} + 1$.

Posons $\pi_0 = 1$ et, pour $1 \leqslant r < p^n$, $\pi_r = \pi\gamma(\pi)\ldots\gamma^{r-1}(\pi)$. Pour tout r, on a $v_F(\pi_r) = r$ et, comme l'extension F/E est totalement ramifiée de degré p^n, les π_r forment une base de F sur E. Pour $1 \leqslant r < p^n$, on a $(\gamma-1)(\pi_r) = \pi\gamma(\pi)\ldots\gamma^{r-1}(\pi)(\gamma^r(\pi) - \pi)/\pi$ donc $v_F((\gamma-1)(\pi_r)) = r + i_{v_p(r)}$. On voit aussi que, pour tout entier $s \in \mathbb{Z}$ vérifiant $v_p(s) < n$, il existe $\pi_s \in F$ tel que $v_F(\pi_s) = s$ et $v_F((\gamma-1)(\pi_s)) = s + i_{v_p(s)}$: on le sait déjà si $0 < s < p^n$; sinon, si r désigne le reste de la division de s par p^n, il existe $\lambda_s \in E$ vérifiant $v_F(\lambda_s) = s - r$ et il suffit de prendre $\pi_s = \lambda_s \pi_r$. En remplaçant E par E' et γ par γ^p, on voit également que, pour tout entier $s \in \mathbb{Z}$ vérifiant $v_p(s) < n-1$, il existe $z_s \in F$ tel que $v_F(z_s) = s$ et $v_F((\gamma^p - 1)(z_s)) = s + i_{v_p(s)+1}$.

Prouvons (ii) par récurrence sur n. Le cas $n \geqslant 1$ étant trivial, on peut supposer $n \geqslant 2$. L'hypothèse de récurrence appliquée à F'/E montre que $i_r \equiv i_{r-1} \pmod{p^r}$ pour $1 \geqslant r \geqslant n-2$; quand on l'applique à F/E' on trouve aussi que $i_{n-1} \equiv i_{n-2} \pmod{p^{n-2}}$. Posons $s = i_{n-2} - i_{n-1}$; il suffit de vérifier que si l'on suppose que $v_p(s) = n-2$, on obtient une contradiction.

Choisissons z_s comme ci-dessus, de sorte que $v_F((\gamma^p-1)(z_s) = s + i_{n-1} = i_{n-2}$. Soit $x = (1+\gamma+\gamma^2\cdots+\gamma^{p-1})(z_s)$. Comme $1+\gamma+\gamma^2\cdots+\gamma^{p-1} = (\gamma-1)^{p-1} + pA(\gamma)$, où $A(\gamma) \in \mathbb{Z}[\gamma]$, et comme $v_F((\gamma-1)a) > v_F(a)$, pour tout $a \in F$, on a $v_F(x) > s$, tandis que $v_F((\gamma-1)x) = v_F((\gamma^p-1)(z_s)) = i_{n-2}$. On peut écrire $x = \sum_{r=0}^{p^n-1} \lambda_r \pi_r$ avec les $\lambda_r \in E$ et on a $v_F(x) = \min_{0 \leqslant r < p^n}\{p^n v_E(\lambda_r) + r\}$, donc $p^n v_E(\lambda_r) + r > s$ pour tout r. On a $(\gamma-1)x = \sum_{r=1}^{p^n} \lambda_r(\gamma-1)(\pi_r)$. Si $v_p(r) = n-1$, on a $v_F(\lambda_r(\gamma-1)(\pi_r)) >$

$s + i_{n-1} = i_{n-2}$. Le lemme précédent, appliqué avec $m = n-1$, montre alors que

$$i_{n-2} = v_F((\gamma-1)(x) = \min_{\substack{0<r<p^n \\ v_p(r)<i_{n-1}}} \{p^n v_E(\lambda_r) + r + i_{v_p(r)}\}.$$

Il existerait donc r tel que $i_{n-2} \equiv r + i_{v_p(r)} \pmod{p^n}$, ce qui est impossible puisque $v_p(i_{n-2} - i_{v_p(r)}) \geqslant v_p(r) + 1$.

Prouvons enfin (ii). On peut écrire y de façon unique sous la forme $y = \sum_{r=0}^{p^n-1} \lambda_r \pi_r$, avec les $\lambda_r \in E$ et il suffit de prendre $\lambda = \lambda_0$. Il existe en effet un unique entier r_0 strictement compris entre 0 et p^n tel que $v_F(y-\lambda) = v_F(\lambda_{r_0}\pi_{r_0})$. Le lemme 1.5 appliqué avec $m = n$ montre que

$$v_F((\gamma-1)y) = \min_{0<r<p^n}\{v_F(\lambda_r\pi_r + i_{v_p(r)})\} \leqslant v_F(y-\lambda) + i_{n-1}$$

et on a donc $v_F(y-\lambda) \geqslant v_F((\gamma-1)y) - i_{n-1}$, ou encore, si e_F désigne l'indice de ramification absolu de F, $v_p(y-\lambda) \geqslant v_p(\gamma-1)y) - i_{n-1}/e_F \geqslant v_p((\gamma-1)y) - 1/(p-1)$ d'après la proposition 1.3 appliquée à l'extension F/F'. □

Remarque. — L'assertion (ii) de la proposition 1.4 est le théorème de Hasse-Arf dans le cas particulier d'une extension cyclique totalement ramifiée (le cas général — *cf.* par exemple [**CL**] chap. V, th. 1 — qui concerne les extensions abéliennes se ramène à ce cas-ci).

Proposition 1.6. — *Soient n un entier $\geqslant 1$, F une extension cyclique totalement ramifiée de degré p^n d'une extension finie E de K et $\mathrm{tr}_{F/E} : F \to E$ la trace. Pour tout $x \in F$, on a $v_p(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geqslant v_p(x) + n(p-1)/pe_E$.*

Démonstration. — Soient $i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1}$ les nombres de ramification de l'extension. On déduit de la proposition 1.3 que

$$v_p(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geqslant v_p(x) + (p-1)\Big(\frac{i_0}{p} + \frac{i_1}{p^2} + \cdots + \frac{i_{n-1}}{p^n}\Big)\Big/e_E.$$

les relations de congruences entre les i_r (prop. 1.4) impliquent que $i_r \geqslant p^r$ pour tout r, d'où $v_p(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geqslant v_p(x) + (p-1)(n/p)/e_E$. □

Dans toute la suite de ce chapitre, on note K_∞ une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de K (pas nécessairement la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique). *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note K_r l'unique extension de K de degré p^r contenue dans K_∞. On pose aussi $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Gamma_r = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_r)$. On choisit un générateur topologique γ_0 de Γ et on pose $\gamma_r = \gamma^{p^r}$* (c'est donc un générateur topologique de Γ_r).

On voit qu'il existe un unique entier $r_0 \geqslant 0$ et une suite strictement croissante d'entiers > 0

$$i_0 < i_1 < \cdots < i_{r-1} < i_r < \ldots$$

telle que K_{r_0} est l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans K_∞ et que, pour tout entier $r > r_0$, les nombres de ramification de l'extension K_r/K_{r_0} sont

$i_0, i_1, \ldots, i_{r-r_0-1}$. La suite $(i_r)_{r\in\mathbb{N}}$ s'appelle la *suite des nombres de ramification de l'extension* K_∞/K. La proposition précédente implique que, pour tout entier $r \geqslant 1$,

$$i_r \equiv i_{r-1} \bmod p^r. \tag{5}$$

Soit alors F une extension finie galoisienne de K telle que $K_\infty \cap F = K$. Pour tout entier $r \geqslant 0$, soit $F_r = K_r F$. Posons aussi $F_\infty = K_\infty F = \cup F_r$. Posons $J = \mathrm{Gal}(F_\infty/K_\infty)$, $J_r = \mathrm{Gal}(F_r/K_r)$ et soit ϖ_r l'isomorphisme canonique de J sur J_r. Pour tout $\tau \in J$, posons $i_r(\tau) = i_{J_r}(\varpi_r(\tau))$.

***Proposition 1.7 (cf.* [Sen69], Lemma 1, p. 40).** — *Avec les hypothèses et notations qui précèdent, pour tout $\tau \in J$, la suite des $i_r(\tau)$ est stationnaire.*

Démonstration. — Quitte à remplacer K par K_m, avec m suffisamment grand, on peut supposer l'extension F_∞/F totalement ramifiée. Soit $(j_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de ramification de cette extension.

La formule (3) montre que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$i_r(\tau) = \begin{cases} i_{r+1}(\tau) & \text{si } i_{r+1}(\tau) \leqslant j_r \\ \frac{1}{p}(i_{r+1}(\tau) + (p-1)j_r) & \text{si } i_{r+1}(\tau) > j_r \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

$$i_{r+1}(\tau) = \begin{cases} i_r(\tau) & \text{si } i_r(\tau) \leqslant j_r \\ pi_r(\tau) - (p-1)j_r & \text{si } i_r(\tau) > j_r \end{cases}$$

et il suffit de montrer qu'il existe r tel que $i_r(\tau) \leqslant j_r$. Sinon on aurait $i_r(\tau) > j_r$ pour tout r, donc aussi $i_{r+1}(\tau) = pi_r(\tau) - (p-1)j_r$, d'où

$$i_r(\tau) = p^r i_0(\tau) - (p-1)(j_{r-1} + pj_{r-2} + \cdots + p^{r-1}j_0)$$

et $j_r < p^r i_0(\tau) - (p-1)(j_{r-1} + pj_{r-2} + \cdots + p^{r-1}j_0)$, ce qui s'écrit aussi

$$j_0 + \frac{j_1 - j_0}{p} + \frac{j_2 - j_1}{p^2} + \cdots + \frac{j_{r-1} - j_{r-2}}{p^{r-1}} + \frac{j_r - j_{r-1}}{p^r} < i_0(\tau)$$

ce qui ne peut être vrai indéfiniment car le membre de gauche est $\geqslant r+1$ puisque, d'après la proposition 1.4, c'est une somme de $r+1$ entiers $\geqslant 1$. □

***Théorème 1.8* ([Ta67], prop. 9).** — *Soit M une extension finie de K_∞ et tr_{M/K_∞} : $M \to K_\infty$ la trace. Alors $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) \supset \mathfrak{m}_{K_\infty}$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer M par une extension finie, on peut supposer M galoisienne. Quitte à remplacer K par une extension finie contenue dans K_∞, on peut supposer qu'il existe une extension finie galoisienne F de K telle que $M = K_\infty F$ et $K_\infty \cap F = K$.

Avec les notations utilisées pour la proposition précédente, il résulte de (2) que, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$v_{F_r}(\mathcal{D}_{F_r/K_r}) = \sum_{\tau\in J, \tau\neq 1} i_r(\tau)$$

et cette proposition montre qu'il existe un entier r_0 et une constante c telle que $v_{F_r}(\mathcal{D}_{F_r/K_r}) = c$ si $r \geqslant r_0$.

Si e est l'indice de ramification commun à toutes les extensions F_r/K_r pour $r \geqslant r_0$ et si n est le plus petit entier tel que $en \geqslant c$, il résulte de (1) que $\mathfrak{m}_{K_r}^n \subset \mathrm{tr}_{F_r/K_r}(\mathcal{O}_{F_r}) \subset \mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M)$, et $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) \supset \cup_{r \geqslant r_0} \mathfrak{m}_{K_r}^n = \mathfrak{m}_{K_\infty}$ puisque $v_p(\mathfrak{m}_{K_r}^n) = n/e_{K_r}$ tend vers 0 lorsque r tend vers l'infini. □

1.4. Calcul de la cohomologie de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$**.** — Dans ce paragraphe, on prouve le résultat suivant, dont le théorème 1.1 est un cas particulier :

Théorème 1.1'. — *Soient L l'adhérence de K_∞ dans C et $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$.*

i) On a $C^{H_K} = L$.

ii) Pour tout entier $h \geqslant 1$, $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, GL_h(C)) = 1$.

Commençons par un lemme :

Lemme 1.9. — *Soient M une extension finie galoisienne de K_∞ de groupe de Galois J et c un nombre réel > 1. Pour tout $\lambda \in M$, il existe $a \in K_\infty$ tel que*

$$|\lambda - a| < c \cdot \sup_{g \in J} |(g-1)\lambda|.$$

Démonstration. — D'après le théorème 1.8, on peut trouver $y \in \mathcal{O}_M$ tel que $x = \mathrm{tr}_{M/K_\infty}(y)$ vérifie $|x| > 1/c$. Si $\mu = y\lambda/x$ et si $a = \mathrm{tr}(\mu)$, on a

$$a = \frac{1}{x} \sum_{g \in J} g(y)g(\lambda) = \frac{\lambda}{x} \mathrm{tr}(y) + \frac{1}{x} \sum_{g \in J} g(y)(g-1)\lambda$$

et

$$|\lambda - a| \leqslant \sup_{g \in J} \left| \frac{1}{x} g(y)(g-1)\lambda \right| < c \cdot \sup_{g \in J} |(g-1)\lambda|. \qquad \square$$

Prouvons l'assertion (i) du théorème. — Soit $\lambda \in C^{H_K}$. Choisissons une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{K}$ telle que $|\lambda - \lambda_n| < p^{-n}$. Pour tout $h \in H_K$, on a $|(h-1)\lambda_n| < p^{-n}$. Pour tout n, choisissons une extension finie galoisienne M_n de K_∞ contenant λ_n et soit $J_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_\infty)$. On a $|(g-1)\lambda_n| < p^{-n}$, pour tout $g \in J_n$ et, d'après le lemme précédent (en choisissant $c = p$), il existe $a_n \in K_\infty$ tel que $|\lambda_n - a_n| < p \cdot p^{-n} = p^{1-n}$. On a donc $|\lambda - a_n| < p^{1-n}$ et λ limite des a_n est bien dans L. □

Lemme 1.10. — *Soient H un sous-groupe ouvert de H_K et m un entier $\geqslant 2$. Soit $f_m : H \to GL_h(C)$ un 1-cocycle continu vérifiant $f_m(s) - 1 \in p^m M_h(\mathcal{O}_C)$, pour tout $s \in H$. Il existe $b_m \in GL_h(C)$ vérifiant $b_m - 1 \in p^{m-1} M_h(\mathcal{O}_C)$ tel que, si $f_{m+1} : H \to GL_h(C)$ est le 1-cocycle continu défini par $f_{m+1}(s) = b_m^{-1} f_m(s) s(b_m)$, on ait $f_{m+1}(s) - 1 \in p^{m+1} M_h(\mathcal{O}_C)$, pour tout $s \in H$.*

Démonstration. — La continuité de f_m implique l'existence d'un sous-groupe ouvert invariant H' de H tel que $f_m(g) - 1 \in p^{m+2}M_h(\mathcal{O}_C)$ si $g \in H'$. Soient $J = H/H'$, $K'_\infty = \overline{K}^H$ et $M' = \overline{K}^{H'}$. On peut trouver une extension finie K' de K telle que K'_∞ soit une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de K' et M' est une extension finie galoisienne de K'_∞. D'après le théorème 1.8, il existe $y \in \mathcal{O}_{M'} \subset \mathcal{O}_{C^{H'}}$ tel que $\sum_{\tau\in J}\tau(y) = p$.

Choisissons un système de représentants T de J dans H et posons

$$b_m = \frac{1}{p}\sum_{g\in T} f_m(g)g(y).$$

Si l'on pose $f_m(g) = 1 + p^m a_m(g)$, les $a_m(g)$ sont des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_C$ et l'on a $b_m = 1 + p^{m-1}\sum_{g\in T} a_m(g)g(y)$, ce qui fait que $b_m - 1 \in p^{m-1}M_h(\mathcal{O}_C)$. En particulier, $b_m \in GL_h(\mathcal{O}_C) \subset GL_h(C)$.

Par ailleurs, pour tout $s \in H$, on a

$$s(b_m) = \frac{1}{p}\sum_{g\in T} s(f_m(g))(sg)(y) = \frac{1}{p}f_m(s)^{-1}.\sum_{g\in T} f_m(sg)(sg)(y).$$

Quand g parcourt T, sg parcourt aussi un système complet de représentants de J dans H. Comme la condition de cocycle implique que $f_m(s'g) \equiv f_m(g) \bmod p^{m+2}$ si $g \in H$ et $s' \in H'$, on en déduit que

$$s(b_m) \equiv f_m(s)^{-1}b_m \bmod p^{m+1},$$

i.e. que $b_m^{-1}f_m(s)s(b_m) \equiv 1 \bmod p^{m+1}$. □

Preuve de l'assertion (ii) du théorème. — Soit $f : H_K \to GL_h(C)$ un 1-cocycle continu. La continuité implique l'existence d'un sous-groupe ouvert, que l'on peut choisir invariant, H de H_K tel que $f(s) - 1 \in p^2M_2(\mathcal{O}_C)$ pour tout $s \in H$. En notant f_2 la restriction de f à H, le lemme précédent nous permet de construire une suite $(f_m)_{m\geqslant 2}$ de 1-cocycles continus vérifiant $f_m(s) - 1 \in p^m M_h(\mathcal{O}_C)$ pour tout $s \in H$ et une suite $(b_m)_{m\geqslant 2}$ d'éléments de $GL_h(C)$ vérifiant $b_m - 1 \in p^{m-1}M_h(\mathcal{O}_C)$ et $f_{m+1}(s) = b_m^{-1}f_m(s)s(b_m)$, pour tout $s \in H$. On voit alors que la suite des $b_2b_3\dots b_m$ converge dans $GL_h(C)$ vers un élément b vérifiant $b^{-1}f(s)s(b) = 1$ pour tout $s \in H$. La suite exacte d'inflation-restriction (§ 1.1) montre que f est dans l'image de $H^1_{\text{cont}}(H_K/H, (GL_h(C)^H)$. Mais H_K/H s'identifie au groupe de Galois de l'extension finie galoisienne C^H/C^{H_K} et $H^1_{\text{cont}}(H_K/H, (GL_h(C)^H) = H^1(\text{Gal}(C^H/C^{H_K}), GL_h(C^H))$ est trivial ([**CL**], prop. 3, p. 159). □

1.5. Calcul de la cohomologie de $\text{Gal}(K_\infty/K)$**.** — On dit que la $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞/K est *régulière* si elle est totalement ramifiée et si la suite $(i_r)_{r\in\mathbb{N}}$ des nombres de ramification de l'extension vérifie

$$i_r - i_{r-1} = p^r e_K \text{ pour tout } r \geqslant 1.$$

On dit que l'extension K_∞/K est *potentiellement régulière* s'il existe un entier r_0 telle que K_∞/K_{r_0} est régulière. Alors, pour tout $r \geqslant r_0$, K_∞/K_r est régulière.

Proposition 1.11. — *La $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K est potentiellement régulière.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $e_K = p-1$ (resp. 2) si $p \neq 2$ (resp. $= 2$) et que K contient les racines p-ièmes (resp. 4-ièmes) de l'unité. On vérifie alors (*cf.* [**CL**], chap. IV, prop. 18, du moins lorsque le corps résiduel est $\mathbb{F}_p$, mais la preuve est la même dans le cas général) que K_∞/K est totalement ramifiée et que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $i_r = p^{r+1} - 1$ (resp. $2^{r+2} - 1$) et on en déduit que la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K est régulière.

Le cas général est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 1.12. — *Soit F une extension finie de K. La $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞/K est potentiellement régulière si et seulement si FK_∞/F l'est.*

Démonstration. — Cela se vérifie très facilement en utilisant (3) et la proposition 1.7. □

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose l'extension K_∞/K potentiellement régulière et on note L l'adhérence de K_∞ dans C.

Remarque. — En fait, toute $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de K est potentiellement régulière : on peut le montrer facilement à partir de la théorie du corps de classes (*cf.* la discussion dans [**Ta67**], p. 71 ou [**Fo71**], prop. 4.3).

Le théorème 1.2 est un cas particulier du résultat suivant :

Théorème 1.2'

i) On a $L^\Gamma = K$.

ii) Pour tout entier $h \geqslant 1$, l'application $\iota : H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \to H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(L))$, induite par l'inclusion de $GL_h(K_\infty)$ dans $GL_h(L)$, est bijective.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{tr}_{K_r/K} : K_r \to K$ la trace. Pour tout $x \in K_\infty$, choisissons $r \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K_r$ et posons $t_K(x) = \frac{1}{p^r} \mathrm{tr}_{K_r/K}(x)$. Le résultat ne dépend pas du choix de r et l'application t_K ainsi définie est un projecteur du K-espace vectoriel K_∞ sur son sous-K-espace vectoriel K.

Rappelons que γ_0 désigne un générateur topologique de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

Proposition 1.13. — *Pour tout $x \in K_\infty$, on a*

$$v_p(t_K(x) - x) \geqslant v_p((\gamma_0 - 1)x) - p/(p-1).$$

Commençons par établir un résultat auxiliaire :

Lemme 1.14. — *Pour tout entier $r \geqslant 0$ et tout $x \in K_{r+1}$, on a*

$$v_p(x - \frac{1}{p} \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x)) \geqslant v_p((\gamma_0 - 1)x) - 1.$$

Démonstration. — Rappelons que l'on a posé $\gamma_r = \gamma_0^{p^r}$. On a

$$px - \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x) = \sum_{m=0}^{p-1}(x - \gamma_r^m(x)) = \sum_{m=1}^{p-1}(x - \gamma_r^m(x)) = A(\gamma_r)(\gamma_r - 1)(x),$$

où $A(\gamma_r) \in \mathbb{Z}[\gamma_r]$ et par conséquent

$$v_p(px - \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x)) \geqslant v_p((\gamma_r - 1)(x)) \geqslant v_p(\gamma_0 - 1)(x)$$

puisque $(\gamma_r - 1) = B(\gamma_0)(\gamma_0 - 1)$, avec $B(\gamma_0) \in \mathbb{Z}[\gamma_0]$. □

Prouvons la proposition 1.13. — Posons $c = 1 - i_0/pe_K$ et, pour tout entier $r \geqslant 1$, $d_r = c + i_{r-1}/p^r e_K$, de sorte que $d_1 = 1$. Pour tout $r \geqslant 1$, on a

$$d_{r+1} - d_r = \frac{(i_r - pi_{r-1})}{p^{r+1}e_K} = \frac{(p^r e_K - (p-1)i_{r-1})}{p^{r+1}e_K} \geqslant 0$$

car $i_{r-1} \leqslant e_{K_r}/(p-1) = p^r e_K/(p-1)$ (*cf.* prop. 1.3).

Montrons que, pour tout entier $r \geqslant 1$, on a, pour tout $x \in K_r$,

$$v_p(t_K - 1)x \geqslant v_p((\gamma_0 - 1)x) - d_r.$$

Pour $r = 1$, cela résulte du lemme précédent. Supposons que c'est vrai pour r et montrons-le pour $r+1$: Si $x \in K_{r+1}$ et si $y = \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x)$, on a

$$x - t_K(x) = \frac{1}{p}(px - y) + \frac{1}{p}(y - t_K(y)).$$

D'après le lemme précédent,

$$v_p\Big(\frac{1}{p}(px - y)\Big) \geqslant v_p(\gamma_0 - 1)x) - 1 \geqslant v_p(\gamma_0 - 1)x - d_{r+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, $v_p(\frac{1}{p}(y - t_K(y))) \geqslant -1 + v_p((\gamma_0 - 1)y) - d_r$. Mais

$$(\gamma_0 - 1)y = (\gamma_0 - 1)(\mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x)) = \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}((\gamma_0 - 1)x)$$

et, d'après la proposition 1.3, $v_p((\gamma_0 - 1)y) \geqslant v_p((\gamma_0 - 1)x) + (p-1)i_r/p^{r+1}e_K$, de sorte que l'on a aussi

$$v_p\Big(\frac{1}{p}(y - t_K(y)\Big) \geqslant v_p((\gamma_0 - 1)x) + \frac{(p-1)i_r}{p^{r+1}e_K} - 1 - d_r = v_p((\gamma_0 - 1)x) - d_{r+1}$$

car

$$d_{r+1} = d_r + \frac{i_r}{p^{r+1}e_K} - \frac{i_{r-1}}{p^r e_K} = d_r + \frac{i_r - i_{r-1}}{p^r e_K} - \frac{(p-1)i_r}{p^{r+1}e_K}$$

et $i_r - i_{r-1} = p^r e_K$ puisque K_∞/K est régulière.

On voit que, pour tout r,

$$i_r = i_0 + p(1 + p + \cdots + p^{r-1})e_K = i_0 + \frac{p(p^r - 1)}{p-1}e_K = i_0 - \frac{pe_K}{p-1} + \frac{p^{r+1}}{p-1}e_K$$

donc que

$$d_r = 1 - \frac{i_0}{pe_K} + \frac{i_{r-1}}{p^r e_K} = 1 - \frac{i_0}{pe_K} + \frac{i_0}{p^r e_K} - \frac{1}{p^{r-1}(p-1)} + \frac{1}{p-1} \leqslant p/(p-1).$$ □

Proposition 1.15

i) L'application $t_K : K_\infty \to K$ est continue ;

ii) notons $\widehat{t}_K : L \to K$ le prolongement de t_K par continuité et L_0 le noyau de $\widehat{t}_K$; on a $L = K \oplus L_0$, $\gamma_0 - 1$ est bijectif sur L_0 et son inverse ρ est continu ;

iii) si K_∞/K est régulière, on a $v_p(\widehat{t}_K(x)) \geqslant v_p(x) - p/(p-1)$ pour tout $x \in L$ et $v_p(\rho(y)) \geqslant v_p(y) - p/(p-1)$ pour tout $y \in L_0$;

iv) pour tout $x \in L$, la suite des $\widehat{t}_{K_s}(x)$ tend vers x lorsque s tend vers l'infini.

Démonstration. — Choisissons un entier r_0 tel que l'extension K_∞/K_{r_0} est régulière.

Montrons (i) : On a $t_K = p^{-r_0} \operatorname{tr}_{K_{r_0}/K} \circ t_{K_{r_0}}$. L'application $p^{-r_0} \operatorname{tr}_{K_{r_0}/K}$ est évidemment continue et $t_{K_{r_0}}$ l'est d'après la proposition 1.14, donc t_K l'est aussi.

Montrons (ii) et (iii) : Supposons d'abord K_∞/K régulière.

Si $x \in K_\infty$, comme $v_p((\gamma_0 - 1)x) \geqslant v_p(x)$, il résulte de la proposition 1.14 que $v_p(t_K(x)) \geqslant v_p(x) - p/(p-1)$ et on en déduit que, si $x \in L$, on a aussi $v_p(\widehat{t}_K(x)) \geqslant v_p(x) - p/(p-1)$.

Si maintenant $x \in K$, $\widehat{t}_K(x) = x$, donc $\widehat{t}_K^2 = \widehat{t}_K$ et $L = K \oplus L_0$. Pour tout $x \in L$, $\widehat{t}_K(\gamma_0(x)) = \widehat{t}_K(x)$ et $(\gamma_0 - 1)x \in L_0$. En particulier $(\gamma_0 - 1)(L_0) \subset L_0$. Posons $K_{\infty,0} = K_\infty \cap L_0$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $K_{r,0} = K_r \cap L_0$, de sorte que $K_{\infty,0}$ est la réunion des $K_{r,0}$ et que L_0 est l'adhérence de $K_{\infty,0}$ dans L. Comme $\gamma_0 - 1$ est injectif sur chacun des K-espaces vectoriels de dimension finie $K_{n,0}$ il est bijectif sur chacun d'eux de même que sur leur réunion $K_{\infty,0}$. Si ρ est son inverse, pour tout $y \in K_{\infty,0}$, comme $t_K(\rho(y)) = \widehat{t}_K(\rho(y)) = 0$, on a, d'après la proposition 1.13, $v_p(\rho(y)) \geqslant v_p(y) - p/(p-1)$ et ρ est continue. On peut donc la prolonger par continuité en une application continue, que nous notons encore ρ, de L_0 dans lui même qui est bien un inverse de $\gamma_0 - 1$. Le fait que $v_p(\rho(y)) \geqslant v_p(y) - p/(p-1)$ pour tout $y \in L_0$ se déduit par continuité de ce que c'est vrai pour $y \in K_{\infty,0}$.

Passons au cas général. Soient $\widehat{t}_{K_{r_0}}$ le prolongement par continuité de $t_{K_{r_0}}$ à L, L_{r_0} le noyau de $\widehat{t}_{K_{r_0}}$ et $\rho_{r_0} : L_{r_0} \to L_{r_0}$ l'inverse de la restriction de $\gamma_{r_0} - 1$.

On a $L = K \oplus L_0 = K_{r_0} \oplus L_{r_0}$ et, comme $L_{r_0} \subset L_0$,

$$L_0 = L_0 \cap K_{r_0} \oplus L_{r_0}.$$

Sur $L_0 \cap K_{r_0}$, qui est de dimension finie sur K, $\gamma_0 - 1$ est injectif, donc bijectif et son inverse est continu. Par ailleurs on peut écrire $\gamma_{r_0} - 1 = (\gamma_0 - 1)\delta$, avec $\delta \in \mathbb{Z}[\gamma_0]$. On en déduit que $\gamma_0 - 1$ est bijectif sur L_{r_0} avec comme inverse $\delta\rho_{r_0}$ qui est continu.

Montrons (iv) : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K_∞ telle que $v_p(x - x_n) \geqslant n$ pour tout n. Pour chaque n, $x_n \in K_s$ si s est suffisamment grand et on a alors $\widehat{t}_{K_s}(x_n) = x_n$. Si l'on choisit s suffisamment grand pour que K_∞/K_s soit régulière, on a, d'après (iii),

$$v_p(\widehat{t}_{K_s}(x) - \widehat{t}_{K_s}(x_n)) = v_p(\widehat{t}_{K_s}(x - x_n) \geqslant n - \frac{p}{(p-1)},$$

donc, puisque $x - \widehat{t}_{K_s}(x) = (x - x_n) - (\widehat{t}_{K_s}(x) - \widehat{t}_{K_s}(x_n))$, on a

$$v_p(x - \widehat{t}_{K_s}(x)) \geqslant n - \frac{p}{(p-1)}$$

et la suite des $\widehat{t}_{K_s}(x)$ tend bien vers x. □

***Proposition 1.16* ([Sen80], prop. 3).** — *Tout sous-K-espace vectoriel de dimension finie de L, stable par γ_0, est contenu dans K_∞.*

Démonstration. — Soit V un tel sous-espace-vectoriel. La restriction de γ_0 à V est un endomorphisme u de ce K-espace vectoriel. Soit K' l'extension de K obtenue en rajoutant les racines du polynôme caractéristique de u dans $\overline{K}$ et $K'_\infty = K'K_\infty$. L'extension K'_∞/K' est potentiellement régulière (lemme 1.12). Quitte à remplacer K par K', V par $K'V$, γ_0 par $\gamma_0^{p^r}$, si p^r désigne l'ordre du quotient de Γ par l'image de $\mathrm{Gal}(K'_\infty/K')$, et L par le complété de K'_∞, on peut supposer que les valeurs propres de u sont dans K. Quitte à décomposer V en somme directe de ses sous-espaces caractéristiques, on peut supposer que V n'a qu'une seule valeur propre a.

Si y est un vecteur propre non nul, on a $\gamma_0(y) = ay$, donc $\gamma_0^{p^r}(y) = a^{p^r}y$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et la continuité de l'action de Γ sur L implique que a est une unité principale. Quitte a remplacer K par K_r, avec r suffisamment grand, on peut supposer que $v_p(a-1) > p/p-1$. La décomposition en somme directe $L = K \oplus L_0$ (prop. 1.15) nous permet de nous ramener à montrer que y ne peut pas appartenir à L_0. Supposons le contraire. Comme $\gamma - 1$ est bijectif sur L_0, on a $a \neq 1$. On a alors $\rho(y) = \frac{1}{a-1}y$, donc $v_p(\rho(y)) < v_p(y) - p/(p-1)$, ce qui contredit l'assertion (iv) de la propostion 1.15. □

Prouvons alors le théorème 1.2'. — On a $L^\Gamma = \{x \in L \mid (\gamma_0 - 1)x = 0\}$ et (i) résulte de l'assertion (ii) de la proposition 1.15.

Prouvons alors l'injectivité de ι : Soient $f, f' : \Gamma \to GL_h(K_\infty)$ deux 1-cocycles qui deviennent cohomologues dans $GL_h(L)$. Il existe donc $b \in GL_h(L)$ tel que $f'(\gamma_0) = b^{-1}f(\gamma_0)\gamma_0(b)$ et il suffit de montrer que $b \in GL_d(K_\infty)$. Mais cette relation se réécrit

$$\gamma_0(b) = f(\gamma_0)^{-1}bf'(\gamma_0).$$

Soit K' l'extension (finie) de K contenue dans K_∞ engendrée par les coefficients de $f(\gamma_0)$ et de $f'(\gamma_0)$. Le sous-K'-espace vectoriel V de L engendré par les coefficients de b est un K-espace vectoriel de dimension finie et la formule ci-dessus montre qu'il est stable par γ_0. Comme γ_0 est un générateur topologique de Γ et comme V est fermé dans L, la proposition 1.16 implique que $V \subset K_\infty$, donc $b \in GL_h(K_\infty)$.

Pour prouver la surjectivité, commençons par établir un lemme :

***Lemme 1.17*.** — *Pour toute matrice $a \in M_h(L)$, notons $v(a)$ le minimum de la valuation p-adique de ses coefficients. Soient r un entier tel que l'extension K_∞/K_r est régulière et m un entier $\geqslant 5$. Soient $a_m \in GL_h(L)$, $x_m \in GL_h(K_r)$ des matrices*

vérifiant

$$v(a_m - 1) \geqslant \frac{3p}{(p-1)} \quad et \quad v(a_m - x_m) \geqslant \frac{mp}{(p-1)}.$$

Il existe $b_m \in GL_h(L)$ *vérifiant* $v(b_m - 1) \geqslant (m-2)p/(p-1)$ *et* $x_{m+1} \in GL_h(K_r)$ *tels que, si* $a_{m+1} = b_m^{-1} a_m \gamma_r(b_m)$*, on ait*

$$v(a_{m+1} - 1) \geqslant \frac{3p}{(p-1)} \quad et \quad v(a_{m+1} - x_{m+1}) \geqslant \frac{(m+1)p}{(p-1)}.$$

Démonstration. — Soit $L_r = \operatorname{Ker} \widehat{t}_{K_r} : L \to K_r$. Alors (prop. 1.15 appliquée à l'extension K_∞/K_r), on a $L = K_r \oplus L_r$ et γ_r est bijectif sur L_r. On peut donc écrire

$$a_m = x_{m+1} + (\gamma_r - 1)s \text{ avec } x_{m+1} \in M_h(K_r) \text{ et } s \in M_h(L_r).$$

Posons $b_m = 1 - s$ et montrons que b_m et x_{m+1} conviennent.

On a $x_{m+1} - x_m + (\gamma_r - 1)s = a_m - x_m$, donc

$$v(x_{m+1} - x_m + (\gamma_r - 1)s) \geqslant \frac{mp}{(p-1)}, \quad v(\gamma_r - 1)^2 s \geqslant \frac{mp}{(p-1)}$$

et (assertion (iii) de la proposition 1.15), si ρ_r désigne l'inverse de $\gamma_r - 1$ sur L_r,

$$v((\gamma_r - 1)s) = v(\rho_r(\gamma_r - 1)^2 s) \geqslant \frac{(m-1)p}{(p-1)};$$

de même, $v(s) = v(\rho_r(\gamma_r - 1)s) \geqslant (m-2)p/(p-1)$. En particulier, on a bien $v(b_m - 1) \geqslant (m-2)p/(p-1)$ et, comme $(m-2)p/(p-1) > 0$, $b_m \in GL_h(L)$.

Si l'on pose $a_m = 1 + c$, on a $v(c) \geqslant 3p/(p-1)$ et

$$a_{m+1} = (1 + s + s^2 + \dots)(1 + c)(1 - \gamma_r(s)) = 1 + s + c - \gamma_r(s) + c' = a_m - (\gamma_r - 1)s + c',$$

avec $c' \in M_h(L)$ vérifiant

$$v(c') \geqslant \min\left\{\frac{2(m-2)p}{(p-1)}, \frac{(m-2)p}{(p-1)} + \frac{3p}{(p-1)}\right\} = \frac{(m+1)p}{(p-1)}$$

puisque $m \geqslant 5$. En particulier $a_{m+1} - 1 = (a_m - 1) - (\gamma_r - 1)s + c'$ et

$$v(a_{m+1} - 1) \geqslant \min\left\{\frac{3p}{(p-1)}, \frac{(m-1)p}{(p-1)}, \frac{(m+1)p}{(p-1)}\right\} = \frac{3p}{(p-1)}.$$

Enfin $a_{m+1} - x_{m+1} = a_m - (\gamma_r - 1)s + c' - a_m + (\gamma_r - 1)s = c'$ donc

$$v(a_{m+1} - x_{m+1}) \geqslant \frac{(m+1)p}{(p-1)}$$

et $x_{m+1} - 1 = (a_{m+1} - 1) - (a_{m+1} - x_{m+1})$ vérifie $v(x_{m+1} - 1) > 0$, donc $x_{m+1} \in GL_h(K_r)$. □

Prouvons alors la surjectivité. — Soit $f : \Gamma \to GL_h(L)$ un 1-cocycle continu. Il existe un entier r, que l'on peut choisir suffisamment grand pour que l'extension K_∞/K_r soit régulière, tel que $v(f(\gamma_r) - 1) \geqslant 5p/(p-1)$. Posons $a_5 = f(\gamma_r)$ et $x_5 = 1$. Le lemme ci-dessus nous permet de construire des suites de matrices $(a_m)_{m \geqslant 5}, (b_m)_{m \geqslant 5}$ dans $GL_h(L)$ et $(x_m)_{m \geqslant 5}$ dans $GL_h(K_r)$ telles que, pour tout $m \geqslant 5$ on ait

$v(a_m - 1) \geqslant 3p/(p-1)$, $v(a_m - x_m) \geqslant mp/(p-1)$, $v(b_m - 1) \geqslant (m-2)p/(p-1)$ et $a_{m+1} = b_m^{-1} a_m \gamma_r(b_m)$.

La suite des $b_5 b_6 \dots b_m$ converge vers une matrice $b \in GL_h(L)$ tandis que la suite des a_m et celle des x_m tendent toutes deux vers la même limite $x \in GL_h(K_r)$. On a $b_{-1} a_5 \gamma_r(b) = x$.

Soit $f' : \Gamma \to GL_h(L)$ le 1-cocycle, cohomologue à f défini par $f'(\gamma) = b^{-1} f(\gamma) \gamma(b)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. On a $f'(\gamma_r) = x \in GL_h(K_r)$.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\gamma_r = \gamma_r\gamma$, donc $f'(\gamma)\gamma(f'(\gamma_r)) = f'(\gamma_r)\gamma_r(f'(\gamma))$ ou encore $\gamma_r(f'(\gamma)) = f'(\gamma_r)^{-1} f'(\gamma)\gamma(f'(\gamma_r)) = x^{-1} f'(\gamma)\gamma(x)$. On en déduit que le sous-K_r-espace vectoriel de L engendré par les coefficients de $f'(\gamma)$, qui est de dimension finie, est stable par γ_r. D'après la proposition 1.16, ceci implique que $f'(\gamma) \in GL_h(K_\infty)$. Autrement dit f est cohomologue à un cocycle à valeurs dans $GL_h(K_\infty)$ et est bien dans l'image de ι. □

2. C-représentations : la théorie de Sen

2.1. C, L et K_∞-représentations. — On reprend les notations de l'introduction. Soient J un groupe topologique, B un corps muni d'une topologie et d'une action continue de J compatible avec la structure de corps et $E = B^J$.

Soient W une B-représentation de J et $\xi : B \to W$ une application B-linéaire J-équivariante. Pour tout $b \in B$, on a $\xi(b) = b\xi(1)$ et l'application $\xi \mapsto \xi(1)$ identifie le E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W)$ à $H^0_{\mathrm{cont}}(J, W) = W^J$. De même, soit U une B-représentation de J extension de B par une B-représentation W, de sorte que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow U \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Si $x \in U$ est un relèvement de $1 \in B$, l'application $f : J \to W$ qui à g associe $(g-1)x$ est un 1-cocycle continu de J à valeurs dans W, dont la classe $[U]$ dans $H^1_{\mathrm{cont}}(J, W)$ ne dépend pas du choix du relèvement. L'application $U \mapsto [U]$ ainsi définie induit un isomorphisme du E-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W)$ sur $H^1_{\mathrm{cont}}(J, W)$ que nous utilisons pour identifier ces deux E-espaces vectoriels.

Soient W_1 et W_2 deux B-représentations de J et $W = W_1^* \otimes_B W_2$.

L'isomorphisme naturel du B-espace vectoriel des applications B-linéaires de W_1 dans W_2 sur W induit un isomorphisme du E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_B(J)}(W_1, W_2)$ des applications B-linéaires équivariantes de W_1 dans W_2 sur $H^0_{\mathrm{cont}}(J, W) = W^J = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W)$.

Soit V une B-représentation de J, extension de W_1 par W_2. En tensorisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow W_2 \longrightarrow V \longrightarrow W_1 \longrightarrow 0$$

avec W_1^*, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow W_1^* \otimes_B V \longrightarrow W_1^* \otimes_B W_1 \longrightarrow 0$$

de sorte que l'image inverse de B identifiée aux homothéties dans $W_1^* \otimes W_1 = \mathrm{End}_B(W_1)$ est une extension de B par W. La classe de cette extension dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W)$ ne dépend que de la classe de V dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(W_1, W_2)$ et l'application

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(W_1, W_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W) = H^1_{\mathrm{cont}}(J, W)$$

ainsi définie est un isomorphisme de E-espaces vectoriels.

Proposition 2.1. — *Soient J, B et E comme ci-dessus. Pour toute B-représentation W de J, l'application B-linéaire*

$$\rho_B(W) : B \otimes_E W^J \longrightarrow W,$$

déduite par extension des scalaires de l'inclusion de W^J dans W, est injective.

Démonstration. — Supposons que c'est faux et soit m le plus petit entier tel qu'il existe $w_1, w_2, \ldots, w_m \in W^J$, linéairement indépendants sur K et $b_1, b_2, \ldots, b_m \in B$ pas tous nuls avec $\sum_{j=1}^m b_j w_j = 0$. Si l'on a une telle égalité, la minimalité de m implique que les b_j sont tous non nuls et, quitte à diviser par b_1, on peut supposer $b_1 = 1$. Pour tout $g \in J$, on a alors $0 = g(\sum b_j w_j) = \sum g(b_j) w_j$ donc aussi $\sum_{j=2}^h (g-1)(b_j) w_j = 0$ puisque $g(b_1) = b_1$. L'hypothèse de minimalité implique que les $(g-1)(b_j)$ sont tous nuls, donc que $b_j \in E$ pour tout j, d'où une contradiction. □

On dit qu'une B-représentation W de J est *triviale* si elle est isomorphe à B^h pour un entier h convenable. Pour toute B-représentation W de J, on voit que l'on a $\dim_E W^J \leqslant \dim_B W$; on a l'égalité si et seulement si la représentation est triviale ou encore si et seulement si ρ_W est bijective. Le foncteur $W \mapsto W^J$ induit une $\otimes$-équivalence entre la sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Rep}_B(J)$ dont les objets sont les représentations triviales et celle des E-espaces vectoriels de dimension finie.

Dans toute la suite du chapitre, K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K contenue dans $\overline{K}$ et L son adhérence dans C. On pose $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Comme au chapitre précédent, *on choisit un générateur topologique γ_0 de Γ. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note K_r l'unique extension de K de degré p^r contenue dans K_∞ et on pose $\gamma_r = \gamma_0^{p^r}$; c'est un générateur topologique de $\Gamma_r = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_r)$.* Rappelons (th. 1.1) que $C^{H_K} = L$ et (prop. 1.16) que K_∞ est la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de L, stables par Γ.

Soient Y une K_∞-représentation de Γ et $\{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ une base de Y sur K_∞. Les coefficients de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $\gamma_0(y_j)$ sur cette base engendrent une extension finie K_r de K ; on appelle *degré de la base* l'entier r. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrices dont les colonnes sont les composantes des $\gamma_0^n(y_j)$ sur la base est encore à coefficients dans K_r. Comme $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ et K_r est complet,

le fait que l'action de Γ sur Y soit continue implique que le sous-K_r-espace vectoriel de Y engendré par les y_j est stable par Γ.

Si Y est une K_∞-représentation de Γ, $L \otimes_{K_\infty} Y$ est de façon évidente une L-représentation de Γ. Si X est une L-représentation de Γ, $C \otimes_L X$ est une C-représentation de G_K. On obtient ainsi des $\otimes$-foncteurs

$$\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Rep}_L(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rep}_L(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Rep}_C(G_K).$$

La théorie de Sen construit des foncteurs dans l'autre sens.

***Théorème 2.2* ([Sen80], th. 2).** — *Toute C-représentation de H_K est triviale.*

Démonstration. — Il s'agit de prouver que, pour toute C-représentation W de H_K, l'application injective $\rho_B(W) : C \otimes_L W^{H_K} \to W$ est bijective.

Soit $\{w_1, w_2, \ldots, w_h\}$ une base de W sur C. L'application $f : H_K \to GL_h(C)$, qui à g associe la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes sur cette base de $g(w_j)$, est un 1-cocycle continu de H_K à valeurs dans $GL_h(C)$. Si l'on change de base et si b est la matrice de passage, le cocycle correspondant à la nouvelle base est donné par $f'(g) = bf(g)g(b^{-1})$. Comme l'ensemble pointé $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, GL_h(C))$ est trivial (th. 1.1, (ii)), on peut choisir les w_j pour qu'ils soient fixes par H_K. Si $w = \sum_{i=1}^h c_j w_j \in W$, on voit que $w \in W^{H_K}$ si et seulement si $c_j \in C^{H_K} = L$ (th. 1.1, (i)). Alors W^{H_K} est le L-espace vectoriel de base les w_j et le théorème est clair. □

***Corollaire 2.3*.** — *Pour toute C-représentation W de H_K, on a $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W) = 0$.*

En effet le théorème signifie que le foncteur $W \to W^{H_K}$ induit une équivalence entre la catégorie des C-représentations de H_K et la catégorie semi-simple des L-espaces vectoriels de dimension finie On a donc $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_C(H_K)}(C, W) = 0$.

***Théorème 2.4* ([Sen80], th. 3).** — *Soit X une L-représentation de Γ. Notons X_f la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de X stables par Γ. L'application L-linéaire*

$$L \otimes_{K_\infty} X_f \longrightarrow X,$$

déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de X_f dans X, est bijective.

Démonstration. — Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_h\}$ une base de X sur L. L'application $f : \Gamma \to GL_h(L)$, qui à γ associe la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes sur cette base de $\gamma(x_j)$, est un 1-cocycle continu de Γ à valeurs dans $GL_h(L)$. Si l'on change de base et si b est la matrice de passage, le cocycle correspondant à la nouvelle base est donné par $f'(\gamma) = bf(\gamma)\gamma(b^{-1})$. La surjectivité de l'application $H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \to H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(L))$ (th. 1.2, (ii)) implique que l'on peut choisir les x_j pour que le sous-K_∞-espace vectoriel Y de X qu'ils engendrent soit stable

par Γ. En particulier Y est une K_∞-représentation de Γ. Comme l'application L-linéaire $L \otimes_{K_\infty} Y \to X$ déduite de l'inclusion de Y dans X est bijective, il suffit pour achever la preuve du théorème de vérifier que $X_f = Y$.

Soit r le degré de la base des x_j. Pour tout entier $s \geqslant r$, le K_s-espace vectoriel engendré par les x_i est de dimension finie sur K et est stable par Γ. On en déduit que $Y \subset X_f$.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une matrice carrée $(a_{i,j}(\gamma))_{1 \leqslant i,j \leqslant h} \in GL_h(K_r)$ telle que $\gamma(x_j) = \sum_i a_{i,j}(\gamma) x_i$, pour tout j.

Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^h c_i x_i$ avec les $c_i \in L$, un élément de X_f. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on peut écrire $\gamma(x) = \sum_{i=1}^h c_i(\gamma) x_i$, avec les $c_i(\gamma) \in L$. Le fait que $x \in X_f$ implique que le sous-K_r-espace vectoriel E de L engendré par les $c_i(\gamma)$, pour $1 \leqslant i \leqslant h$ et $\gamma \in \Gamma$ est de dimension finie.

Mais $\sum c_i(\gamma) x_i = \sum \gamma(c_j)\gamma(x_j) = \sum \gamma(c_j) a_{i,j}(\gamma) x_i$. On en déduit que E est aussi le K_r-espace vectoriel engendré par les $\gamma(c_j)$, pour $\gamma \in \Gamma$ et $1 \leqslant j \leqslant h$. En particulier, E est stable par Γ, ce qui implique (prop. 1.16) $E \subset K_\infty$. On a bien $c_j \in E \subset K_\infty$, pour tout j et $X_f \subset Y$. □

Le théorème 2.2 implique que le foncteur $W \mapsto W^{H_K}$ induit une $\otimes$-équivalence de la catégorie $\mathrm{Rep}_C(H_K)$ sur la catégorie des L-espaces vectoriels de dimension finie, le foncteur $Y \mapsto C \otimes_L Y$ étant un quasi-inverse. Les théorèmes 2.2 et 2.4 impliquent que les foncteurs

$$\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Rep}_L(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rep}_L(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Rep}_C(G_K)$$

définis plus haut sont des $\otimes$-équivalences de catégories : un quasi-inverse du premier est celui qui à la C-représentation W de G_K associe W^{H_K} ; un quasi-inverse du second est celui qui à X associe X_f.

2.2. Étude des K_∞-représentations. — Reprenons les notations du début du § 1.2. Le caractère additif $\log \chi : G_K \to \mathbb{Z}_p$ se factorise à travers Γ et on note encore $\log \chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_p$ le caractère additif de Γ ainsi obtenu. Remarquons que, si $\varepsilon_p = 1$ si $p \neq 2$ (resp. 2 si $p = 2$), on a $\log(\mathbb{Z}_p^*) = p^{\varepsilon_p}\mathbb{Z}_p$. On note r_K l'unique entier tel que $\log \chi(\Gamma) = p^{r_K}\mathbb{Z}_p$. On a $r_K \geqslant \varepsilon_p$ avec égalité lorsque K est absolument non ramifié.

Si s est un endomorphisme d'un K_∞-espace vectoriel de dimension finie Y, il existe un sous-groupe ouvert Γ_s de Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma_s$, la série $\exp(\log \chi(\gamma) \cdot s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\log(\chi(\gamma)))^n}{n!} s^n$ converge dans l'anneau des endomorphismes de ce K_∞-espace vectoriel : en effet, soient $\{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ une base de Y sur K_∞ ; pour tout nombre rationnel m, notons Y_m le sous-$\mathcal{O}_{K_\infty}$-module de Y formé des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^h c_i y_i$, avec les $c_i \in K_\infty$ vérifiant $v_p(c_i) \geqslant m$; soit a un nombre rationnel tel que $s(Y_0)$ est contenu dans Y_a. Il est bien connu (et facile à vérifier) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_p(n!) = \frac{n - s(n)}{p-1}$ où $s(n)$ désigne la somme des chiffres de l'entier n écrit en base p. Si l'on prend $\Gamma_s = \Gamma_r$, avec r le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que

$r+r_K+a > 1/(p-1)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \Gamma_s$, on a $\frac{(\log(\chi(\gamma)))^n}{n!} s^n(Y_0) \subset Y_{n(r+r_K-\frac{1}{p-1}+a)}$ et la série $\exp(\log \chi(\gamma) \cdot s)$ converge bien.

***Proposition 2.5* ([Sen80], th. 4).** — *Soit Y une K_∞-représentation de Γ. Il existe un unique endomorphisme s du K_∞-espace vectoriel Y qui a la propriété que, pour tout $y \in Y$, il existe un sous-groupe ouvert Γ_y de Γ tel que*

$$\gamma(y) = \exp(\log \chi(\gamma) \cdot s)(y)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_y$. Le polynôme caractéristique de s est à coefficients dans K.

Démonstration. — Soient $\{y_1, y_2, \dots, y_h\}$ une base de Y sur K_∞.

Si s et s' sont deux endomorphismes de Y ayant la propriété requise, on voit qu'il existe un sous-groupe-ouvert Γ_{r_0} de Γ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_0}$, on a

$$\gamma(y_j) = \exp(\log \chi(\gamma) \cdot s)(y_j) = \exp(\log \chi(\gamma) \cdot s')(y_j).$$

On a donc $\exp(\log \chi(\gamma) \cdot s) = \exp(\log \chi(\gamma) \cdot s')$, pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_0}$, donc $s = s'$ et s, s'il existe, est bien unique.

Soit r_0 le degré de la base des y_j. Le sous-K_{r_0}-espace vectoriel Y_0 de Y engendré par les y_j est stable par Γ et l'action de Γ_{r_0} est linéaire. Pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_0}$ suffisamment proche de 1 mais distinct de 1, l'endomorphisme $\log \gamma$ de Y_0 est bien défini et $s_0 = \frac{1}{\log \chi(\gamma)} \log \gamma$ ne dépend pas du choix de γ. Notons s l'unique endomorphisme du K_∞-espace vectoriel Y dont la restriction à Y_0 est s_0. Si $r \geqslant r_0$ est un entier suffisamment grand, pour tout $\gamma \in \Gamma_r$, l'automorphisme $\exp(\log \chi(\gamma) \cdot s)$ de Y est bien défini et, pour tout $y \in Y_0$, $\gamma(y) = \exp(\log \chi(\gamma) \cdot s)(y)$. Si maintenant $y = \sum_{i=1}^h c_i y_i \in Y$, avec les $c_i \in K_\infty$ et si K_{r_y} est l'extension de K_r engendrée par les c_i, on a $\gamma(y) = \exp(\log \chi(\gamma) \cdot s)(y)$, pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_y}$ et s convient.

Soit a la matrice de s dans la base des y_j. Pour tout $\gamma \in \Gamma_r$, on a

$$(\gamma(y_1), \gamma(y_2), \dots, \gamma(y_h)) = (y_1, y_2, \dots, y_h) \exp(\log \chi(\gamma).a).$$

En écrivant que $\gamma\gamma_0 = \gamma_0\gamma$, on en déduit que, pour tout $\gamma \in \Gamma_r$,

$$(\gamma(\gamma_0(y_1)), \gamma(\gamma_0(y_2)), \dots, \gamma(\gamma_0(y_h)) = (\gamma_0(y_1), \gamma_0(y_2), \dots, \gamma_0(y_h)) \exp(\log \chi(\gamma) \cdot \gamma_0(a)),$$

donc que la matrice de s relativement à la base des $\gamma_0(y_j)$ est $\gamma_0(a)$. Les matrices $\gamma_0(a)$ et a sont donc semblables, ce qui implique que le polynôme caractéristique de a, qui est aussi celui de s a ses coefficients fixes par γ_0, donc dans K. □

***Remarque*.** — Le fait que le polynôme caractéristique de s soit à coefficients dans K signifie qu'il existe une base de Y sur K_∞ par rapport à laquelle la matrice de s est à coefficients dans K ([**Sen80**], th. 5).

Comme dans l'introduction, pour tout corps E, on note $\mathcal{S}_E$ la catégorie suivante :

– un objet est un couple (Y, s) formé d'un E-espace vectoriel de dimension finie Y et d'un endomorphisme s de cet espace,

– un morphisme $f : (Y_1, s_1) \to (Y_2, s_2)$ est une application E-linéaire de Y_1 dans Y_2 telle que $s_2 \circ f = f \circ s_1$.

Cette catégorie a une structure de catégorie tannakienne sur E : l'objet unité est $(E, 0)$, on définit le produit tensoriel par

$$(Y_1, s_1) \otimes (Y_2, s_2) = (Y_1 \otimes_E Y_2, s_1 \otimes \mathrm{id}_{Y_2} + \mathrm{id}_{Y_1} \otimes s_2$$

et le dual de (Y, s) est $(Y^*, -{}^t s)$, où Y^* est le E-espace vectoriel dual de Y et ${}^t s$ est la transposée de s.

Supposons maintenant que E est un corps contenant K_∞ (par exemple $E = K_\infty$ ou $E = C$). Soit Y une K_∞-représentation de Γ. Posons $Y_E = E \otimes_{K_\infty} Y$ et notons s_E le E-endomorphisme de Y_E déduit par extension des scalaires du K_∞-endomorphisme s de Y défini par la proposition 2.5. On peut considérer la correspondance

$$Y \longmapsto (Y_E, s_E)$$

comme un $\otimes$-foncteur de la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}_E$.

Proposition 2.6 (cf. [Sen80], th. 6 et 7). — *Soient E un corps contenant K_∞ et Y_1, Y_2 deux K_∞-représentations de Γ.*

i) L'application E-linéaire naturelle

$$E \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_E}((Y_{1,E}, s_E), (Y_{2,E}, s_E))$$

est un isomorphisme.

ii) Pour que Y_1 et Y_2 soient isomorphes comme K_∞-représentations de Γ, il faut et il suffit que $(Y_{1,E}, s_E)$ et $(Y_{2,E}, s_E)$ soient isomorphes comme objets de $\mathcal{S}_E$.

Démonstration. — Montrons (i) : Avec des notations évidentes, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty, Y_1^* \otimes Y_2)$$
$$\text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_E}(Y_{1,E}, Y_{2,E}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_E}(E, Y_{1,E}^* \otimes Y_{2,E}),$$

ce qui nous ramène au cas où $Y_1 = K_\infty$. Si l'on pose $Y = Y_2$, on a alors $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty, Y) = Y^\Gamma$ tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_E}(E, Y_E) = \mathrm{Ker}\, s_E$. Il s'agit donc de prouver que l'application naturelle

$$\rho : E \otimes_K Y^\Gamma \longrightarrow \mathrm{Ker}\, s_E$$

est bijective.

On voit qu'il suffit de prouver ce fait lorsque $E = K_\infty$. Quitte à remplacer Y par $\mathrm{Ker}\, s$, on peut supposer $s = 0$.

On sait que ρ est injective (prop. 2.1). Soit $\{w_1, w_2, \ldots, w_h\}$ une base de Y sur K_∞. Soit K_{r_0} l'extension de K engendrée par les coefficients de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $\gamma_0(w_j)$ sur la base des w_i. Le fait que $s = 0$ implique qu'il existe un entier r tel que $\gamma_r(w_j) = w_j$ pour tout j. Quitte a remplacer r par un entier plus grand, on peut supposer $r \geqslant r_0$. Le sous-K_r-espace vectoriel Y_r de Y engendré par les w_j est stable par Γ qui agit à travers le quotient $\mathrm{Gal}(K_r/K)$. Quand

on écrit l'action de ce groupe sur les w_j, cela définit un 1-cocycle de $\mathrm{Gal}(K_r/K)$ à valeurs dans $GL_h(K_r)$. Comme $H^1(\mathrm{Gal}(K_r/K), GL_h(K_r)) = 1$ (*cf.* par exemple [**CL**], chap. X, prop. 3), il existe une base de Y_r sur laquelle $\mathrm{Gal}(K_r/K)$ opère trivialement, *i.e.* une base de Y formée d'éléments fixes par Γ et ρ est bien surjective.

Compte-tenu de (i), l'assertion (ii) devient un cas particulier du lemme suivant :

Lemme 2.7. — *Soient Z_1 et Z_2 des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps E. Soit E_0 un sous-corps infini de E et L un sous-E_0-espace vectoriel du E-espace vectoriel $\mathcal{L}_E(Z_1, Z_2)$ des applications E-linéaires de Z_1 dans Z_2. Pour que le sous-E-espace vectoriel L_E de $\mathcal{L}_E(Z_1, Z_2)$ engendré par L contienne un isomorphisme de Z_1 sur Z_2, il faut et il suffit que L en contienne un.*

Démonstration. — Il est clair que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit donc $f : Z_1 \to Z_2$ un élément de L_E qui est un isomorphisme. Le fait que f existe implique déjà que Z_1 et Z_2 ont même dimension h sur E.

Soit $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base du E-espace vectoriel L_E formée d'éléments de L. Choisissons une base de Z_1 et une base de Z_2 sur E et, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, soit $A_j \in M_h(E)$ la matrice de f_j par rapport à ces bases. Soit

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \det(X_1A_1 + X_2A_2 + \cdots + X_nA_n) \in E[X_1, X_2, \ldots, X_n].$$

On peut écrire $f = \sum_{n=1}^{h} \lambda_n f_n$, avec des $\lambda_n \in E$ et le fait que f soit un isomorphisme implique que $P(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0$. Le polynôme P n'est donc pas identiquement nul. Comme le corps E_0 est infini, il existe donc $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in E_0$ tel que $P(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \neq 0$, ce qui signifie que l'application $\sum \mu_j f_j$ est un élément de L qui est un isomorphisme de Z_1 sur Z_2. □

Soit W une C-représentation de G_K. Alors W^{H_K} est une L-représentation de Γ et $(W^{H_K})_f$ une K_∞-représentation de Γ. On note $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ l'objet de $\mathcal{S}_{K_\infty}$ formé du K_∞-espace vectoriel sous-jacent à $(W^{H_K})_f$ et de l'endomorphisme de cet espace défini par la proposition 2.5, que l'on note $s_{W,f}$. On voit que l'on peut considérer Δ_{Sen} comme un foncteur (même un $\otimes$-foncteur) de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ dans $\mathcal{S}_{K_\infty}$. Ce foncteur est exact et fidèle et la proposition précédente montre que la connaissance de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ détermine W, vu comme C-représentation de G_K, à isomorphisme près. Si s_W désigne le C-endomorphisme de $W = C \otimes_{K_\infty} \Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ déduit par extension des scalaires de l'endomorphisme $s_{W,f}$, on voit aussi que (W, s_W), vu comme objet de $\mathcal{S}_C$, détermine encore W à isomorphisme près.

***Remarque* (Changement de base)**. — Soient K' une extension de K munie d'une valuation discrète prolongeant celle de K et complet pour cette valuation, $\overline{K'}$ une clôture algébrique de K' contenant $\overline{K}$, ce qui fait que C s'identifie à un sous-corps du complété C' de $\overline{K'}$ pour la topologie p-adique. On a un homomorphisme naturel de $G_{K'} = \mathrm{Gal}(\overline{K'}/K')$ dans G_K. En particulier, si W est une C-représentation

de G_K, le C'-espace vectoriel $W' = C' \otimes_C W$ peut être considéré comme une C'-représentation de $G_{K'}$. Avec des notations évidentes, on voit que $K'_\infty \supset K_\infty$ et que $\Delta_{\mathrm{Sen},K'}(W') = K'_\infty \otimes_{K_\infty} \Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$, l'endomorphisme de Sen de $\Delta_{\mathrm{Sen},K'}(W')$ étant l'endomorphisme déduit de s par l'extension des scalaires $K_\infty \to K'_\infty$.

Un cas particulier de cette situation est celui où K' est un élément de l'ensemble $\mathcal{K}$ des sous-corps fermés K' de C contenant K tels que la restriction de la valuation à K' est encore discrète. Il revient au même de dire que K' est le complété d'une extension de K contenue dans $\overline{K}$ telle que la restriction de la valuation à cette extension est encore discrète.

Dans ce cas $C' = C$ et l'homomorphisme $G_{K'} \to G_K$ est injectif et identifie $G_{K'}$ à un élément de l'ensemble $\mathcal{H}$ des sous-groupes fermés H de G_K tels que $H \cap I_K$ est ouvert dans I_K (où $I_K \subset G_K$ est le sous-groupe d'inertie). Compte-tenu de cette identification, l'application $K' \mapsto G_{K'}$ est une bijection de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{H}$ (la bijection réciproque étant l'application $H \mapsto C^H$).

2.3. Le point de vue de Colmez. — Soit $\mathbb{Z}_p(1)$ le module de Tate du groupe multiplicatif, noté additivement. Fixons une fois pour toute un générateur t de ce $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1. On a donc $g(t) = \chi(g)t$, pour tout $g \in G_K$.

On note $\mathbb{Z}_p[\log t]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée, notée $\log t$, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Si $u = mt \in \mathbb{Z}_p(1)$, on pose $\log u = \log m + \log t$ (où $\log(p^r m_0) = \log m_0$ si $r \in \mathbb{Z}$ et $m_0 \in \mathbb{Z}_p^*$). Le groupe G_K opère de façon naturelle sur $\mathbb{Z}_p[\log t]$: c'est l'unique action $\mathbb{Z}_p$-linéaire compatible avec la structure d'anneau telle que $g(\log t) = \log \chi(g) + \log t$, pour tout $g \in G_K$.

Le couple $(\mathbb{Z}_p[\log t], \log)$ est solution d'un problème universel évident et, en particulier, sa construction est indépendante, à isomorphisme unique près, du choix de t. La construction de l'anneau B_{Sen} ci-dessous nécessite, elle, que l'on ait fait un choix de t. Toutefois, le lecteur remarquera que la construction du sous-anneau $B_{\mathrm{Sen},0}$ de B_{Sen} est indépendante de ce choix.

Avec Colmez [**Co94**], on note $B_{\mathrm{Sen}} = C\{\{\log t\}\}$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans C, en l'indéterminée $\log t$, à rayon de convergence non nul. On note aussi $s : B_{\mathrm{Sen}} \to B_{\mathrm{Sen}}$ la dérivation $-\partial/\partial \log t$, *i.e.* on a $s(\sum_{n\geqslant 0} c_n (\log t)^n) = -\sum_{n\geqslant 1} n c_n (\log t)^{n-1}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $B_{\mathrm{Sen},r}$ le sous-anneau de B_{Sen} formé des $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\log t)^n$, avec les $c_n \in C$ vérifiant $v_p(c_n) + n(r_K + r)$ tend vers l'infini avec n (l'entier r_K a été défini au début du § 2.2). C'est une sous-C-algèbre stable par s et $B_{\mathrm{Sen}} = \cup_{r\in\mathbb{N}} B_{\mathrm{Sen},r}$. Si $b \in C$ vérifie $v(b) \geqslant r_K + r$, alors, pour tout $\sum c_n (\log t)^n \in B_{\mathrm{Sen},r}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m\in\mathbb{N}} c_{m+n} \binom{m+n}{n} b^m$ converge dans C et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n (\log t + b)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} c_{m+n} \tbinom{m+n}{n} b^m \Big) (\log t)^n \in B_{\mathrm{Sen},r}.$$

Soit alors $G_{K,r}$ le sous-groupe ouvert de G_K image inverse de Γ_r. Le groupe $G_{K,r}$ opère semi-linéairement sur $B_{\mathrm{Sen},r}$ par

$$g\Big(\sum c_n(\log t)^n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(c_n)(\log t + \log(\chi(g))^n.$$

L'action de $G_{K,r}$ commute à celle de s.

Pour toute C-représentation W de G_K et tout $r \in \mathbb{N}$, posons

$$D_{\mathrm{Sen},r}(W) = (B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W)^{G_{K,r}}.$$

Si l'on fait agir s sur $B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W$ par $s(b \otimes w) = s(b) \otimes w$, cette action commute à celle de $G_{K,r}$ et on note $s_{W,r}$ le K_r-endomorphisme de $D_{\mathrm{Sen},r}(W)$ qui est la restriction de s à ce K_r-espace vectoriel. Pour tout r, on a une inclusion évidente $D_{\mathrm{Sen},r}(W) \subset D_{\mathrm{Sen},r+1}(W)$ et $s_{W,r}$ est la restriction à $D_{\mathrm{Sen},r}(W)$ de $s_{W,r+1}$. On pose $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) = \cup_{r\in\mathbb{N}} D_{\mathrm{Sen},r}(W) \subset B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$. C'est un K_∞-espace vectoriel. On note $s_{W,\infty}$ l'unique K_∞-endomorphisme de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ tel que, pour tout r, sa restriction à $D_{\mathrm{Sen},r}(W)$ est $s_{W,r}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'anneau $B_{\mathrm{Sen},r}$ est intègre et l'action de $G_{K,r}$ s'étend à son corps des fractions $\mathrm{Frac}\, B_{\mathrm{Sen},r}$.

Proposition 2.8 **(Colmez, [Co94], th. 2)**

i) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $(B_{\mathrm{Sen},r})^{G_{K,r}} = (\mathrm{Frac}\, B_{\mathrm{Sen},r})^{G_{K,r}} = K_r$.

ii) Soit W une C-représentation de G_K. On a $\dim_{K_\infty} D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) = \dim_C W$ (et donc $(D_{\mathrm{Sen},\infty}(W), s_{W,\infty})$ est un objet de $\mathcal{S}_{K_\infty}$). Soit $\mathrm{Col}_W : \Delta_{\mathrm{Sen}}(W) \to B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$ l'application qui envoie x sur $\exp(-(\log t)s_{W,f})(x) \in B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$. Alors Col_W induit un isomorphisme, dans la catégorie $\mathcal{S}_{K_\infty}$, de $(\Delta_{\mathrm{Sen}}(W), s_{W,f})$ sur $(D_{\mathrm{Sen},\infty}(W), s_{W,\infty})$.

Démonstration

(i) Pour tout sous-corps E de C, notons $E\{\{\log t\}\}_r$ l'anneau des séries de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(\log t)^n$ avec les $x_n \in E$ vérifiant $v_p(x_n) + n(r_K + r)$ tend vers l'infini avec n. En particulier, $B_{\mathrm{Sen},r} = C\{\{\log t\}\}_r$.

On a $K_r \subset (B_{\mathrm{Sen},r})^{G_{K,r}}$. Soit $b \in (\mathrm{Frac}\, B_{\mathrm{Sen},r})^{G_{K,r}}$. On veut montrer que $b \in K_r$ et il est clair qu'il suffit de prouver que $b \in K_\infty$, *i.e.* on peut remplacer r par un entier plus grand. Comme l'anneau B_{Sen}, qui est la réunion des $B_{\mathrm{Sen},s}$ pour $s \in \mathbb{N}$, est un anneau de valuation discrète (non complet) admettant $\log t$ comme uniformisante, ceci nous permet de supposer que b peut s'écrire $b = (\log t)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\log t)^n$, avec $m \in \mathbb{N}$, les $c_n \in C$ vérifiant $v_p(c_n) + n(r_K + r)$ tend vers l'infini avec n et $c_0 \neq 0$ si $m \neq 0$.

Pour tout $g \in H_K$, $g((\log t)^{-m} \sum c_n(\log t)^n) = (\log t)^{-m} \sum g(c_n)(\log t)^n$, donc chaque $c_n \in C^{H_K} = L$ et $\sum c_n(\log t)^n \in L\{\{\log t\}\}_r$.

Pour tout entier $s \geqslant r$, soit γ_s un générateur topologique de Γ_s et posons $a_s = \log(\chi(\gamma_s))$. C'est un élément non nul de $\mathbb{Z}_p$. Le groupe Γ_r opère sur $K_s\{\{\log t\}\}_r$. Si

$\sum x_n(\log t)^n \in K_s\{\{\log t\}\}_r$, on a $\gamma_s(\sum x_n(\log t)^n) = \sum x_n(\log t + a_s)^n$, ce qui fait que $(K_s\{\{\log t\}\}_r)^{\Gamma_s} = K_s$, donc $(K_s\{\{\log t\}\}_r)^{\Gamma_r} = K_r$.

On a $\gamma_r(b) = (\log t + a_r)^{-m} \sum c_n(\log t + a_r)^n$ et on doit avoir

$$(\log t)^m \sum c_n(\log t + a_r)^n = (\log t + a_r)^m \sum c_n(\log t)^n.$$

Si m était non nul, le terme constant du membre de gauche serait nul, contrairement au terme constant du membre de droite qui est $a_r^m c_0$, donc $m = 0$.

Rappelons (prop. 1.15) que, pour tout s, on dispose d'une application continue, Γ-équivariante $\widehat{t}_{K_s} : L \to K_s$. Quitte à remplacer r par un entier plus grand, on peut supposer l'extension K_∞/K_r régulière (prop. 1.11). Comme, pour tout entier $s \geqslant r$ et tout $x \in L$, on a $v_p(\widehat{t}_{K_s}(x)) \geqslant v_p(x) - p/(p-1)$ (prop. 1.15,(iii)), on peut définir une application $t_s : L\{\{\log t\}\}_r \to K_s\{\{\log t\}\}_r$, en posant $t_s(\sum x_n(\log t)^n) = \sum \widehat{t}_{K_s}(x_n)(\log t)^n$. On voit que t_s est Γ_r-équivariante. Par conséquent $t_s(\sum c_n(\log t)^n) \in (K_s\{\{\log t\}\}_r)^{G_{K,r}} = K_r$, ce qui implique que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $t_s(c_n) = 0$ pour tout $s \geqslant r$, ou encore (prop. 1.15, (iv)) que $c_n = 0$. Donc $b = c_0$ et l'assertion résulte de ce que $C^{G_{K,r}} = K_r$ (th. 1.2).

(ii) D'après la proposition 2.1, l'application naturelle

$$B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_{K_r} D_{\mathrm{Sen},r}(W) \longrightarrow B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W$$

est injective, donc $\dim_{K_r} D_{\mathrm{Sen},r}(W) \leqslant \dim_C W$; par conséquent, $\dim_{K_\infty} D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) \leqslant \dim_C W$.

Il est clair que Col_W est une application K_∞-linéaire injective. Par ailleurs, soit $\{w_1, w_2, \ldots, w_h\}$ une base de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ sur K_∞. Il existe un entier r tel que le sous-K_r-espace vectoriel Δ_r engendré par les w_j est stable par $s_{W,f}$ et Γ_r et que, si $\gamma \in \Gamma_r$, alors l'action de γ sur Δ_r est l'endomorphisme $\exp(\log(\chi(\gamma))s)$, si s désigne la restriction de $s_{W,f}$ à Δ_r. On voit alors que $\mathrm{Col}_W(\Delta_r) \subset D_{\mathrm{Sen},r}(W)$. On en déduit que $\dim_{K_r} D_{\mathrm{Sen},r}(W) = \dim_{K_\infty} D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) = h = \dim_C W$ et que Col_W est un isomorphisme de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ sur $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$. Enfin le fait que, dans cet isomorphisme l'endomorphisme $s_{W,f}$ de $D_{\mathrm{Sen}}(W)$ correspond à l'endomorphisme $s_{W,\infty}$ de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ est immédiat. □

2.4. Quelques rappels sur les groupe pro-algébriques commutatifs. — Dans ce paragraphe, E est un corps de caractéristique 0, $\overline{E}$ est une clôture algébrique de E et $G_E = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{E}}/\mathrm{E})$.

Si $\mathbb{G}$ est un groupe pro-algébrique affine sur E, on note $\mathcal{O}_E(\mathbb{G})$ son algèbre affine. On fait opérer $\mathbb{G}$ sur $\mathcal{O}_E(\mathbb{G})$ par *translation à gauche*, *i.e.*, si $f \in \mathcal{O}_E(\mathbb{G})$ et $g, h \in \mathbb{G}$, on convient que $(gf)(h) = f(g^{-1}h)$.

Il revient au même de se donner un *groupe pro-algébrique multiplicatif* $\mathbb{T}^m$ sur E ou un G_E-module discret X (*i.e.* un groupe abélien muni d'une action linéaire discrète

de G_E) : à $\mathbb{T}^m$, on associe son groupe des caractères

$$X = X(\mathbb{T}^m) = \mathrm{Hom}_{\overline{E}}(\mathbb{T}^m \times \overline{E}, \mathbb{G}_m)$$

que nous notons multiplicativement.

Se donner une action de $\mathbb{T}^m \times \overline{E}$ sur un $\overline{E}$-espace vectoriel $\overline{V}$ revient à se donner une graduation indexée par X, $\overline{V} = \oplus_{x\in X}\overline{V}_x$: on a $g(v) = x(g)v$ si $g \in \mathbb{G}$ et $v \in \overline{V}_x$. Se donner une action de $\mathbb{T}^m$ sur un E-espace vectoriel V revient à se donner une graduation $\overline{V} = \oplus_{x\in X}\overline{V}_x$ de $\overline{V} = \overline{E} \otimes_E V$ telle que $\gamma(\overline{V}_x) = \overline{V}_{\gamma(x)}$ si $\gamma \in G_E$ et $x \in X$ (on a muni $\overline{V}$ de l'action semi-linéaire naturelle de G_E).

Les *poids de la représentation* V sont les $x \in X$ tels que $V_x \neq 0$.

L'algèbre affine de $\mathbb{T}^m \times \overline{E}$ est l'algèbre $\overline{E}[X]$ du groupe X à coefficients dans $\overline{E}$. On a donc $\overline{E}[X] = \oplus_{x\in X}\overline{E}x$. On prendra garde que, pour tout $x \in X$, $(\overline{E}[X])_x = \overline{E}x^{-1}$, autrement dit la représentation $(\overline{E}[X])_x$ a un seul poids et celui-ci est x^{-1}. Enfin, le groupe G_E opère semi-linéairement sur $\overline{E}[X]$ et on a $\mathcal{O}_E(\mathbb{T}) = (\overline{E}[X])^{G_E}$.

Se donner une action du groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur un E-espace vectoriel V revient à se donner un endomorphisme nilpotent ν de V (alors $\lambda \in E = \mathbb{G}_a(E)$ agit sur V via $\exp(\lambda\nu)$). Si l'on note u la coordonnée canonique de $\mathbb{G}_a$ (un élément de $\mathcal{O}_E(\mathbb{G}_a)$ peut être vu comme une fonction polynomiale de E dans E et u est l'identité sur E), alors $\mathcal{O}_E(\mathbb{G}_a) = E[u]$ et l'endomorphisme ν sur $E[u]$ est $-\frac{\partial}{\partial u}$.

Posons $\mathbb{T} = \mathbb{T}^m \times \mathbb{G}_a$. Se donner une action de $\mathbb{T}$ sur un E-espace vectoriel V revient à se donner

– une action de $\mathbb{T}^m$, donc une décomposition de $\overline{V} = \overline{E} \otimes_E V$ en somme directe $V = \oplus_{x\in X}\overline{V}_x$ telle que $\gamma(\overline{V}_x) = \overline{V}_{\gamma(x)}$ si $\gamma \in G_E$ et $x \in X$,

– une action de $\mathbb{G}_a$, donc un endomorphisme nilpotent ν de V,

ces deux actions commutant, ce qui signifie, que, si on note encore ν l'endomorphisme de $\overline{V}$ déduit de ν par l'extension des scalaires, chaque $\overline{V}_x$ est stable par ν.

Si X' (resp. X'') est un sous-groupe (resp. un quotient) de X stable par G_E, le groupe multiplicatif $\mathbb{T}^m_{X'}$ (resp. $\mathbb{T}^m_{X''}$) de groupe des caractères X' (resp. X'') s'identifie à un quotient (resp. un sous-groupe) de $\mathbb{T}^m$ et tout quotient (resp. tout sous-groupe) est de ce type. De même,

– les quotients de $\mathbb{T}$ sont d'une part les $\mathbb{T}^m_{X'}$ et d'autre part les $\mathbb{T}_{X'} = \mathbb{T}^m_{X'} \times \mathbb{G}_a$ pour X' sous-groupe de X stable par G_E ;

– les sous-groupes de $\mathbb{T}^m$ sont d'une part les $\mathbb{T}^m_{X''} \times \mathbb{G}_a$ et d'autre part les $\mathbb{T}^m_{X''}$ pour X'' quotient de X stable par G_E.

Nous notons $\mathbb{S}^m_E$ le groupe $\mathbb{T}^m$ de groupe des caractères $\overline{E}$ avec action naturelle de G_E et $\mathbb{DR}^m_E$ le sous-groupe correspondant au groupe des caractères $\overline{E}/\mathbb{Z}$. On pose $\mathbb{S}_E = \mathbb{S}^m_E \times \mathbb{G}_a$ et on note $\mathbb{DR}_E$ son sous-groupe $\mathbb{DR}^m_E \times \mathbb{G}_a$. Remarquons que, pour toute extension algébrique F de E, $\mathbb{S}_F$ s'identifie à $\mathbb{S}_E \times_E F$ et $\mathbb{DR}_F$ à $\mathbb{DR}_E \times_E F$.

En fait le groupe $\mathbb{S}_E$ s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre tautologique de la catégorie $\mathcal{S}_E$ introduite plus haut. De façon terre à terre, si V est

un E-espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme s, on obtient une action de $\mathbb{S}_E$ sur V en procédant ainsi : on écrit $s = s_0 + s_{nil}$, avec s_0 semi-simple, s_{nil} nilpotent et $s_0 s_{nil} = s_{nil} s_0$ et on note encore s_0 l'endomorphisme du $\overline{E}$-espace vectoriel $\overline{V} = \overline{E} \otimes_E V$ déduit de s_0 par extension des scalaires ; alors

– pour tout $\alpha \in \overline{E}$, le sous-espace $\overline{V}_\alpha$ de $\overline{V}$ est le sous-espace propre correspondant à la valeur-propre α de s_0 ;

– l'endomorphisme nilpotent de V définissant l'action de $\mathbb{G}_a$ est s_{nil}.

Cette construction est fonctorielle en V, envoie l'objet-unité sur l'objet-unité, commute au produit tensoriel et à la formation du dual. Le résultat suivant est évident :

Proposition 2.9. — *La construction ci-dessus induit une $\otimes$-équivalence entre $\mathcal{S}_E$ et la catégorie* $\mathrm{Rep}_E(\mathbb{S}_E)$ *des représentations E- linéaires de dimension finie de $\mathbb{S}_E$.*

Comme cette équivalence envoie le foncteur fibre tautologique de la première catégorie sur celui de la seconde, elle permet d'identifier le groupe $\mathbb{S}_E$ au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre tautologique de la catégorie $\mathcal{S}_E$.

Dans la suite, on note $\mathcal{B}_E^m$ (resp. $\mathcal{B}_E$) l'algèbre affine du groupe $\mathbb{S}_E^m$ (resp. $\mathbb{S}_E$). On convient de noter $(t^{(\alpha)})_{\alpha \in \overline{E}}$ le groupe additif de $\overline{E}$ noté multiplicativement de sorte que ces $t^{(\alpha)}$ forment une base de $\mathcal{B}_{\overline{E}}^m$ sur $\overline{E}$ et que

$$\mathcal{B}_E^m = \Big\{ \sum b_\alpha t^{(\alpha)} \in \mathcal{B}_{\overline{E}}^m \mid b_{g(\alpha)} = g(b_\alpha) \text{ pour } g \in G_E \text{ et } \alpha \in \overline{E} \Big\}.$$

On convient de noter $\log t$ la coordonnée canonique de $\mathbb{G}_a$, de sorte que $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_E^m[\log t]$, algèbre des polynômes en l'indéterminée $\log t$ à coefficients dans $\mathcal{B}_E$.

Pour tout sous-groupe du groupe additif X de $\overline{E}$ stable par G_E, on pose $\mathbb{S}_{E,X}^m = (\mathbb{S}_E)_X^m$ (resp. $\mathbb{S}_{E,X} = (\mathbb{S}_E)_X = \mathbb{S}_{E,X}^m \times \mathbb{G}_a$) et on note $\mathcal{B}_{E,X}^m$ (resp. $\mathcal{B}_{E,X}$) son algèbre affine. Tout élément de $\mathcal{B}_X^m$ s'écrit donc, d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{\alpha \in X} b_\alpha t^{(\alpha)}$ avec les b_α presque tous nuls vérifiant $g(b_\alpha) = b_{g(\alpha)}$ pour $g \in G_E$ et $\alpha \in X$. On a $\mathcal{B}_{E,X} = \mathcal{B}_{E,X}^m[\log t]$.

2.5. Le point de vue algébrique. — Nous nous proposons d'identifier $\mathcal{B}_K$ à une sous-K-algèbre de B_{Sen}. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'anneau $\mathcal{B}_{K,r} = \mathcal{B}_K \cap B_{\mathrm{Sen},r}$ sera stable par $G_{K,r}$ (le groupe $G_{K,r}$ va agir sur $\mathcal{B}_{K,r}$, de façon non triviale, via son quotient $\Gamma_r = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_r)$). Pour toute C-représentation W de G_K, $D_{\mathrm{Sen},r}(W)$ va s'identifier à $(\mathcal{B}_{K,r} \otimes_K W)^{G_{K,r}}$.

Pour cela, il suffit de reprendre les notations ci-dessus et de poser, pour tout $\alpha \in \overline{K}$

$$t^{(\alpha)} = \exp(\alpha \log t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\log t)^n.$$

Alors $\mathcal{B}_{\overline{K}}$ s'identifie à la sous-$\overline{K}$-algèbre de B_{Sen} dont une base, en tant que $\overline{K}$-espace vectoriel est formée des $t^{(\alpha)}(\log t)^j$, pour $\alpha \in \overline{K}$ et $j \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B}_K$ s'identifie au

sous-anneau de B_{Sen} formé des éléments qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{\alpha\in\overline{K},j\in\mathbb{N}} \lambda_{\alpha,j}t^{(\alpha)}(\log t)^j$$

avec les $\lambda_{\alpha,j}\in\overline{K}$ presque tous nuls et vérifiant $g(\lambda_{\alpha,j})=\lambda_{g(\alpha),j}$ pour tout $g\in G_K$, $\alpha\in\overline{K}$ et $j\in\mathbb{N}$ (et une telle écriture est unique). On voit aussi que, par extension des scalaires, $C\otimes_K\mathcal{B}_K$ s'identifie à la sous-C-algèbre de B_{Sen} dont une base sur C est formée des $t^{(\alpha)}(\log t)^j$ pour $\alpha\in\overline{K}$ et $j\in\mathbb{N}$.

L'action de $\mathbb{S}_K$ sur $\mathcal{B}_K$ par translation à gauche correspond par la proposition 2.9 à une application K-linéaire de $\mathcal{B}_K$ dans lui-même. On voit que c'est la K-dérivation, restriction à $\mathcal{B}_K$ de la C-dérivation $s=-\partial/\partial\log t$ de B_{Sen}. On a $s(\log t)=-1$ et $s(t^{(\alpha)})=-\alpha t^{(\alpha)}$ pour tout $\alpha\in\overline{K}$.

Pour tout $r\in\mathbb{N}$, notons $\mathfrak{a}_r$ le sous-$\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module de $\overline{K}$ formé des α vérifiant $v_p(\alpha)>-r-r_K+\frac{1}{p-1}$. Rappelons que, pour tout entier $n>0$, si $s(n)$ désigne la somme des chiffres de n écrit en base p, on a $v_p(n!)=(n-s(n))/(p-1)$. Un petit calcul montre que, si $\alpha\in\overline{K}$ et $r\in\mathbb{N}$, alors $t^{(\alpha)}\in B_{\mathrm{Sen},r}$ si et seulement si $\alpha\in\mathfrak{a}_r$. On en déduit que $\mathcal{B}_{K,r}=\mathcal{B}_K\cap B_{\mathrm{Sen},r}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}_K$ qui lorsqu'on les écrit sous la forme ci-dessus vérifient $\lambda_{\alpha,j}=0$ si $\alpha\notin\mathfrak{a}_r$. C'est l'algèbre affine du quotient $\mathbb{S}_{K,\mathfrak{a}_r}$ de $\mathbb{S}_K$ et on a $\mathbb{S}_K=\varprojlim_{r\in\mathbb{N}}\mathbb{S}_{K,r}$.

Si $b=\sum\lambda_{\alpha,j}t^{(\alpha)}(\log t)^j\in\mathcal{B}_{K,r}$, on voit que pour tout $h\in G_{K,r}$,

$$\begin{aligned}h(b)&=\sum h(\lambda_{\alpha,j})\exp(h(\alpha)\log\chi(h))t^{(h(\alpha))}(\log\chi(h)+\log t)^j\\&=\sum\lambda_{h(\alpha),j}\exp(h(\alpha)\log\chi(h))t^{(h(\alpha))}(\log\chi(h)+\log t)^j\\&=\sum\lambda_{\alpha,j}\exp(\alpha\log\chi(h))t^{(\alpha)}(\log\chi(h)+\log t)^j\in\mathcal{B}_{K,r}.\end{aligned}$$

En outre, $h(b)=b$ si $b\in H_K$, ce qui fait que $G_{K,r}$ agit sur $\mathcal{B}_{K,r}$ via son quotient Γ_r.

Pour tout $r\in\mathbb{N}$, $C\otimes_K\mathcal{B}_{K,r}$ s'identifie à la sous-C-algèbre de $B_{\mathrm{Sen},r}$ dont une base sur C est formée des $t^{(\alpha)}(\log t)^j$, avec $\alpha\in\mathfrak{a}_r$ et $j\in\mathbb{N}$.

Soit alors W une C-représentation de G_K. On a $\mathcal{B}_{K,r}\otimes_K W=(C\otimes_K\mathcal{B}_{K,r})\otimes_C W\subset B_{\mathrm{Sen},r}\otimes_C W$, pour tout $r\in\mathbb{N}$ et $\mathcal{B}_K\otimes_K W=(C\otimes_K\mathcal{B}_K)\otimes_C W\subset B_{\mathrm{Sen}}\otimes_C W$. En outre $\mathbb{S}_K$ opère sur $\mathcal{B}_K\otimes_K W$ (avec des conventions évidentes, $\sigma(b\otimes w)=\sigma(b)\otimes w$) ; comme cette action est K_∞-linéaire, cela définit en fait une action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$. Chaque $\mathcal{B}_{K,r}\otimes W$ est stable par $\mathbb{S}_{K_\infty}$ qui opère via son quotient $\mathbb{S}_{K_\infty,\mathfrak{a}_r}$.

Proposition 2.10. — *Soit W une C-représentation de G_K.*

i) Pour tout $r\in\mathbb{N}$, l'inclusion

$$(\mathcal{B}_{K,r}\otimes_K W)^{G_{K,r}}\subset D_{\mathrm{Sen},r}(W)$$

déduite de l'inclusion de $\mathcal{B}_{K,r}\otimes_K W$ dans $B_{\mathrm{Sen},r}\otimes_C W$ est une égalité.

*ii) Le K_∞-espace vectoriel $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ est alors un sous-K_∞-espace vectoriel de $\mathcal{B}_K \otimes_K W$ stable par $\mathbb{S}_{K_\infty}$; l'action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$ sur $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ que l'on obtient ainsi coïncide avec celle qui est définie (*prop. 2.9*) par l'endomorphisme $s_{W,\infty}$.*

Démonstration. — Le fait que tout élément de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ soit de la forme $\exp(-\log t)s_{W,f}))(x)$ avec $x \in \Delta_{\mathrm{Sen}}(W) \subset W$ (prop. 2.7) implique que

$$D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) \subset C[(t^{(\alpha)}]_{\alpha\in\overline{K}}[\log t] \otimes_C W = (C \otimes_K \mathcal{B}_K) \otimes_C W = \mathcal{B}_K \otimes_K W.$$

L'assertion (i) résulte alors de ce que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $B_{\mathrm{Sen},r} \cap (C \otimes_K \mathcal{B}_K) = C \otimes_K \mathcal{B}_{K,r}$.

L'assertion (ii) est alors une conséquence immédiate de ce que l'action de $\mathbb{S}_K$ sur $\mathcal{B}_K$ correspond à l'application K-linéaire de $\mathcal{B}_K$ dans lui-même qui est la restriction à $\mathcal{B}_K$ de la dérivation $s = -\partial/\partial \log t$ (*cf.* plus haut). □

2.6. Classification des C-représentations. — Soit W une C-représentation de G_K. On appelle *poids de Sen de W* l'ensemble des valeurs propres de $s_{W,\infty}$ (ou de $s_{W,f}$, ou de s_W, cela revient au même) dans $\overline{K}$. Le fait que le polynôme caractéristique de $s_{W,\infty}$ soit à coefficients dans K signifie que cet ensemble est stable par G_K.

Soit X une partie de $\overline{K}$ stable par G_K. On dit qu'une C-représentation W de G_K est *de type S_X* si ses poids de Sen sont dans X. On dit que W est *de type S_X^m* si en outre $s_{W,\infty}$ est semi-simple.

Lorsque X est un sous-groupe de G_K, dire qu'une C-représentation W de G_K est de type S_X (resp. de type S_X^m) revient à dire que $\mathbb{S}_{K_\infty}$ agit sur $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ à travers son quotient $\mathbb{S}_{K_\infty,X}$ (resp. $\mathbb{S}^m_{K_\infty,X}$).

L'énoncé suivant est évident :

Proposition 2.11. — *Soit X un sous-groupe de $\overline{K}$ stable par G_K. La sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{C,X}(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}^m_{C,X}(G_K)$) de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ dont les objets sont les C-représentations de G_K qui sont de type S_X (resp. de type S_X^m) est une sous-catégorie tannakienne.*

La catégorie $\mathrm{Rep}_{C,X}(G_K)$ est stable par extension et $\mathrm{Rep}^m_{C,X}(G_K)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{C,X}(G_K)$ dont les objets sont ceux qui sont semi-simples.

Soient $r \in \mathbb{N}$ et X un sous-groupe de $\mathfrak{a}_r$ stable par G_K. On a $\mathcal{B}^m_{K,X} \subset \mathcal{B}_{K,X} \subset B_{\mathrm{Sen},r}$. Si l'on pose $B^m_X = C \otimes_K \mathcal{B}^m_{K,X}$ et $B_X = C \otimes_K \mathcal{B}_{K,X}$, on a

$$B^m_X = \oplus_{\alpha\in X} C t^{(\alpha)} \text{ et } B_X = B^m_X[\log t].$$

On a $(B^m_X)^{G_{K,r}} = (B_X)^{G_{K,r}} = K_r$. Pour toute C-représentation W de G_K, les K_r-espace vectoriels

$$D_{X,r}(W) = (\mathcal{B}_{K,X} \otimes_K W)^{G_{K,r}} = (B_X \otimes_C W)^{G_{K,r}}$$
$$\text{et} \quad D^m_{X,r}(W) = (\mathcal{B}^m_{K,X} \otimes_K W)^{G_{K,r}} = (B^m_X \otimes_C W)^{G_{K,r}}$$

sont de dimension finie inférieure ou égale à la dimension de W sur C. Les applications évidentes

$$\rho_{X,r}(W) : B_X \otimes_{K_r} D_{X,r}(W) \longrightarrow B_X \otimes_C W$$
$$\text{et} \quad \rho^m_{X,r}(W) : B^m_X \otimes_{K_r} D^m_{X,r}(W) \longrightarrow B^m_X \otimes_C W$$

sont injectives. La représentation W est de type S_X (resp. de type S^m_X) si et seulement si $\dim_{K_r} D_{X,r}(W)$ (resp. $\dim_{K_r} D^m_{X,r}(W)$) $= \dim_C W$, ce qui se produit si et seulement si $\rho_{X,r}(W)$ (resp. $\rho^m_{X,r}(W)$) est bijective.

Il est maintenant facile de donner une classification complète à isomorphisme près des C-représentations de G_K.

Pour tout entier $d \geqslant 1$, notons $\mathbb{Z}_p(0;d)$ le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\mathcal{B}_{K,\{0\}}$ formé des polynômes en $\log t$ de degré $< d$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Il est libre de rang d et stable par G_K.

Les représentations à poids de Sen 0, ou encore de type $S_{\{0\}}$, correspondent aux représentations de $\mathbb{G}_a$. On voit donc qu'à isomorphisme près, il y a un et un seul indécomposable de poids 0 de dimension d sur C qui est $C^K(0;d) = C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$.

Notons $\mathcal{C}(\overline{K})$ l'ensemble des classes de conjugaison de $\overline{K}$ (*i.e.* des orbites de $\overline{K}$ sous l'action de G_K).

Pour tout objet indécomposable de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$, il existe un unique $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ tel que cet objet est de type S_A.

Soient W un objet simple de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ et A l'unique classe de conjugaison de $\overline{K}$ telle que W est de type S_A. Alors, pour tout entier $d \geqslant 1$, $W \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$ est un objet indécomposable de type S_A. Inversement une C-représentation W' de G_K est un indécomposable de type S_A si et seulement s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ (nécessairement unique) tel que $W' \simeq W \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$ et alors W' est simple si et seulement si $d = 1$.

Pour obtenir une classification complète des C-représentations de G_K, il suffit donc de rechercher, pour tout $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ si oui ou non il existe un objet simple de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ de type S_A. Nous allons voir que la réponse est toujours oui en construisant effectivement un tel objet.

Mais auparavant, commençons par un préliminaire sur les algèbres simples centrales.

Soient F un corps commutatif, E un sous-corps de F, E^s une clôture séparable de E, $G_E = \mathrm{Gal}(E^s/E)$, $\eta : G_E \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un homomorphisme continu et $b \in F$ un élément non nul. A ces données nous allons associer une F-algèbre $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$.

Notons E' le sous-corps de E^s formé des éléments fixés par le noyau de η, N le degré de l'extension cyclique E'/E et σ le générateur de $\mathrm{Gal}(E'/E)$ tel que, si $\widehat{\sigma}$ est un relèvement de η dans G_E, alors $\eta(\widehat{\sigma}) = 1/N \bmod \mathbb{Z}$.

On note alors $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$ la $E' \otimes_E F$-algèbre associative et unitaire (mais non commutative si $N > 1$) engendrée par un élément c soumis aux relations

$$c^N = 1 \otimes b \text{ et } c(u \otimes x) = (\sigma(u) \otimes x)c \text{ si } u \in E' \text{ et } x \in F.$$

Proposition 2.12. — *L'algèbre $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$ est une algèbre simple centrale de centre F et de dimension N^2 sur son centre. Toute extension F' de F telle qu'il existe un E-plongement de E' dans F' neutralise $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$.*

Démonstration. — Il est clair que c'est une algèbre contenant F dans son centre et de rang N^2 sur son centre. Il suffit donc de montrer que s'il existe un E-plongement ι de E' dans F, alors on peut fabriquer un homomorphisme (de F-algèbres) de $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$ dans l'anneau $M_N(F)$ des matrices carrées à N-lignes et N-colonnes à coefficients dans F. Si l'on utilise ι pour identifier E' à un sous-corps de F, on voit qu'il suffit d'envoyer c sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et, pour tout $u \in E$ et $x \in F$, $u \otimes x$ sur la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \sigma^{N-1}(u)x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{N-2}(u)x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma(u)x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ux \end{pmatrix}$$

□

L'algèbre $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$ s'identifie donc à une algèbre de matrices carrées à coefficients dans un corps gauche et nous notons $D_{E,F}(\eta, b)$ ce corps gauche. Notons (η, b) la classe d'isomorphisme de $D_{E,F}(\eta, b)$ dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$ de F. Le choix d'une clôture séparable F^s de F et d'un E-plongement de E^s dans F^s définissent un homomorphisme continu $\nu : G_F = \mathrm{Gal}(F^s/F) \to G_E$. Notons $\delta\eta \in H^2(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ l'image de $\eta \in H^1(G_E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ par le cobord correspondant à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

et $\nu^*(\delta\eta)$ son image dans $H^2(G_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. On vérifie facilement que $(\eta, b) = b \cdot \nu^*(\delta\eta)$, cup-produit de $b \in H^0(G_F, (F^s)^*)$ avec $\nu^*(\delta\eta)$. Dans le cas particulier où $E = F$, on retrouve le symbole local usuel (*cf.* [**CL**], chap. XIV, § 1). Le cas général s'y ramène puisque $(\eta, b) = (\nu^*(\eta), b) = (\eta \circ \nu, b)$. Dans le cas où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on sait donc calculer l'invariant du corps gauche $D_{E,F}(\eta, b)$ (*loc.cit*, prop. 3).

Soit alors $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$. Posons $P_A = \prod_{\alpha\in A}(X-\alpha) \in K[X]$. C'est aussi le polynôme minimal de n'importe quel élément de A sur K. Notons K_A le corps $K[X]/(P(X))$ et β l'image de X dans F. Notons aussi d_A le nombre d'éléments de A. C'est aussi le degré de P_A et celui de l'extension K_A/K. Notons enfin $r_A \in \mathbb{N}$ le plus petit entier r tel qu'un élément quelconque $\alpha \in A$ soit dans $\mathfrak{a}_r$. Si l'on note encore v_p la valuation p-adique sur K_A c'est le plus petit entier r tel que $v_p(\beta \log\chi(\gamma)) > \frac{1}{p-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_r$. Ceci permet de définir un homomorphisme continu $\rho_A : \Gamma_{r_A} \to K_A^*$ en posant

$$\rho_A(\gamma) = \exp(\beta \log\chi(\gamma)),$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_A}$. On note $M[A]$ le K_A-espace vectoriel de dimension 1 qui est K_A lui-même, muni de l'action linéaire et continue de Γ_{r_A} définie par le caractère ρ_A. On note $N[A]$ la représentation K_A-linéaire de Γ induite. On a donc $N[A] = K_A[\Gamma] \otimes_{K_A[\Gamma_{r_A}]} M[A]$. C'est un K_A-espace vectoriel de dimension p^{r_A}, puisque, si γ_0 est un générateur topologique de Γ, les $\gamma_0^i \otimes 1$, pour $0 \leqslant i < p^{r_A}$ forment une base de $N[A]$ sur K_A. On note $N_\infty[A] = K_\infty \otimes_K N[A]$ la K_∞-représentation de Γ déduite de $N[A]$ par l'extension des scalaires $K \to K_\infty$. On choisit un sous-objet simple de $N_\infty[A]$ dans $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)$ et on le note $K_\infty[A]$. On note $C[A] = C \otimes_{K_\infty} K_\infty[A]$ la C-représentation de G_K déduite par extension des scalaires.

Proposition 2.13. — *Choisissons un générateur topologique γ_0 de Γ et soit $\eta : G_K \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'unique caractère qui se factorise à travers Γ et envoie γ_0 sur $1/p^{r_A}$ mod $\mathbb{Z}$. Posons $b = \rho_A(\gamma_0^{p^{r_A}})$. La K_A-algèbre $E_A = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(N_\infty[A])$ s'identifie à $\Lambda_{K,K_A}(\eta,b)$. Le corps gauche $D_A = D_{K,K_A}(\eta,b)$ est de rang p^{2s_A} sur son centre K_A, où s_A est un entier qui vérifie $0 \leqslant s_A \leqslant r_A$. On a $\dim_{K_\infty}(K_\infty[A]) = \dim_C C[A] = d_A.p^{s_A}$. En outre $C[A]$ est un objet simple de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ de type S_A et on a $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty[A]) = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C[A]) = D_A$.*

Démonstration. — Posons $M_\infty[A] = K_\infty \otimes_K M[A]$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, posons aussi $M_s[A] = K_s \otimes_K M[A]$ et $N_s[A] = K_s \otimes_K N[A]$.

Avec des conventions évidentes, on a des inclusions

$$\begin{array}{ccccc} M[A] & \subset & M_s[A] & \subset & M_\infty[A] \\ \cap & & \cap & & \cap \\ N[A] & \subset & N_s[A] & \subset & N_\infty[A] \end{array}$$

Posons $r = r_A$. Pour tout entier $s \geqslant r$, $\gamma_s = \gamma_0^{p^s}$ est un générateur topologique de Γ_s qui agit sur $M[A]$ par multiplication par $b^{p^{s-r}} = \exp(\beta \log\chi(\gamma_0^{p^s}))$. L'anneau des K-endomorphismes de $M[A]$ qui commutent à l'action de Γ_s s'identifie à l'anneau des K-endomorphismes f de K_A tels que $f(b^{p^{s-r}}x) = b^{p^{s-r}}f(x)$ pour tout $x \in K_A$. Mais on a $K_A = K(\beta) = K(b^{p^{s-r}})$ puisque $\beta = \log(b^{p^{s-r}})/\log(\chi(\gamma_0^{p^s}))$. Comme K_A est une sous-K-algèbre commutative maximale de l'anneau des K-endomorphismes de K_A, l'injection naturelle de K_A dans $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_K(\Gamma_s)}(M[A])$ est un isomorphisme.

Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ une base de K_A, vu comme anneau des endomorphismes Γ_s-équivariants du K-espace vectoriel $M[A]$, sur K. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_r)}(M_\infty[A])$. Il existe un entier s que l'on peut supposer $\geqslant r$ tel que $f(M[A]) \subset M_s[A]$. Comme f est K_s-linéaire, on a aussi $f(M_s[A]) \subset M_s[A]$ et la restriction f_s de f à $M_s[A]$ est un K_s-endomorphisme Γ_r-équivariant de $M_s[A]$. Comme Γ_s opère trivialement sur K_s, l'anneau $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_s}(\Gamma_s)}(M_s[A])$ s'identifie à $K_s \otimes_K \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_K(\Gamma_s)}(M[A]) = K_s \otimes_K K_A$ et il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in K_s$ tels que $f_s = \sum \lambda_i \otimes e_i$. En écrivant que f_s commute à l'action de γ_r, on voit que l'on doit avoir $\gamma_r(\lambda_i) = \lambda_i$ pour tout i, *i.e.* que $\lambda_i \in K_r$. il en résulte que l'anneau $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_r)}(M_\infty(A))$ s'identifie à $K_r \otimes_K K_A$.

L'application de E_A dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_r)}(M_\infty[A], N_\infty[A])$ qui à f associe sa restriction φ à $M_\infty[A]$ est bijective (tout élément de $N_\infty[A]$ s'écrit, d'une manière et d'une seule sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p^r-1} \gamma_0^i(x_i)$, avec les $x_i \in M_\infty[A]$ et on a $f(x) = \sum \gamma_0^i(\varphi(x_i)))$. Par ailleurs, il existe un unique $c \in E_A$ tel que $c(x) = \gamma_0(x)$ pour tout $x \in M[A]$ (on a $c(\lambda x) = \lambda c(x) = \lambda\gamma_0(x)$ si $\lambda \in K_\infty$ et $x \in M[A]$). Il est alors immédiat que tout $f \in E_A$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{i=0}^{p^r-1} c^i f_i$ où la restriction de f_i à $M_\infty[A]$ est un endomorphisme de $M_\infty[A]$, donc un élément de $K_r \otimes_K K_A$. Par conséquent E_A est une $K_r \otimes_K K_A$-algèbre engendrée par un élément c dont on vérifie immédiatement qu'il satisfait les relations $c^{p^r} = b$ et $c(u \otimes x) = (\gamma_0(u) \otimes x)c$. D'où $E_A = \Lambda_{K,K_A}(\eta, b)$. Le reste de la proposition est alors évident. □

Le résultat suivant est alors clair :

Théorème 2.14. — *Soit W une C-représentation de G_K.*

i) Pour que W soit simple, il faut et il suffit qu'il existe $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ tel que $W \simeq C[A]$; alors W est de type S_A^m et de dimension $d_A p^{s_A}$ sur C.

ii) Pour que W soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il existe $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $W \simeq C[A;d] = C[A] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$; alors W est de type S_A et de dimension $d.d_A p^{s_A}$ sur C.

iii) Il existe des entiers naturels $(h_{A,d}(W))_{A\in\mathcal{C}(\overline{K}),d\in\mathbb{N}^*}$ presque tous nuls, uniquement déterminés, tels que

$$W \simeq \oplus_{A\in\mathcal{C}(\overline{K}),d\in\mathbb{N}^*} C[A;d]^{h_{A,d}(W)}.$$

Remarques

(1) On a aussi le même énoncé en remplaçant les C-représentations de G_K par les *K_∞-représentations de* Γ, à condition de remplacer $C[A]$ par $K_\infty[A]$ et $C[A;d]$ par $K_\infty[A;d] = K_\infty[A] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$.

(2) Lorsque k est algébriquement clos, tous les corps gauches considérés sont commutatifs et on peut construire une $\otimes$-équivalence (non canonique) entre $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ et la catégorie des représentations linéaires de dimension finie du groupe pro-algébrique $\mathbb{S}_K$.

Lorsque k est fini au contraire, les corps gauches considérés ne sont pas tous commutatifs et, en tant que catégorie tannakienne sur K, la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ n'est pas neutre.

(3) On a vu que, pour qu'un objet (Y,s) de la catégorie $\mathcal{S}_{K_\infty}$ soit dans l'image essentielle du foncteur Δ_{Sen}, il est nécessaire que le polynôme caractéristique de s soit à coefficients dans K. Ce qui précède montre

i) que, lorsque k est algébriquement clos, c'est aussi suffisant ;

ii) alors que, lorsque k est fini, cela ne l'est pas. Par exemple, si $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ et si (Y,s) est un objet de $\mathcal{S}_{K_\infty}$ tel que le polynôme caractéristique de s est P_A, on voit que, si $h \in \mathbb{N}$, pour que $(Y,s)^h$ soit dans l'image essentielle de $\mathcal{S}_{K_\infty}$, il faut et il suffit que h soit divisible par p^{s_A}.

Rappelons que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, $C(0;d) = C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d) = C[\{0\};d]$.

Proposition 2.15

i) Pour tout entier $d \geqslant 1$, on a $H^0(G_K, C(0;d)) = K$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d))$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe de l'extension

$$0 \longrightarrow C(0;d) \longrightarrow C(0;d+1) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

où l'application $C(0;d+1) \to C$ est celle qui envoie $\sum_{j=0}^{d} c_j (\log t)^j$ sur c_d.

ii) Pour toute C-représentation W de G_K, on a

$$\dim_K H^0(G_K, W) = \dim_K H^1(G_K, W) = \sum_{d \in \mathbb{N}^*} h_{\{0\},d}(W).$$

Démonstration. — On a $K \subset C(0;d)^{G_K} \subset (B_{\{0\}})^{G_K} = K$, donc $C(0;d)^{G_K} = K$. Toute extension de $C = C(0;1)$ par $C(0;d)$ est un C-espace vectoriel de dimension $d+1$ qui n'a que 0 comme poids de Sen et qui contient un sous-objet isomorphe à $C(0;d)$. A isomorphisme près, il n'y en a que deux : le premier $C(0;d) \oplus C(0;1)$ correspond à une extension de $C = C(0;1)$ par $C(0;d)$ qui est scindée tandis que le second $C(0;d+1)$ est aussi une extension de C par $C(0;d)$, mais n'est pas scindée puisque $C(0;d+1)$ est indécomposable. L'assertion (i) en résulte.

Si W est une C-représentation de G_K qui n'a pas 0 comme poids de Sen, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C,W) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C,W) = 0$. Toute C-représentation W de G_K se décompose de manière unique sous la forme $W = W_0 \oplus W'$, où W_0 n'a que 0 comme poids de Sen, tandis que W' n'a pas 0 come poids de Sen. Pour $i = 0, 1$, on a donc $H^i_{\mathrm{cont}}(C,W) = H^i_{\mathrm{cont}}(C,W_0)$. Comme $W_0 \simeq \oplus_{d \in \mathbb{N}^*} C(0;d)^{h_{\{0\},d}(W)}$, l'assertion (ii) résulte de (i). □

Remarque. — Plus généralement, le calcul des K-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(W_1, W_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(W_1, W_2)$$

pour W_1 et W_2 des C-représentations de G_K est très facile : on peut

– soit se ramener par décomposition en somme directe au cas où W_1 et W_2 sot tous deux indécomposables et faire alors un calcul direct,

– soit remarquer que l'on a vu au début de ce paragraphe que, si $W = W_1^* \otimes_C W_2$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(W_1, W_2) = H^0(G_K, W)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(W_1, W_2) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, W)$, ce qui nous ramène à la proposition ci-dessus.

2.7. C-représentations presque de Hodge-Tate. — On dit qu'une C-représentation W de G_K est *déployée sur* K si tous ses poids de Sen sont dans K, *i.e.* si elle est de type S_K. Evoquons un cas particulier de la notion de représentation déployée sur K.

Notons $\mathfrak{a}_0^K = \mathfrak{a}_0 \cap K$ l'idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_K$ formé des éléments dont la valuation p-adique est $> -r_K + \frac{1}{p-1}$. Parmi les représentations déployées, les représentations de type $S_{\mathfrak{a}_0^K}$ sont particulièrement agréables : tout objet simple de type $S_{\mathfrak{a}_0^K}$ est de dimension 1 sur C et l'anneau de ses endomorphismes est réduit à K.

Parmi ces représentations, il y a celles qui sont de type $S_{\mathbb{Z}}$ et en particulier celles qui sont de type $S_{\mathbb{Z}}^m$. Ces dernières s'appellent d'habitude les *C-représentations de Hodge-Tate*. On pose $B_{\mathrm{HT}} = B_{\mathbb{Z}}^m$ et, pour toute C-représentation W de G_K, $D_{\mathrm{HT}}(W) = D_{0,\mathbb{Z}}^m(W) = (B_{\mathrm{HT}} \otimes_C W)^{G_K}$.

De même, nous appelons *C-représentations presque de Hodge-Tate* les C-représentations qui sont de type $S_{\mathbb{Z}}$. On pose $B_{p\mathrm{HT}} = B_{\mathbb{Z}}$ et, pour toute C-représentation W, $D_{p\mathrm{HT}}(W) = D_{0,\mathbb{Z}}(W) = (B_{p\mathrm{HT}} \otimes_C W)^{G_K}$.

Pour toute C-représentation W de G_K, $D_{\mathrm{HT}}(W)$ (resp. $D_{p\mathrm{HT}}(W)$ est un K-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de W sur C et on a l'égalité si et seulement si W est de Hodge-Tate (resp. presque de Hodge-Tate).

On a $B_{\mathrm{HT}} = C[t^{(1)}, 1/t^{(1)}]$, algèbre des polynômes de Laurent en l'indéterminée $t^{(1)}$. Remarquons que se donner t générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ revient à se donner une suite $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité dans $\overline{K}$, avec $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ pour tout n. Si $p \neq 2$, notons π_t l'unique uniformisante de $\mathbb{Q}_p(\varepsilon^{(1)})$ telle que $(\pi_t)^{p-1} + p = 0$ et $v_p(\varepsilon^{(1)} - 1 - \pi_t) = 2/(p-1)$. Si $p = 2$, posons $\pi_t = 2\varepsilon^{(2)}$. L'application de $\mathbb{Z}_p(1) = \mathbb{Z}_p t$ qui envoie λt sur $\lambda\pi_t t^{(1)}$ est injective. Elle commute à l'action de G_K et nous l'utilisons pour identifier $\mathbb{Z}_p(1)$ à un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\overline{K}t^{(1)} \subset Ct^{(1)} \subset B_{\mathrm{HT}}$. Il n'est pas difficile de voir que cette identification ne dépend pas du choix de t (ce qui a un sens puisque $B_{p\mathrm{HT}}$ est en fait un sous-anneau de $B_{\mathrm{Sen},0}$ dont la construction ne dépend pas du choix de t). On voit que l'on a aussi

$$B_{\mathrm{HT}} = C[t, 1/t] \text{ et } B_{p\mathrm{HT}} = B_{\mathrm{HT}}[\log t].$$

Remarque. — Pour tout $g \in G_K$, on a $gt = \chi(g)t$, alors que $gt^{(1)} = \exp(\log\chi(g))t^{(1)}$. C'est pourquoi, lorsque le corps K ne contient pas les racines $2p$-ièmes de l'unité, l'application $\mathbb{Z}_p$-linéaire qui envoie t sur $t^{(1)}$ ne commute pas à l'action de G_K.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}_p(i)$, la puissance symétrique i-ième du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbb{Z}_p(1)$ et $\mathbb{Z}_p(-i)$ son $\mathbb{Z}_p$-dual. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p(i)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1 de base t^i. Pour tout $\mathbb{Z}_p$-module M et tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $M(i) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i)$ (c'est le « i-ième tordu à la Tate de M »). Si $x \in M$ et $u \in \mathbb{Z}_p(i)$, on pose $xu = x \otimes u \in M(i)$. L'application $x \mapsto xt^i$ est une bijection $\mathbb{Z}_p$-linéaire de M sur $M(i)$ qui, en général, dépend du choix de t.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le groupe G_K opère sur $\mathbb{Z}_p(i)$: on a $gu = \chi^i(g)u$, pour tout $g \in G_K$ et tout $u \in \mathbb{Z}_p(i)$. Si M est un $\mathbb{Z}_p$-module topologique muni d'une action linéaire et continue de G_K, G_K opère aussi linéairement et continûment sur chaque $M(i)$: on a $g(xt^i) = \chi^i(g)g(x)t^i$, pour tout $g \in G_K$ et tout $x \in M$.

L'identification de $t \in \mathbb{Z}_p(1)$ à $\pi_t t^{(1)}$ permet, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, d'identifier $C(i) = Ct^i$ à $Ct^{(i)}$. L'application $ct^{(i)} \mapsto c$ est alors un isomorphisme (non canonique, mais G_K-équivariant) de $C(i)$ sur $C[\{i\}]$. De même, pour tout entier d strictement positif, $C[\{i\};d]$ est isomorphe, non canoniquement, à $C(i;d) = C(i) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$. Une C-représentation de G_K est presque de Hodge-Tate si et seulement si elle est isomorphe à une somme directe d'un certain nombre de $C(i;d)$ pour des entiers i et d convenables.

Une C-représentation W de G_K est de Hodge-Tate si et seulement si elle est semi-simple et ses poids de Sen sont dans $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, ses poids de Sen s'appellent aussi *les poids de Hodge-Tate de* W ; il existe des entiers naturels $h_i(W)$ presque tous nuls, uniquement déterminés tels que $W \simeq \oplus_{i\in\mathbb{Z}} C(i)^{h_i(W)}$ (avec les notations du théorème 2.14, on a $h_i(W) = h_{\{i\},1}(W)$). L'entier $h_i(W)$ s'appelle *la multiplicité de i comme poids de Hodge-Tate dans W*.

3. B_{dR}-représentations

3.1. Le corps B_{dR} des périodes p-adiques. — Pour tout anneau A et tout entier $m \geqslant 1$, on note $W_m(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A. Pour tout $a \in A$, on note $[a] = (a, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ le représentant de Teichmüller de a dans $W(A)$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'application $w_n : W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathcal{O}_{\overline{K}}$ qui envoie $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ sur $\sum_{i=0}^{n} p^i a_i^{p^{n-i}}$ est un homomorphisme d'anneaux. Le noyau de l'application composée de w_n avec la projection de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$ contient l'idéal de $W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ des éléments de la forme $(pb_0, pb_1, \dots, pb_{n-1}, a_n)$, avec $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Comme cet idéal est le noyau de la projection naturelle de $W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ sur $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$, on en déduit, par passage aux quotients, un homomorphisme d'anneaux

$$\theta^{(n)} : W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}.$$

Notons $f_n : W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$ l'homomorphisme d'anneaux qui est le composé de la projection naturelle avec le Frobenius (*i.e.* l'application qui envoie

$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ sur $(x_0^p, x_1^p, \dots, x_{n-1}^p)$. Le carré

$$\begin{array}{ccc} W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^{n+1}\mathcal{O}_{\overline{K}} \\ \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow \\ W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \xrightarrow[\theta_n]{} & \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}} \end{array}$$

est commutatif. Comme $\mathcal{O}_C = \varprojlim \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$, par passage à la limite, on en déduit un homomorphisme d'anneaux $\theta : \varprojlim_{f_n} W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathcal{O}_C$.

Notons alors R l'anneau qui est la limite projective, indexée par $\mathbb{N}$, des $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$, les applications de transition étant données par le Frobenius (un élément x de R est donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $(x_{n+1})^p = x_n$ pour tout n).

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R$. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, choisissons un relèvement $\widehat{x}_m$ de x_m dans $\mathcal{O}_C$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\widehat{x}_{n+m}^{p^m})_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite $x^{(n)}$ indépendante du choix des relèvements et on a $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On obtient ainsi une application de R dans l'ensemble des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n. On vérifie facilement que cette application est bijective et nous l'utilisons pour identifier R à l'ensemble de ces suites. Si $x, y \in R$, on a $(x+y)^{(n)} = lim_{m\mapsto+\infty}(x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $(xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$.

Le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$ est une clôture algébrique de k. Pour tout $a \in \overline{k}$, on a $[a] \in W(\overline{k}) \subset \mathcal{O}_C$. L'application de $\overline{k}$ dans R, qui envoie a sur $([a^{p^{-n}}])_{n\in\mathbb{N}}$ identifie $\overline{k}$ à un sous-corps de R.

Pour tout $x \in R$, posons $v_R(x) = v_p(x^{(0)})$. Alors v_R est une valuation sur R et R est un anneau de valuation complet, de corps résiduel $\overline{k}$. L'anneau R est parfait. Il n'est pas difficile de montrer que son corps des fractions est algébriquement clos.

Soit $x \in W(R)$. On peut écrire $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, avec pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in R$. On peut donc écrire indifféremment $x_m = (x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec les $x_{m,n} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $(x_{m,n+1})^p = x_{m,n}$ pour tout n, ou $x_m = (x_m^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec les $x_m^{(n)} \in \mathcal{O}_C$ vérifiant $(x_m^{(n+1)})^p = x_m^{(n)}$ pour tout n (alors $x_{m,n}$ est l'image de $x_m^{(n)}$ dans $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$).

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'application de $W(R)$ dans $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui envoie $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ sur $(x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n-1,n})$ est un homomorphisme d'anneaux. Par passage à la limite, il induit un homomorphisme de $W(R)$ sur $\varprojlim_{f_n} W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui est en fait un isomorphisme ; nous utilisons ce dernier pour identifier ces deux anneaux. L'application $\theta : W(R) \to \mathcal{O}_C$ peut s'écrire

$$\theta(x_0, x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)};$$

c'est un homomorphisme de $W(\overline{k})$-algèbre. Comme C est algébriquement clos, l'application de R dans $\mathcal{O}_C$ qui envoie x sur $x^{(0)}$ est surjective. A fortiori l'application θ est surjective.

En utilisant la surjectivité de l'application $x \mapsto x^{(0)}$ de R dans $\mathcal{O}_C$ et le fait que $W(R)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, on vérifie facilement que le noyau de θ est un idéal principal : si $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \ker \theta$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) le noyau de θ est engendré par a,

(ii) on a $v_R(a_0) = 1$,

(iii) on a $v_R(a_1) = 0$.

Choisissons un élément $\pi \in R$ tel que $\pi^{(0)} = p$; alors $\xi = [\pi] - p$ engendre le noyau de θ.

On note $P_0 = W(\overline{k})[1/p]$ le corps des fractions de $W(\overline{k})$. L'anneau $W(R)$, sous-anneau de l'anneau de valuation discrète $W(\operatorname{Frac} R)$, est un anneau intègre et s'identifie en particulier à un sous-anneau de $W(R)[1/p]$. L'application θ induit un homomorphisme surjectif de P_0-algèbres, encore noté θ, de W(R)[1/p] sur C. On note B_{dR}^+ le séparé complété de $W(R)[1/p]$ pour la topologie $\ker \theta$-adique. Il est facile de vérifier que $W(R)[1/p]$ est séparé pour cette topologie et ceci nous permet d'identifier $W(R)[1/p]$ à un sous-anneau de B_{dR}^+. Comme $W(R)[1/p]$ est intègre et le noyau de θ un idéal principal, B_{dR}^+ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C. On note B_{dR} son corps des fractions. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $\operatorname{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}$ l'idéal (fractionnaire si $i < 0$) qui est la puissance i-ième de l'idéal maximal de B_{dR}^+. En particulier, $\operatorname{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}^+$.

Par fonctorialité le groupe G_K opère sur R, $W(R)$, B_{dR}^+ et B_{dR}. Bien qu'il existe des sections de la projection de B_{dR}^+ sur C, projection que nous notons encore θ, on peut montrer qu'il n'en n'existe pas qui commute à l'action de G_K. Toutefois, notons $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P_0 dans C ; c'est un corps algébriquement clos contenant $\overline{K}$ (et égal à $\overline{K}$ si k est algébriquement clos). Comme $\overline{P}$ est réunion de ses sous-P_0-algèbres étales, il existe une unique application $s : \overline{P} \to B_{\mathrm{dR}}^+$ telle que $\theta \circ s = \mathrm{id}_{\overline{P}}$. Elle est donc G_K-équivariante et nous l'utilisons pour identifier $\overline{P}$ à un sous-corps de B_{dR}.

On a noté $\mathbb{Z}_p(1)$ le module de Tate du groupe multiplicatif, désignons par $\mathbb{Z}_p(1)^*$ le même module, mais noté multiplicativement. On voit que $\mathbb{Z}_p(1)^*$ s'identifie au sous-groupe du groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau R formé des $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $x^{(0)} = 1$. On a choisi (§ 2.3) un générateur t de $\mathbb{Z}_p(1)$; il correspond à un élément $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_p(1)^\times$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_p(\varepsilon^{(n)}) = 1/p^{n-1}(p-1)$, donc $v_R(\varepsilon - 1) = p(p-1)$.

On a $[\varepsilon] \in W(R) \subset B_{\mathrm{dR}}^+$ et $\theta([\varepsilon] - 1) = 0$, donc $[\varepsilon] - 1 \in \operatorname{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$. Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}([\varepsilon] - 1)^n/n$ converge, dans B_{dR}^+ vers un élément $\log[\varepsilon]$.

Proposition 3.1. — *L'élément* $\log[\varepsilon]$ *est une uniformisante de* B_{dR}^+.

Démonstration. — Il est clair que $\log[\varepsilon] \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$. Comme $\log[\varepsilon] \equiv [\varepsilon] - 1 \bmod \mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}}$, il s'agit de prouver que $[\varepsilon] - 1 \notin \mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}}$. Comme $[\varepsilon] - 1 \in W(R)$ et comme $\mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}} \cap W(R)$ est l'idéal engendré par $\xi^2 = ([\pi] - p)^2$, il faut vérifier que $[\varepsilon] - 1 \notin \xi^2 W(R)$.

Supposons d'abord $p \neq 2$. Si ce n'était pas le cas, il existerait

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \in W(R)$$

tel que $[\varepsilon] - 1 = a\xi^2$. Si $[\varepsilon] - 1 = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$, on aurait $\varepsilon_0 = a_0\pi^2$, ce qui contredit le fait que $v_R(\varepsilon - 1) = p/(p-1) < 2 = v_R(\pi^2)$.

Si maintenant $p = 2$, soit $x \in R$ tel que $x^2 = \varepsilon$. On a $x^{(0)} = -1$, et on peut écrire $[x] + 1 = \xi\eta$, avec $\eta \in W(R)$. Si $[x] + 1 = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, on a $x_0 = x + 1$ et $x_0^{(0)} = \lim_{n \mapsto +\infty} (x^{(n)} + 1)^{2^n} = \lim_{n \mapsto +\infty} (\varepsilon^{(n+1)} + 1)^{2^n}$ donc $v_R(x_0) = 1$, d'où l'on déduit que η est une unité de $W(R)$. On a alors

$$[\varepsilon] - 1 = [x]^2 - 1 = ([x] + 1)([x] - 1) = \xi\eta(\xi\eta - 2) \equiv -2\eta\xi \bmod \xi^2 W(R)$$

qui n'est pas nul puisque 2 n'est pas dans le noyau de θ. □

Ceci nous permet en particulier d'identifier $\mathbb{Z}_p(1)$ au sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$ engendré par $\log[\varepsilon]$, *i.e.* de poser $t = \log[\varepsilon]$, ce que nous ferons dans la suite ; on voit que cette identification est indépendante du choix du générateur t de $\mathbb{Z}_p(1)$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a donc $\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}^+ t^i = B_{\mathrm{dR}}^+(i)$, tandis que $\mathrm{gr}^i B_{\mathrm{dR}} = \mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} / \mathrm{Fil}^{i+1} B_{\mathrm{dR}}$ s'identifie à $C(i)$. En particulier, l'anneau gradué associé à l'anneau filtré B_{dR} s'identifie à $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} C(i) = B_{\mathrm{HT}}$.

3.2. La topologie de B_{dR}. — Rappelons qu' *un espace de Banach p-adique* est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel normé complet. Nous appelons *Banach p-adique* tout $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V dont la topologie est celle d'un espace de Banach p-adique. Nous appelons *réseau* de V tout sous $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{V}$ de V qui est la boule unité pour l'une des normes équivalentes de V. Se donner un couple $(V, \mathcal{V})$ formé d'un Banach p-adique et d'un réseau revient à se donner un $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{V}$ séparé et complet pour la topologie p-adique et sans p-torsion ; on a alors $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}$ avec la topologie correspondante (*i.e.* les $p^n\mathcal{V}$, pour $n \in \mathbb{N}$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans $\mathcal{V}$ et dans V). Si $\mathcal{V}$ est un réseau de V, pour qu'un sous-$\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{V}'$ de V soit un réseau, il faut et il suffit qu'il existe $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $p^s\mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \subset p^r\mathcal{V}$.

Nous appelons *algèbre de Banach* p-adique la donnée d'une $\mathbb{Q}_p$-algèbre topologique dont la topologie est celle d'un Banach p-adique et qui admet un réseau qui est un sous-anneau.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on pose $B_r = B_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^r B_{\mathrm{dR}}$, de sorte que $B_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim_{r \in \mathbb{N}} B_r$. On voit que B_r s'identifie au quotient de $W(R)[1/p]$ par l'idéal engendré par ξ^r. C'est de façon naturelle une algèbre de Banach p-adique avec l'image de $W(R)$ comme réseau. La projection de B_{r+1} sur B_r est continue. On appelle *topologie naturelle sur* B_{dR}^+ la topologie de la limite projective des B_r, avec la topologie de Banach p-adique sur

chaque B_r. Elle est moins fine que la topologie d'anneau de valuation discrète (qui est la topologie de la limite projective, avec la topologie discrète sur chaque B_r).

Sauf mention explicite du contraire, tout B_{dR}^+-module de type fini est muni de la topologie définie par la topologie naturelle sur B_{dR}^+. On a $B_{\mathrm{dR}} = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_{\mathrm{dR}}^+(-i)$ et on définit la *topologie naturelle sur* B_{dR} comme étant la topologie de la limite inductive.

Notons $\widehat{B}_{\mathrm{HT}}^+ = C[[t]]$ l'anneau des séries formelles en t à coefficients dans C et $\widehat{B}_{\mathrm{HT}} = C((t))$ son corps des fractions (qui s'identifie au complété de B_{HT} pour la topologie définie par la valuation t-adique). Les corps $\widehat{B}_{\mathrm{HT}}^+$ et B_{dR} ne sont pas isomorphes mais ont des propriétés très voisines. Ce sont les deux seuls de leur espèce. De façon précise, on a le résultat suivant :

Proposition 3.2. — *Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach p-adique munie d'une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire et continue de G_K. On suppose qu'il existe un entier $r \geqslant 1$, un élément $u \in \mathcal{B}$, un homomorphisme d'anneaux $\theta_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to C$ qui est G_K-équivariant et un sous-anneau $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ qui est un réseau tel que u est un générateur du noyau de $\theta_{\mathcal{B}}$, $\theta_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}_C$, $g(u) = \chi(g)u$, pour tout $g \in G_K$, $u^r \neq 0$ et $u^{r+1} = 0$. Alors :*

– ou bien, il existe un homomorphisme d'anneaux continu

$$s : C[t]/(t^{r+1}) \longrightarrow \mathcal{B}$$

tel que $s(t) = u$ et $\theta_{\mathcal{B}}(s(c)) = c$ pour tout $c \in C$;

– ou bien non, et alors il existe un homomorphisme d'anneaux continu

$$s : B_r \longrightarrow \mathcal{B}$$

tel que $\theta_{\mathcal{B}}(s(c)) = c$ pour tout $c \in C$.

Dans les deux cas, l'application s est unique, G_K équivariante et est un homéomorphisme.

Par passage à la limite, cette proposition implique que, *si $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre topologique, munie d'une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire et continue de G_K, d'un homomorphisme G_K-équivariant, $\theta : \mathcal{B} \to C$, contenant un élément u non nilpotent vérifiant $g(u) = \chi(g)u$, pour tout $g \in G_K$, telle que*

– d'une part, $\mathcal{B}$ est séparé et complet pour la topologie u-adique,

– d'autre part, pour tout $r \geqslant 1$, $u^r\mathcal{B}$ est fermé et $\mathcal{B}/u^r\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach p-adique admettant un réseau qui est un sous-anneau qui se projette surjectivement sur $\mathcal{O}_C$,

alors $\mathcal{B}$ s'identifie soit à $\widehat{B}_{\mathrm{HT}}^+ = C[[t]]$ soit à B_{dR}^+ et ces deux possibilités s'excluent mutuellement (attention que dans le premier cas, l'identification est faite en décidant d'envoyer u sur t, alors que dans le second cas, il existe $\lambda \in K$, non nul tel que u s'envoie sur λt, mais on ne peux pas choisir λ).

Prouvons la proposition 3.2. — Commençons par remarquer qu'il existe un unique homomorphisme d'anneaux continu $\rho : W(R) \to \mathcal{A}$ tel que $\theta_{\mathcal{B}} \circ \rho = \theta$. En effet, si $\theta_{\mathcal{A}}$ désigne la restriction de $\theta_{\mathcal{B}}$ à $\mathcal{A}$, le noyau de $\theta_{\mathcal{A}}$ est un idéal nilpotent et on en déduit

que, si $I = \operatorname{Ker}\theta_{\mathcal{A}} + p\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est séparé et complet pour la topologie I-adique. Il en résulte que, si $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R$ et si $\widehat{x}_n$ désigne un relèvement de $x^{(n)}$ dans $\mathcal{A}$, alors

– d'une part la suite des $\widehat{x}_n^{p^n}$ converge dans $\mathcal{A}$ vers un élément $\nu(x)$ indépendant des choix des relèvements,

– d'autre part, on doit avoir $\rho([x]) = \nu(x)$, pour tout $x \in R$.

Pour tout $(x_0, x_1, \dots, x_m, \dots) \in W(R)$, on doit donc avoir

$$\rho((x_0, x_1, \dots, x_m, \dots)) = \sum_{n=0}^{\infty} p^m \nu((x_m)^{p^{-m}}),$$

ce qui montre l'unicité de ρ et on vérifie facilement que l'application ainsi définie convient. Remarquons aussi que l'application ρ est G_K-équivariante.

Posons $J = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$. Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant r$, J^n/J^{n+1} est un C-espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'image $\overline{u}^n$ de u^n qui est isomorphe, en tant que C-représentation de G_K à $C(n)$. En revanche, si $n > r$, on a $J^{n+1} = J^n$.

(i) Supposons d'abord qu'il existe une section continue $s_0 : C \to \mathcal{B}$ de la projection $\theta_{\mathcal{B}}$. Si l'on pose $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} + s_0(\mathcal{O}_C)$, c'est un sous-anneau de $\mathcal{B}$ qui est encore un réseau et s'envoie surjectivement sur $\mathcal{O}_C$. L'unicité de ρ reste vraie si l'on remplace $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_1$ et on doit donc avoir $\rho = s_0 \circ \theta$. Ceci montre que l'on doit avoir $\operatorname{Ker}\rho = \operatorname{Ker}\theta$ et que s_0 est nécessairement l'application induite par ρ par passage au quotient (en particulier, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$). Il existe alors une unique façon de prolonger l'homomorphisme s_0 en un homomorphisme, que nous notons encore s_0, de $C[t]/t^{r+1}$ dans $\mathcal{B}$, tel que $s_0(t) = u$. Il est clair que, si s existe, on doit avoir $s = s_0$. On voit aussi que s_0 est un isomorphisme d'anneaux G_K-équivariant et il reste à prouver que c'est un homéomorphisme, ce qui revient à vérifier que $\mathcal{A}' = s_0(\mathcal{O}_C[t]/t^{r+1})$ est un réseau de $\mathcal{B}$, *i.e.* qu'il existe $c, c' \in \mathbb{Z}$ tels que $p^{c'}\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset p^c\mathcal{A}'$.

Mais on a $\mathcal{A}' = s_0(\mathcal{O}_C)[u]$. Comme $u^{r+1} = 0$, si b est un entier tel que $p^b u \in \mathcal{A}$, on a $p^{br}\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ et on peut prendre $c' = br$. Inversement, pour $1 \leqslant n \leqslant r$, l'image I_n de $\mathcal{A} \cap J^n$ dans J^n/J^{n+1} est un sous-$\mathcal{O}_C$-module non nul, séparé pour la topologie p-adique. Ceci implique, que, si l'on pose $\mathfrak{a}_n = \{\lambda \in C \mid \lambda\overline{u}^n \in I_n\}$, il existe un nombre rationnel a_n tel que, ou bien $\mathfrak{a}_n = \{\lambda \in C \mid v_p(\lambda) \geqslant a_n\}$ ou bien $\mathfrak{a}_n = \{\lambda \in C \mid v_p(\lambda) > a_n\}$. En particulier, il existe $b_n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n \subset p^{-b_n}\mathcal{O}_C \cdot \overline{u}^n$.

On va en déduire, par récurrence décroissante sur n que pour $0 \leqslant n \leqslant r$, il existe un entier c_n tel que $\mathcal{A} \cap J^n \subset p^{-c_n}\mathcal{A}'$ (il suffira donc de prendre $c = -c_0$). Cela est vrai pour $r = n$ avec $s_r = c_r$. Supposons donc $n < r$. Soit $x \in \mathcal{A} \cap J^n$. On peut écrire $x = p^{-b_n}\lambda u^n + y$, avec $\lambda \in \mathcal{O}_C$ et $y \in J^{n+1}$. On a donc $p^{nb+b_n}x = \lambda(p^b u)^n + p^{nb+b_n}y$ et $p^{nb+b_n}y \in \mathcal{A} \cap J^{n+1} \subset p^{-c_{n+1}}\mathcal{A}$, d'où $p^{nb+b_n}x \in p^{-c_{n+1}}\mathcal{A}$ et il suffit de prendre $c_n = c_{n+1} + nb + b_n$.

(ii) Supposons maintenant qu'il n'existe pas de section continue de $\theta_{\mathcal{B}}$. Si $\xi \in W(R)$ est un générateur du noyau de θ, on a $\rho(\xi) \in \operatorname{Ker}\theta_{\mathcal{B}}$, mais $\rho(\xi) \neq 0$. Remarquons que l'application ρ se prolonge en un homomorphisme de B_r dans $\mathcal{B}$ qui est G_K-équivariant. Mais ρ induit un isomorphisme C-linéaire, G_K-équivariant de

$\mathrm{gr}^1 B_r = C(1)$ sur $C(m)$. On doit donc avoir $m = 1$ et il en résulte immédiatement que ρ induit un isomorphisme d'anneaux $s_0 : B_r \to \mathcal{B}$ qui est G_K-équivariant. Il est clair que si s existe, on a $s = s_0$ et il reste à vérifier que s_0 est un homéomorphisme. Si l'on note $\mathcal{A}'$ l'image de $W(R)$ par ρ, cela revient à prouver que $\mathcal{A}'$ est un réseau de $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, il suffit de prouver qu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A} \subset p^c \mathcal{A}'$, ce qui se fait comme dans le cas (i). □

Pour alléger les notations, notons $\underline{t}$ l'élément de $\mathcal{B}_{K,0} \subset B_{\mathrm{Sen},0}$ noté $t^{(1)}$. Rappelons (§ 2.7) que l'on a identifié t à l'élément $\pi_t \underline{t}$ de $B_{\mathrm{Sen},0}$ (où π_t est un élément bien défini de $\overline{K}$). Inversement on peut identifier $\underline{t}$ à un élément de B_{dR}^+ en posant $\underline{t} = t/\pi_t$. On voit que c'est encore une uniformisante de B_{dR}^+.

Proposition 3.3. — *Posons $L_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}^{H_K}$ et $L_{\mathrm{dR}}^+ = (B_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$. Alors L_{dR}^+ est un sous-anneau fermé de B_{dR}^+ et L_{dR} est son corps des fractions. L'anneau L_{dR}^+ est aussi un anneau de valuation discrète complet, dont l'idéal maximal est engendré par $\underline{t}$ et dont le corps résiduel est L. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'application naturelle $L_{\mathrm{dR}}^+ \to B_r^{H_K}$ est surjective.*

Démonstration. — Il est clair que $\underline{t} \in L_{\mathrm{dR}}^+$. On a $B_1 = B_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}} = C$, donc $B_1^{H_K} = C^{H_K} = L$ (th. 1.1). Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow C(r) \longrightarrow B_{r+1} \longrightarrow B_r \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow C(r)^{H_K} \longrightarrow B_{r+1}^{H_K} \longrightarrow B_r^{H_K} \longrightarrow 0$$

puisque $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, C(r)) = 0$ (cor. 2.3). Le reste de la proposition est alors évident. □

Proposition 3.4. — *On a $(L_{\mathrm{dR}}^+)^\Gamma = (B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_K} = (L_{\mathrm{dR}})^\Gamma = (B_{\mathrm{dR}})^{G_K} = K$.*

Démonstration. — On a $K \subset (B_{\mathrm{dR}}^+)^{G_K} \subset (B_{\mathrm{dR}})^{G_K}$ et il suffit de vérifier que $(B_{\mathrm{dR}})^{G_K} \subset K$, ce qui, comme $\mathrm{gr}\, B_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{HT}} = B_{\mathbb{Z}}$ résulte immédiatement de ce que $(B_{\mathbb{Z}})^{G_K} = D_{\mathrm{HT}}(C) = K$ (§ 2.7). □

3.3. Étude des B_{dR}^+-représentations : réduction aux $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations

Si B est un anneau topologique (commutatif) muni d'une action continue (compatible avec la structure d'anneau) d'un groupe topologique J, on appelle *B-représentation de J* la donnée d'un B-module de type fini muni d'une action semi-linéaire continue de J. Avec comme morphismes les applications B-linéaires J-équivariantes, ces représentations forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{Rep}_B(J)$.

Remarquons que l'anneau $K_\infty[[\underline{t}]]$ des séries formelles en $\underline{t}$ à coefficients dans K_∞ s'identifie à un sous-anneau de L_{dR}^+ stable par Γ. Nous allons nous intéresser

ici aux B_{dR}^+-représentations de G_K, aux L_{dR}^+-représentations de Γ et aux $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations de Γ.

Remarquons qu'une C-représentation de G_K n'est autre qu'une B_{dR}^+-représentation de G_K annulée par $\underline{t}$; de même une L-représentation (resp. une K_∞-représentation) de Γ n'est autre qu'une L_{dR}^+-représentation (resp. une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation) de Γ annulée par $\underline{t}$.

Si X est une L_{dR}^+-représentation de Γ, $B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{L_{\mathrm{dR}}^+} X$ est une B_{dR}^+-représentation de G_K. SI Y est une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ, $L_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} Y$ est une L_{dR}^+-représentation de Γ. On obtient ainsi des foncteurs

$$\mathrm{Rep}_{L_{\mathrm{dR}}^+}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}^+}(G_K) \text{ et } \mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{L_{\mathrm{dR}}^+}(\Gamma).$$

Comme dans le cas tué par $\underline{t}$, ce sont des équivalences de catégories. Cela résulte des deux théorèmes qui suivent :

Théorème 3.5. — *Soit W une B_{dR}^+-représentation de H_K. L'application B_{dR}^+-linéaire*

$$B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{L_{\mathrm{dR}}^+} W^{H_K} \longrightarrow W$$

déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de W^{H_K} dans W est bijective.

Démonstration. — En écrivant $W = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} W/\underline{t}^r W$, on se ramène à prouver le théorème pour W de longueur finie sur B_{dR}^+, donc a fortiori de longueur finie en tant que B_{dR}^+-représentation de G_K. On va prouver en même temps que $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W) = 0$ et procéder par récurrence sur cette dernière longueur. Si celle-ci est 1, W est tué par $\underline{t}$ et les deux assertions sont vraies (th. 2.2 et cor. 2.3). Sinon, on peut trouver une suite exacte courte non triviale de B_{dR}^+-représentations de G_K

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W'' \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse de récurrence $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W')$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W'')$ sont nuls et $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W)$ l'est donc aussi. La nullité de $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W')$ implique aussi que la suite

$$0 \longrightarrow (W')^{H_K} \longrightarrow W^{H_K} \longrightarrow (W'')^{H_K} \longrightarrow 0$$

est exacte. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{L_{\mathrm{dR}}^+} (W')^{H_K} & \longrightarrow & B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{L_{\mathrm{dR}}^+} W^{H_K} & \longrightarrow & B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{L_{\mathrm{dR}}^+} (W'')^{H_K} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Par hypothèse de récurrence, les flèches verticales de droite et de gauche sont des isomorphismes ; donc celle du milieu aussi. □

Théorème 3.6. — *Soit X une L_{dR}^+-représentation de Γ.*

– Si X est de longueur finie sur L_{dR}^+, soit X_f la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de X stables par Γ ;

– *sinon, soit* $X_f = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}}(X/\underline{t}^r X)_f$.

Alors, i) X_f *est aussi la réunion des sous-*$K_\infty[[\underline{t}]]$*-modules de type fini de* X *stables par* Γ*,*

ii) l'application L^+_{dR}*-linéaire*

$$\rho_f(X) : L^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} X_f \longrightarrow X$$

déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de X_f *dans* X *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de prouver (ii) pour les représentations de longueur finie.

Soient X' et X'' deux L^+_{dR}-représentations de Γ. On note $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$ (resp. $\mathrm{Ext}^1_{L^+_{\mathrm{dR}}}(X'', X')$) le groupe des classes d'extensions de X'' par X' dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{L^+_{\mathrm{dR}}}(\Gamma)$ (resp. dans la catégorie des L^+_{dR}-modules). Le noyau $\mathrm{Ext}^1_0(X'', X')$ de l'application naturelle de $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$ dans $\mathrm{Ext}^1_{L^+_{\mathrm{dR}}}(X'', X')$ classifie les extensions de X'' par X' qui sont scindées en tant qu'extensions de L^+_{dR}-modules.

Disons que X est de type f si $\rho_f(X)$ est bijective. C'est le cas si X est tué par $\underline{t}$ (th. 2.4). Par récurrence sur la longueur, on en déduit que $\rho_f(X)$ est toujours injective et que $\dim_{K_\infty} X_f \leqslant \lg_{L^+_{\mathrm{dR}}} X$ avec égalité si et seulement si X est de type f. On en déduit qu'être de type f est stable par somme directe, sous-objet, quotient.

Il en résulte que, si X' et X'' sont de type f, le sous-ensemble $\mathrm{Ext}^1_f(X'', X')$ de $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$ qui classifie les extensions de X'' par X' qui sont de type f est en fait un sous-groupe. Si $\mathrm{Ext}^1_{0,f}(X'', X') = \mathrm{Ext}^1_0(X'', X') \cap \mathrm{Ext}^1_f(X'', X')$, on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{0,f}(X'', X') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_f(X'', X') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{L^+_{\mathrm{dR}}}(X'', X') \\
 & & \cap & & \cap & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_0(X'', X') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(X'', X') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{L^+_{\mathrm{dR}}}(X'', X')
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

On va montrer que X est de type f par récurrence sur le plus petit entier r tel que X est tué par $\underline{t}^r$. Comme c'est vrai pour $r = 1$, on peut supposer $r \geqslant 2$. Posons alors $X' = \underline{t}^{r-1}X$, $X'' = X/X'$ et $\overline{X} = X/\underline{t}X$. L'hypothèse de récurrence implique que X', X'' et $\overline{X}$ sont de type f et il nous reste à montrer que la classe $[X]$ de X dans $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$ appartient en fait à $\mathrm{Ext}^1_f(X'', X')$.

Si Z est un L^+_{dR}-module de type fini, on appelle *base de* Z la donnée d'éléments non nuls $z_1, z_2, \ldots, z_d$ de Z tels que $Z = \oplus_{i=1}^d L^+_{\mathrm{dR}} z_i$. Comme X'' est de type f, on peut choisir une base $x''_1, x''_2, \ldots, x''_d$ de X'' formée d'éléments de X''_f. Soit γ_0 un générateur topologique de Γ. On voit qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ et une matrice $(a_{ij}) \in GL_h(K_s[[\underline{t}]])$ telle que $\gamma_0(x''_j) = \sum_{i=1}^d a_{ij} x''_i$ (si l'annulateur de x''_i est l'idéal de L^+_{dR} engendré par $\underline{t}^{r_i}$, chaque $a_{i,j}$ n'est défini que mod $\underline{t}^{r_i}$, mais rien ne nous interdit de choisir un relèvement).

Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, on choisit un relèvement x_i de x_i'' dans X ; les x_i forment une base de X. Notons X_0 le L_{dR}^+-module qui est X, muni de l'action semi-linéaire de γ_0 défini par $\gamma_0(x_j) = \sum_{i=1}^d a_{ij}x_i$. Il est clair que cette action s'étend uniquement en une action semi-linéaire continue de Γ sur X_0 qui devient ainsi une L_{dR}^+-représentation de Γ, extension de X'' par X'. On voit que sa classe $[X_0] \in \mathrm{Ext}_f^1(X'', X')$ et que $[X]$ et $[X]_f$ ont même image dans $\mathrm{Ext}^1_{L_{\mathrm{dR}}^+}(X'', X')$. On a donc $[X]-[X_0] \in \mathrm{Ext}_0^1(X'', X')$ et il suffit de vérifier que $\mathrm{Ext}^1_{0,f}(X'', X') = \mathrm{Ext}^1_0(X'', X')$. Mais $\mathrm{Ext}^1_0(X'', X') = \mathrm{Ext}^1_0(\overline{X}, X')$ et $\mathrm{Ext}^1_{0,f}(X'', X') = \mathrm{Ext}^1_{0,f}(\overline{X}, X')$. Comme $\mathrm{Ext}^1_0(\overline{X}, X')$ est le Ext^1 dans la catégorie des L-représentations de Γ, ceci résulte du théorème 2.4.

Prouvons (i) : Soit X_f' la réunion des sous-$K_\infty[[\underline{t}]]$-modules de type fini de X stables par Γ. L'assertion (ii) implique que X_f est de type fini sur $K_\infty[[\underline{t}]]$, donc que $X_f \subset X_f'$. Pour prouver l'inclusion inverse, on peut supposer X de longueur finie. Il s'agit de vérifier que, si Y est un sous-$K_\infty[[\underline{t}]]$-module de type fini de X stable par Γ, alors Y est réunion de ses sous-K-espaces vectoriels de dimension finie stable par Γ. Soient r un entier tel que $\underline{t}^r$ annule X et $y_1, y_2, \ldots, y_h$ des éléments de Y engendrant Y comme $K_\infty[[\underline{t}]]$-module. Si γ_0 est un générateur topologique de Γ, il existe des $a_{i,j,l} \in K_\infty$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant h$ et $0 \leqslant l < r$ tels que $\gamma_0(y_j) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant h, 0 \leqslant l < r} a_{i,j,l}\underline{t}^l y_j$. Soit $s_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que les $a_{i,j,l}$ sont tous dans K_{s_0}. Pour tout entier $s \geqslant s_0$, le sous-$K_s[\underline{t}]/\underline{t}^r$-module de Y engendré par les y_i est stable par γ_0, donc aussi par Γ. Mais chaque Y_s est de dimension finie sur K et Y est la réunion des Y_s, d'où le résultat. □

3.4. Étude des $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations. — Notons $\Omega^+_{K_\infty[[\underline{t}]]/K_\infty}$ le module des *K_∞-différentielles continues logarithmiques de $K_\infty[[\underline{t}]]$*, autrement dit le $K_\infty[[\underline{t}]]$-module libre de rang 1 de base $d\underline{t}/\underline{t}$. Remarquons que cette base ne change pas si l'on remplace $\underline{t}$ par $\lambda\underline{t}$, avec λ un élément non nul de K_∞. Soit Y un $K_\infty[[\underline{t}]]$-module. Se donner une application $\nabla : Y \to Y \otimes \Omega^+_{K_\infty[[\underline{t}]]/K_\infty}$ revient à se donner une application $\nabla_0 : Y \to Y$: il suffit de poser $\nabla y = \nabla_0 y \otimes d\underline{t}/\underline{t}$ pour tout $y \in Y$.

Nous appelons *$K_\infty[[\underline{t}]]$-module à connexion* la donnée d'un $K_\infty[[\underline{t}]]$-module de type fini Y muni d'une connexion, *i.e.* d'une application

$$\nabla : Y \longrightarrow Y \otimes \Omega^+_{K_\infty[[\underline{t}]]/K_\infty}$$

qui est K_∞-linéaire et vérifie la règle de Leibniz. Il revient au même de demander que l'application $\nabla_0 : Y \to Y$ soit additive et vérifie $\nabla_0(\lambda y) = \frac{d\lambda}{d\underline{t}}\underline{t}y + \lambda\nabla_0 y$, pour $\lambda \in K_\infty[[\underline{t}]]$ et $y \in Y$, ou encore que ∇_0 soit K_∞-linéaire continue et vérifie $\nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0(y))$ pour tout $y \in Y$.

Les $K_\infty[[\underline{t}]]$-modules à connexion forment, de manière évidente, une catégorie abélienne K_∞-linéaire que nous notons $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$.

Proposition 3.7. — *Soit Y une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ. Il existe une unique connexion ∇ sur Y qui a la propriété que, pour tout $r \in \mathbb{N}$ s et tout $y \in Y$, il existe*

un sous-groupe ouvert $\Gamma_{r,y}$ *de* Γ *tel que, pour tout* $\gamma \in \Gamma_{r,y}$,

$$\gamma(y) \equiv \exp(\log \chi(\gamma) \cdot \nabla_0)(y) \pmod{\underline{t}^r Y}.$$

Démonstration. — Il est clair que l'on peut supposer que Y est annulé par $\underline{t}^r$ et qu'il s'agit alors de prouver qu'il existe une unique connexion ∇ sur Y telle que, pour tout $y \in Y$, il existe un sous-groupe ouvert Γ_y de Γ tel que, si $\gamma \in \Gamma_y$, alors $\gamma(y) = \exp(\log \chi(\gamma) \cdot \nabla_0)(y)$.

Mais Y est alors un K_∞-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire continue de Γ et, d'après la proposition 2.5, il existe un unique endomorphisme ∇_0 du K_∞-espace vectoriel sous-jacent à Y qui a la propriété requise et il s'agit de vérifier que ∇ est bien une connexion, *i.e.* que, pour tout $y \in Y$, on a $\nabla_o(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0(y))$.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_h$ une *base de* Y, *i.e.* des éléments non nuls de Y tels que $Y = \oplus_{i=1}^h K_\infty[[\underline{t}]]y_i$. Soit γ_0 un générateur topologique de Γ et soit $r \in \mathbb{N}$ tel que les $\gamma_0(y_i)$ sont tous dans le sous-$K_r[[\underline{t}]]$-module Y_r de Y engendré par les y_i. Alors Y_r est stable par l'action de Γ. On voit que Y_r est stable par ∇_0 et que si l'on choisit un $\sigma \in \Gamma$, différent de l'élément neutre mais suffisamment petit, l'action de σ sur Y_r est K_r-linéaire et la série $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}(\sigma - 1)^n/n$ converge vers un endomorphisme f du K_r-espace vectoriel sous-jacent à Y_r qui s'identifie à la restriction à Y_r de $\log \chi(\sigma) \cdot \nabla_0$.

Pour tout $y \in Y_r$, on a $\sigma(\underline{t}y) = \chi(\sigma)\sigma(y)\underline{t}$, donc $\sigma(\underline{t}Y_r) \subset \underline{t}Y_r$. On en déduit que $f(\underline{t}Y_r) \subset \underline{t}Y_r$ et que $f(\underline{t}y) = \underline{t}(\log \chi(\sigma).y + f(y))$, ou encore que

$$\log \chi(\sigma) \cdot \nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(\log \chi(\sigma) y + \log \chi(\sigma) \nabla_0(y))$$

d'où l'égalité cherchée pour $y \in Y_r$ et le cas général s'en déduit par extension des scalaires de K_r à K_∞. □

La correspondance qui à tout $K_\infty[[\underline{t}]]$-module de type fini Y muni d'une action semi-linéaire continue de Γ associe Y muni d'une connexion peut être considérée comme un foncteur additif, K-linéaire, exact et fidèle de la catégorie K-linéaire $\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)$ dans la catégorie K_∞-linéaire $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$. La proposition 2.6 se généralise :

Proposition 3.8. — *Soient* Y_1, Y_2 *deux* $K_\infty[[\underline{t}]]$*-représentations de* Γ.

i) Le K*-espace vectoriel* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2)$ *est de dimension finie inférieure ou égale à* $\dim_{K_\infty} Y_1/\underline{t}Y_1 \times \dim_{K_\infty} Y_2/\underline{t}Y_2$ *et l'application* K_∞*-linéaire naturelle*

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}}(Y_1, Y_2)$$

est un isomorphisme.

ii) Pour que Y_1 *et* Y_2 *soient isomorphes comme* $K_\infty[[\underline{t}]]$*-représentations de* Γ*, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme* $f : Y_1 \to Y_2$ *des* $K_\infty[[\underline{t}]]$*-modules sous-jacents qui est horizontal (i.e. vérifie* $f(\nabla_0 y) = \nabla_0(f(y))$ *pour tout* $y \in Y_1$*).*

Démonstration. — Montrons d'abord (i). Soit Y le $K_\infty[[\underline{t}]]$-module des applications $K_\infty[[\underline{t}]]$-linéaires de Y_1 dans Y_2. Il est muni d'une action naturelle de Γ (en posant

$\gamma(\eta) = \gamma \circ \eta \circ \gamma^{-1}$, pour $\gamma \in \Gamma$ et $\eta \in Y$) et d'une connexion définie par $\nabla(\eta) = \nabla \circ \eta - \eta \circ \nabla$. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}}(Y_1, Y_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(K_\infty[[\underline{t}]], Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}}(K_\infty[[\underline{t}]], Y) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes. On peut donc remplacer Y_1 par $K_\infty[[\underline{t}]]$ et Y_2 par Y. On voit aussi que l'on peut supposer que Y est annulé par une puissance de $\underline{t}$, le cas général s'en déduisant par passage à la limite. Mais $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(K_\infty[[\underline{t}]], Y)$ s'identifie à Y^Γ tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}}(K_\infty[[\underline{t}]], Y)$ s'identifie à $Y_{\nabla=0} = \mathrm{Ker}\,\nabla_0$. Il s'agit donc de prouver que l'application naturelle $\rho : K_\infty \otimes_K Y^\Gamma \to \mathrm{Ker}\,\nabla_0$ est bijective. Mais Y^Γ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty, Y)$ tandis que $\mathrm{Ker}\,\nabla_0$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_{K_\infty}}(K_\infty, Y)$ et c'est l'assertion (i) de la proposition 2.6.

Pour prouver l'inégalité annoncée sur la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2)$, il suffit donc de prouver que $\dim_{K_\infty} Y_{\nabla=0} \leqslant \dim_{K_\infty} Y/\underline{t}Y$, ce qui résulte de ce que l'application $K_\infty[[\underline{t}]]$-linéaire $K_\infty[[\underline{t}]] \otimes_{K_\infty} Y_{\nabla=0} \to Y$ est injective.

Pour prouver (ii), il suffit d'adapter la preuve de l'assertion (ii) de la proposition 2.6 (*i.e.* du lemme 2.7) : La condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $\{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ (resp. $\{z_1, z_2, \ldots, z_{h'}\}$ une base de Y_1 (resp. Y_2) sur $K_\infty[[\underline{t}]]$ et soit $f : Y_1 \to Y_2$ un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$. Le fait que f existe implique déjà que $h' = h$ et qu'une application $K_\infty[[\underline{t}]]$-linéaire de Y_1 dans Y_2 est un isomorphisme si et seulement si sa réduction modulo $\underline{t}$ est injective. Soit $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2)$ sur K. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, il existe une matrice carrée $A_j = (a^j_{rs})_{1 \leqslant r,s \leqslant h}$ (pas uniquement déterminée si Y_1 et Y_2 ne sont pas libres) tels que $f_j(y_s) = \sum_{r=1}^h a^j_{rs} z_r$. Soient

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \det(X_1 A_1 + X_2 A_2 + \cdots + X_n A_n) \in K_\infty[[\underline{t}]][X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

et $\overline{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ son image dans $K_\infty[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K_\infty$ tels que $f = \sum \lambda_j f_j$, ce qui implique que $\overline{P}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ n'est pas nul. Comme le corps K est infini, il existe donc $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in K$ tels que $\overline{P}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \neq 0$, ce qui signifie que la réduction modulo $\underline{t}$ de l'application $f' = \sum \mu_j f_j$, qui est un homomorphisme dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)$, est un isomorphisme. Il en est de même de f'. □

Soit W une B^+_{dR}-représentation de G_K. Alors W^{H_K} est une L^+_{dR}-représentation de Γ et $(W^{H_K})_f$ est une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ. Notons $\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ l'objet de $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$ formé du $K_\infty[[\underline{t}]]$-module sous-jacent à $(W^{H_K})_f$, muni de la connexion ∇ définie par la proposition 3.7. On peut considérer Δ^+_{dR} comme un foncteur de la catégorie

$\mathrm{Rep}_{B^+_{\mathrm{dR}}}(G_K)$ dans $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$. Ce foncteur est exact et fidèle et la proposition précédente montre que la connaissance de $\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ détermine W à isomorphisme près.

Remarquons aussi qu'une C-représentation W de G_K n'est autre qu'une B^+_{dR}-représentation tuée par $\underline{t}$, de même qu'un objet de la catégorie $\mathcal{S}_{K_\infty}$ n'est autre qu'un objet de $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$ tué par $\underline{t}$. Pour toute C-représentation W de G_K, $\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ s'identifie à $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$.

Remarques

(1) Ce que l'on a fait dans le paragraphe précédent pour étudier les B^+_{dR}-représentations de G_K fonctionne exactement de la même façon lorsque l'on remplace B^+_{dR} par l'anneau $\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}} = C[[t]]$:

Posons $\widehat{L}^+_{\mathrm{HT}} = (\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}})^{H_K}$. On a $\widehat{L}^+_{\mathrm{HT}} = L[[\underline{t}]]$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application naturelle $\widehat{L}^+_{\mathrm{HT}} \to (\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}}/t^r\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}})^{H_K}$ est surjective, de noyau engendré par $\underline{t}^r$.

Pour toute $\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}}$-représentation W de H_K, l'application évidente

$$\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}} \otimes_{\widehat{L}^+_{\mathrm{HT}}} W^{H_K} \longrightarrow W$$

est un isomorphisme.

Soit X une $\widehat{L}^+_{\mathrm{HT}}$-représentation de G_K. Si X est de longueur finie, notons X_f la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de X stable par G_K ; sinon, posons $X_f = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}}(X/\underline{t}^r X)_f$. Dans tous les cas, l'application évidente

$$\widehat{L}^+_{\mathrm{HT}} \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} X_f \longrightarrow X$$

est un isomorphisme.

On dispose alors d'un foncteur $\Delta^+_{\mathrm{HT}} : \mathrm{Rep}_{\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}}}(G_K) \to \mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$. C'est celui qui à W associe $(W^{H_K})_f$ muni de la connexion ∇ définie par la proposition 3.7 et, pour toute $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation W de G_K, $\Delta^+_{\mathrm{HT}}(W)$ détermine W à isomorphisme près.

(2) Soit alors W une B^+_{dR}-représentation de G_K. Elle est munie d'une filtration naturelle, indexée par $\mathbb{N}$, par des sous-objets dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{B^+_{\mathrm{dR}}}(G_K)$ obtenue en posant $\mathrm{Fil}^r W = \underline{t}^r W$. Alors $\mathrm{gr}\, W = \prod_{r=0}^{\infty} \mathrm{Fil}^r W/\,\mathrm{Fil}^{r+1} W$ est de façon naturelle une $\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}}$-représentation de G_K.

La filtration sur W en induit une sur $\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ et

$$\mathrm{gr}\,\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W) = \prod_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{Fil}^r \Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)/\,\mathrm{Fil}^{r+1}\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$$

est encore un $K_\infty[[\underline{t}]]$-module de type fini. La formule $\nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0(y))$ montre que $\nabla_0(\mathrm{Fil}^r(\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)) \subset \Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$, pour tout $r \in \mathbb{N}$. Ceci permet de définir une application $\mathrm{gr}\,\nabla_0 : \mathrm{gr}\,\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ sur $\mathrm{gr}\,\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ d'où une connexion $\mathrm{gr}\,\nabla$ sur ce module (en posant $\mathrm{gr}\,\nabla(y) = \mathrm{gr}\,\nabla_0 \otimes d\underline{t}/\underline{t}$). On voit que $\Delta^+_{\mathrm{HT}}(\mathrm{gr}(W))$ s'identifie à $\mathrm{gr}\,\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ muni de la connexion $\mathrm{gr}\,\nabla$.

(3) Il n'est pas difficile de voir que, si W est comme ci-dessus, les $K_\infty[[\underline{t}]]$-modules à connexion $\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ et $\Delta^+_{\mathrm{HT}}(\mathrm{gr}(W)) = \mathrm{gr}\,\Delta^+_{\mathrm{dR}}(W)$ ne sont pas en général isomorphes.

On remarquera aussi que ce dernier module à connexion a une structure naturelle de $K_\infty[[\underline{t}]]$-module gradué et que la connexion $\operatorname{gr}\nabla$ respecte cette graduation (*i.e.*, si on note Y ce module, on a $\operatorname{gr}\nabla_0(\operatorname{gr}^r Y) \subset \operatorname{gr}^r Y$, pour tout $r \in \mathbb{N}$.

3.5. Étude des B_{dR}-représentations : Première approche. — Un *réseau* d'un B_{dR}-espace vectoriel W de dimension finie est un sous-B_{dR}^+-module de type fini qui contient une base de W sur B_{dR}.

Si W est une B_{dR}-représentation de H_K (resp. G_K) et si $\mathcal{W}$ est un réseau de W, la continuité de l'action de H_K (resp. G_K) sur W implique qu'il existe un sous-groupe ouvert U de H_K (resp. G_K) tel que $g(w) \in \mathcal{W}$, pour tout $g \in U$ et $w \in \mathcal{W}$; par conséquent $\sum_{g\in H_K} g(\mathcal{W})$ (resp. $\sum_{g\in G_K} g(\mathcal{W})$) est encore un réseau de W.

Ceci montre que toute B_{dR}-représentation W de H_K (resp. G_K) admet un réseau stable par G_K.

De la même façon, et avec une définition évidente, on voit que toute L_{dR}-représentation de Γ admet un réseau stable par Γ.

Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate des théorèmes 3.5 et 3.6 :

Théorème 3.9

i) Soit W une B_{dR}-représentation de H_K. L'application B_{dR}-linéaire

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{L_{\mathrm{dR}}} W^{H_K} \longrightarrow W$$

déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de W^{H_K} dans W est un isomorphisme.

ii) Soit X une L_{dR}-représentation de Γ. Soit X_f la réunion des sous-$K_\infty[[\underline{t}]]$-modules de type fini de X stables par Γ. C'est un sous-$K_\infty((\underline{t}))$-espace vectoriel de X de dimension finie et l'application naturelle

$$L_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_\infty((\underline{t}))} X_f \longrightarrow X$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, on a des $\otimes$-équivalences de catégories

i) entre $\operatorname{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(H_K)$ et la catégorie des L_{dR}-espaces vectoriels de dimension finie,

ii) entre $\operatorname{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$, $\operatorname{Rep}_{L_{\mathrm{dR}}}(\Gamma)$ et $\operatorname{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)$.

Soit E un corps de caractéristique 0. On considère le corps $E((\underline{t}))$ des séries formelles à coefficients dans E en l'indéterminée $\underline{t}$. Un *réseau* d'un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel Y de dimension finie est un sous-$E[[\underline{t}]]$-module de type fini contenant une base de Y sur $E((\underline{t}))$.

On note $\Omega_{E((\underline{t}))/E}$ le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel solution du problème universel pour les E-dérivations continues de $E((\underline{t}))$. C'est un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension 1 de base $d\underline{t}/\underline{t}$. Le sous-$E[[\underline{t}]]$-module $\Omega^+_{E((\underline{t}))/E}$ de $\Omega_{E((\underline{t}))/E}$ de base $d\underline{t}/\underline{t}$ est un réseau de $\Omega_{E((\underline{t}))/E}$ qui ne dépend pas du choix de l'uniformisante $\underline{t}$ de $E((\underline{t}))$.

Soit Y un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie. Rappelons qu'une *connexion* sur Y est une application E-linéaire $\nabla : Y \to Y \otimes_{E((\underline{t}))} \Omega_{E((\underline{t}))/E}$ vérifiant $\nabla(\lambda y) = y \otimes d\lambda + \lambda\nabla(y)$ pour $\lambda \in E((\underline{t}))$ et $y \in Y$. Se donner une application $\nabla : Y \to Y \otimes \Omega_{E((\underline{t}))/E}$, revient à se donner l'application $\nabla_0 : Y \to Y$ caractérisée par $\nabla(y) = \nabla_0(y) \otimes d\underline{t}/\underline{t}$, pour tout $y \in Y$. Dire que ∇ est une connexion revient à dire que ∇_0 est une application additive vérifiant $\nabla_0(\lambda y) = \frac{d\lambda}{d\underline{t}}\underline{t}y + \lambda\nabla_0 y$ si $\lambda \in E((\underline{t}))$ et $y \in Y$, ou encore est une application E-linéaire continue vérifiant $\nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0 y)$, pour tout $y \in \mathbb{N}$.

Un *module à connexion sur* $E((\underline{t}))$ est un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une connexion.

Si Y est un module à connexion sur $E((\underline{t}))$, un *réseau régulier* $\mathcal{Y}$ de Y est un réseau de Y tel que $\nabla(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y} \otimes \Omega^+_{E((\underline{t}))/E}$, ce qui revient à dire que $\nabla_0(Y) \subset Y$. On dit que la connexion ∇ est *régulière* s'il existe un réseau régulier.

Les modules à connexion régulière forment une catégorie abélienne E-linéaire. Elle possède un objet-unité qui est $E((\underline{t}))$ avec $\nabla = d$. On peut définir le produit tensoriel de deux modules à connexions régulières Y_1 et Y_2 : le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel sous-jacent est $Y_1 \otimes_{E((\underline{t}))} Y_2$ et $\nabla(y_1 \otimes y_2) = y_1 \otimes \nabla y_2 + \nabla y_1 \otimes y_2$. On peut aussi définir le dual d'un module Y à connexion régulière : le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel sous-jacent est le dual Y^* de Y et on a $\nabla\eta = d \circ \eta - (\eta \otimes \mathrm{id}_{\Omega_{E((\underline{t}))/E}}) \circ \nabla$. Avec ces structures supplémentaires, cette catégorie est une catégorie tannakienne sur E que nous notons $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$.

Si Y est un objet de $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ et si $\mathcal{Y}$ est un réseau régulier de Y, $\mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y}$ est un E-espace vectoriel de dimension égale à la dimension de Y sur $E((\underline{t}))$; si $y \in \mathcal{Y}$, et si $\nabla_0 y = z$, l'image $\overline{z}$ de z dans $\mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y}$ ne dépend que de l'image $\overline{y}$ de y dans $\mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y}$ et ne dépend pas du choix de l'uniformisante $\underline{t}$. L'application

$$\mathrm{res}_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y},$$

qui à $\overline{y}$ associe $\overline{z}$, est un endomorphisme du E-espace vectoriel $\mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y}$ que l'on appelle le *résidu* de ∇ relativement au réseau régulier $\mathcal{Y}$.

Une *section horizontale* de Y est un élément $y \in Y$ tel que $\nabla y = 0$.

L'application naturelle $E((\underline{t})) \otimes_E Y_{\nabla=0} \to Y$ est toujours injective et on dit que ∇ est *triviale* si elle est bijective, ce qui revient à dire que $\dim_E Y_{\nabla=0} = \dim_{E((\underline{t}))} Y$.

Il résulte de la classification des modules à connexion régulière sur $E((\underline{t}))$ lorsque E est algébriquement clos [**Ma65**] que la connexion ∇ est triviale si et seulement s'il existe un réseau régulier, relativement auquel le résidu de la connexion est nulle ; ce réseau est alors uniquement déterminé : c'est le réseau engendré par les sections horizontales.

La proposition 3.7 implique immédiatement le résultat suivant :

Proposition 3.10. — *Soit Y une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ. Il existe une unique connexion régulière ∇ sur Y qui a la propriété que, pour tout réseau régulier $\mathcal{Y}$ de Y,*

tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathcal{Y}$, il existe un sous-groupe ouvert $\Gamma_{\mathcal{Y},r,y}$ de Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{Y},r,y}$,

$$\gamma(y) \equiv \exp(\log \chi(\gamma) \cdot \nabla_0)(y) \pmod{\underline{t}^r \mathcal{Y}}.$$

Le $K_\infty((\underline{t}))$-espace vectoriel sous-jacent à une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ est donc muni d'une connexion régulière et la proposition 3.8 entraîne le résultat suivant :

Proposition 3.11. — *Soient Y_1, Y_2 deux $K_\infty((\underline{t}))$-représentations de Γ.*

i) L'application K_∞-linéaire naturelle

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}}(Y_1, Y_2)$$

est un isomorphisme.

ii) Pour que Y_1 et Y_2 soient isomorphes comme $K_\infty((\underline{t}))$-représentations de Γ, il faut et il suffit qu'elles le soient en tant qu'objets de $\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$.

Soit W une B_{dR}-représentation de G_K. Alors W^{H_K} est une L_{dR}-représentation de Γ et $(W^{H_K})_f$ est une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ. Notons $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ l'objet de $\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$ formé du $K_\infty((\underline{t}))$-espace vectoriel sous-jacent à $(W^{H_K})_f$, muni de la connexion régulière ∇ définie par la proposition 3.10. On peut considérer Δ_{dR} comme un foncteur de la catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}^+}(G_K)$ dans $\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$. L'énoncé suivant est évident :

Théorème 3.12. — *Le foncteur*

$$\Delta_{\mathrm{dR}} : \mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K) \longrightarrow \mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$$

est un $\otimes$-foncteur exact et fidèle.

Si W_1 et W_2 sont deux B_{dR}-représentations de G_K, l'application naturelle

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(W_1, W_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}}(\Delta_{\mathrm{dR}}(W_1), \Delta_{\mathrm{dR}}(W_2))$$

est un isomorphisme.

Si W est une B_{dR}-représentation de G_K, la connaissance de $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ détermine W à isomorphisme près. En particulier, W est triviale si et seulement si $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ l'est.

Remarque. — Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, notons $\Delta_{\mathrm{dR},f}(W)$ la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de W^{H_K} stables par Γ. C'est aussi la réunion des sous-K_∞-espaces vectoriels de dimension finie de $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ stables par ∇_0. On verra au § 3.8 que $\Delta_{\mathrm{dR},f}(W)$ est un $K_\infty[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module libre de rang h et que l'application naturelle $K_\infty((\underline{t})) \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{\mathrm{dR},f}(W) \to \Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ est un isomorphisme.

3.6. Étude des B_{dR}-représentations : deuxième approche. — Reprenons les notations des § 2.4 à 2.6. Si $r \in \mathbb{N}$ et si X est un sous-groupe de $\mathfrak{a}_r$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$, les K-algèbres $\mathcal{B}_{K,X}$ et B_{dR} contiennent toutes deux la K-algèbre $\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}} = K[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$ avec la même action de $G_{K,r}$. Posons aussi $B_{\mathrm{dR},X} = B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} \mathcal{B}_{K,X}$. Pour toute B_{dR}-représentation de G_K, on pose

$$D_{\mathrm{dR},X,r}(W) = (\mathcal{B}_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} W)^{G_{K,r}} = (B_{\mathrm{dR},X} \otimes_{B_{\mathrm{dR}}} W)^{G_{K,r}}.$$

Théorème 3.13. — *Soient $r \in \mathbb{N}$ et X un sous-groupe de $\mathfrak{a}_r$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$. Soit W une B_{dR}-représentation de G_K. L'application évidente*

$$\rho_{\mathrm{dR},X,r}(W) : B_{\mathrm{dR},X} \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},X,r}(W) \longrightarrow \mathcal{B}_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} W$$

est injective et $D_{\mathrm{dR},X,r}(W)$ est un K_r-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de W sur B_{dR}.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) on a $\dim_{K_r} D_{\mathrm{dR},X,r}(W) = \dim_{B_{\mathrm{dR}}} W$

ii) l'application $\rho_{\mathrm{dR},X,r}(W)$ est bijective,

iii) il existe un réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K tel que la C-représentation $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X,

iv) pour tout réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K, la C-représentation $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X.

Démonstration. — Si $\alpha \in \overline{K}$ et $g \in G_K$ sont tels que $g(\alpha) - \alpha \in \mathbb{Z}$, on a nécessairement $g(\alpha) = \alpha$. On en déduit que l'on peut choisir un système de représentants S de $X/\mathbb{Z}$ dans X, stable par G_K.

Notons alors E l'ensemble des éléments de $B_{\mathrm{dR},X}$ de la forme $t^{(\alpha)}(\log t)^m$, avec $\alpha \in S$ et $m \in \mathbb{N}$ et $B^+_{\mathrm{dR},X}$ le sous-B^+_{dR}-module de $B_{\mathrm{dR},X}$ engendré par les éléments de E. On voit que $B^+_{\mathrm{dR},X}$ est un sous-B^+_{dR}-module libre stable par G_K de $B_{\mathrm{dR},X}$, que E est une base de $B_{\mathrm{dR},X}$ sur B_{dR} et de $B^+_{\mathrm{dR},X}$ sur B^+_{dR}, que $B_{\mathrm{dR},X} = B^+_{\mathrm{dR},X}[1/\underline{t}]$.

Le choix de S nous permet aussi de décomposer la C-algèbre $B_X = C \otimes_K \mathcal{B}_{K,X}$ introduite au § 2.6 en somme directe $B_X = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i B_X$, de sous-$C$-espaces vectoriels stables par G_K en posant $\mathrm{gr}^i B_X = \oplus_{\alpha\in S, m\in\mathbb{N}} C t^{(\alpha+i)}(\log t)^m$. En particulier, pour toute C-représentation U de G_K, on a $D_{X,r}(U) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i D_{X,r}(W)$ en posant $\mathrm{gr}^i D_{X,r}(W) = (\mathrm{gr}^i B_X \otimes_C U)^{G_{K,r}}$.

Choisissons un réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K et posons $D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}) = D_{\mathrm{dR},X,r}(W)$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, posons

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}) = (B^+_{\mathrm{dR},X} \underline{t}^i \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{W})^{G_{K,r}}.$$

Ce sont des sous-K_r-espaces vectoriels de $D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})$ qui définissent une filtration décroissante (*i.e.* $\mathrm{Fil}^{i+1} D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}) \subset \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})$) exhaustive (*i.e.* $\cup \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}) = D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})$) et séparée (*i.e.* $\cap \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}) = 0$). Soit

$\overline{W} = \mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$. C'est un C-espace vectoriel de dimension finie h égale à la dimension de W sur B_{dR}. On voit que le quotient

$$\mathrm{gr}^i\, D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}) = \frac{\mathrm{Fil}^i\, D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})}{\mathrm{Fil}^{i+1}\, D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})}$$

s'identifie à un sous-K_r-espace vectoriel de $\mathrm{gr}^i\, D_{X,r}(\overline{\mathcal{W}})$, donc que $\mathrm{gr}\, D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})$ s'identifie à un sous-K_r-espace vectoriel de $D_{X,r}(\overline{\mathcal{W}})$. On a

$$\dim_{K_r}\ D_{\mathrm{dR},X,r}(W) = \dim_{K_r}\ \mathrm{gr}\, D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}) \leqslant \dim_{K_r}\ D_{X,r}(\overline{\mathcal{W}}) \leqslant h$$

d'où $\dim_{K_r}\ D_{\mathrm{dR},X,r}(W) \leqslant h$ et l'égalité implique que $\overline{\mathcal{W}}$ est de type S_X.

On définit une filtration indexée par $\mathbb{Z}$, décroissante, exhaustive et séparée, sur $B_{\mathrm{dR},X} \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})$ en posant

$$\mathrm{Fil}^i(B_{\mathrm{dR},X} \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})) = \sum_{i_1+i_2=i} B^+_{\mathrm{dR},X}\underline{t}^{i_1} \otimes_{K_r} \mathrm{Fil}^{i_2}\, D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}).$$

L'application $\rho_{\mathrm{dR},X}(W)$ envoie $\mathrm{Fil}^i(B_{\mathrm{dR},X} \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W}))$ dans $B^+_{\mathrm{dR},X}\underline{t}^i \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{W}$ et induit, avec des notations évidentes, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Fil}^{i+1}(B_{\mathrm{dR},X} \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})) & \longrightarrow & B^+_{\mathrm{dR},X}\underline{t}^{i+1} \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{W} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Fil}^{i}(B_{\mathrm{dR},X} \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},X,r}(\mathcal{W})) & \longrightarrow & B^+_{\mathrm{dR},X}\underline{t}^{i} \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{W} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{gr}^i(B_X \otimes_{K_r} D_{X,r}(\overline{\mathcal{W}})) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^i\, B_X \otimes_C \overline{\mathcal{W}}
\end{array}$$

L'injectivité de la flèche horizontale du bas pour tout i (*cf.* § 2.6) implique celle de $\rho_{\mathrm{dR},X}(W)$.

Ces diagrammes commutatifs nous montrent aussi l'équivalence des propriétés (i) et (ii). Comme on sait déjà que (i) implique (iv) et comme (iv) implique trivialement (iii), il nous reste à vérifier que (iii) implique (i). Il suffit de vérifier que, étant donné $i \in \mathbb{Z}$ et un élément non nul $b \in (\mathrm{gr}^i\, B_X \otimes_C \overline{\mathcal{W}})^{G_{K,r}}$, alors b se relève en un élément de $(B^+_{\mathrm{dR},X}\underline{t}^i \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{W})^{G_{K,r}}$. Quitte à changer $\mathcal{W}$ en $\mathcal{W}(-i)$, on peut supposer $i = 0$.

Lemme 3.14. — *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{V}$ un B^+_{dR}-module libre de rang fini muni d'une action linéaire et continue de G_K et $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V}/\underline{t}\mathcal{V}$. L'application naturelle*

$$(B^+_{\mathrm{dR}}[\log t] \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K} \longrightarrow (C[\log t] \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \overline{\mathcal{V}})^{G_K}$$

est surjective.

Le lemme implique ce que l'on veut : Supposons d'abord que $X \subset K_r$. Alors, pour tout $\alpha \in X$, $C[\log t]t^{(\alpha)} \subset \mathrm{gr}^0\, B_X$ et $B^+_{\mathrm{dR}}[\log t]t^{(\alpha)} \subset B^+_{\mathrm{dR},X}$ sont stables par $G_{K,r}$. On peut écrire $b = \sum_{\alpha\in X} t^{(\alpha)} \otimes b_\alpha$, avec les $b_\alpha \in C[\log t] \otimes_C \overline{\mathcal{W}}$ presque tous nuls et

chaque $t^\alpha \otimes b_\alpha \in (\mathrm{gr}^0 B_X \otimes_C \overline{\mathcal{W}})^{G_{K,r}}$. Quitte à décomposer b en somme des $t^{(\alpha)} \otimes b_\alpha$, on peut supposer qu'il existe α tel que $b = t^{(\alpha)} \otimes b_\alpha$. Quitte à remplacer W par $W \otimes_{B_{\mathrm{dR}}} B_{\mathrm{dR}} t^{(-\alpha)}$, on peut supposer $\alpha = 0$ et le lemme permet de conclure.

Dans le cas général, on peut remplacer X par le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\overline{K}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et les poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}$; en particulier, on peut supposer que X est de type fini sur $\mathbb{Z}$. Choisissons alors une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que $X \subset L_r$. Avec des notations évidentes, soient $D = (B^+_{\mathrm{dR},X} \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{W}))^{G_{L,r}}$, $D'' = (\mathrm{gr}^0 B_X \otimes_C \overline{\mathcal{W}})^{G_{L,r}}$ et D' le noyau de l'application L_r-linéaire évidente de D dans D''. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0.$$

Mais D' comme D et D'' est un L_r-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de $J = \mathrm{Gal}(L_r/K_r)$. Si D' est de dimension h', le choix d'une base de D' sur L_r permet d'identifier D' à $L_r^{h'}$ et l'action de J est alors définie par un 1-cocycle de J à valeurs dans $GL_{h'}(L_r)$ et la trivialité de $H^1(J, GL_{h'}(L_r))$ montre que $D' \simeq (L_r)^{h'}$ en tant que K_r-espace vectoriel avec action de J. Comme $H^1(J, L_r) = 0$, $H^1(J, D') = 0$ et l'application $(B^+_{\mathrm{dR},X} \otimes \mathcal{W})^{G_{K,r}} = D^J \to (\mathrm{gr}^0 B_X \otimes \overline{\mathcal{W}})^{G_{K,r}} = (D'')^J$ est bien surjective. □

Démonstration du lemme. — Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les poids de Sen de $\overline{\mathcal{V}}$. Pour tout entier i les poids de $\overline{\mathcal{V}}(i)$ sont les $\alpha_n + i$ et il n'y a qu'un nombre fini de $i \in \mathbb{N}$ tels que 0 est poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}(i)$. Par passage à la limite, le lemme 3.14 se déduit du lemme suivant :

Lemme 3.15. — *Soient r et $\mathcal{V}$ comme dans le lemme précédent. Pour i et d entiers > 0, notons $B_i(0;d)$ l'ensemble des polynômes de degré $< d$ en $\log t$ à coefficients dans B_i. Alors*

i) si $i \geqslant 1$ est tel que 0 n'est pas poids de Sen de $\overline{\mathcal{V}}(i)$, pour tout $d \geqslant 1$, l'application naturelle

$$(B_{i+1}(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K} \longrightarrow (B_i(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K}$$

est bijective.

ii) Quelque soient les entiers $i, d \geqslant 1$, il existe un entier m tel que tout élément de $(B_i(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K}$ admet un relèvement dans $(B_{i+1}(0;d+m) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K}$.

Démonstration. — On peut supposer $K = K_r$. Remarquons que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow C(i;d) \longrightarrow B_{i+1}(0;d) \longrightarrow B_i(0;d) \longrightarrow 0.$$

Si 0 n'est pas poids de Sen de $\overline{\mathcal{V}}(i)$, il n'est pas non plus poids de Sen de $C(i;d) \otimes \overline{\mathcal{V}}$, et on a donc (prop. 2.15), $H^0(G_K, C(i;d) \otimes \overline{\mathcal{V}}) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i;d) \otimes \overline{\mathcal{V}}) = 0$. L'assertion (i) s'obtient en prenant les invariants sous G_K dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow C(i;d) \otimes_C \overline{\mathcal{V}} \longrightarrow B_{i+1}(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V} \longrightarrow B_i(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V} \longrightarrow 0.$$

Pour prouver (ii), remarquons que, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C(i;d) \otimes_C \overline{\mathcal{V}} & \longrightarrow & B_{i+1}(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V} & \longrightarrow & B_i(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C(i;d+m) \otimes_C \overline{\mathcal{V}} & \longrightarrow & B_{i+1}(0;d+m) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V} & \longrightarrow & B_i(0;d+m) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes et, induit, en prenant les invariants sous G_K, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (B_{i+1}(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K} & \longrightarrow & (B_i(0;d) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K} & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i;d) \otimes_C \overline{\mathcal{V}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (B_{i+1}(0;d+m) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K} & \to & (B_i(0;d+m) \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{V})^{G_K} & \to & H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i;d+m) \otimes_C \overline{\mathcal{V}}) \end{array}$$

dont les lignes sont encore exactes et il suffit de vérifier que, pour tout entier m suffisamment grand, l'application naturelle

$$H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i;d) \otimes \overline{\mathcal{V}}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i;d+m) \otimes \overline{\mathcal{V}})$$

est identiquement nulle.

Mais, pour $d' = d$ ou $d+m$, on a

$$H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i;d') \otimes \overline{\mathcal{V}}) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d') \otimes \overline{\mathcal{V}}(i)) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d') \otimes U)$$

en notant U le plus grand sous-C-espace vectoriel de $\overline{\mathcal{V}}(i)$ stable par G_K qui n'a que 0 comme poids de Sen. Mais U est somme d'un nombre fini de C-représentations de G_K isomorphes à des $C(0;r)$ pour des entiers r convenables. Le lemme est donc une conséquence du résultat suivant :

Lemme 3.16. — *Soient d et r des entiers $\geqslant 1$. Pour tout entier $m \geqslant r$, l'application naturelle*

$$H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d) \otimes C(0;r)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d+m) \otimes C(0;r))$$

est identiquement nulle.

Démonstration. — Remarquons d'abord que, si s, s' sont des entiers $\geqslant 1$, on a

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C(0;s), C(0;s')) = \min\{s, s'\}.$$

Comme $C(0;s)$ est isomorphe à son dual, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C(0;s), C(0;s')) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C, C(0;s) \otimes C(0;s')) \\ &= H^0(G_K, C(0;s) \otimes C(0;s')). \end{aligned}$$

On a donc

$$\dim_K H^0(G_K, C(0;s) \otimes C(0;s')) = \min\{s, s'\}$$

et c'est aussi (prop. 2.15) la dimension de $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;s) \otimes C(0;s'))$.

Or on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C(0;d) \longrightarrow C(0;d+m) \longrightarrow C(0;m) \longrightarrow 0$$

qui, en tensorisant avec $C(0;r)$ induit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C(0;d)\otimes C(0;r) \longrightarrow C(0;d+m)\otimes C(0;r) \longrightarrow C(0;m)\otimes C(0;r) \longrightarrow 0,$$

d'où une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow\ & H^0(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r)) \longrightarrow H^0(G_K, C(0;d+m)\otimes C(0;r)) \\ & \longrightarrow H^0(G_K, C(0;m)\otimes C(0;r)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r)) \\ & \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d+m)\otimes C(0;r)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;m)\otimes C(0;r)) \end{aligned}$$

En comptant les dimensions, on voit que l'application $H^0(G_K, C(0;m)\otimes C(0;r)) \to H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r))$ est surjective, ce qui implique que

$$H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d+m)\otimes C(0;r))$$

est bien nulle. □

Soit W une B_{dR}-représentation de G_K de dimension h. Choisissons un réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K et posons $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$. Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, on peut poser

$$D_{\mathrm{dR},r}(W) = (\mathcal{B}_{K,r} \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W)^{G_K,r}.$$

Compte-tenu du théorème précédent, c'est un K_r-espace vectoriel de dimension finie inférieure ou égale à h avec égalité dès que les poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}$ sont dans $\mathfrak{a}_r$.

La réunion $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ des $D_{\mathrm{dR},r}(W)$ est alors un sous-K_∞-espace vectoriel de $\mathcal{B}_K \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W$ de dimension h et l'application naturelle

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_\infty} D_{\mathrm{dR},\infty}(W) \longrightarrow \mathcal{B}_K \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W$$

est bijective.

Le groupe $\mathbb{S}_K$ opère sur $\mathcal{B}_K$ par translations à gauche mais cette action ne s'étend pas à $\mathcal{B}_K \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W$ (parce qu'on fait le produit tensoriel au dessus de $\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}$). En revanche l'action du sous-groupe $\mathbb{DR}_K$ (rappelons, *cf.* § 2.4, que $\mathbb{DR}_K = \mathbb{DR}_K^m \times \mathbb{G}_a$ où $\mathbb{DR}_K^m$ est le groupe multiplicatif de groupe des caractères $\overline{K}/\mathbb{Z}$) s'étend en posant $\sigma(b\otimes w) = \sigma(b)\otimes w$, pour $\sigma \in \mathbb{DR}_K$, $b \in \mathcal{B}_K$ et $w \in W$.

On voit que $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ est stable par cette action, qui, en fait, est K_∞-linéaire. De façon précise, soient $r \in \mathbb{N}$ et X un sous-groupe de $\overline{K}$, stable par G_K, contenant $\mathbb{Z}$ et les poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}$. Si $\mathbb{DR}_{K,X} = \mathbb{DR}_{K,X}^m \times \mathbb{G}_a$, où $\mathbb{DR}_{K,X}^m$ est le quotient de $\mathbb{DR}_K^m$ de groupe des caractères $X/\mathbb{Z}$, l'action par translations à gauche de $\mathbb{S}_{K,X}$ sur $\mathcal{B}_{K,X}$ induit une action de son sous-groupe $\mathbb{DR}_{K,X}$ qui se prolonge de façon évidente en une action sur $\mathcal{B}_{K,X}\otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W$ et $D_{\mathrm{dR},X,r}(W)$ est stable par cette action, qui est K_r-linéaire, ce qui fait que le K_r-espace vectoriel $D_{\mathrm{dR},X,r}(W)$ est muni d'une action du groupe algébrique $\mathbb{DR}_{K,X} \times K_r$. Comme $D_{\mathrm{dR},\infty}(W) = K_\infty \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},X,r}(W)$, ce K_∞-espace vectoriel est muni d'une action du groupe $\mathbb{DR}_{K,X} \times K_\infty$ quotient de $\mathbb{DR}_{K_\infty} = \mathbb{DR}_K \times K_\infty$.

On peut alors considérer $D_{\mathrm{dR},\infty}$ comme un foncteur, de la catégorie des B_{dR}-représentations de G_K dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_K)$ des représentations K_∞-linéaires de dimension finie du groupe pro-algébrique $\mathbb{S}_{K_\infty}$.

Théorème 3.17. — *Le foncteur*

$$D_{\mathrm{dR},\infty} : \mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})$$

est un $\otimes$-foncteur exact et fidèle.

Si W_1 et W_2 sont deux B_{dR}-représentations de G_K, l'application naturelle

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(W_1, W_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{\mathrm{dR},\infty}(W_1), D_{\mathrm{dR},\infty}(W_2))$$

est un isomorphisme.

Si W est une B_{dR}-représentation de G_K, la connaissance de $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ détermine W à isomorphisme près. En particulier, W est triviale si et seulement si $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ l'est.

Démonstration. — L'exactitude à gauche du foncteur $D_{\mathrm{dR},\infty}$ est claire. Le fait que, pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, on ait $\dim_{K_\infty} D_{\mathrm{dR},\infty}(W) = \dim_{B_{\mathrm{dR}}} W$ implique alors que $D_{\mathrm{dR},\infty}$ est exact et fidèle.

On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(B_{\mathrm{dR}}, W_1^* \otimes W_2)$$

tandis que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{\mathrm{dR},\infty}(W_1), D_{\mathrm{dR},\infty}(W_2)) \\ = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(K_\infty, D_{\mathrm{dR},\infty}(W_1^* \otimes W_2)).$$

Mais

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(B_{\mathrm{dR}}, W)$$

s'identifie à $K_\infty \otimes_K W^{G_K}$ et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{\mathrm{dR},\infty}(W_1), D_{\mathrm{dR},\infty}(W_2))$$

à $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)^{\mathbb{DR}_{K_\infty}}$. Pour r suffisamment grand, on a $D_{\mathrm{dR},\infty}(W) = K_\infty \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},r}(W)$ donc

$$D_{\mathrm{dR},\infty}(W)^{\mathbb{DR}_{K_\infty}} = K_\infty \otimes_{K_r} D_{\mathrm{dR},r}(W)^{\mathbb{DR}_{K_r}} = K_\infty \otimes_{K_r} W^{G_{K,r}}$$

puisque $(\mathcal{B}_{K,r} \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} B_{\mathrm{dR}})^{\mathbb{DR}_{K_r}} = B_{\mathrm{dR}}$. Montrer que

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(W_1, W_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{\mathrm{dR},\infty}(W_1), D_{\mathrm{dR},\infty}(W_2))$$

est un isomorphisme se ramène alors à montrer que l'application $K_\infty \otimes_K W^{G_K} \to K_\infty \otimes_{K_r} W^{G_{K,r}}$ est un isomorphisme, ce qui est clair.

La dernière assertion en résulte grâce au lemme 2.7. □

Il s'impose bien sûr de comparer la classification des B_{dR}-représentations de G_K via les $K_\infty((\underline{t}))$-modules à connexions régulières donnée par le théorème 3.12 avec la classification via les représentations linéaires de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$ et c'est ce que nous ferons au § 3.8. Mais nous allons auparavant donner la liste des classes d'isomorphismes d'indécomposables dans la catégorie des B_{dR}-représentations de G_K.

3.7. Classification des B_{dR}-représentations. — Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, on appelle *poids de de Rham de W* les poids de $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ munis de l'action du sous-groupe $\mathbb{DR}^m_{K_\infty}$ de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$.

Remarquons (th. 3.13) que, si $\mathcal{W}$ est un réseau de W stable par G_K, et si $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$, les poids de de Rham de W sont les $\alpha + \mathbb{Z}$, pour α poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}$. En particulier, les poids de de Rham de W forment un sous-ensemble fini de $\overline{K}/\mathbb{Z}$ stable par G_K.

Soit X un sous-ensemble de $\overline{K}$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$. On dit qu'une B_{dR}-représentation W de G_K est de type dR_X si ses poids de de Rham sont dans $X/\mathbb{Z}$. On dit que W est de type dR^m_X si en outre l'action de $\mathbb{DR}_{K_\infty} = \mathbb{DR}^m_{K_\infty} \times \mathbb{G}_a$ sur $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ se factorise à travers $\mathbb{DR}_{K_\infty}$, *i.e.* si $\mathbb{G}_a$ opère trivialement.

En particulier, on dit que W est *presque de de Rham* (resp. *est de de Rham*) si elle est de type $dR_{\mathbb{Z}}$ (resp. $dR^m_{\mathbb{Z}}$). Dire que W est de de Rham signifie que W est triviale, *i.e.* isomorphe à B^h_{dR} pour un entier h convenable. On a $B_{\mathrm{dR},\mathbb{Z}} = B_{\mathrm{dR}}[\log t]$ et $B^m_{\mathrm{dR},\mathbb{Z}} = B_{\mathrm{dR}}$.

Comme dans le cas des C-représentations (prop. 2.11), lorsque X est un sous-groupe, la sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}},X}(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}^m_{B_{\mathrm{dR}},X}(G_K)$) de $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$ dont les objets sont les B_{dR}-représentations de type dR_X (resp. dR^m_X) est une sous-catégorie tannakienne. La catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}},X}(G_K)$ est stable par extension et $\mathrm{Rep}^m_{B_{\mathrm{dR}},X}(G_K)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}},X}(G_K)$ dont les objets sont ceux qui sont semi-simples.

Rappelons que $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$) désigne l'ensemble des orbites de $\overline{K}$ (resp. $\overline{K}/\mathbb{Z}$) et que l'on a construit au § 2.6, pour chaque $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$, un objet simple $K_\infty[A]$ de la catégorie des K_∞-représentations de Γ dont la K-algèbre des endomorphismes est un corps gauche D_A de centre K_A. Posons alors $K_\infty((\underline{t}))[A] = K_\infty((\underline{t})) \otimes_{K_\infty} K_\infty[A]$ et $B_{\mathrm{dR}}[A] = B_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_\infty} K_\infty[A] = B_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_\infty((\underline{t}))} K_\infty((\underline{t}))[A]$.

Proposition 3.18. — *Pour tout $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$, $K_\infty((\underline{t}))[A]$ est un objet simple de $\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)$ tandis que $B_{\mathrm{dR}}[A]$ est un objet simple de $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$. On a*

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)}(K_\infty((\underline{t}))[A]) = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(B_{\mathrm{dR}}[A]) = D_A.$$

Si $A, A' \in \mathcal{C}(\overline{K})$ et si $\widetilde{A}, \widetilde{A'}$ désignent leurs images dans $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$, on a

$$K_\infty((\underline{t}))[A] \simeq K_\infty((\underline{t}))[A'] \Longleftrightarrow B_{\mathrm{dR}}[A] \simeq B_{\mathrm{dR}}[A'] \Longleftrightarrow \widetilde{A} = \widetilde{A'}.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier ces deux assertions pour les C-représentations. Rappelons que l'on a noté p^{2s_A} la dimension de D_A sur K_A. Alors $K_\infty[A]$ est un $K_\infty \otimes_K K_A$-module libre de rang p^{s_A} et on voit qu'il en est de même de $D_{\mathrm{dR},\infty}(B_{\mathrm{dR}}[A])$; en outre les poids de de Rham sont les $\alpha + \mathbb{Z}$, pour $\alpha \in A$. On en déduit immédiatement que, si $B_{\mathrm{dR}}[A] \simeq B_{\mathrm{dR}}[A']$, alors $\widetilde{A} = \widetilde{A'}$. Réciproquement, si $\widetilde{A} = \widetilde{A'}$, comme G_K opère trivialement sur $\mathbb{Z}$, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + i \in A'$. Le sous-K_∞-espace vectoriel de $B_{\mathrm{dR}}[A]$ formé des $\underline{t}^i \otimes x$, avec $x \in K_\infty[A]$ est alors isomorphe à $K_\infty[A']$ et cet isomorphisme induit, par extension des scalaires un isomorphisme de $B_{\mathrm{dR}}[A]$ sur $B_{\mathrm{dR}}[A']$.

Prouvons alors la première assertion. On voit que $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{\mathrm{dR},\infty}(B_{\mathrm{dR}}[A])$ s'identifie à une algèbre de matrices carrées à p^{s_A}-lignes et colonnes à coefficients dans $K_\infty \otimes_K K_A$. D'après le théorème 3.17, c'est aussi $K_\infty \otimes_K \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(B_{\mathrm{dR}}[A])$.

Par fonctorialité $D_A = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty[A])$ s'envoie dans $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(B_{\mathrm{dR}}[A])$ d'où une flèche injective de $K_\infty \otimes_K D_A$ dans $K_\infty \otimes_K \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(B_{\mathrm{dR}}[A])$. Pour des raisons de dimension, cette flèche est bijective. L'inclusion $D_A \to \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)}(B_{\mathrm{dR}}[A])$ est donc bien un isomorphisme ; en outre le fait que ce dernier anneau soit un corps implique que $B_{\mathrm{dR}}[A]$ est bien un objet simple de $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$. □

Le résultat suivant est alors immédiat.

Théorème 3.19. — *Pour tout $a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$, notons $\widehat{a}$ son image inverse dans $\overline{K}$, choisissons un relèvement $A_a \in \mathcal{C}(\overline{K})$, posons $K_\infty((\underline{t}))[a] = K_\infty((\underline{t}))[A_a]$, $B_{\mathrm{dR}}[a] = B_{\mathrm{dR}}[A_a]$ et $d_a = d_A$, $s_a = s_A$. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, posons aussi $K_\infty((\underline{t}))[a;d] = K_\infty((\underline{t}))[a] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$ et $B_{\mathrm{dR}}[a;d] = B_{\mathrm{dR}}[a] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$.*

Soit W une B_{dR}-représentation de G_K (resp. une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ). Alors

i) Pour que W soit simple, il faut et il suffit qu'il existe $a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$ tel que $W \simeq B_{\mathrm{dR}}[a]$ (resp. $W \simeq K_\infty((\underline{t}))[a]$) ; alors W est de type $dR^m_{\widehat{a}}$ et de dimension $d_a p^{s_a}$ sur B_{dR} (resp. $K_\infty((\underline{t}))$).

ii) Pour que W soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il existe $a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $W \simeq B_{\mathrm{dR}}[a;d]$ (resp. $W \simeq K_\infty((\underline{t}))[a;d]$) ; alors W est de type $dR_{\widehat{a}}$ et de dimension $d.d_a p^{s_a}$ sur B_{dR} (resp. $K_\infty((\underline{t}))$).

iii) il existe des entiers naturels $(h_{a,d})(W)_{a\in\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}),d\in\mathbb{N}^*}$ presque tous nuls, uniquement déterminés, tels que

$$W \simeq \oplus_{a\in\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}),d\in\mathbb{N}^*} B_{\mathrm{dR}}[a;d]^{h_{a,d}(W)} \text{ resp. } W \simeq \oplus_{a\in\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}),d\in\mathbb{N}^*} K_\infty((\underline{t}))[a;d]^{h_{a,d}(W)}.$$

Le théorème 3.13, nous dit que, si X est un sous-groupe de $\overline{K}$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$, pour qu'une B_{dR}-représentation W de G_K soit de type dR_X, il faut et il suffit qu'il existe un réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K tel que $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X et alors la même chose est vraie pour tout réseau stable par G_K.

Pour le type dR_X^m en revanche, on remarque qu'une B_{dR}-représentation W de G_K peut très bien admettre un réseau $\mathcal{W}$ stable par G_K tel que $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X^m sans que W, qui est alors de type dR_X soit pour autant de type dR_X^m. On peut par exemple prendre $W = B_{\mathrm{dR}} + B_{\mathrm{dR}} \log t \subset B_{\mathrm{dR},\mathbb{Z}}$ avec $\mathcal{W}$ le réseau engendré par 1 et $t \log t$. En revanche, si tous les réseaux $\mathcal{W}$ de W sont de type S_X^m, W est de type dR_X^m comme le montre l'analogue du théorème 3.13 :

Proposition 3.20. — *Soient $r \in \mathbb{N}$ et X un sous-groupe de $\mathfrak{a}_r$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$. Soient W une B_{dR}-représentation de G_K et*

$$D^m_{\mathrm{dR},X,r}(W) = (\mathcal{B}^m_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} W)^{G_{K,r}}.$$

L'application évidente

$$\rho^m_{\mathrm{dR},X,r}(W) : B^m_{\mathrm{dR},X} \otimes_{K_r} D^m_{\mathrm{dR},X,r}(W) \longrightarrow \mathcal{B}^m_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} W$$

est injective et $D^m_{\mathrm{dR},X,r}(W)$ est un K_r-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de W sur B_{dR}, avec égalité si et seulement si W est de type dR_X^m.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) on a $\dim_{K_r} D^m_{\mathrm{dR},X,r}(W) = \dim_{B_{\mathrm{dR}}} W$

ii) l'application $\rho^m_{\mathrm{dR},X,r}(W)$ est bijective,

iii) pour tout réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K, la C-représentation $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X^m.

Démonstration. — Cela peut se voir

– soit en se ramenant, par décomposition en somme directe au cas où W est indécomposable et en utilisant la classification des indécomposables ;

– soit en recopiant la preuve du théorème 3.13, à ceci près que pour montrer que (iii) implique (i), les mêmes techniques permettent de se ramener au cas où W est de type $dR_{\mathbb{Z}}$, *i.e.* est presque de de Rham et on remplace alors le lemme 3.14 par le résultat suivant :

Proposition 3.21. — *Soit W une B_{dR}-représentation de G_K. Pour que W soit de de Rham, il faut et il suffit que, pour tout réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K, la C-représentation $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ soit de Hodge-Tate.*

Démonstration. — Le théorème 3.13 nous permet de nous ramener au cas où W est presque de Hodge-Tate, donc est isomorphe à une somme directe de B_{dR}-représentations du type $B_{\mathrm{dR}}(0;d)$ et le résultat devient évident. □

3.8. Connexions régulières et représentations de $\mathbb{DR}$. — Cachée derrière la comparaison entre la classification des B_{dR}-représentations par des modules à connexion et celle par des représentations linéaires de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$, il y a une $\otimes$-équivalence

entre les catégories tannakiennes $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ et $\mathrm{Rep}_E(\mathbb{DR}_E)$, valable pour tout corps E de caractéristique 0. Pour énoncer ce résultat, remarquons que, si l'on pose encore $\underline{t} = t^{(1)}$, la E-algèbre $\mathcal{B}_{E,\mathbb{Z}}$ s'identifie à $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$.

On note $d : \mathcal{B}_{\overline{E}} \to \mathcal{B}_{\overline{E}} \otimes d\underline{t}/\underline{t}$ la dérivation canonique, *i.e.* l'unique $\overline{E}$-dérivation qui envoie $t^{(\alpha)}$ sur $\alpha t^{(\alpha)} \otimes d\underline{t}/\underline{t}$, pour tout $\alpha \in \overline{E}$ et $\log t$ sur $d\underline{t}/\underline{t}$. Par restriction elle induit une dérivation de $\mathcal{B}_E$ dans $\mathcal{B}_E \otimes d\underline{t}/\underline{t}$ et la restriction de cette dernière à $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$ est la restriction à cet anneau de la dérivation canonique

$$d : E((\underline{t})) \longrightarrow E((\underline{t})) \otimes d\underline{t}/\underline{t} = \Omega_{E((\underline{t}))/E}.$$

On appelle module à connexion sur $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$ (resp. $\mathcal{B}_E$) la donnée d'un module Z sur cet anneau muni d'une application E-linéaire $\nabla_0 : Z \to Z$ telle que l'application $z \mapsto \nabla z = \nabla_0 z \otimes d\underline{t}/\underline{t}$ vérifie la règle de Leibniz.

Soit alors Y un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie h muni d'une connexion régulière ∇. Soit Y_0 la réunion des sous-E-espaces vectoriels de dimension finie de Y stables par ∇_0. Il est clair que c'est un sous-$E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module de Y, stable par ∇_0. Autrement dit, on peut considérer Y_0 comme un module à connexion sur $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$. Par extension des scalaires, on munit $\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0$ d'une structure de $\mathcal{B}_E$-module à connexion. On le munit aussi d'une action de $\mathbb{DR}_E$ en posant $\sigma(b \otimes y) = \sigma(b) \otimes y$ si $\sigma \in \mathbb{DR}_E$, $b \in \mathcal{B}_E$ et $y \in Y_0$.

Il est clair que le sous-E-espace vectoriel $I_E(Y) = (\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0)_{\nabla=0}$ des sections horizontales est stable par l'action de $\mathbb{DR}_E$.

De même, soit Z une représentation E-linéaire de dimension finie de $\mathbb{DR}_E$. Le groupe $\mathbb{DR}_E$ opère sur $\mathcal{B}_E$ et sur Z, donc aussi sur le produit tensoriel $\mathcal{B}_E \otimes_E Z$. On définit une connexion sur ce $\mathcal{B}_E$-module en posant $\nabla(b \otimes z) = z \otimes db$. Il est clair que le sous-E-espace vectoriel $Z_0 = (\mathcal{B}_E \otimes_E Z)^{\mathbb{DR}_E}$ formé des éléments sur lesquels l'action de $\mathbb{DR}_E$ est triviale est en fait un sous-$E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module de $(\mathcal{B}_E \otimes_E Z)^{\mathbb{DR}_E}$, stable par ∇. Par extension des scalaires, on en déduit une connexion sur le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel $M_E(Z) = E((\underline{t})) \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Z_0$.

Théorème 3.22

i) Soit Z une représentation E-linéaire de dimension finie h de $\mathbb{DR}_E$. Alors Z_0 est un $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module libre de rang h et la connexion sur $M_E(Z)$ est régulière. De plus l'application naturelle

$$\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Z_0 \longrightarrow \mathcal{B}_E \otimes_E Z$$

est un isomorphisme.

ii) Soit Y un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie h muni d'une connexion régulière. Alors Y_0 est un $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module libre de rang h et $I_E(Y)$ est un E-espace vectoriel de dimension h. De plus les applications naturelles

$$E((\underline{t})) \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0 \longrightarrow Y \text{ et } \mathcal{B}_E \otimes_E I_E(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0$$

sont des isomorphismes.

iii) Le foncteur $M_E : \mathrm{Rep}_E(\mathbb{DR}_E) \to \mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ induit une $\otimes$-équivalence entre ces deux catégories et I_E est un quasi-inverse.

Commençons par énoncer deux lemmes :

Lemme 3.23. — *Si Z est comme dans le théorème et si $Y = M_E(Z)$, l'application naturelle $Z_0 \to Y_0$ est une bijection.*

Lemme 3.24. — *Le foncteur $M_E : \mathrm{Rep}_E(\mathbb{DR}_E) \to \mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ est essentiellement surjectif.*

Montrons comment le théorème se déduit de ces deux lemmes.

Prouvons d'abord (i) : Notons $\mathcal{C}_E$ l'algèbre affine de $\mathbb{DR}_E$. On voit facilement que $Z_{00} = (\mathcal{C}_E \otimes_E Z)^{\mathbb{DR}_E}$ est un E-espace vectoriel de dimension h et que l'application naturelle $\mathcal{C}_E \otimes_E Z_{00} \to \mathcal{C}_E \otimes_E Z$ est un isomorphisme.

Choisissons un système S de représentants de $\overline{E}/\mathbb{Z}$ dans $\overline{E}$, stable par G_E. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ fixé, les $t^{(\alpha+i)}(\log t)^j$, pour $\alpha \in S$ et $j \in \mathbb{N}$ sont des éléments de $\mathcal{B}_{\overline{E}}$ linéairement indépendants sur $\overline{E}$. Notons $\mathrm{gr}^i_S \mathcal{B}_{\overline{E}}$ le sous-$\overline{E}$-espace vectoriel qu'ils engendrent et posons $\mathrm{gr}^i_S \mathcal{B}_E = \mathrm{gr}^i_S \mathcal{B}_{\overline{E}} \cap \mathcal{B}_E$. C'est un sous-$E$-espace vectoriel de $\mathcal{B}_E$ stable par $\mathbb{DR}_E$. La projection de $\mathcal{B}_E$ sur $\mathcal{C}_E$ induit un isomorphisme de $\mathrm{gr}^0_S \mathcal{B}_E$ sur $\mathcal{C}_E$ et la multiplication par $t^{(i)}$ un isomorphisme de $\mathrm{gr}^0_S \mathcal{B}_E$ sur $\mathrm{gr}^i_S \mathcal{B}_E$. On en déduit que le choix de S nous permet d'identifier Z_0 à $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}] \otimes_E Z_{00}$ qui est bien un $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module libre de rang h et que $\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Z_0 \to \mathcal{B}_E \otimes_E Z$ est bien un isomorphisme. On voit que $E[\underline{t}] \otimes_E Z_{00}$ est stable par ∇_0, donc aussi $E[[\underline{t}]] \otimes_{E[\underline{t}]} Z_{00}$ qui est un réseau de $M_E(Z)$ et la connexion sur $M_E(Z)$ est bien régulière.

Montrons maintenant (ii) dans le cas où $Y = M_E(Z)$, avec Z comme ci-dessus. D'après le lemme 3.23, l'inclusion $Z_0 \subset Y_0$ est une égalité. En particulier, Y_0 est libre de rang h sur $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$ et l'application $E((\underline{t})) \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0 \to Y$ est un isomorphisme.

On a aussi $\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0 = \mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Z_0 = \mathcal{B}_E \otimes_E Z$, donc $I_E(Y) = Z$ puisque $(\mathcal{B}_E)_{\nabla=0} = E$. Il en résulte bien que $\mathcal{B}_E \otimes_E I_E(Y)$ s'identifie bien à $\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0$.

Il est maintenant clair que M_E induit une $\otimes$-équivalence entre $\mathrm{Rep}_E(\mathbb{DR}_E)$ et la sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ image essentielle de ce foncteur et que la restriction de I_E à cette sous-catégorie est un quasi-inverse. Le lemme 3.24 permet donc de conclure. □

Preuve du lemme 3.23. — Quitte à remplacer E par une extension finie galoisienne, on peut supposer que les poids de Z, pour l'action de $\mathbb{DR}_E^m$, sont dans $E/\mathbb{Z}$. Par dévissage, on se ramène au cas où Z est simple, ce qui implique que $\mathbb{G}_a$ opère trivialement donc que Z est de dimension 1 avec un unique poids $a \in E/\mathbb{Z}$. Soit z une base de Z sur E. Si S est comme ci-dessus et si α désigne le relèvement de a dans S, Z_0 (resp. $Y = M_E(Z)$) est le $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module libre de rang 1 (resp. le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension 1) de base $u = t^{(-\alpha)} \otimes z$ et on a $\nabla_0(u) = -\alpha u$. Nous devons montrer que si $y \in Y$ est tel que le sous-E-espace vectoriel de Y engendré par les $\nabla_0^j(y)$, pour $j \in \mathbb{N}$ est de dimension finie, alors $y \in Z_0$. Considérons un tel y. Il existe

un entier $m \geqslant 1$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in E$ pas tous nuls tels que $\sum_{j=0}^{m-1} x_j \nabla_0^j(y) = 0$. Si $y = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \underline{t}^n)u$, on voit que $\nabla_0^j(y) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} (n-\alpha)^j c_n \underline{t}^n)u$. On doit donc avoir $\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_j (n-\alpha)^j c_n \underline{t}^n = 0$, ou encore

$$\sum_{j=0}^{m-1} (n-\alpha)^j x_j = 0 \text{ pour tout entier } n \text{ tel que } c_n \neq 0$$

Si $n_0, n_1, \ldots, n_{m-1}$ sont des entiers distincts, le déterminant de la matrice des $(n_i - \alpha)^j$, pour $0 \leqslant i, j \leqslant m-1$ est non nul. On en déduit qu'au plus $m-1$ des c_n sont non nuls, donc que $y \in Z_0$. □

Preuve du lemme 3.24. — C'est une conséquence immédiate de la classification des modules à connexion régulière sur $E((\underline{t}))$ (*cf.* [**Ma65**], th. 4, lorsque E est algébriquement clos, le cas général s'en déduit facilement). □

Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, notons $\Delta_{\mathrm{dR},f}(W)$ la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de W^{H_K} stable par Γ. C'est aussi la réunion des sous-K_∞-espaces vectoriels de dimension finie de $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ stables par ∇_0. C'est un sous-$K_\infty[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module de $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$. Le théorème précédent montre qu'il est libre de rang la dimension de W sur B_{dR} et que l'application naturelle

$$K_\infty((\underline{t})) \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{\mathrm{dR},f}(W) \longrightarrow \Delta_{\mathrm{dR}}(W)$$

est bijective.

Par ailleurs,

$$D_{\mathrm{dR},\infty}(W) \subset \mathcal{B}_K \otimes_{K[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} W = \mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} W \supset \mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{\mathrm{dR},f}(W).$$

Proposition 3.25. — *Soit W une B_{dR}-représentation de G_K de dimension h. On a $D_{\mathrm{dR},\infty}(W) \subset \mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{\mathrm{dR},f}(W)$ et l'application $\mathcal{B}_{K_\infty}$-linéaire*

$$\mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D_{\mathrm{dR},\infty}(W) \longrightarrow \mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{\mathrm{dR},f}(W)$$

déduite de cette inclusion est bijective.

Cette bijection est compatible avec les extensions naturelles de ∇ et de l'action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$. En particulier,

$$D_{\mathrm{dR},\infty}(W) = I_{K_\infty}(\Delta_{\mathrm{dR}}(W)) = (\mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{\mathrm{dR},f}(W))_{\nabla=0}$$

et

$$\Delta_{\mathrm{dR}}(W) = M_{K_\infty}(D_{\mathrm{dR}\infty}(W)) = K_\infty((\underline{t})) \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} (\mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D_{\mathrm{dR},\infty}(W))^{\mathbb{S}_{K_\infty}}.$$

Démonstration. — Compte-tenu du théorème précédent, c'est une simple analyse de la définition des différents foncteurs qui interviennent dans cet énoncé.

Toutefois, le lecteur consciencieux remarquera que l'on n'a besoin pour la preuve que de la partie facile du théorème précédent : on sait a priori que, pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ est dans l'image essentielle du foncteur M_{K_∞}. On

n'a donc pas besoin de connaître l'essentielle surjectvité de ce foncteur, ce qui fait que l'on n'utilise pas la classification des modules à connexions régulières sur $\overline{E}((\underline{t}))$. □

Remarques

(1) Soit $\widehat{B}_{\mathrm{HT}} = C((t))$ le corps des séries formelles en l'indéterminée t à coefficients dans C sur lequel G_K opère comme on pense (l'indéterminée t est toujours un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$). C'est le corps des fractions de $\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}} = C[[t]] = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} C[t]/t^r$ et on munit $\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}}$ de la topologie de la limite projective (chaque $C[t]/t^r$ étant muni de sa topologie d'espace vectoriel de dimension finie sur C). Tout ce qu'on vient de raconter dans ce chapitre se transpose mot pour mot à l'étude des $\widehat{B}_{\mathrm{HT}}$-représentations de G_K (mais comme la projection $\widehat{B}^+_{\mathrm{HT}} \to C$ admet une section continue G_K-équivariante, ces résultats sont essentiellement triviaux).

En particulier, on peut associer à toute $\widehat{B}_{\mathrm{HT}}$-représentation W de G_K un K_∞-espace vectoriel de dimension finie $D_{\mathrm{HT},\infty}(W)$ muni d'une action de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$ et la connaissance de $D_{\mathrm{HT},\infty}(W)$ détermine W à isomorphisme près.

(2) Soit W une B_{dR}-représentation de G_K et $\mathcal{W}$ un réseau de W stable par G_K. Le choix de ce réseau permet de munir $\mathcal{W}$ d'une filtration,indexée par $\mathbb{Z}$, décroissante, exhaustive et séparée en posant $\mathrm{Fil}^i_{\mathcal{W}} W = t^i\mathcal{W} = \underline{t}^i\mathcal{W}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On voit alors que $\mathrm{gr}_{\mathcal{W}} W = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i_{\mathcal{W}} W$, avec $\mathrm{gr}^i W = \mathrm{Fil}^i \mathcal{W}/\mathrm{Fil}^{i+1}\mathcal{W}$ a une structure de $\widehat{B}_{\mathrm{HT}}$-représentation (en fait graduée) de G_K. Les représentations $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ et $D_{\mathrm{HT},\infty}(\mathrm{gr}_{\mathcal{W}}(W)$ de $\mathbb{DR}_{K_\infty} = \mathbb{DR}_{K^m_\infty} \times \mathbb{G}_a$ ne sont pas forcément isomorphes. On vérifie que l'action de $\mathbb{DR}^m_{K_\infty}$ est la même mais que celle de $\mathbb{G}_a$ peut être différente (la classe d'isomorphisme de $D_{\mathrm{HT},\infty}(\mathrm{gr}_{\mathcal{W}})$ muni de l'action de $\mathbb{G}_a$ dépend en général du choix du réseau $\mathcal{W}$).

4. Généralités sur les représentations p-adiques

4.1. Poids et types d'une représentation. — Dans ce chapitre, F est un sous-corps fermé de K. La catégorie $\mathrm{Rep}_F(G_K)$ est donc la catégorie des F-espaces vectoriels de dimension finie sur F munis d'une action linéaire et continue de G_K. Dans le chapitre suivant, on va s'intéresser aux représentations p-adiques, *i.e.* au cas où $F = \mathbb{Q}_p$.

Nous allons voir rapidement comment les résultats des chapitres 2 et 3 s'appliquent aux F-représentations de G_K. Dans tout ce qu'on va faire, on ne change rien en remplaçant la représentation V considérée par $V_K = K \otimes_F V$ ce qui fait que l'on pourrait aussi bien ne parler que de K-représentations.

Soit V une F-représentation de G_K. Alors $V_C = C \otimes_F V$ est de façon évidente une C-représentation de G_K et $V_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}} \otimes_F V$ une B_{dR}-représentation de G_K. Pour tout foncteur D défini sur la catégorie des C-représentations (resp. B_{dR}-représentations) de G_K, on pose $D(V) = D(V_C)$ (resp. $D(V) = D(V_{\mathrm{dR}})$).

Les poids de Sen (resp. *de de Rham*) *de* V sont les poids de Sen de V_C (resp. de de Rham de V_{dR}). Les premiers forment un sous-ensemble fini, stable par G_K de $\overline{K}$ et les seconds sont leurs images dans $\overline{K}/\mathbb{Z}$.

Si Xest un sous-ensemble de $\overline{K}$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$, on dit que V est de type S_X (resp. S_X^m) si V_C l'est, que V est de type dR_X (resp. dR_X^m) si V_{dR} l'est. On voit donc (th. 3.13 et prop. 3.20) que l'on a les implications

$$\begin{array}{ccc} V \text{ est de type } dR_X^m & \Longrightarrow & V \text{ est de type } S_X^m \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ est de type } dR_X & \Longleftrightarrow & V \text{ est de type } S_X \end{array}$$

On dit aussi que V est *de Hodge-Tate* (resp. *presque de Hodge-Tate*) si V_C l'est (c'est-à-dire si V est de type $S_{\mathbb{Z}}^m$ (resp. $S_{\mathbb{Z}}$). De même on dit que V est *de de Rham* (resp. *presque de de Rham*) si V_{dR} l'est (c'est-à-dire si V est de type $dR_{\mathbb{Z}}^m$ (resp. $dR_{\mathbb{Z}}$). On a donc les implications

$$\begin{array}{ccc} V \text{ est de de Rham} & \Longrightarrow & V \text{ est de Hodge-Tate} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ est presque de de Rham} & \Longleftrightarrow & V \text{ est presque de Hodge-Tate} \end{array}$$

4.2. Graduations, ν-graduations, filtrations et ν-filtrations. — Soit E un corps commutatif. Pour tout E-espace vectoriel D, on appelle *graduation sur* D la donnée d'une graduation par des sous-E-espaces vectoriels indexée par $\mathbb{Z}$, *i.e.* d'une décomposition de D en somme directe de sous-E-espaces vectoriels $D = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i D$. *Un* E*-espace vectoriel gradué* est un E-espace vectoriel muni d'une graduation. Avec comme flèches les applications E-linéaires qui respectent la graduation, les modules gradués forment une catégorie abélienne E-linéaire qui s'identifie à la catégorie des représentations E-linéaires (pas nécessairement de dimension finie) de $\mathbb{G}_m$ (pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{gr}^i D$ est la partie de poids i).

On définit de façon évidente le *produit tensoriel* de deux E-espaces vectoriels gradués, de même que le *dual* d'un E-espace vectoriel gradué de dimension finie. *Le* E*-espace vectoriel gradué unité* est E avec $\mathrm{gr}^0 E = E$ et $\mathrm{gr}^i E = 0$ si $i \neq 0$.

On appelle *ν-graduation* sur un E-espace vectoriel D la donnée d'une graduation et d'un endomorphisme nilpotent $\nu : D \to D$ qui respecte la graduation. Les *E-espaces vectoriels ν-gradués* forment, de manière évidente, une catégorie abélienne E-linéaire qui s'identifie à la catégorie des représentations E-linéaires de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$ (*cf.* § 2.4).

On définit de façon évidente le *produit tensoriel* de deux E-espaces vectoriels ν-gradués (on a $\nu(d_1 \otimes d_2) = \nu(d_1) \otimes d_2 + d_1 \otimes \nu(d_2)$), de même que le *dual* d'un E-espace vectoriel ν-gradué de dimension finie (on a $\nu(f)(d) = -f(\nu(d))$). C'est clair aussi ce qu'est la structure de *E-espace vectoriel ν-gradué unité* sur E.

Pour tout E-espace vectoriel D, on appelle *filtration sur* D la donnée d'une filtration par des sous-E-espaces vectoriels indexée par $\mathbb{Z}$, décroissante, exhaustive et séparée,

i.e. on se donne des sous-E-espaces vectoriels $(\mathrm{Fil}^i D)_{i\in\mathbb{Z}}$ de D vérifiant $\mathrm{Fil}^{i+1} D \subset \mathrm{Fil}^i D$, pour tout i, $\cup_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D = D$ et $\cap_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D = 0$. Un *$E$-espace vectoriel filtré* est un E-espace vectoriel muni d'une filtration. Avec comme flèches les applications E-linéaires qui respectent la filtration, les E-espaces vectoriels filtrés forment une catégorie additive, E-linéaire, qui n'est pas abélienne.

Un *morphisme strict* de E-espaces vectoriels filtrés est un morphisme $f : D_1 \to D_2$ de E-espaces vectoriels filtrés tels que $f(\mathrm{Fil}^i D_1) = \mathrm{Fil}^i D_2 \cap f(D_2)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Une suite de morphismes de E-espaces vectoriels filtrés est dite *exacte* si tous les morphismes de la suite sont stricts et si c'est une suite exacte en tant que suite d'applications linéaires.

Si D est un E-espace vectoriel filtré, un *sous-objet D' de D* (resp. un *quotient D'' de D*) est un sous-E-espace vectoriel (resp. un E-espace vectoriel quotient) muni de la filtration induite. Pour tout sous-E-espace vectoriel D' du E-espace vectoriel filtré D, si $D'' = D/D'$, la suite

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

Si D_1 et D_2 sont deux E-espaces vectoriels filtrés et si l'un des deux au moins est de dimension finie, on définit une filtration sur $D_1 \otimes_E D_2$ en posant

$$\mathrm{Fil}^i(D_1 \otimes D_2) = \sum_{i_1+i_2=i} \mathrm{Fil}^{i_1} D_1 \otimes \mathrm{Fil}^{i_2} D_2.$$

De même, le *dual* d'un E-espace vectoriel filtré D, de dimension finie sur E, est le E-espace vectoriel dual D^*, avec $\mathrm{Fil}^i D^*$ égal à l'orthogonal de $\mathrm{Fil}^{-i+1} D$. Le E-espace vectoriel filtré unité est E avec

$$\mathrm{Fil}^i E = \begin{cases} E & \text{si } i \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

A tout E-espace vectoriel filtré D, on peut associer le E-espace vectoriel gradué $\mathrm{gr}\, D = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i D$, avec $\mathrm{gr}^i D = \mathrm{Fil}^i D/\mathrm{Fil}^{i+1} D$. On obtient ainsi un foncteur additif E-linéaire de la catégorie des E-espaces vectoriels filtrés dans celle des E-espaces vectoriels gradués. Ce foncteur est exact (au sens qu'il transforme toute suite exacte en suite exacte) et fidèle. C'est un $\otimes$-foncteur au sens qu'il commute de manière évidente au produit tensoriel, au dual et envoie l'objet-unité sur l'objet-unité.

Une *ν-filtration* sur un E-espace vectoriel D est la donnée d'une filtration et d'un endomorphisme nilpotent ν respectant la filtration. Les *E-espaces vectoriels ν-filtrés* forment de manière évidente une catégorie additive E-linéaire. Un morphisme de E-espaces vectoriels ν-filtrés est dit *strict* s'il est strict en tant que morphisme des E-espaces vectoriels filtrés sous-jacents. On définit de même la notion de suite exacte de E-espaces vectoriels ν-filtrés.

Un *sous-objet (resp. un quotient) d'un E-espace vectoriel ν-filtré* est un sous-E-espace vectoriel stable par ν (resp. le quotient par un sous-E-espace vectoriel stable

par ν) que l'on munit de la filtration induite. Pour tout sous-objet D' du E-espace vectoriel ν-filtré D, si $D'' = D/D'$, la suite

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

On définit comme on pense le produit tensoriel de deux E-espaces vectoriels ν-filtrés dont au moins l'un des deux est de dimension finie, le dual d'un E-espace vectoriel ν-filtré de dimension finie, la structure d'objet-unité de la catégorie des E-espaces vectoriels ν-gradués sur E.

A tout E-espace vectoriel ν-filtré D, on peut associer le E-espace vectoriel ν-gradué $\operatorname{gr} D$. Le foncteur $D \mapsto \operatorname{gr} D$ est un foncteur additif E-linéaire, exact et fidèle qui commute au produit tensoriel, au dual et à l'objet-unité.

Enfin, il est commode de convenir que tout morphisme de E-espaces vectoriels gradués (resp. ν-gradués) est strict.

4.3. Applications aux représentations presque de Hodge-Tate. — Les $\operatorname{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}^+ t^i = B_{\mathrm{dR}}^+(i)$, pour $i \in \mathbb{Z}$, munissent B_{dR} d'une filtration naturelle qui en font non seulement un K-espace vectoriel mais aussi, en un sens évident une K-algèbre filtrée. La K-algèbre graduée associée est $B_{\mathrm{HT}} = C[t, t^{-1}]$. La graduation sur B_{HT} est la même que celle qui provient du fait que $B_{\mathrm{HT}} = B_{\mathbb{Z}}^m = C \otimes_K \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}^m$, algèbre affine sur C du groupe $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}^m = \mathbb{G}_m$.

De même l'anneau $B_{p\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}[\log t]$ a une structure d'algèbre ν-filtrée : on a

$$\operatorname{Fil}^i B_{p\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR}}^+[\log t] t^i = B_{\mathrm{dR}}^+[\log t](i)$$

et l'application ν est la B_{dR}-dérivation $-\partial/\partial \log t$. Cette dernière est celle qui correspond à l'action de $\mathbb{G}_a = \mathbb{DR}_{\mathbb{Z}}$ sur $B_{p\mathrm{dR}}$. L'algèbre ν-graduée $\operatorname{gr} B_{p\mathrm{dR}}$ s'identifie à $B_{p\mathrm{HT}}$. Sur cette dernière la ν-graduation provient de ce que $\mathbb{G}_m \times G_a$ opère par translations à gauche sur son algèbre affine sur C qui est précisément $B_{p\mathrm{HT}} = B_{\mathbb{Z}}$.

L'action de G_K sur B_{dR}, B_{HT}, $B_{p\mathrm{dR}}$ et $B_{p\mathrm{HT}}$ est compatible, en un sens évident, avec ces structures supplémentaires. Pour toute F-représentation V de G_K, et pour $* \in \{\mathrm{dR}, p\mathrm{dR}, \mathrm{HT}, p\mathrm{HT}\}$ le B_*-module $B_* \otimes_F V = B_* \otimes_K V_K$ est muni d'une action de G_K (on pose $g(b \otimes v) = g(b) \otimes g(v)$, pour $g \in G_K$, $b \in B_*$ et $v \in V$; on le munit de la structure de K-espace vectoriel filtré (resp. ν-filtré, gradué, ν-gradué) produit tensoriel de la structure donnée sur B_* avec la structure triviale sur V_K. Alors $D_*(V) = (B_* \otimes_F V)^{G_K}$ est un sous-K-espace vectoriel de $B_* \otimes_F V$ qui est un sous-objet pour la structure de K-espace vectoriel filtré (resp. ν-filtré, gradué, ν-gradué) de $B_* \otimes_F V$.

On note $\rho_*(V) : B_* \otimes_K D_*(V) \to B_* \otimes_F V$ l'application B_*-linéaire déduite par extension des scalaires de l'inclusion $D_*(V) \subset B_* \otimes V$.

Les deux théorèmes qui suivent contiennent des résultats qui sont soit évidents soit des conséquences immédiates des résultats des chapitres 2 et 3.

Théorème 4.1. — *Soient V une F-représentation de G_K et h la dimension de V sur F.*

(1) *Pour $* \in \{\mathrm{dR}, p\mathrm{dR}, \mathrm{HT}, p\mathrm{HT}\}$, $D_*(V)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie $\leqslant h$. L'application $\rho_*(V)$ est injective et c'est un morphisme strict de K-espaces vectoriels filtrés (resp. ν-filtrés, gradués, ν-gradués).*

(2) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) la représentation V est de de Rham (resp. presque de de Rham, de Hodge-Tate, presque de Hodge-Tate)

ii) on a $\dim_K D_*(V) = h$,

iii) l'application $\rho_*(V)$ est un isomorphisme.

(3) *On a*

$$D_{p\mathrm{HT}}(V) = \operatorname{gr} D_{p\mathrm{dR}}(V), \quad D_{\mathrm{HT}}(V) = (D_{p\mathrm{HT}}(V)_{\nu=0}, \quad D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{p\mathrm{dR}}(V)_{\nu=0}.$$

L'application naturelle $\operatorname{gr} D_{\mathrm{dR}}(V) \to D_{\mathrm{HT}}(V)$ est injective.

(4) *Si V est presque de Hodge-Tate* (ou presque de de Rham, cela revient au même)*, V est de de Rham si et seulement si $\nu = 0$ sur $D_{p\mathrm{dR}}(V)$, alors que V est de Hodge-Tate si et seulement si $\nu(\mathrm{Fil}^i D_{p\mathrm{dR}}(V)) \subset \mathrm{Fil}^{i+1} D_{p\mathrm{dR}}(V)$.*

Théorème 4.2. — *Soit $* \in \{\mathrm{dR}, p\mathrm{dR}, \mathrm{HT}, p\mathrm{HT}\}$. La sous- catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{F,*}(G_K)$ de la catégorie $\mathrm{Rep}_F(G_K)$ formée des représentations qui sont de de Rham (resp. presque de de Rham, de Hodge-Tate, presque de Hodge-Tate) est une sous-catégorie tannakienne et la restriction à cette catégorie du foncteur D_* est un foncteur strict* (*i.e.* pour tout morphisme f de cette catégorie, $D_*(f)$ est strict)*, exact et fidèle, qui commute au produit tensoriel et au dual.*

4.4. Représentations presque de Hodge-Tate de dimension 1

Proposition 4.3. — *Soit V une représentation p-adique de G_K de dimension 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) la représentation V est presque de de Rham,

ii) la représentation V est presque de Hodge-Tate,

iii) la représentation V est de Hodge-Tate,

iv) la représentation V est de de Rham,

v) il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que le groupe d'inertie I_K de l'extension $\overline{K}/K$ opère sur $V(-i)$ à travers un quotient fini.

Démonstration. — Comme V est de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_p$, $D_{\mathrm{dR},\infty}(V)$ est de dimension 1 sur K_∞ et l'action de $\mathbb{G}_a$ est triviale. Les équivalences des propriétés (i) à (iv) sont alors claire.

Montrons l'équivalence de (iii) et (v). On voit que les poids de Sen d'une C-représentation de G_K ne change pas lorsque l'on remplace K par une extension qui est un sous-corps fermé de K sur lequel la valuation est encore discrète. Quitte à remplacer K par le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, on peut supposer que le corps résiduel est algébriquement clos, *i.e.* que $G_K = I_K$.

Le fait que (v) ⇒ (iii) est alors immédiat. Montrons l'implication inverse. Quitte à remplacer V par $V(-i)$, pour un entier i convenable, on peut aussi supposer que le poids de Sen de V est 0. Si v est un élément non nul de V, il existe alors un élément non nul c de C tel que $c \otimes v \in (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. Si $\eta : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ est le caractère qui donne l'action de G_K sur V, on a $gc = \eta^{-1}(g)c$, pour tout $g \in G_K$. Quitte à remplacer K par une extension finie puis à multiplier c par un élément non nul de K bien choisi, on peut supposer que $c - 1 \in \mathfrak{m}_C$, idéal maximal de $\mathcal{O}_C$. Si $a = \log c$ et si $\rho = -\log \circ \eta : G_K \to \mathbb{Q}_p$, on a $ga - a = \rho(g)$, pour tout $g \in G_K$. Le lemme ci-dessous implique que $a \in K$, *i.e.* que $\rho = 0$, donc que η est d'ordre fini et on a bien (iii)⇒(v). □

Lemme 4.4. — *Supposons k algébriquement clos et soit $a \in C$ tel que $ga - a \in \mathbb{Q}_p$, pour tout $g \in G_K$. Alors $a \in K$.*

Démonstration. — Il s'agit de prouver que $ga = a$ pour tout $a \in G_K$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors l'application $g \mapsto ga - a$ défini un homomorphisme continu non nul $\rho : G_K \to \mathbb{Q}_p$ et l'image de ρ est un sous-groupe compact non nul de $\mathbb{Q}_p$. Quitte à multiplier a par un scalaire non nul, on peut supposer que cette image est égale à $\mathbb{Z}_p$. Soit H le noyau de ρ. Alors $\overline{K}^H$ est une $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞ de K et $C^H = L$ est l'adhérence de K_∞ dans C (th. 1.1'). Si $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, il existe un générateur topologique γ_0 de Γ tel que $\gamma_0(a) = a + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si K_n est l'unique extension de degré p^n de K contenue dans K_∞, $\gamma_0^{p^n}$ est un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}_\mathrm{n})$ et $\gamma_0^{p^n}(a) - a = p^n$. Si l'on choisit $a_n \in K_\infty$ tel que $v_p(a - a_n) \geqslant n$, on a $v_p(\gamma_0^{p^n} - 1)(a_n) \geqslant n$; d'après l'assertion (iii) de la proposition 1.4, il existe $\lambda_n \in K_n$ tel que $v_p(a_n - \lambda_n) \geqslant n - 1/(p-1)$ et on a aussi $v_p(a - \lambda_n) \geqslant n - 1/(p-1)$. On peut alors écrire $\gamma_0(\lambda_n) = \lambda_n + 1 - x_n$ où $x_n \in K_n$ vérifie $v_p(x_n) \geqslant n - 1/(p-1)$. Comme $\mathrm{tr}_{K_n/K}(\gamma_0(\lambda_n)) = \mathrm{tr}_{K_n/K}(\lambda_n)$, on en déduit que $\mathrm{tr}_{K_n/K}(x_n) = p^n$. Pour n suffisamment grand, cela contredit le fait que $v_p(\mathrm{tr}_{K_n/K}(x_n)) \geqslant v_p(x_n) + (p-1)n/pe_K$ (prop. 1.6). □

Remarque. — En utilisant une analyse de la ramification encore plus fine que celle que nous avons faite ici ([**Sen72**]), Sen a montré plus ([**Sen80**], cor. au th. 11) : Pour qu'une représentation p-adique V de G_K soit de Hodge-Tate, avec seulement 0 comme poids de Sen, il faut et il suffit que le groupe d'inertie I_K opère sur V à travers un quotient fini. Sen montre en fait un résultat beaucoup plus fort ([**Sen73**] dans le cas Hodge-Tate et [**Sen80**], th. 11 dans le cas général) : Comme l'image du groupe d'inertie I_K dans le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V)$ des automorphismes du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V est un sous-groupe fermé, c'est un groupe de Lie p-adique et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(V)$. Sen montre que $\mathfrak{g}$ est le plus petit sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(V)$ tel que $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}$ contient l'endomorphisme de Sen.

5. Représentations semi-stables et (φ, N)-modules filtrés

5.1. Les (φ, N)-modules filtrés. — Le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$ est une clôture algébrique de k. On note K_0 (resp. P_0) le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (resp. $\overline{k}$) et σ le Frobenius absolu agissant sur k, $\overline{k}$ (via $x \mapsto x^p$), K_0 et P_0.

On appelle *φ-module sur k* (ou *φ-module*, s'il n'y a pas de risque de confusion sur k) la donnée d'un K_0-espace vectoriel D muni d'une application σ-semi-linéaire $\varphi : D \to D$ (*i.e.* d'une application additive vérifiant $\varphi(\lambda d) = \sigma(\lambda)\varphi(d)$ si $\lambda \in K_0$, $d \in D$). On appelle *(φ, N)-module (sur k)* la donnée d'un φ-module D muni en outre d'une application K_0-linéaire $N : D \to D$ vérifiant

$$N\varphi = p\varphi N.$$

Un *φ-module fini* (resp. *un (φ, N)-module fini*) est un φ-module (resp. un (φ, N)-module) D qui est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur K_0 et tel que φ est bijectif sur D (il revient au même de demander que φ est injectif ou surjectif). Un φ-module fini est donc ce que l'on appelle d'habitude un *F-isocristal sur k*.

Les φ-modules (resp. les (φ, N)-modules) forment de façon évidente une catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$-linéaire, la catégorie des φ-modules pouvant être identifiée à la sous-catégorie pleine de celle des (φ, N)-modules dont les objets sont ceux sur lesquels $N = 0$. Les sous-catégories pleines des φ-modules finis et des (φ, N)-modules finis sont stables par sous-objet, quotient, somme directe et sont encore abéliennes. Celle des (φ, N)-modules finis est aussi stable par extension.

On peut définir le *produit tensoriel* $D_1 \otimes D_2$ de deux (φ, N)-modules D_1 et D_2 ; le K_0-espace vectoriel sous-jacent est le produit tensoriel des K_0-espaces vectoriels sous-jacents et, si $d_1 \in D_1$ et $d_2 \in D_2$, on a $\varphi(d_1 \otimes d_2) = \varphi d_1 \otimes \varphi d_2$ et $N(d_1 \otimes d_2) = Nd_1 \otimes d_2 + d_1 \otimes Nd_2$. Le produit tensoriel de deux φ-modules est encore un φ-module (on a encore $N = 0$) et le produit tensoriel de deux (φ, N)-modules finis est encore un (φ, N)-module fini. Si D est un (φ, N)-module fini, on peut définir son *dual* D^* ; le K_0-espace vectoriel sous-jacent est le dual de D, si $\eta \in D^*$ et $d \in D$, on a $(\varphi\eta)(d) = \sigma(\eta(\varphi^{-1}d))$ et $(N\eta)(d) = -\eta(Nd)$. La catégorie des (φ, N)-modules finis devient ainsi une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$ dont l'objet-unité est K_0, avec $\varphi = \sigma$ et $N = 0$. Il en est de même de la sous-catégorie pleine des φ-modules finis. Comme, pour tout (φ, N)-module fini D, l'action de N est nilpotente (*cf.* plus bas) et comme le noyau de N est un sous-objet, les objets simples de la catégorie des (φ, N)-modules finis sont les mêmes que ceux de la catégories des φ-modules finis.

Le résultat suivant est essentiellement dû à Dieudonné [**Di57**], voir aussi Manin [**Ma63**] ou Demazure [**De72**] :

Proposition 5.1. — *La catégorie des φ-modules finis sur $\overline{k}$ est semi-simple.*

Pour tout nombre rationnel α, posons $\alpha = r/h$ avec $r, h \in \mathbb{Z}$, $h \geqslant 1$, r et h premiers entre eux. Soit $D_{[\alpha]}$ l'unique φ-module fini sur $\overline{k}$ dont le P_0-espace vectoriel sous-jacent

est P_0^h, avec, si $\{d_1, d_2, \ldots, d_h\}$ désigne la base canonique,

$$\varphi(d_i) = d_{i+1} \text{ si } i \neq h \text{ et } \varphi(d_h) = p^r d_1.$$

Alors chaque $D_{[\alpha]}$ est un objet simple et chaque objet simple de cette catégorie est isomorphe à un et un seul de ces $D_{[\alpha]}$.

Si D est un φ-module sur $\overline{k}$ et si $\alpha = r/h$ est comme ci-dessus, le sous-P_0-espace vectoriel D_α de D engendré par les d tels que $\varphi^h d = p^r d$ est stable par φ et est la somme des sous-φ-modules de D isomorphes à $D_{[\alpha]}$. Si D est fini, presque tous les D_α sont nuls et $D = \oplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} D_\alpha$.

Si maintenant D est un φ-module sur k, $\overline{D} = P_0 \otimes_{K_0} D$ a une structure évidente de φ-module sur $\overline{k}$ et D s'identifie à un sous-K_0-espace vectoriel de $\overline{D}$ stable par φ. On pose $D_\alpha = D \cap \overline{D}_\alpha$. On appelle D_α la *partie de pente* α de D. Si D est fini, on a encore

$$D = \oplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} D_\alpha$$

et on appelle cette décomposition la *décomposition isopentique de D*. Les nombres rationnels α tels que D_α est non nul s'appellent *les pentes de D*.

Si D est un (φ, N)-module fini et si $D = \oplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} D_\alpha$ est la décomposition isopentique du φ-module fini sous-jacent, la relation $N\varphi = p\varphi N$ implique que $N(D_\alpha) \subset D_{\alpha-1}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ (et donc, en particulier, que N est nilpotent sur D).

On appelle *(φ, N)-module filtré sur K* (ou *(φ, N)-module filtré* s'il n'y a pas de risque de confusion sur K) la donnée d'un (φ, N)-module D et d'une structure d'espace vectoriel filtré sur le K-espace vectoriel $D_K = K \otimes_{K_0} D$ (§ 4.2). Les (φ, N)-modules filtrés forment, de manière évidente, une catégorie additive $\mathbb{Q}_p$-linéaire que nous notons $\underline{M}$.

Si $f : D' \to D$ et $g : D \to D''$ sont des morphismes de (φ, N)-modules filtrés, on dit que

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est une *suite exacte courte de (φ, N)-modules filtrés* si la suite sous-jacente de (φ, N)-modules est une suite exacte courte et si

$$0 \longrightarrow D'_K \longrightarrow D_K \longrightarrow D''_K \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de K-espaces vectoriels filtrés.

Un *sous-(φ, N)-module filtré* D' d'un (φ, N)-module filtré D est un sous-K_0-espace vectoriel stable par φ et N, où l'on munit $D'_K = K \otimes_{K_0} D' \subset K \otimes_{K_0} D = D_K$ de la filtration induite. Il existe alors sur le K_0-espace vectoriel quotient $D'' = D/D'$ une unique structure de (φ, N)-module filtré telle que

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte courte de (φ, N)-module filtrés ; on l'apelle le *(φ, N)-module filtré quotient* de D par D'.

On dit qu'un (φ, N)-module filtré est *fini* si le (φ, N)-module sous-jacent l'est. Si D_1 et D_2 sont deux (φ, N)-modules filtrés et si l'un des deux est fini, on peut définir le (φ, N)-module filtré $D_1 \otimes D_2$: le (φ, N)-module sous-jacent est le produit tensoriel sous-jacent et le K-espace vectoriel $(D_1 \otimes D_2)_K$ s'identifie à $(D_1)_K \otimes_K (D_2)_K$ et a une structure d'espace vectoriel filtré (§ 4.2). On peut définir de la même façon le (φ, N)-module filtré *dual* d'un (φ, N)-module filtré fini. La catégorie des (φ, N)-modules filtrés finis n'étant pas abélienne n'est pas tannakienne, mais le produit tensoriel a toutes les bonnes propriétés qu'on pense. En particulier, K_0, avec $\varphi = \sigma$, $N = 0$ et la filtration de $K \otimes_{K_0} K_0 = K$ définie par

$$\mathrm{Fil}^i K = \begin{cases} K & \text{si } i \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

est un objet-unité.

A tout (φ, N)-module filtré fini D, on peut associer deux invariants numériques $t_N(D), t_H(D) \in \mathbb{Z}$ (ici $N =$ Newton et $H =$ Hodge) :

i) Le premier ne dépend que de la structure de φ-module sous-jacente à D : si $\dim_{K_0} D = 1$, si d est un générateur de D et si $\varphi d = \lambda d$, $t_N(D)$ est la valuation p-adique de λ (si $k \neq \mathbb{F}_p$, λ dépend du choix de la base, mais pas sa valuation p-adique) ; si maintenant $\dim_{K_0} D = h$, on pose $t_N(D) = t_N(\wedge^h D)$ (on peut voir $\wedge^h D$ comme un sous-objet de $D^{\otimes^h}$). Si $D = \oplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_\alpha$ est la décomposition isopentique de D, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \dim_{K_0} D_\alpha \in \mathbb{Z}$, pour tout α et on a aussi $t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \alpha \dim_{K_0} D_\alpha$.

ii) Le second ne dépend que de la filtration de D_K : si $\dim_{K_0} D = 1$, $t_H(D)$ est le plus grand entier i tel que $\mathrm{Fil}^i D_K = D_K$; si maintenant $\dim_{K_0} D = h$, on pose $t_H(D) = t_H(\wedge^h D)$. On a aussi $t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K(\mathrm{Fil}^i D_K / \mathrm{Fil}^{i+1} D_K)$.

On appelle (φ, N)-*module filtré faiblement admissible* tout (φ, N)-module filtré fini D vérifiant les deux conditions suivantes :

i) on a $t_H(D) = t_N(D)$;

ii) pour tout sous-(φ, N)-module filtré D' de D, $t_H(D') \leqslant t_N(D')$.

On note $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{M}$ dont les objets sont les (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles. Le résultat suivant est facile à vérifier (*cf.* [**Fo94b**]) :

Proposition 5.2. — *La catégorie $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$ est abélienne. Si D est un objet de $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$, les sous-objets de D dans $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$ sont les sous-(φ, N)-modules filtrés D' de D tels que $t_H(D') = t_N(D')$.*

En revanche, le résultat suivant est beaucoup plus difficile :

Proposition 5.3. — *Le produit tensoriel de deux (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles est faiblement admissible.*

Ce résultat équivaut au fait que la catégorie $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$ est tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$. Il avait d'abord été prouvé lorsque $N = 0$ sur chacun d'eux par Laffaille [**La80**] pour $K = K_0$

et par Faltings [**Fa94**] pour K quelconque ; puis dans le cas général par Totaro [**To96**]. C'est aussi une conséquence triviale du théorème 5.9 ci-dessous.

5.2. Les anneaux B_{cris} et B_{st}. — On se propose de rappeler brièvement la construction de quelques unes des principales propriétés des anneaux B_{cris} et B_{st}. On renvoie à [**Fo94a**] pour les preuves qui sont immédiates, sauf celles des propositions 5.4 et 5.5.

Reprenons les notations du § 3.1. En particulier, θ désigne la projection de B_{dR}^+ sur C et ξ est un générateur du noyau de la restriction de θ à $W(R)$. Notons A_{cris} le sous-anneau de B_{dR}^+ formé des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m/m!$, avec les $a_m \in W(R)$ tendant p-adiquement vers 0 lorsque $m \mapsto +\infty$. Cet anneau s'identifie au complété pour la topologie p-adique de la sous-$W(R)$-algèbre A_{cris}^0 de B_{dR}^+ engendrée par les $\xi^m/m!$, pour $m \in \mathbb{N}$ (qui est contenue dans $W(R)[1/p]$ et séparée pour la topologie p-adique).

L'anneau A_{cris} contient t et $t^{p-1} \in pA_{\mathrm{cris}}$. On pose $B_{\mathrm{cris}}^+ = A_{\mathrm{cris}}[1/p] \subset B_{\mathrm{dR}}^+$ et $B_{\mathrm{cris}} = B_{\mathrm{cris}}^+[1/t] = A_{\mathrm{cris}}[1/t] \subset B_{\mathrm{dR}}$.

On note φ l'endomorphisme de Frobenius sur $W(R)$ et $W(R)[1/p]$. L'anneau A_{cris}^0 est stable par φ qui s'étend à A_{cris} par continuité, ainsi qu'à B_{cris}^+. On a $\varphi t = pt$ et φ s'étend aussi à B_{cris} en posant $\varphi(1/t) = 1/pt$.

Remarque. — Rappelons (§ 3.2) que $B_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim_{r \geqslant 1} B_r$ et que chaque B_r a une structure d'espace de Banach p-adique. Munissons B_{dR}^+ de la topologie de la limite projective des B_r (qui est moins fine que sa topologie d'anneau de valuation discrète). Alors B_{cris}^+ est fermé dans B_{dR}^+ et c'est un espace de Banach p-adique dont la topologie est induite par celle de B_{dR}^+.

On a $\xi = [\pi] - p$. Pour tout $g \in G_K$, il existe un unique $a(g) \in \mathbb{Z}_p$ tel que, dans R, $g(\pi) = \varepsilon^{a(g)}\pi$. On note B_{st} l'algèbre des polynômes en une indéterminée notée $\log[\pi]$ à coefficients dans B_{cris}. On prolonge l'action de φ et celle de G_K sur B_{cris} à B_{st}, en posant, avec des notations évidentes,

$$\varphi\Big(\sum b_n(\log[\pi])^n\Big) = \sum \varphi(b_n)p^n(\log[\pi])^n$$

$$\text{et} \quad g\Big(\sum b_n(\log[\pi])^n\Big) = \sum g(b_n)(\log[\pi] + a(g)t)^n \quad \text{pour tout } g \in G_K.$$

Enfin, on note N l'unique B_{cris}-dérivation de B_{st} telle que $N(\log[\pi]) = -1$.

L'action de φ et celle de N commutent à celle de G_K. Comme on a aussi $N\varphi = p\varphi N$, cela nous permet de considérer B_{st} comme un (φ, N)-module sur k et sur $\overline{k}$ (en un sens évident, c'est une (φ, N)-*algèbre, munie d'une action de* G_K).

Cette construction est indépendante du choix de π en ce sens que si l'on choisit un autre $\pi' \in R$ tel que $\pi'^{(0)} = p$, il existe $b \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\pi' = \varepsilon^b\pi$ et l'homomorphisme de $B_{\mathrm{cris}}-$algèbre de $B_{\mathrm{cris}}[\log[\pi']]$ sur $B_{\mathrm{cris}}[\log[\pi]]$ qui envoie $\log[\pi']$ sur $\log[\pi] + bt$ est un isomorphisme compatible avec toutes les structures dont on vient de parler.

Dans B_{dR}^+, $\frac{[\pi]}{p} - 1 = \xi/p \in \operatorname{Ker}\theta$, ce qui fait que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big(\frac{[\pi]}{p}-1\Big)^n/n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\xi^n/np^n$$

converge vers un élément qu'il est naturel de noter $\log([\pi]/p)$. Par conséquent, si l'on prolonge le logarithme p-adique usuel en posant $\log(p) = 0$, on peut voir $\log[\pi]$ comme un élément de B_{dR}. On a le résultat suivant :

***Proposition 5.4* ([Fo94a], th. 4.2.4).** — *L'unique homomorphisme de $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}}$-algèbres*

$$K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}} \longrightarrow B_{\mathrm{dR}}$$

qui envoie $\log[\pi]$ *sur* $\log([\pi]/p)$ *est injectif et compatible avec l'action de G_K.*

On utilise ce résultat pour identifier non seulement B_{cris} mais aussi $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}}$, B_{st} et $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}}$ à des sous-anneaux de B_{dR}. On munit $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}}$ de la filtration induite par celle de B_{dR}. Ainsi B_{st} a une structure naturelle de (φ, N)-module filtré sur k et sur $\overline{k}$. En un sens évident, c'est une (φ, N)-*algèbre filtrée munie d'une action de G_K*.

Il est immédiat que B_{cris} s'identifie au noyau de N dans B_{st}. On pose

$$B^0 = \{b \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi(b) = b\} = \{b \in B_{\mathrm{st}} \mid Nb = 0 \text{ et } \varphi(b) = b\}.$$

L'application qui à $\eta : K_0 \to B_{\mathrm{st}}$ associe $\eta(1)$ permet d'identifier la $\mathbb{Q}_p$-algèbre $\operatorname{Hom}_{(\varphi,N)-\mathrm{modules}}(K_0, B_{\mathrm{st}})$ à B^0.

***Proposition 5.5* ([Fo94a], th. 5.3.7).** — *On a $B^0 \cap B_{\mathrm{dR}}^+ = \mathbb{Q}_p$.*

5.3. Représentations semi-stables et (φ, N)-modules filtrés admissibles

Soit V une représentation p-adique de G_K. Le B_{st}-module $B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ a une structure naturelle de (φ, N)-module filtré sur K : c'est un K_0-espace vectoriel, on pose $\varphi(b \otimes v) = \varphi b \otimes v$, $N(b \otimes v) = Nb \otimes v$; on a $(B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)_K = B_{\mathrm{st},K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $\operatorname{Fil}^i(B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)_K = \operatorname{Fil}^i B_{\mathrm{st},K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$.

On pose $D_{\mathrm{st}}(V) = (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. Comme l'action de G_K commute à celle de φ et à celle de N, c'est un sous-(φ, N)-module filtré de $B_{\mathrm{st}} \otimes V$. La proposition 5.4 nous permet d'identifier $K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) = (B_{\mathrm{st},K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ à un sous-K-espace vectoriel de $(B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = D_{\mathrm{dR}}(V)$; on a donc

$$\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) = \dim_K (B_{\mathrm{st},K} \otimes V)^{G_K} \leqslant \dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p} V.$$

Comme l'action de φ est injective sur B_{st}, $D_{\mathrm{st}}(V)$ est un (φ, N)-module filtré fini sur K. On voit que l'on peut considérer D_{st} comme un foncteur $\mathbb{Q}_p$-linéaire de la catégorie $\operatorname{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ des représentations p-adiques de G_K dans celle des (φ, N)-modules filtrés finis.

On dit que la représentation V est *semi-stable* si $\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ (ce qui implique que V est de de Rham et que $K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V)$ s'identifie, en tant que K-espace

vectoriel filtré à $D_{\mathrm{dR}}(V)$). On dit que la représentation V est *cristalline* si elle est semi-stable et si en outre $N = 0$ sur $D_{\mathrm{st}}(V)$. Cela revient à demander que le K_0-espace vectoriel $D_{\mathrm{cris}}(V) = D_{\mathrm{st}}(V)_{N=0} = (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ qui, a priori, est de dimension finie inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$ est égale à cette dimension.

On dit qu'un (φ, N)-module filtré D est *admissible* s'il existe une représentation p-adique semi-stable V de G_K telle que $D \simeq D_{\mathrm{st}}(V)$. Cela implique en particulier que D est fini. On note $\underline{M}^a$ la sous-catégorie pleine de $\underline{M}$ dont les objets sont les (φ, N)-modules filtrés admissibles.

Rappelons que B_{cris} contient le corps P_0 des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\overline{k}$. La fermeture algébrique $\overline{P}$ de P dans B_{dR} est une clôture algébrique de P_0 contenant le corps $P = KP_0$ et le groupe d'inertie I_K de l'extension $\overline{K}/K$ s'identifie au groupe de Galois de l'extension $\overline{P}/P$.

Proposition 5.6

i) Soit V une représentation p-adique de G_K de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_p$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) la représentation V est cristalline,

(b) la représentation V est semi-stable,

(c) il existe un entier $i \in \mathbb{Z}$ tel que $V(-i)$ est non ramifiée.

S'il en est ainsi, il existe un sous-K_0-espace vectoriel E de dimension 1 de P_0 stable par G_K tel que, si v est un élément non nul de V et si b_0 est un élément non nul de E, alors $b_0 t^{-i} \otimes v$ est une base de $D_{\mathrm{st}}(V)$ sur K_0.

ii) Soit D un (φ, N)-module filtré de dimension 1 sur K_0. Alors D est admissible si et seulement s'il est faiblement admissible.

Lemme 5.7

i) Soit $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{k}}/\mathrm{k}) = G_K/I_K$. On a $H^1_{\mathrm{cont}}(G_k, W(\overline{k})^*) = 0$.

ii) Pour toute unité u de l'anneau $W(\overline{k})$, il existe un élément non nul $x \in W(\overline{k})$ tel que $\varphi(x) = ux$.

Démonstration. — Prouvons (i) : Posons $U_0 = W(\overline{k})^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $U_n = 1 + p^n W(\overline{k})$. Les $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une filtration décroissante, exhaustive et séparée de $W(\overline{k})^*$ par des sous-groupes fermés,la topologie induite sur chaque U_n/U_{n+1} étant la topologie discrète. Il suffit donc de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout 1-cocycle continu $f : G_k \to U_n$, il existe $a \in U_n$ tel que $f - \partial a$ soit à valeurs dans U_{n+1}, ou encore que $H^1(G_k, U_n/U_{n+1}) = 0$ pour tout n, ce qui est bien connu, puisque U_0/U_1 s'identifie à $\overline{k}^*$, tandis que, pour $n \geqslant 1$, U_n/U_{n+1} est isomorphe au groupe additif de $\overline{k}$.

L'assertion (ii), facile à vérifier directement, est un cas particulier du théorème sur la classification des F-isocristaux sur un corps algébriquement clos (prop. 5.1). □

Prouvons la proposition 5.6. — L'implication (a) ⇒ (b) est claire.

Montrons que (b) $\Rightarrow$ (c). Il est clair que, si V est semi-stable en tant que représentation de G_K, elle l'est aussi en tant que représentation de $I_K = \mathrm{Gal}(\overline{P}/P)$ et on peut supposer k algébriquement clos. Come V est de de Rham, il existe (prop. 4.3) $i \in \mathbb{Z}$ tel que G_K opère sur $V(-i)$ à travers un groupe fini. Comme t^i est un élément inversible de B_{st} qui est un générateur du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbb{Q}_p(i)$, $V(-i)$ est aussi semi-stable et l'on peut supposer que $i = 0$. Si $v \in V$ est non nul, il existe alors un élément non nul $c \in \overline{K} = \overline{P}$ tel que $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est le K-espace vectoriel engendré par $c \otimes v$. Comme $D_{\mathrm{st}}(V) \subset D_{\mathrm{dR}}(V)$, on peut choisir $c \in B_{\mathrm{st}}$. Mais $B_{\mathrm{st}} \cap \overline{K} = K_0$ (pour tout $c \in B_{\mathrm{st}} \cap \overline{K} = K_0$, on a $K(c)_0 = K_0$ et l'application $K(c) \otimes_{K(c)_0} B_{\mathrm{st}} \to B_{\mathrm{dR}}$ est injective) donc $c \in K_0$ et l'action de $G_K = I_K$ sur V est triviale.

Montrons que (c) $\Rightarrow$ (a). Si $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ désigne le caractère cyclotomique, il existe un homomorphisme continu $\eta : G_k \to \mathbb{Z}_p^*$ tel que G_K opère sur V via le caractère $\eta\chi^i$. On peut voir η comme un 1-cocycle continu de G_k à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^* \subset W(\overline{k})^*$ et l'assertion (i) du lemme 5.7 implique qu'il existe $u \in W(\overline{k})^*$ tel que $g(u) = \eta(g)u$, pour tout $g \in G_k$. Si v est un élément non nul de V, on voit que $\frac{1}{ut^i} \otimes v$ est un élément non nul de $D_{\mathrm{cris}}(V)$ et la représentation V est bien cristalline. En outre, si l'on pose $b_0 = 1/u$, on voit que $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est bien comme on veut, ce qui termine la preuve de l'assertion (i).

Montrons alors (ii). Si D est admissible, alors, avec les notations ci-dessus, on peut supposer que D est le K_0-espace vectoriel engendré par $d = b_0 t^{-i} \otimes v$. On voit que $\varphi(d) = p^{-i}cd$, où $c = \varphi(b_0)/b_0 = \sigma(b_0)/b_0$ est une unité de K_0 et $t_N(D) = -i$. On voit aussi que $d \in \mathrm{Fil}^{-i} B_{\mathrm{dR}}$ mais $d \notin \mathrm{Fil}^{-i+1} B_{\mathrm{dR}}$ et $t_H(D) = -i = t_N(D)$.

Réciproquement si D est faiblement admissible et si $t_H(D) = t_N(D) = -i$, et si l'on choisit un élément n on nul d de D, on a $\varphi(d) = p^{-i}cd$, avec $c \in W(k)^*$. D'après l'assertion (ii) du lemme 5.7, il existe $x \in W(\overline{k})$ tel que $\varphi(x)/x = 1/c$. On voit que le sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V de B_{cris} engendré par $v = xt^i$ est stable par G_K et que $\frac{1}{xt^i} \otimes v \in D_{\mathrm{cris}}(V)$, ce qui implique que V est cristalline. Comme le (φ, N)-module filtré $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est isomorphe à D, D est admissible. □

Soit maintenant D un (φ, N)-module filtré fini. On pose

$$V_{\mathrm{st}}(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{M}}(K_0, B_{\mathrm{st}} \otimes D).$$

L'application qui envoie $\eta \in V_{\mathrm{st}}(D)$ sur $\eta(1)$ permet d'identifier $V_{\mathrm{st}}(D)$ au sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D$ formé des x vérifiant $\varphi x = x$, $Nx = 0$ et l'image de x dans $B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K$ est dans le Fil^0 de ce K-espace vectoriel. Cet espace est stable par G_K, ce qui permet de considérer V_{st} comme un foncteur $\mathbb{Q}_p$-linéaire de la catégorie des (φ, N)-modules filtrés finis dans celle des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels munis d'une action linéaire de G_K. Lorsque D est tel que $V_{\mathrm{st}}(D)$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, l'action de G_K est continue, ce qui permet de considérer $V_{\mathrm{st}}(D)$ comme une représentation p-adique de G_K.

Théorème 5.8

i) L'application évidente

$$K_0 \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(\mathbb{Q}_p) \quad (\text{ resp. } \quad \mathbb{Q}_p \longrightarrow V_{\mathrm{st}}(K_0)\ )$$

est un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés (resp. de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels).

ii) Pour toute représentation p-adique semi-stable V de G_K, l'application B_{st}-linéaire

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \longrightarrow B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

déduite de l'inclusion de $D_{\mathrm{st}}(V)$ dans $B_{\mathrm{st}} \otimes V$ est un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés.

iii) La sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K)$ de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$ dont les objets sont les représentations semi-stables est une sous-catégorie tannakienne.

iv) Comme sous-catégorie pleine de $\underline{M}$, la catégorie $\underline{M}^a$ est stable par facteur direct, somme-directe, produit tensoriel et dual.

v) Tout (φ, N)-module filtré admissible est faiblement admissible. La catégorie $\underline{M}^a$ est abélienne et, si D est un objet de $\underline{M}^a$, les sous-objets (resp. les quotients) de D dans $\underline{M}^a$ sont les les sous-objets (resp. les quotients) de D dans $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$.

vi) La restriction de D_{st} à $\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K)$ est une $\otimes$-équivalence de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K)$ sur $\underline{M}^a$ et la restriction de V_{st} à $\underline{M}^a$ en est un $\otimes$-quasi-inverse.

De façon précise, l'assertion (iii) signifie que, en tant que sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$, la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K)$ est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual. L'assertion (vi) signifie que $V_{\mathrm{st}} : \mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K) \to \underline{M}^a$ est une équivalence de catégorie et $D_{\mathrm{st}} : \underline{M}^a \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K)$ est un quasi-inverse et qu'en outre,

a) si V_1 et V_2 sont deux représentations semi-stables, l'application

$$D_{\mathrm{st}}(V_1) \otimes D_{\mathrm{st}}(V_2) \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V_1 \otimes V_2),$$

induite par la multiplication dans B_{st}, est un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés ;

b) si V est une représentation p-adique semi-stable et si V^* désigne la représentation duale, l'application bilinéaire évidente

$$D_{\mathrm{st}}(V^*) \times D_{\mathrm{st}}(V) \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V^* \otimes V) \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(\mathbb{Q}_p) = K_0$$

induit une dualité de (φ, N)-modules filtrés ;

c) que si D_1 et D_2 sont des (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles, $D_1 \otimes D_2$ est aussi faiblement admissible et l'application

$$V_{\mathrm{st}}(D_1) \otimes V_{\mathrm{st}}(D_2) \longrightarrow V_{\mathrm{st}}(D_1 \otimes D_2),$$

induite par la multiplication dans B_{st}, est un isomorphisme de représentations p-adiques de G_K ;

d) que si D est un (φ, N)-module filtré faiblement admissible, le (φ, N)-module filtré dual D^* l'est aussi et que l'application bilinéaire évidente

$$V_{\rm st}(D^*) \times V_{\rm st}(D) \longrightarrow V_{\rm st}(D^* \otimes D) \longrightarrow V_{\rm st}(K_0) = \mathbb{Q}_p$$

induit une dualité de représentations p-adiques.

La preuve du théorème 5.8, qui repose sur les propositions 5.4, 5.5 et 5.6, est donnée en détail dans [**Fo94b**]. En voici les grandes lignes :

(1) On montre d'abord (i) : On a $D_{\rm st}(\mathbb{Q}_p) = B_{\rm st}^{G_K}$. Comme $K_0 \subset B_{\rm st}^{G_K} \subset B_{\rm dR}^{G_K} = K$, $D_{\rm st}(\mathbb{Q}_p)$ est une extension finie K' de K_0 contenue dans $K \cap B_{\rm st}$. Le fait que l'application naturelle $K \otimes_{K_0} B_{\rm st} \to B_{\rm dR}$ soit injective (prop. 5.4) implique que $K' = K_0$.

De même, l'application $\eta \mapsto \eta(1)$ identifie $V_{\rm st}(\mathbb{Q}_p)$ à $B^0 \cap B_{\rm dR}^+$ et l'égalité $\mathbb{Q}_p = V_{\rm st}(K_0)$ n'est autre que la proposition 5.5.

(2) On montre ensuite (ii) : On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_{\rm st} \otimes_{K_0} D_{\rm st}(V) & \longrightarrow & B_{\rm st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{\rm dR} \otimes_K D_{\rm dR}(V) & \longrightarrow & B_{\rm dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \end{array}$$

et les deux flèches verticales ainsi que la flèche horizontale inférieure sont injectives. Il en est donc de même de la flèche horizontale supérieure qui nous permet d'identifier $B_{\rm st} \otimes D_{\rm st}(V)$ à un sous-(φ, N)-module de $B_{\rm st} \otimes V$. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_h$ une base de V sur $\mathbb{Q}_p$ et $d_1, d_2, \ldots, d_h$ une base de $D_{\rm st}(V)$ sur K_0. Le déterminant b de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $1 \otimes d_i$ sur la base des $1 \otimes v_i$ est un élément non nul de $B_{\rm st}$. On voit que $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_h$ est une base de la représentation p-adique de G_K de dimension 1 qui est $\det\ V = \wedge^h V$ et que $b \otimes v$ est un élément non nul de $D_{\rm st}(\det\ V)$. Par conséquent, $\det\ V$ est semi-stable. Il en résulte (prop. 5.6), que b est de la forme $b = b_0 t^{-i}$, avec $i \in \mathbb{Z}$ et $b_0 \in P_0$, non nul donc que b est inversible dans $B_{\rm st}$.

Ceci prouve que l'application qui nous intéresse est un isomorphisme de (φ, N)-modules. Le fait que c'est aussi un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés résulte alors de l'assertion (1) du théorème 4.1.

(3) Si V est une représentation p-adique semi-stable et si $D = D_{\rm st}(V)$, l'application naturelle

$$V \longrightarrow V_{\rm st}(D)$$

est un isomorphisme : en effet l'assertion précédente montre que $B_{\rm st} \otimes D$ s'identifie à $B_{\rm st} \otimes V$ en tant que (φ, N)-module filtré et

$$V_{\rm st}(D) = \underline{\rm Hom}_{\underline{M}}(K_0, B_{\rm st} \otimes V) = \underline{\rm Hom}_{\underline{M}}(K_0, B_{\rm st}) \otimes V = V_{\rm st}(K_0) \otimes V = \mathbb{Q}_p \otimes V = V.$$

(4) La catégorie ${\rm Rep}_{\rm st}(G_K)$ est une sous-catégorie pleine de ${\rm Rep}_{\rm dR}(G_K)$ stable par somme directe, sous-objet, quotient (donc est abélienne) et toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

de représentations p-adiques semi-stables induit une suite exacte courte de (φ, N)-modules filtrés

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V') \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V) \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V'') \longrightarrow 0.$$

La stabilité par somme directe est évidente. Si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de représentations p-adiques, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V') \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V) \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V'').$$

Si V est semi-stable, on a $\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Comme $\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V') \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p} V'$ et $\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V'') \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p} V''$, ces deux inégalités sont nécessairement des égalités. Par conséquent V' et V'' sont bien semi-stables et la suite $(*)$ est bien une suite exacte courte de (φ, N)-modules. Le fait que ce soit aussi une suite exacte de (φ, N)-modules filtrés résulte du théorème 4.2.

(5) La catégorie $\underline{M}^a$ est abélienne, la restriction de D_{st} à $\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K)$ induit une équivalence de cette catégorie sur $\underline{M}^a$, la restriction de D_{st} à $\underline{M}^a$ étant un quasi-inverse : cela résulte formellement de (3) et (4).

Si V_1 et V_2 sont deux représentations p-adiques semi-stables, $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$ l'est aussi et l'application naturelle,

$$D_{\mathrm{st}}(V_1) \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V_2) \longrightarrow D_{\mathrm{st}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2),$$

induite par la multiplication dans B_{st}, est un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés :

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_{\mathrm{st}}(V_1) \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V_2) & \longrightarrow & D_{\mathrm{st}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_{K_0} D_{\mathrm{dR}}(V_2) & \longrightarrow & D_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) \end{array}$$

dont les deux flèches verticales et la flèche horizontale inférieure f_K sont injectives. On en déduit que la flèche horizontale supérieure f est injective. Pour des raisons de dimension, $V_1 \otimes V_2$ est donc semi-stable et f est un isomorphisme de (φ, N)-modules. Comme f_K est un isomorphisme de K-espaces vectoriels filtrés (th. 4.2), f est bien un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés.

(6) Si V est une représentation p-adique semi-stable, il en est de même de sa duale V^* et l'application bilinéaire naturelle $D_{\mathrm{st}}(V^*) \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \to D_{\mathrm{st}}(\mathbb{Q}_p) = K_0$ identifie le (φ, N)-module filtré $D_{\mathrm{st}}(V^*)$ au dual de $D_{\mathrm{st}}(V)$:

Soit $h = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Le cas où $h = 1$ est immédiat. Le cas général s'en déduit en remarquant que V^* s'identifie à $\wedge^{h-1} V \otimes (\wedge^h V)^*$.

(7) Tout morphisme de $\underline{M}^a$ est strict. Autrement dit, si $\delta : D_1 \to D_2$ est un morphisme de (φ, N)-modules filtrés et si D_1 et D_2 sont admissibles, alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\delta_K(\mathrm{Fil}^i(D_1)_K) = \mathrm{Fil}^i(D_2)_K \cap \delta_K((D_1)_K)$:

D'après (5), on peut supposer qu'il existe un morphisme de représentations p-adiques semi-stables $\eta : V_1 \to V_2$ tel que δ est le morphisme $D_{\mathrm{st}}(\eta) : D_{\mathrm{st}}(V_1) \to D_{\mathrm{st}}(V_2)$. Le morphisme de K-espaces vectoriels filtrés qui en résulte s'identifie au morphisme $D_{\mathrm{dR}}(\eta) : D_{\mathrm{dR}}(V_1) \to D_{\mathrm{dR}}(V_2)$ qui est bien strict (th. 4.2).

(8) Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors D est faiblement admissible. Si $h = \dim_{K_0} D$, alors $\wedge^h D$, facteur direct de $D^{\otimes^h}$ est admissible (*cf.* aussi (2)) et de dimension 1 : on a donc $t_H(D) = t_H(\wedge^h D) = t_N(\wedge^h D) = t_N(D)$. Soit D' un sous-K_0-espace vectoriel de D de dimension r stable par φ et N. Il faut montrer que $t_H(D') \leqslant t_N(D')$. Quitte à remplacer D par $\wedge^r D$ (qui est admissible comme facteur direct de $D^{\otimes^r}$) et D' par $\wedge^r D'$, on peut supposer $r = 1$. Supposons que $t_H(D') > t_N(D')$ et soit Δ le (φ, N)-module filtré de dimension 1 sur K_0 qui est D' en tant que (φ, N)-module et sur lequel la filtration est définie par

$$\mathrm{Fil}^i \Delta_K = \begin{cases} \Delta_K & \text{si } i \leqslant t_N(D') \\ 0 & \text{si } i > t_N(D') \end{cases}$$

Alors Δ est un (φ, N)-module filtré faiblement admissible de dimension 1, donc admissible (prop. 5.6) et l'inclusion de D' dans D induit un morphisme de Δ dans D. Ce morphisme n'est pas strictement compatible aux filtrations, ce qui contredit (8).

(9) Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, les sous-objets de D dans $\underline{M}^a$ sont les sous-objets de D dans $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$:

D'après (9), si D' est un sous-objet de D dans $\underline{M}^a$, il est faiblement admissible. Il s'agit donc de montrer que tout sous-objet de D dans $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$ est admissible, *i.e.* que si D' est un sous-K_0-espace vectoriel de D, stable par φ et N qui est tel que $t_H(D') = t_N(D')$, alors D' est admissible. Si D' est de dimension 1, cela résulte de la proposition 5.6. Le cas général s'en déduit ainsi : on peut supposer qu'il existe une représentation p-adique semi-stable V de G_K telle que $B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D$ s'identifie à $B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Un lemme facile d'algèbre linéaire nous dit que si M est un sous-B_{st}-module libre de rang r de $B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D = B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, alors, pour qu'il existe un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V' de V tel que $M = B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'$, il faut et il suffit qu'il existe une droite L de $\wedge^r_{\mathbb{Q}_p} V$ telle que $\wedge^h_{B_{\mathrm{st}}} M = B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$; ceci nous ramène au cas où $D' = 1$. □

Remarque. — Il résulte de ce théorème que, si V est une représentation p-adique de G_K, les K_0-espace vectoriels $D^*_{\mathrm{st}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{\mathrm{st}})$ et $D^*_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{\mathrm{cris}})$ sont de dimension inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$ et que V est semi-stable (resp. cristalline) si et seulement si on a l'égalité. Dans ce cas $D^*_{\mathrm{st}}(V)$ (resp. $D^*_{\mathrm{cris}}(V)$) s'identifie au (φ, N)-module filtré dual de $D_{\mathrm{st}}(V)$ (resp. $D_{\mathrm{cris}}(V)$).

Conjecturé depuis longtemps, le résultat suivant a été prouvé récemment [**CF00**] :

Théorème 5.9. — *Tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible est admissible*

Autrement dit, compte-tenu du théorème 5.8, on a $\underline{M}^a = \underline{M}^{\mathrm{fa}}$, ce qui fait que l'on a une description explicite et élémentaire de l'image essentielle de la restriction à la catégorie des représentations p-adiques semi-stables du foncteur V_{st}. Ou encore, comme sous-catégorie pleine de $\underline{M}$, la catégorie $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$ est stable par produit tensoriel et dual et devient ainsi une catégorie tannakienne, V_{st} induisant une $\otimes$-équivalence entre $\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K)$ et $\underline{M}^{\mathrm{fa}}$, la restriction de D_{st} étant un quasi-inverse.

Dans le reste du paragraphe 5, nous allons d'abord (§ 5.4 et 5.5) établir quelques propriétés supplémentaires concernant les anneaux B_{cris} et B_{st} qui nous paraissent intéressantes. Certaines d'entre elles sont utilisées pour prouver le théorème. Enfin (§ 5.6), nous donnerons quelques idées de la preuve du théorème 5.9 (mais on renvoie à [**CF00**] pour une démonstration complète).

5.4. L'anneau $BW_{\mathrm{cris}}(R)$. — Soient ξ et π comme au paragraphe 3.1. Soit $W(R)\{X\}$ le sous-anneau de l'anneau $W(R)[[X]]$ des séries formelles en X à coefficients dans $W(R)$ formé des séries dont le terme général tend vers 0 pour la topologie p-adique. On note $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ (resp. $\widehat{BW}_{\mathrm{cris}}(R)$) le quotient de $W(R)\{X\}$ (resp. $W(R)[[X]]$) par l'idéal engendré par $pX - \xi^p$. Comme il existe $\beta \in W(R)$ tel que $\xi^p = [\pi]^p + p^2\beta$, $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ (resp. $\widehat{BW}_{\mathrm{cris}}(R)$) s'identifie aussi au quotient de l'anneau $W(R)\{Y\}$ (resp. $W(R)[[Y]]$) par l'idéal engendré par $pY - [\pi]^p$ (il suffit de poser $Y = X - p\beta$).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(\xi^p/p)^m = ((pm)!/p^m)(\xi^{pm}/(pm)!)$ et, comme la suite des $(pm)!/p^m$ tend p-adiquement vers 0, il existe un unique homomorphisme continu $\widehat{\iota}$ de $W(R)$-algèbres de $\widehat{BW}_{\mathrm{cris}}(R)$ dans A_{cris} qui envoie l'image de X sur ξ^p/p, ou encore l'image de Y sur $[\pi]^p/p$. On note aussi $\iota : BW_{\mathrm{cris}}(R) \to A_{\mathrm{cris}}$ le composé de $\widehat{\iota}$ avec la flèche naturelle de $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ dans $\widehat{BW}_{\mathrm{cris}}(R)$.

Proposition 5.10. — *Les homomorphismew $\widehat{\iota}$ et ι définis ci-dessus sont injectifs. Si on les utilise pour identifier $\widehat{BW}_{\mathrm{cris}}(R)$ et $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ à des sous-anneaux de A_{cris}, ces sous-anneaux sont stables par G_K et par φ et on a*

$$\varphi(A_{\mathrm{cris}}) \subset BW_{\mathrm{cris}}(R) \subset \widehat{BW}_{\mathrm{cris}}(R) \subset A_{\mathrm{cris}}.$$

Démonstration. — Montrer l'injectivité de $\widehat{\iota}$ revient à vérifier que le noyau I de l'application de $W(R)[[X]]$ dans B_{dR}^+ qui envoie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ sur $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{np}/p^n$ est l'idéal engendré par $\xi^p - pX$.

Tout $\alpha \in W(R)[[X]]$ peut s'écrire $\alpha = a + X\alpha'$, avec $a \in W(R)$ et $\alpha' \in W(R)[[X]]$. Comme l'image ξ^p/p de X est dans $\mathrm{Fil}^p B_{\mathrm{dR}}$, si $\alpha \in I$, on a $a \in \mathrm{Fil}^p B_{\mathrm{dR}} \cap W(R) = \xi^p W(R)$ et il existe $b \in W(R)$ tel que $a = \xi^p b$; on peut donc écrire $\alpha = b(\xi^p - pX) + X\beta$, avec $\beta = \alpha' + pb \in W(R)[[X]]$. On a $X\beta \in I$ et donc aussi $\beta \in I$.

Si $\alpha \in I$, on voit donc que l'on peut construire de proche en proche des suites $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ d'éléments de $W(R)$ et $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ d'éléments de I tels

que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = (\xi^p - pX)b_n + X\alpha_{n+1}$. On a alors $\alpha = (\xi^p - pX)\gamma$, avec $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ et α appartient bien à l'idéal engendré par $\xi^p - pX$.

Si $\alpha \in W(R)\{X\}$, alors γ aussi et ceci montre que ι aussi est injective.

Pour tout $g \in G_K$, il existe $a \in \mathbb{Z}_p$ tel que $g(\pi) = \varepsilon^a \pi$; on a donc $g([\pi]^p/p) = [\varepsilon^{ap}][\pi]^p/p$ et la stabilité de $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ et $\widehat{BW}_{\mathrm{cris}}(R)$ par G_K s'en déduit. La stabilité par φ résulte de ce que $\varphi([\pi]^p/p) = [\pi^p]^p/p = p^{p-1}([\pi]^p/p)^p$.

Enfin, il existe $a \in W(R)$ tel que $\varphi(\xi) = p(\frac{\xi^p}{p} + a)$. Comme tout élément $x \in A_{\mathrm{cris}}$ peut s'écrire $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n/n!$, avec les $a_n \in W(R)$, tendant p-adiquement vers 0, on a $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n)(p^n/n!)(a + \xi^p/p)^n \in BW_{\mathrm{cris}}(R)$. □

Remarque. — La proposition précédente implique que pour étudier les représentations p-adiques semi-stables, on peut remplacer A_{cris} par $BW_{\mathrm{cris}}(R)$. De façon précise, on a $t \in BW_{\mathrm{cris}}(R)$ et $t^{p-1} \in pBW_{\mathrm{cris}}(R)$, ce qui fait que $BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/p, 1/t] = BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/t]$ et, pour toute représentation p-adique V de G_K,

$$D_{\mathrm{cris}}(V) = (BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/t] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \text{ et } D_{\mathrm{st}}(V) = (BW_{\mathrm{cris}}(R)[\log[\pi], 1/t] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Soient alors

$$\begin{aligned} &S_0(X_0, Y_0) = X_0 + Y_0, \\ &S_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1) = X_1 + Y_1 - \textstyle\sum_{i=1}^{p-1} \left(p^{-1}\binom{p}{i}\right) X_0^i Y_0^{p-i}, \dots, \\ &S_n(X_0, X_1, \dots, X_n, Y_0, Y_1, \dots, Y_n), \ \dots \end{aligned}$$

les polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ en les indéterminées $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui définissent l'addition dans les vecteurs de Witt (*cf.* par exemple, [**CL**], chap. II, § 6). Notons de même

$$P_0(X_0, Y_0), P_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1), P_n(X_0, X_1, \dots, X_n, Y_0, Y_1, \dots, Y_n), \dots$$

les polynômes qui définissent la multiplication.

La proposition suivante permet de considérer $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ comme le complété d'un anneau de « *bivecteurs de Witt* » pour la topologie p-adqiue :

Proposition 5.11. — *Notons $BW^u(R)$ l'ensemble des « bivecteurs de Witt unipotents à coefficients dans R », i.e. des éléments de la forme*

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\dots, a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1 \dots, a_n, \dots),$$

avec les $a_n \in R$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a_n = 0$ pour $n \ll 0$.

i) L'application qui à $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in BW^u(R)$ asocie

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) + \sum_{m\geqslant 1} \frac{[a_m]^{p^m}}{p^m} \in W(R)[1/p]$$

est une bijection de $BW^u(R)$ sur $W(R)[1/p]$.

ii) Utilisons cette bijection pour identifier $BW^u(R)$ et $W(R)[1/p]$. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in BW^u(R)$, $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}} = a + b$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = ab$. Pour tout

$n \in \mathbb{Z}$ fixé, la suite des $S_m(a_{n-m}, a_{n-m+1}, \ldots, a_n, b_{n-m}, b_{n-m+1}, \ldots, b_n)$ est stationnaire et sa limite est s_n, la suite des $P_m(a_{n-m}, a_{n-m+1}, \ldots, a_n, b_{n-m}, b_{n-m+1}, \ldots, b_n)$ est stationnaire et sa limite est u_n.

iii) Avec l'identification précédente, le sous-anneau $W(R)[\xi^p/p]$ de $W(R)[1/p]$ s'identifie au sous-anneau $BW^u_{\mathrm{cris}}(R)$ de $BW^u(R)$ formé des $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant $v_R(a_m) \geqslant mp^{1-m}$ pour tout $m > 0$. Il est séparé pour la topologie p-adique et $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ est le complété de $BW^u_{\mathrm{cris}}(R)$ pour la topologie p-adique.

Démonstration. — Les assertions (i) et (ii) sont des conséquences immédiates de la définition des vecteurs de Witt.

On a $W(R)[\xi^p/p] = W(R)[\pi^p]/p$ et $v_R(\pi) = 1$. Dans $W(R)[1/p]$, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $([\pi^p]/p)^m = [\pi^{mp}]/p^m$. C'est le bivecteur dont toutes les composantes sont nulle sauf celle d'indice $-m$ qui est $(\pi^{mp})^{p^{-m}} = (\pi)^{mp^{1-m}}$ dont la valuation est égale à mp^{1-m}. L'assertion (iii) s'en déduit facilement. □

5.5. Les anneaux B^0, B^h_{st}, B^∞_{st}, ... — On note B^0 la sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{cris} formée des b tels que $\varphi b = b$. C'est aussi le sous-anneau de B_{st} formé des b tels que $\varphi b = b$ et $Nb = 0$. En tant que $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, B^0 s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des morphismes de (φ, N)-modules de K_0 dans B_{st}. On note aussi $B^{\varphi=1}_{\mathrm{st}}$ la sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{st} formée des b tels que $\varphi b = b$ (observons que $B^{\varphi=1}_{\mathrm{st}}$ n'est pas stable par N).

Pour tout nombre rationnel α, on note $B_{\mathrm{cris},\alpha}$ (resp. $B_{\mathrm{st},\alpha}$) la partie de pente α de B_{cris} (resp. B_{st}) *vu comme un φ-module sur $\overline{k}$* (si $\alpha = r/h$, avec r et h entiers, c'est donc le sous-P_0-espace vectoriel de B_{cris} (resp. B_{st}) engendré par les b tels que $\varphi^h b = p^r b$. Pour tout entier $h \geqslant 1$, on pose aussi

$$B^h_{\mathrm{cris}} = \oplus_{h\alpha\in\mathbb{Z}} B_{\mathrm{cris},\alpha} \quad \text{et} \quad B^h_{\mathrm{st}} = \oplus_{h\alpha\in\mathbb{Z}} B_{\mathrm{st},\alpha}.$$

On voit que $B_{\mathrm{cris},0}$ (resp. $B_{\mathrm{st},0}$) est le plus petit sous-anneau de B_{cris} (resp. B_{st}) contenant B^0 (resp. $B^{\varphi=1}_{\mathrm{st}}$) et P_0. On voit aussi que chaque $B_{\mathrm{cris},\alpha}$ est un sous-$B_{\mathrm{cris},0}$-module de B_{cris} et chaque B^h_{cris} une sous-$B_{\mathrm{cris},0}$-algèbre. De même, chaque $B_{\mathrm{st},\alpha}$ est un sous-$B_{\mathrm{st},0}$-module de B_{st} et chaque B^h_{st} une sous-$B_{\mathrm{st},0}$-algèbre.

Si h divise h', $B^h_{\mathrm{st}} \subset B^{h'}_{\mathrm{st}}$. Posons enfin $B^\infty_{\mathrm{st}} = \cup_{h\in\mathbb{N}^*} B^h_{\mathrm{st}}$. On voit que, si V est une représentation p-adique semi-stable, on a $D_{\mathrm{st}}(V) = (B^\infty_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ et si D est un (φ, N)-module filtré admissible, on a $V_{\mathrm{st}}(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{M}}(K_0, D \otimes B^\infty_{\mathrm{st}})$, ce qui fait que, pour l'étude des représentations semi-stables, on peut remplacer B_{st} par B^∞_{st}. Pour une représentation semi-stable V donnée (de même que pour toute la $\otimes$-catégorie qu'elle engendre) on peut même remplacer B_{st} par un B^h_{st}, avec h un entier convenable.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de décrire les objets qui viennent d'être introduits à l'intérieur de B_{dR}, avec l'action de φ et de N. En particulier, on va voir que, pour tout α, $B_{\mathrm{cris},\alpha}$ est un $B_{\mathrm{cris},0}$-module libre de rang 1, $B_{\mathrm{st},\alpha}$ un $B_{\mathrm{st},0}$-module libre de rang 1 et que, pour chaque h, $B^h_{\mathrm{cris}} = B_{\mathrm{cris},0}[t_h, t_h^{-1}]$ (resp. $B^h_{\mathrm{st}} =$

$B_{\mathrm{st},0}[t_h, t_h^{-1}]$), algèbre des polynômes de Laurent à coefficients dans $B_{\mathrm{cris},0}$ (resp. $B_{\mathrm{st},0}$) en une indéterminée bien choisie t_h. Il va être assez facile de caractériser un t_h qui convient dans B_{dR} par des conditions galoisiennes, mais un peu pénible de décrire l'action de φ sur ce t_h.

Notons $U^\times$ le sous-groupe du groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau R formé des éléments x tels que $x-1 \in \mathfrak{m}_R$, idéal maximal de R. Un élément $x \in U^\times$ est donc une suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n et $x^{(0)} \in 1+\mathfrak{m}_C$, si $\mathfrak{m}_C$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$.

Soit $U_1^\times$ le sous-groupe de $U^\times$ formé des éléments x tels que $v_R(x-1) \geqslant 1$, *i.e.* tels que $x^{(0)} \in 1+p\mathcal{O}_C$. On voit que $U_1^\times$ est sans p-torsion, séparé et complet pour la topologie p-adique et a donc une structure naturelle de $\mathbb{Z}_p$-module et que $U^\times$ s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_1^\times$. En particulier, $U^\times$ a une structure d'espace de Banach p-adique.

Pour tout $x \in U_1^\times$, $[x] \in W(R)$ et la série

$$\log[x] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ([x]-1)^n/n$$

converge dans A_{cris}. En rendant p inversible, on étend l'application $x \mapsto \log[x]$ en une application notée de la même manière de $U^\times$ dans $B_{\mathrm{cris}}^+ \subset B_{\mathrm{dR}}^+$ et on note U son image. C'est un fermé de l'espace de Banach p-adique B_{cris}^+ et cette application est un homéomorphisme de $U^\times$ sur U. Pour ε générateur de $\mathbb{Z}_p(1)^\times$, on a bien $t = \log[\varepsilon]$, comme au § 3.1. On voit que $\theta(U) = C$ et que le noyau de la restriction de θ à U est $\mathbb{Q}_p(1) = \mathbb{Q}_p \cdot t$. Comme $t \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$ et $\notin \mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}}$, on en déduit :

Proposition 5.12. — *Le composé de l'inclusion de U dans B_{dR}^+ avec la projection de B_{dR}^+ sur $B_2 = B_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}}$ est injectif et on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(1) & \longrightarrow & U & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \cap & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & C(1) & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

Proposition 5.13. — *L'anneau B^0 est la sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{dR} engendrée par $U(-1)$ (i.e. par les u/t pour $u \in U$). La suite*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B^0 \longrightarrow B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0$$

(où l'application $B^0 \to B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$ est le composé de l'inclusion de B^0 dans B_{dR} avec la projection de B_{dR} sur $B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$) est exacte.

Pour tout entier $i \geqslant 0$, soit $\mathrm{Fil}^{-i} B^0 = B^0 \cap \mathrm{Fil}^{-i} B_{\mathrm{dR}}$. On a $\mathrm{Fil}^0 B^0 = \mathbb{Q}_p$, $\mathrm{Fil}^{-1} B^0 = U(-1)$ et, si $i \geqslant 2$, $\mathrm{Fil}^{-i} B^0$ s'identifie au sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de B_{dR} engendré par les $v_1 v_2 \dots v_i$, avec $v_1, v_2, \dots, v_i \in U(-1)$.

On a $B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1} = B^0[\log[\pi]/t]$, anneau des polynômes à coefficients dans B^0 en l'indéterminé $\log[\pi]/t$.

Démonstration. — On sait ([**Fo94a**], th. 5.3.7) que $\mathrm{Fil}^0 B^0 = \mathbb{Q}_p$. Si $u \in U$, $u \in B_{\mathrm{cris}}^+ \subset B_{\mathrm{dR}}^+ = \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$ et est de la forme $u = \log[x]$, avec $x \in U^*$; on a $\varphi([x]) = [x^p] = [x]^p$, d'où l'on déduit que $\varphi(u) = pu$; par conséquent $u/t \in \mathrm{Fil}^{-1} B_{\mathrm{dR}}$ et vérifie $\varphi(u/t) = u/t$. On a donc $U(-1) \subset \mathrm{Fil}^{-1} B^0$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & U(-1) & \longrightarrow & C(-1) \longrightarrow 0 \\ & & \| & & \cap & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{-1} B^0 & \longrightarrow & C(-1) \end{array}$$

dont les lignes sont exactes (la première grâce à la proposition précédente). On en déduit bien que $\mathrm{Fil}^{-1} B^0 = U(-1)$ et que l'application naturelle $\mathrm{Fil}^{-1} B^0 \to C(-1)$ est surjective.

Si $i \geqslant 2$, on en déduit aussi que, si S^i désigne l'image dans B_{dR} du sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les $v_1 v_2 \dots v_i$, avec $v_1, v_2, \dots, v_h \in U(-1)$, alors $S^i \subset \mathrm{Fil}^{-i} B^0$. Si $u_0 \in U$ est tel que $\theta(u_0) = 1$, on voit que, pour tout $u \in U$, l'image de $(u_0 t^{-1})^{i-1} u t^{-1} \in S^i$ dans $C(-i)$ est $\theta(u) t^{-i}$ et on en déduit que l'application naturelle de S^i dans $C(-i)$ est surjective. Comme $1 \in U(-1)$, $S^{i-1} \subset S^i$ et on en déduit, par induction sur i, que l'application naturelle de S^i dans $\mathrm{Fil}^{-i} B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$ est surjective. On a donc encore un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S^i \cap B_{\mathrm{dR}}^+ & \longrightarrow & S^i & \longrightarrow \mathrm{Fil}^{-i} B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ & \longrightarrow 0 \\ & & \cap & & \cap & \| & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{-i} B^0 & \longrightarrow \mathrm{Fil}^{-i} B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Comme $\mathbb{Q}_p \subset S^i$, on en déduit bien que $S^i = \mathrm{Fil}^{-i} B^0$ et que l'application naturelle $\mathrm{Fil}^{-i} B^0 \to \mathrm{Fil}^{-i} B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$ est surjective, donc, par passage à la limite sur i que l'application $B^0 \to B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$ est aussi surjective.

Comme t est inversible dans B_{st}, cet anneau, qui s'identifie à l'anneau des polynômes en $\log[\pi]$ à coefficients dans B_{cris}, est aussi l'anneau des polynômes en $\log[\pi]/t$ à coefficients dans B_{cris}. Comme $\varphi(\log[\pi]/t) = \log[\pi]/t$, un tel polynôme est dans $B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1}$ si et seulement s'il est à coefficients dans B^0. □

Remarque. — La $\mathbb{Q}_p$-algèbre B^0 s'identifie donc au quotient de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(U(-1))$ par un idéal I convenable. Il serait intéressant de pouvoir donner une description « explicite » de I. Le problème se ramène à déterminer le noyau I_2 de l'application $\mathrm{Sym}^2 U \to B_{\mathrm{dR}}^+$ qui envoie $u.v$ sur uv, car on vérifie facilement que, si 1_0 désigne l'élément unité de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p} U(-1)$ et si 1_1 est l'élément de degré 1 qui vaut $t.t^{-1}$, I est l'idéal engendré par $1_0 - 1_1$ et $I_2(-2) \subset \mathrm{Sym}^2(U(-1))$.

Proposition 5.14. — *L'homomorphisme d'anneau*

$$P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0 \longrightarrow B_{\mathrm{dR}} \quad (\textit{resp.} \quad P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1} \longrightarrow B_{\mathrm{dR}})$$

induit par l'inclusion de P_0 et de B^0 (resp. $B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1}$) dans B_{dR} est injectif. Son image s'identifie à $B_{\mathrm{cris},0}$ (resp. $B_{\mathrm{st},0}$).

Dans la suite on utilise cette injection pour identifier $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0$ à $B_{\mathrm{cris},0}$ et $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1}$ à $B_{\mathrm{st},0}$. On remarque que si $\lambda \in P_0$ et $b \in B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1}$, on a $\varphi(\lambda b) = \sigma(\lambda)b$.

Démonstration. — Tout est évident, sauf peut-être l'injectivité. Posons $B = B^0$ (resp. $B = B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1}$). Supposons que l'application n'est pas injective et soit $m \geqslant 2$ le plus petit entier tel qu'il existe $b_1, b_2, \ldots, b_m \in B$, linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}_p$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in P_0$ pas tous nuls avec $\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = 0$. L'hypothèse de mimimalité implique que les λ_i sont tous non nuls et, quitte à diviser par λ_1, on peut supposer $\lambda_1 = 1$. Mais $\sum \sigma(\lambda_i)b_i = \varphi(\sum \lambda_i b_i) = 0$, donc $\sum(\sigma-1)(\lambda_i)b_i = 0$. Comme $(\sigma-1)(\lambda_0) = 0$, l'hypothèse de minimalité implique que $\sigma(\lambda_i) = \lambda_i$, pour tout i, *i.e.* que tous les λ_i sont dans $\mathbb{Q}_p$, d'où une contradiction. □

Dans toute la suite, pour tout entier $h \geqslant 1$, on note $\mathbb{Q}_{p^h}$ l'unique extension non ramifiée de degré h de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{K}$. C'est aussi un sous-corps de P_0. Pour tout $a \in \mathbb{Q}_{p^h}$, $\sigma(a) = \varphi(a)$ et la restriction de φ à $\mathbb{Q}_{p^h}$ est un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^h}/\mathbb{Q}_p)$.

Proposition 5.15. — *Soit h un entier $\geqslant 1$. On a*

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0 &= \{b \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi^h(b) = b\}\\ \text{et}\quad \mathbb{Q}_{p^h} &= \{b \in B_{\mathrm{cris}}^+ \mid \varphi^h(b) = b\}\\ &= \{b \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi^h(b) = b \text{ et } \varphi^i(b) \in B_{\mathrm{dR}}^+ \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Les inclusions $\mathbb{Q}_{p^h} \otimes B^0 \subset \{b \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi^h(b) = b\}$ et $\mathbb{Q}_{p^h} \subset \{b \in B_{\mathrm{cris}}^+ \mid \varphi^h(b) = b\} \subset \{b \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi^h(b) = b$ et $\varphi^i(b) \in B_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $i \in \mathbb{N}\}$ sont évidentes.

Réciproquement, soit $b \in B_{\mathrm{cris}}$ vérifiant $\varphi^h(b) = b$. Choisissons une base normale $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$ de $\mathbb{Q}_{p^h}$ sur $\mathbb{Q}_p$ de sorte que la matrice des $(\varphi^i(e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant h}$ est inversible. Pour $1 \leqslant j \leqslant h$, posons $b_j = \sum_{i=0}^{h-1} \varphi^i(e_j b) = \sum_{i=0}^{h-1} \varphi^i(e_j)\varphi^i(b)$. On a $\varphi(b_j) = b_j$, donc $b_j \in B^0$. Les $\varphi^i(b)$, et en particulier b s'écrivent donc comme combinaisons linéaires, à coefficients dans $\mathbb{Q}_{p^h}$, en les b_j qui sont dans B^0, d'où la première égalité. Si $\varphi^i(b) \in B_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout i, les b_j aussi et sont donc dans $\mathbb{Q}_p$ (prop. 5.5), et b est bien dans $\mathbb{Q}_{p^h}$. □

Soient $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ comme au § 5.4. On vérifie facilement que, pour tout entier $h \geqslant 1$, la suite des

$$S_n(X, X^{p^{h-1}}, \ldots, X^{p^{(n-1)(h-1)}}, Y, Y^{p^{h-1}}, \ldots, Y^{p^{(n-1)(h-1)}})$$

converge, dans l'anneau $\mathbb{F}_p[[X,Y]]$ des séries formelles en X et Y à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, vers un élément $F_h(X,Y)$ qui est une *loi de groupe formel commutatif à un paramètre*

sur $\mathbb{F}_p$ (*cf.* par exemple [**Fr68**],§ 3 ou [**Se67**], § 3.2), *i.e.* vérifie

$$F_h(X,0) = F_h(0,X) = X,$$
$$F_h(Y,X) = F_h(X,Y)$$
$$\text{et} \quad F_h(F_h(X,Y),Z) = F_h(X,F_h(Y,Z)).$$

En particulier on peut définir le groupe $F_h(\mathfrak{m}_R)$ comme étant l'idéal maximal $\mathfrak{m}_R$ de R muni de la loi de composition

$$(x,y) \longmapsto F_h(x,y).$$

Si pour tout nombre rationnel $s > 0$, $\mathfrak{m}_R^s = \{x \in R \mid v_R(x) \geqslant s\}$, alors le sous-ensemble $F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ de $F_h(\mathfrak{m}_R)$ formé des $x \in \mathfrak{m}_R^s$ est un sous-groupe; si $s' \geqslant s$, alors $F_h(\mathfrak{m}_R^{s'}) \subset F_h(\mathfrak{m}_R^s)$. En fait, $F_h(\mathfrak{m}_R)$ est un groupe topologique, les $F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ formant un système fondamental de voisinages ouverts (et fermés) de 0.

Soit $x \in \mathfrak{m}_R$. Dans $W(R)$, on a

$$(x, x^{p^{-(h-1)}}, \dots, x^{p^{-n(h-1)}}, \dots) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n [x]^{p^{-nh}}.$$

La série $\sum_{m=1}^{+\infty} p^{-m}[x]^{p^{mh}}$ converge dans B_{cris}. On peut donc considérer l'application $l_h : F_h(\mathfrak{m}_R) \to B_{\mathrm{cris}}$ qui envoie x sur $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n [x]^{p^{-nh}}$. On voit que c'est un isomorphisme de $F_h(\mathfrak{m}_R)$ sur un sous groupe de B_{cris}. Plus précisément, pour tout nombre rationnel $s > 0$, $F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique et l_h induit un homéomorphisme de ce groupe sur un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/p]$ (contenu dans $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ si et seulement si $s \geqslant p^{1-h}$), $F_h(\mathfrak{m}_R)$ s'identifie au Banach p-adique $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ et l_h est un homéomorphisme de ce Banach p-adique sur un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel fermé de $BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/p]$.

Il résulte immédiatement de la définition de B_{dR} que, si $\overline{\mathbb{Q}_p}$ désigne la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{K}$, le corps B_{dR} relatif à l'extension $\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p$, que nous notons $B_{\mathrm{dR}}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ s'identifie à un sous-corps du corps B_{dR} relatif à l'extension $\overline{K}/K$ que nous continuons à noter B_{dR}. De même, avec des conventions évidentes, $B_{\mathrm{cris}}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ s'identifie à un sous-anneau de B_{cris}. Les anneaux $B_{\mathrm{dR}}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ et $B_{\mathrm{cris}}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ sont stables par G_K qui opère à travers son image naturelle dans $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

Proposition 5.16. — *Soient h un entier $\geqslant 1$, $L_h = l_h(F_h(\mathfrak{m}_R))$ et $LT_h = L_h \cap \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$. Alors,*

i) on a $L_h = \{b \in B_{\mathrm{cris}}^+ \mid \varphi^h b = pb\}$;

ii) Tout élément non nul de LT_h est inversible dans B_{cris} et LT_h est un sous-$\mathbb{Q}_{p^h}$-espace vectoriel de dimension 1 de $B_{\mathrm{cris}}(\mathbb{Q}_p)$, stable par $G_{\mathbb{Q}_p}$;

iii) la suite

$$0 \longrightarrow LT_h \longrightarrow L_h \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

(où $L_h \to C$ est le composé de l'inclusion de L_h dans B_{dR}^+ avec la projection canonique $\theta : B_{\mathrm{dR}}^+ \to C$) est exacte ;

iv) Le $\mathbb{Q}_{p^h}$-espace vectoriel LT_h est une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p}$ dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et 1 avec multiplicité respective $h-1$ et 1 ;

v) si $\eta_0 : G_{\mathbb{Q}_p} \to \{1,-1\}$ est l'unique caractère non ramifié d'ordre 2 et $\chi : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique, le groupe $G_{\mathbb{Q}_p}$ opère sur $\Lambda^h_{\mathbb{Q}_p} LT_h$ via le caractère $\eta_0^{h-1}\chi$.

Démonstration. — Posons $L'_h = \{b \in B^+_{\mathrm{cris}} \mid \varphi^h(b) = b\}$. Si $b \in L_h$, il existe $x \in \mathfrak{m}_R$ tel que $b = l_h(x)$. On a $\varphi^h(b) = l_h(x^{p^h}) = pl_h(x)$, donc $\varphi^h(b) = pb$ et $L_h \subset L'_h$.

Montrons alors (iii), c'est-à dire que l'application $L_h \to C$ est surjective : Posons $s = p^h/(p^{2h}-1)$, $s' = 1/(p^{2h}-1)$ et notons $\mathfrak{m}_C^{s'}$ l'idéal de $\mathcal{O}_C$ formé des éléments c vérifiant $v_p(c) \geqslant s'$. Comme $F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, il suffit de vérifier que $\theta(F_h(\mathfrak{m}_R^s)) \subset \mathfrak{m}_C^{s'}$ et que l'application $\overline{\theta} : F_h(\mathfrak{m}_R^s) \to \mathfrak{m}_C^{s'}/p\mathfrak{m}_C^{s'}$ obtenue en composant avec la réduction mod p est surjective. Mais si $x \in F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ et si $a = x^{(0)}$, on a $\overline{\theta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^{p^{mh}}/p^m + \sum_{n=1}^{\infty} p^n x^{(nh)}$. On vérifie facilement que, dans cette double somme, chaque terme a une valuation p-adique $\geqslant s'$, d'où $\theta(F_h(\mathfrak{m}_R^s)) \subset \mathfrak{m}_C^{s'}$ et que $\underline{\theta}(x) \equiv a^{p^{2h}}/p^2 + a^{p^h}/p + a \pmod{p\mathfrak{m}_C^{s'}}$ (on peut même supprimer le terme $a^{p^{2h}}/p^2$ sauf si on a à la fois $p = 2$ et $h = 1$). Comme l'application de $\mathfrak{m}_R^s$ dans $\mathfrak{m}_C^s$ qui envoie x sur $x^{(0)} = a$ est surjective, il suffit de vérifier que, pour tout $b \in \mathfrak{m}_C^{s'}$, il existe $a \in \mathfrak{m}_C^s$ tel que $a^{p^{2h}}/p^2 + a^{p^h}/p + a = b$. Si l'on choisit $\nu \in \mathcal{O}_C$ vérifiant $v_p(\nu) = s$, on peut écrire $a = \nu a'$, avec $a' \in \mathcal{O}_C$, on est ramené à résoudre une équation en a' qui s'écrit $c_2 a'^{p^{2h}} + a'^{p^h} + c_0 a' = b'$, où $c_2, c_0, b' \in \mathcal{O}_C$. Comme $\mathcal{O}_C$ est intégralement clos dans son corps des fractions qui est algébriquement clos, cette équation a une solution.

On voit que $R^{G_K} = k$ et $(\mathfrak{m}_R)^{G_K} = 0$. On en déduit que $(F_h(\mathfrak{m}_R))^{G_K} = 0$. Comme $C^{G_K} = K$, l'application $L_h \to C$ ne peut être un isomorphisme. Comme elle est surjective son noyau n'est pas nul. Soit t_h un élément non nul de LT_h. Soit $u = t_h \varphi(t_h) \dots \varphi^{h-1}(t_h)$. C'est un élément non nul de B^+_{cris} vérifiant $\varphi u = pu$. Comme chaque $\varphi^i(t_h) \in B^+_{\mathrm{cris}} \subset B^+_{\mathrm{dR}}$ et comme $t_h \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$, on a $u \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$. On voit donc que $u/t \in B^0 \cap B^+_{\mathrm{dR}} = \mathbb{Q}_p$ (prop. 5.5) donc est inversible dans B_{cris}. Il en est de même de u et de t_h.

Cet argument s'applique en particulier au cas où $K = \mathbb{Q}_p$ et l'on peut choisir $t_h \in B_{\mathrm{cris}}(\overline{\mathbb{Q}_p})$. Posons $LT'_h = L'_h \cap \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$. On a vu que $L_h \subset L'_h$, donc $\mathbb{Q}_{p^h} t_h \subset LT_h \subset LT'_h$. Soit $b \in LT'_h$. Si l'on écrit $b = xt_h$, on a $\varphi^h(x) = x$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\varphi^i(b) = \varphi^i(x)\varphi^i(t_h)$; comme $t_h \notin \mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}}$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant h-1$, $\varphi^i(t_h) \notin \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$, on a $\varphi^i(x) \in B^+_{\mathrm{dR}}$ pour tout i et (prop. 5.15) $x \in \mathbb{Q}_{p^h}$. Donc $\mathbb{Q}_{p^h} t_h = LT_h = LT'_h$, ce qui, en particulier, prouve (i).

Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & LT_h & \longrightarrow & L_h & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \| & & \cap & & \| \\ 0 & \longrightarrow & LT'_h & \longrightarrow & L'_h & \longrightarrow & C \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. On en déduit que $L_h = L'_h$, d'où (ii).

Il reste à prouver (iv) et (v), assertions pour lesquelles on peut supposer que $K = \mathbb{Q}_p$.

Soit η l'inclusion naturelle de LT_h dans B_{cris}. Alors $D^*_{\mathrm{cris}}(V)$ contient $\eta, \varphi\circ\eta, \dots, \varphi^{h-1}\circ\eta$ et, comme LT_h est de dimension h sur $\mathbb{Q}_p$, il suffit de prouver (*cf.* remarque à la fin du § 5.3) que ces applications sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}_p$. Pour cela, il suffit de vérifier que les $(\varphi^i\circ\eta)(t_h) = \varphi^i(t_h)$, pour $0 \leqslant i \leqslant h-1$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}_p$. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{h-1}$ des éléments de $\mathbb{Q}_p$ tels que $\sum_{i=0}^{h-1} \lambda_i \varphi^i(t_h) = 0$. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Q}_p[X]$ tels que $P(\varphi)(t_h) = 0$ est un idéal de $\mathbb{Q}_p[X]$ contenant les polynômes $\sum_{i=0}^{h-1} \lambda_i X^i$ et $X^h - p$. Comme $X^h - p$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$, si les λ_i n'étaient pas tous nuls, cet idéal serait l'anneau $\mathbb{Q}_p[X]$ tout entier, ce qui est impossible puisque $t_h \neq 0$.

On a $\mathrm{Fil}^0 D^*_{\mathrm{cris}}(V) = D^*_{\mathrm{cris}}(V)$ et on vérifie facilement que $\mathrm{Fil}^1 D^*_{\mathrm{cris}}(V)$ est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par η tandis que $\mathrm{Fil}^2 D^*_{\mathrm{cris}}(V) = 0$. On en déduit que $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{gr}^0 D^*_{\mathrm{cris}}(V) = h-1$ et $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{gr}^1 D^*_{\mathrm{cris}}(V) = 1$. Par conséquent les poids de Hodge-Tate de LT_h sont bien 0 et 1 avec multiplicité respective $h-1$ et 1.

Enfin, $D^*_{\mathrm{cris}}(\Lambda^h_{\mathbb{Q}_p} LT_h) = \Lambda^h D^*_{\mathrm{cris}}(V)$ est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 de base $\nu = \eta \wedge \varphi\circ\eta \wedge \cdots \wedge \varphi^{h-1}\circ\eta$; comme $\varphi^h(\eta) = p\eta$, on a $\varphi(\nu) = (-1)^{h-1} p\nu$. L'assertion (v) en résulte facilement. □

Remarques

i) On voit que $LT_1 = \mathbb{Q}_p(1) = \mathbb{Q}_p t$ et $L_1 = U$. Comme l'application $u \mapsto \log[u]$ définie une bijection de $1+\mathfrak{m}_R$ sur U et l'application $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} [x^{p^n}]/p^n$ une bijection de $\mathfrak{m}_R$ sur U, on voit qu'il existe une unique application $f : \mathfrak{m}_R \to 1+\mathfrak{m}_R$ telle que $\log[f(x)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} [x^{p^n}]/p^n$ et que f est bijective. On laisse au lecteur courageux le soin de décrire f par passage à la limite à l'aide de fonctions liées à l'exponentielle d'Artin-Hasse (*cf.* par exemple [**De72**], chap. III, § 1).

ii) On peut montrer que LT_h s'identifie à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Phi_h)$ où $T_p(\Phi_h)$ est le module de Tate d'un groupe formel Φ_h sur $\mathbb{Z}_p$ qui est un groupe formel de Lubin-Tate pour le corps $\mathbb{Q}_{p^h}$ (*cf.* par exemple [**Se67**], § 3.3). Alors, L_h s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des suites $x^{(n)}_{n\in\mathbb{N}}$, avec, pour tout n, $x^{(n)} \in \Phi_h(\mathfrak{m}_C)$ et $px^{(n+1)} = x^{(n)}$.

Proposition 5.17. — *Soit h un entier $\geqslant 1$ et t_h un élément non nul de LT_h. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $B_{\mathrm{cris},r/h}$ (resp. $B_{\mathrm{st},r/h}$) est le sous-$B_{\mathrm{cris},0}$-module (resp. le sous-$B_{\mathrm{st},0}$-module) libre de rang 1 de B_{dR} engendré par t_h^r. L'élément t_h est transcendant sur le corps des fractions de $B_{\mathrm{cris},0}$ aussi bien que sur celui de $B_{\mathrm{st},0}$. On a $B^h_{\mathrm{cris}} = B_{\mathrm{cris},0}[t_h, t_h^{-1}]$ (resp. $B^h_{\mathrm{st}} = B_{\mathrm{st},0}[t_h, t_h^{-1}]$).*

Démonstration. — Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, il est clair que le sous-$B_{\mathrm{cris},0}$-module (resp. le sous-$B_{\mathrm{st},0}$-module) de B_{dR} engendré par t_h^r est libre de rang 1 et contenu dans $B_{\mathrm{cris},r/h}$ (resp. $B_{\mathrm{st},r/h}$). Montrons que, réciproquement si $b \in B_{\mathrm{cris},r/h}$, b appartient à ce sous-module (la démonstration est la même pour $B_{\mathrm{st},r/h}$). On peut écrire b comme une somme finie de la forme $\sum \lambda_i b_i$, avec les $\lambda_i \in P_0$ et les $b_i \in B_{\mathrm{cris}}$ vérifiant $\varphi^h(b_i) =$

$p^r b_i$; pour chaque i, $\varphi^h(b_i/t_h^r) = b_i/t_h^r$ et il en résulte facilement que $b_i/t_h^r \in B_{\mathrm{cris},0}$; il en est donc de même de $\lambda = \sum \lambda_i(b_i/t_h^r)$ et on a bien $b = \lambda t_h^r$ avec $\lambda \in B_{\mathrm{cris},0}$.

Supposons que l'on ait une relation de la forme $\sum_{r\in\mathbb{Z}} \lambda_r t_h^r = 0$, avec les $\lambda_r \in \mathrm{Frac}(B_{\mathrm{st},0})$ presque tous nuls, mais pas tous nuls. Quitte à multiplier par un élément non nul bien choisi de $B_{\mathrm{st},0}$, on peut supposer que $\lambda_r \in B_{\mathrm{st},0}$ pour tout r. Mais alors chaque $\lambda_r t_h^r \in B_{\mathrm{st},r/h}$. Comme les r/h pour $r \in \mathbb{Z}$ sont des nombres rationnels tous différents, les $B_{\mathrm{st},r/h}$ sont en somme directe et chaque $\lambda_r t_h^r$ doit être nul donc chaque λ_r aussi, d'où une contradiction. Donc t_h est bien transcendant sur $\mathrm{Frac}\, B_{\mathrm{st},0}$, a fortiori sur $\mathrm{Frac}\, B_{\mathrm{cris},0}$. Les assertions concernant B_{cris}^h et B_{st}^h sont alors évidentes. □

L'action de N sur chaque B_{st}^h est très facile à définir : c'est l'unique B_{cris}^h-dérivation de B_{st}^h qui envoie $\log[\pi]$ sur -1 (ou $\log[\pi]/t$ sur $-1/t$).

Il reste à définir l'endomorphisme d'anneaux φ sur chaque B_{st}^h. On sait ce que c'est sur $B_{\mathrm{st},0}$ et il reste à savoir calculer $\varphi(t_h)$, au moins pour un t_h bien choisi. Comme $t_h \in B_{\mathrm{cris}}(\mathbb{Q}_p)$, on peut, pour cela supposer $K = \mathbb{Q}_p$. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 5.18. — *Supposons $K = \mathbb{Q}_p$. Soient h un entier $\geqslant 1$, t_h un élément non nul de LT_h, $f = f_{t_h} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_{p^h}^*$ le 1-cocycle continu défini par $g(t_h) = f(g)t_h$, pour tout $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$. Notons $A_h(f)$ l'ensemble des $a \in \mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0$ vérifiant*

$$g(a) = f^{\varphi-1}(g)a, \text{ pour tout } g \in G_{\mathbb{Q}_p} \text{ et } a^{1+\varphi+\varphi^2+\cdots+\varphi^{h-1}} = p.$$

i) On a $\varphi(t_h)/t_h \in A_h(f)$.
ii) Si $a \in A_h(f)$,on a $A_h(f) = \{\zeta a \mid \zeta \in \mu_h(\mathbb{Q}_p)\}$.

Démonstration. — Comme t_h est inversible dans B_{cris}, on peut écrire $\varphi(t_h) = at_h$, avec $a \in B_{\mathrm{cris}}$. En écrivant que

$\varphi^h(\varphi(t_h)) = \varphi(\varphi^h(t_h))$, on voit que $\varphi^h(a) = a$, donc $a \in \mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0$ (prop. 5.15). En écrivant que, si $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$, on a $g(\varphi(t_h)) = \varphi(g(t_h))$, on trouve que $g(a) = f^{\varphi-1}(g)a$. Par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, on voit que $\varphi^i(t_h) = a^{1+\varphi+\cdots+\varphi^{i-1}} t_h$; pour $i = h$, cela donne $pt_h = a^{1+\varphi+\varphi^2+\cdots+\varphi^{h-1}} t_h$ et on a bien $a^{1+\varphi+\varphi^2+\cdots+\varphi^{h-1}} = p$, d'où (i).

Il est clair que, si $a \in A_h(f)$, on a $\{\zeta a \mid \zeta \in \mu_h(\mathbb{Q}_p)\} \subset A_h(f)$. Montrons l'inclusion dans l'autre sens : soit $b \in A_h(f)$. On peut écrire $b = \zeta a$, avec $\zeta \in B_{\mathrm{dR}}$. On doit avoir $g(\zeta) = \zeta$, pour tout $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$, donc $\zeta \in B_{\mathrm{dR}}^{G_{\mathbb{Q}_p}} = \mathbb{Q}_p$. En particulier, $\zeta \in B_{\mathrm{cris}}$ et on doit avoir $\zeta^{1+\varphi+\cdots+\varphi^{h-1}} = 1$, ce qui, comme $\varphi(\zeta) = \zeta$, signifie bien $\zeta^h = 1$, *i.e.* $\zeta \in \mu_h(\mathbb{Q}_p)$. □

Proposition 5.19. — *Soient h, r des entiers $\geqslant 1$ tels que $\mu_{hr}(\mathbb{Q}_p) = \mu_r(\mathbb{Q}_p)$. Soient t_{hr} un élément non nul de LT_{hr}, $f' = f_{t_{hr}}$ et $b \in A_{hr}(f')$. Posons $c = b^{1+\varphi+\varphi^2+\cdots+\varphi^{h-1}}$ et $t_h = c^{r-1+(r-2)\varphi^h+\cdots+(r-1-i)\varphi^{ih}+\cdots+\varphi^{(r-2)h}} t_{hr}^r$. Alors t_h est un élément de LT_h. On a $\varphi(t_h) = b^{1+\varphi^h+\cdots+\varphi^{(r-1)h}} t_h$.*

Démonstration. — Posons $\varphi(t_{hr}) = b_0 t_{hr}$. D'après la proposition précédente, il existe $\zeta \in \mu_r(\mathbb{Q}_p)$ tel que $b = \zeta b_0$. On voit que $\varphi(c) = b^{-1+\varphi^h} c$ et on en déduit que

$$\begin{aligned}\varphi(t_h) &= (b^{-1+\varphi^h} c)^{r-1+(r-2)\varphi^h+\cdots+\varphi^{(r-2)h}} (b^r/\zeta^r) t_{hr}^r \\ &= b^{((r-1)\varphi^h+(r-2)\varphi^{2h}+\cdots+\varphi^{(r-1)h})-(r-1+(r-2)\varphi^h+\cdots+\varphi^{(r-2)h})+r} \zeta^{-r} t_h \\ &= b^{1+\varphi^h+\cdots+\varphi^{(r-1)h}} t_h\end{aligned}$$

puisque $\zeta^r = 1$.

On en déduit par récurrence, que pour tout entier $i \geqslant 1$, on a

$$\varphi^i(t_h) = b^{(1+\varphi+\cdots+\varphi^{i-1})(1+\varphi^h+\cdots+\varphi^{(r-1)h})} t_h,$$

ce qui appliqué à $i = h$ donne

$$\varphi^h(t_h) = b^{1+\varphi+\varphi^2+\cdots+\varphi^{rh-1}} t_h;$$

on a aussi $\varphi^i(t_{hr}) = b^{1+\varphi+\cdots+\varphi^{i-1}} t_{hr}$ pour tout i ; comme $\varphi^{hr}(t_{hr}) = p t_{hr}$, il en résulte que

$$b^{1+\varphi+\varphi^2+\cdots+\varphi^{rh-1}} = p$$

et $\varphi^h(t_h) = p t_h$, donc $t_h \in L_h$.

Enfin, comme $\varphi(t_{hr}) \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$ et $t_{hr} \notin \mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}}$, on voit que $b_0 \in \mathrm{Fil}^{-1} B_{\mathrm{dR}}$ et c'est aussi le cas de $b = \zeta b_0$. De même, pour $1 \leqslant i \leqslant hr - 1$, on a

$$\varphi^{i+1}(t_{hr}) = \varphi^i(b_0)\varphi^i(t_{hr})$$

et, comme $\varphi^{i+1}(t_{hr}) \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$ et $\varphi^i(t_{hr}) \notin \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$, on a $\varphi^i(b_0), \varphi^i(b) \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$. Il en résulte que $c \in \mathrm{Fil}^{-1} B_{\mathrm{dR}}$ et que, pour $1 \leqslant i \leqslant (r-2)h$, $\varphi^i(c) \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$. Comme $t_{hr}^r \in \mathrm{Fil}^r B_{\mathrm{dR}}$, on voit que $t_h = c^{r-1}\varphi^h(c)^{r-2} \ldots \varphi^{(r-2)h}(c) t_{hr}^r \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$ et on a bien $t_h \in LT_h$. □

5.6. Quelques indications sur la preuve de « faiblement admissible ⇒ admissible (th. 5.9) ». — La preuve repose d'une part sur *la version faible du lemme fondamental* et d'autre part sur la notion de complexe fondamental d'un (φ, N)-module filtré.

Commençons par expliquer ce qu'est le lemme fondamental.

Soient U et C comme dans la proposition 5.12. Soient h un entier $\geqslant 2$, $v_1, v_2, \ldots, v_h \in B_2$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ des éléments de C pas tous nuls. Posons

$$Y = \{(u_1, u_2, \ldots, u_h) \in U^h \mid \text{ il existe } c \in C \text{ tel que } \theta(u_n) = c\alpha_n \text{ pour tout } n\}.$$

C'est un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de U^h. Si $y = (u_1, u_2, \ldots, u_h) \in Y$ l'élément c ainsi défini est unique. L'application $\nu : Y \to C$ qui envoie y sur c est $\mathbb{Q}_p$-linéaire surjective et on a une suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(1)^h \longrightarrow Y \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Notons $\rho : Y \to B_2$ la restriction à Y de l'application de U^h dans B_2 qui envoie $(u_1, u_2, \dots, u_h)$ sur $\sum_{n=1}^h u_n v_n$. Si $y = (u_1, u_2, \dots, u_h)$, on a

$$\theta(\rho(y)) = \sum \theta(u_n)\theta(v_n) = \Big(\sum \alpha_n \theta(v_n)\Big)\nu(y).$$

Par conséquent, si $\sum \alpha_n \theta(v_n) \neq 0$, l'application $\theta \circ \rho : Y \to C$ est surjective et son noyau est $\mathbb{Q}_p(1)^h$. Si au contraire $\sum \alpha_n \theta(v_n) = 0$, on a $\operatorname{Im}\rho \subset C(1)$.

Le point-clé de la preuve est le *lemme fondamental, version faible*, c'est-à-dire le résultat suivant :

***Proposition 5.20* ([CF00], prop. 2.1)**. — *Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, si $\sum_{n=1}^h \alpha_n \theta(v_n) = 0$, ou bien $\rho(Y) = \rho(\mathbb{Q}_p(1)^h)$, ou bien $\rho(Y) = C(1)$.*

Pour prouver ce lemme, on est amené à introduire l'anneau $\mathcal{O}_C[T]$ des polynômes en l'indéterminée T à coefficients dans C, puis son séparé complété $\mathcal{O}_\mathcal{K}$ pour la topologie p-adique ainsi que l'anneau $\mathcal{K} = \mathcal{O}_\mathcal{K}[1/p]$. On choisit alors une clôture algébrique du corps des fractions de $\mathcal{K}$, puis on note $\overline{\mathcal{K}}$ la fermeture intégrale de $\mathcal{K}$ dans cette clôture algébrique. La norme de Gauss sur $\mathcal{K}$ s'étend de manière naturelle en une norme sur $\overline{\mathcal{K}}$ (c'est la norme spectrale sur chaque sous-$\mathcal{K}$-algèbre finie de $\overline{\mathcal{K}}$) et on note $\mathcal{C}$ le complété de $\overline{\mathcal{K}}$ pour cette norme.

On construit ensuite un Banach p-adique $\mathcal{U}$, extension de $\mathcal{C}$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ et un anneau $\mathcal{B}_2$, extension de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}(1)$, idéal de carré nul qui jouent pour $\mathcal{C}$ les rôles de U et B_2 respectivement. Pour $n = 1, 2, \dots, h$, on choisit $\lambda_n \in \mathcal{U}$ relevant $\alpha_n T$ et on pose $\lambda = \sum \lambda_n v_n \in \mathcal{B}_2$. Le fait que $\sum \alpha_n \theta(v_n) = 0$ implique que $\lambda \in \mathcal{C}(1)$. Si λ est nul, on vérifie que $\rho(Y) = \rho(\mathbb{Q}_p(1)^h)$. Sinon, par fonctorialité, tout élément s de l'ensemble S des homomorphismes continus de C-algèbres de $\mathcal{C}$ dans C définit un élément $s(\lambda) \in C(1)$ dont on vérifie qu'il est dans l'image de ρ. Un argument utilisant une variante du lemme de Hensel et la notion de polygone de Newton montre alors que le sous-groupe de $C(1)$ engendré par les $s(\lambda)$ pour $s \in S$ est $C(1)$ lui-même.

Remarque. — Colmez a maintenant prouvé [**Co02**] *la version forte du lemme fondamental* : sous les hypothèses de la proposition 5.20, il montre que lorsque $\operatorname{Im}\rho \neq \rho(\mathbb{Q}_p(1)^h)$, alors le noyau de ρ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie *égale à h*.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 5.20 ([**CF00**], cor. 2.6) :

Corollaire 5.21. — *Soient h un entier $\geqslant 2$, V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension h, M un B_2-module de longueur h tel que le C-espace vectoriel tM est de dimension 1. Soient $\xi : V \to M$ une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire, $\overline{\xi}$ le composé de ξ avec la projection de M sur M/tM, $\xi_C : C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to M/tM$ l'application C-linéaire déduite de $\overline{\xi}$ par extension des scalaires et $\xi_U : U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to M$ l'application qui envoie $u \otimes v$ sur $u\xi(v)$. On suppose que ξ_C est surjective. Alors, si le noyau de ξ_U est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, ξ_U est surjective.*

Expliquons maintenant ce qu'est le complexe fondamental $V_{\mathrm{st}}^{\bullet}(D)$ d'un (φ, N)-module filtré D : c'est un complexe de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels concentrés en degrés 0 et 1 (en particulier, $H^i(V_{\mathrm{st}}^{\bullet}(D)) = 0$ si $i \notin \{0, 1\}$) :

– On pose

$$V_{\mathrm{st}}^0(D) = \{v \in B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D \mid Nv = 0 \text{ et } \varphi(v) = v\}.$$

On peut voir $V_{\mathrm{st}}^0(D)$ comme le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des morphismes de (φ, N)-modules de K_0 dans $B_{\mathrm{st}} \otimes D$ (en particulier, $V_{\mathrm{st}}^0(D)$ ne dépend pas de la filtration sur D_K).

– Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Fil}^i(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K) = \sum_{i'+i''=i} \mathrm{Fil}^{i'} B_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{Fil}^{i''} D_K$ et on pose

$$V_{\mathrm{st}}^1(D) = B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K / \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K).$$

L'application naturelle de $(B_{\mathrm{st}} \otimes D)_K / \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{st}} \otimes D)_K$ dans $V_{\mathrm{st}}^1(D_K)$ est un isomorphisme. On voit aussi que $V_{\mathrm{st}}^1(D)$ ne dépend que de la filtration du K-espace vectoriel D_K, pas de l'action de φ et de N sur D.

– Pour définir le complexe $V_{\mathrm{st}}^{\bullet}(D)$, il suffit alors de connaître l'application δ_D : $V_{\mathrm{st}}^0(D) \to V_{\mathrm{st}}^1(D)$: c'est le composé de l'inclusion $V_{\mathrm{st}}^0(D) \subset B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D \subset B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K$ avec la projection de $B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K$ sur $V_{\mathrm{st}}^1(D)$. On a donc $H^0(V_{\mathrm{st}}^{\bullet}(D)) = V_{\mathrm{st}}(D)$.

Expliquons maintenant quelles sont les différentes étapes qui permettent de déduire le théorème 5.9 de la proposition 5.21 :

Première étape ([**CF00**], prop. 45). — *Si D est un (φ, N)-module filtré faiblement admissible, $V_{\mathrm{st}}(D)$ est une représentation p-adique semi-stable et $D_{\mathrm{st}}(V_{\mathrm{st}}(D))$ s'identifie à un sous-(φ, N)-module filtré de D (en particulier, $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\mathrm{st}}(D) \leqslant \dim_{K_0} D$, avec égalité si et seulement si D est admissible).*

On peut supposer $V = V_{\mathrm{st}}(D)$ non nul. Soit $C_{\mathrm{st}} \subset B_{\mathrm{dR}}$ le corps des fractions de B_{st}. Il est stable par G_K et $C_{\mathrm{st}}^{G_K} = K_0$. Soit L le sous-C_{st}-espace vectoriel de $C_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D$ engendré par V et r sa dimension. Alors L est stable par G_K. Comme la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension r de D est une variété rationnelle sur K_0, on en déduit qu'il existe un-sous-K_0-espace vectoriel D' de D tel que $L = C_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D'$. On vérifie que D' est stable par φ et N et peut donc être considéré comme un sous-(φ, N)-module filtré de D.

Soient $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ une base de L sur C_{st} formée d'éléments de V et $\{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$ une base de D' sur K_0. Si b est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les composantes des v_j sur la base des d_i, $w = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r = bd_1 \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge d_r$ est un élément non nul de $W = V_{\mathrm{st}}(\wedge^r D')$. Il résulte facilement du fait que $B^0 \cap B_{\mathrm{dR}}^+ = \mathbb{Q}_p$ (prop. 5.5) que la non-nullité de W implique que $t_H(\wedge^r D') \geqslant t_N(\wedge^r D')$. Comme D est faiblement admissible, on a aussi $t_H(\wedge^r D') = t_H(D') \leqslant t_N(\wedge^r D') = t_N(D')$. Donc $t_H(\wedge^r D') = t_N(\wedge^r D')$, $\wedge^r D'$ est admissible (prop. 5.6) et $\dim_{\mathbb{Q}_p} W = 1$. On en déduit facilement que si $v = \sum c_n v_n$, avec les $c_n \in C_{\mathrm{st}}$ est dans V, alors les c_n sont en fait dans V et V est de dimension r sur $\mathbb{Q}_p$. Alors D' s'identifie à $D_{\mathrm{st}}(V)$, donc V est semi-stable et D' est admissible.

Deuxième étape ([**CF00**], prop. 5.1 et 5.2). — *Si*

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de (φ, N)-modules filtrés finis,les suites

$$0 \longrightarrow V^0_{\mathrm{st}}(D') \longrightarrow V^0_{\mathrm{st}}(D) \longrightarrow V^0_{\mathrm{st}}(D'') \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow V^1_{\mathrm{st}}(D') \longrightarrow V^1_{\mathrm{st}}(D) \longrightarrow V^1_{\mathrm{st}}(D'') \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Pour tout φ-module fini Δ, posons

$$V^0_{\mathrm{cris}}(\Delta) = \{v \in B_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \Delta \mid \varphi(v) = v\}.$$

Si l'on choisit $\log[\pi]$ comme au § 5.2, pour tout (φ, N)-module Δ, tout $v \in B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} \Delta$ s'écrit d'une manière et d'une forme sous-la forme $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(\log[\pi])^n$, avec les $v_n \in B_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D$, presque tous nuls. Si $v \in V^0_{\mathrm{st}}(\Delta)$, alors $v_0 \in V^0_{\mathrm{cris}}(\Delta)$ et on vérifie que cette application induit un isomorphisme du foncteur V^0_{st} sur V^0_{cris}. Pour prouver l'exactitude de la première suite exacte, il suffit donc de vérifier l'exactitude du foncteur V^0_{cris} sur la catégorie des φ-modules finis. Lorsque k est algébriquement clos, c'est évident puisque cette catégorie est semi-simple (prop. 5.1). Le cas général s'en déduit en remarquant que, pour tout φ-module fini Δ sur k, $P_0 \otimes_{K_0} \Delta$ est un φ-module fini sur $\overline{k}$ et que, comme $B_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \Delta = B_{\mathrm{cris}} \otimes_{P_0} (P_0 \otimes_{K_0} \Delta)$, on a $V^0_{\mathrm{cris}}(\Delta) = V^0_{\mathrm{cris}}(P_0 \otimes_{K_0} \Delta)$.

Enfin, l'exactitude de la seconde suite est immédiate.

Troisième étape ([**CF00**], prop. 5.6). — *Le complexe fondamental d'un (φ, N)-module filtré fini non nul D n'est jamais acyclique.*

Soit $i \in \mathbb{Z}$. Notons $D[i]$ le (φ, N)-module filtré qui est D en tant que K_0-espace vectoriel où, avec des conventions évidentes, $\varphi_{D[i]} = p^i\varphi_D$, $N_{D[i]} = N_D$ et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Fil}^j D[i]_K = \mathrm{Fil}^{i+j} D_K$. En utilisant le fait que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, t^i est un élément inversible de B_{cris} vérifiant $\varphi(t^i) = p^i t^i$ et $t^i \in \mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} \setminus \mathrm{Fil}^{i+1} B_{\mathrm{dR}}$, on voit que la multiplication par t^{-i} définit un isomorphisme du complexe $V^\bullet_{\mathrm{st}}(D)$ sur $V^\bullet_{\mathrm{st}}(D[i])$. Quitte à remplacer D par $D[i]$ avec i suffisamment grand, on peut donc supposer que $\mathrm{Fil}^0 D_K = 0$. Choisissons une extension finie totalement ramifiée K' de K_0 contenant K et distincte de K_0 (si $K \neq K_0$, on peut prendre $K' = K$) et posons $G_{K'} = \mathrm{Gal}(K'/K)$. L'application $\delta(D) : V^0_{\mathrm{st}}(D) \to V^1_{\mathrm{st}}(D)$ se factorise à travers l'application K_0-linéaire évidente $B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D \to V^1_{\mathrm{st}}(D)$. Si le complexe était acyclique, il induirait donc une surjection $\eta : (B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{G_{K'}} \to V^1_{\mathrm{st}}(D)^{G_{K'}}$. On a $(B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{G_{K'}} = B_{\mathrm{st}}^{G_{K'}} \otimes_{K_0} D = D$ et c'est un K_0-espace vectoriel de dimension $h = \dim_{K_0} D$. Choisissons une base $\{d_1, d_2, \ldots, d_h\}$ de D_K adaptée à la filtration, *i.e.* telle que, si i_n désigne le plus grand entier j vérifiant $d_n \in \mathrm{Fil}^j D_K$, on ait

$$\mathrm{Fil}^j D_K = \oplus_{i_n \geqslant j} K d_n.$$

Le choix de cette base induit un isomorphisme $V_{\mathrm{st}}^1(D_K)^{G_{K'}} \simeq \oplus_{n=1}^h (B_{\mathrm{dR}}/\operatorname{Fil}^{i_n} B_{\mathrm{dR}})^{G_{K'}}$. Il est facile de voir que, si $j \in \mathbb{Z}$,

$$(B_{\mathrm{dR}}/\operatorname{Fil}^j B_{\mathrm{dR}})^{G_{K'}} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leqslant 0 \\ K' & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

et on en déduit que $V_{\mathrm{st}}^1(D)^{G_{K'}}$ est un K'-espace vectoriel de dimension h, donc un K_0-espace vectoriel de dimension $h : [K' : K_0]$ ce qui contredit le fait que η est surjective.

Quatrième étape ([**CF00**], prop. 5.7). — *Pour qu'un (φ, N)-module filtré faiblement admissible D soit admissible, il faut et il suffit que $H^1(V_{\mathrm{st}}^{\bullet}(D)) = 0$.*

La condition est nécessaire parce que, si $D = D_{\mathrm{st}}(V)$, $V_{\mathrm{st}}^0(D)$ s'identifie à $B^0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, $V_{\mathrm{st}}^1(D)$ à $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V/B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = (B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$; la suite

$$0 \longrightarrow V_{\mathrm{st}}(D) \longrightarrow V_{\mathrm{st}}^0(D) \longrightarrow V_{\mathrm{st}}^1(D) \longrightarrow 0$$

s'identifie à la suite déduite, par extension des scalaires de $\mathbb{Q}_p$ à V, de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B^0 \longrightarrow B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0$$

(prop. 5.13) et est bien exacte.

Réciproquement, si $\delta(D) : V_{\mathrm{st}}^0(D) \to V_{\mathrm{st}}^1(D)$ est surjective, si $V = V_{\mathrm{st}}(D)$ et $D' = D_{\mathrm{st}}(V)$, alors V est semi-stable et D' est un sous-(φ, N)-module filtré de D qui est admissible (première étape). Si $D'' = D/D'$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_{\mathrm{st}}^0(D') & \longrightarrow & V_{\mathrm{st}}^1(D') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_{\mathrm{st}}^0(D) & \longrightarrow & V_{\mathrm{st}}^1(D) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & V_{\mathrm{st}}^0(D'') & \longrightarrow & V_{\mathrm{st}}^1(D'') & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

dont la première ligne est exacte puisque D' est admissible, la deuxième par hypothèse et les deux colonnes de droite sont aussi exactes (deuxième étape). Le complexe $V_{\mathrm{st}}^{\bullet}(D'')$ est donc acyclique et $D'' = 0$ (troisième étape), donc $D = D'$.

Cinquième étape ([**CF00**], prop. 5.8). — *Si*

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de (φ, N)-modules filtrés et si D' et D'' sont admissibles, D l'est aussi.

C'est une conséquence immédiate des étapes 1 et 4.

Pour pouvoir décrire les étapes suivantes, nous avons besoin de la notion de distance de deux filtrations : Si Fil_1 et Fil_2 sont deux filtrations (indexées par $\mathbb{Z}$, décroissantes, exhaustives et séparées) sur un K-espace vectoriel D_K de dimension finie $\geqslant 2$, on dit que ces filtrations sont *voisines* s'il existe une base $\{d_1, d_2, \ldots, d_h\}$ de D_K et des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_h \in \mathbb{Z}$ tels que, si l'on pose $i'_1 = i_1 + 1, i'_2 = i_2 - 1$ et $i'_j = i_j$ pour $2 \leqslant j \leqslant h$, on ait

$$\mathrm{Fil}_1 D_K = \oplus_{i_j \geqslant i} K d_j \text{ et } \mathrm{Fil}_2 D_K = \oplus_{i'_j \geqslant i} K d_j$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

On dit que deux filtrations Fil et Fil$'$ sur D_K sont à distance finie s'il existe une suite de filtrations

$$\mathrm{Fil} = \mathrm{Fil}_0, \mathrm{Fil}_1, \ldots, \mathrm{Fil}_{d-1}, \mathrm{Fil}_d = \mathrm{Fil}'$$

sur D_K telle que, pour $1 \leqslant n \leqslant d$, Fil_{n-1} et Fil_n soient voisines et on appelle distance des deux filtrations Fil et Fil$'$ le plus petit entier d tel que ce soit possible.

Si D est un (φ, N)-module fini, on dit qu'une filtration Fil sur D_K est *admissible* (resp. *faiblement admissible*) si le (φ, N)-module filtré (D, Fil) ainsi obtenu l'est.

Si Fil est une filtration sur D_K, on définit $t_H(\mathrm{Fil})$ de façon évidente. On vérifie que deux filtrations Fil et Fil$'$ sont à distance finie si et seulement si $t_H(\mathrm{Fil}) = t_H(\mathrm{Fil})'$. En particulier deux filtrations faiblement admissibles sont à distance finie.

Sixième étape (CF00], prop. 6.1). — *Si* Fil_1 *et* Fil_2 *sont deux filtrations voisines sur un* (φ, N)*-module fini* D*, si* Fil_1 *est admissible et* Fil_2 *faiblement admissible, alors* Fil_2 *est admissible.*

C'est l'étape où l'on utilise le corollaire 5.21. Pour $m = 1, 2$, posons $V_m = V_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}_1)$. On voit (étape 4) que la suite

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_{\mathrm{st}}^0(D) \longrightarrow V_{\mathrm{st}}^1(\mathrm{Fil}_1) \longrightarrow 0$$

est exacte et s'identifie à la suite déduite en tensorisant avec V_1 de

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B^0 \longrightarrow (B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+) \longrightarrow 0,$$

tandis que

$$0 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_{\mathrm{st}}^0(D) \longrightarrow V_{\mathrm{st}}^1(\mathrm{Fil}_2)$$

est exacte et qu'il s'agit de prouver que $V_{\mathrm{st}}^0(D) \to V_{\mathrm{st}}^1(\mathrm{Fil}_2)$ est surjective.

Posons $\mathcal{D} = B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K$ et, pour $m = 1, 2$ et $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Fil}_m^i D_K = \sum_{i'+i''=i} \mathrm{Fil}^{i'} B_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{Fil}_m^{i''} D_K,$$

de sorte que $V_{\mathrm{st}}^1(\mathrm{Fil}_m) = \mathcal{D}/\mathrm{Fil}_m^0 \mathcal{D}$.

Comme $\mathrm{Fil}^{-1} B^0 = B^0 \cap \mathrm{Fil}^{-1} B_{\mathrm{dR}} = U(-1)$ (prop. 5.13), la suite $(*)$ induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \longrightarrow \mathrm{Fil}_1^{-1} \mathcal{D}/\mathrm{Fil}_1^0 \mathcal{D}$$

que l'on peut réécrire, en posant $V = V_1(-1)$,

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \longrightarrow \mathrm{Fil}_1^{-1}\mathcal{D}/\mathrm{Fil}_1^0\mathcal{D}.$$

On a $\mathrm{Fil}_1^{-1}\mathcal{D} \subset \mathrm{Fil}_2^0\mathcal{D}$. Si l'on pose $M = \mathrm{Fil}_1^{-1}\mathcal{D}/\mathrm{Fil}_2^0\mathcal{D}$, il s'agit de prouver que, dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow V_2 \longrightarrow U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \longrightarrow M,$$

l'application $U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to M$ est surjective. On vérifie que l'on est exactement dans les conditions d'application du corollaire 5.21, le noyau V_2 de l'application ξ_U étant fini d'après l'étape 1.

Dernière étape dans le cas où k est algébriquement clos. — On commence par montrer que, pour tout (φ, N)-module fini D, il existe une filtration sur D_K qui est admissible. Compte-tenu de l'étape précédente, il suffit de le faire lorsque D est un objet simple de la catégorie des (φ, N)-modules finis. Ceci implique que $N = 0$ et (prop. 5.1) qu'il existe $r, h \in \mathbb{Z}$, avec $h \geqslant 1$, $(r, h) = 1$ et un élément non nul $d \in D$ tel que $\varphi^h(d) = p^r d$.

Avec les notations des propositions 5.16 et 5.17, soit t_h un élément non nul de LT_h. Le sous-$\mathbb{Q}_{p^h}$-espace vectoriel de B_{cris} engendré par t_h^{-r} est stable par G_K et peut être considéré comme une représentation p-adique V de G_K de dimension h. On voit que $d_0 = t_h^r \otimes t_h^{-r} \in D_{\mathrm{cris}}(V) \subset D_{\mathrm{st}}(V)$ et que $\varphi^h(d_0) = p_0^r d$. On en déduit que $d, \varphi(d), \ldots, \varphi^{h-1}(d_0)$ sont linéairement indépendants sur K_0. Pour des raisons de dimension, V est donc cristalline et $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est admissible. Il existe un unique isomorphisme de (φ, N)-modules de $D_{\mathrm{cris}}(V)$ sur D qui envoie d_0 sur d. La filtration qu'il induit sur D_K est admissible.

On veut alors montrer que, pour un (φ, N)-module fini D fixé, toute filtration faiblement admissible Fil sur D est admissible. Par induction, on peut supposer que ce résultat vaut pour tout (φ, N)-module fini qui est un sous-objet propre ou un quotient propre de D. On choisit alors une filtration admissible Fil_0 sur D qui est admissible et on procède par récurrence sur la distance d de ces deux filtrations, le cas où celle-ci est égale à 1 étant réglée par l'étape précédente. Si D n'est pas un objet simple de la catégorie des (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles, on peut fabriquer une suite exacte courte non triviale

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0,$$

D' et D'' sont admissibles par hypothèse et D l'est aussi (étape 5). On peut donc supposer $d \geqslant 2$ et D simple. On choisit une filtration Fil_1 sur D_K qui est voisine de Fil_0 et telle que sa distance à Fil_1 est $d - 1$. Il est facile de déduire du fait que D est simple (qui signifie que, pour tout sous-(φ, N)-module propre D' de D, on a $t_H(D') < t_N(D'')$) que Fil_1 est faiblement admissible. D'après l'étape précédente, Fil_1 est admissible et donc Fil l'est aussi par induction.

Le cas général. — Lorsque k n'est pas algébriquement clos, on peut, par exemple :

– Ou bien, prouver que, si $P = KP_0$ et si D est un (φ, N)-module filtré sur K qui est faiblement admissible, alors le (φ, N)-module filtré Δ sur P que l'on en déduit par extension des scalaires (le P_0-espace vectoriel sous-jacent à Δ est $P_0 \otimes_{K_0} D$ est aussi faiblement admissible (*cf.* [**Fo94b**], prop. 4.4.9). D'après l'étape précédente Δ est admissible. Mais on voit que les anneaux B_{st} et B_{dR} relatifs à l'extension $\overline{P}/P$ sont les mêmes que ceux qu'on construit à partir de $\overline{K}/K$, on en déduit que $V_{\mathrm{st}}(D) = V_{\mathrm{st}}(\Delta)$, on a donc $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\mathrm{st}}(D) = \dim_{P_0}(\Delta) = \dim_{\mathrm{K_0}} D$ et D est bien admissible (étape 1).

– Ou bien montrer ici encore que tout (φ, N)-module fini D peut être muni d'une filtration faiblement admissible, le reste de la preuve étant identique à ce que l'on fait dans le cas où k est algébriquement clos.

Il suffit de montrer l'existence d'une filtration admissible lorsque $K = K_0$. Il suffit aussi, ici encore, de le faire lorsque D est simple, ce qui implique que $N = 0$ et que D n'a qu'une seule pente. Après un *twist à la Tate*, on se ramène au cas où cette pente α vérifie $0 < \alpha \leqslant 1$. On peut alors :

i) soit invoquer [**FL82**] qui nous dit que toute filtration vérifiant $\mathrm{Fil}^0 D = D$ et $\mathrm{Fil}^2 D = 0$ est admissible et [**La80**] qui nous dit que l'on peut trouver une telle filtration sur D ;

ii) soit remarquer que D peut s'identifier au module de Dieudonné (contravariant) d'un groupe de Barsotti-Tate connexe Γ_k sur k et que, si Γ est un relèvement de Γ_k sur $W(k)$, le dual V de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Gamma)$ (où $T_p(\Gamma)$ est le module de Tate de Γ) est une représentation cristalline de G_K qui a la vertu que le (φ, N)-module fini sous-jacent à $D_{\mathrm{st}}(V) = D_{\mathrm{cris}}(V)$ s'identifie à D ([**Fo79**], § 5) et que la filtration qu'il induit sur D est donc admissible.

6. L'action de C perdue et retrouvée

6.1. Le résultat. — Le but de ce chapitre est de prouver le résultat suivant :

Théorème 6.1. — *Soit E un sous-corps fermé de K. Soient W_1 et W_2 deux C-représentations de G_K. On suppose que les poids de Sen de W_1 sont algébriques sur E. Alors toute application E-linéaire continue $\eta : W_1 \to W_2$ qui est G_K-équivariante est C-linéaire.*

En particulier, si $\eta : C \to C$ est une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante et si $\eta(1) = \lambda$, on a $\lambda \in C^{G_K} = K$ et $\eta(c) = c\eta(1) = \lambda c$ pour tout $c \in C$, autrement dit :

Proposition 6.2. — *On a* $\mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C) = \mathrm{End}_{C[G_K]}(C) = K$.

Lorsque $K/\mathbb{Q}_p$ est finie, la condition sur les poids de Sen de W_1 est automatiquement satisfaite avec $E = \mathbb{Q}_p$ et on a donc le résultat suivant :

Corollaire 6.3. — *Lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie des C-représentations de G_K dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.*

Après avoir établi un petit lemme, nous allons prouver la proposition 6.2 (§ 6.2) puis le théorème 6.1 (§ 6.3).

Lemme 6.4. — *Soit W une C-représentation de G_K de dimension 1 qui n'est pas isomorphe à C. Alors,*

(i) pour toute extension finie K' de K, contenue dans $\overline{K}$, on a $W^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')} = 0$,

(ii) on a $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W) = 0$.

Démonstration. — Montrons (i) : Soit α le poids de Sen de W. Comme W n'est pas isomorphe à C, α n'est pas nul. Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que, avec les notations du § 2.5, $\alpha \in \mathfrak{a}_0$. A isomorphisme près, on peut supposer que $W = Ct^{(\alpha)} \subset C \otimes_K \mathcal{B}_{K,0}$ et, pour tout $g \in G_K$, $g(t^{(\alpha)}) = \rho(\overline{g})t^{(\alpha)}$, où $\overline{g}$ désigne l'image de g dans $\Gamma = G_K/H_K$ et $\rho : \Gamma \to K^*$ est un homomorphisme continu injectif (on a $\rho(\overline{g}) = \exp(\log \chi(g) \cdot \alpha)$ où $\log \chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_p$ est le caractère additif défini au § 2.3). Quitte à remplacer encore K par une extension finie, on peut supposer $K' = K$. Soit alors $ct^{(\alpha)} \in W^{G_K}$, avec $c \in C$. Le fait que $ct^{(\alpha)} \in W^{H_K}$ implique que $c \in C^{H_K} = L$. Si γ_0 est un générateur topologique de Γ, on a $ct^{(\alpha)} = \gamma_0(ct^{(\alpha)}) = \gamma_0(c)\rho(\gamma_0)t^{(\alpha)}$, ce qui implique que le sous-K-espace vectoriel de L engendré par c est stable par Γ, donc (prop. 1.16) que $c \in K_\infty$. Si $r \in \mathbb{N}$ est tel que $c \in K_r$ et si γ_r est un générateur de $\Gamma_r = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_r)$, on a $ct^{(\alpha)} = \gamma_r(ct^{(\alpha)}) = c\rho(\gamma_r)t^{(\alpha)}$. Comme $\rho(\gamma_r) \neq 1$, ceci implique bien que $c = 0$.

Montrons (ii) : Comme $\overline{K}$ est dense dans C, on a

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\overline{K}, W).$$

Pour toute extension finie K' de K contenue dans $\overline{K}$, si $G_{K'} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$, on a

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(K', W) \subset \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_{K'}]}(K', W) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p}(K', W^{G_{K'}}) = 0,$$

puisque, d'après (i), $W^{G_{K'}} = 0$. En passant à la limite sur K', on en déduit que $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\overline{K}, W) = 0$, donc $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W) = 0$. □

6.2. Preuve de la proposition 6.2

Lemme 6.5. — *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, notons θ_i la projection canonique de $\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}$ sur $C(i)$. Soit*

$$X = \{b \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi^2 b = p^2 b,\ b \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}} \text{ et } \varphi b \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}\}.$$

Notons V_0 le noyau de l'application $\pi_0 : X \to C$ définie par $\pi_0(b) = \theta_0(\varphi b)$ et V_1 le noyau de l'application $\pi_1 : X \to C(1)$ définie par $\pi_1(b) = \theta_1(b)$. Alors V_0 et V_1 sont des représentations de Hodge-Tate de dimension 2, on a $h_1(V_0) = 2$, $h_0(V_1) = h_2(V_1) = 1$ et les applications π_0 et π_1 sont surjectives.

Nous allons donner deux preuves de ce lemme : la première est un cas particulier d'une méthode très générale sur laquelle nous reviendrons ultérieurement [**Fo03**] ; la deuxième, plus directe, n'utilise pas le théorème 5.9 (ou théorème « faiblement admissible ⇒ admissible ») et fournit une interprétation très simple des représentations V_0 et V_1.

Première démonstration. — Soit D le (φ, N)-module de dimension 2 de base $\{d_1, d_2\}$, avec

$$\varphi d_1 = d_2, \varphi d_2 = p^2 d_2 \text{ et } N d_1 = N d_2 = 0.$$

Sur D_K, les filtrations Fil_0 et Fil_1 définies par

$$\mathrm{Fil}_0^i D_K = \begin{cases} D_K & \text{si } i \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}_1^i D_K = \begin{cases} D_K & \text{si} \quad i \leqslant 0 \\ K d_1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad i \geqslant 3 \end{cases}$$

sont toutes deux faiblement admissibles (§ 5.1) donc admissibles (th. 5.9). Pour $m = 1, 2$, notons D_m^* le (φ, N)-module filtré dual de (D, Fil_m) et posons $V_m = V_{\mathrm{st}}(D_m^*)$; c'est une représentation cristalline de dimension 2, on a $h_1(V_0) = 2$, $h_0(V_1) = h_2(V_1) = 1$ et la suite

$$0 \longrightarrow V_m \longrightarrow V_{\mathrm{st}}^0(D_m^*) \longrightarrow V_{\mathrm{st}}^1(D_m^*) \longrightarrow 0$$

est exacte. On a $V_{\mathrm{st}}^0(D_0^*) = V_{\mathrm{st}}^0(D_1^*) = \mathrm{Hom}_{(\varphi,N)\text{-modules}}(D, B_{\mathrm{st}})$ et l'application $\eta \mapsto \eta(d_1)$ identifie ce $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel au sous-espace de B_{cris} formé des b vérifiant $\varphi^2 b = p^2 b$.

L'application $\eta \mapsto (\eta(d_1), \eta(d_2))$ identifie l'ensemble des applications K-linéaires de D_K dans B_{dR} à $B_{\mathrm{dR}} \oplus B_{\mathrm{dR}}$ donc $V_{\mathrm{st}}^1(D_0^*)$ à $B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}} \oplus B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$ et $V_{\mathrm{st}}^1(D_1^*)$ à $B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}} \oplus B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$. On voit aussi que X s'identifie à l'image inverse dans $V_{\mathrm{st}}^0(D_0^*) = V_{\mathrm{st}}^0(D_1^*)$ de $\mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}} \oplus \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$. Alors, pour $m = 0, 1$, V_m s'identifie bien au noyau de l'application π_m et la surjectivité de π_m résulte de la surjectivité de l'application $V_{\mathrm{st}}^0(D_m^*) \to V_{\mathrm{st}}^1(D_m^*)$. □

Deuxième démonstration. — Soit $\mathbb{Q}_{p^2}$ l'unique extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{K}$ donc aussi, puisqu'elle est non ramifiée, dans B_{cris}. Soit $a \in \mathbb{Q}_{p^2}$ non nul tel que $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p}(a) = 0$. L'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p)$ est la restriction de φ à $\mathbb{Q}_{p^2}$ et on a donc $\varphi a = -a$.

Rappelons (§ 5.4) que $U = \{u \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi b = pb \text{ et } b \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}\}$. L'application de $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U$ dans B_{cris} qui envoie $\lambda \otimes u$ sur λu est injective et nous l'utilisons pour identifier $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U$ à un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de B_{cris}. Si

$$Z = \{b \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi^2 b = p^2 b \text{ et } b, \varphi b \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}\},$$

on a $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U \subset Z$. Inversement si $b \in Z$, on peut écrire $b = b' + b''$, avec $b' = \frac{1}{2}(b + p^{-1}\varphi b)$ et $b'' = \frac{1}{2}(b - p^{-1}\varphi b)$; on a $b', ab'' \in U$ et $b = 1 \otimes b' + a^{-1} \otimes ab'' \in \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U$

et $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U = Z$. En tensorisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(1) \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

(*cf.* prop. 5.12) avec $\mathbb{Q}_{p^2}$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_{p^2}(1) \longrightarrow Z \longrightarrow \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \longrightarrow 0.$$

Soient α la restriction de θ_0 à Z, $\gamma : \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \to C$ l'application $\lambda \otimes c \mapsto \lambda c$, e l'unique idempotent primitif de $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^2} \subset \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$ qui est dans le noyau de γ et $\beta : C \to \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$ l'application $c \mapsto e.1 \otimes c$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V_0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\pi_0} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{p^2}(1) & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
 & & & & C & = & C & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où les deux dernières colonnes et la ligne du milieu sont exactes. On en déduit que la première ligne est aussi exacte, donc que π_0 est bien surjective et que V_0 s'identifie à $\mathbb{Q}_{p^2}(1)$ qui est bien une représentation p-adique de G_K de dimension 2. Les applications $\lambda t \mapsto \lambda t$ et $\lambda t \mapsto \varphi(\lambda)t$ fournissent deux plongements distincts de V_0 dans $C(1)$ qui est donc bien de Hodge-Tate avec $h_1(V_0) = 2$. □

Rappelons (prop. 5.16) que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow LT_2 \longrightarrow L_2 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où LT_2 est le sous $\mathbb{Q}_{p^2}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par un élément non nul t_2 de $B^+_{\mathrm{cris}} \cap \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$ vérifiant $\varphi^2(t_2) = pt_2$. Si $x \in L_2$, d'une part $\varphi^2(xt_2) = p^2 xt_2$, d'autre part $xt_2 \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$ et $\varphi(xt_2) = \varphi x \varphi t_2 \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$, donc $xt_2 \in X$. Inversement, si $b \in X$, d'une part $\varphi^2(b/t_2) = pb/t_2$, d'autre part $b/t_2 \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$ (puisque $t_2 \notin \mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{dR}}$) et $\varphi(b/t_2) = \varphi b/\varphi t_2 \in \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}}$ (puisque $\varphi t_2 \notin \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$), donc $b/t_2 \in L_2$, ce qui fait que la multiplication par t_2 définit un isomorphisme de L_2 sur X. Multiplions alors par t_2 la suite exacte ci-dessus. Comme $\theta_1(t_2) \neq 0$, $\theta_1(L_2 t_2) = \theta_0(L_2)\theta_1(t_2) = C$, ce qui montre que π_2 est bien surjective, tandis que son noyau V_1 s'identifie à $\mathbb{Q}_{p^2} t_2^2$ et est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 2. L'application $\lambda t_2^2 \to \theta_2(\lambda t_2^2) = \lambda \theta_1(t_2)^2$ définit un plongement de V_1 dans $C(2)$, tandis que $\lambda t_2^2 \to \theta_0(\varphi\lambda t_2^2) = \varphi(\lambda)\theta_0(t_2)^2$ est un plongement de V_1 dans C. On en déduit bien que V_1 est de Hodge-Tate avec $h_0(V_1) = h_2(V_1) = 1$. On voit aussi que, lorsque l'on considère LT_2 comme un $\mathbb{Q}_{p^2}$-espace vectoriel de dimension 1, avec action semi-linéaire de G_K, alors V_1 s'identifie à $\mathrm{Sym}^2_{\mathbb{Q}_{p^2}} LT_2$.

Prouvons maintenant la proposition 6.2. — Soit $\eta : C \to C$ une application C-linéaire. Alors, pour tout $c \in C$, $\eta(c) = c\eta(1)$ et η commute à l'action de G_K si et seulement si $\eta(1) \in C^{G_K} = K$ (th. 1.2). On a évidemment $\mathrm{End}_{C[G_K]}(C) \subset \mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C)$ et il suffit de vérifier que la dimension du K-espace vectoriel $\mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C)$ est $\leqslant 1$.

Appliquons le lemme précédent. Les valeurs des poids de Hodge-Tate de V_0 et V_1 impliquent que $V_0 \cap V_1 = \{0\}$. Si l'on pose $Y = X/(V_0 \oplus V_1)$, on obtient des suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow V_1 \longrightarrow \quad C \quad \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow V_0 \longrightarrow C(1) \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(-, C)$ à ces suites exactes, on obtient des suites exactes

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, C) \longrightarrow \mathrm{End}(C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_1, C) \longrightarrow, \\ &0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C(1), C). \end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C(1), C) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, C(-1)) = 0$ d'après le lemme 6.4. A fortiori, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(Y, C) = 0$. Comme $h_0(V_1) = 1$, $\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_0, C) = 1$ et on en déduit bien que $\dim_K \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C) \leqslant 1$. □

6.3. Preuve du théorème 6.1

Lemme 6.6. — *Soient E_0 un corps, F une extension finie galoisienne de E_0, V_1 et V_2 deux espaces vectoriels sur F. Pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(F/E_0)$, soit $\mathcal{L}_{F,\tau}(V_1, V_2)$ le E_0-espace vectoriel des applications additives $\eta : V_1 \to V_2$ vérifiant $\eta(\lambda v) = \tau(\lambda)\eta(v)$ pour tout $\lambda \in F$ et tout $v \in V$. L'application naturelle*

$$\bigoplus_{\tau \in \mathrm{Gal(F/E_0)}} \mathcal{L}_{F,\tau}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathcal{L}_{E_0}(V_1, V_2)$$

est un isomorphisme.

Démonstration du lemme. — L'application de $F \times F$ dans E_0, qui à (x, y) associe $\mathrm{tr}_{F/E_0}(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Choisissons une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$de F sur E_0 et soit $\{e^*{}_1, e^*{}_2, \ldots, e^*{}_d\}$ la base duale. Soit $\eta : V_1 \to V_2$ une application E_0-linéaire. Pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(F/E_0)$, et tout $v \in V_1$, posons

$$\eta_\tau(v) = \sum_{i=1}^{d} \tau(e_i^*)\eta(e_i v).$$

On voit que η_τ ne dépend pas du choix de la base.

Pour $1 \leqslant r \leqslant d$, $\{e_1 e_r^*, e_2 e_r^*, \ldots, e_d e_r^*\}$ est une base de F sur E dont la base duale est $\{e_1^*/e_r^*, e_2^*/e_r^*, \ldots, e_d^*/e_r^*\}$. On a donc, pour tout $v \in V_1$,

$$\eta_\tau(e_r^* v) = \sum_{i=1}^{d} \tau(e_i^*)\eta(e_i e_r^* v) = \sum \tau(e_r^*)\tau(e_i^*/e_r^*)\eta(e_i e_r^* v) = \tau(e_r^*)\eta_\tau(v)$$

et $\eta_\tau \in \mathcal{L}_{F,\tau}(V_1, V_2)$.

Par ailleurs, si l'on pose $1 = \sum c_i e_i$, avec les $c_i \in E_0$, pour tout i, on a $e_j^* = \sum_i c_i e_i e_j^*$, d'où $\mathrm{tr}_{F/E_0}(e_j^*) = c_j$. Mais alors, pour tout $v \in V_1$,

$$\sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(F/E_0)} \eta_\tau(v) = \sum_{\tau,i} \tau(e_i^*)\eta(e_i v) = \sum_i \mathrm{tr}_{F/E_0}(e_i^*)\eta(e_i v) = \eta((\sum_i c_i e_i)v) = \eta(v),$$

donc $\eta = \sum \eta_\tau$ et l'application est bien surjective.

Choisissons alors pour $e_1, e_2, \ldots, e_d$ une base normale de F sur E_0 de sorte que, si $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$ sont les éléments de $\mathrm{Gal}(F/E_0)$, la matrice des $\tau_i(e_j)$ est inversible. Si $\eta = \oplus_{i=1}^d \eta_i$, avec $\eta_i \in \mathcal{L}_{F,\tau_i}(V_1, V_2)_{\text{„}}$ on a, pour tout $v \in V_1$ et $1 \leqslant j \leqslant d$,

$$\eta(e_j v) = \sum_{i=1}^d \eta_i(e_j v) = \sum_{i=1}^d \tau_i(e_j)\eta_i(v),$$

de sorte que, si les $\eta(e_j v)$ sont tous nuls les $\eta_i(v)$ le sont aussi et l'application est bien injective. □

Prouvons alors le théorème. — Quitte à remplacer K par une extension finie convenable et à décomposer W_1 et W_2 en sommes directes, on peut supposer que W_1 et W_2 sont indécomposables, que s_{W_1} (resp. s_{W_2}) n'a qu'une valeur propre α_1 (resp. α_2), que α_1 appartient à une extension finie galoisienne F de E contenue dans K et que $\alpha_2 \in K$.

Quitte à remplacer encore K par une extension finie, on peut supposer que, avec les notations du § 2.5, α_1 et α_2 sont dans $\mathfrak{a}_0$. A isomorphisme près, si, pour $m = 1, 2$, on pose $h_m = \dim_C W_m$, on peut supposer que $W_m = \oplus_{i=0}^{h_m - 1} C t^{(\alpha_m)} (\log t)^i \subset B_{\mathrm{Sen},r}^f$. Pour tout $g \in G_K$, $g(t^{(\alpha_m)}) = \rho_m(g) t^{(\alpha_m)}$, avec $\rho_m(g) = \exp(\log \chi(g) \cdot \alpha_m)$, donc $\rho_1 : G_K \to F^*$ et $\rho_2 : G_K \to K^*$ sont des homomorphismes continus.

Soit $\eta : W_1 \to W_2$ comme dans le théorème. Grâce au lemme précédent, on peut poser $\eta = \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(F/E)} \eta_\tau$, avec $\eta_\tau \in \mathcal{L}_{F,\tau}(W_1, W_2)$. Chaque η_τ est E-linéaire continue et G_K-équivariante. On se ramène donc au cas où η est l'un des η_τ, *i.e.* on peut supposer qu'il existe $\tau \in \mathrm{Gal}(F/E)$ tel que $\eta \in \mathcal{L}_{F,\tau}(W_1, W_2)$.

Pour $m = 1, 2$, posons $W'_m = \oplus_{i=0}^{h_m - 1} C (\log t)^i$, de sorte que $W_m = W'_m t^{(\alpha_m)}$. On peut écrire $\eta(w t^{(\alpha_1)}) = \eta'(w) t^{(\alpha_2)}$ où $\eta' : W'_1 \to W'_2$ est une application additive continue vérifiant $\eta'(\lambda) w = \tau(\lambda)\eta'(w)$ si $\lambda \in F$ et $w \in W'_0$ et, pour tout $g \in G_K$,

$$\eta'(g(w)\rho_1(g)) t^{\alpha_2} = g(\eta'(w))\rho_2(g) t^{(\alpha_2)},$$

ou encore, si l'on note $\rho_3 : G_K \to K^*$ l'homomorphisme continu défini par $\rho_3(g) = \rho_2(g)/\tau(\rho_1(g))$,

$$\eta'(g(w)) = g(\eta'(w))\rho_3(g) \text{ si } g \in G_K \text{ et } w \in W'_1.$$

Si $\alpha_3 = \alpha_2 - \tau(\alpha_1) \in \mathfrak{a}_0$ et si $\eta_0 : W'_1 \to W'_2 t^{(\alpha_3)} \subset C \otimes_K \mathcal{B}_{K,0} \subset B_{\mathrm{Sen},0}$ est défini par $\eta_0(w) = \eta'(w) t^{(\alpha_3)}$, η_0 est une application additive continue G_K équivariante vérifiant $\eta_0(\lambda w) = \tau(\lambda)\eta_0(w)$ si $\lambda \in F$ et $w \in W'_0$.

Montrons d'abord que η_0 donc η est nul si $\alpha_2 \neq \alpha_1$ ou $\tau \neq 1$. Par dévissage on se ramène à $h_1 = h_2 = 1$, donc $\eta_0 : C \to Ct^{(\alpha_3)}$. Si $\alpha_3 \neq 0$, η_0 est nul d'après le lemme 6.4. Sinon, η_0 est C-linéaire d'après la proposition 6.2, donc a fortiori F-linéaire. Si η_0 n'était pas nul, on aurait donc $\tau = 1$ et $\alpha_2 = \alpha_1$.

On peut donc supposer $\alpha_2 = \alpha_1$ et $\tau = 1$. Quitte à remplacer η par η_0, on peut supposer $\alpha_1 = 0$. Quitte à remplacer W_2' par une représentation plus grande, on peut supposer $h_2 \geqslant h_1$, *i.e.* $W_1' \subset W_2'$. Remarquons qu'alors $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1', W_2') = \mathrm{End}_{C[G_K]}(W_1')$ et que c'est un K-espace vectoriel de dimension h_1, de base les applications $(\eta_j)_{0 \leqslant j < h_1}$ définies par $\eta_j(\sum c_i (\log t)^i = \sum_{i=0}^{j} c_{h_1-1-j+i} (\log t)^i$.

On procède alors par récurrence sur h_1 :

– si $h_1 = 1$, $W_1' = C$. On vérifie que, pour toute extension finie K' de K, $(W_1')^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')} = K'$ et si $\eta \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W_1')$, on a $\eta(K') \subset K'$, pour tout K', donc $\eta(\overline{K}) \subset \eta(\overline{K})$ et, comme $\overline{K}$ est dense dans C, $\eta(C) \subset C$ et la proposition 6.2 permet de conclure.

– si $h_1 \geqslant 2$ et si $W_1'' = \oplus_{i=0}^{h_2-2} C(\log t)^i$, on a une suite exacte courte de C-représentations

$$0 \longrightarrow W_1'' \longrightarrow W_1' \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où la projection de W_1' sur C est l'application $\sum_{i=0}^{h_1-1} c_i (\log t)^i \mapsto c_{h_1-1}$.

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C, W_2') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1', W_2') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1'', W_2') \longrightarrow 0 \\
 & & \| & & \cap & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W_2') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(W_1', W_2') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(W_1'', W_2')
\end{array}$$

où les lignes sont exactes (l'application $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1', W_2') \to \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1'', W_2')$ est surjective parce que

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1', W_2') = \dim_K \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1'', W_2') + \dim_K \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C, W_2') \ ).$$

L'égalité $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1', W_2') = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(W_1', W_2')$ en résulte. □

Références

[An02] Y. André – « Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique », *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.

[Be02] L. Berger – « Représentations p-adiques et équations différentielles », *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[CC98] F. Cherbonnier & P. Colmez – « Représentations p-adiques surconvergentes », *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[Co94] P. Colmez – « Sur un résultat de Shankar Sen », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **318** (1994), p. 983–985.

[Co02] ———, « Espaces de Banach de dimension finie », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[CF00] P. Colmez & J.-M. Fontaine – « Construction des représentations p-adiques semi-stables », *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[DM82] P. Deligne & J.S. Milne – « Tannakian categories », in *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, Lect. Notes in Math., vol. 900, Springer-Verlag, Berlin, 1982, p. 101–228.

[De72] M. Demazure – *Lectures on p-Divisible Groups*, Lect. Notes in Math., vol. 302, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Di57] J. Dieudonné – « Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ (VII) », *Math. Ann.* **134** (1957), p. 114–133.

[Fa94] G. Faltings – « Mumford Stabilität in der algebraischen Geometrie », in *Proceedings International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, Basel, 1994, p. 648–655.

[Fa02] ———, « Almost étale extensions », in *Périodes p-adiques II*, Astérisque, vol. 279, Société Mathématique de France, Paris, 2002, p. 185–270.

[Fo71] J.-M. Fontaine – « Groupes de ramification et représentations d'Artin », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4$^{\text{e}}$ *série* **4** (1971), p. 337–392.

[Fo79] ———, « Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate », in *Journées arithmétiques de Rennes (III)*, Astérisque, vol. 65, Société Mathématique de France, Paris, 1979, p. 3–80.

[Fo82] ———, « Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate », *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 529–577.

[Fo91] ———, « Représentations p-adiques des corps locaux », in *The Grothendieck Festschrift*, vol. II, Birkhäuser, Boston, 1991, p. 249–309.

[Fo94a] ———, « Le corps des périodes p-adiques », in *Périodes p-adiques*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, Paris, 1994, avec un appendice par Pierre Colmez, p. 59–102.

[Fo94b] ———, « Représentations p-adiques semi-stables », in *Périodes p-adiques*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, Paris, 1994, p. 113–184.

[Fo03] ———, « Presque C_p-représentations », in *Volume dedicated to Kazuya Kato's Fiftieth Birthday*, Documenta Mathematica, Deutsche Mathematische Vereinigung, Berlin, 2003, p. 285–385.

[Fo04] ———, « Représentations de de Rham et représentations semi-stables », Orsay, Prépublication 2004-12 (`http://www.math.u-psud.fr/~biblio/ppo/2004/ppo2004-12.html`), 2004.

[FL82] J.-M. Fontaine & G. Laffaille – « Construction de représentations p-adiques », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4$^{\text{e}}$ *série* **15** (1982), p. 547–608.

[Fr68] A. Fröhlich – *Formal Groups*, Lect. Notes in Math., vol. 74, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[Ke04] K. Kedlaya – « A p-adic local monodromy theorem », *Annals of Mathematics*, à paraître (`arXiv:math.AG/0110124`).

[La80] G. Laffaille – « Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié », *Bull. Soc. math. France* **108** (1980), p. 187–206.

[La70] S. Lang – *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1970.

[Lu95] J. Lubin – « Sen's theorem on iteration of power series », *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), p. 63–66.

[Ma63] Y. Manin – « The Theory of Commutative Formal Groups over Fields of finite Characteristic », *Russian Math. Surveys* **18** (1963), p. 1–83.

[Ma65] ———, « Moduli Fuchsiani », *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Ser. III* **18** (1965), p. 113–126.

[Me02] Z. Mebkhout – « Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique », *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

[Sen69] S. Sen – « On automorphisms of lcoal fields », *Ann. of Math.* **90** (1969), p. 33–46.

[Sen72] ———, « Ramification in p-adic Lie extensions », *Invent. Math.* **17** (1972), p. 44–50.

[Sen73] ———, « Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules », *Ann. of Math.* **97** (1973), p. 160–170.

[Sen80] ———, « Continuous cohomology and p-adic Galois representations », *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

[Se67] J.-P. Serre – « Local Class Field Theory », in *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London, 1967, p. 128–161.

[CL] ———, *Corps locaux*, 2e éd., Hermann, Paris, 1968.

[Ta67] J. Tate – « p-divisible groups », in *Proc. Conf. Local Fields* (*Driebergen, 1966*), Springer, Berlin, 1967, p. 158–183.

[Ta76] ———, « Relations between K_2 and Galois cohomology », *Invent. Math.* **36** (1976), p. 257–274.

[To96] B. Totaro – « Tensor products in p-adic Hodge Theory », *Duke Math. J.* **83** (1996), p. 79–104.

J.-M. Fontaine, Institut Universitaire de France et UMR 8628 du CNRS, Mathématique, Université de Paris-Sud, Bâtiment 425, F-91405 Orsay Cedex • *E-mail :* fontaine@math.u-psud.fr
Url : http://www.math.u-psud.fr

Astérisque
295, 2004, p. 117–290

p-ADIC HODGE THEORY AND VALUES OF ZETA FUNCTIONS OF MODULAR FORMS

by

Kazuya Kato

***Abstract.* —** If f is a modular form, we construct an Euler system attached to f from which we deduce bounds for the Selmer groups of f. An explicit reciprocity law links this Euler system to the p-adic zeta function of f which allows us to prove a divisibility statement towards Iwasawa's main conjecture for f and to obtain lower bounds for the order of vanishing of this p-adic zeta function. In particular, if f is associated to an elliptic curve E defined over $\mathbb{Q}$, we prove that the p-adic zeta function of f has a zero at $s = 1$ of order at least the rank of the group of rational points on E.

Contents

Introduction 118

Chapter I. Euler systems in K_2 of modular curves and Euler systems in the spaces of modular forms 120
1. Siegel units 121
2. Euler systems in K_2 of modular curves 125
3. Eisenstein series 134
4. Euler systems in the space of modular forms 142
5. Euler systems on $X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$. 152
6. Projections to eigen cusp forms 160
7. The proofs of the zeta value formulas 163

Chapter II. p-adic Euler systems 179
8. Definitions of p-adic Euler systems 180
9. Relation with Euler systems in the spaces of modular forms 186
10. Generalized explicit reciprocity laws 189
11. Modular forms and B_{dR} 202

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 11F11, 11F67, 11F80, 11F85, 11G05, 11G16, 11G40, 11R33, 11R39, 11R56, 11S80, 11S99, 14F30, 14F42, 14G10, 14G35, 14G40.
***Key words and phrases.* —** Modular form, Euler system, Selmer group, reciprocity law, p-adic zeta function, elliptic curve.

© Astérisque 295, SMF 2004

Chapter III. Iwasawa theory of modular forms (without p-adic zeta functions) 218
12. The main conjecture, I 219
13. The method of Euler systems 224
14. Finiteness of Selmer groups and Tamagawa number conjectures 234
15. The case of complex multiplication 250

Chapter IV. Iwasawa theory for modular forms (with p-adic zeta functions) 267
16. The p-adic zeta function 268
17. The main conjecture, II 272
18. p-adic Birch Swinnerton-Dyer conjectures 280

Table of special Notation 284
References 286

Introduction

One of the most fascinating subjects in number theory is the study of mysterious relations between zeta functions and "arithmetic groups". Here "arithmetic groups" include ideal class groups of number fields, Mordell-Weil groups of abelian varieties over number fields, Selmer groups associated to Galois representations of number fields, etc., which play important roles in number theory. Among such relations, we have Iwasawa theory (relation between zeta functions and ideal class groups) which is a refinement in 20th century of the class number formula in 19th century, Birch Swinnerton-Dyer conjectures (relation between zeta functions and Mordell-Weil groups), etc., and much of such relations are still conjectural. When we study such relations, a big difficulty is that zeta functions and arithmetic groups are too much different in nature; zeta functions are analytic and arithmetic groups are algebraic and it is very difficult to understand why they are closely related.

After Kolygavin, it was recognized that zeta functions have not only the usual analytic shapes (Euler products), but also arithmetic shapes (Euler systems), and that it is useful to consider these arithmetic shapes for the study of relations between zeta functions and arithmetic groups; it is more easy to understand the relation between the arithmetic shapes of zeta functions and arithmetic groups which are not far in nature, than the relation of analytic shapes and arithmetic groups.

$$\begin{array}{ccc} \text{zeta function} & \xleftarrow{\text{too far}\quad\quad} & \text{arithmetic groups} \\ \text{(analytic)} & & \text{(algebraic)} \\ \text{Euler systems} & \xleftarrow{\text{near}\quad\quad} & \text{arithmetic groups} \\ \text{(= arithmetic shapes of zeta functions)} & & \text{(algebraic)} \end{array}$$

In this paper, by considering the Euler systems of Beilinson elements in K_2 of modular curves, which are regarded as "arithmetic shapes" of zeta functions of elliptic modular forms, and by using p-adic Hodge theory, we obtain results on the relations between zeta functions of elliptic modular forms and Selmer groups associated to modular forms, and results in Iwasawa theory of modular forms.

Since it is now known that all elliptic curves over $\mathbb{Q}$ are modular ([**Wi**] [**BCDT**]), this gives also results on Birch Swinnerton-Dyer conjectures for elliptic curves over $\mathbb{Q}$.

The main results of this paper are the following. (Please see the text for the precise statements.)

Theorem. — *Let f be an eigen cusp form for $\Gamma_1(N)$ of weight $k \geqslant 2$.*

(1) *(Thm. 14.2) Let $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$, and assume $r \neq k/2$. Then for any finite abelian extension* K *of* $\mathbb{Q}$*, the Selmer group* $\mathrm{Sel}(\mathrm{K}, f, r)$ *of f over* K *with r twist is a finite group.*

(2) *(Thm. 14.2) Assume k is even. Let K be a finite abelian extension of $\mathbb{Q}$. Let $\chi : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}^\times$ be a character, and assume $\mathrm{L}(f, \chi, k/2) \neq 0$. Then the χ-part $\mathrm{Sel}(\mathrm{K}, f, k/2)^{(\chi)}$ of $\mathrm{Sel}(\mathrm{K}, f, k/2)$ is a finite group.*

(3) *(Thm. 18.4) Assume k is even. Then*

$$p\text{-adic corank of } \mathrm{Sel}\big(\mathrm{K}, f, k/2\big) \leqslant \mathrm{ord}_{s=k/2} \quad (p\text{-adic zeta function of } f).$$

(4) *(Thm. 17.4) Assume f is good ordinary at p. Then*

$$\mathfrak{X} \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(\varinjlim_n \mathrm{Sel}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), f, r), (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(r))$$

for $1 \leqslant r \leqslant k-1$ is independent of r and the characteristic ideal of $\mathfrak{X}$ divides p^n times the p-adic zeta function of f for some $n \geqslant 0$.

In some cases, we can drop p^n in (4) (Thm 17.4 (3)). This (4) is a partial answer to a conjecture of Greenberg ([**Gr1**], the case of elliptic curves was conjectured by Mazur [**Ma1**]) who predicts the equality in place of divisibility in (4). We also obtain results on "Iwasawa main conjecture for modular forms without p-adic zeta functions" (Thm. 12.5) and results on Tamagawa number conjectures ([**BK2**]) for modular forms (Thm. 14.5).

There are already many results on these subjects (for example, [**BD**], [**CW**], [**Ru2**], [**Ko**], [**Ne**], ...). Most of former works use elliptic units and Heegner points as "arithmetic shapes of zeta functions", whereas we use Beilinson elements instead. The part of the above Theorem concerning eigen cusp forms f with complex multiplication depends on results of [**Ru2**] on main conjectures of imaginary quadratic fields.

The plan of this paper is as follows. In Chapter I, we define Euler systems of Beilinson elements in K_2 of modular curves (§ 2) and also Euler systems in the spaces of modular forms (§ 4). The former Euler systems are related to $\lim_{s\to 0} s^{-1}\,\mathrm{L}(f, s)$ for cusp forms f of weight 2 by the theory of Beilinson, and the latter Euler systems are related to the zeta values $\mathrm{L}(f, r)$ ($r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$) of cusp forms f of weight

$k \geqslant 2$ by the theory of Shimura. In Chapter 2, by using the above Euler systems in K_2 of modular forms, we define p-adic Euler systems in the Galois cohomology of p-adic Galois representations associated to eigen cusp forms of weight $\geqslant 2$ (§ 8). We prove that via p-adic Hodge theory, these p-adic Euler systems are closely related to the Euler systems in the space of modular forms (§ 9), and hence closely related to the zeta values $\mathrm{L}(f, r)$ ($r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$) for cusp forms of weight $k \geqslant 2$. In chapter III and Chapter IV, by using this relation of our p-adic Euler systems with zeta values, and by using the general theory of Euler systems in Galois cohomology, we obtain our main results.

A large part of results of this paper in the case of modular forms of weight 2 were introduced in Scholl [**Sc2**] and Rubin [**Ru3**].

This work is a continuation of my joint work with S. Bloch on Tamagawa numbers of motives ([**BK2**]), and I am very thankful to him for his great influences. I express my sincere gratitude to J. Coates, M. Kurihara, and T. Saito for their constant encouragements in my writing this paper. I am thankful to N. Kurokawa for teaching me modular forms and Rankin convolutions. I am also thankful to J. Coates, G. Faltings, M. Flach, H. Hida, N. Katz, M. Kurihara, B. Mazur, T. Shioda, T. Tsuji, A. Wiles, for advice, and to P. Colmez for corrections on the manuscript.

Some part of this work was done during the author was a visitor of Japan-US. Math. Inst. in the Johns Hopkins Univ. in 1990, and some improvements in this work were obtained during the author was a visitor of Newton Institute in 1993 and of the Institute for Advanced Study in 1995. I express my sincere gratitude to their hospitalities.

CHAPTER I

EULER SYSTEMS IN K_2 OF MODULAR CURVES AND EULER SYSTEMS IN THE SPACES OF MODULAR FORMS

In this Chapter I, we consider Euler systems in K_2 of modular curves (§ 2) and Euler systems in the spaces of modular forms (§ 4). The former (resp. latter) come from the work of Beilinson [**Be**] (resp. Shimura [**Sh**]) and are related to the zeta values $\lim_{s \to 0} s^{-1} L(f, s)$ (resp. $L(f, r)$ ($1 \leqslant r \leqslant k-1$)) for cusp forms f of weight 2 (resp. k), by the theory in [**Be**] (resp. [**Sh**]).

§ 1 is a review on Siegel units (resp. Eisenstein series) and is a preparation for § 2 (resp. § 4).

1. Siegel units

We review the theory of Siegel units which are functions on modular curves having zeros and poles only on cusps. Cf. [**KL**].

1.1. For $N \geqslant 3$, let $Y(N)$ be the modular curve over $\mathbb{Q}$ of level N without cusps, which represents the functor

$$S \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{the set of isomorphism classes of triples } (E, e_1, e_2) \text{ where } E \text{ is an elliptic} \\ \text{curve over } S \text{ and } (e_1, e_2) \text{ is a pair of sections of } E \text{ over } S \text{ which forms a} \\ \mathbb{Z}/N\text{-basis of } {}_NE = \mathrm{Ker}(N : E \to E). \end{array} \right.$$

Cf. [**DR**].

$Y(N)$ is a smooth irreducible affine curve. The total constant field of $Y(N)$ (the field of all algebraic numbers in the affine ring $\mathcal{O}(Y(N))$ is not $\mathbb{Q}$, but is generated over $\mathbb{Q}$ by a primitive N-th root of 1. Let $X(N)$ be the smooth compactification of $Y(N)$.

If $N, N' \geqslant 3$ and $N \mid N'$, we have a finite étale surjective morphism $Y(N') \to Y(N)$ which represents $(E, e_1, e_2) \mapsto (E, (N'/N)\, e_1, (N'/N)\, e_2)$. We regard $\mathcal{O}(Y(N))$ as a subring of $\mathcal{O}(Y(N'))$ via the pull back.

1.2. The aim of § 1 is to review basic facts about the Siegel units

$${}_cg_{\alpha,\beta} \in \bigcup_N \mathcal{O}(Y(N))^\times, \quad g_{\alpha,\beta} \in \bigcup_N \mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbb{Q}$$

where $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ and c is an integer which is prime to 6 and to the orders of α, β. These elements satisfy

$$\begin{aligned} &{}_cg_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}(Y(N))^\times, \quad g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbb{Q} \ \text{ if } \ N\alpha = N\beta = 0, \\ &{}_cg_{\alpha,\beta} = (g_{\alpha,\beta})^{c^2} (g_{c\alpha,c\beta})^{-1} \ \text{ in } \ \mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

We introduce Siegel units by using the following proposition.

Proposition 1.3. — *Let E be an elliptic curve over a scheme S. Let c be an integer which is prime to* 6. *Then:*

(1) *There exists a unique element ${}_c\theta_E$ of $\mathcal{O}(E \smallsetminus {}_cE)^\times$ satisfying the following conditions* (i) (ii).

(i) ${}_c\theta_E$ *has the divisor $c^2(0) - {}_cE$ on E, where* (0) *denotes the zero section of E regarded as a Cartier divisor on E and ${}_cE = \mathrm{Ker}(c : E \to E)$ is also regarded as a Cartier divisor on E.*

(ii) $N_a({}_c\theta_E) = {}_c\theta_E$ *for any integer a which is prime to c, where N_a is the norm map $\mathcal{O}(E \smallsetminus {}_{ac}E)^\times \to \mathcal{O}(E \smallsetminus {}_cE)^\times$ associated to the pull back homomorphism $\mathcal{O}(E \smallsetminus {}_cE) \to \mathcal{O}(E \smallsetminus {}_{ac}E)$ by the multiplication $a : E \smallsetminus {}_{ac}E \to E \smallsetminus {}_cE$.*

(2) *If d is also an integer which is prime to 6, we have an equality in* $\mathcal{O}(E \smallsetminus {}_{cd}E)^\times$

$$({}_d\theta_E)^{c^2}(c^*({}_d\theta_E))^{-1} = ({}_c\theta_E)^{d^2}(d^*({}_c\theta_E))^{-1}$$

where c^* (resp. d^*) denotes the pull back by the multiplication c (resp. d): $E \to E$.

(3) *Let $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ be the upper half plane. For $\tau \in \mathfrak{H}$ and $z \in \mathbb{C} \smallsetminus c^{-1}(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$, let ${}_c\theta(\tau, z)$ be the value at z of ${}_c\theta$ of the elliptic curve $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ over $\mathbb{C}$. Then,*

$${}_c\theta(\tau, z) = q^{\frac{1}{12}(c^2-1)}(-t)^{\frac{1}{2}(c-c^2)} \cdot \gamma_q(t)^{c^2}\gamma_q(t^c)^{-1}$$

where $q = e^{2\pi i\tau}$, $t = e^{2\pi iz}$ and

$$\gamma_q(t) = \prod_{n \geqslant 0}(1 - q^n t) \prod_{n \geqslant 1}(1 - q^n t^{-1}).$$

(4) *If $h : E \to E'$ is an isogeny of elliptic curves over S whose degree is prime to c, then the norm map h_* sends ${}_c\theta_E$ to ${}_c\theta_{E'}$.*

The proof of Prop. 1.3 is given in 1.10 later.

1.4. We define Siegel units.

In 1.3, consider the case where E is the universal elliptic curve over $Y(N)$, $N \geqslant 3$. We define ${}_cg_{\alpha,\beta}$. Take $N \geqslant 1$ such that $N\alpha = N\beta = 0$, and write $(\alpha, \beta) = (a/N, b/N) \in (\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, and define

$${}_cg_{\alpha,\beta} = \iota_{\alpha,\beta}^*({}_c\theta_E) \in \mathcal{O}(Y(N))^\times$$

where

$$\iota_{\alpha,\beta} = ae_1 + be_2 : Y(N) \longrightarrow E \smallsetminus {}_cE.$$

Here $\iota_{\alpha,\beta}^*({}_c\theta_E)$ is defined since the image of $ae_1 + be_2$ does not intersect with the divisor ${}_cE$ by the assumptions that c is prime to the orders of α, β and $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

By taking c such that $(c, 6) = 1$, $c \equiv 1 \mod N$ and $c \neq \pm 1$, let

$$g_{\alpha,\beta} = {}_cg_{\alpha,\beta} \otimes (c^2 - 1)^{-1} \in \mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbb{Q}.$$

Then it is seen from 1.3 (2) that $g_{\alpha,\beta}$ is independent of the choice of such c, and

$${}_cg_{\alpha,\beta} = (g_{\alpha,\beta})^{c^2}(g_{c\alpha,c\beta})^{-1} \ \text{ in } \ \mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbb{Q}$$

for any integer c such that $(c, 6N) = 1$.

As elements of $\cup_N \mathcal{O}(Y(N))^\times$ (resp. $\cup_N \mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbb{Q}$), ${}_cg_{\alpha,\beta}$ (resp. $g_{\alpha,\beta}$) do not depend on the choice of N above.

Remark 1.5. — To have a perspective view on Siegel units, a good way would be to find some "truth" in the following wrong statement.

"If E is an elliptic curve over a scheme S, there exists an element θ_E of $\mathcal{O}(E \smallsetminus (0))^\times$ which has the divisor (0) on E and $N_a(\theta_E) = \theta_E$ for any non-zero integer a. We have ${}_c\theta_E = (\theta_E)^{c^2} \cdot (c^*(\theta_E))^{-1}$. In the case E is the universal elliptic curve over $Y(N)$, we have $g_{\alpha,\beta} = \iota_{\alpha,\beta}^*(\theta_E)$."

Though the existence of such θ_E would nicely explain properties of ${}_c\theta_E$ and of Siegel units, θ_E does not exist in fact since the degree of a principal divisor should be 0 but (0) has degree 1.

1.6. The group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$ acts on $Y(N)$ from the left in the following way. An element $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$ sends (E, e_1, e_2) to (E, e_1', e_2') where

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

The induced action by σ on the total constant field sends a primitive N-th root α of 1 to $\alpha^{\det(\sigma)}$.

Lemma 1.7

(1) *For $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$ and for $(\alpha, \beta) \in \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, we have*

$$\sigma^*({}_c g_{\alpha,\beta}) = {}_c g_{\alpha',\beta'}$$
$$\sigma^*(g_{\alpha,\beta}) = g_{\alpha',\beta'}$$

where c is any integer which is prime to N and (α', β') is defined by $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)\sigma$.

(2) *(Distribution property.) Let $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, and let a be a non-zero integer. Then*

$${}_c g_{\alpha,\beta} = \prod_{\alpha',\beta'} {}_c g_{\alpha',\beta'} \quad \text{in} \quad \bigcup_N \mathcal{O}(Y(N))^\times$$
$$g_{\alpha,\beta} = \prod_{\alpha',\beta'} g_{\alpha',\beta'} \quad \text{in} \quad \bigcup_N \mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathbb{Q}$$

where c is any integer which is prime to a and to the orders of α, β, and α' (resp. β') ranges over all elements of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ such that $a\alpha' = \alpha$ (resp. $a\beta' = \beta$).

1.7 (1) is proved easily. 1.7 (2) is deduced from $N_a({}_c\theta_E) = {}_c\theta_E$.

1.8. Let $Y(N)(\mathbb{C})$ be the set of $\mathbb{C}$-valued points of the $\mathbb{Q}$-scheme $Y(N)$. We have a canonical map

$$\nu : \mathfrak{H} \longrightarrow Y(N)(\mathbb{C}) ; \quad \tau \longmapsto (\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}), \tau/N, 1/N).$$

Via ν, we often regard elements of $\mathcal{O}(Y(N))$ as functions on $\mathfrak{H}$. The standard action of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ on $\mathfrak{H}$ and the above action of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$ on $Y(N)(\mathbb{C})$ are compatible via ν. We have an isomorphism of analytic spaces

$$(\mathbb{Z}/N)^\times \times \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H} \xrightarrow{\sim} Y(N)(\mathbb{C}) ; \quad (a, \tau) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nu(\tau)$$

where $\Gamma(N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N))$.

The $\mathbb{C}$-valued points $\nu(\tau)$ of $Y(N)$ for $\tau \in \mathfrak{H}$ give a common homomorphism from the total constant field of $Y(N)$ into $\mathbb{C}$. We always regard the total constant field of

$Y(N)$ as a subfield of $\mathbb{C}$ via this homomorphism. In this paper, ζ_N denotes $e^{2\pi i/N}$ which generates this total constant field.

1.9. The pull back of ${}_c g_{\alpha,\beta}$ ($(\alpha,\beta) \in \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$) under $\nu : \mathfrak{H} \to Y(N)(\mathbb{C})$ is the function ${}_c\theta_{\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})}(\alpha\tau+\beta \bmod \mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})$ in $\tau \in \mathfrak{H}$. From 1.3 (3), we can deduce that the pull back of $g_{a/N,b/N}$ on $\mathfrak{H}$ for $a, b \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant a < N$, $(a \bmod N, b \bmod N) \neq (0,0)$ is equal to

$$q^w \cdot \prod_{n \geqslant 0}(1 - q^n q^{a/N}\zeta_N^b) \cdot \prod_{n>0}(1 - q^n q^{-a/N}\zeta_N^{-b})$$

where $w = 1/12 - a/2N + (1/2)(a/N^2)$. Here q^α for $\alpha \in \mathbb{Q}$ means $e^{2\pi i\alpha\tau}$.

1.10. We prove Prop. 1.3. (See [**Sc2**, § 1.2] for another proof.)

We prove 1.3 (1). We first prove the uniqueness of ${}_c\theta_E$. Let f and g be elements of $\mathcal{O}(E \smallsetminus {}_cE)^\times$ having the properties (i) (ii) of ${}_c\theta_E$. Then $g = uf$ for some invertible constant $u \in \mathcal{O}(S)^\times$. For an integer a which is prime to c, we have $g = N_a(g) = N_a(uf) = u^{a^2} f$ (since $a : E \to E$ is of degree a^2) and hence $u^{a^2-1} = 1$. By taking $a = 2$ (resp. $a = 3$), we have $u^3 = 1$ (resp. $u^8 = 1$). Hence $u = 1$.

Next we prove the existence of ${}_c\theta_E$. Since we have already the uniqueness, we can work locally on S. First we show that locally on S, $c^2(0) - {}_cE$ is a principal divisor. For this, by "Abel's theorem" it is sufficient to prove that the image of $c^2(0) - {}_cE$ under the isomorpism of Abel $\mathrm{Pic}(E)^{\deg=0} \to E(S)$ is zero. For any integer a which is prime to c, the image of the divisor $c^2(0) - {}_cE$ under the multiplication $a : E \to E$ is $c^2(0) - {}_cE$ itself. Since the map a_* on $\mathrm{Pic}(E)^{\deg=0}$ is compatible with the multiplication by a on $E(S)$ via the isomorphism of Abel, the image of $c^2(0) - {}_cE$ in $E(S)$ is invariant under the multiplication by a. By taking $a = 2$, we see that the image of $c^2(0) - {}_cE$ in $E(S)$ is zero. Now by what we have proved, there exists locally on S a function $f \in \mathcal{O}(E \smallsetminus {}_cE)^\times$ having the divisor $c^2(0) - {}_cE$. If a is an integer which is prime to c, the divisor of $N_a(f)$, which is the image of $c^2(0) - {}_cE$ under the multiplication by a, is equal to $c^2(0) - {}_cE$. Hence $N_a(f)$ has the same divisor as f and so $N_a(f) = u_a f$ for some invertible constant u_a. If b is also an integer which is prime to c, $N_a N_b = N_b N_a$ shows that $u_a^{b^2-1} = u_b^{a^2-1}$. Hence if we put $g = u_2^{-3} u_3 f$ we have

$$N_a(g) = u_2^{-3a^2} u_3^{a^2} u_a f = u_2^{-3(a^2-1)} u_3^{a^2-1} u_a g = u_a^{-3(2^2-1)} u_a^{3^2-1} u_a g = g.$$

Hence g has the properties (i) (ii) of ${}_c\theta_E$. Since we have already the uniqueness, this local existence of ${}_c\theta_E$ proves the global existence of ${}_c\theta_E$.

We prove 1.3 (2). As is easily seen, both $({}_d\theta_E)^{c^2}(c^*({}_d\theta_E))^{-1}$ and $({}_c\theta_E)^{d^2}(d^*({}_c\theta_E))^{-1}$ have the same divisor $c^2d^2(0) - c^2\,{}_dE - d^2\,{}_cE + {}_{cd}E$. Let $u \in \mathcal{O}(S)^\times$ be the ratio of these two elements. Since these two elements are invariant under N_2 and N_3, we have by applying N_2 (resp. N_3) that $u^4 = u$ (resp. $u^9 = u$). Hence $u = 1$.

We prove 1.3 (3). Let

$$f(z) = q^{\frac{1}{12}(c^2-1)}(-t)^{\frac{1}{2}(c-c^2)} \cdot \gamma_q(t)^{c^2}\gamma_q(t^c)^{-1} \quad \text{where } t = e^{2\pi iz}.$$

Then it is directly checked that as a function of t, $f(z)$ is invariant under the transformation $t \mapsto qt$. Hence $f(z)$ depends only on z mod $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. Hence $f(z)$ is a meromorphic function on $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$. It is seen easily that this function has the characterizing properties (i) (ii) of ${}_c\theta_E$ in (1).

We prove 1.3 (4). For any integer a which is prime to c, we have

$$N_a h_*({}_c\theta_E) = h_* N_a({}_c\theta_E) = h_*({}_c\theta_E).$$

Since the degree of h is prime to c, $h_*({}_c\theta_E)$ has the divisor $c^2(0) -_c E'$. Hence by the uniqueness of ${}_c\theta_{E'}$, we have $h_*({}_c\theta_E) =_c \theta_{E'}$.

2. Euler systems in K_2 of modular curves

2.1. In this section, we consider "zeta elements (elements which are related to zeta functions)" in K_2 of the modular curves $Y(M,N)$.

For M, $N \geqslant 1$, the modular curves $Y(M,N)$ are defined as follows.

Take $L \geqslant 3$ such that $M \mid L$, $N \mid L$. Define

$$Y(M,N) = G\backslash Y(L)$$

where

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L)\,; \right.$$
$$\left. a \equiv 1 \bmod M, \quad b \equiv 0 \bmod M, \quad c \equiv 0 \bmod N, \quad d \equiv 1 \bmod N \right\}$$

Then $Y(M,N)$ is independent of the choice of L.

We have $Y(N,N) = Y(N)$ if $N \geqslant 3$.

Let $X(M,N)$ be the smooth compactification of $Y(M,N)$.

If $M + N \geqslant 5$, the $\mathbb{Q}$-scheme $Y(M,N)$ represents the functor

$$S \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{the set of isomorphism classes of triples } (E, e_1, e_2) \text{ where } E \text{ is an elliptic} \\ \text{curve over } S \text{ and } e_1 \text{ and } e_2 \text{ are sections of } E \text{ over } S \text{ such that } Me_1 = \\ Ne_2 = 0 \text{ and } \mathbb{Z}/M \times \mathbb{Z}/N \to E\,;\ (a,b) \mapsto ae_1 + be_2 \text{ is injective.} \end{array} \right.$$

The canonical morphism $Y(L) \to Y(M,N)$ ($M \mid L$, $N \mid L$) represents $(E, e_1, e_2) \mapsto (E, (L/M)\,e_1, (L/N)\,e_2)$.

In the rest of this section, except in 2.8, we always assume

$$M,\ N \geqslant 2, \quad M + N \geqslant 5.$$

2.2. For integers c, d such that $(c, 6M) = 1$ and $(d, 6N) = 1$, we define elements ${}_{c,d}z_{M,N}$, which we call "zeta elements" by

$$ {}_{c,d}z_{M,N} = \{{}_{c}g_{1/M,0}, {}_{d}g_{0,1/N}\} \in \mathrm{K}_2(Y(M,N)). $$

Note ${}_{c}g_{1/M,0} \in \mathcal{O}(Y(M,1))^{\times}$ and ${}_{d}g_{0,1/N} \in \mathcal{O}(Y(1,N))^{\times}$ by 1.7 (1). We define an element $z_{M,N}$, which we call also a zeta element, by

$$ z_{M,N} = \{g_{1/M,0}, g_{0,1/N}\} \in \mathrm{K}_2(Y(M,N)) \otimes \mathbb{Q}. $$

We have

$$ {}_{c,d}z_{M,N} = \Big(c^2 - \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*\Big)\Big(d^2 - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)^*\Big) \cdot z_{M,N} \quad \text{in} \quad \mathrm{K}_2(Y(M,N)) \otimes \mathbb{Q}. $$

Here, for $a \in (\mathbb{Z}/M)^{\times}$ and $b \in (\mathbb{Z}/N)^{\times}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^*$ denotes the pull back by the action of $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ on $Y(M,N)$ which represents $(E, e_1, e_2) \mapsto (E, ae_1, be_2)$.

In 2.3 and 2.4 below, we consider the behavior of zeta elements under norm homomorphisms, and in 2.6, we consider the relation between zeta elements and zeta functions.

Proposition 2.3. — *Let M', $N' \geqslant 2$, and assume $M \mid M'$, $N \mid N'$. Assume further that*

$$ \mathrm{prime}(M) = \mathrm{prime}(M'), \quad \mathrm{prime}(N) = \mathrm{prime}(N'), $$

where for an integer $a \geqslant 1$, $\mathrm{prime}(a)$ denotes the set of all prime divisors of a. Then, the norm homomorphism

$$ \mathrm{K}_2(Y(M',N')) \longrightarrow \mathrm{K}_2(Y(M,N)) $$

sends ${}_{c,d}z_{M',N'}$ to ${}_{c,d}z_{M,N}$ for any integers c, d such that $(c, 6M) = 1$ and $(d, 6N) = 1$. After $\otimes \mathbb{Q}$, it sends $z_{M',N'}$ to $z_{M,N}$.

Proposition 2.4. — *Let ℓ be a prime number which does not divide M. Let c, d be integers such that $(c, 6M\ell) = 1$ and $(d, 6N\ell) = 1$.*
Then the norm homomorphism

$$ \mathrm{K}_2(Y(M\ell, N\ell)) \longrightarrow \mathrm{K}_2(Y(M,N)) $$

sends ${}_{c,d}z_{M\ell,N\ell}$ to

$$ \Big(1 - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* + \left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1/\ell \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell\Big) \cdot {}_{c,d}z_{M,N} $$

in the case ℓ does not divide N, and to

$$ \Big(1 - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*\Big) \cdot {}_{c,d}z_{M,N} $$

in the case ℓ divides N. Here $T'(\ell)$ is the "dual Hecke operator" explained in 2.9 below. The similar statement holds for $z_{M\ell,N\ell}$ and $z_{M,N}$ (after $\otimes \mathbb{Q}$).

The proofs of 2.3 and 2.4 are given in 2.11–2.13 below.

2.5. We next describe how zeta elements are related to zeta functions.
We consider the operator-valued zeta function

$$Z_{M,N}(s) = \sum_{(n,M)=1} T'(n)\left(\begin{smallmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot n^{-s}$$

($T'(n)$ is the dual Hecke operator explained in 2.9 below), acting on $\mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathbb{C})$. (Here $Y(M,N)(\mathbb{C})$ denotes the set of $\mathbb{C}$-valued points of $Y(M,N)$ as a $\mathbb{Q}$-scheme.) This converges absolutely when $\mathrm{Re}(s) > 2$. This function $Z_{M,N}(s)$ has a presentation as an Euler product whose Euler factor at a prime number ℓ is

$$\begin{cases} \left(1 - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{-s} + \left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1/\ell \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{1-2s}\right)^{-1} & \text{if } (\ell, MN) = 1, \\ \left(1 - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{-s}\right)^{-1} & \text{if } (\ell, M) = 1 \text{ and } \ell \mid N, \\ 1 & \text{if } \ell \mid M. \end{cases}$$

The function $Z_{M,N}(s)$ has an analytic continuation to the whole $\mathbb{C}$ as an operator valued meromorphic function in s, and is holomorphic at $s \neq 2$. Furthermore, $Z_{M,N}(0) = 0$.

As is reviewed in 2.10 below, we have the regulator map

$$\mathrm{reg}_{M,N} : \mathrm{K}_2(Y(M,N)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathbb{R}\cdot i).$$

As is explained in 2.7 below, we have a special element

$$\delta_{M,N} \in \mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Let

$$(\delta_{M,N})^{\pm} = \frac{1}{2}\cdot(\delta_{M,N} \pm \iota(\delta_{M,N})) \in \mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

where ι denotes the pull back by the complex conjugation on $Y(M,N)(\mathbb{C})$.

The following Thm. 2.6 is deduced from the work of Beilinson in [**Be**, § 5]. We will give the proof of Thm. 2.6 in § 7.

Theorem 2.6. — *Assume* $\mathrm{prime}(M) \subset \mathrm{prime}(N)$. *Then we have*

$$\mathrm{reg}_{M,N}(z_{M,N}) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\cdot Z_{M,N}(s)\cdot 2\pi i \cdot (\delta_{M,N})^{-}.$$

2.7. The definition of the special cohomology class $\delta_{M,N}$ is as follows.

By Poincaré duality, the canonical pairing

$$\mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^1_c(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

(H^1_c means the compact support cohomology) induces isomorphisms

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}\left(\mathrm{H}^1_c(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathbb{Z}),\mathbb{Z}\right) \\ &\cong \mathrm{H}_1(X(M,N)(\mathbb{C}), \{\mathrm{cusps}\}, \mathbb{Z}), \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

where

$$\{\mathrm{cusps}\} = X(M,N)(\mathbb{C}) \smallsetminus Y(M,N)(\mathbb{C})$$

We define $\delta_{M,N} \in \mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ to be the image of

$$\mathrm{class}(\varphi) \in \mathrm{H}_1(X(M,N)(\mathbb{C}),\{\mathrm{cusps}\},\mathbb{Z})$$

under (2.7.1), where φ is the continuous map

$$(0,\infty) \longrightarrow X(N)(\mathbb{C})\,;\quad \varphi(y) = \nu(yi) \ \text{ for } \ 0 < y < \infty,$$

which is a route from a cusp to a cusp.

2.8. (In 2.8, we do not make the assumptions $M,\ N \geqslant 2,\ M+N \geqslant 5$.) We give a preliminary to introduce Hecke operators.

For $A \geqslant 1$, define $\mathbb{Q}$-schemes

$$Y(M,N(A)),\quad Y(M(A),N)$$

as follows. Take $L \geqslant 3$ such that $M \mid L$ and $AN \mid L$ (resp. $AM \mid L$ and $N \mid L$). Define $Y(M,N(A))$ (resp. $Y(M(A),N)$) to be the quotient of $Y(L)$ by the action of the subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L)$ consisting of $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ such that

$$a \equiv 1 \bmod M,\quad b \equiv 0 \bmod M \ \ (\text{resp. } AM),$$
$$c \equiv 0 \bmod AN \ \ (\text{resp. } N),\quad d \equiv 1 \bmod N.$$

We have canonical projections

$$Y(M,AN) \longrightarrow Y(M,N(A)) \longrightarrow Y(M,N),$$
$$Y(AM,N) \longrightarrow Y(M(A),N) \longrightarrow Y(M,N).$$

Now assume $M+N \geqslant 5$. Then the $\mathbb{Q}$-scheme $Y(M,N(A))$ (resp. $Y(M(A),N)$) represents the functor

$$S \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{the set of isomorphism classes of } (E,e_1,e_2,C) \text{ where } (E,e_1,e_2) \text{ gives an } S\text{-} \\ \text{valued point of } Y(M,N) \text{ and } C \text{ is a cyclic subgroup scheme of } E \text{ of order} \\ AN \text{ (resp. } AM) \text{ satisfying the following condition.} \end{array} \right.$$

The condition is that C contains the section e_2 (resp. e_1) and the homomorphism

$$\mathbb{Z}/M \times C \longrightarrow E\,;\quad (x,y) \longmapsto xe_1 + y$$
$$(\text{resp.}\quad C \times \mathbb{Z}/N \longrightarrow E\,;\quad (x,y) \longmapsto x + ye_2\,)$$

is injective.

The canonical projections $Y(M,N(A)) \to Y(M,N)$ and $Y(M(A),N) \to Y(M,N)$ are given by $(E,e_1,e_2,C) \mapsto (E,e_1,e_2)$, and the canonical projection $Y(M,AN) \to Y(M,N(A))$ (resp. $Y(AM,N) \to Y(M(A),N)$) is given by $(E,e_1,e_2) \mapsto (E,Ae_1,e_2,\mathbb{Z}e_2)$ (resp. $(E,e_1,e_2) \mapsto (E,Ae_1,e_2,\mathbb{Z}e_1)$).

We have an isomorphism

$$\varphi_A : Y(M,N(A)) \xrightarrow{\sim} Y(M(A),N)$$
$$(E,e_1,e_2,C) \longmapsto (E',e_1',e_2',C')$$

where $E' = E/NC$, e_1' is the image of e_1 in E', e_2' is the image of $A^{-1}e_2 \cap C$ in E', and C' is the image of $A^{-1}\mathbb{Z}e_1$ in E'. Here $A^{-1}e_2$ (resp. $A^{-1}\mathbb{Z}e_1$) denotes the inverse

image of e_2 (resp. $\mathbb{Z}e_1$) under the multiplication by A. ($A^{-1}e_2 \cap C$ is just a closed subscheme of E, but the image of $A^{-1}e_2 \cap C$ in E' becomes a section of E' over S.) The inverse morphism of φ_A is given by

$$\begin{aligned} \varphi_A^{-1} : Y(M(A), N) &\xrightarrow{\simeq} Y(M, N(A)) \\ (E, e_1, e_2, C) &\longmapsto (E', e_1', e_2', C') \end{aligned}$$

where $E' = E/MC$, e_1' is the image of $A^{-1}e_1 \cap C$ in E', e_2' is the image of e_2 in E', and C' is the image of $A^{-1}\mathbb{Z}e_2$ in E'.

If we denote the canonical morphisms

$$\mathfrak{H} \longrightarrow Y(M, A(N))(\mathbb{C}) \quad \text{and} \quad \mathfrak{H} \longrightarrow Y(M(A), N)(\mathbb{C})$$

(induced by $\nu : \mathfrak{H} \to Y(AMN)(\mathbb{C})$) both by ν, φ_A is the unique morphism satisfying

$$\varphi_A(\nu(\tau)) = \nu(A\tau) \quad \text{for any} \quad \tau \in \mathfrak{H}.$$

2.9. The Hecke operators $T(n)$ and the dual Hecke operators $T'(n)$ ($n \geqslant 1$, $(n, M) = 1$) on $\mathrm{K}_2(Y(M, N))$ and on $\mathrm{H}^1(Y(M, N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ are defined as follows.

First, $T(1) = T'(1) = 1$.

Next, we give the definitions of $T(\ell)$ and $T'(\ell)$ for a prime number ℓ which does not divide M. Let

$$\mathrm{pr} : Y(M, N(\ell)) \longrightarrow Y(M, N) \quad \text{and} \quad \mathrm{pr}' : Y(M(\ell), N) \longrightarrow Y(M, N)$$

be the canonical projections. We define

$$T(\ell) = (\mathrm{pr}')_* \circ (\varphi_\ell^{-1})^* \circ \mathrm{pr}^*, \quad T'(\ell) = \mathrm{pr}_* \circ \varphi_\ell^* \circ (\mathrm{pr}')^*.$$

Here $(\ )^*$ means the pull back and $(\ )_*$ means the norm (or trace) homomorphism.

If ℓ does not divide N, we have

$$T'(\ell) = T(\ell)\left(\begin{smallmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1/\ell \end{smallmatrix}\right)^*.$$

In the case n is a power ℓ^e ($e \geqslant 0$) of a prime number ℓ which does not divide M, $T(n)$ and $T'(n)$ are defined as follows. If $\ell \mid N$, $T(\ell^e) = T(\ell)^e$, $T'(\ell^e) = T'(\ell)^e$. If ℓ does not divide N, $T(\ell^e)$ and $T'(\ell^e)$ are defined inductively, by

$$\begin{aligned} T(\ell^{e+2}) &= T(\ell)T(\ell^{e+1}) + T(\ell^e)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & \ell \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell, \\ T'(\ell^{e+2}) &= T'(\ell)T'(\ell^{e+1}) + T'(\ell^e)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & \ell \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell. \end{aligned}$$

Finally, for $n = \prod_\ell \ell^{e(\ell)}$ ($e(\ell) \geqslant 0$) where ℓ ranges over all prime numbers which do not divide M, $T(n)$ and $T'(n)$ are defined by

$$T(n) = \prod_\ell T(\ell^{e(\ell)}), \quad T'(n) = \prod_\ell T'(\ell^{e(\ell)}).$$

Then, for any m, $n \geqslant 1$ such that $(mn, M) = 1$ and for any $a \in (\mathbb{Z}/M)^\times$, $b \in (\mathbb{Z}/N)^\times$, the operators $T(m)$, $T(n)$, $T'(m)$, $T'(n)$, $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^*$ commute with each other.

In the Poincaré duality

$$\mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^1_c(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$T(n)$ and $T'(n)$ are transposes of each other.

2.10. Let Y be a smooth algebraic curve over $\mathbb{C}$. We review the definition of the regulator map ([**Be**])

$$\mathrm{K}_2(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y(\mathbb{C}),\mathbb{R}\cdot i).$$

(In our application, Y is taken to be $Y(M,N)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$.) Since Y is a disjoint union of smooth connected curves, the definition is reduced to the case Y is connected. Now assuming Y is connected, let K be the function field of Y. First, we define

$$\mathrm{K}_2(K) \longrightarrow \varinjlim_{U} \mathrm{H}^1(U(\mathbb{C}),\mathbb{R}\cdot i)$$

where U ranges over all non-empty Zariski open set of Y. For f, $g \in K^\times$, let U be a Zariski open set of Y such that f, $g \in \mathcal{O}(U)^\times$. Define a C^∞-differential form $\eta_{f,g}$ on $U(\mathbb{C})$ by

$$\eta_{f,g} = \log(|f|)\cdot \mathrm{dlog}(g|g|^{-1}) - \log(|g|)\cdot \mathrm{dlog}(f|f|^{-1}).$$

Then $\mathrm{d}\eta_{f,g} = 0$, and hence $\mathrm{class}(\eta_{f,g}) \in \mathrm{H}^1(U(\mathbb{C}),\mathbb{R}\cdot i)$ is defined. It can be shown that the map

$$K^\times \otimes K^\times \longrightarrow \varinjlim_{U} \mathrm{H}^1(U(\mathbb{C}),\mathbb{R}\cdot i)\,; \quad f\otimes g \longmapsto \mathrm{class}(\eta_{f,g})$$

factors through the canonical surjection

$$K^\times \otimes K^\times \longrightarrow \mathrm{K}_2(K)\,; \quad f\otimes g \longmapsto \{f,g\}.$$

We have a commutative diagram of exact sequences

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{K}_2(Y) & \longrightarrow & \mathrm{K}_2(K) & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_{y\in Y(\mathbb{C})} \mathbb{C}^\times \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y(\mathbb{C}),\mathbb{R}\cdot i) & \longrightarrow & \varinjlim_U \mathrm{H}^1(U(\mathbb{C}),\mathbb{R}\cdot i) & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_{y\in Y(\mathbb{C})} \mathbb{R} \end{array}$$

where the right vertical arrow is $z \mapsto \log(|z|)$, the y-component of the upper ∂ for $y \in Y(\mathbb{C})$ is the tame symbol map

$$\{f,g\} \longmapsto \{(-1)^{mn} f^n g^{-m}\}(y) \quad (m = \mathrm{ord}_y(f), \quad n = \mathrm{ord}_y(g))$$

and the y-component of the lower ∂ is $(2\pi i)^{-1}$ times the evaluation at the homology class of a small loop around y with the standard orientation. This diagram defines the regulator map $\mathrm{K}_2(Y) \to \mathrm{H}^1(Y(\mathbb{C}),\mathbb{R}\cdot i)$.

2.11. We prove Prop. 2.3.

In general, if $f : U \to V$ is a morphism of schemes which is finite and locally free, and if $u \in \mathcal{O}(U)^\times$ and $v \in \mathcal{O}(V)^\times$, the norm map $f_* : \mathrm{K}_2(U) \to \mathrm{K}_2(V)$ satisfies the projection formula

$$f_*(\{u, v\}) = \{f_*(u), v\}, \quad f_*(\{v, u\}) = \{v, f_*(u)\}$$

where $f_*(u)$ denotes the image of u under the norm map $\mathcal{O}(U)^\times \to \mathcal{O}(V)^\times$.

Hence, it is enough to prove the case $M' = M$ and the case $N' = N$. Since the both cases are proved similarly, we assume $N = N'$. In this case, our task is to prove that if $M \mid M'$ and $\mathrm{prime}(M) = \mathrm{prime}(M')$, the norm map $\mathcal{O}(Y(M', N))^\times \to \mathcal{O}(Y(M, N))^\times$ sends ${}_c g_{1/M',0}$ to ${}_c g_{1/M,0}$.

Take an integer $L \geqslant 3$ such that $M' \mid L$ and $N \mid L$. Let $a = M'/M$, let G be the subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L)$ corresponding to $Y(M, N)$, and let H be the subgroup of G corresponding to $Y(M', N)$. For each $(x, y) \in (\mathbb{Z}/a)^2$, fix an element $s_{x,y}$ of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L)$ of the form $\left(\begin{smallmatrix} 1+Mu & Mv \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ such that $u \equiv x \bmod a$ and $v \equiv y \bmod a$. (This is possible because $\mathrm{prime}(M') = \mathrm{prime}(M)$.) Then $s_{x,y}$ for $(x, y) \in (\mathbb{Z}/a)^2$ form a system of representatives of $H\backslash G$. Hence the norm homomorphism $\mathcal{O}(Y(M', N))^\times \to \mathcal{O}(Y(M, N))^\times$ sends ${}_c g_{1/M',0}$ to

$$\prod_{(x,y)\in(\mathbb{Z}/a)^2} s_{x,y}^*({}_c g_{1/M',0}) = \prod_{(x,y)\in(\mathbb{Z}/a)^2} {}_c g_{(1/M')+(x/a),y/a} = {}_c g_{1/M,0}$$

where the first equation follows from 1.7 (1) and the second follows from 1.7 (2).

We give a preliminary lemma for the proof of Prop 2.4.

Lemma 2.12. — *Let $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$. Let $A \geqslant 1$, and let c be an integer which is prime to $6A$ and to the orders of α, β. Then we have*

$$\varphi_A^*({}_c g_{\alpha,\beta}) = \prod_{\beta'} {}_c g_{\alpha,\beta'}$$

(i.e. ${}_c g_{\alpha,\beta}(A\tau) = \prod_{\beta'} {}_c g_{\alpha,\beta'}(\tau)$ as functions on $\mathfrak{H}$) where β' ranges over all elements of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ such that $A\beta' = \beta$.

This is proved by using the analytic presentation 1.3 (3) of Siegel units.

2.13. We prove Prop. 2.4.

Take $L \geqslant 3$ such that $M \mid L$, $N \mid L$.

The morphism $Y(M\ell, N\ell) \to Y(M, N)$ factors as

$$Y(M\ell, N\ell) \longrightarrow Y(M, N\ell) \longrightarrow Y(M, N(\ell)) \longrightarrow Y(M, N).$$

Let G_0, G_1, G_2, G_3 be the subgroups of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L\ell)$ corresponding to $Y(M\ell, N\ell)$, $Y(M, N\ell)$, $Y(M, N(\ell))$, $Y(M, N)$, respectively. (So, $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3$.)

Step 1.— First we show that the norm map $\mathrm{K}_2(Y(M\ell, N\ell)) \to \mathrm{K}_2(Y(M, N\ell))$ sends ${}_{c,d}z_{M\ell,N\ell}$ to $\{{}_c g_{1/M,0} \cdot \varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}^{-1}), {}_d g_{0,1/N\ell}\}$ where α denotes the unique element of $\frac{1}{M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ such that $\ell\alpha = 1/M$.

In fact, since ${}_d g_{0,1/N\ell} \in \mathcal{O}(Y(M, N\ell))^\times$, it is enough to show that the norm map $\mathcal{O}(Y(M\ell, N\ell))^\times \to \mathcal{O}(Y(M, N\ell))^\times$ sends ${}_c g_{1/M\ell,0}$ to ${}_c g_{1/M\ell,0} \cdot \varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}^{-1})$. For each $(x, y) \in (\mathbb{Z}/\ell)^\times \times \mathbb{Z}/\ell$, fix an element $s_{x,y}$ of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L\ell)$ of the form $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ such that $u \equiv 1 \bmod M$, $v \equiv 0 \bmod M$, $u \equiv Mx \bmod \ell$, $v \equiv My \bmod \ell$. Then $s_{x,y}$ for $(x, y) \in (\mathbb{Z}/\ell)^\times \times \mathbb{Z}/\ell$ form a system of representatives of $G_0\backslash G_1$. Hence the norm map $\mathcal{O}(Y(M\ell, N\ell))^\times \to \mathcal{O}(Y(M, N\ell))^\times$ sends ${}_c g_{1/M\ell,0}$ to

$$\begin{aligned}\prod_{(x,y)\in(\mathbb{Z}/\ell)^\times\times\mathbb{Z}/\ell} s_{x,y}^*({}_c g_{1/M\ell,0}) &= \prod_{(x,y)\in(\mathbb{Z}/\ell)^\times\times\mathbb{Z}/\ell} {}_c g_{\alpha+(x/\ell),y/\ell} \\ &= \Big(\prod_{(x,y)\in(\mathbb{Z}/\ell)^2} {}_c g_{\alpha+(x/\ell),y/\ell}\Big) \cdot \Big(\prod_{y\in\mathbb{Z}/\ell} {}_c g_{\alpha,y/\ell}\Big)^{-1} \\ &= {}_c g_{1/M,0} \cdot \varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}^{-1}) \quad \text{by 1.7 (2) and 2.12.}\end{aligned}$$

Step 2.— We show that the norm map $\mathrm{K}_2(Y(M, N\ell)) \to \mathrm{K}_2(Y(M, N(\ell)))$ sends $\{{}_c g_{1/M,0} \cdot \varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}^{-1}), {}_d g_{0,1/N\ell}\}$ to

$$\begin{aligned}&\{{}_c g_{1/M,0} \cdot \varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}^{-1}), \varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N})\} \\ (\text{resp.}\quad &\{{}_c g_{1/M,0} \cdot \varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}^{-1}), \varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) \cdot {}_d g_{0,\beta}^{-1}\}\,)\end{aligned}$$

in the case ℓ divides N (resp. does not divide N, where β is the unique element of $\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ such that $\ell\beta = 1/N$).

For each $x \in \mathbb{Z}/\ell$ (resp. $(\mathbb{Z}/\ell)^\times$), fix an element s_x of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L\ell)$ of the form $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)$ such that $u \equiv 1 + Nx \bmod N\ell$ (resp. $u \equiv 1 \bmod N$ and $u \equiv Nx \bmod \ell$). Then s_x for $x \in \mathbb{Z}/\ell$ (resp. $(\mathbb{Z}/\ell)^\times$) form a system of representatives of $G_1\backslash G_2$. Hence the norm map $\mathcal{O}(Y(M, N\ell))^\times \to \mathcal{O}\big(Y(M, N(\ell))\big)^\times$ sends ${}_d g_{0,1/N\ell}$ to

$$\begin{aligned}\prod_x s_x^* {}_d g_{0,1/N\ell} &= \prod_x {}_d g_{0,(1/N\ell)+(x/\ell)} \quad (\text{resp.} \quad \prod_x {}_d g_{0,\beta+(x/\ell)}\,) \\ &= \varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) \quad (\text{resp.} \quad \varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) \cdot {}_d g_{0,\beta}^{-1}\,) \quad \text{by 2.12.}\end{aligned}$$

Since ${}_c g_{1/M,0} \cdot \varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}) \in \mathcal{O}(Y(M, N(\ell)))^\times$, this proves the above statement on the K_2-norm map $\mathrm{K}_2(Y(M, N\ell)) \to \mathrm{K}_2\big(Y(M, N(\ell))\big)$.

It remains to consider what happens in $\mathrm{K}_2\big(Y(M, N(\ell))\big) \to \mathrm{K}_2(Y(M, N))$.

Step 3.— We will prove the following (2.13.1) and (2.13.2) in Step 4. Let $\mathrm{pr} : Y(M, N(\ell)) \to Y(M, N)$ be the canonical projection.

(2.13.1) In the case $\ell \mid N$, $\quad \mathrm{pr}_* \varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) = {}_d g_{0,1/N}$.

(2.13.2) In the case ℓ does not divide N, we have

$$\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}) = {}_c g_{1/M,0}\cdot ({}_c g_{\alpha,0})^\ell$$
$$\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) = {}_d g_{0,1/N}\cdot ({}_c g_{0,\beta})^\ell.$$

We prove Prop. 2.4 by using these (2.13.1), (2.13.2).

First assume $\ell \mid N$. Then, the norm map $\mathrm{K}_2(Y(M\ell,N\ell)) \to \mathrm{K}_2(Y(M,N))$ sends ${}_{c,d}z_{M\ell,N\ell}$ to

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pr}_*\{{}_c g_{1/M,0}\cdot\varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}^{-1}), \varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N})\} \ \text{(by Step 1 and Step 2)}\\
&\quad = \{{}_c g_{1/M,0}, \mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N})\} - T'(\ell)\{{}_c g_{\alpha,0}, {}_d g_{0,1/N}\}\\
&\quad = {}_{c,d}z_{M,N} - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^*({}_{c,d}z_{M,N}) \ \text{(by (2.13.1))}.
\end{aligned}$$

Next assume ℓ does not divide N. Then the norm map $\mathrm{K}_2(Y(M\ell,N\ell)) \to \mathrm{K}_2(Y(M,N))$ sends ${}_{c,d}z_{M\ell,N\ell}$ to

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pr}_*\{{}_c g_{1/M,0}\cdot\varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}^{-1}), \varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N})\cdot({}_d g_{0,\beta}^{-1})\} \ \text{(by Step 1 and Step 2)}\\
&\quad = \{{}_c g_{1/M,0}, \mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N})\} - T'(\ell)\{{}_c g_{\alpha,0}, {}_d g_{0,1/N}\}\\
&\qquad\qquad - (\ell+1)\{{}_c g_{1/M,0}, {}_d g_{0,\beta}\} + \{\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*({}_c g_{\alpha,0}), {}_d g_{0,\beta}\}
\end{aligned}$$

(here $\ell+1$ appears because $Y(M,N(\ell))$ is of degree $\ell+1$ over $Y(M,N)$ in the case ℓ does not divide N)

$$= {}_{c,d}z_{M,N} - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^*{}_{c,d}z_{M,N} + \left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1/\ell\end{smallmatrix}\right)^*\cdot\ell\cdot{}_{c,d}z_{M,N} \ \text{ by (2.13.2)}.$$

Step 4.— We prove the statements (2.13.1), (2.13.2). Since the three equalities in (2.13.1), (2.13.2) are proved in the similar way, we give here only the proof of $\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) = {}_d g_{0,1/N}\cdot({}_c g_{0,\beta})^\ell$ in the case ℓ does not divide N. For each $x \in \mathbb{Z}/\ell$, fix an element s_x of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/\ell)$ of the form $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{smallmatrix}\right)$ such that $u \equiv 0 \bmod N$, $u \equiv x \bmod \ell$. Let σ be an element of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L\ell)$ whose image in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$ is $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ and whose image in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/\ell)$ is $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$. Then s_x for $x \in \mathbb{Z}/\ell$ and σ form a system of representatives of $G_2\backslash G_3$. Hence

$$\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) = \Big(\prod_{x\in\mathbb{Z}/\ell} s_x^*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N})\Big)\cdot\sigma^*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}).$$

Since $\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) = \prod_{y\in\mathbb{Z}/\ell} {}_d g_{0,\beta+(y/\ell)}$, we have

$$\prod_{x\in\mathbb{Z}/\ell} s_x^*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) = \prod_{x,y\in\mathbb{Z}/\ell} {}_d g_{xy/\ell,\beta+(y/\ell)} = \Big(\prod_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}/\ell\\ y\neq 0}} {}_d g_{x/\ell,\beta+(y/\ell)}\Big)\cdot({}_d g_{0,\beta})^\ell.$$

On the other hand,

$$\sigma^*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) = \prod_{y\in\mathbb{Z}/\ell} {}_d g_{y/\ell,\beta}.$$

Hence

$$\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*({}_d g_{0,1/N}) = \Big(\prod_{x,y\in\mathbb{Z}/\ell} {}_d g_{x/\ell,\beta+(y/\ell)}\Big)\cdot({}_d g_{0,\beta})^\ell = {}_d g_{0,1/N}\cdot({}_d g_{0,\beta})^\ell \quad \text{by 1.7 (2).}$$

3. Eisenstein series

The aim of this section is to review the basic facts about Eisenstein series. See Weil [**We**], Katz [**KN**], Katz-Mazur [**KM**] for the proofs of the results introduced here.

Let $N \geqslant 3$, let $X(N)$ be the smooth compactification of $Y(N)$, and let $M_k(X(N))$ ($k \in \mathbb{Z}$) be the space of modular forms on $X(N)$ of weight k. (We review the definition of $M_k(X(N))$ in 3.1.) In this section, we introduce the following modular forms indexed by $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, called Eisenstein series.

(i) $E^{(k)}_{\alpha,\beta} \in \bigcup_N M_k(X(N))$ ($k \geqslant 1$, $k \neq 2$).

(ii) $\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} \in \bigcup_N M_2(X(N))$.

($\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta}$ is something like "$E^{(2)}_{\alpha,\beta} - E^{(2)}_{0,0}$", but the modular forms $E^{(2)}_{\alpha,\beta}$ do not exist.)

(iii) $F^{(k)}_{\alpha,\beta} \in \bigcup_N M_k(X(N))$ ($k \geqslant 1$; we assume $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ in the case $k = 2$).

If $N\alpha = N\beta = 0$, the elements (i) (iii) belong to $M_k(X(N))$, and the elements (ii) belong to $M_2(X(N))$.

We define these elements algebraically in 3.2–3.6 first, and then give the analytic presentations of them in 3.8.

Eisenstein series are additive analogues of Siegel units (which are multiplicative elements).

3.1. We introduce algebraic definitions of $M_k(X(N))$ and of the subspace $S_k(X(N))$ of $M_k(X(N))$ consisting of cusp forms.

Let $\lambda : E \to Y(N)$ be the universal elliptic curve, and let

$$\overline{\lambda} : \overline{E} \longrightarrow X(N)$$

be the smooth Néron model of E over $X(N)$. Let

$$\mathrm{coLie}(\overline{E}) = \overline{\lambda}_*(\Omega^1_{\overline{E}/X(N)}).$$

Then $\mathrm{coLie}(\overline{E})$ is an invertible $\mathcal{O}_{X(N)}$-module, and

$$\Omega^1_{\overline{E}/X(N)} = \overline{\lambda}^*\,\mathrm{coLie}(\overline{E}).$$

Define

$$M_k(X(N)) = \Gamma\big(X(N), \mathrm{coLie}(\overline{E})^{\otimes k}\big). \tag{3.1.1}$$

We have another equivalent definition

$$M_k(X(N)) = \Gamma\big(X(N), \mathrm{coLie}(\overline{E})^{\otimes(k-2)} \otimes_{\mathcal{O}(X(N))} \Omega^1_{X(N)/\mathbb{Q}}(\log(\mathrm{cusps}))\big) \tag{3.1.2}$$

where $\Omega^1_{X(N)/\mathbb{Q}}(\log(\text{cusps}))$ denotes the sheaf of differential forms on $X(N)$ with log poles at cusps.

The equivalence of the two definitions (3.1.1) and (3.1.2) is given by the isomorphism (3.1.4) below. Denote $\lambda_*(\Omega^1_{E/Y(N)})$ by $\mathrm{coLie}(E)$. We have a canonical homomorphism

$$\mathrm{coLie}(E) \longrightarrow \Omega^1_{Y(N)/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}(Y(N))} \mathrm{R}^1\lambda_*(\mathcal{O}_E) \tag{3.1.3}$$

on $Y(N)$ as the connecting map of the exact sequence

$$0 \longrightarrow \lambda^*(\Omega^1_{Y(N)/\mathbb{Q}}) \longrightarrow \Omega^1_{E/\mathbb{Q}} \longrightarrow \Omega^1_{E/Y(N)} \longrightarrow 0.$$

By composing (3.1.3) with the Serre duality

$$\mathrm{R}^1\lambda_*(\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}(Y(N))} \mathrm{coLie}(E) = \mathrm{R}^1\lambda_*(\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}(Y(N))} \lambda_*(\Omega^1_{E/Y(N)}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y(N)},$$

we obtain the composite map

$$\mathrm{coLie}(E)^{\otimes 2} \longrightarrow \Omega^1_{Y(N)/\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}(Y(N))} \mathrm{R}^1\lambda_*(\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}(Y(N))} \mathrm{coLie}(E) \longrightarrow \Omega^1_{Y(N)/\mathbb{Q}}.$$

It is known ([**KM**, 10.13]) that this composite map induces an isomorphism

$$\mathrm{coLie}(E)^{\otimes 2} \cong \Omega^1_{X(N)/\mathbb{Q}}(\log(\text{cusps})). \tag{3.1.4}$$

The space $S_k(X(N))$ of cusp forms on $X(N)$ of weight k is defined by

$$S_k(X(N)) = \Gamma\big(X(N), \mathrm{coLie}\,(\overline{E})^{\otimes(k-2)} \otimes_{\mathcal{O}_{X(N)}} \Omega^1_{X(N)/\mathbb{Q}}\big) \subset M_k(X(N)).$$

3.2. We define elements

$${}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta} \in M_k(X(N)) \quad \text{for} \quad k \geqslant 1 \quad \text{and} \quad (\alpha,\beta) \in \big(\tfrac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\big)^2,$$

where c is an integer which is prime to $6N$. Once the elements $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ for $k \geqslant 1$, $k \neq 2$, and the elements $\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta}$ are defined, ${}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta}$ is expressed as

$$\begin{aligned} {}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta} &= c^2 E^{(k)}_{\alpha,\beta} - c^k E^{(k)}_{c\alpha,c\beta} \quad \text{for} \quad k \geqslant 1, \quad k \neq 2, \\ {}_cE^{(2)}_{\alpha,\beta} &= c^2 \widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} - c^2 \widetilde{E}^{(2)}_{c\alpha,c\beta}. \end{aligned}$$

But it is convenient to define ${}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta}$ first, by using the theta function ${}_c\theta_E$ in Prop. 1.3.

Let the notation be as in 1.3.

Let c be an integer which is prime to 6, and consider the element

$$\mathrm{dlog}({}_c\theta_E) \in \Gamma(E \smallsetminus {}_cE, \Omega^1_{E/Y(N)}) = \Gamma(E \smallsetminus {}_cE, \lambda^*\,\mathrm{coLie}(E)).$$

For $r \in \mathbb{Z}$, let

$$D : \lambda^*\mathrm{coLie}(E)^{\otimes r} \longrightarrow \lambda^*\mathrm{coLie}(E)^{\otimes(r+1)}$$

be the map defined locally by

$$f \otimes \omega^{\otimes r} \longmapsto \frac{\mathrm{d}f}{\omega} \otimes \omega^{\otimes(r+1)},$$

where $f \in \mathcal{O}_E$, ω is a local basis of $\mathrm{coLie}(E)$, and $\mathrm{d}f/\omega \in \mathcal{O}_E$ is determined by

$$\mathrm{d}f = \big(\frac{\mathrm{d}f}{\omega}\big) \cdot \omega \ \text{ in } \ \Omega^1_{E/Y(N)}.$$

For $k \geqslant 1$, we have an element

$$D^{k-1}\,\mathrm{dlog}({}_c\theta_E) \in \Gamma(E \smallsetminus {}_cE, \lambda^*\mathrm{coLie}(E)^{\otimes k}).$$

Now for $(\alpha,\beta) \in \big(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\big)^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, assuming $(c,6N)=1$, we define

$${}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta} = \iota^*_{\alpha,\beta}(D^{k-1}\,\mathrm{dlog}({}_c\theta_E)) \in \Gamma(Y(N), \mathrm{coLie}(E)^{\otimes k})$$

where $\iota_{\alpha,\beta} : Y(N) \to E \smallsetminus {}_cE$ is as in 1.4. Then ${}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta}$ belongs to $M_k(X(N)) \subset \Gamma(Y(N), \mathrm{coLie}(E)^{\otimes k})$.

We next define ${}_cE^{(k)}_{0,0}$ for $k \geqslant 1$ and for an integer c such that $(c,6)=1$. The following is deduced from $N_a({}_c\theta_E) = {}_c\theta_E$:

If $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, a, $c \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, and if c is prime to $6a$ and to the orders of α, β, then

$$a^k\,{}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha',\beta'} {}_cE^{(k)}_{\alpha',\beta'}$$

where α' (resp. β') ranges over all of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ such that $a\alpha' = \alpha$ (resp. $a\beta' = \beta$).

This shows that the following element ${}_cE^{(k)}_{0,0}$ is independent of the choice of $a \neq \pm 1$ which is prime to c:

$${}_cE^{(k)}_{0,0} \underset{\text{def}}{=} (a^k-1)^{-1} \sum_{\alpha,\beta}{}' \, {}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta}$$

where $\sum'$ is the sum over all non-zero elements (α,β) of $\big(\frac{1}{a}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\big)^2$.

3.3. We define $E^{(k)}_{\alpha,\beta} \in M_k(X(N))$ for $k \geqslant 1$, $k \neq 2$ and for $(\alpha,\beta) \in \big(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\big)^2$. From Prop. 1.3 (2), we obtain

$$c^2\,{}_dE^{(k)}_{\alpha,\beta} - c^k\,{}_dE^{(k)}_{c\alpha,c\beta} = d^2\,{}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta} - d^k\,{}_cE^{(k)}_{d\alpha,d\beta}$$

for any integers c, d which are prime to $6N$. This shows that if we take c which is prime to $6N$ such that $c \equiv 1 \mod N$ and $c \neq \pm 1$, then

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta} \underset{\text{def}}{=} (c^2-c^k)^{-1}\,{}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta}$$

is independent of the choice of such c. We have

$${}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta} = c^2E^{(k)}_{\alpha,\beta} - c^kE^{(k)}_{c\alpha,c\beta} \ \text{ for } \ k \neq 2 \ \text{ and } \ (\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$$

where c is any integer which is prime to 6 and to the orders of α, β.

3.4. We define $\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} \in M_k(X(N))$ for $(\alpha,\beta) \in \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2\right)$.

In general, if $f : E \to S$ is an elliptic curve over a scheme S on which 6 is invertible, there exists locally on S a pair (ω, x) satisfying the following conditions; ω is a basis of the invertible $\mathcal{O}_S$-module $\mathrm{coLie}(E)$, x is a section of I^{-2} where I denotes the invertible ideal of $\mathcal{O}_E$ defining the origin of E, the image of x in $f_*(I^{-2})/f_*(I^{-1})$ is a basis of the invertible $\mathcal{O}_S$-module $f_*(I^{-2})/f_*(I^{-1})$, and there exist sections a, b of $\mathcal{O}_S$ such that

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\omega}\right)^2 = 4x^3 + ax + b.$$

Here $\frac{\mathrm{d}x}{\omega}$ is defined by $\mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\omega}\right)\omega$ in $I^{-3}\Omega^1_{E/S}$. Furthermore, $x \otimes \omega^2 \in I^{-2} \cdot f^*\,\mathrm{coLie}(E)^{\otimes 2}$ is independent of the choice of such pair (x,ω), and hence is defined globally on S. Take $Y(N)$ as S and the universal elliptic curve as E, and let

$$\wp \in \Gamma(E, I^{-2} \cdot f^*\mathrm{coLie}(E)^{\otimes 2})$$

be the section which is locally $x \otimes \omega^{\otimes 2}$ for a pair (x,ω) as above.

Now let $(\alpha,\beta) \in \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. We define

$$\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} = \iota^*_{\alpha,\beta}(\wp) \in \Gamma(Y(N), \mathrm{coLie}(E)^{\otimes 2}).$$

Then $\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta}$ belongs to $M_k(X(N)) \subset \Gamma(Y(N), \mathrm{coLie}(E)^{\otimes 2})$.

We define

$$\widetilde{E}^{(2)}_{0,0} = 0.$$

3.5. The constructions in 3.2–3.3 and those in 3.4 are related as follows. We have

$$D\,\mathrm{dlog}({}_c\theta_E) = c^2\wp - c^*\wp \tag{3.5.1}$$

(E is the universal elliptic curve) where c^* denotes the pull back by the multiplication by $c : E \to E$. (This can be proved for example, by using the analytic descriptions of $\wp$ and $D\,\mathrm{dlog}({}_c\theta_E)$ given in 3.8 below.) From this we have for any $k \geqslant 2$,

$$D^{k-1}\,\mathrm{dlog}({}_c\theta_E) = c^2 D^{k-2}\wp - c^* D^{k-2}\wp. \tag{3.5.2}$$

From (3.5.1) and (3.5.2), we have for $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$

$${}_cE^{(2)}_{\alpha,\beta} = c^2\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} - c^2\widetilde{E}^{(2)}_{c\alpha,c\beta}$$

(this formula holds also in the case $(\alpha,\beta) = (0,0)$) and

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta} = \iota^*_{\alpha,\beta}(D^{k-2}\wp) \quad \text{for} \quad k \geqslant 3$$

(this formula presents another algebraic definition of $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ for $k \geqslant 3$).

3.6. Next we define the elements $F^{(k)}_{\alpha,\beta} \in M_k(X(N))$ for $k \geqslant 1$ (we assume $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ in the case $k=2$).

For $(\alpha,\beta) \in \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2$, writing $\alpha = a/N$, $\beta = b/N$, define

$$F^{(k)}_{\alpha,\beta} = N^{-k} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}/N} E^{(k)}_{x/N,y/N} \cdot \zeta_N^{bx-ay} \in M_k(X(N)) \quad (\text{here } k \neq 2),$$

$$F^{(2)}_{\alpha,\beta} = N^{-2} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}/N} \widetilde{E}^{(2)}_{x/N,y/N} \cdot \zeta_N^{bx-ay} \in M_2(X(N)) \quad (\text{here } (\alpha,\beta) \neq (0,0)).$$

By the "distribution property" (i) (ii) of 3.7 (2) below, $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ is independent of the choices of N, a, b such that $\alpha = a/N$ and $\beta = b/N$. We have

$$E^{(k)}_{a/N,b/N} = N^{k-2} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}/N} F^{(k)}_{x/N,y/N} \cdot \zeta_N^{bx-ay} \quad \text{if} \quad k \neq 2.$$

In the case $k=2$, we have the formula for $\widetilde{E}^{(2)}_{a/N,b/N}$ of the same form, except that (x,y) ranges in this case over all elements of $(\mathbb{Z}/N)^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$.

The following 3.7 is an additive analogue of 1.7.

Lemma 3.7. — *Let $k \geqslant 1$.*

(1) *Let $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$, $(\alpha,\beta) \in \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2$, $(\alpha',\beta') = (\alpha,\beta)\cdot\sigma$. Then we have:*

(i) $\sigma^*(E^{(k)}_{\alpha,\beta}) = E^{(k)}_{\alpha',\beta'}$, *if $k \neq 2$.*

(ii) $\sigma^*(\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta}) = \widetilde{E}^{(2)}_{\alpha',\beta'}$.

(iii) $\sigma^*(F^{(k)}_{\alpha,\beta}) = F^{(k)}_{\alpha',\beta'}$ *; here, we assume $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ in the case $k=2$.*

(2) *(Distribution property.) Let $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Then we have the following equalities where α' (resp. β') ranges over all elements of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ such that $a\alpha' = \alpha$ and $a\beta' = \beta$.*

(i) $a^k E^{(k)}_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha',\beta'} E^{(k)}_{\alpha',\beta'}$, *if $k \neq 2$.*

(ii) $a^2 \widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha',\beta'} \widetilde{E}^{(2)}_{\alpha',\beta'}$.

(iii) $a^{2-k} F^{(k)}_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha',\beta'} F^{(k)}_{\alpha',\beta'}$ *; here, we assume $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ in the case $k=2$.*

(1) is proved easily. (2) is deduced from the analytic descriptions of Eisenstein series given in 3.8 below.

3.8. We review the analytic theory of Eisenstein series.

Let $\lambda : E \to Y(N)$ be the universal elliptic curve. Then we have a cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{H}\times\mathbb{C})/\sim & \longrightarrow & E(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathfrak{H} & \xrightarrow{\nu} & Y(N)(\mathbb{C}) \end{array}$$

where $\sim$ is the equivalence relation defined as follows. For (τ, z), $(\tau', z') \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$, $(\tau, z) \sim (\tau', z')$ if and only if $\tau = \tau'$ and $z - z' \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$.

Let (τ, z) be the standard coordinate of $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$. Then the pull back of $F \in M_k(X(N))$ to $\mathfrak{H}$ is written in the form

$$F = f(\tau) \otimes \big(\frac{\mathrm{d}t}{t}\big)^{\otimes k} \quad (t = e^{2\pi i z}) = f(\tau) \otimes (2\pi i \mathrm{d}z)^{\otimes k}$$

where $f(\tau)$ is a holomorphic function on $\mathfrak{H}$ satisfying

$$f\big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\big) = (c\tau + d)^k f(\tau) \quad \text{for all} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N).$$

Classically, this f was called a modular form. We will identify an element F of $M_k(X(N))$ with the above holomorphic function $f(\tau)$.

It is known ([**KM**, 10.13]) that the isomorphism (3.1.4)

$$\mathrm{coLie}(\overline{E})^{\otimes 2} \cong \Omega^1_{X(N)/\mathbb{Q}}(\log(\mathrm{cusps}))$$

sends $\big(\mathrm{d}t/t\big)^{\otimes 2}$ to $\mathrm{d}q/q$ ($q = e^{2\pi i \tau}$).

We now describe the pull backs on $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ or on $\mathfrak{H}$, of the objects which appeared in this section.

First, $\wp$ in 3.4 is described as

$$\wp = \wp(\tau, z) \otimes (2\pi i \mathrm{d}z)^{\otimes 2}$$

where $\wp(\tau, z)$ is Weierstrass' $\wp$-function defined by

$$\wp(\tau, z) = (2\pi i)^{-2}\Big(z^{-2} + \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \{(z + m\tau + n)^{-2} - (m\tau + n)^{-2}\}\Big).$$

Define functions $E^{(k)}(\tau, z)$ on $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ and functions $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ on $\mathfrak{H}$ ($k \geqslant 0$, $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$; we assume $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ in the case $k = 0$) as follows. (If $k \neq 0$, 2, as in (3.8.4) below, this notation $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ is compatible with the notation for the modular forms $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$.) If $k \geqslant 3$, the definitions are simply

$$E^{(k)}(\tau, z) = (-1)^k \cdot (k-1)! \cdot (2\pi i)^{-k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (z + m\tau + n)^{-k}.$$

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\tau) = E^{(k)}\big(\tau, \widetilde{\alpha}\tau + \widetilde{\beta}\big) \quad \text{for} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

where $\big(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\big)$ is a lifting of (α, β) to $\mathbb{Q}^2$.

$$E^{(k)}_{(0,0)}(\tau) = (-1)^k \cdot (k-1)! \cdot (2\pi i)^{-k} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} (m\tau + n)^{-k}.$$

To include the cases $k = 0$, 1, 2, define for $k \geqslant 0$

$$E(k, \tau, z, s) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (z + m\tau + n)^{-k} |z + m\tau + n|^{-s}.$$

$$E_{(0,0)}(k, \tau, s) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} (m\tau + n)^{-k} |m\tau + n|^{-s}.$$

These series converge absolutely when $k + \mathrm{Re}(z) > 2$. When k, τ, z are fixed, these functions in s have analytic continuations as meromorphic functions on the whole s-plane. These functions for $k \geqslant 1$ are holomorphic on the whole s-plane, and $E(0, \tau, z, s)$ has a zero at $s = 0$. Let

$$E^{(k)}(\tau, z) = (-1)^k \cdot (k-1)! \cdot (2\pi i)^{-k} E(k, \tau, z, 0) \quad \text{for} \quad k \geqslant 1,$$

$$E^{(0)}(\tau, z) = \lim_{s\to 0} s^{-1} E(0, \tau, z, s),$$

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\tau) = E^{(k)}\big(\tau, \widetilde{\alpha}\tau + \widetilde{\beta}\big) \quad \text{for} \quad k \geqslant 0 \quad \text{and} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

where $\big(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\big)$ is a lifting of (α, β) to $\mathbb{Q}^2$,

$$E^{(k)}_{0,0}(\tau) = (-1)^k \cdot (k-1)! \cdot (2\pi i)^{-k} E_{(0,0)}(k, \tau, 0) \quad \text{for} \quad k \geqslant 1.$$

We have:

(3.8.1) For $k \geqslant 1$, $D^{k-1} \operatorname{dlog}({}_c\theta_E) = \big(c^2 E^{(k)}(\tau, z) - c^k E^{(k)}(\tau, cz)\big) \otimes \big(\dfrac{\mathrm{d}t}{t}\big)^{\otimes k}$.

(3.8.2) $\log(|{}_c\theta_E|) = c^2 E^{(0)}(\tau, z) - E^{(0)}(\tau, cz)$.

(3.8.3)
$$\begin{aligned} \wp &= (E^{(2)}(\tau, z) - E^{(2)}_{0,0}(\tau)) \otimes \big(\tfrac{\mathrm{d}t}{t}\big)^{\otimes 2}. \\ D^{k-2}\wp &= E^{(k)}(\tau, z) \otimes \big(\tfrac{\mathrm{d}t}{t}\big)^{\otimes k} \text{ for } k \geqslant 3. \end{aligned}$$

(3.8.4) Let $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$. Then:

(i) If $k \geqslant 1$, $k \neq 2$, the modular form $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ coincides with the function $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ defined analytically above.

(ii) $\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} = E^{(2)}_{\alpha,\beta} - E^{(2)}_{0,0}$.

(iii) $\log|g_{\alpha,\beta}| = E^{(0)}_{\alpha,\beta}$ for $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

(iv) The functions $E^{(0)}_{\alpha,\beta}$ ($(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$) and $E^{(2)}_{\alpha,\beta}$ are C^∞-functions on $\mathfrak{H}$ but not holomorphic.

3.9. We next consider q-expansions. It is known that the pull back of an element of $M_k(X(N))$ on $\mathfrak{H}$ has a presentation

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}, n\geqslant 0} a_n q^{n/N} \quad (a_n \in \mathbb{Q}(\zeta_N))$$

($q^{n/N} = e^{2\pi i n\tau/N}$) called q-expansion. We give q-expansions of Eisenstein series.

For $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, define $\zeta(\alpha, s)$ and $\zeta^*(\alpha, s)$ by

$$\zeta(\alpha, s) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}, n>0 \\ n \bmod \mathbb{Z} = \alpha}} n^{-s}, \quad \zeta^*(\alpha, s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i \alpha n} \cdot n^{-s}.$$

Note $\zeta(0, s) = \zeta^*(0, s) = \zeta(s)$.

Proposition 3.10. — *Let $k \geqslant 1$ and α, $\beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$*

(1) *Assume $k \neq 2$. Write*

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta} = \sum_{n \in \mathbb{Q}, n \geqslant 0} a_n q^n.$$

Then a_n for $n > 0$ are given by

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}, n>0} a_n n^{-s} = \zeta^*(\alpha, s)\zeta^*(\beta, s-k+1) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s)\zeta^*(-\beta, s-k+1).$$

In the case $k \neq 1$, $a_0 = 0$ if $\alpha \neq 0$, and $a_0 = \zeta^*(\beta, 1-k)$ if $\alpha = 0$.
In the case $k = 1$, $a_0 = \zeta(\alpha, 0)$ if $\alpha \neq 0$, and

$$a_0 = \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0)) \quad \text{if} \quad \alpha = 0.$$

(2) *Write*

$$\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} = \sum_{n \in \mathbb{Q}, n \geqslant 0} a_n q^n.$$

Then a_n for $n > 0$ are given by

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}, n>0} a_n n^{-s} = \zeta(\alpha, s)\zeta^*(\beta, s-1) + \zeta(-\alpha, s)\zeta^*(-\beta, s-1) - 2\zeta(s)\zeta(s-1).$$

We have $a_0 = 0$ if $\alpha \neq 0$, and $a_0 = \zeta^*(\beta, -1) - \zeta(-1)$ if $\alpha = 0$.

(3) *Here, we assume $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ in the case $k = 2$. Write*

$$F^{(k)}_{\alpha,\beta} = \sum_{n \in \mathbb{Q}, n \geqslant 0} a_n q^n.$$

Then a_n for $n > 0$ are given by

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}, n>0} a_n n^{-s} = \zeta(\alpha, s-k+1)\zeta^*(\beta, s) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s-k+1)\zeta^*(-\beta, s).$$

In the case $k \neq 1$, $a_0 = \zeta(\alpha, 1-k)$.
In the case $k = 1$, $a_0 = \zeta(\alpha, 0)$ if $\alpha \neq 0$, and

$$a_0 = \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0)) \quad \text{if} \quad \alpha = 0.$$

By Prop. 3.10 and by the "q-presentation" of $g_{\alpha,\beta}$ in 1.9 (note that the number $1/12 - a/2N + (1/2)(a/N^2)$ $(0 \leqslant a < N)$ which appeared in 1.9 coincides with $-\zeta(a/N, -1)$), we have

Proposition 3.11

(1) $E^{(1)}_{\alpha,\beta} = F^{(1)}_{\alpha,\beta}$ *for any* $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$.

(2) $\mathrm{dlog}(g_{\alpha,\beta}) = -F^{(2)}_{\alpha,\beta}$ *in* $\Gamma\big(X(N), \Omega^1_{X(N)/\mathbb{Q}}(\log(\mathrm{cusps}))\big)$ *for any* $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$.

4. Euler systems in the space of modular forms

4.1. For $k \in \mathbb{Z}$ and a curve X over $\mathbb{Q}$ of the form $G\backslash X(N)$ with $N \geqslant 3$ and G a subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$, we define the space $M_k(X)$ (resp. $S_k(X)$) of modular forms (resp. cusp forms) of weight k on X to be the G-fixed part of $M_k(X(N))$ (resp. $S_k(X(N))$). (This definition makes sense since in the case N, $N' \geqslant 3$ and $N \mid N'$, $M_k(X(N))$ (resp. $S_k(X(N))$) coincides with the $\mathrm{Gal}(X(N')/X(N))$-fixed part of $M_k(X(N'))$ (resp. $S_k(X(N'))$).)

In the rest of this section, fix $k \geqslant 2$, M, $N \geqslant 1$, such that $M + N \geqslant 5$.

4.2. We define elements

$$ {}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r') \in M_k(X(M,N)) $$

which we call "zeta elements" or "zeta modular forms", for integers r, r', c, d under the following assumptions (4.2.1) (4.2.2).

(4.2.1) $1 \leqslant r \leqslant k-1$, $1 \leqslant r' \leqslant k-1$, at least one of r, r' is $k-1$. If $r = k-2$ and $r' = k-1$, then $M \geqslant 2$.

(4.2.2) $$(c, M) = 1, \quad (d, N) = 1.$$

We also define elements

$$ z_{M,N}(k,r,r') \in M_k(X(M,N)) $$

which we call also zeta elements, for integer r, r' under the following assumption (4.2.3).

(4.2.3) (r,r') are as in (4.2.1), and $(r,r') \neq (2,k-1), (k-1,2), (k-1,k-2)$.

Under the assumption (4.2.3), we define $z_{M,N}(k,r,r')$ to be

$$ (-1)^r \cdot (r-1)!^{-1} \cdot M^{k-r-2}N^{-r} \cdot F^{(k-r)}_{1/M,0} \cdot E^{(r)}_{0,1/N} \quad \text{if } r' = k-1, $$
$$ (-1)^{r'} \cdot (k-2)!^{-1} \cdot M^{r'-k}N^{-r'} \cdot E^{(k-r')}_{1/M,0} \cdot E^{(r')}_{0,1/N} \quad \text{if } r = k-1. $$

(In the case $r = r' = k-1$, these definitions are compatible because $F^{(1)}_{\alpha,\beta} = E^{(1)}_{\alpha,\beta}$.) Under the assumptions (4.2.1) and (4.2.2), we define ${}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r')$ by putting c, d to the above definitions. That is, we define ${}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r')$ to be

$$ (-1)^r \cdot (r-1)!^{-1} \cdot M^{k-r-2}N^{-r} \cdot {}_cF^{(k-r)}_{1/M,0} \cdot {}_dE^{(r)}_{0,1/N} \quad \text{if } r' = k-1, $$
$$ (-1)^{r'} \cdot (k-2)!^{-1} \cdot M^{r'-k}N^{-r'} \cdot {}_cE^{(k-r')}_{1/M,0} \cdot {}_dE^{(r')}_{0,1/N} \quad \text{if } r = k-1. $$

Here

$$
\begin{aligned}
{}_cF^{(h)}_{\alpha,\beta} &= c^2\,F^{(h)}_{\alpha,\beta} - c^{2-h}\,F^{(h)}_{c\alpha,c\beta} \quad (h \geqslant 1, \quad (\alpha,\beta) \neq (0,0) \ \text{ if } \ h = 2),\\
{}_cE^{(h)}_{\alpha,\beta} &= c^2 E^{(h)}_{\alpha,\beta} - c^h E^{(h)}_{c\alpha,c\beta} \quad (h \geqslant 1, \quad h \neq 2),\\
{}_cE^{(2)}_{\alpha,\beta} &= c^2\,\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} - c^2\,\widetilde{E}^{(2)}_{c\alpha,c\beta}
\end{aligned}
$$

(c is an integer which is prime to the orders of α, β).

Under the assumptions (4.2.2) and (4.2.3), we have

$$
{}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r') = \Big(c^2 - c^u \cdot \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*\Big)\Big(d^2 - d^v \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)^*\Big) \cdot z_{M,N}(k,r,r')
$$

where

$$
(u,v) = \begin{cases} (r+2-k,r) & \text{if } r' = k-1, \\ (k-r',r') & \text{if } r = k-1. \end{cases} \tag{4.2.4}
$$

Proposition 4.3. — *Let M', $N' \geqslant 1$ and assume $M \mid M'$, $N \mid N'$. Assume further that*

$$
\mathrm{prime}(M) = \mathrm{prime}(M'), \quad \mathrm{prime}(N) = \mathrm{prime}(N').
$$

Then the trace map

$$
M_k(X(M',N')) \longrightarrow M_k(X(M,N))
$$

sends ${}_{c,d}z_{M',N'}(k,r,r')$ (resp. $z_{M',N'}(k,r,r')$) to ${}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r')$ (resp. $z_{M,N}(k,r,r')$) for any r, r', c, d (resp. r, r') satisfying (4.2.1) *and* (4.2.2) *(resp.* (4.2.3)*).*

Proposition 4.4. — *Let ℓ be a prime number which does not divide M. Then the trace map*

$$
M_k(X(M\ell,N\ell)) \longrightarrow M_k(X(M,N))
$$

sends ${}_{c,d}z_{M\ell,N\ell}(k,r,r')$ to

$$
\Big(1 - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{-r} + \left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1/\ell \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{k-1-2r}\Big) \cdot {}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r')
$$

in the case ℓ does not divide N, and to

$$
\Big(1 - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{-r}\Big) \cdot {}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r')
$$

in the case ℓ divides N, for any r, r', c, d satisfying (4.2.1), (4.2.2) *and* $(cd,\ell) = 1$. *Here $T'(\ell)$ is the "dual Hecke operator" explained in 4.9 below. We have the result of the same form for $z_{M\ell,N\ell}(k,r,r')$ and $z_{M,N}(k,r,r')$ for any r, r' satisfying* (4.2.3).

The proofs of Prop. 4.3 and Prop. 4.4 will be given in 4.11–4.13.

4.5. We describe how these zeta elements are related to zeta functions.

Let $\lambda : E \to Y(M,N)$ be the universal elliptic curve, and define a local system $\mathcal{H}^1$ on $Y(M,N)(\mathbb{C})$ by

$$\mathcal{H}^1 = \mathrm{R}^1\lambda_*(\mathbb{Z}).$$

Then $\mathcal{H}^1$ is locally isomorphism to $\mathbb{Z}^2$. The cohomology group

$$\mathrm{H}^1\big(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1)\big)$$

will be important for us. For any commutative ring A, let

$$\begin{aligned} V_{k,A}(Y(M,N)) &= \mathrm{H}^1\big(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1) \otimes_{\mathbb{Z}} A\big), \\ V_{k,A}(X(M,N)) &= \mathrm{H}^1\big(X(M,N)(\mathbb{C}), j_* \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1) \otimes_{\mathbb{Z}} A\big). \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

where j is the inclusion map $Y(M,N) \to X(M,N)$. We consider the operator-valued zeta function

$$z_{M,N}(k,s) = \sum_{(n,M)=1} T'(n)\left(\begin{smallmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot n^{-s}$$

($T'(n)$ is the dual Hecke operator explained in 4.9 below), acting on $V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,N))$. (In the case $k=2$, $Z_{M,N}(k,s)$ coincides with $Z_{M,N}(s)$ in 2.5.) This converges absolutely when $\mathrm{Re}(s) > k$. The function $Z_{M,N}(k,s)$ has a presentation as an Euler product whose Euler factor at a prime number ℓ is

$$\begin{cases} \Big(1 - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{-s} + \left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1/\ell \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{k-1-2s}\Big)^{-1} & \text{if } (\ell, MN) = 1, \\ \Big(1 - T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \ell^{-s}\Big)^{-1} & \text{if } (\ell, M) = 1 \text{ and } \ell \mid N, \\ 1 & \text{if } \ell \mid M. \end{cases}$$

The function $Z_{M,N}(k,s)$ has an analytic continuation to the whole $\mathbb{C}$ as an operator-valued meromorphic function in s and is holomorphic at $s \neq k$.

As is reviewed in 4.10 below, we have the period map

$$\mathrm{per}_{M,N} : M_k(X(M,N)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,N)).$$

As is explained in 4.7 below, we have special elements

$$\delta_{M,N}(k,j) \in V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N)) \quad (1 \leqslant j \leqslant k-1).$$

(The element $\delta_{M,N} \in \mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ defined in 2.7 coincides with $\delta_{M,N}(2,1)$.)

Let $\iota : V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N)) \to V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N))$ be the map induced by the complex conjugation on $Y(M,N)(\mathbb{C})$ and on $E(\mathbb{C})$, and we denote the $\mathbb{C}$-linear automorphism of $V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,N))$ induced by ι by the same letter ι. For an element x of $V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,N))$, let

$$x^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \iota)(x).$$

The following Thm. 4.6, which relates zeta elements to zeta values $Z_{M,N}(k,r)$ ($1 \leqslant r \leqslant k-1$), is deduced from the work of Shimura [**Sh**]. We give the proof of Thm. 4.6 in § 7.

Theorem 4.6. — *Assume* $\mathrm{prime}(M) \subset \mathrm{prime}(N)$. *Then we have*

$$\big(\mathrm{per}_{M,N}(z_{M,N}(k,r,r'))\big)^{\pm} = Z_{M,N}(k,r)\cdot(2\pi i)^{k-r-1}\cdot\delta_{M,N}(k,r')^{\pm}$$

for any r, r' *satisfying* (4.2.3) *and for* $\pm = (-1)^{k-r-1}$, *and*

$$\big(\mathrm{per}_{M,N}({}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r'))\big)^{\pm} = Z_{M,N}(k,r)\cdot(2\pi i)^{k-r-1}\cdot\gamma^{\pm}$$

for any r, r', c, d *satisfying* (4.2.1) *and* (4.2.2) *and for* $\pm = (-1)^{k-r-1}$, *where*

$$\gamma = \Big(c^2 - c^u\cdot\left(\begin{smallmatrix}c & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^*\Big)\Big(d^2 - d^v\cdot\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)^*\Big)\delta_{M,N}(k,r')$$

with u, v *as in 4.2.*

4.7. The definition of the special cohomology class $\delta_{M,N}(k,j)$ $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ is as follows.

We have canonical isomorphisms

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)) \ \ (&= V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N)))\\ &\cong \mathrm{H}_1(X(M,N)(\mathbb{C}),\{\mathrm{cusps}\},\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1))\\ &\cong \mathrm{H}_1(X(M,N)(\mathbb{C}),\{\mathrm{cusps}\},\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1))\end{aligned}$$

where $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}om(\mathcal{H}^1,\mathbb{Z})$, the first isomorphism is by Poincaré duality and the second isomorphism comes from the canonical isomorphism $\mathcal{H}^1 \cong \mathcal{H}_1$. Here we used the relative homology with coefficients which may be not a well known object. The definition is explained below.

We define $\delta_{M,N}(k,j) \in V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N))$ to be the image of

$$\mathrm{class}(\varphi,\alpha) \in \mathrm{H}_1\big(X(M,N)(\mathbb{C}),\{\mathrm{cusps}\},\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1)\big)$$

under the above composite isomorphism, where φ is the continuous map

$$(0,\infty)\longrightarrow X(M,N)(\mathbb{C})\,;\ \ \varphi(y) = \nu(yi)\ \ \text{for}\ \ 0<y<\infty,$$

which is a route from a cusp to a cusp, and α is the following element of $\Gamma((0,\infty),\varphi^{-1}(\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1))$. The stalk of $\varphi^{-1}(\mathcal{H}_1)$ at $y \in (0,\infty)$ is identified with $\mathrm{H}_1(\mathbb{C}/(\mathbb{Z}yi+\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}yi+\mathbb{Z}$. The sheaf $\varphi^{-1}(\mathcal{H}_1)$ on $(0,\infty)$ is a constant sheaf of rank 2 with basis e_1, e_2, where the stalk of e_1 (resp. e_2) at $y \in (0,\infty)$ is yi (resp. 1) $\in \mathbb{Z}yi+\mathbb{Z}$. We define

$$\alpha = e_1^{j-1}e_2^{k-j-1}.$$

If M', $N' \geqslant 1$ and $M \mid M'$, $N \mid N'$, the trace map $V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M',N')) \to V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N))$ sends $\delta_{M',N'}(k,j)$ to $\delta_{M,N}(k,j)$.

In the above, the relative homology with coefficients is defined as follows. If X is a topological space, C is a closed subset of X, and $\mathcal{F}$ is a locally constant sheaf of finitely generated $\mathbb{Z}$-modules on $U = X\smallsetminus C$, $H_m(X,C,\mathcal{F})$ is the cohomology in degree $-m$ of the complex $R\mathrm{Hom}(R\Gamma(X,j_!\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathbb{Z})),\mathbb{Z})$, where j is the inclusion map $U\to X$. If we have a pair (φ,α) of a continuous map $\varphi:[0,1]\to X$ such that $\varphi^{-1}(U) = (0,1)$

and an element α of $\Gamma((0,1),\varphi^*\mathcal{F})$, we have $\mathrm{class}(\varphi,\alpha)\in H_1(X,C,\mathcal{F})$ to be the image of α under the composition

$$\Gamma((0,1),\varphi^*\mathcal{F})\simeq H_1([0,1],\{0,1\},\varphi^*\mathcal{F})\longrightarrow H_1(X,C,\mathcal{F}).$$

4.8. We give a preliminary to introduce Hecke operators.

Let $A\geqslant 1$. We define isomorphisms

$$\varphi_A^*=(\varphi_A^{-1})_*: M_k(X(M(A),N))\xrightarrow{\sim} M_k\big(X(M,N(A))\big)$$
$$(\varphi_A)_*=(\varphi_A^{-1})^*: M_k\big(X(M,N(A))\big)\xrightarrow{\sim} M_k(X(M(A),N))$$

and homomorphisms

$$\varphi_A^*=(\varphi_A^{-1})_*: V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M(A),N))\xrightarrow{\sim} V_{k,\mathbb{Z}}\big(Y(M,N(A))\big)$$
$$(\varphi_A)_*=(\varphi_A^{-1})^*: V_{k,\mathbb{Z}}\big(Y(M,N(A))\big)\xrightarrow{\sim} V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M(A),N)).$$

Here $X(M,N(A))$ (resp. $X(M(A),N)$) denotes the smooth compactification of the curve $Y(M,N(A))$ (resp. $Y(M(A),N)$) in 2.8. $V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M(A),N))$ and $V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N(A)))$ are defined in the evident way.

Let E_1 be the universal elliptic curve over $Y(M,N(A))$ and let E_2 be the universal elliptic curve over $Y(M(A),N)$. Then we have canonical homomorphism

$$E_1\longrightarrow\varphi_A^*(E_2),\quad E_2\longrightarrow(\varphi_A^{-1})^*(E_1) \tag{4.8.1}$$

which are isogenies of degree A. Hence the pull back by φ_A followed by the pull back by $E_1\to\varphi_A^*(E_2)$ (resp. the push down by $E_2\to(\varphi_A^{-1})^*E_1$ followed by the push down by φ_A^{-1}) gives homomorphisms

$$M_k(X(M(A),N))\longrightarrow M_k\big(X(M,N(A))\big)$$

and

$$V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M(A),N))\longrightarrow V_{k,\mathbb{Z}}\big(Y(M,N(A))\big)$$

which we denote by φ_A^* (resp. $(\varphi_A^{-1})_*$). We have $\varphi_A^*=(\varphi_A^{-1})_*$. Similarly, the pull back by φ_A^{-1} followed by the pull back by $E_2\to(\varphi_A^{-1})^*(E_1)$ (resp. the push down by $E_1\to\varphi_A^*E_2$ followed by the push down by φ_A) gives homomorphisms

$$M_k\big(X(M,N(A))\big)\longrightarrow M_k(X(M(A),N))$$

and

$$V_{k,\mathbb{Z}}\big(Y(M,N(A))\big)\longrightarrow V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M(A),N))$$

which we denote by $(\varphi_A^{-1})^*$ (resp. $(\varphi_A)_*$). We have $(\varphi_A^{-1})^*=(\varphi_A)_*$. Here for the pull back and push down for on the spaces M_k by

$$E_1\longrightarrow\varphi_A^*(E_2)\quad\text{and}\quad E_2\longrightarrow(\varphi_A^{-1})^*(E_1),$$

we use the definitions (3.1.2) of M_k, not the definition (3.1.1) of M_k.

We have also

$$\varphi_A^* \circ (\varphi_A^{-1})^* = (\varphi_A^{-1})_* \circ (\varphi_A)_* = A^{k-2}$$
$$(\varphi_A^{-1})^* \circ \varphi_A^* = (\varphi_A)_* \circ (\varphi_A^{-1})_* = A^{k-2}.$$

We have

$$(\varphi_A^* f)(\tau) = A^{k-1} f(A\tau) \quad \text{for any} \quad f \in M_k(X(M(A), N)), \tag{4.8.2}$$

$$((\varphi_A^{-1})^* f)(\tau) = A^{-1} f(A^{-1}\tau) \quad \text{for any} \quad f \in M_k\big(X(M, N(A))\big). \tag{4.8.3}$$

4.9. The Hecke operators $T(n)$ and the dual Hecke operators $T'(n)$ on $M_k(X(M,N))$ and on $V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N))$ are defined for integers $n \geqslant 1$ which are prime to M as follows. (In the case $k=2$, these operators on $V_{2,\mathbb{Z}}(Y(M,N))$ were already given in 2.9.)

First, $T(1) = T'(1) = 1$.

Next we give the definitions of $T(\ell)$ and $T'(\ell)$ for a prime number ℓ which does not divide M. Let $\mathrm{pr} : X(M, N(\ell)) \to X(M,N)$ and $\mathrm{pr}' : X(M(\ell), N) \to X(M,N)$ be the canonical projections. We define

$$T(\ell) = (\mathrm{pr}')_* \circ (\varphi_\ell^{-1})^* \circ \mathrm{pr}^*, \quad T'(\ell) = \mathrm{pr}_* \circ \varphi_\ell^* \circ \mathrm{pr}'^*.$$

If ℓ does not divide N, we have $T'(\ell) = T(\ell)\left(\begin{smallmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1/\ell \end{smallmatrix}\right)^*$.

In the case n is a power ℓ^e ($e \geqslant 0$) of a prime number ℓ which does not divide M, $T(n)$ and $T'(n)$ are defined as follows. If $\ell \mid N$, $T(\ell^e) = T(\ell)^e$, $T'(\ell^e) = T'(\ell)^e$. If ℓ does not divide N, $T(\ell^e)$ and $T'(\ell^e)$ are defined inductively, by

$$T(\ell^{e+2}) = T(\ell)T(\ell^{e+1}) + \left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & \ell \end{smallmatrix}\right)^* T(\ell^e) \cdot \ell^{k-1},$$
$$T'(\ell^{e+2}) = T'(\ell)T'(\ell^{e+1}) + \left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & \ell \end{smallmatrix}\right)^* T'(\ell^e) \cdot \ell^{k-1}.$$

Finally, for $n = \prod_\ell \ell^{e(\ell)}$ ($e(\ell) \geqslant 0$) where ℓ ranges over all prime numbers which do not divide M, $T(n)$, $T'(n)$ are defined by

$$T(n) = \prod_\ell T(\ell^{e(\ell)}), \quad T'(n) = \prod_\ell T'(\ell^{e(\ell)}).$$

For any m, $n \geqslant 1$ which are prime to M, and for any $a \in (\mathbb{Z}/M)^\times$, $b \in (\mathbb{Z}/N)^\times$, the operators $T(m)$, $T(n)$, $T'(m)$, $T'(n)$, $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^*$ commute with each other.

The similar definition gives Hecke operators on the compact support cohomology group

$$V_{k,A,c}(Y(M,N)) = \mathrm{H}^1_c(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1) \otimes_{\mathbb{Z}} A)$$

(A a commutative ring). In the Poincaré duality

$$V_{k,\mathbb{Q}}(Y(M,N)) \times V_{k,\mathbb{Q},c}(Y(M,N)) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

induced by the canonical pairing $\mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1 \to \mathbb{Z}$, $T(n)$ and $T'(n)$ are transposes of each other.

The operators $T(n)$ $((n,M)=1)$ on $M_k(X(M,N))$ are described also by using q-expansions. Let ℓ be a prime number which does not divide M. Let $f \in M_k(X(M,N)) \otimes \mathbb{C}$. Then the pull back of f on $\mathfrak{H}$ has the form

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0} a_n q^{n/M} \quad (a_n \in \mathbb{C}).$$

Write

$$T(\ell) f = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0} b_n q^{n/M}.$$

Then:

(4.9.1) *$b_n = a_{n\ell}$ if ℓ divides N or if ℓ does not divide n.*

(4.9.2) *Assume ℓ does not divide N and ℓ divides n, and assume $\left(\begin{smallmatrix} 1/\ell & 0 \\ 0 & \ell \end{smallmatrix}\right)^* f = \varepsilon(\ell) f$ for some $\varepsilon(\ell) \in \mathbb{C}^\times$. Then $b_n = a_{n\ell} + \varepsilon(\ell)\ell^{k-1} a_{n/\ell}$.*

In the case $M \geqslant 2$, the definitions of the operators $T(n)$ and $T'(n)$ in this paper differ from the definitions in some literatures. In the case $M = N$, the operators $T(n)\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* = T'(n)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right)^*$ $((n,N)=1)$ in our notation are the Hecke operators in Deligne [**De1**]. The advantages and the disadvantages of the operators $T(n)$, $T'(n)$, $T(n)\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*$, $T(n)\left(\begin{smallmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*$ $((n,M)=1)$ are:

(4.9.3) *In the case $M = N$, $T(n)\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*$ and $T'(n)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right)^*$ commute with the action of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$. But they do not preserve the direct summands of $\mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ corresponding to connected components of $Y(M,N)(\mathbb{C})$.*

(4.9.4) *$T(n)$ and $T'(n)$ preserve the direct summands of $\mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ corresponding to connected components. But in the case $M = N$, they do not commute with the action of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$.*

4.10. We review the definition of the period map

$$M_k(X(M,N)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,N)).$$

We also review the period map

$$S_k(X(M,N)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{C},c}(Y(M,N))$$

which we will use in § 7. We denote $X = X(M,N)$, $Y = Y(M,N)$. Let $j : Y(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ be the inclusion map. Let $\overline{\lambda} : \overline{E} \to X$ be the smooth Néron model of the universal elliptic curve $\lambda : E \to Y$. We denote by $(\ )^{\mathrm{an}}$ the analytic objects associated to algebraic objects. For example, $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}$ denotes the sheaf of holomorphic functions on $X(\mathbb{C})$. We have a homomorphism

$$\mathrm{coLie}(\overline{E})^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{Z}} j_*(\mathcal{H}^1) \tag{4.10.1}$$

on $X(\mathbb{C})$, as the connecting homomorphism of the exact sequence

$$0 \longrightarrow (\overline{\lambda}^{\mathrm{an}})^{-1}(\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{E}}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\mathrm{d}} (\Omega^1_{\overline{E}/X})^{\mathrm{an}} \longrightarrow 0$$

on $\overline{E}(\mathbb{C})$. (4.10.1) induces

$$\left(\mathrm{coLie}(\overline{E})^{\otimes(k-2)}\right)^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{Z}} j_*(\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)). \tag{4.10.2}$$

On the other hand, consider the exact sequence

$$0 \longrightarrow j_!\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}(-\mathrm{cusps}) \xrightarrow{\mathrm{d}} (\Omega^1_{X/\mathbb{Q}})^{\mathrm{an}} \longrightarrow 0$$

on $X(\mathbb{C})$ where $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}(-\mathrm{cusps})$ denotes the subsheaf of $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}$ consisting of functions which have zero at all cusps. This exact sequence tensored with $j_*\,\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)$ gives the connecting maps

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^0\big(X(\mathbb{C}), (\Omega^1_{X/\mathbb{Q}})^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{Z}} j_*\,\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathcal{H}^1)\big)& \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(X(\mathbb{C}), j_!\,\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathcal{H}^1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} &= V_{k,\mathbb{C},c}(Y),\end{aligned} \tag{4.10.3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^0\big(Y(\mathbb{C}), (\Omega^1_{Y/\mathbb{Q}})^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathcal{H}^1)\big)& \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y(\mathbb{C}), \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathcal{H}^1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} &= V_{k,\mathbb{C}}(Y).\end{aligned} \tag{4.10.4}$$

The period maps are defined as the composite maps

$$\begin{aligned}S_k(X(M,N)) = \mathrm{H}^0\big(X, (\Omega^1_{X/\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{coLie}(\overline{E})^{\otimes(k-2)}\big)& \\ \xrightarrow{(4.10.2)} \mathrm{H}^0(X(\mathbb{C}), (\Omega^1_{X/\mathbb{Q}})^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{Z}} j_*\,\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}& \\ \xrightarrow{(4.10.3)} V_{k,\mathbb{C},c}(Y).&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_k(X(M,N)) \subset \mathrm{H}^0\big(Y, (\Omega^1_{Y/\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathrm{coLie}(E)^{\otimes(k-2)}\big)& \\ \xrightarrow{(4.10.2)} \mathrm{H}^0(Y(\mathbb{C}), (\Omega^1_{Y/\mathbb{Q}})^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}& \\ \xrightarrow{(4.10.4)} V_{k,\mathbb{C}}(Y).&\end{aligned}$$

4.11. We prove Prop. 4.3

It is enough to prove the case $M' = M$ and the case $N' = N$. Since both cases are proved similarly, we give only the proof of the case $N = N'$. In this case, our task is to prove that if $M \mid M'$ and $\mathrm{prime}(M) = \mathrm{prime}(M')$, the trace map $M_h(Y(M',N)) \to M_h(Y(M,N))$ $(h \geqslant 1)$ sends $(M')^{h-2}F^{(h)}_{1/M',0}$ to $M^{h-2}F^{(h)}_{1/M,0}$ (we assume $M \geqslant 2$ in the case $h = 2$) and $(M')^{-h}E^{(h)}_{1/M',0}$ to $M^{-h}E^{(h)}_{1/M,0}$ (in the case $h = 2$, we replace E by $\widetilde{E}$). These are proved by the same arguments as in 2.11 (we use Lemma 3.7 in place of Lemma 1.7.)

We give a preliminary lemma for the proof of prop. 4.4.

Lemma 4.12. — *Let $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, and let $A \geqslant 1$, $h \geqslant 1$. Then:*

(1) $\varphi_A^*(E^{(h)}_{\alpha,\beta}) = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ A\beta' = \beta}} A^{-1}E^{(h)}_{\alpha,\beta'}$. *Here in the case $h = 2$, we replace E by $\widetilde{E}$.*

(2) $\varphi_A^*(F^{(h)}_{\alpha,\beta}) = \sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\\ A\beta'=\beta}} A^{h-2}F^{(h)}_{\alpha,\beta'}$. *Here in the case* $h=2$, *we assume* $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Proof. — We prove (1). From the analytic descriptions of Eisenstein series in 3.8, we obtain

$$E^{(h)}_{\alpha,\beta}(A\tau) = A^{-h}\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\\ A\beta'=\beta}} E^{(h)}_{\alpha,\beta'}(\tau) \quad (\tau\in\mathfrak{H}).$$

(1) follows from this and from (4.8.2). (2) follows from (1). □

4.13. We prove Prop. 4.4. Since the proof for zeta elements with c, d is similar to that without c, d, we give here only the proof for zeta elements without c, d. Let $1\leqslant j\leqslant k-1$. Assume that $j\neq 2$ and that $M\geqslant 2$ in the case $j=k-2$ (resp. Assume that $j\neq 2$, $j\neq k-2$). By 4.12 and by similar arguments as in 2.13, we have that the trace map $M_k(M\ell,N\ell)\to M_k(X(M\ell,N))$ sends

$$F^{(k-j)}_{1/M\ell,0}\cdot E^{(j)}_{0,1/N\ell} \quad (\text{resp.} \quad E^{(k-j)}_{1/M\ell,0}\cdot E^{(j)}_{0,1/N\ell})$$

to

$$(\ell^{j+2-k}F^{(k-j)}_{1/M,0} - \ell^{j+2-k}\varphi_\ell^*F^{(k-j)}_{\alpha,0}\quad)\cdot E^{(j)}_{0,1/N\ell} \tag{1}$$
$$(\text{resp.}\quad (\ell^{k-j}E^{(k-j)}_{1/M,0} - \ell\varphi_\ell^*E^{(k-j)}_{\alpha,0}\quad)\cdot E^{(j)}_{0,1/N\ell}).$$

Here α is the unique element of $\frac{1}{M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ such that $\ell\alpha = 1/M$. The trace map $M_k(X(M,N\ell))\to M_k\big(X(M,N(\ell))\big)$ sends the element (1) to

$$(\ell^{j+2-k}F^{(k-j)}_{1/M,0} - \ell^{j+2-k}\varphi_\ell^*F^{(k-j)}_{\alpha,0}\quad)\cdot \ell\varphi_\ell^*E^{(j)}_{0,1/N} \tag{2}$$
$$(\text{resp.}\quad (\ell^{k-j}E^{(k-j)}_{1/M,0} - \ell\varphi_\ell^*E^{(k-j)}_{\alpha,0}\quad)\cdot \ell\varphi_\ell^*E^{(j)}_{0,1/N})$$

in the case $\ell\mid N$, and to

$$(\ell^{j+2-k}F^{(k-j)}_{1/M,0} - \ell^{j+2-k}\varphi_\ell^*F^{(k-j)}_{\alpha,0}\quad)\cdot (\ell\varphi_\ell^*E^{(j)}_{0,1/N} - E^{(j)}_{0,\beta}) \tag{2'}$$
$$(\text{resp.}\quad (\ell^{k-j}E^{(k-j)}_{1/M,0} - \ell\varphi_\ell^*E^{(k-j)}_{\alpha,0}\quad)\cdot (\ell\varphi_\ell^*E^{(j)}_{0,1/N} - E^{(j)}_{0,\beta})$$

in the case $(\ell,N)=1$ where β denotes the unique element of $\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ such that $\ell\beta = 1/N$. Concerning the trace map $\mathrm{pr}_*: M_h\big(X(M,N(\ell))\big)\to M_h(X(M,N))$ $(h\geqslant 1)$, we have

(4.13.1) In the case $\ell\mid N$, we have for $h\geqslant 1$

$$\ell\,\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*E^{(h)}_{0,1/N} = \ell^h E^{(h)}_{0,1/N}$$

(we replace $E^{(2)}$ by $\widetilde{E}^{(2)}$ in the case $h=2$).

(4.13.2) In the case ℓ does not divide N, we have for $h \geqslant 1$

$$\ell^{2-h}\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^* F^{(h)}_{\alpha,0} = \ell^{2-h}F^{(h)}_{1/M,0} + \ell F^{(h)}_{\alpha,0}$$
$$\ell\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^* E^{(h)}_{\alpha,0} = \ell^{h}E^{(h)}_{1/M,0} + \ell E^{(h)}_{\alpha,0}$$

(we replace E by $\widetilde{E}$ in the case $h = 2$),

$$\ell\,\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^* E^{(h)}_{0,1/N} = \ell^{h}E^{(h)}_{0,1/N} + \ell E^{(h)}_{0,\beta}$$

(we replace E by $\widetilde{E}$ in the case $h = 2$).

(These (4.13.1) and (4.13.2) are proved by the arguments similar to the proofs of (2.13.1) and (2.13.2).) By (4.8.2), we have

$$\varphi_\ell^*(fg) = \ell\varphi_\ell^*(f)\cdot\varphi_\ell^*(g) \tag{4.13.3}$$

for $f \in M_h(X(M(\ell),N))$, $g \in M_{h'}(X(M(\ell),N))$ $(h,\ h' \geqslant 1)$. By using (4.13.1)–(4.13.3), we obtain the following: in the case $\ell \mid N$, the trace map $M_k\big(X(M,N(\ell))\big) \to M_k(X(M,N))$ sends the element (2) to

$$\begin{aligned}
&\ell^{j+2-k}F^{(k-j)}_{1/M,0}\cdot\ell\,\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*E^{(j)}_{0,1/N} - \ell^{j+2-k}T'(\ell)\big(F^{(k-j)}_{\alpha,0}\cdot E^{(j)}_{0,1/N}\big)\\
&\quad = (-1)^j\cdot(j-1)!\cdot(M\ell)^{j+2-k}\cdot(N\ell)^j\\
&\qquad\qquad \big(z_{M,N}(k,j,k-1) - \ell^{-j}T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^* z_{M,N}(k,k-1,j)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\text{resp.}\quad \ell^{k-j}E^{(k-j)}_{1/M,0}\cdot\ell\,\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*E^{(j)}_{0,1/N} - \ell^{j}T'(\ell)\big(E^{(k-j)}_{\alpha,0}\cdot E^{(j)}_{0,1/N}\big)\\
&\quad = (-1)^j\cdot(k-2)!\cdot(M\ell)^{k-j}\cdot(N\ell)^j\\
&\qquad\qquad \big(z_{M,N}(k,k-1,j) - \ell^{1-k}T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^* z_{M,N}(k,k-1,j)\big)\ ).
\end{aligned}$$

In the case ℓ does not divide N, the trace map $M_k\big(X(M,N(\ell))\big) \to M_k(X(M,N))$ sends the element (2') to

$$\begin{aligned}
&\ell^{j+2-k}F^{(k-j)}_{1/M,0}\cdot\ell\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*E^{(j)}_{0,1/N} - \ell^{j+2-k}T'(\ell)\big(F^{(k-j)}_{\alpha,0}\cdot E^{(j)}_{0,1/N}\big)\\
&\qquad\qquad - (\ell+1)\ell^{j+2-k}F^{(k-j)}_{1/M,0}\cdot E^{(j)}_{0,\beta} + \big(\ell^{j+2-k}\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^*F^{(k-j)}_{\alpha,0}\big)\cdot E^{(j)}_{0,\beta}\\
&\quad = (-1)^j\cdot(j-1)!\cdot(M\ell)^{j+2-k}\cdot(N\ell)^j\\
&\qquad \big(z_{M,N}(k,j,k-1) - \ell^{-j}T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^* z_{M,N}(k,j,k-1)\\
&\qquad\qquad + \left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1/\ell\end{smallmatrix}\right)^*\cdot\ell^{k-1-2j}\cdot z_{M,N}(k,j,k-1)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{resp.}\quad & \ell^{k-j}E^{(k-j)}_{1/M,0}\cdot \ell\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^* E^{(j)}_{0,1/N} - \ell T'(\ell)\big(E^{(k-j)}_{\alpha,0}\cdot E^{(j)}_{0,1/N}\big)\\ & - (\ell+1)\ell^{k-j}E^{(k-j)}_{1/M,0}\cdot E^{(j)}_{0,\beta} + \big(\ell\mathrm{pr}_*\varphi_\ell^* E^{(k-j)}_{\alpha,0}\big)\cdot E^{(j)}_{0,\beta}\\ = (-1)^j\cdot(k-2)!\cdot(M\ell)^{k-j}\cdot(N\ell)^j & \\ \big(z_{M,N}(k,k-1,j) - \ell^{1-k}T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^* z_{M,N}(k,k-1,j) & \\ + \left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1/\ell\end{smallmatrix}\right)^*\cdot\ell^{1-k}\cdot z_{M,N}(k,k-1,j)\big)\,. & \end{aligned}$$

This proves Prop. 4.4.

5. Euler systems on $X_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Let

$$X_1(N) = X(1,N),\quad Y_1(N) = Y(1,N).$$

The total constant fields of these curves are $\mathbb{Q}$.

We will always identify $X_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m)$ ($m\geqslant 1$) with the quotient of $X(L)$ ($m\mid L$, $N\mid L$, $L\geqslant 3$) by the action of the group

$$\Big\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L)\,;\quad c\equiv 0,\quad d\equiv 1 \bmod N,\quad ad-bc\equiv 1 \bmod m\Big\}.$$

Hence $Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m)$ is regarded as a quotient of $Y(m,L)$ for any $L\geqslant 1$ such that $m\mid L$, $N\mid L$.

Fix N, $m\geqslant 1$.

In this section, we define zeta elements in $\mathrm{K}_2(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))\otimes\mathbb{Q}$ and zeta elements in $M_k(X_1(N))\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m)$ ($k\geqslant 2$).

5.1. Let ξ and S be as in the following (5.1.1).

(5.1.1) *Either ξ is a symbol $a(A)$ where a, $A\in\mathbb{Z}$, $A\geqslant 1$ and S is a non-empty finite set of primes containing* $\mathrm{prime}(mA)$, *or ξ is an element of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *and S is a non-empty finite set of prime numbers containing* $\mathrm{prime}(mN)$.

We define zeta elements

$$z_{1,N,m}(\xi,S)\in \mathrm{K}_2(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))\otimes\mathbb{Q}$$

as follows.

First we define $z_{1,N,m}(\xi,S)$ in the case ξ is a symbol $a(A)$ for a, $A\in\mathbb{Z}$, $A\geqslant 1$. Take $M\geqslant 1$, $L\geqslant 4$ such that

$$mA\mid M,\quad N\mid L,\quad M\mid L,\quad \mathrm{prime}(M)=S,\quad \mathrm{prime}(L)=S\cup\mathrm{prime}(N).$$

As is explained below, there exists a unique morphism of schemes

$$Y(M,L)\longrightarrow Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m) \tag{5.1.2}$$

which is compatible with $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$; $\tau \mapsto A^{-1}(\tau + a)$. Let

$$t_{m,a(A)} : \mathrm{K}_2(Y(M,L)) \longrightarrow \mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m))$$

be the norm map associated to (5.1.2). We define

$$z_{1,N,m}(a(A), S) = t_{m,a(A)}(z_{M,L}).$$

By Prop. 2.3, $z_{1,N,m}(a(A), S)$ is independent of the choices of M, L.

The morphism (5.1.2) is obtained as the composition

$$Y(M,L) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)} Y(M,L) \longrightarrow Y(m(A),L) \xrightarrow[\sim]{\varphi_A^{-1}} Y(m, L(A)) \longrightarrow Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$$

where $\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ denotes the automorphism of $Y(M,L)$ induced by the automorphism $\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ of $Y(L)$.

As we will see in 5.10, $z_{1,N,m}(a(A), S)$ does not change when we replace $a(A)$ by $a'(A)$ for any integer a' such that $a \equiv a' \bmod A$.

Next we define $z_{1,N,m}(\xi, S)$ in the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Take $L \geqslant 3$ such that

$$m \mid L, \quad N \mid L, \quad \mathrm{prime}(L) = S.$$

We define $z_{1,N,m}(\xi, S)$ to be the image of $\xi^*(z_{L,L})$ under the norm map $\mathrm{K}_2(Y(L)) \to \mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m))$ associated to the canonical projection $Y(L) \to Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$. By Prop. 2.3, $z_{1,N,m}(\xi, S)$ is independent of the choice of L.

We have also the "with c, d-version" of the above zeta elements, which belong to $\mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m))$ without $\otimes\mathbb{Q}$, by replacing $z_{M,L}$ in the above definitions by ${}_{c,d}z_{m,L}$. But we will not discuss about these elements, for we will not use them in this paper. Zeta elements with $\xi = a(A)$ and zeta elements with $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ will play different roles; see the end of 8.1.

5.2. Let $k \geqslant 2$. Let ξ, S be as in (5.1.1). We define the following elements of $M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)) = M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$;

$${}_{c,d}z_{1,N,m}(k, r, r', \xi, S)$$

for integers r, r', c, d satisfying (5.2.1) and (5.2.2) below, and elements

$$z_{1,N,m}(k, r, r', \xi, S)$$

for integers r, r' satisfying (5.2.3) below.

(5.2.1) $1 \leqslant r \leqslant k-1$, $1 \leqslant r' \leqslant k-1$, at least one of r, r' is $k-1$.

(5.2.2) $\mathrm{prime}(cd) \cap S = \varnothing$, and $(d, N) = 1$.

(5.2.3) r and r' are as in (5.2.1) and satisfy

$$(r, r') \neq (2, k-1),\ (k-1, 2),\ (k-1, k-2).$$

First we define these elements in the case $\xi = a(A)$.

Take $M \geqslant 1$, $L \geqslant 4$ such that

$$mA \mid M, \quad N \mid L, \quad M \mid L, \quad \mathrm{prime}(M) = S, \quad \mathrm{prime}(L) = S \cup \mathrm{prime}(N).$$

Let

$$t_{m,a(A)} : M_k(X(M,L)) \longrightarrow M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m))$$

be the composite map

$$M_k(X(M,L)) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)_*} M_k(X(M,L)) \xrightarrow{\text{trace}}$$

$$M_k(X(m(A),L)) \xrightarrow[\sim]{(\varphi_A^{-1})_*} M_k\big(X(m,L(A))\big) \xrightarrow{\text{trace}} M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)).$$

We define

$${}_{c,d}z_{1,N,m}(k,r,r',a(A),S) = t_{m,a(A)}({}_{c,d}z_{m,L}(k,r,r')),$$

for r, r', c, d as in (5.2.1) (5.2.2), and

$$z_{1,N,m}(k,r,r',a(A),S) = t_{m,a(A)}(z_{m,L}(k,r,r')).$$

for r, r' as in (5.2.3). By Prop. 4.3, these elements are independent of the choices of M, L, as above.

As we will see in 5.10, these zeta elements do not change if we replace $a(A)$ by $a'(A)$ for any integer a' such that $a \equiv a' \bmod A$.

Next we define the zeta elements in the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Take $L \geqslant 3$ such that

$$m \mid L, \quad N \mid L, \quad \mathrm{prime}(L) = S.$$

We define ${}_{c,d}z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$ for r, r', c, d as in (5.2.1) (5.2.2) (resp. $z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$ for r, r' as in (5.2.3)) to be the image of $\xi^*({}_{c,d}z_{L,L}(k,r,r'))$ (resp. $\xi^*(z_{L,L}(k,r,r'))$) under the trace map

$$M_k(X(L)) \longrightarrow M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)).$$

By Prop. 4.3, these elements are independent of the choice of L as above.

Let $N' \geqslant 1$ be a multiple of N. In the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, assume $\mathrm{prime}(N') \subset S$. Then the trace map

$$M_k(X_1(N') \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)) \longrightarrow M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m))$$

sends ${}_{c,d}z_{1,N',m}(k,r,r',\xi,S)$ with $(d,N') = 1$ (resp. $z_{1,N',m}(k,r,r',\xi,S)$) to ${}_{c,d}z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$ (resp. $z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$).

Proposition 5.3. — *Let ξ and S be as in* (5.1.1)*, let $m' \geqslant 1$, and let S' be a finite set of prime numbers such that $S \cup \mathrm{prime}(m') \subset S'$.*

(1) *The norm map*

$$\mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m'})) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)) \otimes \mathbb{Q}$$

sends $z_{1,N,m'}(\xi,S')$ to

$$\Big(\prod_{\ell \in S'-S} (1 - T'(\ell)\sigma_\ell^{-1} + \Delta'(\ell)\sigma_\ell^{-2} \cdot \ell)\Big) \cdot z_{1,N,m}(\xi,S),$$

where $\sigma_\ell \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$*;* $\sigma_\ell(\zeta_m) = \zeta_m^\ell$*,* $\Delta'(\ell)$ *denotes* $\left(\begin{smallmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1/\ell\end{smallmatrix}\right)^*$ *in the case* ℓ *does not divide* N*, and* $\Delta'(\ell) = 0$ *in the case* ℓ *divides* N*.*

(2) *Let* $k \geqslant 2$*, and let* r*,* r'*,* c*,* d *be as in* (5.2.1) (5.2.2)*, and assume* $\mathrm{prime}(cd) \cap S' = \varnothing$*. Then the trace map*

$$M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m'})) \longrightarrow M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m))$$

sends ${}_{c,d}z_{1,N,m'}(k, r, r', \xi, S')$ *to*

$$\Big(\prod_{\ell \in S'-S} (1 - T'(\ell)\sigma_\ell^{-1} \cdot \ell^{-r} + \Delta'(\ell)\sigma_\ell^{-2} \cdot \ell^{k-1-2r})\Big) \cdot {}_{c,d}z_{1,N,m}(k, r, r', \xi, S)$$

where $\Delta'(\ell)$ *denotes* $\left(\begin{smallmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1/\ell\end{smallmatrix}\right)^*$ *in the case* ℓ *does not divide* N*, and* $\Delta'(\ell) = 0$ *in the case* ℓ *divides* N*. We have the result of the same form for* $z_{1,N,m'}(k, r, r', \xi, S')$ *and* $z_{1,N,m}(k, r, r', \xi, S)$ *for any integers* r*,* r' *satisfying* (5.2.3)*.*

For the proof, see 5.7.

5.4. In 4.5, we defined the space $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$ ($k \geqslant 2$) in the case $N \geqslant 4$. We extend the definition including the cases $N = 1$, 2, 3. In general, for a curve Y of the form $G\backslash Y(N)$ with $N \geqslant 3$ and G a subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$, we define the space $V_{k,\mathbb{Q}}(Y)$ to be the G-fixed part of $V_{k,\mathbb{Q}}(Y(N))$. (This definition makes sense since in the case N, $N' \geqslant 3$ and $N \mid N'$, $V_{k,\mathbb{Q}}(Y(N))$ coincides with the $\mathrm{Gal}(Y(N')/Y(N))$-fixed part of $V_{k,\mathbb{Q}}(Y(N'))$.) In the case $k = 2$, $V_{2,\mathbb{Q}}(Y)$ is simply $\mathrm{H}^1(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$. For a commutative ring A over $\mathbb{Q}$, let

$$V_{k,A}(Y) = V_{k,\mathbb{Q}}(Y) \otimes_{\mathbb{Q}} A.$$

We used dual Hecke operators in 5.3, but in fact we have explained them in § 2, § 4 only in the case $N \geqslant 4$. Including the cases $N = 1$, 2, 3, the operators $T(n)$, $T'(n)$ ($n \geqslant 1$) on $M_k(X_1(N))$ ($k \in \mathbb{Z}$), $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$ ($k \geqslant 2$), $\mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes K)) \otimes \mathbb{Q}$ for a field $K \supset \mathbb{Q}$ are defined as follows. Take M, $L \geqslant 1$, such that $M + L \geqslant 5$, $(n, M) = 1$, $N \mid L$, $M \mid L$, $L \mid MN$. Then

$$X(M, L) \longrightarrow X(1, N) = X_1(N)$$

is a Galois covering allowing ramification. The operators $T(n)\left(\begin{smallmatrix}n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ and $T'(n)\left(\begin{smallmatrix}1/n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ on $M_k(X(M, L))$, $V_{k,\mathbb{Q}}(Y(M, L))$, $\mathrm{K}_2(Y(M, L) \otimes K) \otimes \mathbb{Q}$ are invariant under the action of $\mathrm{Gal}(X(M, L)/X_1(N))$, and hence induce operators $T(n)$ and $T'(n)$ on the $\mathrm{Gal}(X(M, L)/X_1(N))$-invariant parts $M_k(X_1(N))$, $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$, $\mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes K) \otimes \mathbb{Q}$, respectively. These last operators $T(n)$ and $T'(n)$ are independent of the choices of M, L. If $N \geqslant 4$, these $T(n)$, $T'(n)$ coincide with the ones given in § 2 and § 4.

For a subfield K of $\mathbb{C}$, the regulator map

$$\mathrm{reg}_{1,N} : \mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes K) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{R} \cdot i)$$

and the period map

$$\mathrm{per}_{1,n} : M_k(X_1(N)) \otimes K \longrightarrow V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N)) \quad (k \geqslant 2)$$

are defined also for any $N \geqslant 1$; They are induced from those of $Y_1(L)$, $N \mid L$, $L \geqslant 4$. They commute with $T(n)$, $T'(n)$ $(n \geqslant 1)$.

5.5. We define special elements

$$\delta_{1,N}(k,j,a(A)), \quad \delta_{1,N}(k,j,\alpha) \in V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$$

$(1 \leqslant j \leqslant k-1,\ a,\ A \in \mathbb{Z},\ A \geqslant 1,\ \alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

First we define $\delta_{1,N}(k,j,a(A))$. Take $L \geqslant 4$ such that $N \mid L$. Consider the continuous map

$$\varphi_{a(A)} : (0,\infty) \longrightarrow Y_1(L)(\mathbb{C})\,; \quad y \longmapsto \nu(A^{-1}(yi+a)).$$

Then $\varphi_{a(A)}$ is a route from a cusp to a cusp. The stalk of $\varphi_{a(A)}^{-1}(\mathcal{H}_1)$ at $y \in (0,\infty)$ is identified with $\mathbb{Z} \cdot A^{-1}(yi+a) + \mathbb{Z}$. Let β_1 (resp. β_2) be the element of $\Gamma((0,\infty), \varphi_{a(A)}^{-1}(\mathcal{H}_1))$ whose stalk at $y \in (0,\infty)$ is yi (resp. 1) $\in \mathbb{Z} \cdot A^{-1}(yi+a) + \mathbb{Z}$. Then $\delta_{1,N}(k,j,a(A))$ is defined to be the image of the class$(\varphi_{a(A)}, \beta_1^{j-1}, \beta_2^{k-j-1})$ under

$$\mathrm{H}_1(X_1(L)(\mathbb{C}), \{\text{cusps}\}, \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1)) \cong \mathrm{H}^1(X_1(L)(\mathbb{C}), \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)) \xrightarrow{\text{trace}} V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N)).$$

Then $\delta_{1,N}(k,j,a(A))$ is independent of the choice of L. In particular, $\delta_{1,N}(2,1,a(A)) \in \mathrm{H}^1(Y_1(N)(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ is the image of the class of the route from a cusp to a cusp $(0,\infty) \to Y_1(N),(\mathbb{C})$; $y \mapsto \nu(A^{-1}(yi+a))$ in $\mathrm{H}_1(X_1(N)(\mathbb{C}), \{\text{cusps}\}, \mathbb{Z})$.

For $L \geqslant 4$ such that $A \mid L$, $N \mid L$, $\delta_{1,N}(k,j,a(A))$ coincides with the image of $\delta_{A,L}(k,j) \in V_{k,\mathbb{Z}}(Y(A,L))$ under the composite map

$$V_{k,\mathbb{Q}}(Y(A,L)) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)_*} V_{k,\mathbb{Q}}(Y(A,L)) \xrightarrow{\text{trace}} V_{k,\mathbb{Q}}(Y(1(A),L)) \xrightarrow[\sim]{(\varphi_A^{-1})_*} V_{k,\mathbb{Q}}\big(Y(1,L(A))\big) \xrightarrow{\text{trace}} V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N)).$$

Next we define $\delta_{1,N}(k,j,\alpha)$ for $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Take $L \geqslant 3$ such that $N \mid L$. We define $\delta_{1,N}(k,j,\alpha)$ to be the image of $\alpha^*(\delta_{L,L}(k,j))$ under the trace map $V_{k,\mathbb{Q}}(Y(L)) \to V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$. Then $\delta_{1,N}(k,j,\alpha)$ is independent of the choice of L.

In the following Thm. 5.6, for $k \geqslant 2$ and a finite set S of prime numbers such that $\mathrm{prime}(m) \subset S$, and for a character $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$, let

$$Z_{1,N,S}(k,\chi,s) = \sum_{(n,S)=1} \chi(n) T'(n) n^{-s}$$

which acts on $V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$, where $(n,S)=1$ means that n ranges over all positive integers such that $\mathrm{prime}(n) \cap S = \varnothing$. Let

$$\sigma_b \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \quad (b \in (\mathbb{Z}/m)^\times)$$

be the element which sends ζ_m to ζ_m^b.

As in § 4, let $x^{\pm} = (1/2)(1 \pm \iota)(x)$ for $x \in V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$.

Theorem 5.6. — *Let ξ and S be as in* (5.1.1) *and let $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$ be a character.*

(1) *Let $\pm = -\chi(-1)$. Then we have*

$$\sum_{b\in(\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(b)\,\mathrm{reg}_{1,N}\left(\sigma_b(z_{1,N,m}(\xi,S))\right) = \lim_{S\to 0} s^{-1} Z_{1,N,S}(2,\chi,s)\cdot 2\pi i\cdot \delta_{1,N}(2,1,\xi)^{\pm}$$

(2) *Let $k \geqslant 2$. Then*

$$\sum_{b\in(\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(b)\,\mathrm{per}_{1,N}\left(\sigma_b(z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S))\right)^{\pm} = Z_{1,N,S}(k,\chi,r)\cdot(2\pi i)^{k-r-1}\cdot\delta_{1,N}(k,r',\xi)^{\pm}$$

for any integers r, r' satisfying (5.2.3) *and for $\pm = (-1)^{k-r-1}\chi(-1)$. Next let r, r', c, d be integers satisfying* (5.2.1) (5.2.2). *In the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, assume $c \equiv d \equiv 1 \bmod N$. Let $\pm = (-1)^{k-r-1}\chi(-1)$ and let u, $v \in \mathbb{Z}$ be as in 4.2. Then*

$$\sum_{b\in(\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(b)\,\mathrm{per}_{1,N}\left(\sigma_b({}_{c,d}z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S))\right)^{\pm} = Z_{1,N,S}(k,\chi,r)\cdot(2\pi i)^{k-r-1}\cdot\gamma^{\pm}$$

where

$$\begin{aligned}\gamma = {} & c^2d^2\delta_{1,N}(k,r',a(A)) - c^u d^2\overline{\chi}(c)\delta_{1,N}(k,r',ac(A)) \\ & - c^2d^v\overline{\chi}(d)\cdot\left(\begin{smallmatrix}1/d & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)^*\delta_{1,N}(k,r',\text{“}a/d\text{”}(A)) \\ & - c^u d^v\overline{\chi}(cd)\cdot\left(\begin{smallmatrix}1/d & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)^*\delta_{1,N}(k,r',\text{“}ac/d\text{”}(A))\end{aligned}$$

in the case $\xi = a(A)$, where “e/d” for $e \in \mathbb{Z}$ means any integer such that $d\cdot$“e/d” $\equiv e \bmod N$, and

$$\gamma = (c^2 - c^u\overline{\chi}(c))(d^2 - d^v\overline{\chi}(d))\delta_{1,N}(k,r',\xi)$$

in the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

5.7. Prop. 5.3 is deduced from the propositions 2.3, 2.4, 4.3, 4.4 and Thm. 5.6 is deduced from the theorems 2.6, 4.6, by the following (5.7.1)–(5.7.3). (We use (5.7.1) and (5.7.2) (resp. (5.7.1) and (5.7.3)) in the case $\xi = a(A)$ (resp. $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).)

(5.7.1) *On $\mathrm{K}_2(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))$, $M_k(X_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))$ ($k \in \mathbb{Z}$), and $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))$ ($k \geqslant 2$), we have*

$$\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^* = \sigma_b \quad \textit{for} \quad b \in (\mathbb{Z}/m)^\times.$$

(5.7.2) *Let $a \in \mathbb{Z}$, A, $M \geqslant 1$, $L \geqslant 4$, $mA \mid M$, $N \mid L$, $M \mid L$. Let*

$$\begin{aligned} & t_{m,a(A)} : \mathrm{K}_2(Y(M,L)) \longrightarrow \mathrm{K}_2(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m)) \\ \textit{(resp.}\quad & t_{m,a(A)} : M_k(X(M,L)) \longrightarrow M_k(Y_1(N))\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m) \\ \textit{resp.}\quad & t_{m,a(A)} : V_{k,\mathbb{Q}}(Y(M,L)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))\end{aligned}$$

be the map defined in 5.1 (resp. defined in 5.2, resp. defined in the same way as $t_{m,a(A)}$ *for* M_k *in 5.2). Then we have*

$$t_{m,an(A)} \circ T(n) = T(n) \circ t_{m,a(A)}, \quad t_{m,a(A)} \circ T'(n) = T'(n) \circ t_{m,an(A)}$$

for any $n \geqslant 1$ *such that* $(n, M) = 1$, *and*

$$t_{m,av(A)} \circ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}^* \circ t_{m,au(A)}$$

for any integers u, v *such that* $(u, M) = 1$, $(v, L) = 1$. *In particular,* $T'(n)\left(\begin{smallmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*$ *(*$n \geqslant 1$, $(n, M) = 1$*) and* $\left(\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{smallmatrix}\right)$ *(*$v \in \mathbb{Z}$, $(v, L) = 1$*) commute with* $t_{m,a(A)}$.

(5.7.3) *Let* $L \geqslant 3$. *Then for* $n \geqslant 1$ *such that* $(n, L) = 1$, *the operator* $T'(n)\left(\begin{smallmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* = T(n)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n \end{smallmatrix}\right)^*$ *on* $\mathrm{K}_2(Y(L))$ *(resp.* $M_k(X(L))$, *resp.* $V_{k,\mathbb{Z}}(Y(L))$*) commutes with the action of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L)$.

The proofs of (5.7.1)–(5.7.3) are easy and hence omitted.

We give explicit presentations of the zeta elements of this section in some special cases.

Proposition 5.8. — *Let* $a \in \mathbb{Z}$, $A \geqslant 1$, *and assume*

$$\mathrm{prime}(A) \subset \mathrm{prime}(m), \quad N \geqslant 4, \quad mA \mid N,$$

Let $S = \mathrm{prime}(m)$.

(1) $$z_{1,N,m}(a(A), S) = \left\{ \textstyle\prod_x g_{1/m,x}, g_{0,1/n} \right\}$$

where x *ranges over all elements of* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *such that* $mx = -a/A$.

(2) *Let* $k \geqslant 2$. *Assume*

$$\mathrm{prime}(A) \subset \mathrm{prime}(m), \quad N \geqslant 4, \quad mA \mid N, \quad S = \mathrm{prime}(m).$$

Then for integers r, r', c, d *as in* (5.2.1) (5.2.2) *(resp. for integers* r, r' *as in* (5.2.3)*),* ${}_{c,d}z_{1,N,m}(k, r, r', a(A), S)$ *(resp.* $z_{1,N}(k, r, r', a(A), S)$*) is equal to*

$$A^{r'-1} \cdot (-1)^r \cdot (r-1)!^{-1} m^{k-r-2} N^{-r} \cdot \sum_x {}_c F^{(k-r)}_{1/m,x} \cdot {}_d E^{(r)}_{0,1/N}$$

$$\textit{(resp.} \quad A^{r'-1} \cdot (-1)^r \cdot (r-1)!^{-1} m^{k-r-2} N^{-r} \cdot \sum_x F^{(k-r)}_{1/m,x} \cdot E^{(r)}_{0,1/N} \textit{)}$$

if $r' = k - 1$, *and to*

$$A^{r'-1} \cdot (-1)^{r'} \cdot (k-2)!^{-1} m^{r'-k} N^{-r'} \cdot \sum_x {}_c E^{(k-r')}_{1/m,x} \cdot {}_d E^{(r')}_{0,1/N}$$

$$\textit{(resp.} \quad A^{r'-1} \cdot (-1)^{r'} \cdot (k-2)!^{-1} m^{r'-k} N^{-r'} \cdot \sum_x E^{(k-r')}_{1/m,x} \cdot E^{(r')}_{0,1/N} \textit{)}$$

if $r = k - 1$, *where* x *ranges over all elements of* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *such that* $mx = -a/A$.

Proof. — Concerning (2), the proof for zeta elements with c, d is similar to that without c, d. So we give the proof of (2) for zeta elements without c, d.

By the arguments as in the proof of Prop. 2.3 (resp. 4.3), we can proceed as follows. The element

$$\begin{aligned} &\{g_{1/mA,0}, g_{0,1/N}\} \in \mathrm{K}_2(Y(mA,N)) \otimes \mathbb{Q} \\ (\text{resp.}\quad &(!)^{(k-j)}_{1/mA,0} \cdot E^{(j)}_{0,1/N} \in M_k(X(mA,N)) \\ &\qquad \text{where } (!) = F \text{ or } E \text{ and } 1 \leqslant j \leqslant k-1) \end{aligned}$$

is sent to

$$\begin{aligned} &\{g_{1/mA,-a/mA}, g_{0,1/N}\} \in \mathrm{K}_2(Y(mA,N)) \otimes \mathbb{Q} \\ (\text{resp.}\quad &(!)^{(k-j)}_{1/mA,-a/mA} \cdot E^{(j)}_{0,1/N} \in M_k(X(mA,N))\,) \end{aligned}$$

under $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*$, and then to

$$\begin{aligned} &\Big\{\prod_x g_{x,-a/mA}, g_{0,1/N}\Big\} \in \mathrm{K}_2(Y(m(A),N)) \otimes \mathbb{Q} \\ (\text{resp.}\quad &\sum_x (!)^{(k-j)}_{x,-a/mA} \cdot E^{(j)}_{0,1/N} \in M_k(X(m(A),N))\,) \end{aligned}$$

by norm (resp. trace), where x ranges over all elements of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ such that $Ax = 1/m$. By using 2.12 and then 2.7 (2) (resp. 4.12 and then 4.7 (2)), we see that this element is sent by $(\varphi_A^{-1})_* = \varphi_A^*$ to

$$\begin{aligned} &\Big\{g_{1/m,-a/mA}, \prod_y g_{0,y}\Big\} \in \mathrm{K}_2(Y(m,N(A))) \otimes \mathbb{Q} \\ (\text{resp.}\quad &A^s \cdot (!)^{(k-j)}_{1/mA,-a/mA} \cdot \sum_y E^{(j)}_{0,y} \in M_k\big(X(m,N(A))\big) \\ &\qquad (s = 0 \text{ if } (!) = F, \text{ and } s = k-j-1 \text{ if } (!) = E)) \end{aligned}$$

where y ranges over all elements of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ such that $Ay = 1/N$. By using 2.7 (2) (resp. 4.7 (2)), we see that that this element is sent by norm (resp. trace) to

$$\begin{aligned} &\{g_{1/m,-a/mA}, g_{0,1/N}\} \in \mathrm{K}_2(Y(m,N)) \otimes \mathbb{Q} \\ (\text{resp.}\quad &A^t \cdot (!)^{(k-j)}_{1/m,-a/mA} \cdot E^{(j)}_{0,1/N} \in M_k(X(m,N)) \\ &\qquad (t = j \text{ if } (!) = F, \text{ and } t = k-1 \text{ if } (!) = E)). \end{aligned}$$

This element is sent by norm (resp. trace) to

$$\begin{aligned} &\{\prod_x g_{1/m,x}, g_{0,1/N}\} \in \mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)) \otimes \mathbb{Q} \\ (\text{resp.}\quad &A^t \cdot \sum_x (!)^{(k-j)}_{1/m,x} \cdot E^{(j)}_{0,1/N} \in M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m))\,). \end{aligned}$$

where x ranges over all elements of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ such that $mx = -A/a$. This proves 5.8 (1) (resp. 5.8 (2) for zeta elements without c, d). □

Remark 5.9. — Let $k \geqslant 2$, let ξ, S be as in (5.1.1) and assume $\xi = a(A)$. Then Prop. 5.8 shows that the zeta element ${}_{c,d}z_{1,N,m}(k, r, r', \xi, S)$ for r, r', c, d as in (5.2.1) (5.2.2) (resp. $z_{1,N,m}(k, r, r', \xi, S)$ for r, r' as in (5.2.3)) is defined also as follows avoiding the strange map $t_{m,a(A)}$. Take $M \geqslant 4$ such that $\mathrm{prime}(M) = S$, and let $m' = mM$, $N' = AmMN$. Then this zeta element is the image of the zeta element ${}_{c,d}z_{1,N',m'}(k, r, r', \xi, S)$ (resp. $z_{1,N',m'}(k, r, r', \xi, S)$) under the trace map

$$M_k(X_1(N') \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m'})) \longrightarrow M_k(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)),$$

and the latter zeta element is given by Prop. 5.8 since

$$\mathrm{prime}(A) \subset \mathrm{prime}(m'), \quad N' \geqslant 4, \quad m'A \mid N', \quad S = \mathrm{prime}(m').$$

A similar remark works for elements $z_{1,N,m}(a(A), S)$ in $\mathrm{K}_2 \otimes \mathbb{Q}$.

By Prop. 5.8 and by Rem. 5.9, we have

Corollary 5.10. — *Let a, $A \in \mathbb{Z}$, $A \geqslant 1$, and let $\xi = a(A)$. Then the zeta elements in 5.1 (resp. 5.2) including the symbol ξ do not change when we replace ξ by $a'(A)$ for any integer a' such that $a' \equiv a \bmod A$, and they do not change (resp. they are multiplied by $b^{r'-1}$) when we replace ξ by $ab(Ab)$ for a positive integer b.*

6. Projections to eigen cusp forms

In this section, we consider zeta elements associated to each newform.

Fix $k \geqslant 2$, $N \geqslant 1$.

6.1. We fix a normalized newform ([**AL**], [**De2**])

$$f = \sum_{n \geqslant 1} a_n q^n \in S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$$

of weight k and of level N. We have

$$a_1 = 1$$
$$T(n)f = a_n f, \quad T'(n)f = \overline{a}_n f, \quad \text{for any} \quad n \geqslant 1.$$

6.2. The zeta function

$$\mathrm{L}(f, s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}$$

can be written in the form of the Euler product

$$\prod_{\ell} (1 - a_\ell \ell^{-s} + \varepsilon(\ell)\ell^{k-1-2s})^{-1}$$

where ℓ ranges over all prime numbers and

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N)^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

is a homomorphism characterized by

$$\begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^* f = \varepsilon(d) f \quad \text{for any} \quad d \in (\mathbb{Z}/N)^\times.$$

(If ℓ divides N, $\varepsilon(\ell)$ means 0.)

For $m \geqslant 1$ and for a finite set S of prime numbers such that $\mathrm{prime}(m) \subset S$, and for a character $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$, let

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_S(f, \chi, s) &= \sum_{(n,S)=1} a_n \chi(n) n^{-s} \\ &= \prod_{\ell \notin S} \left(1 - a_\ell \chi(\ell) \ell^{-s} + \varepsilon(\ell) \chi^2(\ell) \ell^{k-1-2s}\right)^{-1} \end{aligned}$$

These zeta functions converge absolutely when $\mathrm{Re}(s) > (k+1)/2$, and are extended as holomorphic functions to the whole s-plane.

6.3. Let

$$F = \mathbb{Q}(a_n \,;\ \ n \geqslant 1) \subset \mathbb{C}.$$

Then F is a finite extension of $\mathbb{Q}$ and is stable under the complex conjugation. The above ε has values in F.

We will define a quotient $\mathbb{Q}$-vector space $S(f)$ of $M_k(X_1(N))$ and a quotient $\mathbb{Q}$-vector space $V_F(f)$ of $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$, corresponding to f. These spaces will have structures of F-linear spaces, and $\dim_F(S(f)) = 1$, $\dim_F(V_F(f)) = 2$. In the case $k = 2$, we will define a quotient $\mathbb{Q}$-vector space $\mathrm{K}_2(f, K)$ of $\mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes K) \otimes \mathbb{Q}$ for a field $K \supset \mathbb{Q}$, which also has a structure of an F-linear space.

Let $m \geqslant 1$ and let ξ, S be as in (5.1.1). For integers r, r', c, d satisfying (5.2.1) (5.2.2) (resp. integers r, r' satisfying (5.2.3)) we define the zeta element

$$_{c,d}z_m(f, r, r', \xi, S) \ \ (\text{resp. } z_m(f, r, r', \xi, S)\,) \quad \in S(f) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$$

as the image of the element $_{c,d}z_{1,N,m}(k, r, r', \xi, S)$ (resp. $z_{1,N,m}(k, r, r', \xi, S)$) of $M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$. In the case $k = 2$, we define the zeta element

$$z_m(f, \xi, S) \in \mathrm{K}_2(f, \mathbb{Q}(\zeta_m))$$

as the image of $z_{1,N,m}(\xi, S)$.

We define $S(f)$ to be the quotient of $M_k(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Q}} F$ by the F-submodule generated by the images of the operators $T(n) \otimes 1 - 1 \otimes a_n$ for all $n \geqslant 1$. Hence as a $\mathbb{Q}$-vector space, $S(f)$ is a quotient of $M_k(X_1(N))$. Furthermore, $S(f)$ is a one dimensional F-vector space, and $S(f) \otimes_F \mathbb{C}$ is generated as a $\mathbb{C}$-vector space by the image of f under the canonical map $S_k(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \to S(f) \otimes_F \mathbb{C}$.

On $S(f)$, $T(n)$ acts by a_n and $T'(n)$ acts by $\overline{a}_n$.

We define $V_F(f)$ to be the quotient of $V_{k,F}(Y_1(N))$ by the F-submodule generated by the images of $T(n) \otimes 1 - 1 \otimes a_n$ for all $n \geqslant 1$. As a $\mathbb{Q}$-vector space, $V_F(f)$ is a quotient of $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$. On $V_F(f)$, $T(n)$ acts by a_n and $T'(n)$ acts by $\overline{a}_n$.

For a commutative ring A over F, define

$$V_A(f) = V_F(f) \otimes_F A.$$

The complex conjugation ι on $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$ induces an A-linear map $\iota : V_A(f) \to V_A(f)$. Hence we obtained an A-linear action of $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ on $V_A(f)$.

We have

$$\dim_F(V_F(f)) = 2, \quad \dim_F(V_F(f)^+) = \dim_F(V_F(f)^-) = 1$$

where $(\ )^\pm$ means the part on which ι acts as ± 1, respectively.

The period map $\mathrm{per}_{1,N} : M_k(X_1(N)) \to V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$ induces an F-linear map

$$\mathrm{per}_f : S(f) \longrightarrow V_{\mathbb{C}}(f)$$

which we call the period map of f.

For $1 \leqslant j \leqslant k-1$ and for $\xi = a(A)$ with $a \in \mathbb{Z}$, $A \geqslant 1$ (resp. for $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$), let

$$\delta(f, j, \xi) \in V_F(f)$$

be the image of $\delta_{1,N}(k, j, \xi)$.

In the case $k = 2$, we define $\mathrm{K}_2(f, K)$ for a field $K \supset \mathbb{Q}$, to be the quotient of $\mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes K) \otimes_{\mathbb{Z}} F$ by the F-submodule generated by the images of $T(n) \otimes 1 - 1 \otimes a_n$ and $T'(n) \otimes 1 - 1 \otimes \overline{a}_n$ for all $n \geqslant 1$. As a $\mathbb{Q}$-vector space, $\mathrm{K}_2(f, K)$ is a quotient of $\mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes K) \otimes \mathbb{Q}$. On $\mathrm{K}_2(f, K)$, $T(n)$ acts by a_n and $T'(n)$ acts by $\overline{a}_n$. In the case $K \subset \mathbb{C}$, the regulator map $\mathrm{reg}_{1,N} : \mathrm{K}_2(Y_1(N) \otimes K) \to V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$ induces an F-linear map

$$\mathrm{reg}_f : \mathrm{K}_2(f, K) \longrightarrow V_{\mathbb{C}}(f)$$

which we call the regulator map of f.

Proposition 6.4. — *Let ξ, S be as in* (5.1.1). *Let $m' \geqslant 1$, $m \mid m'$, and let S' be a finite set of prime numbers such that $S \cup \mathrm{prime}(m') \subset S'$.*

(1) *Let r, r', c, d be integers satisfying* (5.2.1) (5.2.2) *and* $\mathrm{prime}(cd) \cap S' = \varnothing$. *Then the trace map*

$$S(f) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m'}) \longrightarrow S(f) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$$

sends ${}_{c,d}z_{m'}(f, r, r', \xi, S')$ to

$$\Big(\prod_{\ell \in S' - S} \big(1 - \overline{a}_\ell \sigma_\ell^{-1} \cdot \ell^{-r} + \overline{\varepsilon}(\ell) \sigma_\ell^{-2} \cdot \ell^{k-1-2r}\big) \Big) \cdot {}_{c,d}z_m(f, r, r', \xi, S).$$

We have the result of the same form for $z_{m'}(f, r, r', \xi, S')$ and $z_m(f, r, r', \xi, S)$ for any integers r, r' satisfying (5.2.3).

(2) *Assume $k = 2$. Then the norm map*

$$\mathrm{K}_2(f, \mathbb{Q}(\zeta_{m'})) \longrightarrow \mathrm{K}_2(f, \mathbb{Q}(\zeta_m))$$

sends $z_{m'}(f, \xi, S')$ to

$$\Big(\prod_{\ell \in S' - S} \big(1 - \overline{a}_\ell \sigma_\ell^{-1} + \overline{\varepsilon}(\ell) \sigma_\ell^{-2} \cdot \ell\big) \Big) \cdot z_m(f, \xi, S).$$

This follows from Prop. 5.3.

6.5. We introduce the dual cusp form f^* of f. Let

$$f^* = \sum_{n \geqslant 1} \overline{a}_n q^n.$$

Then $f^* \in M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$, and f^* is an eigen newform of level N.

Theorem 6.6. — *Let ξ, S be as in* (5.1.1). *Let $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$ be a character.*

(1) *For integers r, r' satisfying* (5.2.3) *and for $\pm = (-1)^{k-r-1}\chi(-1)$, we have*

$$\sum_{b \in (\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(b) \operatorname{per}_f \left(\sigma_b(z_m(f, r, r', \xi, S))\right)^{\pm} = \mathrm{L}_S(f^*, \chi, r) \cdot (2\pi i)^{k-r-1} \cdot \delta(f, r', \xi)^{\pm}.$$

Next let r, r', c, d be integers satisfying (5.2.1) (5.2.2). *In the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, assume $c \equiv d \equiv 1 \bmod N$. Let $\pm = (-1)^{k-r-1}\chi(-1)$ and let u, $v \in \mathbb{Z}$ be as in* (4.2.4). *Then*

$$\sum_{b \in (\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(b) \operatorname{per}_f \left(\sigma_b({}_{c,d}z_m(f, r, r', \xi, S))\right)^{\pm} = \mathrm{L}_S(f^*, \chi, r) \cdot (2\pi i)^{k-r-1} \cdot \gamma^{\pm}$$

where

$$\begin{aligned}\gamma = c^2 d^2 \delta(f, r, r', a(A)) - c^u d^2 \overline{\chi}(c) \delta(f, r', ac(A)) \\ - c^2 d^v \overline{\chi}(d) \varepsilon(d) \delta(f, r', \text{“}a/d\text{”}(A)) + c^u d^v \overline{\chi}(cd) \varepsilon(d) \delta(f, r', \xi)\end{aligned}$$

in the case $\xi = a(A)$, and

$$\gamma = (c^2 - c^u \overline{\chi}(c))(d^2 - d^v \overline{\chi}(d)) \delta(f, r', \xi)$$

in the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

(2) *Assume $k = 2$. Let $\pm = -\chi(-1)$. Then we have*

$$\sum_{b \in (\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(b) \operatorname{reg}_f \left(\sigma_b(z_{1,N,m}(\xi, S))\right) = \lim_{s \to 0} s^{-1} \mathrm{L}_S(f^*, \chi, s) \cdot 2\pi i \cdot \delta(f, 1, \xi)^{\pm}.$$

This follows from Thm. 5.6

7. The proofs of the zeta value formulas

In this section, we give the proofs of Thm. 2.6 and Thm. 4.6.

In 7.1–7.17, we fix $k \geqslant 2$, $N \geqslant 4$, and $m \geqslant 1$ such that $m \mid N$, and consider $Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Thm. 2.6 and Thm. 4.6 are statements for $Y(M, N)$, but as is explained in 7.18–7.20, we can reduce them to a result (Prop. 7.12) on $Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

We will identify $Y_1(N)(\mathbb{C})$ with $\Gamma_1(N) \backslash \mathfrak{H}$ via $\nu : \mathfrak{H} \to Y(N)(\mathbb{C}) \to Y_1(N)(\mathbb{C})$ (1.8), where

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,;\quad c \equiv 0,\quad d \equiv 1 \bmod N \right\}.$$

We will regard modular forms as functions on $\mathfrak{H}$ as in 3.8.

We start with the following result of Shimura.

***Proposition 7.1* ([Sh]).** — *Let $0 \leqslant j \leqslant k-1$, and let*

$$f = \sum_{n \geqslant 1} a_n q^n \in S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}, \quad g = \sum_{n \geqslant 0} b_n q^n \in M_{k-j}(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}.$$

Assume $f \neq 0$, $g \neq 0$ and that f and g are eigen forms of $T(n)$ for any $n \geqslant 1$ such that $(n, N) = 1$. Then

$$\int_{\Gamma_1(N)\backslash \mathfrak{H}} \overline{f(\tau)} g(\tau) \cdot N^{-j-2(s-k+1)} E\big(j, \tau, 1/N, 2(s-k+1)\big) y^{s-1} \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$
$$= (4\pi)^{-s} \Gamma(s) D(f, g, s)$$

($\tau = x + iy \in \mathfrak{H}$, x, $y \in \mathbb{R}$), where $E\big(j, \tau, 1/N, s\big)$ is as in 3.8 and $D(f, g, s)$ is a zeta function defined as in 7.2 below.

7.2. For f, g as in Prop. 7.1, the function $D(f, g, s)$ is defined as follows. Write

$$T(n) f = \lambda(n) f, \quad T(n) g = \eta(n) g \quad ((n, N) = 1, \quad \lambda(n), \, \eta(n) \in \mathbb{C}).$$

Then the Dirichlet series

$$\sum_{(n,N)=1} \lambda(n) n^{-s} \quad \text{and} \quad \sum_{(n,N)=1} \eta(n) n^{-s}$$

are expressed as Euler products. For a prime number ℓ which does not divide N, let $\{(1 - \alpha_1 \ell^{-s})(1 - \alpha_2 \ell^{-s})\}^{-1}$ be the Euler factor of $\sum_{(n,N)=1} \lambda(n) n^{-s}$ at ℓ, let $\{(1 - \beta_1 \ell^{-s})(1 - \beta_2 \ell^{-s})\}^{-1}$ be the Euler factor of $\sum_{(n,N)=1} \eta(n) n^{-s}$ at ℓ, and define a polynomial $P_\ell(u)$ by

$$P_\ell(u) = (1 - \overline{\alpha}_1 \beta_1 u)(1 - \overline{\alpha}_1 \beta_2 u)(1 - \overline{\alpha}_2 \beta_1 u)(1 - \overline{\alpha}_2 \beta_2 u).$$

Define $L_{(N)}(\overline{\lambda} \otimes \eta, s)$ by

$$L_{(N)}(\overline{\lambda} \otimes \eta, s) = \prod_{\ell} P_\ell(\ell^{-s})^{-1}$$

where ℓ ranges over all prime numbers which do not divide N. Let

$$S(N) = \{n \geqslant 1 \, ; \quad \mathrm{prime}(n) \subset \mathrm{prime}(N)\}.$$

We define

$$D(f, g, s) = L_{(N)}(\overline{\lambda} \otimes \eta, s) \cdot \sum_{n \in S(N)} \overline{a}_n b_n n^{-s}.$$

7.3. In 7.3–7.6, we fix some notation.

Let $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$ be a character. For $h \geqslant 1$, we define elements

(7.3.1) $F_\chi^{(h)}$ (here we assume $m \geqslant 2$ in the case $h = 2$),

(7.3.2) $E_\chi^{(h)}$ (here we assume $\chi \neq 1$ in the case $h = 2$)

of $M_h(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$ as follows:

$$F_\chi^{(h)} = m^{h-2} \sum_{a,b} \chi(a) F_{a/m,b/m}^{(h)}$$
$$E_\chi^{(h)} = m^{-h} \sum_{a,b} \chi(a) E_{a/m,b/m}^{(h)} \quad \text{for} \quad h \neq 2,$$
$$E_\chi^{(2)} = m^{-2} \sum_{a,b} \chi(a) \widetilde{E}_{a/m,b/m}^{(2)}$$

where a ranges over all elements of $(\mathbb{Z}/m)^\times$ and b ranges over all elements of $\mathbb{Z}/m$. Since $\sum_b F_{a/m,b/m}^{(h)}$, $\sum_b E_{a/m,b/m}^{(h)}$ $(h \neq 2)$, and $\sum_b \widetilde{E}_{a/m,b/m}^{(h)}$ $(h = 2)$ belong to $M_h(X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)) = M_h(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$, (7.3.1), (7.3.2) are defined as elements of $M_h(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$. These elements are zero unless $\chi(-1) = (-1)^h$ because $F_{-\alpha,-\beta}^{(h)} = (-1)^h F_{\alpha,\beta}^{(h)}$ and the similar formulas hold for $E_{\alpha,\beta}^{(h)}$ $(h \neq 2)$ and $\widetilde{E}_{\alpha,\beta}^{(2)}$.

7.4. Let $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$ be a character. Let r, r' be integers satisfying the following (7.4.1).

(7.4.1) $0 \leqslant r \leqslant k-1$, $1 \leqslant r' \leqslant k-1$, and at least one of r, r' is $k-1$. Furthermore $m \geqslant 2$ in the case $(r, r') = (k-2, k-1)$, and $\chi \neq 1$ in the case $(r, r') = (k-1, k-2)$.

We define a function $z_\chi(r, r')$ on $\mathfrak{H}$ by

$$z_\chi(r, r') = \begin{cases} (-1)^r \cdot (r-1)!^{-1} \cdot N^{-r} \cdot F_\chi^{(k-r)} \cdot E_{0,1/N}^{(r)} & \text{if } r' = k-1, \\ (-1)^{r'} \cdot (k-2)!^{-1} \cdot N^{-r'} \cdot E_\chi^{(k-r')} \cdot E_{0,1/N}^{(r')} & \text{if } r = k-1 \end{cases} \tag{7.4.2}$$

For an integer d which is prime to N, we define a function ${}_d z_\chi(r, r')$ on $\mathfrak{H}$ by

$${}_d z_\chi(r, r') = \begin{cases} (-1)^r \cdot (r-1)!^{-1} \cdot N^{-r} \cdot F_\chi^{(k-r)} \cdot {}_d E_{0,1/N}^{(r)} & \text{if } r' = k-1, \\ (-1)^{r'} \cdot (k-2)!^{-1} \cdot N^{-r'} \cdot E_\chi^{(k-r')} \cdot {}_d E_{0,1/N}^{(r')} & \text{if } r = k-1 \end{cases} \tag{7.4.3}$$

These functions with $r' = k-1$ (resp. $r = k-1$) are zero unless $\chi(-1) = (-1)^{k-r}$ (resp. $\chi(-1) = (-1)^{k-r'}$).

The functions in (7.4.2) with $(r, r') \neq (0, k-1)$, $(2, k-1)$, $(k-1, 2)$, and the elements (7.4.3) with $r \neq 0$ are elements of $M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$. In general, functions in (7.4.2) (7.4.3) are C^∞-functions on $\mathfrak{H}$, but not necessarily holomorphic.

The following is clear from the definition.

Lemma 7.5. — *Let r, r' be as in* (7.4.1) *and assume $r \neq 0$. Assume $m \geqslant 2$. Then we have*

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(a) \sigma_a \big(z_{1,N,m}(k, r, r', 0(1), \mathrm{prime}(m)) \big) = z_\chi(r, r'),$$

if $(r,r') \neq (2,k-1)$, $(k-1,2)$ $(k-1,k-2)$, *and*

$$\sum_{a\in(\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(a)\sigma_a\big({}_{c,d}z_{1,N,m}(k,r,r',0(1),\mathrm{prime}(m))\big) = (c^2 - c^u\overline{\chi}(c))_d\, z_\chi(r,r')$$

for any integers c,d *such that* $(c,m)=(d,mN)=1$, *where* $u = r+2-k$ *if* $r' = k-1$, *and* $u = k-r'$ *if* $r = k-1$.

7.6. Define zeta functions $Z^T_{1,N}(k,s)$ and $Z^T_{1,N}(k,\chi,s)$, whose values are operators acting on $V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$, by

$$Z^T_{1,N}(k,s) = \sum_{n\geqslant 1} T(n)n^{-s}, \quad Z^T_{1,N}(k,\chi,s) = \sum_{n\geqslant 1}\chi(n)T(n)n^{-s}.$$

(The letter T means that these zeta functions are defined by using $T(n)$ not $T'(n)$.)

For $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n \in S_k(X_1(N))\otimes\mathbb{C}$, define

$$[f]_1 = a_1.$$

We have

$$a_n = [T(n)f]_1$$

for all $n \geqslant 1$. Define

$$\mathrm{L}(f,s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s} = \big[Z^T_{1,N}(k,s)f\big]_1.$$

For an integer $j \geqslant 1$, define

$$\Omega(f,j) = (2\pi i)^{k-1}\int_0^\infty f(iy)\cdot(iy)^{j-1}\cdot \mathrm{d}(iy),$$
$$\overline{\Omega}(f,j) = \text{ the complex conjugate of } \Omega(f,j).$$

Then we have

$$\Omega(f,j) = (2\pi i)^{k-j-1}\cdot(-1)^j\cdot(j-1)!\cdot\mathrm{L}(f,j) \tag{7.6.1}$$

for any $j \geqslant 1$. (This follows from the well known fact

$$\int_0^\infty f(iy)y^{s-1}\,\mathrm{d}y = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\,\mathrm{L}(f,s)\,.)$$

Proposition 7.7. — *Let* $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$ *be a character, and let* $f \in S_k(X_1(N))\otimes\mathbb{C}$. *Let* r, r' *be as in* (7.4.1), *and assume* $\chi(-1) = (-1)^{k-r}$ *(resp.* $(-1)^{k-r'}$*) if* $r' = k-1$ *(resp.* $r = k-1$*). Then*

$$(-8\pi^2 i)^{k-1}\cdot\int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} \overline{f(\tau)}\cdot\frac{1}{2}\cdot z_\chi(r,r')\cdot y^{k-2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

is equal to

$$\big(2\pi i\big)^{k-r-1}\cdot\overline{\Omega}(Z^T_{1,N}(k,\overline{\chi},r)f,r'\big)$$

in the case $r \neq 0$, and to

$$\frac{1}{2} \cdot (2\pi i)^{k-1} \cdot \overline{\Omega}((\lim_{s \to 0} s^{-1} Z_{1,N}^T(k, \overline{\chi}, s))f, r')$$

in the case $r = 0$.

7.8. The proof of Prop. 7.7 is given in 7.8–7.10. To prove Prop. 7.7 in the case $(r, r') = (j, k-1)$ (resp. $(r, r') = (k-1, j)$), we will apply Prop. 7.1 to the case $g = 1/2 \cdot F_\chi^{(k-j)}$ (resp. $1/2 \cdot E_\chi^{(k-j)}$) with $\chi(-1) = (-1)^{k-j}$ (we assume $m \geqslant 2$ (resp. $\chi \neq 1$) in the case $j = k-2$). If we write

$$g = \sum_{n \geqslant 0} b_n q^n,$$

we have by 3.10

$$\sum_{n \geqslant 1} b_n n^{-s} = \mathrm{L}(\chi, s-k+r+1)\zeta(s-k+r'+1) \tag{7.8.1}$$

(Here $\mathrm{L}(\chi, s) = \sum_{n \geqslant 1, (n,N)=1} \chi(n) n^{-s}$.) From (7.8.1), we have

$$T(n)g = b_n g \quad \text{for all} \quad n \geqslant 1 \quad \text{such that} \quad (n, N) = 1. \tag{7.8.2}$$

Lemma 7.9. — *If f is as in Prop. 7.1 and g is as above, $D(f, g, s)$ is equal to the complex conjugate of*

$$\left[Z_{1,N}^T(k, \overline{\chi}, \overline{s} - k + r + 1) Z_{1,N}^T(k, \overline{s} - k + r' + 1) f\right]_1.$$

Proof. — By (7.8.1) and (7.8.2), we have

$$\mathrm{L}_{(N)}(\overline{\lambda} \otimes \eta, s) = \mathrm{L}_{(N)}(\overline{\lambda}, \chi, s-k+r+1) \cdot \mathrm{L}_{(N)}(\overline{\lambda}, s-k+r'+1). \tag{7.9.1}$$

Here $\mathrm{L}_{(N)}(\overline{\lambda}, \chi, s) = \sum_{n \geqslant 1\,(n,N)=1} \overline{\lambda}_n \chi(n) n^{-s}$. On the other hand, $\sum_{n \in S(N)} \overline{a}_n b_n n^{-s}$ is the complex conjugate of $\left[\sum_{n \in S(N)} T(n) \overline{b}_n n^{-s} f\right]_1$, and by the fact

$$T(nn') = T(n)T(n') \quad \text{for } n, n' \in S(N),$$

this $\sum_{n \in S(N)} T(n) \overline{b}_n n^{-s}$ is expressed as:

$$\sum_{n \in S(N)} T(n) \overline{b}_n n^{-s} = \Big(\sum_{n \in S(N)} T(n) \overline{\chi}(n) n^{-(s-k+r+1)} \Big) \Big(\sum_{n \in S(N)} T(n) n^{-(s-k+r'+1)} \Big). \tag{7.9.2}$$

Now 7.9 follows from 7.9.1, 7.9.2, and the fact

$$T(nn') = T(n)T(n') \quad \text{if} \quad (n, N) = 1 \quad \text{and } n' \in S(N). \qquad \square$$

7.10. We prove Prop. 7.7. We may assume that f is an eigen form of $T(n)$ for any $n \geqslant 1$ such that $(n, N) = 1$, since $S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$ is generated over $\mathbb{C}$ by such forms. For such f, by (7.6.1) and Lemma 7.9, the case $r \neq 0$ (resp. $r = 0$) of Prop. 7.7 is obtained by putting $s = k-1$ in 7.1 (resp. by taking $\lim_{s \to k-1}$ of $(s-k+1)^{-1}$ times the both sides of 7.1).

7.11. For M, $L \geqslant 1$ such that $M + L \geqslant 5$, we defined in 4.5 a $\mathbb{C}$-linear operator

$$\iota : V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,L)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,L)).$$

Now we define another operator

$$\iota' : V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,L)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,L)),$$

which is anti-$\mathbb{C}$-linear, by

$$\iota'(x \otimes y) = x \otimes \overline{y} \quad (x \in V_{k,\mathbb{R}}(Y(M,L)), y \in \mathbb{C}).$$

Proposition 7.12. — *Let $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$ be a character, and let*

$$Z_{1,N}(k,\chi,s) = \sum_{n \geqslant 1} \chi(n) T'(n) n^{-s}$$

which is an operator-valued function acting on $V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$.

(1) *Assume $\chi(-1) = (-1)^{k-r}$ (resp. $(-1)^{k-r'}$) if $r' = k-1$ (resp. $r = k-1$). Then*

$$\begin{aligned}(7.12.1)\quad & \mathrm{per}_{1,N}\Big(\frac{1}{2} \cdot z_\chi(r,r')\Big) + (-1)^{k-r-1}\iota'\Big(\mathrm{per}_{1,N}\Big(\frac{1}{2} \cdot z_{\overline{\chi}}(r,r')\Big)\Big) \\ & \qquad = Z_{1,N}(k,\chi,r) \cdot (2\pi i)^{k-r-1} \cdot \delta_{1,N}(k,r')\end{aligned}$$

in $V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$ if $(r,r') \neq (0,k-1)$, $(2,k-1)$, $(k-1,2)$, and

$$\begin{aligned}(7.12.2)\quad & \mathrm{per}_{1,N}\Big(\frac{1}{2} \cdot {}_d z_\chi(r,r')\Big) + (-1)^{k-r-1}\iota'\Big(\mathrm{per}_{1,N}\Big(\frac{1}{2} \cdot {}_d z_{\overline{\chi}}(r,r')\Big)\Big) \\ & \qquad = Z_{1,N}(k,\chi,r) \cdot (2\pi i)^{k-r-1} \cdot \Big(d^2 - d^j \overline{\chi}(d) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)^*\Big) \cdot \delta_{1,N}(k,r')\end{aligned}$$

in $V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$ if $r \neq 0$.

(2) *Assume $m \geqslant 2$ and $\chi(-1) = 1$. Then*

$$\begin{aligned}(7.12.3)\quad & \sum_{a \in \mathbb{Z}/m^\times} \chi(a) \cdot \mathrm{reg}_{1,N}\Big(\prod_{b \in \mathbb{Z}/m} \{g_{a/m,b/m}, g_{0,1/N}\}\Big) \\ & \qquad = \lim_{s \to 0} s^{-1} Z_{1,N}(2,\chi,s) \cdot 2\pi i \cdot \delta_{1,N}(2,1)\end{aligned}$$

in $V_{2,\mathbb{C}}(Y_1(N))$.

The proof of Prop. 7.12 is given in 7.13–7.17.

7.13. In this 7.13, by using Poincaré duality, we reduce Prop. 7.12 to Prop. 7.7 and to a statement (Prop. 7.14) concerning the "boundary" of zeta elements at cusps.

The canonical pairing $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1 \to \mathbb{Z}$ on $Y_1(N)(\mathbb{C})$ induces the pairing

$$\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1) \times \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1) \longrightarrow \mathbb{Q}\,;$$

$$(x_1 \dots x_{k-2}, y_1 \dots y_{k-2}) \longmapsto \frac{1}{(k-2)!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-2}} \prod_{j=1}^{k-2} \langle x_j, y_{\sigma(j)} \rangle$$

$(x_1, \ldots, x_{k-2}, y_1, \ldots, y_{k-2} \in \mathcal{H}^1)$. This induces a perfect duality of finite dimensional $\mathbb{Q}$-vector spaces

$$\langle\ ,\ \rangle : V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N)) \times V_{k,\mathbb{Q},c}(Y_1(N)) \longrightarrow \mathbb{Q} \tag{7.13.1}$$

and also a perfect self-duality of the finite dimensional $\mathbb{Q}$-vector space

$$V_{k,\mathbb{Q}}(X_1(N)) \underset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^1(X_1(N)(\mathbb{C}), j_* \operatorname{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1)) \otimes \mathbb{Q}$$

where j denotes the inclusion map $Y_1(N)(\mathbb{C}) \to X_1(N)(\mathbb{C})$. (We regard $V_{k,\mathbb{Q}}(X_1(N))$ as a subspace of $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(N))$ and at the same time as a quotient of $V_{k,\mathbb{Q},c}(Y_1(N))$.) Furthermore the period map (4.10)

$$\mathrm{per} : S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow V_{k,\mathbb{C},c}(Y_1(N))$$

induces the isomorphism of Shimura

$$\begin{aligned} (S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C})^2 \xrightarrow{\sim} V_{k,\mathbb{C}}(X_1(N)) \underset{\text{def}}{=} V_{k,\mathbb{Q}}(X_1(N)) \otimes \mathbb{C} \\ (f, g) \longmapsto \mathrm{per}(f) + \iota' \mathrm{per}(g). \end{aligned} \tag{7.13.2}$$

Consider the exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow V_{k,\mathbb{C}}(X_1(N)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N)) \\ \xrightarrow{\partial} \oplus_x (\mathrm{R}^1 j_* \operatorname{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1))_x \otimes \mathbb{C} \end{aligned} \tag{7.13.3}$$

where x ranges over all cusps in $X_1(N)(\mathbb{C})$ and $(\ )_x$ means the stalk at x.

By (7.13.2) and (7.13.3) and by the self-duality of $V_{k,\mathbb{C}}(X_1(N))$, we have

(7.13.4) *For $z \in V_{k,\mathbb{C}}(Y_1(N))$, $z = 0$ if and only if z satisfies the following conditions: $\langle z, \mathrm{per}(f)\rangle = \langle z, \iota' \mathrm{per}(f)\rangle = 0$ for all $f \in S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$, and $\partial(z) = 0$.*

Concerning the Poincaré duality (7.13.1), the following (7.13.5)–(7.13.7) hold.

(7.13.5) *For $f \in S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$, $g \in M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$, we have*

$$\begin{aligned} &\langle \mathrm{per}(g), \mathrm{per}(f)\rangle = 0,\ \ \langle \iota' \mathrm{per}(g), \iota' \mathrm{per}(f)\rangle = 0, \\ &\langle \mathrm{per}(g), \iota' \mathrm{per}(f)\rangle = (-8\pi^2 i)^{k-1} \textstyle\int_{\Gamma_1(N)\backslash \mathfrak{H}} \overline{f(\tau)} g(\tau) y^{k-2} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &(\tau = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R}). \\ &\langle \iota' \mathrm{per}(g), \mathrm{per}(f)\rangle = \text{the complex conjugate of } \langle \mathrm{per}(g), \iota' \mathrm{per}(f)\rangle. \end{aligned}$$

(7.13.6) *For $z \in S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$, and for $1 \leqslant j \leqslant k-1$, we have*

$$\begin{aligned} \langle \delta_{1,N}(k, j), \mathrm{per}(f)\rangle &= \Omega(f, j), \\ \langle \delta_{1,N}(k, j), \iota' \mathrm{per}(f)\rangle &= \overline{\Omega}(f, j). \end{aligned}$$

(7.13.7) *Let $f \in S_2(X_1(N))$, and let w be a closed C^∞-differential form on $Y_1(N)(\mathbb{C})$ which has at each cusp the growth $\mathrm{O}(r^{-1} \log(r)^c)$ $(r \to 0)$ for some $c > 0$ where r*

denotes the distance from the cusp (the metric is defined by fixing an analytic isomorphism between an open neighbourhood of the cusp and an open set of $\mathbb{C}$*). Then*

$$\langle \mathrm{class}(w), \mathrm{per}(f)\rangle = \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} w \wedge f \cdot \mathrm{dlog}(q)$$
$$\langle \mathrm{class}(w), \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle = \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} w \wedge \overline{f} \cdot \mathrm{dlog}(\overline{q}).$$

$((-8\pi^2 i)^{k-1}$ in (7.13.5) comes from

$$\mathrm{dlog}(q) \wedge \mathrm{dlog}(\overline{q}) = -8\pi^2 \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

and from

$$\int_{\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})} \mathrm{dlog}(t) \wedge \mathrm{dlog}(\overline{t}) = -8\pi^2 i \cdot \mathrm{Im}(\tau),$$

where $t = e^{2\pi i z}$.)

We reduce Prop. 7.12 (1) to Prop. 7.7 and Prop. 7.14 below. Let $f \in S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$. By (7.13.5)–(7.13.7), we have

$$\langle \text{l.h.s. of (7.12.1)}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle = (-8\pi^2 i)^{k-1} \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} \overline{f(\tau)} \cdot \frac{1}{2} \cdot z_\chi(r, r') \cdot y^{k-2} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$
$$\langle \text{r.h.s. of (7.12.1)}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle = (2\pi i)^{k-r-1}\, \overline{\Omega}(Z^T_{1,N}(k, \overline{\chi}, r) \cdot f, r')$$

(since $T'(n)$ and $T(n)$ are the adjoints of each other in the Poincaré duality). Next let d be an integer which is prime to N, and let $h = \left(d^2 - d^j \chi(d) \cdot \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & 1/d \end{smallmatrix}\right)^*\right) f$. Then by (7.13.5)–(7.13.7), we have

$$\begin{aligned}\langle \text{l.h.s. of (7.12.2)}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle &= (-8\pi^2 i)^{k-1} \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} \overline{f(\tau)} \cdot \frac{1}{2} \cdot {}_d z_\chi(r, r') \cdot y^{k-2} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= (-8\pi^2 i)^{k-1} \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} \overline{h(\tau)} \cdot \frac{1}{2} \cdot z_\chi(r, r') \cdot y^{k-2} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\end{aligned}$$
$$\langle \text{r.h.s. of (7.12.2)}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle = (2\pi i)^{k-r-1}\, \overline{\Omega}(Z^T_{1,N}(k, \overline{\chi}, r) \cdot h, r').$$

Hence by 7.7, we have for $e = 1, 2$,

$$\langle \text{l.h.s. of (7.12.e)}, \iota' \mathrm{per}(f)\rangle = \langle \text{r.h.s. of (7.12.e)}, \iota' \mathrm{per}(f)\rangle.$$

By taking the complex conjugate, we have for $e = 1, 2$,

$$\begin{aligned}&\langle \text{l.h.s. of (7.12.e)}, \mathrm{per}(f)\rangle \\ &\quad = \text{ the complex conj. of } (-1)^{k-r-1} \cdot \langle \text{l.h.s. of (7.12.e) for } \overline{\chi}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle \\ &\quad = \text{ the complex conj. of } (-1)^{k-r-1} \cdot \langle \text{r.h.s. of (7.12.e) for } \overline{\chi}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle \\ &\quad = \langle \text{r.h.s. of (7.12.e)}, \mathrm{per}(f)\rangle.\end{aligned}$$

Hence by (7.13.4), Prop. 7.12 (1) is reduced to Prop. 7.7 and to Prop. 7.14 below.

We reduce Prop. 7.12 (2) to Prop. 7.7 and to Prop. 7.14 below. For g, $h \in \mathcal{O}(Y_1(N))^\times \otimes \mathbb{Q}$, the differential form

$$\eta_{g,h} = \log(|g|) \cdot \mathrm{dlog}(h|h|^{-1}) - \log(|h|) \cdot \mathrm{dlog}(g|g|^{-1})$$

in 2.10 is written also as

$$\begin{aligned}\eta_{g,h} &= \log(|g|) \cdot \mathrm{dlog}(h) + \log(|h|) \cdot \mathrm{dlog}(\overline{g}) - \mathrm{d}\{\log(|g|) \cdot \log(|h|)\} \\ &= -\log(|g|) \cdot \mathrm{dlog}(\overline{h}) - \log(|h|) \cdot \mathrm{dlog}(g) + \mathrm{d}\{\log(|g|) \cdot \log(|h|)\}.\end{aligned}$$

Since $\mathrm{class}(\mathrm{d}\{\log(|g|) \cdot \log(|h|)\}) = 0$, we have by (7.13.7)

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{class}(\eta_{g,h}), \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle &= \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} \log(|g|) \cdot \mathrm{dlog}(h) \wedge \overline{f} \cdot \mathrm{dlog}(\overline{q}) \\ \langle \mathrm{class}(\eta_{g,h}), \mathrm{per}(f)\rangle &= -\int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} \log(|g|) \cdot \mathrm{dlog}(\overline{h}) \wedge f \cdot \mathrm{dlog}(q) \\ &= -\text{ complex conj. of } \langle \mathrm{class}(\eta_{g,h}), \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle\end{aligned}$$

for any $f \in S_2(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$. We have also

$$\log(|g_{\alpha,\beta}|) = -E^{(0)}_{\alpha,\beta}(\tau), \quad \mathrm{dlog}(g_{\alpha,\beta}) = -F^{(2)}_{\alpha,\beta}$$

((3.8.4) (iii), 3.11 (2)). These imply, for any $f \in S_2(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\langle \text{l.h.s. of (7.12.3)}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle &= \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} \overline{f(\tau)} \cdot z_\chi(0,1)(\tau) \cdot \mathrm{dlog}(q) \wedge \mathrm{dlog}(\overline{q}) \\ &= (-8\pi^2 i) \cdot \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} \overline{f(\tau)} \cdot z_\chi(0,1)(\tau) \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \langle \text{r.h.s. of (7.12.3)}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle &= (2\pi i) \cdot \overline{\Omega}(\lim_{s\to 0} s^{-1} Z^T_{1,N}(2, \overline{\chi}, s) \cdot f, 1)\end{aligned}$$

(since $T'(n)$ and $T(n)$ are the adjoints of each other in the Poincaré duality). By the case $k = 2$ and $r = 0$ of Prop. 7.7, we have

$$\langle \text{l.h.s. of (7.12.3)}, \iota' \mathrm{per}(f)\rangle = \langle \text{r.h.s. of (7.12.3)}, \iota' \mathrm{per}(f)\rangle.$$

By taking the complex conjugate, we have

$$\begin{aligned}&\langle \text{l.h.s. of (7.12.3)}, \mathrm{per}(f)\rangle \\ &\quad = -\text{ the complex conj. of } \langle \text{l.h.s of (7.12.3) for } \overline{\chi}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle \\ &\quad = -\text{ the complex conj. of } \langle \text{r.h.s of (7.12.3) for } \overline{\chi}, \iota' \,\mathrm{per}(f)\rangle \\ &\quad = \langle \text{r.h.s. of (7.12.3)}, \mathrm{per}(f)\rangle.\end{aligned}$$

Hence by (7.13.4), Prop. 7.12 (2) is reduced to Prop. 7.7 and Prop. 7.14.

Proposition 7.14. — $\partial(\text{l.h.s. of (7.12.e)}) = \partial(\text{r.h.s. of (7.12.e)})$ *for* $e = 1, 2, 3$, *where* ∂ *is as in* (7.13.3) *(we take* $k = 2$ *in the case* $e = 3$*).*

7.15. We give preliminaries for the proof of Prop. 7.14.

Let $\infty \in X_1(N)(\mathbb{C})$ (resp. $\widetilde{\infty} \in X(N)(\mathbb{C})$) be the standard cusp, which is the limit point of the image of $yi \in \mathfrak{H}$ $(y \to \infty)$.

The cusps of $X_1(N)(\mathbb{C})$ are described as follows. Let Σ be the set of pairs (v, w) such that $v \in \mathbb{Z}/N$ and $w \in ((\mathbb{Z}/N)/(v))^{\times}$. Let $\Sigma/\pm 1$ be the quotient of Σ by the equivalence $(v, w) \sim (-v, -w)$. Then there is a unique bijection

$$\{\text{cusps of } X_1(N)(\mathbb{C})\} \longrightarrow \Sigma/\pm 1$$

which sends the image of $\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right)\widetilde{\infty} \in X(N)(\mathbb{C})$ in $X_1(N)(\mathbb{C})$ to the class of $(v, w \bmod v)$ in $\Sigma/\pm 1$ for any $\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N)$.

We define a canonical homomorphism

$$R : (\mathrm{R}^1 j_* \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1))_{\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

as follows. Take $c \gg 0$, and let $U = \{\tau \in \mathfrak{H};\ \operatorname{Im}(\tau) > c\}$. Then the map $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\backslash U \to \Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H} \cong Y_1(N)(\mathbb{C})$ is an open immersion, and the image of this map has the form

$$(\text{an open neibourhood of } \infty \text{ in } X_1(N)(\mathbb{C})) - \{\infty\}.$$

This map induces

$$\begin{aligned}(\mathrm{R}^1 j_* \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1))_{\infty} &\cong \mathrm{H}^1\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\backslash U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)\Big) \\ &\cong \mathrm{H}^0(U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1))\Big/\Big(1 - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^*\Big)\,\mathrm{H}^0(U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)) \\ &\cong \mathrm{H}^0(U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1))\Big/\Big(1 - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_*\Big)\,\mathrm{H}^0(U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1)).\end{aligned}$$

The pull back of $\mathcal{H}_1$ on U is a constant sheaf whose stalk at $\tau \in U$ is identified with $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. Let e_1 (resp. e_2) be the section of $\mathcal{H}_1$ on U whose stalk at $\tau \in U$ is τ (resp. 1). Then $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_*(e_1) = e_1 + e_2$. From this we see that

$$\mathrm{H}^0(U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1))/\big(1 - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_*\big)\,\mathrm{H}^0(U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1)) \otimes \mathbb{Q}$$

is a one dimensional $\mathbb{Q}$-vector space generated by the class of e_1^{k-2}, and the classes of $e_1^s e_2^t$ $(s \geqslant 0,\ t \geqslant 1,\ s + t = k - 2)$ in this space are zero. Hence there is a unique homomorphism

$$\mathrm{H}^0(U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1))/\big(1 - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_*\big)\,\mathrm{H}^0(U, \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1)) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

which sends the class of e_1^{k-2} to 1 and the classes of $e_1^s e_2^t$ $(s \geqslant 0,\ t \geqslant 1,\ s + t = k - 2)$ to 0. This is the definition of R.

We define a homomorphism

$$R : (\mathrm{R}^1 j_* \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1))_{\widetilde{\infty}} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

(we use the same letter R) to be the composite

$$(\mathrm{R}^1 j_* \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1))_{\widetilde{\infty}} \otimes \mathbb{Q} \xleftarrow{\sim} (\mathrm{R}^1 j_* \operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1))_{\infty} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow[\sim]{R} \mathbb{Q}$$

We have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} M_k(X(N)) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle \mathrm{per}_{N,N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times(2\pi i)^{k-1}} \\ V_{k,\mathbb{C}}(Y(N)) & \xrightarrow{R} & \mathbb{C} \end{array} \tag{7.15.1}$$

where the upper horizontal arrow is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{n/N} \mapsto a_0$. We have also a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_2(Y(N)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle \mathrm{reg}_{N,N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times 2\pi i} \\ V_{2,\mathbb{C}}(Y(N)) & \xrightarrow{R} & \mathbb{C} \end{array} \tag{7.15.2}$$

where the upper horizontal arrow is induced by

$$\mathrm{K}_2(\mathbb{C}((q^{1/N}))) \longrightarrow \mathbb{R}\,; \quad \{q^{\alpha}au, q^{\beta}bv\} \longmapsto \beta\cdot\log(|a|) - \alpha\log(|b|)$$

(α, $\beta \in (1/N)\,\mathbb{Z}$, a, $b \in \mathbb{C}^{\times}$, u, $v \in 1 + q^{1/N}\mathbb{C}[[q^{1/N}]]$).

Let

$$B = \oplus_x (\mathrm{R}^1 j_* \,\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1))_x \otimes \mathbb{Q}$$

where x ranges over all cusps of $X_1(N)(\mathbb{C})$. For $\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N)$, let

$$R \circ \left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right)^* : B \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

be the homomorphism induced by pulling back to $X(N)$, then pulling back by $\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right)$, and then taking R of the $\widetilde{\infty}$-component. This map depends only on $(v, w \bmod v) \in \Sigma$.

For $z \in B \otimes \mathbb{C}$, $z = 0$ if and only if $R \circ \left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right)^*(z) = 0$ for all $\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N)$. By this, Prop. 7.14 follows from Lemma 7.16, 7.17 below.

Lemma 7.16. — *Let $\chi : (\mathbb{Z}/m)^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ be a homomorphism, and let $\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N)$.*

(1) Let r, r' be as in (7.4.1)*, and assume $\chi(-1) = (-1)^{k-r}$ (resp. $(-1)^{k-r'}$) in the case $r' = k-1$ (resp. $r = k-1$). Let*

$$z_{\chi} = z_{\chi}(r, r')$$

assuming $(r, r') \neq (0, k-1)$, $(2, k-1)$, $(k-1, 2)$

$$(\text{resp. } z_{\chi} = {}_d z_{\chi}(r, r')$$

for an integer d such that $(d, N) = 1$ assuming $r \neq 0$), and let

$$B_{\chi} = R \circ \left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right)^* \circ \partial \circ \mathrm{per}_{1,N}(z_{\chi}), \quad P = \frac{1}{2}(B_{\chi} + (-1)^{k-r-1} \cdot \overline{B_{\overline{\chi}}}).$$

(i) *Assume $k \geqslant 3$, $r' = k-1$. Then, in the case $v \neq 0$,*

$$P = 0.$$

In the case $v = 0$, if $Q(w)$ denotes

$$\mathrm{L}(\chi, r+1-k) \cdot \chi(w) \cdot \Big\{\zeta\big(w/N, s\big) + (-1)^r \zeta\big(-w/N, s\big)\Big\}_{s=r} \cdot (2\pi i)^{k-r-1} N^{-r}$$

(here $\zeta(\alpha, s)$, $(\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ is as in 3.9), we have

$$P = Q(w) \quad (\textit{resp.} \quad P = d^2 Q(w) - d^j \overline{\chi}(d) Q(dw)\ ).$$

(ii) *Assume $k \geqslant 3$, $2 \leqslant r' \leqslant k-2$. Then,*

$$P = 0.$$

(iii) *Let $k \geqslant 3$, $(r, r') = (k-1, 1)$. Then if $Q(v)$ denotes*

$$-\mathrm{L}(\chi, r) N^{-1} \chi(v) \Big(\zeta\big(v/N, 0\big) - \zeta\big(-v/N, 0\big)\Big),$$

we have

$$P = Q(v) \quad (\textit{resp. } P = d^2 Q(v) - d^j \overline{\chi}(d) Q(dv)).$$

(iv) *Assume $k = 2$ (so $r = r' = 1$). Then in the case $v \neq 0$, if $Q(v)$ denotes*

$$-\mathrm{L}(\chi, 1) \chi(v) \Big(\zeta\big(v/N, 0\big) - \zeta\big(-v/N, 0\big)\Big) \cdot N^{-1},$$

we have

$$P = Q(v) \quad (\textit{resp. } P = d^2 Q(v) - d^j \overline{\chi}(d) Q(dv)).$$

In the case $v = 0$, if $Q(w)$ denotes

$$\mathrm{L}(\chi, 0) \chi(w) \Big\{\zeta\big(w/N, s\big) - \zeta\big(-w/N, s\big)\Big\}_{s=1} \cdot N^{-1},$$

we have

$$P = Q(w) \quad (\textit{resp. } P = d^2 Q(w) - d^j \overline{\chi}(d) Q(dw)).$$

(2) *Let $m \geqslant 2$, and assume $\chi(-1) = 1$. Let*

$$P = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(a) R \circ \left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right)^* \circ \partial \circ \mathrm{reg}_{1,N} \Big(\Big\{ \prod_{b \in \mathbb{Z}/m} g_{a/m, b/m}, g_{0,1/N} \Big\}\Big).$$

Then, in the case $v \neq 0$,

$$P = -\lim_{s \to 0} s^{-1} \mathrm{L}(\chi, s) \cdot \chi(v) \Big(\zeta\big(v/N, -1\big) + \zeta\big(-v/N, -1\big)\Big) \cdot 2\pi i.$$

In the case $v = 0$,

$$P = \mathrm{L}(\chi, -1) \chi(w) \lim_{s \to 0} s^{-1} \Big(\zeta\big(w/N, s\big) + \zeta\big(-w/N, s\big)\Big) \cdot 2\pi i.$$

Proof. — By using the commutative diagram (7.15.1) (resp. (7.15.2)), 7.16 (1) (resp. 7.16 (2)) follows from the expressions of the constant terms of Eisenstein series in 3.10 (resp. from the "q-presentations" of Siegel units in 1.9) and the following well known equalities (7.16.1) (resp. (7.16.2)) and (7.16.3) for $\zeta(\alpha, s)$ and $\zeta^*(\alpha, s)$.

(7.16.1) *For $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ and for any integer $r \geqslant 1$,*

$$\frac{(-1)^r}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{2}\big(\zeta^*(\alpha, 1-r) + (-1)^r \zeta^*(-\alpha, 1-r)\big) = (2\pi i)^{-r}\big\{\zeta(\alpha, s) + (-1)^r \zeta(\alpha, s)\big\}_{s=r}.$$

(7.16.2) *For $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, if we denote $\exp(2\pi i\alpha)$ by η, we have*

$$\log|1-\eta| = \lim_{s\to 0} s^{-1}(\zeta(\alpha, s) + \zeta(-\alpha, s)).$$

(7.16.3) *For any integer $r \leqslant -1$, $\zeta(\alpha, r) = (-1)^{r-1}\zeta(-\alpha, r)$.* □

Lemma 7.17. — *Let $\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$ be a character, and let $\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N)$. Let j be any integer such that $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Let*

$$P(s) = R \circ \left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & w \end{smallmatrix}\right)^* \circ \partial(Z_{1,N}(k, \chi, s) \cdot \delta_{1,N}(k, j)).$$

(1) *Assume $k \geqslant 3$, $j = k-1$. Then, in the case $v \neq 0$,*

$$P(s) = 0.$$

In the case $v = 0$,

$$P(s) = \mathrm{L}(\chi, s-k+1)\Big(\chi(w)\zeta\big(w/N, s\big) + (-1)^k \chi(-w)\zeta\big(-w/N, s\big)\Big) \cdot N^{-s}.$$

(2) *Assume $k \geqslant 3$, $2 \leqslant j \leqslant k-2$. Then*

$$P(s) = 0.$$

(3) *Assume $k \geqslant 3$, $j = 1$. Then*

$$P(s) = -\mathrm{L}(\chi, s)\Big(\chi(v)\zeta\big(v/N, s-k+1\big) + (-1)^k \chi(-v)\zeta\big(-v/N, s-k+1\big)\Big) \cdot N^{-s+k-2}.$$

(4) *Assume $k = 2$ (so $j = 1$). Then, in the case $v \neq 0$,*

$$P(s) = -\mathrm{L}(\chi, s)\Big(\chi(v)\zeta\big(v/N, s-1\big) + \chi(-v)\zeta\big(-v/N, s-1\big)\Big) \cdot N^{-s}.$$

In the case $v = 0$ and $m \geqslant 2$,

$$P(s) = \mathrm{L}(\chi, s-1)\Big(\chi(w)\zeta\big(w/N, s\big) + \chi(-w)\zeta\big(-w/N, s\big)\Big) \cdot N^{-s}.$$

In the case $v = 0$ and $m = 1$,

$$P(s) = \zeta(s-1)\Big(\zeta\big(w/N, s\big) + \zeta\big(-w/N, s\big) - 2\zeta(s)\Big) \cdot N^{-s}.$$

Proof. — Let Σ and B be as in 7.15. For $(v,w)\in\Sigma$, let

$$b(v,w)\in B$$

be the element characterized by the following properties: $b(v,w)$ is supported on the cusp corresponding to the element (v,w) mod $\pm$ of $\Sigma/\pm$, and $R\circ\left(\begin{smallmatrix}t & u\\ v & w\end{smallmatrix}\right)^*b(v,w)=1$ for any t, $u\in\mathbb{Z}/N$ such that $\left(\begin{smallmatrix}t & u\\ v & w\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N)$. Then for any $\left(\begin{smallmatrix}t & u\\ v & w\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N)$ and any $(v',w')\in\Sigma$, we have

$$R\circ\left(\begin{smallmatrix}t & u\\ v & w\end{smallmatrix}\right)^*b(v',w')=\begin{cases}1 & \text{if } v=v',\ w\equiv w' \bmod (v)\\ (-1)^k & \text{if } v=-v' \text{ and } w\equiv -w' \bmod (v)\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{7.17.1}$$

For $n\geqslant 1$, let $T'(n):B\to B$ be the dual Hecke operator. Let ℓ be a prime number, let $\mathrm{ord}_\ell(N)$ be the ℓ-adic order of N, and let $\mathrm{ord}_\ell(N,v)$ be the ℓ-adic order of the order of the ring $(\mathbb{Z}/N)/(v)$. By considering the dual Hecke operators locally at cusps, we have

$$T'(\ell)b(v,w)=b(v,\ell w)+\ell^{k-1}b(\ell v,w)$$

if $\mathrm{ord}_\ell(N)=0$,

$$T'(\ell)b(v,w)=b(v,\ell w)+\sum_{w'}\ell^{k-1}b(\ell v,w')$$

if $\mathrm{ord}_\ell(N)>\mathrm{ord}_\ell(N,v)=0$, where w' ranges over all elements of $((\mathbb{Z}/N)/(\ell v))^\times$ whose image in $((\mathbb{Z}/N)/(v))^\times$ coincides with w,

$$T'(\ell)b(v,w)=\ell^{k-1}\sum_{w'}b(\ell v,w')$$

if $\mathrm{ord}_\ell(N)>\mathrm{ord}_\ell(N,v)>0$, where w' ranges over all elements of $((\mathbb{Z}/N)/(\ell v))^\times$ whose image in $((\mathbb{Z}/N)/(v))^\times$ coincides with w,

$$T'(\ell)b(v,w)=\ell^{k-1}b(\ell v,w)$$

if $\mathrm{ord}_\ell(N)=\mathrm{ord}_\ell(N,v)>0$. From this we have

$$Z_{1,N}(k,\chi,s)\cdot b(0,1)=\mathrm{L}(\chi,s-k+1)\sum_{y\in(\mathbb{Z}/N)^\times}\chi(y)\zeta\big(y/N,s\big)\cdot N^{-s}\cdot\left(\begin{smallmatrix}y & 0\\ 0 & 1/y\end{smallmatrix}\right)^*\cdot b(0,1) \tag{7.17.2}$$

$$Z_{1,N}(k,\chi,s)\cdot b(1,0)=\mathrm{L}(\chi,s)\sum_{n\geqslant 1}\chi(n)n^{-(s-k+1)}\cdot\Big(\sum_{y\in(\mathbb{Z}/(N,n))^\times}b(n,y)\Big). \tag{7.17.3}$$

On the other hand,

$$\partial(\delta_{1,N}(k,k-1)) = b(0,1) \text{ if } k \geqslant 3, \tag{7.17.4}$$

$$\partial(\delta_{1,N}(k,j)) = 0 \text{ if } 2 \leqslant j \leqslant k-2, \tag{7.17.5}$$

$$\partial(\delta_{1,N}(k,1)) = -N^{-1}b(1,0) \text{ if } k \geqslant 3, \tag{7.17.6}$$

$$\partial(\delta_{1,N}(2,1)) = b(0,1) - N^{-1}b(1,0). \tag{7.17.7}$$

Lemma 7.17 follows from these (7.17.2)–(7.17.7). □

7.18. In the rest of this section, we deduce Thm. 2.6 and Thm. 4.6 from Prop. 7.12. Let M, $N \geqslant 1$, $M+N \geqslant 5$.

First we remark that Thm. 2.6 and Thm. 4.6 can be formulated without using the operator ι, but using ι' instead.

The image of the period map

$$M_k(X(M,N)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{C}}(Y(M,N))$$

and the image of the regulator map

$$\mathrm{K}_2(Y(M,N)) \longrightarrow V_{2,\mathbb{C}}(Y(M,N))$$

are contained in the fixed part of the operator $\iota \circ \iota' = \iota' \circ \iota$.

Hence

$$\iota \operatorname{per}_{M,N}(x) = \iota' \operatorname{per}_{M,N}(x) \text{ for any } x \in M_k(X(M,N)), \tag{7.18.1}$$

$$\iota \operatorname{reg}_{M,N}(x) = \iota' \operatorname{reg}_{M,N}(x) \text{ for any } x \in \mathrm{K}_2(Y(M,N)) \otimes \mathbb{Q}. \tag{7.18.2}$$

Thus, the left hand sides of Thm. 2.6 and Thm. 4.6 are rewritten in the forms using ι' instead of ι. On the other hand, the right hand sides of Thm. 2.6 and Thm. 4.6 can be rewritten also in the form without using ι by the following lemma.

Lemma 7.19. — $\iota(\delta_{M,N}(k,j)) = (-1)^{k-j} \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \cdot \delta_{M,N}(k,j)$ *(*$1 \leqslant j \leqslant k-1$*).*

Proof. — For $y > 0$, let E_y be the elliptic curve over $\mathbb{R}$ defined by the equation

$$Y^2 = 4X^3 - 10 \cdot E_{0,0}^{(4)}(yi) \cdot X - \frac{7}{6} \cdot E_{0,0}^{(6)}(yi).$$

(Since $E_{0,0}^{(h)}$ for $h \geqslant 1$, $h \neq 2$ has a q-expansion with rational coefficients, and since $q = e^{2\pi i\tau} \in \mathbb{R}$ if $\tau = yi$, $E_{0,0}^{(h)}(yi)$ belongs to $\mathbb{R}$.) We have an isomorphism

$$e_y : \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} E_y(\mathbb{C})\,;$$

$$e_y(z) = \Big(\wp(yi,z), \big(\frac{\mathrm{d}}{2\pi i \mathrm{d}z}\big)\wp(yi,z)\Big)$$

where $\wp(\tau,z)$ ($\tau \in \mathfrak{H}$, $z \in \mathbb{C}$) is as in 3.8. The map $\varphi : (0,\infty) \to Y(M,N)(\mathbb{C})$ in 4.7 is written as

$$y \longmapsto \big(E_y, e_y\big(yi/M\big), e_y\big(1/N\big)\big).$$

By the definition of $\wp(\tau, z)$ in 3.8, we have

$$\iota(e_y(z)) = e_y(-\overline{z}) \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C} \tag{7.19.1}$$

where ι denotes the complex conjugation $E_y(\mathbb{C}) \to E_y(\mathbb{C})$. From (7.19.1), we have

$$\iota\big(e_y(yi/M)\big) = e_y(yi/M), \quad \iota\big(e_y(1/N)\big) = -e_y(1/N).$$

Hence the complex conjugation $\iota : Y(M,N)(\mathbb{C}) \to Y(M,N)(\mathbb{C})$ satisfies

$$\iota(\varphi(y)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \varphi(y).$$

Furthermore (7.19.1) also shows that $\iota : \mathrm{H}_1(E_y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_1(E_y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ satisfies

$$\iota(e_1) = e_1, \quad \iota(e_2) = -e_2$$

where e_1, e_2 are as in 4.7, and hence we have

$$\iota(\mathrm{class}(\varphi, e_1^{j-1} e_2^{k-j-1})) = (-1)^{k-j-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)_* \mathrm{class}(\varphi, e_1^{j-1} e_2^{k-j-1})$$

where ι denotes the automorphism of $\mathrm{H}_1(X(M,N)(\mathbb{C}), \{\mathrm{cusps}\}, \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1))$ induced by the complex conjugation of $X(M,N)(\mathbb{C})$ and that of $E(\mathbb{C})$ with E the universal elliptic curve over $Y(M,N)$. Via the isomorphism

$$\mathrm{H}^1(Y(M,N)(\mathbb{C}), \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}^1)) \cong \mathrm{H}_1(X(M,N)(\mathbb{C}), \{\mathrm{cusps}\}, \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}^{k-2}(\mathcal{H}_1)),$$

the complex conjugation ι on the l.h.s corresponds to $(-1)^{k-1}\iota$ of the r.h.s, and hence we obtain

$$\begin{aligned} \iota\big(\delta_{M,N}(k,j)\big) &= (-1)^{k-1} \cdot (-1)^{k-j-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)_* \delta_{M,N}(k,j) \\ &= (-1)^j \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)^* \delta_{M,N}(k,j). \end{aligned}$$

Since $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)^*$ acts on $(-1)^k$ on $V_{k,\mathbb{Z}}(Y(M,N))$, this implies

$$\iota\big(\delta_{M,N}(k,j)\big) = (-1)^{k-j} \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^* \delta_{M,N}(k,j). \qquad \square$$

7.20. Now we reduce Thm. 2.6 and Thm. 4.6 to Prop. 7.12.

We first prove Thm. 4.6. Let M, $N \geqslant 1$, $M + N \geqslant 5$, and assume $\mathrm{prime}(M) \subset \mathrm{prime}(N)$. The proof for zeta elements with c, d and that for those without c, d are given in the same way, and so we give here the proof with c, d. We will apply Prop. 7.12 by taking (MN, M) as (N, m) of 7.12. Take $M' \geqslant 1$ and $L \geqslant 4$ such that

$$M^2 \mid M', \quad MN \mid L, \quad \mathrm{prime}(M') = \mathrm{prime}(M), \quad \mathrm{prime}(L) = \mathrm{prime}(MN)$$

and let

$$Y(M', L) \longrightarrow Y_1(MN) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_M) \tag{7.20.1}$$

be the composite

$$Y(M', L) \longrightarrow Y(M(M), L) \xrightarrow[\sim]{\varphi_M^{-1}} Y(M, L(M)) \longrightarrow Y_1(MN) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_M)$$

which is used to define ${}_{c,d}z_{1,MN,M}(k,r,r',0(M),\mathrm{prime}(M))$ (5.2). Then it can be shown that the canonical projection $Y(M',L)\to Y(M,N)$ factors through (7.20.1). Hence the trace maps

$$M_k(X(M',L))\longrightarrow M_k(X(M,N)) \quad\text{and}\quad V_{k,\mathbb{Q}}(Y(M',L))\longrightarrow V_{k,\mathbb{Q}}(Y(M,N))$$

factor through the surjections

$$t_{M,0(M)}: M_k(X(M',L))\longrightarrow M_k(X_1(MN)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_M)),$$
$$t_{M,0(M)}: V_{k,\mathbb{Q}}(Y(M',L))\longrightarrow V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(MN)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_M)),$$

respectively.

The trace map $M_k(X(M',L))\to M_k(X(M,N))$ sends ${}_{c,d}z_{M',L}(k,r,r')$ to ${}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r')$ by Prop. 4.3, and $t_{M,0(M)}$ sends ${}_{c,d}z_{M',L}(k,r,r')$ to

$$z_{1,MN,M}(k,r,r',0(M),\mathrm{prime}(M))=M^{r'-1}z_{1,MN,M}(k,r,r',0(1),\mathrm{prime}(M))$$

(Prop. 5.10). The trace map $V_{k,\mathbb{Q}}(Y(M',L))\to V_{k,\mathbb{Q}}(Y(M,N))$ sends $\delta_{M',L}(k,r')$ to $\delta_{M,N}(k,r')$, and $t_{M,0(M)}$ sends $\delta_{M',L}(k,r')$ to

$$\delta_{1,MN}(k,r',0(M))=A^{r'-1}\delta_{1,MN}(k,r')\in V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(MN))\subset V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(MN)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_M)).$$

(Here we regard $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(MN))$ as a direct summand of $V_{k,\mathbb{Q}}(Y_1(MN)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_M))$ in the canonical way.) By these facts and by (7.18.1), 7.19, Thm. 4.6 is reduced to the special case $\xi=0(1)$, $S=\mathrm{prime}(m)$, $m\mid N$, $N\geqslant 4$ of Thm. 5.6 (2). By Lemma 7.5, this case follows from Prop. 7.12 (1).

In the similar way, Thm. 2.6 is reduced to the special case $\xi=0(1)$, $S=\mathrm{prime}(m)$, $m\mid N$, $N\geqslant 4$ of Thm. 5.6 (1), and this case follows from Prop. 7.12 (2).

CHAPTER II
p-ADIC EULER SYSTEMS

In this Chapter II, we define Euler systems in the Galois cohomology groups related to cusp forms. We define them in § 8 by using Euler systems in K_2 of modular curves. A mysterious fact is that, via p-adic Hodge theroy, they are related to the Euler systems in the spaces of modular forms (see § 9) and hence to the zeta values $L(f,r)$ $(1\leqslant r\leqslant k-1)$ for cusp forms f of weight k (§ 9). We will deduce this fact from a generalized explicit reciprocity law in [**KK3**].

In Chapter II, we fix a prime number p.

We denote by $\overline{\mathbb{Q}}$ the algebraic closure of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

8. Definitions of p-adic Euler systems

8.1. Fix $k \geqslant 2$.

In this section, we construct the following "p-adic zeta element" (8.1.1)–(8.1.3) basing on zeta elements in K_2 of modular curves constructed in § 2. The right hand sides of (8.1.1)–(8.1.3) are étale cohomology groups, and $(k-r)$ means the Tate twist, as explained in 8.1–8.3. Our method to define p-adic zeta elements by using Beilinson elements is the "modular curve version" of the method of Soulé [**So**] in the cyclotomic theory in which he defined various p-adic cyclotomic elements by using cylotomic units. In the next section, these p-adic zeta elements will be related to zeta elements in the spaces of modular forms considered in § 4.

$$ {}_{c,d}z^{(p)}_{M,N}(k,r,r') \in \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M,N))(k-r)\big) \tag{8.1.1}$$

where M, $N \geqslant 1$, $M+N \geqslant 5$, and r, r', c, d are integers satisfying

$$1 \leqslant r' \leqslant k-1, \quad (c, 6pM) = 1, \quad (d, 6pN) = 1.$$

$$ {}_{c,d}z^{(p)}_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S) \in \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p,\zeta_m\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))(k-r)\big) \tag{8.1.2}$$

where N, $m \geqslant 1$, ξ, S are as in (5.1.1), $p \in S$, and r, r', c, d are integers satisfying

$$1 \leqslant r' \leqslant k-1, \quad \mathrm{prime}(cd) \cap S = \varnothing, \quad (cd, 6) = 1, \quad (d, N) = 1.$$

$$ {}_{c,d}z^{(p)}_{m}(f,r,r',\xi,S) \in \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p,\zeta_m\big], V_{\mathrm{O}_\lambda}(f)(k-r)\big) \tag{8.1.3}$$

where $m \geqslant 1$, $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n$ is a normalized newform in $M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$ ($N \geqslant 1$), ξ, S, r, r', c, d are as in (8.1.2), λ is a finite place of $F = \mathbb{Q}(a_n\,;\ n \geqslant 1)$, and O_λ is the valuation ring of λ.

The p-adic zeta elements (8.1.1) (resp. (8.1.2), (8.1.3)) will be defined in 8.4 (resp. 8.9, resp. 8.11).

In this paper, the p-adic zeta elements in (8.1.2), (8.1.3) and zeta elements in § 5 and § 6 with $\xi = a(A)$ will take care of zeta values with bad Euler factors (Euler factors at primes which divide N). Those with $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ can not take care of bad Euler factors, but will take care of delicate integrality.

8.2. We fix notation concerning étale cohomology.

We denote the étale cohomology group $\mathrm{H}^q_{\text{ét}}$ just by H^q. Furthermore, for a ring R, we denote the étale cohomology group $\mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(R),\ )$ simply by $\mathrm{H}^q(R,\ )$. In the case R is an integral domain with field of fractions K, we denote $\mathrm{H}^q(R, j_*(\mathfrak{A}))$ simply by $\mathrm{H}^q(R,\mathfrak{A})$ for a sheaf of abelian groups $\mathfrak{A}$ on $\mathrm{Spec}(K)_{\text{ét}}$, where $j : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(R)$ is the inclusion morphism.

For a field K with a fixed separable closure $\overline{K}$, we identify a sheaf $\mathfrak{A}$ on $\mathrm{Spec}(K)_{\text{ét}}$ with the corresponding $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-set.

Let K be a finite extension of $\mathbb{Q}_\ell$ for a prime number ℓ (resp. K be a finite extension of $\mathbb{Q}$). Let $R = K$ (resp. R be a ring of the form $\mathrm{O}_K[a^{-1}]$ for some $a \in \mathrm{O}_K \smallsetminus \{0\}$

such that p is invertible in R). For a finitely generated $\mathbb{Z}_p$-module T endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (resp. a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ which is unramified at almost all finite places of K), we denote

$$\mathrm{H}^q(R,T) \underset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_n \mathrm{H}^q(R,T/p^n).$$

It is known that $\mathrm{H}^q(R,T)$ is a finitely generated $\mathbb{Z}_p$-module, and is zero if $q>2$ (resp. if $q>2$ and p is odd or if $q>2$ and K is totally imaginary). For a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space V endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, we denote

$$\mathrm{H}^q(R,V) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{H}^q(R,T)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$$

where T is a $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-stable $\mathbb{Z}_p$-lattice in V. (Such T exists, and the r.h.s is independent of the choice of T.)

If K is a finite extension of $\mathbb{Q}_\ell$ for a prime number ℓ, $\mathrm{H}^q(K,T)$ and $\mathrm{H}^q(K,V)$ coincide with the continuous Galois cohomology groups $\mathrm{H}^q(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K),T)$ and $\mathrm{H}^q(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K),V)$, respectively.

8.3. For M, $N\geqslant 1$ such that $M+N\geqslant 5$, define a smooth $\mathbb{Z}_p$-sheaf $\mathcal{H}^1_p$ on $Y(M,N)_{\text{ét}}$ as follows. Let $\lambda : E\to Y(M,N)$ be the universal elliptic curve. We define

$$\mathcal{H}^1_p = \mathrm{R}^1\lambda_*(\mathbb{Z}_p).$$

The $\mathbb{Z}_p$-sheaf on $Y(M,N)(\mathbb{C})$ associated to $\mathcal{H}^1_p$ coincides with $\mathcal{H}^1\otimes\mathbb{Z}_p$, and the étale cohomology group $\mathrm{H}^1\big(Y(M,N)\otimes\overline{\mathbb{Q}},\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}A\big)$ for $A=\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ or $\mathbb{Z}/p^n$ ($n\geqslant 1$) is identified with $V_{k,A}(Y(M,N))=\mathrm{H}^1\big(Y(M,N)(\mathbb{C}),\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^1)\otimes A\big)$ (4.5.1). Thus, for such A, $V_{k,A}(Y(M,N))$ is endowed with a canonical action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. This action is unramified at any prime number which does not divide pMN. This explains the notation on the r.h.s of (8.1.1).

For any curve Y of the form $G\backslash Y(N)$ with $N\geqslant 3$ and G a subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$, $V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y)$ for $k\geqslant 2$ (5.4) is endowed with an action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ which is induced from the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))$.

We have defined $V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))$ for $N\geqslant 4$ (the case $M=1$ of (4.5.1)). In the case $N=1$, 2, 3, we define $V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))$ as follows (in an ad hoc way). Let $1\leqslant N\leqslant 3$. Take $L\geqslant 4$ such that $N\mid L$, and let $V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))$ be the image of the trace map $V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(L))\to V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y_1(N))$. Then $V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))$ is independent of the choice of L. The action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y_1(N))$ induces the actions of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))$. This explains the notations on the r.h.s of (8.1.2).

Finally the notation on the r.h.s of (8.1.3) is as follows. For a finite place λ of $F=\mathbb{Q}(a_n\,;\ n\geqslant 1)$, let

$$F_\lambda,\quad \mathrm{O}_\lambda$$

be the local field of F at λ, and the valuation ring of F_λ, respectively. Let $V_{\mathrm{O}_\lambda}(f)$ be the O_λ-submodule of $V_{F_\lambda}(f)$ (6.3) generated by the image of $V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))$. Then

$V_{\mathrm{O}_\lambda}(f)$ is a free O_λ-module of rank 2. The action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $V_{\mathbb{Q}_p}(Y_1(N))$ induces an F_λ-linear action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $V_{F_\lambda}(f)$ and an O_λ-linear action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $V_{\mathrm{O}_\lambda}(f)$.

8.4. We define the p-adic zeta elements (8.1.1).

By 2.3, we have an element

$$({}_{c,d}z_{Mp^n,Np^n})_{n\geqslant 1} \in \varprojlim_n \mathrm{K}_2(Y(Mp^n,Np^n)).$$

where the inverse limit is taken with respect to the norm map. For r, $r' \in \mathbb{Z}$ such that $1 \leqslant r' \leqslant k-1$, we define below a canonical homomorphism

$$\mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r') : \varprojlim_n \mathrm{K}_2(Y(Mp^n,Np^n)) \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M,N))(k-r)\big).$$

We define

$${}_{c,d}z^{(p)}_{Mp^n,Np^n}(k,r,r') = \mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r')(({}_{c,d}z_{Mp^n,Np^n})_{n\geqslant 1}).$$

The definition of $\mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r')$ is as follows.

Let E be the universal elliptic curve over $Y(M,N)$, and let T_pE be the p-adic Tate module of E regarded as a p-adic smooth sheaf on $Y(M,N)_{\text{ét}}$. Poincaré duality gives a canonical isomorphism

$$T_pE \cong \mathcal{H}^1_p(1) \tag{8.4.1}$$

where (1) means the Tate twist, and this induces

$$\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p) \cong (\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(T_pE))(2-k). \tag{8.4.2}$$

Define $\mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r')$ to be the composite map

(8.4.3)

$$\begin{aligned}
\varprojlim_n \mathrm{K}_2(Y(Mp^n,Np^n)) &\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^2(Y(Mp^n,Np^n),(\mathbb{Z}/p^n)(2))\\
&\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^2(Y(Mp^n,Np^n),(\mathrm{Sym}^{k-2}(T_pE/p^n))(2-r))\\
&\xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{H}^2(Y(Mp^n,Np^n),(\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r))\\
&\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^2(Y(M,N),(\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r))\\
&\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^1(\mathbb{Q},V_{k,\mathbb{Z}/p^n}(Y(M,N))(k-r))
\end{aligned}$$

where:

The first arrow is the Chern character map. (For a scheme X on which p is invertible and for f, $g \in \mathcal{O}(X)^\times$, the Chern character map $\mathrm{K}_2(X) \to \mathrm{H}^2(X,(\mathbb{Z}/p^n)(2))$ sends $\{f,g\}$ to $h(f)\cup h(g)$, where h is the connecting map $\mathcal{O}(X)^\times \to \mathrm{H}^1(X,(\mathbb{Z}/p^n)(1))$ of the Kummer sequence

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n)(1) \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0,$$

and $\cup$ is the cup product.) The second arrow is the product with

$$e_{1,n}^{\otimes(r'-1)} \otimes e_{2,n}^{\otimes(k-r'-1)} \otimes (\zeta_{p^n})^{\otimes(-r)}$$

where $(e_{1,n}, e_{2,n})$ is the basis of T_pE/p^n over $Y(Mp^n, Np^n)$. The third arrow is by (8.4.2). The fourth arrow is the trace map. The last arrow is defined by the spectral sequence

$$E_2^{a,b} = \mathrm{H}^a(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^b(Y(M,N) \otimes \overline{\mathbb{Q}},\ )) \Longrightarrow \mathrm{H}^{a+b}(Y(M,N),\ )$$

and by the fact $\mathrm{H}^b(Y(M,N) \otimes \overline{\mathbb{Q}},\ ) = 0$ for $b \geqslant 2$. (The last fact is because $Y(M,N) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ is an affine curve over an algebraically closed field.) By the following 8.5, 8.6, the image of $\mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r')$ is contained in the image of the canonical injection

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M,N))(k-r)) &= \varprojlim_n \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{k,\mathbb{Z}/p^n}(Y(M,N))(k-r)) \\ &\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}, V_{k,\mathbb{Z}/p^n}(Y(M,N))(k-r))\end{aligned}$$

Lemma 8.5 **([Pe0**, 2.2.4**], [Ru4**, B3.3**])**. — *Let K be a finite extension of $\mathbb{Q}$, let O_K be the ring of integers of K, and let T be a finite $\mathbb{Z}_p$ module endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Then:*

(1) *For any set S of finite places of K containing all places lying over p, the canonical map $\mathrm{H}^1(\mathrm{O}_K[S^{-1}], T) \to \mathrm{H}^1(K,T)$ is injective.*

(2) *The image of $\varprojlim_n \mathrm{H}^1(K(\zeta_{p^n}), T) \to \mathrm{H}^1(K,T)$ is contained in the image of $\mathrm{H}^1(\mathrm{O}_K[1/p], T) \to \mathrm{H}^1(K,T)$.*

Proof. — We have an exact sequence

$$\oplus_v \mathrm{H}_v^1(\mathrm{O}_K[S^{-1}], T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{O}_K[S^{-1}], T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K,T) \longrightarrow \oplus_v \mathrm{H}_v^2(\mathrm{O}_K[S^{-1}], T)$$

where v ranges over all maximal ideals of $\mathrm{O}_K[S^{-1}]$ and H_v^1 means the cohomology with support in v. For each v, we have an exact sequence

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^0(\mathrm{O}_v, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(K_v, T) &\longrightarrow \mathrm{H}_v^1(\mathrm{O}_K[S^{-1}], T) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{O}_v, T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K_v, T) \longrightarrow \mathrm{H}_v^2(\mathrm{O}_K[S^{-1}], T)\end{aligned}$$

where K_v is the local field of K at v and O_v is the valuation ring of K_v. It is sufficient to prove that for each maximal ideal v of $\mathrm{O}_K[1/p]$, $\mathrm{H}^1(\mathrm{O}_v, T) \to \mathrm{H}^1(K_v, T)$ is injective and that the image of $\varprojlim_n \mathrm{H}^1(K_v(\zeta_{p^n}), T) \to \mathrm{H}^1(K_v, T)$ is contained in the image of $\mathrm{H}^1(\mathrm{O}_v, T)$. We have

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{O}_v, T) = \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{ur}}/K_v), \mathrm{H}^0(K_v^{\mathrm{ur}}, T))$$

where K_v^{ur} denotes the maximal unramified extension of K_v, and hence $\mathrm{H}^1(\mathrm{O}_v, T) \to \mathrm{H}^1(K_v, T)$ is injective. The cokernel of $\mathrm{H}^1(\mathrm{O}_v, T) \to \mathrm{H}^1(K_v, T)$ is isomorphic to

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{ur}}/K_v), \mathrm{H}^1(K_v^{\mathrm{ur}}, T))\\ &\quad\xrightarrow{\sim} \big\{\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{ur}}/K_v), \mathrm{H}^0(K_v^{\mathrm{ur}}, T^\vee(1))\big)\big\}^\vee \quad (\,(\,)^\vee = \mathrm{Hom}(\,, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\,)\\ &\quad\xrightarrow{\sim} \big\{\mathrm{H}^1\big(\mathbb{F}_v, \mathrm{H}^0(K_v^{\mathrm{ur}}, T^\vee(1))\big)\big\}^\vee\end{aligned}$$

where $\mathbb{F}_v$ denotes the residue field of v, and the composite map

$$\varprojlim_n \mathrm{H}^1(K_v(\zeta_{p^n}), T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K_v, T) \longrightarrow \big\{\mathrm{H}^1\big(\mathbb{F}_v, \mathrm{H}^0(K_v^{\mathrm{ur}}, T^\vee(1))\big)\big\}^\vee$$

factors through $\big\{\varinjlim_n \mathrm{H}^1\big(\mathbb{F}_v(\zeta_{p^n}), \mathrm{H}^0(K_v^{\mathrm{ur}}, T^\vee(1))\big)\big\}^\vee$. Hence we are reduced to showing $\varinjlim_n \mathrm{H}^1\big(\mathbb{F}_v(\zeta_{p^n}), \mathrm{H}^0(K_v^{\mathrm{ur}}, T^\vee(1))\big) = 0$ and hence to the fact that the p-cohomological dimension of the field $\bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{F}_v(\zeta_{p^n})$ is zero. □

8.6. The projections $Y(Mp^n, Np^n) \to Y(M, N)$ factor canonically as

$$Y(Mp^n, Np^n) \longrightarrow Y(M, N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \longrightarrow Y(M, N),$$

and hence the image of $\mathrm{Ch}_{M,N}(k, r, r')$ is contained in the image of

$$\begin{aligned}&\varprojlim_{m,n} \mathrm{H}^1\Big(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1\big(Y(M, N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}/p^m}(\mathcal{H}^1_p/p^m)\big)\Big)\\ &\qquad\qquad = \varprojlim_{m,n} \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), V_{k,\mathbb{Z}/p^m}(Y(M, N))\big).\end{aligned}$$

By this and by 8.5, we obtain the last comment in 8.4.

The following 8.7 is deduced from the norm properties 2.3, 2.4 of zeta elements in K_2 by Lemma 8.8 below.

Proposition 8.7. — *Let the notation be as in* (8.1.1).

(1) *Let M', $N' \geqslant 1$ and assume*

$$M \mid M', \quad N \mid N', \quad (c, M') = (d, N') = 1,$$
$$\mathrm{prime}(Mp) = \mathrm{prime}(M'p), \quad \mathrm{prime}(Np) = \mathrm{prime}(N'p).$$

Then the norm map

$$\mathrm{H}^1\Big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M', N'))(k-r)\Big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\Big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M, N))(k-r)\Big)$$

sends ${}_{c,d}z^{(p)}_{M',N'}(k, r, r')$ to ${}_{c,d}z^{(p)}_{M,N}(k, r, r')$.

(2) *Let ℓ be a prime number which is prime to $Mpcd$. Then the norm map*

$$\mathrm{H}^1\Big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M\ell, N\ell))(k-r)\Big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\Big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M, N))(k-r)\Big)$$

sends ${}_{c,d}z^{(p)}_{M\ell,N\ell}(k, r, r')$ to $\big(1-T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^*\cdot\ell^{-r}+\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1/\ell\end{smallmatrix}\right)^*\cdot\ell^{k-1-2r}\big)\cdot{}_{c,d}z^{(p)}_{M,N}(k, r, r')$ in the case ℓ does not divide N, and to $\big(1-T'(\ell)\left(\begin{smallmatrix}1/\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^*\cdot\ell^{-r}\big)\cdot{}_{c,d}z^{(p)}_{M,N}(k, r, r')$ in the case ℓ divides N.

Lemma 8.8. — *The homomorphism* $\mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r')$ *in 8.4 has the following properties.*

(1) $T'(n)\circ \mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r') = n^{r'-1}\,\mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r')\circ T'(n)$ *for any integer* n *which is prime to* Mp.

(2) $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^* \circ \mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r') = a^{r'-1}b^{k-r'-1}(ab)^{-r}\,\mathrm{Ch}_{M,N}(k,r,r')\circ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^*$ *for any integers* a, b *such that* $(a,Mp)=1$ *and* $(b,Np)=1$.

This lemma is proved easily.

8.9. We define p-adic zeta elements (8.1.2).

Assume first $\xi = a(A)$. Take $M \geqslant 1$, $L \geqslant 4$ such that

$$mA \mid M, \quad N \mid L, \quad M \mid L, \quad \mathrm{prime}(M) = S, \quad \mathrm{prime}(L) = S \cup \mathrm{prime}(N).$$

Let

$$t_{m,a(A)} : V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(M,L)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y_1(N)\otimes \mathbb{Q}(\zeta_m))$$

be the homomorphism defined in the same way as the map $t_{m,a(A)} : M_k(X(M,L)) \to M_k(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))$ in 5.2. Let $V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))$ be the $\mathbb{Z}_p$-lattice of $V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))$ defined to be the image of the canonical injection

$$\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})]\otimes V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m)).$$

Then $t_{m,a(A)}$ induces a homomorphism

$$V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M,L)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m)).$$

Hence we have a homomorphism

$$t_{m,a(A)} : \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(M,L))\big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))\big) \cong \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p,\zeta_m\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))\big).$$

We define

$${}_{c,d}z^{(p)}_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S) = t_{m,a(A)}({}_{c,d}z^{(p)}_{M,L}(k,r,r')).$$

By Prop. 8.7 (1), $z^{(p)}_{1,N,M}(k,r,r',\xi,S)$ is independent of the choices of M, L.

Next assume $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Take $L \geqslant 3$ such that

$$m \mid L, \quad N \mid L, \quad \mathrm{prime}(L) = S.$$

The trace map $V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(L)) \to V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))$ induces a homomorphism

$$V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(L)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m)).$$

Hence we have a homomorphism

$$\mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y(L))\big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_m))\big) \cong \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[1/p,\zeta_m\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))\big).$$

We define ${}_{c,d}z^{(p)}_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$ to be the image of $\xi^*({}_{c,d}z^{(p)}_{L,L}(k,r,r'))$ under this homomorphism. By prop. 8.7 (1), this element is independent of the choice of L.

Proposition 8.10. — *Let the notation be as in* (8.1.2). *Let* $m' \geqslant 1$, $m \mid m'$, *and let* S' *be a finite set of prime numbers such that* $S \cup \mathrm{prime}(m') \subset S'$ *and* $\mathrm{prime}(cd) \cap S' = \varnothing$. *Then the norm map*

$$\mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[\zeta_{m'}, 1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))\big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[\zeta_m, 1/p\big], V_{k,\mathbb{Z}_p}(Y_1(N))\big)$$

sends ${}_{c,d}z^{(p)}_{1,N,m'}(k,r,r',\xi,S')$ *to*

$$\Big(\prod_{\ell \in S'-S} \big(1 - T'(\ell)\sigma_\ell^{-1} \cdot \ell^{-r} + \Delta'(\ell)\sigma_\ell^{-2} \cdot \ell^{k-1-2r}\big)\Big) \cdot {}_{c,d}z^{(p)}_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$$

where $\Delta'(\ell)$ *denotes* $\left(\begin{smallmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1/\ell \end{smallmatrix}\right)^*$ *in the case* ℓ *does not divide* N *and* $\Delta'(\ell) = 0$ *in the case* ℓ *divides* N.

This follows from 8.7, in the same way as 5.3 followed from 4.3, 4.4.

8.11. We define p-adic zeta elements ${}_{c,d}z^{(p)}_m(f,r,r',\xi,S)$ in (8.1.3) to be the image of the p-adic zeta element ${}_{c,d}z^{(p)}_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$.

Proposition 8.12. — *Let the notation be as in* (8.1.3). *Let* $m' \geqslant 1$, $m \mid m'$, *let* S' *be a finite set of prime numbers such that* $S \cup \mathrm{prime}(m') \subset S'$ *and* $\mathrm{prime}(cd) \cap S' = \varnothing$. *Then the norm map*

$$\mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[\zeta_{m'}, 1/p\big], V_{\mathrm{O}_\lambda}(f)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}\big[\zeta_m, 1/p\big], V_{\mathrm{O}_\lambda}(f)\big)$$

sends ${}_{c,d}z^{(p)}_{m'}(f,r,r',\xi,S')$ *to*

$$\Big(\prod_{\ell \in S'-S} \big(1 - \overline{a}_\ell\sigma_\ell^{-1} \cdot \ell^{-r} + \overline{\varepsilon}(\ell)\sigma_\ell^{-2} \cdot \ell^{k-1-2r}\big)\Big) \cdot {}_{c,d}z^{(p)}_m(f,r,r',\xi,S).$$

This follows from 8.10.

9. Relation with Euler systems in the spaces of modular forms

In this section, we state that the p-adic zeta elements in § 8 are related to the zeta modular forms in § 4, via the p-adic Hodge theory (Thm. 9.5, 9.6, 9.7). The proof of Thm. 9.5 is given in § 10, § 11. Thm. 9.6 and Thm. 9.7 follow from Thm. 9.5 easily.

First in 9.1–9.3, we review necessary things from p-adic Hodge theory. See Faltings [**Fa1**] [**Fa2**] [**Fa3**], Fontaine [**Fo1**] [**Fo2**] [**Fo3**], Fontaine-Messing [**FM**], Tsuji [**TT**], ...

9.1. Let K be a complete discrete valuation field of characteristic 0 with perfect residue field k of characteristic p. Let B_{dR} be the "field of p-adic periods" associated to K, defined by Fontaine ([**Fo2**], [**Fo3**]). B_{dR} is a complete discrete valuation field whose valuation ring contains the algebraic closure $\overline{K}$ of K. The action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on $\overline{K}$ is extended to a canonical action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on B_{dR}, and

$$\mathrm{H}^0(K, B_{\mathrm{dR}}) = K.$$

($\mathrm{H}^0(K,\ ) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K),\ ) =$ the $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-fixed part.)

9.2. We review de Rham representations.

For a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space V endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, define a K-vector space $D_{\mathrm{dR}}(V)$ by

$$D_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{H}^0(K, B_{\mathrm{dR}} \otimes V).$$

(We denote $D_{\mathrm{dR}}(V)$ by $D_{\mathrm{dR}}(K, V)$ in the case we need to make K explicit.) Then $D_{\mathrm{dR}}(V)$ has a descending filtration $(D^i_{\mathrm{dR}}(V))_{i\in\mathbb{Z}}$ defined by

$$D^i_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{H}^0(K, B^i_{\mathrm{dR}} \otimes V)$$

where B^i_{dR} denotes the subset of B_{dR} consisting of elements whose normalized valuation is $\geqslant i$.

In general, $\dim_K(D_{\mathrm{dR}}(V)) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$, and we say V is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ when the equality holds here. De Rham representations are stable under taking direct sum, tensor products, duals, and under taking subquotients. If L is a finite extension of K in $\overline{K}$, V is de Rham if and only if it is de Rham as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, and we have $L \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(K, V) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{dR}}(L, V)$ if V is de Rham.

The following (9.2.1) and (9.2.2) provide important examples of de Rham representations ([**Fa2**], [**Fa3**], [**TT**]).

(9.2.1) *Let X be a proper smooth scheme over K, let $m \in \mathbb{Z}$, and let*

$$V = \mathrm{H}^m(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p).$$

Then V is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, and $D_{\mathrm{dR}}(V)$ is identified with the de Rham cohomology $\mathrm{H}^m_{\mathrm{dR}}(X/K)$. The filtration on $D_{\mathrm{dR}}(V)$ coincides with the Hodge filtration on $\mathrm{H}^m_{\mathrm{dR}}(X/K)$.

(9.2.2) *Let Y be a curve of the form $G\backslash Y(N)$ with $N \geqslant 3$ and with a subgroup G of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$. Let $k \geqslant 2$, and let*

$$V = V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y) \quad (8.3).$$

Then V is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, and

$$D^i_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V) \ \text{ for } \ i \leqslant 0, \quad D^i_{\mathrm{dR}}(V) = 0 \ \text{ for } \ i \geqslant k,$$
$$D^i_{\mathrm{dR}}(V) = M_k(X) \otimes \mathbb{Q}_p \ \text{ for } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

where X is a smooth compactification of Y. (See § 11.)

9.3. For a de Rham representation V, we have a canonical homomorphism

$$\exp^* : \mathrm{H}^1(K, V) \longrightarrow D^0_{\mathrm{dR}}(V)$$

called the dual exponential map ([**BK2**], [**KK2**]). This is defined as the composite

$$\mathrm{H}^1(K, V) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, B^0_{\mathrm{dR}} \otimes V) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^0(K, B^0_{\mathrm{dR}} \otimes V) = D^0_{\mathrm{dR}}(V)$$

where the middle isomorphism is the product with the element

$$\log(\chi_{\mathrm{cyclo}}) \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}_p)$$

defined as follows. Here $\mathrm{H}^1(K,\ )$ are the continuous Galois cohomology groups $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K),\ )$. As a homomorphism $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathbb{Z}_p, \log(\chi_{\mathrm{cyclo}})$ is the composite of the cyclotomic character $\chi_{\mathrm{cyclo}} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathbb{Z}_p^\times$ and the logarithm $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p$.

9.4. Let Y and $X \supset Y$ be as in (9.2.2). For $k \geqslant 2$ and $1 \leqslant i \leqslant k-1$, consider the dual exponential maps

$$\exp^* : \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y)(i)) \longrightarrow M_k(X) \otimes \mathbb{Q}_p. \tag{9.4.1}$$

Here to define (9.4.1), we used the fact

$$D^0_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y)(i)) = D^i_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y)) = M_k(X) \otimes \mathbb{Q}_p$$

(Tate twist shifts the filtration of D_{dR}).

Let f be a normalized newform in $M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}$ of weight k and of level N, and let F, λ, F_λ be as in 8.3. Then by (9.2.2), $V_{F_\lambda}(f)$ is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$,

$$D^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) = D_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) \ \text{ for } \ i \leqslant 0, \quad D^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) = 0 \ \text{ for } \ i \geqslant k,$$

and as a quotient of $D^i_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y_1(N))) = M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}_p$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, we have

$$D^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) = S(f) \otimes_F F_\lambda \ \text{ for } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Here $S(f)$ is as in 6.3. We have the dual exponential map

$$\exp^*_f : \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}(\zeta_m) \otimes \mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(i)) \longrightarrow S(f) \otimes_F F_\lambda \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$$

for $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

Theorem 9.5. — *Let the notation be as in* (8.1.1). *Assume* $1 \leqslant r \leqslant k-1$, *at least one of* r, r' *is* $k-1$, *and* $\mathrm{prime}(M) \subset \mathrm{prime}(N)$. *Assume further that* $M \geqslant 2$ *in the case* $(r, r') = (k-2, k-1)$. *Then the dual exponential map* (9.4.1) *with* $Y = Y(M,N)$ *and* $i = k-r$ *sends the image of* ${}_{c,d}z^{(p)}_{M,N}(k,r,r')$ *in* $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(M,N))(k-r))$ *to the following element of* $M_k(X(M,N)) \subset M_k(X(M,N)) \otimes \mathbb{Q}_p$ *:*

$${}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r') \ \text{ if } \ p \ \text{ divides } \ M,$$

$$\Big(1 - T'(p)\big(\begin{smallmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^* \cdot p^{-r}\Big) \cdot {}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r') \ \text{ if } \ (p,M) = 1 \ \text{ and } \ p \mid N,$$

$$\Big(1 - T'(p)\big(\begin{smallmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^* \cdot p^{-r} + \big(\begin{smallmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\big)^* \cdot p^{k-1-2r}\Big) \cdot {}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r') \ \text{ if } \ (p,N) = 1.$$

See § 10, § 11 for the proof of Thm. 9.5.

Theorem 9.6. — *Let the notation be as in* (8.1.2). *Assume* $1 \leqslant r \leqslant k-1$ *and at least one of* r, r' *is* $k-1$. *Then the dual exponential map* (9.4.1) *with* $Y = Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$ *and* $i = k-r$ *sends the image of* ${}_{c,d}z^{(p)}_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$ *in* $\mathrm{H}^1\big(\mathbb{Q}(\zeta_m) \otimes \mathbb{Q}_p, V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y_1(N))\big)$ *to*

$${}_{c,d}z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S) \in M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m) \subset M_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

This follows from Thm. 9.5 and Prop. 4.4.

Theorem 9.7. — *Let the notation be as in* (8.1.3). *Assume* $1 \leqslant r \leqslant k-1$, *and at least one of* r, r' *is* $k-1$. *Let* F, λ, F_λ *be as in 8.3. Then the map*

$$\exp_f^* : \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}(\zeta_m) \otimes \mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(k-r)) \longrightarrow S(f) \otimes_F F_\lambda \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$$

sends the image of ${}_{c,d}z_m^{(p)}(f, r, r', \xi, S)$ *to*

$${}_{c,d}z_m(f, r, r', \xi, S) \in S(f) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m) \subset S(f) \otimes_F F_\lambda \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m).$$

This follows from Thm. 9.6.

10. Generalized explicit reciprocity laws

In this section, we deduce Thm. 9.5 from a generalized explicit reciprocity law proved in [**KK3**]. In this proof, we use the compatibility of two dual exponential maps (10.9.5) and this compatibility is proved in § 11. Generalized explicit reciprocity laws in [**KK3**] are related to generalized explicit reciprocity laws of Vostokov ([**Vo**]).

10.1. In 10.1–10.5, we review the theory of B_{dR} not assuming the residue field is perfect. The theory of B_{dR} in this general case was studied in the unpublished work of Tsuzuki [**TN**] and is explained in [**KK3**, § 2].

In 10.1–10.5, let $\mathcal{K}$ be a complete discrete valuation field of characteristic 0 with residue field $\mathfrak{K}$ of characteristic p. We assume $[\mathfrak{K} : \mathfrak{K}^p] < \infty$. In our application, $\mathcal{K}$ will be a p-adic completion of the function field of a modular curve.

We define the ring B_{dR} over $\mathcal{K}$, and we define an action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$, a filtration, and a connection on B_{dR}, as follows.

Let $\overline{\mathcal{K}}$ be the algebraic closure of $\mathcal{K}$. For a subfield K of $\mathcal{K}$, and for $n \geqslant 1$, let

$$B_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K) = \mathrm{H}^0\Big(\big(\operatorname{Spec}(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/p^n)/\operatorname{Spec}(\mathrm{O}_K/p^n)\big)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{\mathrm{crys}}\Big)$$

where O_K is the discrete valuation ring $\mathrm{O}_{\mathcal{K}} \cap K$, $(\ )_{\mathrm{crys}}$ means the crystalline site with respect to the standard divided power structure on the ideal (p) of O_K/p^n, and $\mathcal{O}_{\mathrm{crys}}$ is the structure sheaf of the crystalline site. (The case $K = \mathcal{K}$ and the case $K = \mathbb{Q}_p$ will be important for us.) Let $J_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)$ be the kernel of the canonical surjection $B_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K) \to \mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/p^n$, and for $q \geqslant 0$, let $J_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)^{[q]}$ be the q-th divided power of $J_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)$. Define

$$\begin{aligned}
B_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K) &= \varprojlim_n B_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K),\\
J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K) &= \varprojlim_n J_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K),\\
J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)^{[q]} &= \varprojlim_n J_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)^{[q]},\\
B^+_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K} &= \varprojlim_q \big(B_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)/J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)^{[q]} \otimes \mathbb{Q}\big).
\end{aligned}$$

Then $B^+_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}$ is a discrete valuation ring. Let $B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}$ be the field of fractions of $B^+_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}$ and define

$$B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K} = B^+_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K} \otimes_{B^+_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}} B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}$$

We denote

$$B_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K}}.$$

The inclusion map $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}/p^n \hookrightarrow B_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_{\mathcal{K}})$ induce

$$\mathcal{K} \longhookrightarrow B_{\mathrm{dR}}.$$

In the case $\mathfrak{K}$ is perfect, $B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K}}$ and this is the "usual" B_{dR} which appeared in § 9.

$\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ acts naturally on $B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K}$.

We define a filtration on $B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K}$ as follows. Let

$$(\mathbb{Z}/p^n)(1) \longrightarrow J_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$$

be the homomorphism $\alpha \mapsto \log(y^{p^n})$ where α is a p^n-th root of 1 and $y \in B_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$ is a lifting of the image of α in $\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/p^n$. (Then y^{p^n} is independent of the choice of y, and belongs to $1 + J_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$ so that $\log(y^{p^n}) \in J_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$ is defined.) We obtain a homomorphism

$$\mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$$

by passing to the inverse limit. The image of a generator t of $\mathbb{Z}_p(1)$ in the discrete valuation ring $B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}$ is a prime element. Hence

$$B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K} = B^+_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K}[t^{-1}].$$

For $i \geqslant 0$, define

$$J^{[i]}_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K} = \varprojlim_q \left(J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)^{[i]}/J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_K)^{[q]} \otimes \mathbb{Q}\right) \subset B^+_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K}.$$

We define the filtration on $B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K}$ by

$$B^i_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K} = \bigcup_{j \geqslant 0} t^{-j} J^{[i+j]}_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/K}.$$

In the case $K = \mathbb{Q}_p$, this filtration coincides with the filtration given by the normalized discrete valuation of $B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}$.

We denote $B^i_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K}}$ simply by B^i_{dR}.

We discuss about the canonical connection on B_{dR}. Let

$$\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} = (\varprojlim_n \Omega^1_{\mathrm{O}_{\mathcal{K}}/\mathbb{Z}}/p^n) \otimes \mathbb{Q}.$$

We have

$$\dim_{\mathcal{K}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}}) = \log_p([\mathfrak{K} : \mathfrak{K}^p]).$$

Let $\widehat{\Omega}^q_{\mathcal{K}}$ be the q-th exterior power of $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}}$ over $\mathcal{K}$. Then there exists a unique $B_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}$-linear map

$$d : B_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B_{\mathrm{dR}}$$

satisfying the following conditions (i)–(iii).

(i) $d(ab) = a\,db + b\,da \quad$ for $a, b \in \mathcal{K}$.
(ii) The restriction of d to $\mathcal{K}$ coincides with $\mathcal{K} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}}\,;\ a \mapsto da$.
(iii) $d(J^{[q]}_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K}}) \subset \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} J^{[q-1]}_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K}}$ for any $q \geqslant 1$.

Furthermore, for any $i \in \mathbb{Z}$, we have an exact sequence

$$0 \longrightarrow B^i_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p} \longrightarrow B^i_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{d} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B^{i-1}_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{d} \widehat{\Omega}^2_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B^{i-2}_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{d} \dots \tag{10.1.1}$$

where $d : \widehat{\Omega}^q_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B_{\mathrm{dR}} \to \widehat{\Omega}^{q+1}_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B_{\mathrm{dR}}$ is defined by $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^q x \otimes dy$.

10.2. As in the perfect residue field case, we have the functor D_{dR} and the notion "de Rham representation", defined as follows.

For a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space V endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$, let

$$D_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K}), B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V).$$

Then $D_{\mathrm{dR}}(V)$ is a $\mathcal{K}$-vector space endowed with a filtration $(D^i_{\mathrm{dR}}(V))_{i\in\mathbb{Z}}$ defined by

$$D^i_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K}), B^i_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V),$$

and with a connection

$$\nabla : D_{\mathrm{dR}}(V) \longrightarrow \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} D_{\mathrm{dR}}(V)$$

induced by $d : B_{\mathrm{dR}} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B_{\mathrm{dR}}$ and by the identity map of V.

We have always

$$\dim_{\mathcal{K}}(D_{\mathrm{dR}}(V)) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

We say V is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ if the equality holds here. If V is a de Rham representation, we have an isomorphism

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathcal{K}} D_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

which sends $\sum_{i+j=n} B^i_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathcal{K}} D^j_{\mathrm{dR}}(V)$ onto $B^n_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ for each $n \in \mathbb{Z}$. De Rham representations are stable under direct sums, tensor products, Tate twists, duals, and under taking subquotients. For de Rham representations, the functor D_{dR} commutes with the operations direct sum, tensor product, dual and Tate twists. If $\mathcal{L}$ is a finite extension of $\mathcal{K}$, V is de Rham if and only if it is de Rham as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{L}}/\mathcal{L})$, and we have $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} D_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}, V)$ if V is de Rham where $D_{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}, V)$ denotes D_{dR} of V as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{L}}/\mathcal{L})$.

10.3. Let G be a p-divisible group over $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$, let T_pG be the Tate module of G, and let $V_pG = \mathbb{Q} \otimes T_pG$. Then V_pG is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$, and there exists a canonical isomorphism

$$D_{\mathrm{dR}}(V_pG) = \mathcal{K} \otimes_{\mathrm{O}_{\mathcal{K}}} D(G)$$

preserving the filtrations and the connections, where $D(G)$ is the covariant Dieudonné module of G (the $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$-dual of the contravariant Dieudonné module of G in [**BBM**]). (As in [**BBM**], $D(G)$ has a canonical filtration such that

$$D^{-1}(G) = D(G), \quad D^1(G) = 0,$$
$$D^0(G) = \mathrm{coLie}(G^*), \quad D(G)/D^0(G) = \mathrm{Lie}(G),$$

where G^* denotes the dual p-divisible group of G.)

10.4. For a de Rham representation V of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ and for any i, $j \in \mathbb{Z}$ such that $i \leqslant j$, we have (the meaning of the notation [ ] below is explained soon later):

$$\mathrm{H}^q\big(\mathcal{K}, [(B^i_{\mathrm{dR}}/B^j_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]\big) = 0 \quad \text{for} \quad q \geqslant 2, \tag{10.4.1}$$

$$[D^i_{\mathrm{dR}}(V)/D^j_{\mathrm{dR}}(V)] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathcal{K}, [(B^i_{\mathrm{dR}}/B^j_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathcal{K}, [(B^i_{\mathrm{dR}}/B^j_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]) \tag{10.4.2}$$

where the last isomorphism is given by the product with $\log(\chi_{\mathrm{cyclo}}) \in \mathrm{H}^1(\mathcal{K}, \mathbb{Z}_p)$.

The meanings of [ ] are as follows. Let (Ab_p) be the category of abelian groups A satisfying the following condition (i).

(i) A is killed by some power of p.

Let $(\mathrm{Gal}_{\mathcal{K},p})$ be the category of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$-modules A satisfying (i) and the following condition (ii).

(ii) For any $x \in A$, the stabilizer of x in $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ is open in $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$.

Then the functor

$$\mathrm{H}^q(\mathcal{K}, \ ) : (\mathrm{Gal}_{\mathcal{K},p}) \longrightarrow (\mathrm{Ab}_p)$$

induces

$$\mathrm{H}^q(\mathcal{K}, \ ) : \mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Gal}_{\mathcal{K},p})) \longrightarrow \mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p))$$

where pro( ) means the category of pro-objects and ind( ) means the category of ind-objects. We define an object $[D^i_{\mathrm{dR}}(V)/D^j_{\mathrm{dR}}(V)]$ of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p))$ and an object $[(B^i_{\mathrm{dR}}/B^j_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]$ of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Gal}_{\mathcal{K},p}))$, as follows. The equality (10.4.1) and the isomorphisms in (10.4.2) are considered in the category $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p))$.

For a finitely generated $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$-module M, we denote by $[M]$ the object "$\varprojlim_n$"M/p^n of $\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p)$. For a finite dimensional $\mathcal{K}$-vector space N, we denote by $[N]$ the object "$\varinjlim$"$[M]$ of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p))$ where M ranges over all finitely generated $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$-submodules of N. This defines the object $[D^i_{\mathrm{dR}}(V)/D^j_{\mathrm{dR}}(V)]$ of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p))$.

On the other hand, let M be a finitely generated $B_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$-module endowed with an action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$, satisfying the following conditions (a) (b) (c).

(a) M is killed by $J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)^{[q]}$ for some $q \geqslant 0$. (Then we have $M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n M/p^n$.)

(b) $\sigma(ax) = \sigma(a)\sigma(x)$ for any $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$, $a \in B_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$, $x \in M$.

(c) The action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ on M is continuous with respect to the p-adic topology on M.

Then we denote by $[M]$ the object "$\varprojlim$"M/p^n of $\mathrm{pro}(\mathrm{Gal}_{\mathcal{K},p})$. Next let N be a $B^+_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}$-module endowed with an action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ satisfying the following condition $(\star)$.

$(\star)$ N is the union of all finitely generated $B_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$-submodules M of N which are stable under the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ and which satisfy the above conditions (a) (b) (c).

Then we denote by $[N]$ the object "$\varinjlim$"$[M]$ of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Gal}_{\mathcal{K},p}))$.

For example, for a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space V endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$, and for $i \leqslant j$, $(B^i_{\mathrm{dR}}/B^j_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ satisfies the condition $(\star)$. Hence the object $[(B^i_{\mathrm{dR}}/B^j_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]$ of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Gal}_{\mathcal{K},p}))$ is defined.

10.5. Let $e \geqslant 0$ be the integer defined by $[\mathfrak{K} : \mathfrak{K}^p] = p^e$. Then, for a de Rham representation V of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$, we define a homomorphism

$$\exp^* : \mathrm{H}^{e+1}(\mathcal{K}, [V]) \longrightarrow \mathrm{Coker}\left([\widehat{\Omega}^{e-1}_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} D^{1-e}_{\mathrm{dR}}(V)] \xrightarrow{\nabla} [\widehat{\Omega}^{e}_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} D^{-e}_{\mathrm{dR}}(V)]\right)$$

in $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p))$, called the dual exponential map. Here, $[V]$ denotes the object of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Gal}_{K,p}))$ defined to be "$\varinjlim$"$[T]$ in which T ranges over all $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$-stable $\mathbb{Z}_p$-lattices in V and $[T] \underset{\mathrm{def}}{=}$ "$\varprojlim_n$"T/p^n. Take a sufficiently large $q \geqslant 0$ and consider the exact sequence

$$0 \longrightarrow [B^0_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}/B^q_{\mathrm{dR},\mathcal{K}/\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V] \longrightarrow [B^0_{\mathrm{dR}}/B^q_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V] \xrightarrow{d}$$
$$[\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B^{-1}_{\mathrm{dR}}/B^{q-1}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V] \xrightarrow{d} [\widehat{\Omega}^2_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B^{-2}_{\mathrm{dR}}/B^{q-2}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V] \xrightarrow{d} \dots$$

(10.1.1). By (10.4.1) and (10.4.2), this exact sequence induces

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}^{e+1}\big(\mathcal{K}, [B^0_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}/B^q_{\mathrm{dR},\mathcal{K}/\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]\big)\\
&\quad\cong \mathrm{Coker}\Big(\mathrm{H}^1\big(\mathcal{K}, [\widehat{\Omega}^{e-1}_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B^{1-e}_{\mathrm{dR}}/B^{q+1-e}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]\big)\\
&\qquad\qquad \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\mathcal{K}, [\widehat{\Omega}^{e}_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} B^{-e}_{\mathrm{dR}}/B^{q-e}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]\big)\Big)\\
&\quad\cong \mathrm{Coker}\left([\widehat{\Omega}^{e-1}_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} D^{1-e}_{\mathrm{dR}}(V)] \xrightarrow{\nabla} [\widehat{\Omega}^{e}_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} D^{-e}_{\mathrm{dR}}(V)]\right).
\end{aligned}$$

We define $\exp^*$ to be the composite

$$\mathrm{H}^{e+1}(\mathcal{K},[V]) \longrightarrow \mathrm{H}^{e+1}\big(\mathcal{K},[B^0_{\mathrm{dR},\overline{\mathcal{K}}/\mathbb{Q}_p}/B^q_{\mathrm{dR},\mathcal{K}/\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V]\big)$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\big([\widehat{\Omega}^{e-1}_{\mathcal{K}}\otimes_{\mathcal{K}} D^{1-e}_{\mathrm{dR}}(V)]\xrightarrow{\nabla}[\widehat{\Omega}^{e}_{\mathcal{K}}\otimes_{\mathcal{K}} D^{-e}_{\mathrm{dR}}(V)]\big).$$

10.6. Now we apply the above general theory to the following field $\mathcal{K}$ related to a modular curve.

Fix M, $N\geqslant 1$ such that $M+N\geqslant 5$, $(MN,p)=1$. Take a prime ideal $\mathfrak{p}$ of $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ lying over p, and let $\mathbb{Z}[\zeta_N]_{\mathfrak{p}}$ be the $\mathfrak{p}$-adic completion of $\mathbb{Z}[\zeta_N]$. Let

$$\mathcal{K}=(\varprojlim_n(\mathbb{Z}[\zeta_N]_{\mathfrak{p}}[[q^{1/M}]][q^{-1}])/p^n)\big[1/p\big].$$

This field $\mathcal{K}$ is a complete discrete valuation field of mixed characteristics with valuation ring

$$\mathrm{O}_{\mathcal{K}}=\varprojlim_n\big(\mathbb{Z}[\zeta_N]_{\mathfrak{p}}[[q^{1/M}]][q^{-1}]/p^n\big)$$

and with residue field

$$\mathfrak{K}=\mathbb{F}_p(\zeta_N)((q^{1/M}))$$

which satisfies $[\mathfrak{K}:\mathfrak{K}^p]=1$.

Fix an algebraic closure $\overline{\mathcal{K}}$ of $\mathcal{K}$ and fix an embedding

$$\bigcup_{m,n\geqslant 1}\mathbb{Z}[\zeta_m][[q^{1/n}]]\longrightarrow\overline{\mathcal{K}}$$

($\zeta_m=\exp(2\pi i/m)$, $q^{1/n}=\exp(2\pi i\tau/n)$ as before) over $\mathbb{Z}[\zeta_N][[q^{1/M}]]$.

10.7. Let $\mathfrak{E}$ be the elliptic curve over $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$ which is obtained from the Tate curve over $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$ of q-invariant q ([**DR**, VII.1]) via the embedding $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]\to\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$. Let $E=\mathfrak{E}\otimes_{\mathrm{O}_{\mathcal{K}}}\mathcal{K}$.

Define a p-divisible group G over $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$ by

$$G=\bigcup_n\mathrm{Ker}(p^n:\mathfrak{E}\longrightarrow\mathfrak{E}).$$

By the theory of Tate curves, the torsion part of $E(\overline{\mathcal{K}})$ is identified with the torsion part of $(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}})^\times/q^{\mathbb{Z}}$ as a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$-module, and we have an exact sequence of p-divisible groups over $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$

$$0\longrightarrow(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1)\longrightarrow G\longrightarrow\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\longrightarrow 0$$

whose $\overline{\mathcal{K}}$-valued points coincide with

$$0\longrightarrow(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1)\longrightarrow\bigcup_{n\geqslant 1}{}_{p^n}\big((\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}})^\times/q^{\mathbb{Z}}\big)\xrightarrow{v}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\longrightarrow 0$$

where v sends $q^{1/p^n}\bmod q^{\mathbb{Z}}$ to $1/p^n$. We have canonical isomorphisms

$$\mathrm{coLie}(E)\cong\mathcal{K}\otimes_{\mathrm{O}_{\mathcal{K}}}\mathrm{coLie}(G). \tag{10.7.1}$$

$$\mathrm{coLie}(G)\cong\mathrm{coLie}((\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1))\cong\mathrm{O}_{\mathcal{K}}, \tag{10.7.2}$$

where the first isomorphism in (10.7.2) is induced from the embedding $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1)\to G$.

10.8. We introduce finite extensions $\mathcal{K}_m$ of $\mathcal{K}$ and schemes Y_m over $\mathcal{K}$ ($m \geqslant 0$).

For $m \geqslant 0$, let

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}(q^{1/p^m}, \zeta_{p^m}) = \big(\varprojlim_n (\mathbb{Z}[\zeta_{Np^m}]_{\mathfrak{p}_m}[[q^{1/Mp^m}]][q^{-1}])/p^n\big)\big[1/p\big]$$

where $\mathfrak{p}_m$ is the unique prime ideal of $\mathbb{Z}[\zeta_{Np^m}]$ lying over $\mathfrak{p}$. We have a morphism

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{K}_m) \longrightarrow Y(Mp^m, Np^m) \tag{10.8.1}$$

corresponding to the triple $(E \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_m, q^{1/Mp^m} \bmod q, \zeta_{Np^m})$ over $\mathcal{K}_m$. For $k \in \mathbb{Z}$, this morphism induces

$$M_k(X(Mp^m, Np^m)) \longrightarrow \mathcal{K}_m \otimes_{\mathcal{K}} \mathrm{coLie}(E)^{\otimes k} = \mathcal{K}_m \tag{10.8.2}$$

where the last identification is by (10.7.1), (10.7.2). This map (10.8.2) coincides with the q-expansion ([**DR**]). That is, the q-expansion

$$M_k(X(Mp^m, Np^m)) \longrightarrow \mathbb{C}[[q^{1/Mp^m}]]$$

(4.9) has the image in $\mathbb{Z}[\zeta_{Np^m}][[q^{1/Mp^m}]] \otimes \mathbb{Q}$, and the induced map

$$M_k(X(Mp^m, Np^m)) \longrightarrow \mathcal{K}_m$$

coincides with (10.8.2).

Let

$$Y_m = Y(Mp^m, Np^m) \otimes_{Y(M,N)} \mathrm{Spec}(\mathcal{K}) \quad \text{for} \quad m \geqslant 0$$

where $\mathrm{Spec}(\mathcal{K}) \to Y(M,N)$ is the case $m = 0$ of (10.8.1). Then Y_m is a finite étale Galois covering of $\mathrm{Spec}(\mathcal{K})$ with Galois group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m)$. The morphism (10.8.1) induces an open immersion

$$i_m : \mathrm{Spec}(\mathcal{K}_m) \longrightarrow Y_m,$$

and the image of the open immersion

$$\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) \circ i_m : \mathrm{Spec}(\mathcal{K}_m) \longrightarrow Y_m \quad \text{for} \quad \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m)$$

depends only on the pair (u, w). If we denote the image by $U(u, w)$,

$$Y_m = \coprod_{(u,w) \in A_m} U(v, w)$$

where

$$A_m = \{(u, w) \in (\mathbb{Z}/p^m)^2 \,;\ \ u \ \text{ and } \ w \ \text{ generate } \ \mathbb{Z}/p^m\}.$$

10.9. We will consider the de Rham representations

$$V = \mathcal{H}^1_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

and $\mathrm{Sym}^{k-2} V$ of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ for $k \geqslant 2$, where $\mathcal{H}^1_p$ here denotes the pull back of the $\mathcal{H}^1_p$ on $Y(M,N)$ via $\mathrm{Spec}(\mathcal{K}) \to Y(M,N)$. (So, $\mathcal{H}^1_p \cong T_p(E)(-1) = T_p(G)(-1)$.) For $1 \leqslant i \leqslant k-1$, we have a homomorphism

$$\exp^* : \mathrm{H}^2\big(Y_m, [(\mathrm{Sym}^{k-2} V)(i)]\big) \longrightarrow [\mathcal{O}(Y_m)]. \tag{10.9.1}$$

induced from the dual exponential map for $\mathrm{Sym}^{k-2}(V)(i)$ in 10.5 and from the isomorphism

$$\begin{aligned}\mathrm{Coker}([\mathcal{O}(Y_m) \otimes_{\mathcal{K}} D^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sym}^{k-2} V)] \\ \longrightarrow [\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{O}(Y_m) \otimes_{\mathcal{K}} D^{i-1}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sym}^{k-2} V)]) \cong [\mathcal{O}(Y_m)]\end{aligned} \tag{10.9.2}$$

which is obtained as follows.

First we define a canonical element q_∞ of $B_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)^\times$ as follows. For $n \geqslant 1$, let $q_n = y^{p^n} \in B_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)^\times$ where $y \in B_n(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)$ is any lifting of the image of q^{1/p^n} in $\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/p^n$. Then q_n is independent of the choice of y. Let

$$q_\infty = (q_n)_{n \geqslant 1} \in B_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathbb{Z}_p)^\times.$$

Next we define a canonical element

$$\xi \in D^1_{\mathrm{dR}}(V)$$

as follows. Let ξ_1, ξ_2 be the basis of T_pG defined by

$$\xi_1 = (q^{1/p^n} \bmod q)_n, \quad \xi_2 = (\zeta_{p^n})_n.$$

By writing the group law of T_pG additively, let

$$\begin{aligned}\xi = t \otimes \xi_1 \otimes (\zeta_{p^n})_n^{\otimes(-1)} + \log(q/q_\infty) \otimes \xi_2 \otimes (\zeta_{p^n})_n^{\otimes(-1)} \\ \in \mathrm{H}^0(\mathcal{K}, J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_{\mathcal{K}}) \otimes_{\mathbb{Z}} T_pG \otimes \mathbb{Z}_p(-1))\end{aligned}$$

where t is the element of $J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_{\mathbb{Z}_p}) \subset J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_{\mathcal{K}})$ corresponding to the basis $(\zeta_{p^n})_n$ of $\mathbb{Z}_p(1)$ (10.1). Here, since the elements q and q_∞ of $B_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_{\mathcal{K}})^\times$ have the same image in $\widehat{\mathrm{O}}_{\overline{\mathcal{K}}}$, we can take $\log(q/q_\infty) \in J_\infty(\mathrm{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/\mathrm{O}_{\mathcal{K}})$.

Finally, for $k \geqslant 2$, let

$$\xi^{k-2} \in D^{k-2}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sym}^{k-2} V)$$

be the $(k-2)$-fold product of ξ. We define

$$\mathcal{O}(Y_m) \longrightarrow \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{O}(Y_m) \otimes_{\mathcal{K}} D^{i-1}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sym}^{k-2} V) \tag{10.9.3}$$

to be the $\mathcal{K}_m$-linear map which sends 1 to $\mathrm{dlog}(q) \otimes \xi^{k-2}$. Then it can be shown ([**KK3**, § 4.2]) that (10.9.3) induces an isomorphism (10.9.2).

For $m \geqslant 0$, $k \geqslant 2$, r, $r' \in \mathbb{Z}$ such that $1 \leqslant r' \leqslant k-1$, let

$$\mathrm{Ch}_m(k,r,r') : \varprojlim_n \mathrm{K}_2(Y_n) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_m, (\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r)\big)$$

be the composite homomorphism

$$\begin{aligned}\varprojlim_n \mathrm{K}_2(Y_n) &\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^2(Y_n, (\mathbb{Z}/p^n)(2)) \\ &\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_n, (\mathrm{Sym}^{k-2}(T_pE)/p^n)(2-r)\big) \\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_n, (\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r)\big) \\ &\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_m, (\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r)\big)\end{aligned}$$

where:

The first arrow is the Chern character map. The second arrow is the product with

$$e_{1,n}^{\otimes(r'-1)} \otimes e_{2,n}^{\otimes(k-r'-1)} \otimes (\zeta_{p^n})^{\otimes(-r)},$$

where $e_{1,n}$, $e_{2,n}$ is the canonical basis of $(T_pE)/p^n$ over Y_n (that is, the pull back of the canonical basis of T_pE/p^n over $Y(p^n)$), and the last arrow is the trace map associated to $Y_n \to Y_m$.

As is easily seen, the following diagram is commutative

(10.9.4)

$$\begin{array}{ccc}\varprojlim_n \mathrm{K}_2(Y(Mp^n, Np^n)) & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y(Mp^m, Np^n), (\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r)\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim \mathrm{K}_2(Y_n) & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_m, (\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r)\big)\end{array}$$

Here the upper horizontal arrow is the composite of the first four arrows in the definition of $\mathrm{Ch}_{Mp^m,Np^m}(k,r,r')$ in 8.4, and the lower horizontal arrow is $\mathrm{Ch}_m(k,r,r')$. Furthermore, as we will see in § 11, the following diagram is commutative if $1 \leqslant r' \leqslant k-1$.

(10.9.5)

$$\begin{array}{ccc}\varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y(Mp^m, Np^m), (\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r)\big) & \longrightarrow & M_k(X(Mp^m, Np^m)) \otimes \mathbb{Q}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_m, (\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)/p^n)(k-r)\big) & \longrightarrow & \mathcal{O}(Y_m)\end{array}$$

Here the upper horizontal arrow is induced from the dual exponential map

$$\exp^* : \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Q}_p, V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(Mp^m, Np^m))(k-r)\big) \longrightarrow M_k(X(Mp^m, Np^m)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

in (9.4.1), and the lower horizontal arrow is the dual exponential map (10.9.1).

As is explained in 10.11 below, Thm. 9.5 is reduced to

Proposition 10.10. — *Let the notation be as in* (8.1.1). *Assume* $1 \leqslant r \leqslant k-1$, *at least one of* r, r' *is* $k-1$, *and* $(MN,p)=1$. *Then*

$$\exp^* \circ \mathrm{Ch}_m(k,r,r')\big({}_{c,d}z_{Mp^n,Np^n})_{n\geqslant 1}\big) = {}_{c,d}z_{Mp^m,Np^m}(k,r,r')$$

for $m \geqslant 1$.

10.11. We show that Thm. 9.5 follows from Prop. 10.10 (assuming the commutativity of the diagram (10.9.5) which will be shown in § 11). In this 10.11, we do not assume $(MN, p) = 1$. By 4.3, 4.4 and 8.7, we may replace (M, N) by (M', N') for any M', $N' \geqslant 1$ such that $M \mid M'$, $N \mid N'$ prime(M') = prime(Mp), prime(N') = prime(Np). Hence we may assume the following: $M = M_0 p^m$, $N = N_0 p^m$ for some M_0, N_0, $m \geqslant 1$ such that $(M_0 N_0, p) = 1$ and $M_0 + N_0 \geqslant 5$. Hence by taking M_0 and N_0 as M and N in Prop. 10.10, Thm. 9.5 is reduced to Prop. 10.10 by the commutativity of the diagrams (10.9.4) and (10.9.5) and by the injectivity of

$$M_k(X(Mp^m, Np^m)) \otimes \mathbb{Q}_p \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}(Y_m)^{(\mathfrak{p})}$$

where $\mathfrak{p}$ ranges over all prime ideals of $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ lying over p and $\mathcal{O}(Y_m)^{(\mathfrak{p})}$ denotes $\mathcal{O}(Y_m)$ defined by using $\mathfrak{p}$ as in 10.6–10.8.

In the rest of this section, we prove Prop. 10.10 by using the following result which is a special case of the generalized explicit reciprocity law [**KK3**, Thm. 4.3.1].

Proposition 10.12. — *Let $\mathcal{O}(G) = \varprojlim_n \mathcal{O}({}_{p^n}G)$. Let $\theta_{1,n}$ and $\theta_{2,n}$ $(n \geqslant 1)$ be elements of $\mathcal{O}(G)^\times$, and assume*

$$N_p(\theta_{1,n+1}) = \theta_{1,n}, \quad N_p(\theta_{2,n+1}) = \theta_{2,n} \quad \text{for all} \quad n \geqslant 1$$

where N_p is the norm map $\mathcal{O}(G)^\times \to \mathcal{O}(G)^\times$ associated to the pull back homomorphism $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ by the multiplication by p on G. Let

$$u_n = \{\theta_{1,n}(e_{1,n}), \theta_{2,n}(e_{2,n})\} \in \mathrm{K}_2(Y_n) \quad \text{for} \quad n \geqslant 1$$

where $(e_{1,n}, e_{2,n})$ is the canonical basis of ${}_{p^n}G$ over Y_n. Then

$$(u_n)_{n \geqslant 1} \in \varprojlim_n \mathrm{K}_2(Y_n).$$

Furthermore, for $k \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, $m \geqslant 1$, the homomorphism

$$\exp^* \circ \mathrm{Ch}_m(k, k-1, j) : \ \varprojlim_n \mathrm{K}_2(Y_n) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_m)$$

sends $(u_n)_{n \geqslant 1}$ to

$$\frac{p^{-km}}{(k-2)!} \cdot \big(\big(\frac{\mathrm{d}}{\omega}\big)^{k-j} \log(\theta_{1,m})\big)(e_{1,m}) \cdot \big(\big(\frac{\mathrm{d}}{\omega}\big)^{j} \log(\theta_{2,m})\big)(e_{2,m})$$

where ω is the canonical $\mathrm{O}_{\mathcal{K}}$-basis of coLie(G) *$(\cong \mathrm{coLie}((\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1)))$.*

Here for $f \in \mathcal{O}(G)^\times$ and $i \geqslant 1$, $\big(\frac{\mathrm{d}}{\omega}\big)^i \log(f)$ means $\big(\frac{\mathrm{d}}{\omega}\big)^{i-1}(\mathrm{d}f/f\omega)$ with $\big(\frac{\mathrm{d}}{\omega}\big)^{i-1}$ the $(i-1)$-fold iteration of $\frac{\mathrm{d}}{\omega} \colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$, and $\big(\big(\frac{d}{\omega}\big)^i \log(f)\big)(e_{h,m}) \in \mathcal{O}(Y_m)$ means the value of $\big(\frac{d}{\omega}\big)^i \log(f)$ at $e_{h,m}$ for $h = 1, 2$.

10.13. In this 10.13, we prove Prop. 10.10 in the case $r = k-1$. In 10.14–10.17, we will prove Prop. 10.10 in the case $r' = k-1$. Assume $r = k-1$. In 10.12, take

$$\theta_{1,n}, \quad \theta_{2,n} \in \mathcal{O}(G)^{\times}$$

as follows. Let α_n (resp. β_n) be the unique M (resp. N)-torsion point of $E(\mathcal{K})$ such that $p^n\alpha_n$ (resp. $p^n\beta_n$) is equal to $q^{1/M} \bmod q^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\zeta_N \bmod q^{\mathbb{Z}}$). Let $\theta_{1,n}$ (resp. $\theta_{2,n}$) be the unique element of $\mathcal{O}(G)^{\times}$ whose image under the pull back $\mathcal{O}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(G)$ by the multiplication by M (resp. N) : $G \xrightarrow{\sim} G$ coincides with the pull back of ${}_c\theta_{\mathfrak{E}}$ (resp. ${}_d\theta_{\mathfrak{E}}$) by the addition $\mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$; $x \mapsto x + \alpha_n$ (resp. $x + \beta_n$). Then

$$N_p(\theta_{1,n+1}) = \theta_{1,n}, \quad N_p(\theta_{2,n+1}) = \theta_{2,n} \quad \text{for all} \quad n \geqslant 1$$

by the characterizing properties of ${}_c\theta_{\mathfrak{E}}$ and ${}_d\theta_{\mathfrak{E}}$ in 1.3 (1). Furthermore,

$$\theta_{1,n}(e_{1,n}) = {}_c g_{1/Mp^n,0}, \quad \theta_{2,n}(e_{2,n}) = {}_d g_{0,1/Np^n}.$$

Hence for $m \geqslant 1$, Prop. 10.12 shows that the image of $({}_{c,d}z_{Mp^n,Np^n})_{n\geqslant 1}$ under $\exp^* \circ \mathrm{Ch}_m(k, k-1, j)$ coincides with

$$\begin{aligned}\frac{p^{-km}}{(k-2)!} \cdot \big(\big(\frac{\mathrm{d}}{\omega}\big)^{k-j} \log(\theta_{1,m})\big)(\xi_{1,m}) \cdot \big(\big(\frac{\mathrm{d}}{\omega}\big)^{j} \log(\theta_{2,m})\big)(\xi_{2,m}) \otimes \omega^{\otimes k} \\ = \frac{p^{-km}}{(k-2)!} \cdot M^{j-k}\, {}_cE^{(k-j)}_{1/Mp^m,0} \cdot N^{-j}\, {}_dE^{(j)}_{0,1/Np^m} \\ = {}_{c,d}z_{Mp^m,Np^m}(k, k-1, j).\end{aligned}$$

10.14. We prove Prop. 10.10 in the case $r' = k-1$. We reduce 10.10 for the triple $(k, r, r') = (k, r, k-1)$ to 10.10 for the triple $(r+1, r, r)$.

Let (ξ_1, ξ_2) be the basis of T_pG as in 10.9. Then there exists a unique $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$-homomorphism

$$\mathrm{Sym}^{k-2}(T_pG) \longrightarrow \frac{1}{(k-2)!} \cdot \mathrm{Sym}^{r-1}(T_pG) \subset \mathbb{Q} \otimes \mathrm{Sym}^{r-1}(T_pG) \tag{10.14.1}$$

which sends ξ_1^{k-2} to ξ_1^{r-1}. This homomorphism is described as follows. Let $f(X, Y)$ be a homogeneous polynomial over $\mathbb{Z}_p$ of degree $k-2$, and let $g(X, Y) = \big(\frac{\partial}{\partial X}\big)^{k-r-1} f(X, Y)$. Then we define the image of $f(\xi_1, \xi_2)$ under (10.14.1) to be $((r-1)!/(k-2)!) \cdot g(\xi_1, \xi_2)$.

Since

$$\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathcal{H}^1_p)(k-r) = \{\mathrm{Sym}^{k-2}(T_pG)\}(2-r)$$

and

$$\mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1) = \{\mathrm{Sym}^{r-1}(T_pG)\}(2-r)$$

as smooth $\mathbb{Z}_p$-sheaves over $\mathrm{Spec}(K)$, the homomorphism (10.14.1) induces a homomorphism

$$\eta : \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathcal{H}^1_p)(k-r) \longrightarrow \frac{1}{(k-2)!} \cdot \mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1) \quad \text{over} \quad \mathrm{Spec}(\mathcal{K}).$$

We have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_m, \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathcal{H}^1_p)(k-r)/p^n\big) & \xrightarrow{\exp^*} & \mathcal{O}(Y_m) \\ \Big\downarrow \eta & & \Big\| \\ \varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_m, \big(\dfrac{1}{(k-2)!}\cdot \mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1)\big)/p^n\big) & \xrightarrow{\exp^*} & \mathcal{O}(Y_m) \end{array} \tag{10.14.2}$$

Let $\mathcal{O}(Y_m)^{\mathrm{int}}$ be the subring of $\mathcal{O}(Y_m)$ consisting of all elements whose restrictions to each point y of Y_m belong to the valuation ring of the field $\mathcal{O}(y)$. Since

$$\exp^* : \varprojlim_n \mathrm{H}^2(Y_m, \mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1)/p^n) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_m)$$

comes from the morphism

$$\mathrm{H}^2(Y_m, [\mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1)]) \longrightarrow [\mathcal{O}(Y_m)]$$

in $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p))$, where $[\mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1)]$ is the object "$\varprojlim_n$" $\mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1)/p^n$ of $\mathrm{pro}(\mathrm{Gal}_{K,p})$, the image of $\varprojlim_n \mathrm{H}^2\big(Y_m, ((1/(k-2)!)\cdot \mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1))/p^n\big)$ in $\mathcal{O}(Y_m)$ under $\exp^*$ is contained in $C\cdot\mathcal{O}(Y_m)^{\mathrm{int}}$ for some non-zero integer C.

For $n \geqslant 0$ and for $(u,w) \in A_n$ (10.8), the restriction of η to $U(u,w) \subset Y_n$ sends $e_{1,n}^{\otimes(k-2)}$ to $u^{k-r-1}e_{1,n}^{\otimes(r-1)}$. Hence for $n \geqslant m$, the projection of $\eta \circ \mathrm{Ch}_m(k,r,k-1)$ to $\mathrm{H}^2\big(Y_m, ((1/(k-2)!)\cdot \mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p)(1))/p^n\big)$ is induced from the composition of $\mathrm{Ch}_m(r+1,r,r)$ with

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^2\big(Y_n, (\mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p/p^n))(1)\big) &\xrightarrow{(\star)} \mathrm{H}^2\big(Y_n, (\mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p/p^n))(1)\big) \\ &\xrightarrow{\mathrm{trace}} \mathrm{H}^2\big(Y_m, (\mathrm{Sym}^{r-1}(\mathcal{H}^1_p/p^n))(1)\big) \end{aligned}$$

where $(\star)$ multiplies each $U(u,w)$-component by u^{k-r-1}. Hence by (10.14.2), for any $n \geqslant m$, $\exp^* \circ \mathrm{Ch}_m(k,r,k-1)$ coincides modulo $p^nC\cdot\mathcal{O}(Y_m)^{\mathrm{int}}$ with the composite of $\exp^* \circ \mathrm{Ch}_n(r+1,r,r)$ with

$$\mathcal{O}(Y_n) \xrightarrow{(\star)} \mathcal{O}(Y_n) \xrightarrow{\mathrm{trace}} \mathcal{O}(Y_m) \tag{10.14.3}$$

for any $n \geqslant m$, where $(\star)$ multiplies each $U(u,w)$-component by $\widetilde{u}^{k-r-1}$ with $\widetilde{u}$ a lifting of u to $\mathbb{Z}$. Hence for the proof of 10.10 for the triple $(k,r,r') = (k,r,k-1)$, since we have proved 10.10 for the triple $(r+1,r,r)$ in 10.13, it is sufficient to show

Lemma 10.15. — *There exists a non-zero integer C such that the image of*

$${}_{c,d}z_{Mp^n,Np^n}(r+1,r,r)$$

under the map (10.14.3) *is congruent to* ${}_{c,d}z_{Mp^m,Np^m}(k,r,k-1)$ *modulo* $p^nC^{-1}\cdot\mathcal{O}(Y_m)^{\mathrm{int}}$ *for any* $n \geqslant m$.

10.16. For $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m)$,

$$i_m^* \circ \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)^* \big(\text{the image of } {}_{c,d}z_{Mp^n,Np^n}(r+1,r,r) \text{ under (10.14.3)}\big)$$
$$= \sum (\widetilde{u}')^{k-r-1} \cdot i_n^* \circ \left(\begin{smallmatrix} u' & v' \\ w' & x' \end{smallmatrix}\right)^* ({}_{c,d}z_{Mp^n,Np^n}(r+1,r,r))$$

where $\left(\begin{smallmatrix} u' & v' \\ w' & x' \end{smallmatrix}\right)$ ranges over all elements of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n)$ whose images in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m)$ coincide with $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)$. Hence for the proof of Lemma 10.15, it is sufficient to show that there exists a non-zero integer C having the following property: For any $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m)$ and for any $n \geqslant m$,

$$i_m^* \circ \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)^* {}_{c,d}z_{Mp^m,\,Np^m}(k,r,k-1)$$
$$\equiv \sum (\widetilde{u}')^{k-r-1} \cdot i_n^* \circ \left(\begin{smallmatrix} u' & v' \\ w' & x' \end{smallmatrix}\right)^* ({}_{c,d}z_{Mp^n,Np^n}(r+1,r,r)) \bmod p^n \cdot C^{-1} \cdot \mathrm{O}_{\mathcal{K}_n}. \tag{10.16.1}$$

For each $n \geqslant 0$ and $a \in \mathbb{Z}/p^n$, fix a lifting $\widetilde{a}$ of a to $\mathbb{Z}$ such that $a \equiv 1 \bmod M$, and a lifting $\widehat{a}$ of a to $\mathbb{Z}$ such that $a \equiv 0 \bmod N$. For $n \geqslant m$, let

$$f_n = \sum_{(u',v')} (\widetilde{u}')^{k-r-1} \circ i_n^* \circ (Mp^n)^{-1} \cdot {}_cF^{(1)}_{\widetilde{u}'/Mp^n,\widehat{v}'/Np^n}$$

where (u',v') ranges over all elements of $(\mathbb{Z}/p^n)^2$ whose images in $(\mathbb{Z}/p^m)^2$ coincide with (u,v). Then by the distribution property 3.7 (2) of Eisenstein series, the right hand side of (10.16.1) is equal to

$$f_n \cdot (-1)^r \cdot (r-1)!^{-1} \cdot i_m^* \circ \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)^* E^{(r)}_{0,1/Np^m}.$$

Since the left hand side of (10.16.1) is

$$i_m^* \circ (Mp^m)^{k-r-2} \cdot {}_cF^{(k-r)}_{\widetilde{u}/Mp^m,\widehat{v}/Np^m} \cdot (-1)^r \cdot (r-1)!^{-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)^* E^{(r)}_{0,1/Np^m},$$

we are reduced to

Lemma 10.17. — *There exists a non-zero integer C such that*

$$i_m^* \circ (Mp^m)^{k-r-2} \cdot {}_cF^{(k-r)}_{\widetilde{u}/Mp^m,\widehat{v}/Np^m} \equiv f_n \bmod p^n C^{-1} \cdot \mathrm{O}_{\mathcal{K}_n}$$

for any $n \geqslant m$.

Proof. — In fact, we can take $C = p^m$. This congruence is a consequence of the theory of p-adic Eisenstein series in [**KN**].

It is sufficient to show that the q-expansions of both sides of 10.17 coincide mod p^{n-m}.

Let A (resp. B) be the "without c version" of the left (resp. right) hand side of 10.17. Write

$$A = \sum_{r \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}} a_r q^r, \quad B = \sum_{r \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}} b_r q^r.$$

It is sufficient to prove the following (1) and (2).

(1) $a_r \equiv b_r \bmod p^{n-m}$ for any $r \in \mathbb{Q}_{>0}$.

(2) The constant terms of the q-expansions of both sides of 10.17 coincide mod p^{n-m}.

We prove (1). By 3.10, $\sum_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} b_r r^{-s}$ is equal to

$$(Mp^n)^{-1}\sum_{u',v'}(\widetilde{u}')^{k-r-1}(\zeta(\widetilde{u}'/Mp^n,s)\zeta^*(\widehat{v}'/Np^n,s)-\zeta(-\widetilde{u}'/Mp^n,s)\zeta^*(-\widehat{v}'/Np^n,s)).$$

We have easily

$$\sum_{v'}\zeta^*(\widehat{v}'/Np^n,s)=p^{n-m-s}\zeta^*(\widehat{v}/Np^m,s)$$

and the formula with v' (resp. v) relaced by $-v'$ (resp. $-v$). Hence $\sum_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} b_r r^{-s}$ is equal to

$$(Mp^m)^{-1}\sum_{u'}(\widetilde{u}')^{k-r-1}(\zeta(\widetilde{u}'/Mp^m,s)\zeta^*(\widehat{v}/Np^n,s)-\zeta(-\widetilde{u}'/Mp^m,s)\zeta^*(-\widehat{v}/Np^n,s)).$$

On the other hand, by 3.10,

$$\sum_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} a_r r^{-s}$$
$$=(Mp^m)^{k-r-2}\big(\zeta(\widetilde{u}/Mp^m,s)\zeta^*(\widehat{v}/Np^m,s)-\zeta(-\widetilde{u}/Mp^m,s)\zeta^*(-\widehat{v}/Np^m,s)\big).$$

Hence we are reduced to the elementary fact that the coefficients of the Dirichlet series $\sum_{u'}(\widetilde{u}')^{k-r-1}\zeta(\widetilde{u}'/Mp^m,s)$ and $(Mp^m)^{k-r-1}\zeta(\widetilde{u}/Mp^m,s)$ coincide mod p^n and the same holds when u' (resp. u) is replaced by $-u'$ (resp. $-u$).

Next we prove (2). By 3.10, the constant term of the right hand side of 10.17 is equal to

$$(Mp^n)^{-1}\sum_{u',v'}(\widetilde{u}')^{k-r-1}\big(c^2\zeta(\widetilde{u}'/Mp^n,0)-c\,\zeta(c\widetilde{u}'/Mp^n,0)\big)$$
$$=(Mp^m)^{-1}\sum_{u'}(\widetilde{u}')^{k-r-1}\big(c^2\zeta(\widetilde{u}'/Mp^n,0)-c\,\zeta(c\widetilde{u}'/Mp^n,0)\big).$$

On the other hand, the constant term of the left hand side of 10.17 is

$$(Mp^m)^{-1}\big(c^2\zeta(\widetilde{u}/Mp^m,1-k+r)-c^{2-k+r}\zeta(c\widetilde{u}/Mp^m,1-k+r)\big).$$

That these are congruent mod p^{n-m} is a consequence of the theory of p-adic Riemann zeta function of Kubota-Leopoldt. □

11. Modular forms and B_{dR}

In this section, we review p-adic Hodge theory of modular forms, and prove the commutativity of the diagram (10.9.5) (the compatibility of the two dual exponential maps, one is $\exp^*$ for the Galois representations of the local field $\mathbb{Q}_p$ associated to modular forms, and the other is $\exp^*$ of the big local field $\mathcal{K}$ which is a "local field of the field of modular functions").

In p-adic Hodge theory, we follow the method of Tsuji in [**TT**] who uses the syntomic cohomology (the method started by Fontaine-Messing [**FM**]). (In p-adic Hodge theory, there is another method by Faltings who uses almost étale extensions [**Fa1**]–[**Fa4**].)

11.1. Following Scholl [**Sc1**], we identify various cohomology groups associated to modular forms with direct summands of cohomology groups of Kuga-Sato varieties. We review Kuga-Sato varieties.

Let $k \geqslant 2$, $N \geqslant 3$.

Let $E \to Y(N)$ be the universal elliptic curve, and let $E^{(k-2)}$ (= "the open Kuga-Sato variety" of weight k) be the $(k-2)$-fold fiber product of E over $Y(N)$.

Let $\widehat{E} \to X(N)$ be the universal generalized elliptic curve with level N structure [**DR**]. Let $\widehat{E}^{(k-2)} \to X(N)$ be the $(k-2)$-fold fiber product of $\widehat{E}$ over $X(N)$ and let $\mathrm{KS}_k = \mathrm{KS}_k(N)$ (the Kuga-Sato variety of weight k) be the canonical desingularization of $\widehat{E}^{(k-2)}$ constructed by Deligne in [**De1**, Lemma 5.4, Lemma 5.5].

Then $E^{(k-2)}$ is open in KS_k, and the complement of $E^{(k-2)}$ in KS_k, which coincides with the inverse image of the set of cusps of $X(N)$, is a divisor with normal crossings in KS_k.

11.2. We review the relation of Kuga-Sato varieties with modular forms.

Define a finite group G which acts on $E^{(k-2)}$ and a finite group $\widetilde{G}$ which acts on KS_k as follows.

Let $\mathfrak{S}_{k-2}$ be the symmetric group of degree $k-2$. Let G be the semi-direct product of the two groups $\mathfrak{S}_{k-2}$ and $\{\pm 1\}^{k-2}$ in which $\{\pm 1\}^{k-2}$ is normal and the action of $\mathfrak{S}_{k-2}$ on $\{\pm 1\}^{k-2}$ by inner automorphisms is given by the canonical action of $\mathfrak{S}_{k-2}$ on $\{\pm 1\}^{k-2}$ by permutations. Then G acts on $E^{(k-2)}$ as follows: $\{\pm 1\}$ acts on E by multiplication, and hence $\{\pm 1\}^{k-2}$ acts on $E^{(k-2)}$, and $\mathfrak{S}_{k-2}$ acts on $E^{(k-2)}$ by permuting the factors of the fiber product.

On the other hand, let $\widetilde{G}$ be the semi-direct product of G and $((\mathbb{Z}/N)^2)^{k-2}$ defined as follows. $((\mathbb{Z}/N)^2)^{k-2}$ is normal in $\widetilde{G}$, the action of $\{\pm 1\}^{k-2}$ on $((\mathbb{Z}/N)^2)^{k-2}$ by inner automorphisms is the one induced by the natural multiplicative action of $\{\pm 1\}$ on $(\mathbb{Z}/N)^2$, and the action of $\mathfrak{S}_{k-2}$ on $((\mathbb{Z}/N)^2)^{k-2}$ by inner automorphisms is by permutations. Then $\widetilde{G}$ acts on KS_k as follows: $\mathfrak{S}_{k-2}$ acts by permutation, the action of $\{\pm 1\}^{k-2}$ is induced by the action of $\{\pm 1\}$ on $\widehat{E}$ by multiplication, and the action of $((\mathbb{Z}/N)^2)^{k-2}$ is induced by the translation on $\widehat{E}$ by $(\mathbb{Z}/N)^2$ ($(\mathbb{Z}/N)^2$ is embedded in the smooth part of $\widehat{E}$ by the N-level structure of $\widehat{E}$).

Let $\varepsilon : G \to \{\pm 1\}$ be the homomorphism whose restriction to $\{\pm 1\}^{k-2}$ (resp. $\mathfrak{S}_{k-2}$) is the product map (resp. the sign function).

Let $\widetilde{\varepsilon} : \widetilde{G} \to \{\pm 1\}$ be the composition $\widetilde{G} \to G \xrightarrow{\varepsilon} \{\pm 1\}$. For a G-module (resp. $\widetilde{G}$-module) M, let

$$M(\varepsilon) \text{ (resp. } M(\widetilde{\varepsilon}) \text{)} = \{x \in M \,;\, \sigma x = \varepsilon(\sigma)x \text{ (resp. } \widetilde{\varepsilon}(\sigma)x \text{) for all } \sigma \in G\}.$$

Then we have the following (11.2.1)-(11.2.6). (11.2.1), (11.2.3), (11.2.5) are shown in Scholl [**Sc1**], and (11.2.2), (11.2.4), (11.2.6) are shown in the same way but more easily.

We have canonical isomorphisms of $\mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})]$-modules

$$V_{k,\mathbb{Q}}(X(N)) \tilde{\to} \mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{KS}_k(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(\widetilde{\varepsilon}), \tag{11.2.1}$$

$$V_{k,\mathbb{Q}}(Y(N)) \tilde{\to} \mathrm{H}^{k-1}(E^{(k-2)}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(\varepsilon), \tag{11.2.2}$$

which induce isomorphisms of $\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})]$-modules

$$V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N)) \tilde{\to} \mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{KS}_k \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(\widetilde{\varepsilon}), \tag{11.2.3}$$

$$V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N)) \tilde{\to} \mathrm{H}^{k-1}(E^{(k-2)} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(\varepsilon). \tag{11.2.4}$$

($\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on $V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N)) = V_k(X(N)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$, since it is identified with the étale cohomology group $\mathrm{H}^1(X(N) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, j_* \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ where j is the inclusion map $Y(N) \to X(N)$.)

Let $\Omega^{\bullet}_{\mathrm{KS}_k/\mathbb{Q}}(\log)$ be the de Rham complex on KS_k with log pole outside $E^{(k-2)}$, and denote for $m \geqslant 0$

$$\mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k) = \mathrm{H}^m(\mathrm{KS}_k, \Omega^{\bullet}_{\mathrm{KS}_k/\mathbb{Q}}(\log)),$$
$$\mathrm{fil}^i \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k) = \mathrm{H}^m(\mathrm{KS}_k, \Omega^{\geqslant i}_{\mathrm{KS}_k/\mathbb{Q}}(\log)).$$

Then (H^*_{dR} denotes the usual de Rham cohomology),

$$\mathrm{fil}^i \mathrm{H}^{k-1}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k)(\widetilde{\varepsilon}) = \begin{cases} \mathrm{H}^{k-1}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k)(\widetilde{\varepsilon}) & \text{if } i \leqslant 0, \\ S_k(X(N)) & \text{if } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ 0 & \text{if } i \geqslant k. \end{cases} \tag{11.2.5}$$

$$\mathrm{fil}^i \mathrm{H}^{k-1}_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k)(\widetilde{\varepsilon}) = \begin{cases} \mathrm{H}^{k-1}_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k)(\widetilde{\varepsilon}) & \text{if } i \leqslant 0, \\ M_k(X(N)) & \text{if } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ 0 & \text{if } i \geqslant k. \end{cases} \tag{11.2.6}$$

(The action of $\widetilde{G}$ on $\mathrm{H}^*_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k)$ factors through G. This follows from (11.3.2) below.)

11.3. By comparison theorems of Betti cohomology and de Rham cohomology over $\mathbb{C}$, we have for any m

$$\mathrm{H}^m(\mathrm{KS}_k(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{H}^m_{\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \tag{11.3.1}$$

$$\mathrm{H}^m(E^{(k-2)}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \tag{11.3.2}$$

The homomorphism

$$M_k(X(N)) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow V_k(Y(N)) \otimes \mathbb{C}$$

induced by (11.3.2) (we take $m = k-1$) via (11.2.2) and (11.2.6) coincides with the period map in 4.10.

By Tsuji [**TT**], for any m, $\mathrm{H}^m(\mathrm{KS}_k \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)$ is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ and we have a canonical isomorphism preserving filtrations

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^m(\mathrm{KS}_k \otimes \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)) \simeq \mathrm{H}^m_{\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k) \otimes \mathbb{Q}_p \tag{11.3.3}$$

which is the p-adic version of (11.3.1). Form $m = k-1$, this gives by (11.2.3) and (11.2.5)

$$\mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N))) = \begin{cases} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N))) & \text{if } i \leqslant 0, \\ S_k(X(N)) \otimes \mathbb{Q}_p & \text{if } 1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ 0 & \text{if } i \geqslant k. \end{cases} \tag{11.3.4}$$

By [**TT**], we have also a canonical homomorphism

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^m(E^{(k-2)} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)) \longrightarrow \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k) \otimes \mathbb{Q}_p \tag{11.3.5}$$

which is compatible with (11.3.3) and with filtrations, and which is the p-adic version of (11.3.2). See 11.4 for the constructions of the isomorphism (11.3.3) and the homomorphism (11.3.5). Unfortunately, [**TT**]does not contain results which show that (11.3.5) is an isomorphism. In (11.10), we will show that the homomorphism (11.3.5) for $m = k-1$ induces an isomorphism

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^{k-1}(E^{(k-2)} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p))(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{k-1}_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k)(\varepsilon) \otimes \mathbb{Q}_p \tag{11.3.6}$$

preserving filtrations. (Hence by comparing the dimensions by (11.3.2), we have that $V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N)) = \mathrm{H}^{k-1}(E^{(k-2)} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p))(\varepsilon)$ is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.) The isomorphism (11.3.6) gives by (11.2.4) and (11.2.6)

$$\mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))) = \begin{cases} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))) & \text{if } i \leqslant 0, \\ M_k(X(N)) \otimes \mathbb{Q}_p & \text{if } 1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ 0 & \text{if } i \geqslant k. \end{cases} \tag{11.3.7}$$

In [**Fa2**, Thm 8.1], Faltings has a result "D_{dR} of the p-adic étale cohomology of an open variety is the de Rham cohomology with log poles" which gives a canonical isomorphism between the two groups which appear in (11.3.5). He uses the method of almost étale extensions. But we formulate in this section everything in the method of syntomic cohomology by Fontaine-Messing-Tsuji (this is because the author is familiar with syntomic cohomology and not so much with almost étale extensions). We use the definition of the map (11.3.5) given by the method of syntomic cohomology, and prove the bijectivity of (11.3.6) in 11.10 by the method of syntomic cohomology, and avoid long arguments to check the relation between the method of Fontaine-Messing-Tsuji and that of Faltings.

11.4. We review the methods in [**TT**] and see how the isomorphism (11.3.3) and the homomorphism (11.3.5) are constructed as special cases of general results in [**TT**].

Let K be a complete discrete valuation field of mixed characteristic $(0, p)$ with perfect residue field, and let X be a proper semi-stable scheme over O_K (that is, X is

regular, the generic fiber X_K of X is smooth over K, and the special fiber of X is a divisor with normal crossings), and let U be a dense open subscheme of X_K such that $(X \smallsetminus U)_{\mathrm{red}}$ is a divisor of X with normal crossings. (In the application, X will be an integral model of a Kuga-Sato variety, and U will be a Kuga-Sato variety or an open Kuga-Sato variety.)

For integers m, r such that $0 \leqslant m \leqslant r$, we have a canonical isomorphism [**TT**, Thm. 0.5]

$$\mathrm{H}^m(X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}, \mathcal{S}^{\log}_{\mathbb{Q}_p}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^m(U \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)(r) \tag{11.4.1}$$

between the log syntomic cohomology of $X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}$ (the left hand side) and the p-adic étale cohomology of $U \otimes_K \overline{K}$ (the right hand side).

Here

$$\mathrm{H}^m(X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}, \mathcal{S}^{\log}_{\mathbb{Q}_p}(r)) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n \mathrm{H}^m(X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}, \widetilde{\mathcal{S}}_n(r)_{\overline{X}})$$

with $\widetilde{\mathcal{S}}_n(r)_{\overline{X}}$ the syntomic complex on $\overline{X} = X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n$ defined with respect to the canonical log structure of $X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n$ which is induced by the log structure of X associated to the divisor $(X \smallsetminus U)_{\mathrm{red}}$ and the canonical log structures of $\mathrm{Spec}(O_{\overline{K}})$ and $\mathrm{Spec}(O_K)$. On the other hand, for integers $m, r \geqslant 0$, we have a canonical homomorphism [**TT**, 4.8]

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}^m(X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}, \widetilde{\mathcal{S}}_n(r)_{\overline{X}}) \\ &\qquad \longrightarrow \mathrm{H}^m\left(\left((X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n)/(O_K/p^n)\right)_{\log-\mathrm{crys}}, J^{[r]}_{\mathrm{crys}}\right) \end{aligned} \tag{11.4.2}$$

where log-crys means the log crystalline site with respect to above log structure of $X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n$ and the canonical log structure of the base $\mathrm{Spec}(O_K/p^n)$, and $J^{[r]}_{\mathrm{crys}}$ denotes the r-th divided power of the ideal $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{\mathrm{crys}} \to \mathcal{O}_X)$ of the structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathrm{crys}}$ of the log crystalline site. We have a canonical isomorphism [**TT**, 4.7.6]

$$\begin{aligned} &\varprojlim_s \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n \mathrm{H}^m\left(\left((X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n)/(O_K/p^n)\right)_{\log-\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{\mathrm{crys}}/J^{[s]}_{\mathrm{crys}}\right) \\ &\qquad \simeq \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K) \qquad (\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR},\overline{K}/K} = \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR},\overline{K}/\mathbb{Q}_p}). \end{aligned} \tag{11.4.3}$$

By (11.4.1), (11.4.2), (11.4.3), we have a canonical homomorphism

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}^m(U \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{H}^m(X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}, \mathcal{S}^{\log}_{\mathbb{Q}_p}(r))(-r) \\ &\qquad \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K) \qquad (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{K}/K} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{K}/\mathbb{Q}_p}). \end{aligned} \tag{11.4.4}$$

for $r \geqslant m$, and this map is independent of the choice of $r \geqslant m$ and commutes with the action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. By taking the $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-invariant part of the induced map

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^m(U \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K), \tag{11.4.5}$$

we have a canonical homomorphism

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^m(U \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)) \longrightarrow \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K) \tag{11.4.6}$$

Tsuji proves in [**TT**] that in the case of $U = X_K$, the maps (11.4.5) and (11.4.6) are bijective and induce isomorphisms of filtrations.

The isomorphism (11.3.3) and the homomorphisms (11.3.5) are obtained from the above general theory as follows (we follow [**Sa1**]). Take a multiple N' of N such that the genus of $X(N')$ as a curve over $\mathbb{Q}(\zeta_{N'})$ is $\geqslant 2$. Let $\mathfrak{X}(N')$ be the fine moduli space over $\mathbb{Z}$ of generalized elliptic curves with N'-level structures [**KM**]. Then $\mathfrak{X}(N')$ is a proper flat curve over $\mathbb{Z}$ such that $\mathfrak{X}(N') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = X(N')$. Take a finite extension K of $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ which is Galois over $\mathbb{Q}_p$ such that $X(N') \otimes_{\mathbb{Q}} K$ has semi-stable reduction. Let $\mathfrak{C}$ be the minimal semi-stable model of $X(N') \otimes_{\mathbb{Q}} K$ over O_K. By the assumption on the genus, $\mathfrak{C}$ is the minimal desingularization of the normalization of $\mathfrak{X}(N')$ in $X(N') \otimes_{\mathbb{Q}} K$. Let $\widehat{\mathfrak{E}} \to \mathfrak{C}$ be the base change of the universal generalized elliptic curve over $\mathfrak{X}(N)$, let X be the canonical desingularization by Deligne of the $k-2$ fold product of $\widehat{\mathfrak{E}}$ over $\mathfrak{C}$ (see [**Sa1**, p. 610]). Let $U = X_K$ (resp. $U = E^{(k-2)} \times_{Y(N)} Y(N') \otimes_{\mathbb{Q}} K$). Then, X is proper semi-stable over O_K, and $(X \smallsetminus U)_{\mathrm{red}}$ is a divisor of X with normal crossings. By applying the above general theory to (X, U), and then taking the $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Aut}(X(N')/X(N))$-invariant part of (11.4.6), we obtain the isomorphism (11.3.3) (resp. the homomorphism (11.3.5)).

11.5. The theory of Tsuji can be generalized to the case the residue field k of K is not necessarily perfect as follows, without essential changes.

Let K, X and U be as in 11.4 except that we do not assume here that the residue field k of K is perfect, but we assume $[k : k^p] < \infty$.

For integers m, r such that $0 \leqslant m \leqslant r$, we have a canonical isomorphism

$$\mathrm{H}^m(X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}, \mathcal{S}^{\log}_{\mathbb{Q}_p}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^m(U \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)(r). \tag{11.5.1}$$

In fact, the canonical map from the left hand side to the right hand side is defined in the same way as in [**TT**], and the bijectivity of it is reduced to the perfect residue field case, for we have an intermediate field K' such that $K \subset K' \subset \overline{K}$ which is a henselian discrete valuation field with perfect residue field. (In fact take a lifting $(b_i)_i$ of a p-base of the residue field of K to O_K, and choose a p^n-th root $b_{i,n}$ of b_i in $\overline{K}$ for each i and $n \geqslant 0$ satisfying $b_{i,n+1}^p = b_{i,n}$ for all i and $n \geqslant 0$. Then $K' = K(b_{i,n}; \forall i, \forall n \geqslant 0)$ is such a field. The completion of a henselian discrete valuation field K' does not change the log syntomic cohomology and the p-adic cohomology for X, U over $O_{K'}$ as above.)

Remark. — The log crystalline site which is used here for the definition of $\widetilde{\mathcal{S}}_n(r)_{\overline{X}}$ is $((X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n)/(\mathbb{Z}/p^n))_{\log-\mathrm{crys}}$ with respect to the canonical log structure of $X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n$ and the trivial log structure on the base $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^n)$. In the perfect residue field case, Tsuji uses instead the log crystalline site $((X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n)/W_n)_{\log-\mathrm{crys}}$ where W_n is the Witt ring of the residue field of K with length n, with respect to the canonical log structure of $X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n$ and

the trivial log structure on the base $\mathrm{Spec}(W_n)$, but these two log crystalline sites give the same $\widetilde{\mathcal{S}}_n(r)_{\overline{X}}$.

We have canonical homomorphisms

$$\begin{aligned}(11.5.2)\quad \mathrm{H}^m(X\otimes_{O_K} O_{\overline{K}}, \widetilde{\mathcal{S}}_n(r)_{\overline{X}}) &\longrightarrow \mathrm{H}^m\big((X\otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n)/(\mathbb{Z}/p^n))_{\log-\mathrm{crys}}, J^{[r]}_{\mathrm{crys}}\big)\\ &\longrightarrow \mathrm{H}^m\big((X\otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n)/(O_K/p^n))_{\log-\mathrm{crys}}, J^{[r]}_{\mathrm{crys}}\big)\end{aligned}$$

for integers $m, r \geqslant 0$, and an isomorphism

$$\begin{aligned}(11.5.3)\quad \varprojlim_s \mathbb{Q}\otimes \varprojlim_n \mathrm{H}^m\Big(\big((X\otimes_{O_K} O_{\overline{K}}/p^n)/(O_K/p^n)\big)_{\log-\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{\mathrm{crys}}/J^{[s]}_{\mathrm{crys}}\Big)\\ \simeq \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_K \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K)\qquad (\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR},\overline{K}/K}).\end{aligned}$$

which are obtained in the same way as in the perfect residue fields case.

By (11.5.1), (11.5.2), (11.5.3), we have a canonical homomorphism

$$\begin{aligned}(11.5.4)\quad \mathrm{H}^m(U\otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{H}^m(X\otimes_{O_K} O_{\overline{K}}, \mathcal{S}^{\log}_{\mathbb{Q}_p}(r))(-r)\\ \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K)\qquad (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{K}/K})\end{aligned}$$

for $r \geqslant m$, and this map is independent of the choice of r and commutes with the action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. By taking the $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-invariant part of the induced map

$$(11.5.5)\qquad \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^m(U\otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K),$$

we have a canonical homomorphism

$$(11.5.6)\qquad \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^m(U\otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)) \longrightarrow \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K).$$

Via (11.5.6), the connection

$$\nabla : \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^m(U\otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)) \longrightarrow \widehat{\Omega}^1_K\otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^m(U\otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p))$$

in 10.2 commutes with the Gauss-Manin connection

$$\mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K) \longrightarrow \widehat{\Omega}^1_K\otimes_K \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K).$$

This is because the image of $\mathrm{H}^m(U\otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)$ in $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K)$ is contained in the kernel of $\nabla\otimes 1 + 1\otimes\nabla$ as is seen from the factorization (11.5.2).

By the same method as in [**TT**], we can prove that in the case $U = X_K$, the maps (11.5.5) and (11.5.6) are bijective and induce isomorphisms of filtrations. (We will use this fact only in the case X is a product of finite copies of an elliptic curve of good reduction over $O_{\overline{K}}$.)

11.6. We consider an interaction of 11.4 (the perfect residue field case) and the case $[k : k^p] = p$ in 11.5, which will be used for the proof of the commutativity of the diagram (10.9.5).

Let K, X, U be as in 11.4. We assume here that the residue field of K is algebraically closed. Let C be a proper normal curve over O_K, let $X \to C$ be a morphism over O_K, and let ν be a generic point of the special fiber of C. Then the local ring $\mathcal{O}_{C,\nu}$ is a discrete valuation ring whose residue field $\mathfrak{K}$ satisfies $[\mathfrak{K} : \mathfrak{K}^p] = p$. Let $\mathscr{K}$ be the field of fractions of the completion of $\mathcal{O}_{C,\nu}$. Assume that K is algebraically closed in $\mathscr{K}$, $X \otimes_C O_{\mathcal{K}}$ is smooth over $O_{\mathcal{K}}$, and that

$$X \otimes_C O_{\mathscr{K}} = U \otimes_C O_{\mathscr{K}}.$$

(In our application in 11.8, X will be an integral model of a Kuga-Sato variety, U will be an open Kuga-Sato variety, and C will be an integral model of a modular curve. In that case, $X \otimes_C O_{\mathscr{K}} = U \otimes_C O_{\mathscr{K}}$ and this scheme is the $(k-2)$-fold product over $O_{\mathscr{K}}$ of an elliptic curve over $O_{\mathscr{K}}$ of good reduction.)

For $m \geqslant 0$, let

$$\mathrm{H}^m_e = \mathrm{H}^m(U \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p), \qquad \mathrm{H}^m_d = \mathrm{H}^m_{\log-\mathrm{dR}}(X_K/K),$$
$$\mathrm{H}^m_E = \mathrm{H}^m(U \otimes_C \overline{\mathscr{K}}, \mathbb{Q}_p), \qquad \mathrm{H}^m_{D/\mathscr{K}} = \mathrm{H}^m_{\mathrm{dR}}(X \otimes_C \mathscr{K}/\mathscr{K}).$$

By 11.5, H^m_E is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathscr{K}}/\mathscr{K})$, and $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^m_E) = \mathrm{H}^m_{D/\mathscr{K}}$.

Fix an integer $\ell \geqslant 0$. Assume we are given a de Rham representation $\mathrm{H}^\ell_{e'}$ of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ contained in $\mathrm{Ker}(\mathrm{H}^\ell_e \to \mathrm{H}^\ell_E)$. Let $\mathrm{H}^\ell_{d'} = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^\ell_{e'})$. (In our application in 11.8, we will take $\ell = k-1, \mathrm{H}^{k-1}_{e'} = \mathrm{H}^{k-1}_e(\varepsilon), \mathrm{H}^{k-1}_{d'} = \mathrm{H}^{k-1}_d(\varepsilon)$, where (ε) is as in 11.2.)

In the following, we express by $[\ ]$ an object of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Ab}_p))$ or of $\mathrm{ind}(\mathrm{pro}(\mathrm{Gal}_{\mathscr{K},p}))$ as in 10.4. In Prop 11.7 below, we will compare the two dual exponential maps :

$$\exp^* : \mathrm{H}^1(K, [\mathrm{H}^\ell_{e'}(r)]) \longrightarrow [\mathrm{fil}^r \mathrm{H}^\ell_{d'}],$$
$$\exp^* : \mathrm{H}^2(\mathscr{K}, [\mathrm{H}^{\ell-1}_E(r)]) \longrightarrow [\widehat{\Omega}^1_{\mathscr{K}} \otimes_{\mathscr{K}} \mathrm{fil}^{r-1}\mathrm{H}^{\ell-1}_{D/\mathscr{K}}]/\nabla[\mathrm{fil}^r \mathrm{H}^{\ell-1}_{D/\mathscr{K}}]$$

for $r \in \mathbb{Z}$.

Proposition 11.7. — *For any $r \in \mathbb{Z}$, the following diagram is commutative.*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^1(K, [\mathrm{H}^\ell_{e'}(r)]) & \xrightarrow{\exp^*} & [\mathrm{fil}^r \mathrm{H}^\ell_{d'}] \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \mathrm{H}^2(\mathscr{K}, [\mathrm{H}^{\ell-1}_E(r)]) & \xrightarrow{\exp^*} & [\widehat{\Omega}^1_{\mathscr{K}} \otimes_{\mathscr{K}} \mathrm{fil}^{r-1}\mathrm{H}^{\ell-1}_{D/\mathscr{K}}]/\nabla[\mathrm{fil}^r \mathrm{H}^{\ell-1}_{D/\mathscr{K}}] \end{array}$$

Here the maps α and β are defined as follows.

First we define α. Since $\mathscr{K}$ is the completion of a henselian discrete valuation field which is of transcendence degree 1 over K, the composite field $\overline{K}\mathscr{K}$ in $\overline{\mathscr{K}}$ is of

cohomological dimension 1 [**Se1**, Chap. II,§ 3.3]. Hence we have an exact sequence

$$0 \longrightarrow [\mathrm{H}^1(\overline{K}\mathscr{K}, \mathrm{H}_E^{\ell-1})] \longrightarrow [\mathrm{H}^\ell(U \otimes_K \overline{K}\mathscr{K}, \mathbb{Q}_p)] \longrightarrow [\mathrm{H}_E^\ell].$$

Since the image of $\mathrm{H}_{e'}^\ell$ in H_E^ℓ is zero by our assumption, we have a map $[\mathrm{H}_{e'}^\ell] \to [\mathrm{H}^1(\overline{K}\mathscr{K}, \mathrm{H}_E^{\ell-1})]$, and hence a map

$$\mathrm{H}^1(K, [\mathrm{H}_{e'}^\ell]) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, \mathrm{H}^1(\overline{K}\mathscr{K}, [\mathrm{H}_E^{\ell-1}(r)])).$$

Since the residue field of K is algebraically closed, the cohomological dimension of K is 1 [**Se1**, Chap. II, § 3.3] as well as that of $\overline{K}\mathscr{K}$, and hence we have for any m

$$\mathrm{H}^1(K, \mathrm{H}^1(\overline{K}\mathscr{K}, [\mathrm{H}_E^{m-1}(r)])) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\mathscr{K}, [\mathrm{H}_E^{m-1}(r)]).$$

Hence we have the map α.

The map β is defined as follows. For any m, let

$$\mathrm{H}_{D/K}^m = K \otimes_{O_K} \varprojlim_n \mathrm{H}^m(X \otimes_C O_\mathscr{K}, \Omega^\bullet_{(X\otimes_C O_\mathscr{K})/O_K}(\log)/p^n),$$
$$\mathrm{fil}^r \mathrm{H}_{D/K}^m = K \otimes_{O_K} \varprojlim_n \mathrm{H}^m(X \otimes_C O_\mathscr{K}, \Omega^{\geqslant r}_{(X\otimes_C O_\mathscr{K})/O_K}(\log)/p^n),$$

(note that the base of the differential here is O_K and not $O_\mathscr{K}$). Then we have long exact sequences

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}_{D/K}^m \longrightarrow \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^m \xrightarrow{\nabla} \widehat{\Omega}^1_\mathscr{K} \otimes_\mathscr{K} \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^m \longrightarrow \mathrm{H}_{D/K}^{m+1} \longrightarrow \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^{m+1} \xrightarrow{\nabla} \widehat{\Omega}^1_\mathscr{K} \otimes_\mathscr{K} \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^{m+1} \longrightarrow \ldots$$

and

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{fil}^r \mathrm{H}_{D/K}^{m-1} \longrightarrow \mathrm{fil}^r \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^{m-1} \xrightarrow{\nabla} \widehat{\Omega}^1_\mathscr{K} \otimes_\mathscr{K} \mathrm{fil}^{r-1} \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^{m-1} \longrightarrow \mathrm{fil}^r \mathrm{H}_{D/K}^m \longrightarrow \mathrm{fil}^r \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^m \xrightarrow{\nabla} \widehat{\Omega}^1_\mathscr{K} \otimes_\mathscr{K} \mathrm{fil}^{r-1} \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^m \longrightarrow \ldots$$

Since the composition $\mathrm{H}_{d'}^\ell \to \mathrm{H}_d^\ell \to \mathrm{H}_{D/K}^\ell \to \mathrm{H}_{D/\mathscr{K}}^\ell$ is zero (for it is the D_{dR} of the zero map $\mathrm{H}_{e'}^\ell \to \mathrm{H}_E^\ell$), the last long exact sequence gives the map β.

11.8. Let $K, X, U = (E^{(k-2)} \times_{Y(N)} Y(N')) \otimes_\mathbb{Q} K$ be as at the end of 11.4, and let C be the scheme $\mathfrak{C}$ at the end of 11.4. Let $\ell = k-1$, $\mathrm{H}_{e'}^\ell = \mathrm{H}^\ell(U \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)(\varepsilon) \simeq V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N'))$. Then Prop. 11.7 in this case proves the commutativity of the diagram (10.9.5).

11.9. We prove Prop. 11.7.

For an integer $s \geqslant r$ and for $m \geqslant 0$, let

$$
\begin{aligned}
{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m}_{d} &= \mathrm{fil}^{r}\mathrm{H}^{m}_{d}/\mathrm{fil}^{s}\mathrm{H}^{m}_{d},\\
{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell}_{d'} &= \mathrm{fil}^{r}\mathrm{H}^{\ell}_{d'}/\mathrm{fil}^{s}\mathrm{H}^{\ell}_{d'},\\
{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m}_{b} &= \mathrm{fil}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{K}/K}\otimes_{K}\mathrm{H}^{m}_{d})/\mathrm{fil}^{s}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{K}/K}\otimes_{K}\mathrm{H}^{m}_{d})\\
&= \varinjlim_{j}\mathbb{Q}\otimes\varprojlim_{n}\mathrm{H}^{m}\Big(\big((X\otimes_{O_K}O_{\overline{K}}/p^{n})/(O_K/p^{n})\big)_{\log-\mathrm{crys}},J^{[r+j]}_{\mathrm{crys}}/J^{[s+j]}_{\mathrm{crys}}\Big)(-j),\\
{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell}_{b'} &= \mathrm{B}^{r}_{\mathrm{dR},\overline{K}/K}/\mathrm{B}^{s}_{\mathrm{dR},\overline{K}/K}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{H}^{\ell}_{e'},\\
&= \mathrm{fil}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{K}/K}\otimes_{K}\mathrm{H}^{\ell}_{d'})/\mathrm{fil}^{s}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{K}/K}\otimes_{K}\mathrm{H}^{\ell}_{d'}),\\
{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m}_{D/K} &= \mathrm{fil}^{r}\mathrm{H}^{m}_{D/K}/\mathrm{fil}^{s}\mathrm{H}^{m}_{D/K},\\
{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m}_{D/\mathscr{K}} &= \mathrm{fil}^{r}\mathrm{H}^{m}_{D/\mathscr{K}}/\mathrm{fil}^{s}\mathrm{H}^{m}_{D/\mathscr{K}},\\
{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m}_{B/K} &= \varinjlim_{j}\mathbb{Q}\otimes\varprojlim_{n}\mathrm{H}^{m}\Big(\big((X\otimes_{C}O_{\overline{\mathscr{K}}}/p^{n})/(O_K/p^{n})\big)_{\log-\mathrm{crys}},J^{[r+j]}_{\mathrm{crys}}/J^{[s+j]}_{\mathrm{crys}}\Big)(-j),\\
{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m}_{B/\mathscr{K}} &= \mathrm{B}^{r}_{\mathrm{dR},\overline{\mathscr{K}}/\mathscr{K}}/\mathrm{B}^{s}_{\mathrm{dR},\overline{\mathscr{K}}/\mathscr{K}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{H}^{m}_{E},\\
&= \mathrm{fil}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{\mathscr{K}}/\mathscr{K}}\otimes_{\mathscr{K}}\mathrm{H}^{m}_{D/\mathscr{K}})/\mathrm{fil}^{s}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR},\overline{\mathscr{K}}/\mathscr{K}}\otimes_{\mathscr{K}}\mathrm{H}^{m}_{D/\mathscr{K}}),\\
&= \varinjlim_{j}\mathbb{Q}\otimes\varprojlim_{n}\mathrm{H}^{m}\Big(\big((X\otimes_{C}O_{\overline{\mathscr{K}}}/p^{n})/(O_{\mathscr{K}}/p^{n})\big)_{\log-\mathrm{crys}},J^{[r+j]}_{\mathrm{crys}}/J^{[s+j]}_{\mathrm{crys}}\Big)(-j).
\end{aligned}
$$

For $s \gg 0$, the upper (resp. lower) $\exp^{*}$ in 11.7 is the composition of the upper (resp. lower) rows of the following diagram.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}^{1}(K,[\mathrm{H}^{\ell}_{e'}(r)]) & & \longrightarrow & & \mathrm{H}^{1}(K,[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell}_{b'}]) & \xleftarrow{\sim} & [{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell}_{d'}]\\
\alpha\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow\beta\\
\mathrm{H}^{2}(\mathscr{K},[\mathrm{H}^{\ell-1}_{E}(r)]) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{2}(\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/K}]) & \xleftarrow[\delta]{\sim} & P & \xleftarrow{\sim} & Q
\end{array}
\tag{11.9.1}
$$

Here

$$
\begin{aligned}
P &= \mathrm{H}^{1}(K,[\widehat{\Omega}^{1}_{\mathscr{K}}\otimes_{\mathscr{K}}{}^{r-1}_{s-1}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/\mathscr{K}}])/\nabla(\mathrm{H}^{1}(\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/\mathscr{K}}])),\\
Q &= [\widehat{\Omega}^{1}_{\mathscr{K}}\otimes_{\mathscr{K}}{}^{r-1}_{s-1}\mathrm{H}^{\ell-1}_{D/\mathscr{K}}]/\nabla([{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell-1}_{D/\mathscr{K}}]),
\end{aligned}
$$

the map δ is the connecting map of the exact sequence

$$
0\longrightarrow[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/K}]\longrightarrow[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/\mathscr{K}}]\xrightarrow{\nabla}[\widehat{\Omega}^{1}_{\mathscr{K}}\otimes_{\mathscr{K}}{}^{r-1}_{s-1}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/\mathscr{K}}]\longrightarrow 0,
\tag{11.9.2}
$$

the middle vertical arrow is induced by β, and the two horizontal isomorphisms on the extreme right are cup products with $\log(\chi_{\mathrm{cyclo}})$. For the proof of Prop. 11.7, it is sufficient to prove the commutativity of the two squares in (11.9.1). The commutativity of the right square is clear. The left square is divided into three squares as in

the following diagram.

(11.9.3)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^1(K,[\mathrm{H}^{\ell}_{e'}(r)]) & & \longrightarrow & & \mathrm{H}^1(K,[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell}_{b'}]) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1\Big(K,\mathrm{H}^1\big(\overline{K}\mathscr{K},[\mathrm{H}^{\ell-1}_{E}(r)]\big)\Big) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1\Big(K,\mathrm{H}^1\big(\overline{K}\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/K}]\big)\Big) & \xleftarrow{\delta} & \mathrm{H}^1(K,R) \\
\| & & \| & & \downarrow \\
\mathrm{H}^2(\mathscr{K},[\mathrm{H}^{\ell-1}_{E}(r)]) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/K}]) & \xleftarrow{\delta} & P
\end{array}$$

Here P and the lower δ are as above,

$$R = \mathrm{H}^0\big(\overline{K}\mathscr{K},[\widehat{\Omega}^1_{\mathscr{K}} \otimes_{\mathscr{K}} {}^{r-1}_{s-1}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/\mathscr{K}}]\big)/\nabla\big(\mathrm{H}^0(\overline{K}\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/\mathscr{K}}])\big),$$

the upper δ is induced by the connecting map of (11.9.2), and the lower vertical arrow on the right hand side is defined as

$$\mathrm{H}^1(K,R) = \mathrm{H}^1\big(K,\mathrm{H}^0(\overline{K}\mathscr{K},[\widehat{\Omega}^1_{\mathscr{K}}\otimes_{\mathscr{K}} {}^{r-1}_{s-1}\mathrm{H}^{\ell-1}_{B/\mathcal{K}}])\big)/\nabla\mathrm{H}^1\big(K,\mathrm{H}^0(\overline{K}\mathcal{K},[{}^{r}_{s}H^{\ell-1}_{B/\mathcal{K}}])\big) \longrightarrow P.$$

The commutativities of the lower two squares in (11.9.3) are clear. It remains to prove the commutativity of the upper square of (11.9.3). This square is $\mathrm{H}^1(K,\ )$ of the following square

(11.9.4)

$$\begin{array}{ccc}
[\mathrm{H}^{m}_{e'}(r)] & \longrightarrow & [{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m}_{b'}] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1\big(\overline{K}\mathscr{K},[\mathrm{H}^{m-1}_{E}(r)]\big) & \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\overline{K}\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m-1}_{B/K}]\big) \xleftarrow{\delta} & R
\end{array}$$

Let $f, g : [\mathrm{H}^m_{e'}(r)] \to \mathrm{H}^1\big(\overline{K}\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m-1}_{B/K}]\big)$ be the two morphisms defined by (11.9.4); f is the composition of the left vertical arrow and the lower horizontal arrow on the left hand side, and g is th composition of the other arrows. Let

$$h : \mathrm{H}^1\big(\overline{K}\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{H}^{m-1}_{B/K}]\big) \longrightarrow \mathrm{H}^m\big(\overline{K}\mathscr{K},[{}^{r}_{s}\mathrm{R}\Gamma_{B/K}]\big)$$

be the canonical injection, where

(11.9.5) $[{}^{r}_{s}\mathrm{R}\Gamma_{B/K}]$

$$= \text{“}\mathbb{Q}\otimes\text{”}\ \text{“}\varinjlim_{j}\text{”}\ \text{“}\varprojlim_{n}\text{”}\ \mathrm{R}\Gamma\Big(\big((X\otimes_C O_{\overline{\mathscr{K}}}/p^n)/(O_K/p^n)\big)_{\log-\mathrm{crys}}, J^{[r+j]}_{\mathrm{crys}}/J^{[s+j]}_{\mathrm{crys}}\Big)(-j),$$

("$\mathbb{Q}\otimes$" means "$\varinjlim_M$" $M^{-1}\mathbb{Z}\otimes\cdot$) The composite $h\circ f$ $(h\circ g)$ coincides with $d\circ b\circ i$ $(=c\circ a\circ i)$ of the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc}
[\mathrm{H}^\ell_{e'}(r)] & \xrightarrow{\ i\ } & [\mathrm{H}^\ell_e(r)] & \xrightarrow{\qquad a\qquad} & [{}^r_s\mathrm{H}^\ell_b] \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle b} & & \Big\downarrow{\scriptstyle c} \\
 & & [\mathrm{H}^\ell(\overline{K}\mathscr{K},\mathrm{R}\Gamma_E)] & \xrightarrow{\ d\ } & [\mathrm{H}^\ell(\overline{K}\mathscr{K},\mathrm{R}\Gamma_{B/K})]
\end{array}$$

where $\mathrm{R}\Gamma_E =$ "$\mathbb{Q}\otimes$" "$\varprojlim_n$"$\mathrm{R}\Gamma(U\otimes_C\mathscr{K},\mathbb{Z}/p^n)$. Hence $h\circ f=h\circ g$ and we have $f=g$ by the injectivity of h.

11.10. We give the proof of the bijectivity of (11.3.6). Let

$$D_k(X(N))=\mathrm{H}^{k-1}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k)(\widetilde{\varepsilon}),\qquad D_{k,\log}(X(N))=\mathrm{H}^{k-1}_{\log-\mathrm{dR}}(\mathrm{KS}_k)(\varepsilon).$$

Our task is to prove that the canonical map

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N)))\longrightarrow D_{k,\log}(X(N))\otimes\mathbb{Q}_p \tag{11.10.1}$$

is bijective. By (11.3.3), we have

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N)))\xrightarrow{\sim} D_k(X(N))\otimes\mathbb{Q}_p.$$

By comparing the dimensions by (11.3.2), we see that it is sufficient to show that (11.10.1) is an injection.

We define a homomorphism of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_N))$-modules

$$R: V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}_p(1-k)$$

and a homomorphism

$$\mathrm{Res}: D_{k,\log}(X(N))\longrightarrow\mathbb{Q}(\zeta_N)$$

as follows. First, R is the composition

$$\mathrm{H}^1(Y(N)\otimes\overline{\mathbb{Q}},\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathcal{H}^1_p))\longrightarrow(\mathrm{R}^1j_*\,\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p))_{\overline{\infty}}\otimes\mathbb{Q}_p\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}_p(1-k)$$

where the last isomorphism is defined as follows. Let $L=\mathbb{Q}(\zeta_N)(\!(q^{1/N})\!)$. Since the pull back E' of the universal elliptic curve over $Y(N)$ to $\mathrm{Spec}(L)$ is the pull back of the q-Tate curve over $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$, we have an exact sequence

$$0\longrightarrow\mathbb{Q}_p(1)\longrightarrow T_pE'\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}_p\longrightarrow 0$$

of $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$-modules in which $T_pE'\otimes\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}_p$ sends $(q^{1/p^n}\bmod q^{\mathbb{Z}})_n$ to 1. This induces a homomorphism of $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$-modules

$$\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(T_pE)\longrightarrow\mathbb{Q}_p,$$

and hence a homomorphism of $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$-modules

$$\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)\longrightarrow\mathbb{Q}_p(2-k).$$

This induces isomorphisms of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_N))$-modules

$$(\mathrm{R}^1 j_* \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p))_{\widetilde{\infty}} \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{H}^1(L^{\mathrm{ur}}, \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p)) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(L^{\mathrm{ur}}, \mathbb{Q}_p(2-k)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p(1-k)$$

where the last map comes from the isomorphism of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_N))$-modules

$$\mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(L^{\mathrm{ur}}, \mathbb{Q}_p(1))$$

which sends 1 to the image of q under the symbol map (Kummer theory) $(L^{\mathrm{ur}})^\times \to \mathrm{H}^1(L^{\mathrm{ur}}, \mathbb{Q}_p(1))$. This gives the desired map

$$(\mathrm{R}^1 j_* \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1_p))_{\widetilde{\infty}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p(1-k).$$

Next Res is the composition

$$D_{k,\log}(X(N))/D_k(X(N)) \xleftarrow{\sim} M_k(X(N))/S_k(X(N)) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_N)$$

where the last arrow is defined by $\sum_{n \geqslant 0} a_n q^{n/N} \mapsto a_0$.

We will show that the following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccc} V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N)) & \xrightarrow{R} & \mathbb{Q}_p(1-k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} D_{k,\log}(X(N)) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \end{array} \tag{11.10.2}$$

(This is a p-adic analogue of the commutative diagram (7.15.1).) We prove the bijectivity of (11.3.6) admitting the commutativity of (11.10.2). We have an exact sequence of $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}(\zeta_N))$-modules

$$0 \longrightarrow V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N)) \longrightarrow V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N)) \longrightarrow \bigoplus_{\sigma} \mathbb{Q}_p(1-k) \tag{11.10.3}$$

where σ ranges over all elements of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$ and the last arrow is $(R \circ \sigma^*)_\sigma$, and an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D_k(X(N)) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D_{k,\log}(X(N)) \longrightarrow \bigoplus_{\sigma} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \tag{11.10.4}$$

where σ ranges over all elements of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)$ and the last arrow is $(\mathrm{Res} \circ \sigma^*)_\sigma$. By the commutativity of (11.10.2), we have a homomorphism $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p}$ (11.10.3) $\to$ (11.10.4). By taking $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}(\zeta_N) \otimes \mathbb{Q}_p, ?)$ of this, we obtain a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\zeta_N) \otimes_{\mathbb{Q}} (1) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\zeta_N) \otimes_{\mathbb{Q}} (2) & \longrightarrow & \bigoplus_\sigma \mathbb{Q}(\zeta_N) \otimes \mathbb{Q}_p \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\zeta_N) \otimes_{\mathbb{Q}} (1)' & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\zeta_N) \otimes_{\mathbb{Q}} (2)' & \longrightarrow & \bigoplus_\sigma \mathbb{Q}(\zeta_N) \otimes \mathbb{Q}_p \end{array}$$

where

$$(1) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N))), \qquad (2) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))),$$
$$(1)' = D_k(X(N)) \otimes \mathbb{Q}_p, \qquad (2)' = D_{k,\log}(X(N)) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

Since $(1) \xrightarrow{\sim} (1)'$, this diagram proves the injectivity of $(2) \to (2)'$ as desired.

Now we prove the commutativity of (11.10.2).

Let $\mathbb{C}_p$ be the completion over $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Since $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_N))$ acts trivially on $(V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N)))/(V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N)))(k-1)$ and since $\mathrm{Res} : B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} D_{k,\log}(X(N)) \to B_{\mathrm{dR}}$ kills the image of $V_{k,\mathbb{Q}_p}(X(N))$, the image of the composition

$$V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))(k-1) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} D_{k,\log}(X(N)) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$$

is contained in $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p(\zeta_N), B_{\mathrm{dR}}) = \mathbb{Q}_p(\zeta_N)$. Since $B_{\mathrm{dR}} \to \mathbb{C}_p$ induces an injection $\mathbb{Q}_p(\zeta_N) \to \mathbb{C}_p$, it is sufficient to prove that the diagram

$$\begin{array}{ccc} (V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N)))(k-1) & \xrightarrow{\quad R \quad} & \mathbb{Q}_p \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{fil}^{k-1}\left(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes D_{k,\log}(X(N))\right) & \xrightarrow{\quad \mathrm{Res} \quad} & \mathbb{C}_p \end{array} \tag{11.10.5}$$

is commutative. The lower horizontal arrow factors as

$$\mathrm{fil}^{k-1}\left(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes D_{k,\log}(X(N))\right) \longrightarrow \mathrm{gr}^{k-1}(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes D_{k,\log}(X(N)))$$
$$= \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}} M_k(X(N)) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{C}_p$$

where the last map Res is $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n q^{n/N} \longmapsto a_0$.

We will define certain groups V, V', D, D' with commutative diagrams

$$\begin{array}{ccccc} V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))(k-1) & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Dlog}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Dlog}} \\ \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}} M_k(X(N)) & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D' \end{array} \tag{11.10.6}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\ v\ } & V' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Dlog}} \\ \mathbb{C}_p & \xrightarrow{\ w\ } & D' \end{array} \tag{11.10.7}$$

such that the composition of the upper horizontal rows of (11.10.6) coincides with the composition

$$V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))(k-1) \xrightarrow{R} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{v} V',$$

the composition of the lower horizontal row of (11.10.6) coincides with the composition

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}} M_k(X(N)) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{C}_p \xrightarrow{w} D',$$

and w is injective. This will prove the commutativity of (11.10.5).

The groups V, V', D and D' are defined as follows. Let $N', K, X, U = E^{(k-1)} \times_{Y(N)} Y(N') \otimes_{\mathbb{Q}} K$, and $\mathfrak{C}$ be as at the end of 11.4. Let $\mathrm{Spec}(O_K) \to \mathfrak{C}$ be the standard cusp. Then the completion of the local ring of $\mathfrak{C}$ at the image of the closed point of $\mathrm{Spec}(O_K)$ under this map is identified with $O_K[[q^{1/N'}]]$. For any $n \geqslant 1$, the smooth part of the irreducible component of $X \times_{\mathfrak{C}} \mathrm{Spec}(O_K[[q^{1/N'}]]/(q^n))$ containing the origin of X is canonically identified with $\mathbb{G}^{k-2}_{m, O_K[[q^{1/N'}]]/(q^n)}$. Let $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant k-2}$ be the standard coordinates of $\mathbb{G}^{k-2}_m$, and let R be the completion of the local ring of $O_K[t_1^{\pm}, \dots, t_{k-2}^{\pm}]$ at the prime ideal generated by the maximal ideal m_K of O_K. Then R is a discrete valuation ring. Let ν be the generic point of $\mathbb{G}^{k-2}_{m, O_K/m_K}$ and regard ν as a point of codimension two of X. Then the completion of the local ring $\mathcal{O}_{X,\nu}$ is identified with $R[[q^{1/N'}]]$. Let $\mathcal{O}^h_{X,\nu}$ be the henselization of $\mathcal{O}_{X,\nu}$. We define

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n \mathrm{H}^{k-1}(\mathcal{O}^h_{X,\nu}[1/q] \otimes_{O_K} \overline{K}, (\mathbb{Z}/p^n)(k-1)),\\
V' &= \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n \mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{frac}(R)((q^{1/N'})) \otimes_{O_K} \overline{K}, (\mathbb{Z}/p^n)(k-1)),\\
D &= \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n (\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{O_K} R[[q^{1/N'}]])/p^n,\\
D' &= \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n (\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{O_K} R)/p^n,
\end{aligned}$$

where $\mathrm{frac}(R)$ denotes the field of fractions of R.

By [**TT**, § 3], there is a unique homomorphism

$$\mathrm{Dlog} : V \longrightarrow D$$

satisfying

$$\mathrm{Dlog}(\{f_1, \dots, f_{k-1}\}) \cdot \mathrm{dlog}(t_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(t_{k-2}) \wedge \mathrm{dlog}(q) = \mathrm{dlog}(f_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(f_{k-1})$$

in

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n \Big((O_{\overline{K}} \otimes_{O_K} q^{-1/N'} \Omega^{k-1}_{R[[q^{1/N'}]]/O_K})/p^n \Big)\\
&\quad = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n \Big((O_{\overline{K}} \otimes_{O_K} R[[q^{1/N'}]])/p^n \Big) \otimes \mathrm{dlog}(t_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(t_{k-2}) \wedge \mathrm{dlog}(q)
\end{aligned}$$

for any $f_1, \dots, f_{k-1} \in (\mathcal{O}^h_{X,\nu} \otimes_{O_K} \overline{K})^\times$, where $\{f_1, \dots, f_{k-1}\}$ is the image of $f_1 \otimes \cdots \otimes f_{k-1}$ under the symbol map [**TT**, § 3.2]. The diagram

$$\begin{array}{ccc} V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))(k-1) & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{Dlog} \\ \mathbb{C}_p \otimes M_k(X(N)) & \longrightarrow & D \end{array}$$

is commutative. On the other hand, let

$$\mathrm{Dlog} : V' \longrightarrow D'$$

be the homomorphism characterized by

$$\mathrm{Dlog}(\{f_1, \dots, f_{k-2}, f_{k-1}q\}) \cdot \mathrm{dlog}(t_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(t_{k-2}) = \mathrm{dlog}(f_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(f_{k-2})$$

in

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n ((\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega^{k-2}_{R/\mathcal{O}_K})/p^n) \\ = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n (O_{\overline{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} R/p^n) \otimes \mathrm{dlog}(t_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(t_{k-2})$$

for any $f_1, \dots, f_{k-1} \in (\mathrm{frac}(R) \otimes_{O_K} \overline{K})^\times$. (The existence of this map Dlog follows from the bijectivity of the symbol map

(11.10.8)

$$K^M_{k-1}(\mathrm{frac}(R)(\!(q^{1/N'})\!) \otimes_K \overline{K})/p^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{frac}(R)(\!(q^{1/N'})\!) \otimes_K \overline{K}, (\mathbb{Z}/p^n)(k-1))$$

which follows from

$$K^M_r(\mathrm{frac}(R) \otimes_K \overline{K})/p^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^r(\mathrm{frac}(R) \otimes_K \overline{K}, (\mathbb{Z}/p^n)(r)) \tag{11.10.9}$$

for all r [**BK1**] because (11.10.8) is isomorphic to the direct sum of (11.10.9) for $r = k-1, k-2$. From the constructions of the maps Dlog, the diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V' \\ {\scriptstyle \mathrm{Dlog}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Dlog}} \\ D & \longrightarrow & D' \end{array}$$

is commutative, where $D \to D'$ is given by $\sum_{n \geqslant 0} a_n q^{n/N'} \mapsto a_0$. We define the map $v : \mathbb{Q}_p \to V'$ by sending 1 to $\{t_1, \dots, t_{k-2}, q\}$ and the map $w : \mathbb{C}_p \to D'$ to be the inclusion map. The diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{v} & V' \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{Dlog} \\ \mathbb{C}_p & \hookrightarrow & D' \end{array}$$

is clearly commutative.

It remains to show that the compositions

$$V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))(k-1) \longrightarrow V \longrightarrow V'$$
$$V_{k,\mathbb{Q}_p}(Y(N))(k-1) \xrightarrow{R} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{v} V'$$

coincide. This follows from the fact that if E' is the pull back of the q-Tate elliptic curve over $\mathbb{Q}((q))$, the following two compositions

$$T_pE' \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\big(E' \otimes_{\mathbb{Q}((q))} \overline{\mathbb{Q}((q))}, \mathbb{Z}_p(1)\big) \xrightarrow{a} \mathrm{H}^1(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p(1)),$$
$$T_pE' \xrightarrow{b} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{c} \mathrm{H}^1(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p(1))$$

coincide. Here a is the restriction to the smooth part of the irreducible component of the special fiber of E' containing the origin (this part is isomorphic to $\mathbb{G}_m$), b is the homomorphism which kills $\mathbb{Z}_p(1)$ and sends $(q^{1/p^n} \bmod q^{\mathbb{Z}})_n$ to 1, and c is the map which sends 1 to the symbol $\{t\}$ where t is the standard coordinate of $\mathbb{G}_m$.

CHAPTER III
IWASAWA THEORY OF MODULAR FORMS (WITHOUT p-ADIC ZETA FUNCTIONS)

In this chapter (§ 12-§ 15), we study the following subjects:

(1) Analogue of Iwasawa main conjecture for modular forms (§ 12).
(2) The finiteness of Selmer groups (§ 14).
(3) The Tamagawa number conjecture [**BK2**] for modular forms (§ 14).

The "main conjecture" which we study in this chapter is not concerned with p-adic zeta functions of modular forms. In the next chapter, we will study the main conjecture involving p-adic zeta functions [**Ma1, Gr1**] for modular forms which are ordinary at p.

It has been known that once p-adic Euler systems as in Chapter II are constructed and the result in § 12 is obtained, then the rest of Chapter III and Chapter IV can be proved (see [**Pe1**], [**Pe3**], [**Ru4**]). The author gives in this paper all necessary arguments, for he thinks that is convenient for the reader, but many arguments in Chapter III and Chapter IV are already given in literatures. The author is thankful to the referee for pointing out the existence of several literatures.

In Chap. III, we fix $k \geqslant 2, N \geqslant 1$, and a normalized newform

$$f = \textstyle\sum_{n\geqslant 1} a_n q^n \in S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}.$$

We denote by $\overline{\mathbb{Q}}$ the algebraic closure of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

12. The main conjecture, I

In this section, we state results concerning "the main conjecture without p-adic zeta functions" (Conj. 12.10) for modular forms. The proofs of the results are given in § 13,§ 15.

We fix a prime number p.

12.1. Let p be a prime number, and let

$$G_n = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}) \qquad \text{for } n \geqslant 0,$$
$$G_\infty = \varprojlim_n G_n = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \quad \text{where } \mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}) = \cup_n \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}).$$

Then the cyclotomic character gives an isomorphism

$$\kappa = \chi_{\mathrm{cyclo}} : G_\infty \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times.$$

For $c \in \mathbb{Z}_p^\times$, let $\sigma_c \in G_\infty$ be the unique element such that $\kappa(\sigma_c) = c$.

For a finite extension L of $\mathbb{Q}_p$, the ring

$$O_L[[G_\infty]] = \varprojlim_n O_L[G_n].$$

has the following structure, as is well known. Let Δ be the torsion part of G_∞, and let

$$G_\infty^1 = \begin{cases} \{\sigma \in G_\infty\,;\, \kappa(\sigma) \equiv 1 \bmod p\} & \text{in the case } p \neq 2, \\ \{\sigma \in G_\infty\,;\, \kappa(\sigma) \equiv 1 \bmod 4\} & \text{in the case } p = 2. \end{cases}$$

Then

$$G_\infty = G_\infty^1 \times \Delta, \quad G_\infty^1 \simeq \mathbb{Z}_p, \quad \Delta \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(p-1) & \text{if } p \neq 2, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{if } p = 2. \end{cases}$$

We have

$$\begin{aligned} O_L[[G_\infty]] = O_L[[\Delta \times G_\infty^1]] = O_L[\Delta][[G_\infty^1]] &\simeq O_L[\Delta][[\mathbb{Z}_p]] \\ &= \varprojlim_n O_L[\Delta][\mathbb{Z}/p^n] = \varprojlim_n O_L[\Delta][X]/(X^{p^n} - 1) = O_L[\Delta][[T]] \end{aligned}$$

($T = X - 1$). Hence we have:

(12.1.1) *$O_L[[G_\infty]]$ is a two dimensional complete semi-local ring.*

(12.1.2) *In the case $p \neq 2$ (resp. $p = 2$), for $j \in \mathbb{Z}/(p-1)$ (resp. $j \in \mathbb{Z}/2$), let $O_L[[G_\infty]]_j$ be the quotient of $O_L[[G_\infty]]$ divided by the ideal $(\sigma - \kappa(\sigma)^j; \sigma \in \Delta)$. Then*

$$O_L[[G_\infty]]_j \xleftarrow{\sim} O_L[[G_\infty^1]] \simeq O_L[[T]].$$

We have

$$O_L[[G_\infty]] \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in \mathbb{Z}/(p-1)} O_L[[G_\infty]]_j \text{ if } p \neq 2.$$

If $p = 2$, the canonical map $O_L[[G_\infty]] \to \prod_{j \in \mathbb{Z}/2} O_L[[G_\infty]]_j$ is injective and the cokernel is killed by 2.

(12.1.3) *$O_L[[G_\infty]]\otimes\mathbb{Q}$ is the product of the principal ideal domains $O_L[[G_\infty]]_j\otimes\mathbb{Q}$.*

(12.1.4) *If $\mathfrak{p}$ is a prime ideal of height one in $O_L[[G_\infty]]$, the local ring $O_L[[G_\infty]]_\mathfrak{p}$ is a discrete valuation ring except in the case $p=2\in\mathfrak{p}$.*

12.2. Let T be a finitely generated $\mathbb{Z}_p$-module endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ which is unramified at almost all prime numbers. We denote for $q\in\mathbb{Z}$

$$\mathbf{H}^q(T)=\varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n},1/p],T)$$

where H^q is the étale cohomology as in 8.2, and the inverse limit is taken with respect to trace maps. The following are known:

(12.2.1) *$\mathbf{H}^q(T)=0$ if $q\neq 1,2$ and $\mathbf{H}^1(T)$ and $\mathbf{H}^2(T)$ are finitely generated $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-modules.*

(12.2.2) *For any prime ideal $\mathfrak{q}$ of $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ of height 0 (so $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]_\mathfrak{q}$ is a field), $\dim(\mathbf{H}^1(T)_\mathfrak{q})-\dim(\mathbf{H}^2(T)_\mathfrak{q})=\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(T^-)$ where $T^\pm$ is the part of T on which the complex conjugation acts by ±1. (*[**Ta2**, Thm. 2.2], [**Pe3**, § 1.3]*).*

It is conjectured that $\mathbf{H}^2(T)$ is always a torsion $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-module ([**Pe3**] Appendix 3: conjecture de Leopoldt faible), and hence (by (12.2.2)) that $\dim(\mathbf{H}^1(T)_\mathfrak{q})=\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(T^-)$ for any prime ideal $\mathfrak{q}$ of $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ of height 0.

On the other hand, for a finitely generated $\mathbb{Z}_p$-module T endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, let

$$\mathbf{H}^q_{\mathrm{loc}}(T)=\varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),T).$$

Then the following are known:

(12.2.3) *$\mathbf{H}^q_{\mathrm{loc}}(T)=0$ if $q\neq 1,2$, $\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T)$ and $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T)$ are finitely generated $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-modules, and*

$$\dim(\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T)_\mathfrak{q})=\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(T),\quad \dim(\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T)_\mathfrak{q})=0$$

for any prime ideal $\mathfrak{q}$ of $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ of height 0.

The structure of $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T)$ is well understood: By local Tate duality [**Se1**, Chap. II, § 5.2],

$$\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T)\simeq \mathrm{Hom}\left(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}),\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)(-1).$$

Finally, for a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space V endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ which is unramified at almost all prime numbers (resp. endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$), let

$$\mathbf{H}^q(V)=\mathbf{H}^q(T)\otimes\mathbb{Q}\qquad(\text{resp. } \mathbf{H}^q_{\mathrm{loc}}(V)=\mathbf{H}^q_{\mathrm{loc}}(T)\otimes\mathbb{Q})$$

where T is a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (resp. $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$)-stable $\mathbb{Z}_p$-lattice of V. Then $\mathbf{H}^q(V)$ (resp. $\mathbf{H}^q_{\mathrm{loc}}(V)$) is independent of the choice of T.

12.3. Let k, N and $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n$ be as in the beginning of Chap. III, and let $F = \mathbb{Q}(a_n\,;\, n \geqslant 1)$ be as before. Let λ be a place of F lying over p, F_λ the local field of F at λ, O_λ the valuation ring of F_λ, m_λ the maximal ideal of O_λ, and let

$$\Lambda = O_\lambda[[G_\infty]].$$

Consider the two dimensional representation $V_{F_\lambda}(f)$ of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over F_λ associated to f (8.3).

We will prove the following results Thm. 12.4, 12.5, 12.6.

Theorem 12.4. — *Take any* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$*-stable* O_λ*-lattice* T *of* V_{F_λ}*. Then:*

(1) $\mathbf{H}^2(T)$ *is a torsion* Λ*-module.*

(2) $\mathbf{H}^1(T)$ *is a torsion free* Λ*-module, and* $\mathbf{H}^1(T) \otimes \mathbb{Q} = \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))$ *is a free* $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$*-module of rank* 1*.*

(3) *If* $p \neq 2$ *and if* $T/m_\lambda T$ *is irreducible as a two dimensional representation of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *over* O_λ/m_λ*,* $\mathbf{H}^1(T)$ *is a free* Λ*-module of rank* 1*.*

Theorem 12.5

(1) *There exists a unique* F_λ*-linear map*

$$V_{F_\lambda}(f) \longrightarrow \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))\,; \quad \gamma \longmapsto \mathbf{z}_\gamma^{(p)}$$

having the following property : Let $r \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant r \leqslant k-1$*, let* $n \geqslant 0$*, and let* $\gamma \in V_F(f)$*. Then the image of* $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ *under the composite map*

$$\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \simeq \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)(k-r)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{F_\lambda}(f)(k-r)) \xrightarrow{\exp^*} S(f) \otimes_F F_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$$

(the first isomorphism is the product with $(\zeta_{p^n})_{n\geqslant 1}^{\otimes(k-r)}$*) belongs to* $S(f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$*, and the map*

$$S(f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \longrightarrow V_{\mathbb{C}}(f)^{\pm};$$
$$x \otimes y \longmapsto \sum_{\sigma \in G_n} \chi(\sigma)\sigma(y)\,\mathrm{per}_f(x)^{\pm},$$

where χ *is any character* $G_n \to \mathbb{C}^\times$ *and* $\pm = (-1)^{k-r-1}\chi(-1)$*, sends the image of* $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ *to*

$$(2\pi i)^{k-r-1} \cdot L_{\{p\}}(f^*, \chi, r) \cdot \gamma^{\pm}.$$

We have

$$\mathbf{z}_{\iota(\gamma)}^{(p)} = -\sigma_{-1}(\mathbf{z}_\gamma^{(p)})$$

where $\iota : V_{F_\lambda}(f) \to V_{F_\lambda}(f)$ *is the action of the complex conjugation.*

(2) *Let* $Z(f)$ *be the* $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$*-submodule of* $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))$ *generated by* $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ *for all* $\gamma \in V_{F_\lambda}(f)$*. Then* $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))/Z(f)$ *is a torsion* $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$*-module.*

(3) *Let* $\mathfrak{p}$ *be a prime ideal of* Λ *of height one which does not contain* p. *Then*

$$\mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}) \leqslant \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}/Z(f)_{\mathfrak{p}}) + \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}).$$

If $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}} \neq 0$, *then* f *and* $\mathfrak{p}$ *satisfy the following*

(12.5.1) $k = 2$, f *is not potentially of good reduction at* p (12.7), $\mathfrak{p}$ *is the kernel of the ring homomorphism* $\Lambda \to F_\lambda$ *induced by* $\kappa^{-2}\chi : G_\infty \to F_\lambda^\times$ *for some homomorphism* $\chi : G_\infty \to F_\lambda^\times$ *of finite order, and*

$$\mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}) = 1.$$

(4) *Let* T *be a* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$*-stable* O_λ*-lattice of* $V_{F_\lambda}(f)$, *and let* $Z(f,T)$ *be the* Λ*-submodule of* $\mathbf{H}^1(T) \otimes \mathbb{Q}$ *generated by* $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ *for all* $\gamma \in T$. *Assume* $p \neq 2$, *and assume that the following* (12.5.2) *is satisfied.*

(12.5.2) There exists an O_λ*-basis of* T *for which the image of the homomorphism*

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})) \longrightarrow \mathrm{GL}_{O_\lambda}(T) \simeq \mathrm{GL}_2(O_\lambda)$$

contains $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$. *Here the last isomorphism is given by this basis of* T.

Then,

$$Z(f,T) \subset \mathbf{H}^1(T) \quad \text{in } \mathbf{H}^1(T) \otimes \mathbb{Q}.$$

Furthermore,

$$\mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}) \leqslant \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}/Z(f)_{\mathfrak{p}})$$

for any prime ideal of Λ *of height one unless* f *and* $\mathfrak{p}$ *satisfy* (12.5.1) *in (3).*

Theorem 12.6. — *Let* $T = V_{O_\lambda}(f)$ (8.3). *Let* Z *be the* Λ*-submodule of* $\mathbf{H}^1(V_{O_\lambda}(f))$ *generated by the following elements (see* (8.1.3), (8.11)*).*

(1) ${}_{c,d}\mathbf{z}^{(p)}_{p^n}(f,k,j,a(A),\mathrm{prime}(pA))_{n\geqslant 1} \in \mathbf{H}^1(T)$

$(1 \leqslant j \leqslant k-1,\ a, A \in \mathbb{Z},\ A \geqslant 1,\ c,d \in \mathbb{Z},\ (c, 6pA) = (d, 6pN) = 1).$

(2) ${}_{c,d}\mathbf{z}^{(p)}_{p^n}(f,k,j,\alpha,\mathrm{prime}(pN))_{n\geqslant 1} \in \mathbf{H}^1(T)$

$(1 \leqslant j \leqslant k-1,\ \alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ c,d \in \mathbb{Z},\ (cd, 6pN) = 1,\ c \equiv d \equiv 1 \bmod N).$

Then $Z \subset Z(f,T)$ *and* $Z(f,T)/Z$ *is a finite group.*

Remark 12.7. — In Thm. 12.5 (3), "f is potentially of good reduction at p" means that one of the following equivalent conditions (1), (2) is (hence both of them are) satisfied.

(1) There exists a finite extension K of $\mathbb{Q}_p$ having the following properties. For any finite place v of F which does not lie over p, the representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on $V_{F_v}(f)$ is unramified. For any finite place v of F which lies over p, the representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on $V_{F_v}(f)$ is crystalline.

(2) There exist at least one finite place v of F and a finite extension K of $\mathbb{Q}_p$ having the following property : Either v does not lie over p and the representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on $V_{F_v}(f)$ is unramified, or v lies over p and the representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on $V_{F_v}(f)$ is crystalline.

The equivalence between these conditions follows from the works [**Ca, Sa1**]. These conditions are satisfied if p does not divide N.

Remark 12.8. — We say that f has complex multiplication (f has CM) if there is an imaginary quadratic field K of $\mathbb{Q}$ and a Hecke character ψ of K (that is, a continuous homomorphism $\psi : C_K \to \mathbb{C}^\times$ where C_K denotes the idele class group of K) such that

$$L(f, s) = L(\psi, s).$$

Here,

$$L(\psi, s) = \prod_v (1 - \psi(v)N(v)^{-s})^{-1}$$

where v ranges over all finite places of K at which ψ is unramified, $\psi(v)$ is the image of prime elements of K_v under ψ, and $N(v)$ is the norm of v.

By Ribet [**Ri1, Ri3**] (generalization of Serre [**Se3**]), we have the following.

(12.8.1) *If f has no CM, then, for almost all finite places λ of F, there exist a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)$ which satisfies the condition* (12.5.2) *at Thm 12.5 (4).*

Note that if the condition (12.5.2) at Thm 12.5 (4) is satisfied for one $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)$, all $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattices of $V_{F_\lambda}(f)$ have the form aT for some $a \in F_\lambda^\times$ (see the proof of 14.7), and hence the condition (12.5.2) at Thm 12.5 (4) is satisfied for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)$.

(12.8.2) *If f has no CM, then, for any finite place λ of F, there exist a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)$ and an O_λ-basis of T such that the image of the action $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})) \to \mathrm{GL}_2(O_\lambda)$ with respect to this basis contains an open subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$.*

The proofs of Thm. 12.4, 12.5, 12.6 are given in § 13 in the case f has no CM and in § 15 in the case f has CM. The proof in the case f has CM heavily depends on the work of Rubin [**Ru1**] on the main conjecture for imaginary quadratic fields.

12.9. Let $p \neq 2$.

We recall the classical Iwasawa theory. We have for $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p]^\times \otimes \mathbb{Z}_p,$$
$$\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})) \otimes \mathbb{Z}_p$$

where $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))$ denotes the ideal class group of $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$. Let

$$\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]_+ = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]/(\sigma_{-1} - 1),$$

and let Z be the $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]_+$-submodule of $\mathbf{H}^1(\mathbb{Z}_p(1))^+$ generated by the image of

$$((1-\zeta_{p^n})(1-\zeta_{p^n}^{-1}))_{n\geqslant 1} \in \varprojlim_n (\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p]^\times)^+.$$

Then $\mathbf{H}^2(\mathbb{Z}_p(1))^+$ and $\mathbf{H}^1(\mathbb{Z}_p(1))^+/Z$ are torsion $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]_+$-modules. The classical Iwasawa main conjecture proved by Mazur-Wiles [**MW**] states

$$\mathrm{length}_{(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]_+)_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^2(\mathbb{Z}_p(1))^+_\mathfrak{p}) = \mathrm{length}_{(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]_+)_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(\mathbb{Z}_p(1))^+_\mathfrak{p}/Z_\mathfrak{p})$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of Λ of height one.

This Iwasawa main conjecture is generalized to "main conjectures of motives" as in [**KK2**, Chap. I, § 3.2] and [**Pe3**, § 4.4]. These main conjectures are specialized to the following "main conjecture for modular forms".

***Conjecture 12.10* (main conjecture).** — *Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)$ and let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of Λ of height one. In the case $p=2$, assume $\mathfrak{p}$ does not contain 2. Then $Z(f,T)_\mathfrak{p} \subset \mathbf{H}^1(T)_\mathfrak{p}$ and*

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^2(T)_\mathfrak{p}) = \mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(T)_\mathfrak{p}/Z(f,T)_\mathfrak{p}).$$

13. The method of Euler systems

In this section, we give the proof of the theorems in § 12 by using the method of Euler systems in the case f has no CM. The proof of the CM case will be completed in § 15.

In this section, we fix a prime number p.

13.1. The method of Euler systems started by Kolyvagin bounds arithmetic groups by using a system of "zeta elements". (See [**Ko**]; a similar idea was found by Thaine independently [**Th**].) We use results on Euler systems in Perrin-Riou [**Pe4**], Rubin [**Ru4**], and [**KK4**].

Let L be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ and let T be a free O_L-module of finite rank endowed with a continuous O_L-linear action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ which is unramified at almost all prime numbers. Let Σ be a finite set of prime numbers containing p and all prime numbers at which the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on T ramifies, and let

$$\Xi = \{m \geqslant 1\,;\, \mathrm{prime}(m) \cap \Sigma = \{p\}\}.$$

For a prime number ℓ which is not contained in Σ, let

$$P_\ell(t) = \det_{O_L}(1 - \mathrm{Fr}_\ell \cdot t : T \to T) \in O_L[t]$$

where Fr_ℓ is the arithmetic Frobenius at ℓ.

By an Euler system for (T, L, Σ), we mean a system of elements $z_m \in \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_m, 1/p], T)$ defined for $m \in \Xi$, satisfying the following condition.

(13.1.1) *For $m, m' \in \Xi$ such that $m \mid m'$, the norm map*

$$\mathrm{H}^1\Big(\mathbb{Z}[\zeta_{m'}, 1/p], T\Big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\Big(\mathbb{Z}[\zeta_m, 1/p], T\Big)$$

sends $z_{m'}$ to $\Big(\prod_\ell P_\ell(\ell^{-1}\sigma_\ell^{-1})\Big) \cdot z_m$, where ℓ ranges over all prime numbers which divide m' but do not divide m, σ_ℓ is the arithmetic Frobenius of ℓ in $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$, and we regard $P_\ell(\ell^{-1}\sigma_\ell^{-1})$ as an element of the group ring $O_L[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})]$ which acts naturally on $\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_m, 1/p], T)$.

***Example 13.2* (classical example)**. — Let $L = \mathbb{Q}_p$, $T = \mathbb{Z}_p(1)$, $\Sigma = \{p\}$. For $m \in \Xi$ (that is, for any $m \geqslant 1$ such that $p|m$), let $z_m \in \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_m, 1/p], \mathbb{Z}_p(1))$ be the image of $(1-\zeta_m)(1-\zeta_m^{-1}) \in \mathbb{Z}[\zeta_m, 1/p]^\times$ under the isomorphism

$$\mathbb{Z}[\zeta_m, 1/p]^\times \otimes \mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{H}^1\Big(\mathbb{Z}[\zeta_m, 1/p], \mathbb{Z}_p(1)\Big)$$

Then $(z_m)_m$ is an Euler system for $(\mathbb{Z}_p(1), \mathbb{Q}_p, \Sigma)$. In fact,

$$P_\ell(t) = 1 - \ell t, \quad P_\ell(\ell^{-1}\sigma_\ell^{-1}) = 1 - \sigma_\ell^{-1},$$

and (13.1.1) follows from the fact that for any $m \geqslant 2$ and for any prime number ℓ, the norm map

$$\mathbb{Q}(\zeta_{m\ell})^\times \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_m)^\times$$

sends $1 - \zeta_{m\ell}$ to $1 - \zeta_m$ if ℓ divides m, and to $(1-\zeta_m)(1-\sigma_\ell^{-1}(\zeta_m))^{-1}$ if ℓ does not divide m.

***Example 13.3* (the crucial example for this paper)**. — Let λ be a place of F lying over p, let $r \in \mathbb{Z}$, and let $T = V_{O_\lambda}(f)(k-r)$. Fix an integer j such that $1 \leqslant j \leqslant k-1$, and fix non-zero integers c, d. Let ξ be either a symbol of the form $a(A)$ ($a, A \in \mathbb{Z}$, $A \geqslant 1$) or an element of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. In the case, $\xi = a(A)$, we assume $(c, 6pA) = 1$ and $(d, 6pN) = 1$. In the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, we assume $(cd, 6pN) = 1$.

By fixing these, let $\Sigma = \mathrm{prime}(cdpAN)$ in the case $\xi = a(A)$, and let $\Sigma = \mathrm{prime}(cdpN)$ in the case $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. For $m \in \Xi$, define $z_m \in \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_m, 1/p], T)$ by

$$z_m = \begin{cases} {}_{c,d}z_m^{(p)}(f, r, j, \xi, \mathrm{prime}(mA)) & \text{if } \xi = a(A), \\ {}_{c,d}z_m^{(p)}(f, r, j, \xi, \mathrm{prime}(mN)) & \text{if } \xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}). \end{cases}$$

Then $(z_m)_m$ is an Euler system for (T, F_λ, Σ).

In fact, for a prime number ℓ which does not divide Np, we have

$$\det_{O_L}(1 - \mathrm{Fr}_\ell^{-1} \cdot t; V_{F_\lambda}(f)) = 1 - a_\ell t + \varepsilon(\ell)\ell^{k-1}t^2,$$

and this polynomial has the form $(1-\alpha t)(1-\beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = |\beta| = \ell^{(k-1)/2}$. Hence

$$P_\ell(t) = \det_{O_L}(1 - \mathrm{Fr}_\ell \cdot t; T) = 1 - \overline{a}_\ell \ell^{1-r} t + \overline{\varepsilon}(\ell)\ell^{k+1-2r}t^2,$$
$$P_\ell(\ell^{-1}\sigma_\ell^{-1}) = 1 - \overline{a}_\ell \ell^{-r}\sigma_\ell^{-1} + \overline{\varepsilon}(\ell)\ell^{k-1-2r}\sigma_\ell^{-2}.$$

Hence $(z_m)_m$ is an Euler System for (T, F_λ, Σ) by Prop. 8.12.

By [**Pe4, Ru4, KK4**], we have

Theorem 13.4. — *Let (T, L, Σ) be as in 13.1, and let $(z_m)_m$ be an Euler system for (T, L, Σ). Let $\Lambda = O_F[[G_\infty]]$, let Z be the Λ-submodule of $\mathbf{H}^1(T)$ generated by $(z_{p^n})_n$, and let J be the ideal of Λ generated by $h(Z)$ for all Λ-homomorphisms $h : \mathbf{H}^1(T) \to \Lambda$. On the other hand, let*

$$\mathbf{H}^2(T)_0 \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}(\mathbf{H}^2(T) \to \mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T)).$$

Assume the following

(i) *$Z_{\mathfrak{q}} \neq 0$ for any prime ideal $\mathfrak{q}$ of Λ of height 0.*

(ii) $\mathrm{rank}_{O_L}(T^+) = \mathrm{rank}_{O_L}(T^-) = 1$.

(iii) *There exists an integer w such that for any prime number ℓ which is not contained in Σ, all eigenvalues of Fr_ℓ^{-1} on the $\overline{L}$-vector space $T \otimes_{O_L} \overline{L}$ are algebraic numbers whose all complex conjugates have absolute value $\ell^{w/2}$.*

(iv) *$T \otimes_{O_L} L$ is irreducible as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over L.*

(v) *There exists an element σ of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))$ such that*

$$\dim_L(\mathrm{Ker}(1 - \sigma; T \otimes_{O_L} L \to T \otimes_{O_L} L)) = 1.$$

Then we have:

(1) *$\mathbf{H}^2(T)$ is a torsion Λ-module.*

(2) *Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of Λ of height one which does not contain p. Then*

$$\mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2(T)_{0,\mathfrak{p}}) \leqslant \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\Lambda_{\mathfrak{p}}/J_{\mathfrak{p}}).$$

(3) *Assume that there exists an element σ of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))$ such that*

$$\mathrm{Coker}(1 - \sigma : T \to T)$$

is a free O_L-module of rank 1, and assume that $T \otimes_{O_L} O_L/m_L$ is irreducible as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over O_L/m_L. Assume further $p \neq 2$. Then

$$\mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2(T)_{0,\mathfrak{p}}) \leqslant \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\Lambda_{\mathfrak{p}}/J_{\mathfrak{p}}).$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of Λ of height one.

In the case of 13.3, the conditions (ii), (iii), (iv) in Thm. 13.4 are satisfied ((iii) is due to Deligne [**De1**], and (iv) is due to Ribet [**Ri1**]). However if f has CM, this theorem is not applied because the condition (v) is not satisfied in the CM case. So the CM case will be discussed separately in § 15. Concerning the condition (i) in Thm. 13.4, we use the following 13.5 and 13.6.

Theorem 13.5

(1) *(Jacquet-Shalika [**JS**]). $L(f, s)$ has no zero on $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{k+1}{2}$.*

(2) *(Rohrlich* [**Ro2**]*). Assume k is even. Let S be a finite set of prime numbers. Then the set*

$$\left\{\chi \in \bigcup_{\substack{m\geqslant 1\\ \mathrm{prime}(m)\subset S}} \mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/m)^\times, \mathbb{C}^\times); L_S(f,\chi,k/2)=0\right\}$$

is finite.

(When $m|m'$, we regard $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/m)^\times,\mathbb{C}^\times)\subset \mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/m')^\times,\mathbb{C}^\times)$.)

***Theorem 13.6* (Ash-Stevens [AS]).** — *Let $L\geqslant 3$. Then $V_{k,\mathbb{Z}}(Y(L))$ is generated over $\mathbb{Z}$ by the elements*

$$\alpha^*\delta_{L,L}(k,j)\quad (\alpha\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/L), 1\leqslant j\leqslant k-1).$$

Proposition 13.7. — *Define $Z\subset \mathbf{H}^1(V_{O_\lambda}(f))$ as in Thm. 12.6. Then $Z_{\mathfrak{q}}\neq 0$ for any prime ideal $\mathfrak{q}$ of Λ of height 0.*

Proof. — Let $\pm$ be $+$ (resp. $-$) if the image of $-\sigma_{-1}$ in Λ_q is 1 (resp. -1). By 13.6, for some $\alpha\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ and some integer j such that $1\leqslant j\leqslant k-1$, we have $\delta(f,j,\alpha)^{\pm}\neq 0$. Take such α, j and take integers c,d such that $(cd,6p)=1, c\equiv d\equiv 1 \bmod N$, and $c^2\neq 1, d^2\neq 1$. Then by Thm. 6.6, Thm. 9.7, and by Thm. 13.5, for almost all homomorphisms $\chi: G_\infty\to \overline{F}_\lambda^\times$ of finite order such that $\chi(-1)=\pm$, the element $({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}(f,k,j,\alpha,\mathrm{prime}(pN)))_{n\geqslant 1}\in Z\subset \mathbf{H}^1(V_{O_\lambda}(f))$ (12.6) is sent to a non-zero element by the homomorphism

$$\begin{aligned}(13.7.1)\quad \mathbf{H}^1(V_{O_\lambda}(f))\simeq \mathbf{H}^1(V_{O_\lambda}(f)(1))\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),V_{F_\lambda}(f)(1))\\ \xrightarrow{\exp^*} S(f)\otimes_F F_\lambda \xrightarrow{\chi} S(f)\otimes_F \overline{F}_\lambda\end{aligned}$$

where $n\geqslant 0$ is an integer such that χ factors through $G_\infty\to G_n$, and the last arrow in (13.7.1) is $a\mapsto \sum_{\sigma\in G_n}\sigma(a)\otimes\chi(\sigma)$. The composite map (13.7.1) factors through $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))/\mathfrak{p}\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))$ where $\mathfrak{p}$ is the kernel of the ring homomorphism $\Lambda\to\overline{F}_\lambda$ which sends $\sigma\in G_\infty$ to $\kappa(\sigma)^{-1}\chi(\sigma)^{-1}$. Hence for infinitely many prime ideals $\mathfrak{p}$ of Λ of height one such that $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}$, the image of Z in $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))/\mathfrak{p}\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))$ is not zero. This proves $Z_{\mathfrak{q}}\neq 0$. □

In the rest of § 13, we assume f has no CM and we prove Thm. 12.4, 12.5, 12.6 under this assumption. The proofs of these theorems in the case f has CM are given in § 15.

13.8. We prove Thm. 12.4

To prove 12.4 (1), we may assume $T=V_{O_\lambda}(f)$. In this case, the fact $\mathbf{H}^2(T)$ is a torsion Λ-module follows from (12.8.2), Thm. 13.4 (1), and 13.7.

We prove 12.4 (2). By (12.2.2) and by 12.4 (1), it is sufficient to prove that $\mathbf{H}^1(T)$ is a torsion free Λ-module. (This torsion free property is deduced also from a general result [**Pe3**, Lemme p. 27].)

Let x be a non-zero-divisor of Λ. We prove that $x : \mathbf{H}^1(T) \to \mathbf{H}^1(T)$ is injective. There exists a multiple of x of the form $p^n y$ where $n \geqslant 0$ and y is a non-zero-divisor of Λ such that $\Lambda/y\Lambda$ is p-torsion free. (In fact, the image of x under the norm map

$$\Lambda = O_\lambda[[G_\infty]] \longrightarrow O_\lambda[[G^1_\infty]] \simeq O_\lambda[[X]]$$

has the form $p^n y$ for $n \geqslant 0$ and y as above, and x divides $p^n y$ in Λ.) Hence we may assume $x = p$ or $\Lambda/x\Lambda$ is p-torsion free.

Let

$$j : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p]) \smallsetminus \mathrm{prime}(N) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$$

be the inclusion map.

First consider the case $x = p$. By the exact sequence

$$0 \longrightarrow j_*T \xrightarrow{p} j_*T \longrightarrow j_*(T/p),$$

the injectivity of $p : \mathbf{H}^1(T) \to \mathbf{H}^1(T)$ is reduced to $\varprojlim_n \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T/p) = 0$. Take $m \geqslant 1$ such that $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T/p) = \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}), T/p)$. Then, for $n \geqslant m$, the norm map

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}}), T/p) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T/p)$$

is the multiplication by $[\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}}) : \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})] = p$, and hence is the zero map. Hence $\varprojlim_n \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T/p) = 0$.

Next we consider the case $\Lambda/x\Lambda$ is p-torsion free. For $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T) \simeq \mathrm{H}^q(\mathbb{Z}[1/p], T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[G_n])$$

where $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on the tensor product as follows : $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts by $\sigma \otimes \sigma_n^{-1}$ where σ_n denotes the canonical image of σ in G_n. We have

$$\mathbf{H}^q(T) \simeq \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathbb{Z}[1/p], T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[G_n]).$$

Hence we have an exact sequence

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T \otimes_{O_\lambda} \Lambda/x\Lambda) \longrightarrow \mathbf{H}^1(T) \xrightarrow{x} \mathbf{H}^1(T).$$

where $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ act on the tensor product as follows : $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts by $\sigma \otimes \sigma_\infty^{-1}$ where σ_∞ denotes the canonical image of σ in G_∞. We prove

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T \otimes_{O_\lambda} \Lambda/x\Lambda) = 0.$$

The set $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T \otimes_{O_\lambda} \Lambda/x\Lambda)$ is identified with the set of all $O_\lambda[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})]$-homomorphism $\mathrm{Hom}_{O_\lambda}(\Lambda/x\Lambda, O_\lambda) \to T$ ($\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on $\Lambda/x\Lambda$ here via $\sigma \mapsto \sigma_\infty^{-1}$). Since the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $\mathrm{Hom}_{O_\lambda}(\Lambda/x\Lambda, O_\lambda)$ is abelian and the representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $V_{F_\lambda}(f)$ is irreducible and is not abelian, there is no such non-trivial homomorphism.

We prove 12.4 (3). Let x, y be elements of Λ such that (x, y) is a maximal ideal of Λ. It is sufficient to prove that x and y form a regular sequence for $\mathbf{H}^1(T)$, that is

$$x : \mathbf{H}^1(T) \longrightarrow \mathbf{H}^1(T) \quad \text{and} \quad y : \mathbf{H}^1(T)/x\mathbf{H}^1(T) \longrightarrow \mathbf{H}^1(T)/x\mathbf{H}^1(T)$$

are injective. The former is already proved. We prove the latter. By

$$\mathbf{H}^1(T)/x\mathbf{H}^1(T) \subset \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T \otimes_{O_\lambda} \Lambda/x\Lambda)$$

and by the exact sequence

$$0 \longrightarrow j_*(T \otimes_{O_\lambda} \Lambda/x\Lambda) \xrightarrow{y} j_*(T \otimes_{O_\lambda} \Lambda/x\Lambda) \longrightarrow j_*(T \otimes_{O_\lambda} \Lambda/(x,y)),$$

it is sufficient to prove $\mathrm{H}^0(\mathbb{Z}[1/p], T \otimes_{O_\lambda} \Lambda/(x,y)) = 0$. Here $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on $\Lambda/(x,y)$ via $\sigma \mapsto \sigma_\infty^{-1}$, and hence $\Lambda/(x,y) \simeq (O_\lambda/m_\lambda)(r)$ for some $r \in \mathbb{Z}$ as $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module over O_λ ((r) means the Tate twist). By the assumption of irreducibility, the $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-fixed part of $(T/m_\lambda T)(r)$ is trivial. □

13.9. In 13.9-13.11, we give preliminaries for the proofs of Thm. 12.5 and Thm. 12.6.

For a commutative ring R, let $Q(R)$ be the total quotient ring of R. That is,

$$Q(R) = \{ab^{-1}\,;\, a, b \in R, b \text{ is a non-zero-divisor}\}.$$

In this 13.9, we define the p-adic zeta element $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ for $\gamma \in V_{F_\lambda}(f)$, which appears in Thm. 12.5, first as an element of $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \otimes_\Lambda Q(\Lambda)$. We will see in 13.12 that $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ belongs to $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))$.

Fix elements α_1, α_2 of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ and integers j_1, j_2 such that $1 \leqslant j_i \leqslant k-1$ $(i = 1, 2)$ and such that $\delta(f, j_1, \alpha_1)^+ \neq 0$, $\delta(f, j_2, \alpha_2)^- \neq 0$. (13.6).

Let $\gamma \in V_{F_\lambda}(f)$. We have

$$\gamma = b_1\delta(f, j_1, \alpha_1)^+ + b_2\delta(f, j_2, \alpha_2)^-$$

for some $b_1, b_2 \in F_\lambda$. Fix $c, d \in \mathbb{Z}$ such that $(cd, 6p) = 1$, $c \equiv d \equiv 1 \bmod N$, $c^2 \neq 1$, $d^2 \neq 1$. Define $\mathbf{z}_\gamma^{(p)} \in \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \otimes_\Lambda Q(\Lambda)$ by

$$\mathbf{z}_\gamma^{(p)} = \left\{ \mu(c,d,j_1)^{-1} \cdot b_1 \cdot \left({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}\big(f, k, j_1, \alpha_1, \mathrm{prime}(pN)\big) \right)_{n \geqslant 1} \right\}^- + \left\{ \mu(c,d,j_2)^{-1} \cdot b_2 \cdot \left({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}\big(f, k, j_2, \alpha_2, \mathrm{prime}(pN)\big) \right)_{n \geqslant 1} \right\}^+$$

where

$$\mu(c,d,j) = (c^2 - c^{k+1-j} \cdot \sigma_c)(d^2 - d^{j+1} \cdot \sigma_d) \cdot \prod_\ell (1 - \overline{a}_\ell \ell^{-k} \sigma_\ell^{-1}) \in \Lambda$$

for $j \in \mathbb{Z}$ in which ℓ ranges over all prime numbers $\neq p$ which divide N. It is easy to see that $\mu(c,d,j)$ is a non-zero-divisor of Λ for any $j \in \mathbb{Z}$.

By Thm. 6.6 and Thm. 9.7, if $\gamma \in V_F(f) \subset V_{F_\lambda}(f)$ and χ is a homomorphism $G_\infty \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ of finite order such that $c^2 - c^{k-j}\overline{\chi}(c) \neq 0, d^2 - d^j\overline{\chi}(d) \neq 0$ for $j = j_1, j_2$ and $1 - \overline{a}_\ell \ell^{1-k}\chi(\ell) \neq 0$ for any prime number $\ell \neq p$ which divides N, the homomorphism

$$\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \otimes_\Lambda \Lambda[\mu^{-1}] \longrightarrow S(f) \otimes_F \overline{F}_\lambda \qquad (\mu = \mu(c,d,j_1)\mu(c,d,j_2))$$

induced by (13.7.1) sends $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ to an element of $S(f)\otimes_F\overline{\mathbb{Q}}$ whose image under $\mathrm{per}_f : S(f)\otimes_F\overline{\mathbb{Q}}\to V_F(f)\otimes_F\mathbb{C}$ coincides with $L_S(f^*,\chi,k-1)\cdot\gamma^{\pm}$ where $S=\mathrm{prime}(pN)$ and $\pm=\chi(-1)$.

Since $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))$ is a free $\Lambda[1/p]$-module of rank 1 (Thm.12.4 (2)), this shows that $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ is independent of the choices of $\alpha_1,j_1,\alpha_2,j_2,c,d$ as above. This also shows

$$\mathbf{z}_{\iota(\gamma)}^{(p)}=-\sigma_{-1}(\mathbf{z}_\gamma^{(p)}).$$

since the action of σ_{-1} on $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda})$ commutes with the action of $-\chi(-1)$ on $S(f)\otimes_F\overline{F}_\lambda$ via the map (13.7.1).

We express the elements

$$\Big({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}\big(f,k,j,a(A),\mathrm{prime}(pA)\big)\Big)_{n\geqslant 1}\quad\text{and}\quad\Big({}_{c,d}\mathbf{z}^{(p)}\big(f,k,j,\alpha,\mathrm{prime}(pN)\big)\Big)_{n\geqslant 1}$$

($\alpha\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) by using $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$.

Lemma 13.10. — *We have the following equalities in* $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))\otimes_\Lambda Q(\Lambda)$.

(1) *Let* $1\leqslant j\leqslant k-1$, $a,A\in\mathbb{Z}$, $A\geqslant 1$, *and* c,d *be integers such that* $(c,6pA)=(d,6pN)=1$. *Then*

$$\Big({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}\big(f,k,j,a(A),\mathrm{prime}(pA)\big)\Big)_{n\geqslant 1}=\Big\{\prod_\ell(1-\overline{a}_\ell\ell^{-k}\sigma_\ell^{-1}+\overline{\varepsilon}(\ell)\ell^{-k-1}\sigma_\ell^{-2})\Big\}\cdot$$
$$(c^2d^2\mathbf{z}_{\gamma_1}^{(p)}-c^{k+1-j}d^2\sigma_c\mathbf{z}_{\gamma_2}^{(p)}-c^2d^{j+1}\varepsilon(d)\sigma_d\mathbf{z}_{\gamma_3}^{(p)}+c^{k+1-j}d^{j+1}\varepsilon(d)\sigma_{cd}\mathbf{z}_{\gamma_4}^{(p)})$$

where ℓ *ranges over all prime numbers* $\neq p$ *which divide* A, *and*

$$\gamma_1=\delta(f,j,a(A)),\qquad\gamma_2=\delta(f,j,ac(A)),$$
$$\gamma_3=\delta(f,j,\text{“}a/d\text{”}\,(A)),\qquad\gamma_4=\delta(f,j,\text{“}ac/d\text{”}\,(A)),$$

Here “a/d*” means any integer* b *such that* $bd\equiv a \bmod A$, *and “*ac/d*” means any integer* b *such that* $bd\equiv ac \bmod A$.

(2) *Let* $1\leqslant j\leqslant k-1$, $\alpha\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, *and let* c,d *be integers such that* $(cd,6p)=1$ *and* $c\equiv d\equiv 1 \bmod N$. *Then*

$$\Big({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}\big(f,k,j,\alpha,\mathrm{prime}(pN)\big)\Big)_{n\geqslant 1}=\tag{13.10.1}$$
$$(c^2-c^{k+1-j}\sigma_c)(d^2-d^{j+1}\sigma_d)\Big\{\textstyle\prod_\ell(1-\overline{a}_\ell\ell^{-k}\sigma_\ell^{-1})\Big\}\cdot\mathbf{z}_{\delta(f,j,\alpha)}^{(p)}$$

where ℓ *ranges over all prime numbers* $\neq p$ *which divide* N.

Proof. — By Thm. 12.4 (2), this is obtained by computing the images of the elements in problem under the map (13.7.1) by using Thm. 6.6 and Thm. 9.7. □

Lemma 13.11. — *Let* $A\geqslant 1$ *and let* ν *be a homomorphism* $(\mathbb{Z}/A)^\times\to\overline{\mathbb{Q}}^\times$.

(1) *For integers c, d such that $(c, 6Ap) = (d, 6ANp) = 1$, we have*

$$\sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a)\cdot\Big({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}\big(f,k,k-1,a(A),\mathrm{prime}(pA)\big)\Big)_{n\geqslant 1} =$$
$$\Big\{\prod_{\ell}(1-\overline{a}_\ell\ell^{-k}\sigma_\ell^{-1}+\overline{\varepsilon}(\ell)\ell^{-k-1}\sigma_\ell^{-2})\Big\}\cdot$$
$$(c^2-c^2\nu(c)^{-1}\sigma_c)(d^2-d^k\varepsilon(d)\nu(d)\sigma_d)\cdot\sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times}\nu(a)\mathbf{z}^{(p)}_{\delta(f,k-1,a(A))}$$

in $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))\otimes_\Lambda Q(\Lambda)\otimes_{O_\lambda}\overline{F}_\lambda$, where ℓ ranges over all prime numbers $\neq p$ which divide A.

(2) *The element $\sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times}\nu(a)\delta(f,k-1,a(A))$ of $V_F(f)\otimes\overline{\mathbb{Q}}$ is not zero if $L_{\mathrm{prime}(A)}(f^*,\nu^{-1},k-1)\neq 0$ and if the conductor of ν is A.*

Proof. — (1) follows from Lemma 13.10 (1). We prove (2). The canonical pairing (7.13.1)

$$\langle\ ,\ \rangle : V_k(Y_1(N))\times V_{k,c}(Y_1(N))\longrightarrow\mathbb{Q}$$

induces

$$\langle\ ,\mathrm{per}(f^*)\rangle : V_F(f)\longrightarrow\mathbb{C}.$$

We have for $A\geqslant 1$ and $a\in\mathbb{Z}$,

$$\langle\delta(f,k-1,a(A)),f^*\rangle=(-2\pi)^{k-1}\cdot A^{k-2}\cdot\int_0^\infty f^*\big(yi+a/A\big)y^{k-2}\,dy$$

From this, we obtain

$$\sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times}\nu(a)\langle\delta(f,k-1,a(A)),f^*\rangle$$
$$=(-1)^{k-1}A^{k-2}\cdot(k-2)!\cdot G(\nu,\zeta_A)\cdot L_{\mathrm{prime}(A)}(f^*,\nu^{-1},k-1).$$

where $G(\nu,\zeta_A)$ is the Gauss sum. This proves 13.11 (2). □

13.12. In this 13.12, we prove Thm. 12.5 (1) and Thm. 12.6.

Let $T=V_{O_\lambda}(f)$. Define $Z(f,T)$ to be the Λ-submodule of $\mathbf{H}^1(T)\otimes_\Lambda Q(\Lambda)$ generated by $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ for all $\gamma\in T$. On the other hand, let $Z\subset\mathbf{H}^1(T)$ be the Λ-submodule in Thm. 12.6.

By Lemma 13.10, we have $Z\subset Z(f,T)$. We prove that $Z(f,T)/Z$ is a finite group. This will show that

$$Z(f,T)\subset\mathbf{H}^1(T)\otimes\mathbb{Q}=\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)).$$

By 13.6 and by 13.10 (2), there is a non-zero-divisor μ of Λ such that $\mu\cdot Z(f,T)\subset Z$ and such that $\Lambda/\mu\Lambda$ is p-torsion free. Hence it is sufficient to show $Z(f,T)_{\mathfrak{p}}=Z_{\mathfrak{p}}$ for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of height one which does not contain p. Let $\mathfrak{p}$ be such a prime ideal, and let h be the map $\Lambda\to\Lambda/\mathfrak{p}$, and embed $\Lambda/\mathfrak{p}$ into $\overline{F}_\lambda$ over O_λ. Fix an embedding $\overline{\mathbb{Q}}\to\overline{F}_\lambda$ over F. Take integers c,d such that $(c,6p)=(d,6Np)=1$ and

$c^2 \neq 1$, $d^2 \neq 1$. By Thm. 13.5, there exist a power A of p and a homomorphism $\nu : (\mathbb{Z}/A)^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times \subset \overline{F}_\lambda^\times$ of conductor A satisfying the following (13.12.1)-(13.12.4).

$$L_{\{p\}}(f^*, \nu^{-1}, k-1) \neq 0 \tag{13.12.1}$$

$$c^2 - c^2\nu(c)^{-1}h(\sigma_c) \neq 0 \tag{13.12.2}$$

$$d^2 - d^k\varepsilon(d)\nu(d)h(\sigma_d) \neq 0 \tag{13.12.3}$$

(13.12.4) *Let $\pm$ be $+$ (resp. $-$) if the image of $-\sigma_{-1}$ in $\Lambda/\mathfrak{p}$ is 1 (resp. -1). Then* $\nu(-1) = \pm$.

Let L be the subfield of $\overline{F}_\lambda$ generated over $\Lambda/\mathfrak{p}$ by the values of ν, and let $\mathfrak{p}'$ be the kernel of the homomorphism $O_L[[G_\infty]] \to L$ induced by the canonical map $\Lambda \to \Lambda/\mathfrak{p} \subset L$ by O_L-linearity.

Let $\gamma \in V_F(f)$. Let $\pm$ be as in (13.12.4). Then the image of $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ in $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \otimes Q(\Lambda_\mathfrak{p})$ coincides with that of $\mathbf{z}_{\gamma^\pm}^{(p)}$. By 13.11 (2), (13.12.1), (13.12.4),

$$\gamma^\pm = b \cdot \sum_{a \in (\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a)\delta(f, k-1, a(A)) \quad \text{in } V_F(f) \otimes_F \overline{\mathbb{Q}}$$

for some $b \in \overline{\mathbb{Q}}$. We have

$$\mathbf{z}_\gamma^{(p)} = b \cdot \sum_{a \in (\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a)\mathbf{z}_{\delta(f,k-1,a(A))}^{(p)} \quad \text{in } \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \otimes_\Lambda Q(\Lambda_\mathfrak{p}) \otimes_{F_\lambda} L.$$

By 13.11 (1), (13.12.2), (13.12.3),

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a) \cdot \Big({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}\big(f, k, k-1, a(A), \mathrm{prime}(pA)\big)\Big)_{n \geqslant 1} = \mu \cdot \sum_{a \in (\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a)\mathbf{z}_{\delta(f,k-1,a(A))}^{(p)}$$

for some $\mu \in (O_L[[G_\infty]]_{\mathfrak{p}'})^\times$, and hence $\sum_{a \in (\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a)\mathbf{z}_{\delta(f,k-1,a(A))}^{(p)}$ belongs to $Z \otimes_\Lambda O_L[[G_\infty]]_{\mathfrak{p}'}$ in $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \otimes_\Lambda Q(O_L[[G_\infty]]_{\mathfrak{p}'})$. Hence $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ also belongs to $Z \otimes_\Lambda O_L[[G_\infty]]_{\mathfrak{p}'}$ in $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \otimes_\Lambda Q(O_L[[G_\infty]]_{\mathfrak{p}'})$. This proves $\mathbf{z}_\gamma^{(p)} \in Z_\mathfrak{p}$.

It remains to prove that $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ ($\gamma \in V_{F_\lambda}(f)$) has the property stated in Thm. 12.5 (1). Let $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$, let $\chi : G_\infty \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ be a homomorphism of finite order, and consider the composite map

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \simeq \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)(k-r)) &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{F_\lambda}(f)(k-r)) \\ &\xrightarrow{\exp^*} S(f) \otimes_F F_\lambda \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \xrightarrow{\chi} S(f) \otimes_F \overline{F}_\lambda \end{aligned} \tag{13.12.5}$$

where the last arrow is

$$\omega \otimes a \otimes b \longmapsto \sum_{\sigma \in G_n} \sigma(b)\omega \otimes a\chi(\sigma).$$

Let $h : \Lambda \to \overline{F}_\lambda$ be the ring homomorphism induced by $\kappa^{r-k}\chi^{-1} : G_\infty \to \overline{F}_\lambda^\times$, and let $\mathfrak{p}$ be the kernel of h. Then the map (13.12.5) is a Λ-homomorphism with respect to the action of Λ on $S(f) \otimes_F \overline{F}_\lambda$ via h. Take integers c, d such that $(c, 6p) = (d, 6Np) = 1$

and $c^2 \neq 1$, $d^2 \neq 1$. By Thm. 13.5, there exist a power A of p and a homomorphism $\nu : (\mathbb{Z}/A)^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times \subset \overline{F}_\lambda^\times$ satisfying (13.12.1)-(13.12.4). Let $\gamma \in V_F(f)$. Let $\pm$ be as in (13.12.4). Then the image of $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ in $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))_\mathfrak{p}$ coincides with that of $\mathbf{z}_{\gamma^\pm}^{(p)}$. By 13.11 (2), (13.12.1), (13.12.4), $\gamma^\pm = b \cdot \sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a)\delta(f, k-1, a(A))$ for some $b \in \overline{\mathbb{Q}}$. We have

$$\mathbf{z}_\gamma^{(p)} = b \cdot \sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a)\mathbf{z}^{(p)}_{\delta(f,k-1,a(A))};$$

$$\sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a) \cdot \Big({}_{c,d}\mathbf{z}^{(p)}_{p^n}\big(f, k, k-1, a(A), \mathrm{prime}(pA)\big)\Big)_{n\geqslant 1} = \mu \cdot \sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a)\mathbf{z}^{(p)}_{\delta(f,k-1,a(A))}$$

where $\mu = (c^2 - c^2\nu(c)^{-1}\sigma_c)(d^2 - d^k\varepsilon(d)\nu(d)\sigma_d)$. Hence the image of $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ under (13.12.5) coincides with the image of

$$\sum_{a\in(\mathbb{Z}/A)^\times} \nu(a) \cdot \Big({}_{c,d}\mathbf{z}^{(p)}_{p^n}\big(f, k, k-1, a(A), \mathrm{prime}(pA)\big)\Big)_{n\geqslant 1} \cdot b \cdot (c^2 - c^2\nu(c)^{-1}\chi(c)^{-1})^{-1}(d^2 - d^k\varepsilon(d)\nu(d)\chi(d)^{-1})^{-1}.$$

By Thm. 6.6 and Thm. 9.7, this image is an element of $S(f) \otimes_F \overline{\mathbb{Q}}$ whose image under per_f coincides with $(2\pi i)^{k-r-1}L_{\{p\}}(f^*, \chi, r) \cdot \gamma^\pm$. □

13.13. We prove Thm. 12.5 (2) (3).

Thm. 12.5 (2) follows from Thm. 12.4 (2) and the fact that $Z(f)_\mathfrak{q} \neq 0$ for prime ideals $\mathfrak{q}$ of height 0 (13.7).

The inequality in Thm. 12.5 (3) is a consequence of the inequality in Thm. 13.4 (2).

It remains to prove the statement about the vanishing of $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f))_\mathfrak{p}$ in Thm. 12.5 (3). Assume $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f))_\mathfrak{p} \neq 0$. Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)$. By Tate's local duality, the Pontrjagin dual of $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T)$ is isomorphic to

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}), \mathrm{Hom}_{O_\lambda}(T, F_\lambda/O_\lambda)(1))$$

Denote this O_λ-module by C. If $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f))_\mathfrak{p} \neq 0$, $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T)$ is not finite, and hence C contains an O_λ-submodule which is isomorphic to F_λ/O_λ. Since

$$\mathrm{Hom}_{O_\lambda}(F_\lambda/O_\lambda, C) \subset \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}), \mathrm{Hom}_{F_\lambda}(V_{F_\lambda}(f), F_\lambda)(1)),$$

this means that the last space is not zero. Hence $V_{F_\lambda}(f)$ has a non-zero quotient representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ over F_λ on which the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ factors through the canonical projection $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to G_\infty$. Since $V_{F_\lambda}(f)$ is of Hodge-Tate as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ [**Fa1**], it follows from [**Se2**, Chap. III, Appendix] that this quotient representation has a non-zero quotient representation U of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ over F_λ such that for some $n \geqslant 0$, the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ on U is given by κ^r for some $r \in \mathbb{Z}$. (κ denotes the cyclotomic character as before.) Let $\mathbb{C}_p$ be the p-adic completion of $\overline{F}_\lambda$. Then

$$V_{F_\lambda}(f) \otimes_{F_\lambda} \mathbb{C}_p \simeq \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(1-k) \qquad [\mathbf{Fa1}]. \tag{13.13.1}$$

If $U = V_{F_\lambda}$, we have $U \otimes_{F_\lambda} \mathbb{C}_p \simeq \mathbb{C}_p(r)^{\oplus 2}$ which is a contradiction. Hence

$$\dim_{F_\lambda}(U) = 1 \quad \text{and} \quad U \otimes_{F_\lambda} \mathbb{C}_p \simeq \mathbb{C}_p(r).$$

By (13.13.1), we have $r \in \{0, 1-k\}$. On the other hand, the Frobenius operator on $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), U)$ ($\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),\ )$ means the $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}$ for the local field $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$) is the multiplication by p^{-2r}, but by [**Sa2**], the eigenvalues of the Frobenius operator on $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), U)$ must have complex absolute value $p^{(k-1)/2}$ (resp. $p^{k/2}$) if f is (resp. is not) potentially of good reduction at p. Hence $-2r \in \{k-1, k\}$. Since $r \in \{0, 1-k\}$ and $k \geqslant 2$, this means $k = 2$ and $r = -1$ and that f is not potentially of good reduction at p. Furthermore, the O_λ-module C has O_λ-corank 1. (If it has corank 2, the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ on $V_{F_\lambda}(f)$ factors through G_∞, and then by Serre [**Se2**, Chap. III, Appendix], $V_{F_\lambda}(f)$ should be potentially of good reduction at p.) By duality, $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f))$ is a one-dimensional F_λ-vector space, and is isomorphic to $U(-1)$ as a Λ-module. □

13.14. We prove Thm. 12.5 (4). Since $T = a \cdot V_{O_\lambda}(f)$ for some $a \in F_\lambda^\times$ under the assumption of Thm. 12.5 (4) (see 12.8), we may assume $T = V_{O_\lambda}(f)$. In this case, since $Z(f,T)/Z$ is a finite group, $Z(f,T)_{\mathfrak{p}} \subset \mathbf{H}^1(T)_{\mathfrak{p}}$ for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of Λ of height one. Since $\mathbf{H}^1(T)$ is a free Λ-module under the assumption of 12.5 (4) by 12.4 (2), this means $Z(f,T) \subset \mathbf{H}^1(T)$. The inequality in Thm. 12.5 (4) follows from Thm. 13.4 (3). □

14. Finiteness of Selmer groups and Tamagawa number conjectures

In this section, we prove results on finiteness of Selmer groups associated to modular forms (Thm. 14.2). The proof is given completely in this section in the case f has no CM and the proof for the CM case will be completed in § 15. Thm. 14.2 in the CM case has been proved in many cases (Rubin [**Ru2**], Guo [**Gu**], Han [**Ha**], Dee [**DJ**],...). We also consider in this section the Tamagawa number conjecture for modular forms (Thm. 14.5).

14.1. We define the Selmer groups of p-adic Galois representations of number fields by the method of [**BK2**], as follows.

Let K be a finite extension of $\mathbb{Q}$, let p be a prime number, and let T be a free $\mathbb{Z}_p$-module of finite rank endowed with a continuous actions of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. We define the Selmer group $\mathrm{Sel}(K,T) \subset \mathrm{H}^1(K, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ by

$$\mathrm{Sel}(K,T) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(K, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \bigoplus_v \mathrm{H}^1(K_v, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \mathrm{Image}(\mathrm{H}^1_f(K_v, T \otimes \mathbb{Q})))$$

where v ranges over all places of K, and H^1_f is as in [**BK2**, § 3]. (The notation f in H^1_f has nothing to do with our cusp form f.) We review the definition of H^1_f. For a finite

dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space V endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$, the subspace $\mathrm{H}^1_f(K_v,V)$ of $\mathrm{H}^1(K_v,V)$ is defined by

$$\mathrm{H}^1_f(K_v,V)=\begin{cases}\mathrm{H}^1(K_v,V)=0 & \text{if } v \text{ is archimedian,}\\ \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(K_v,V)\to\mathrm{H}^1(K_v^{\mathrm{ur}},V)) & \text{if } v \text{ is a finite place not lying over } p,\\ \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(K_v,V)\to\mathrm{H}^1(K_v,\mathrm{B}_{\mathrm{crys}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)) & \\ & \text{if } v \text{ is a finite place lying over } p.\end{cases}$$

Here K_v^{ur} denotes the maximal unramified extension of F_v.

If A is an abelian variety over K, the usual Selmer group $\mathrm{Sel}(K,A)$ of A coincides with $\bigoplus_p \mathrm{Sel}(K,T_p(A))$ where p ranges over all prime numbers.

In the case $K=\mathbb{Q}$, we denote $\mathrm{Sel}(\mathbb{Q},T)$ simply by $\mathrm{Sel}(T)$.

In this section, we prove

Theorem 14.2. — *Let K be a finite abelian extension of $\mathbb{Q}$.*

(1) *Let r be an integer such that $1\leqslant r\leqslant k-1$ and $r\neq k/2$. Then for any finite place λ of F and any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$, $\mathrm{Sel}(K,T)$ is finite. For almost all finite places λ of F, $\mathrm{Sel}(K,T)=0$ for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$.*

(2) *Assume k is even. Let $\chi:\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\to\mathbb{C}^\times$ be a character, and assume $L(f,\chi,k/2)\neq 0$. Then for any finite place λ of F and any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(k/2)$, the "χ-part" $\mathrm{Sel}(K,T)^{(\chi)}$ of $\mathrm{Sel}(K,T)$ is finite. For almost all finite places λ of F, $\mathrm{Sel}(K,T)^{(\chi)}=0$ for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(k/2)$.*

The above "χ-part" is defined as follows. Let $G=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, and let $I_\chi\subset\mathbb{Z}[G]$ be the kernel of the ring homomorphism $\mathbb{Z}[G]\to\overline{\mathbb{Q}}$ induced by χ. Then, for a G-module M, the χ-part $M^{(\chi)}$ of M is defined by

$$M^{(\chi)}=\{x\in M\,;\,I_\chi\cdot x=0\}.$$

In 14.2 (2), $L(f,\chi,s)$ means $L_S(f,\chi,s)$ in which we identify χ with the composite homomorphism

$$(\mathbb{Z}/m)^\times\simeq\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})\longrightarrow\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\xrightarrow{\chi}\mathbb{C}^\times$$

for the smallest integer $m\geqslant 1$ such that $K\subset\mathbb{Q}(\zeta_m)$, and $S=\mathrm{prime}(m)=\{\text{primes which ramify in } K/\mathbb{Q}\}$.

Corollary 14.3. — *Let A be an abelian variety over $\mathbb{Q}$ such that there is a surjective homomorphism $J_1(N)\to A$ for some $N\geqslant 1$, where $J_1(N)$ denotes the Jacobian variety of $X_1(N)$. Let K be a finite abelian extension of $\mathbb{Q}$, let $\chi:\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\to\mathbb{C}^\times$ be a character, and assume $L(A,\chi,1)\neq 0$. Then:*

(1) *The χ-part $\mathrm{Sel}(K,A\otimes_{\mathbb{Q}}K)^{(\chi)}$ of $\mathrm{Sel}(K,A\otimes_{\mathbb{Q}}K)$ is finite.*

(2) *The χ-part of $A(K)^{(\chi)}$ is finite.*

In the case $J_1(N)$ is replaced by $J_0(N)$ and $K = \mathbb{Q}$, this result is contained in the work of Kolyvagin-Logachov [**KoL**]. In the case A is an elliptic curve with complex multiplication, this result is contained in the work of Rubin [**Ru1**] which generalized the work of Coates-Wiles [**CW**].

We can replace the "χ-parts" $\mathrm{Sel}(K,T)^{(\chi)}$, $\mathrm{Sel}(K, A\otimes_{\mathbb{Q}} K)^{(\chi)}$ and $A(K)^{(\chi)}$ in 14.2 and 14.3 by the "χ-quotients" $\mathrm{Sel}(K,T)_{(\chi)}$, $\mathrm{Sel}(K, A\otimes_{\mathbb{Q}} K)_{(\chi)}$ and $A(K)_{(\chi)}$, respectively, where $M_{(\chi)} = M/I_\chi M$ for a G-module M. This is because the kernel and the cokernel of the canonical map $M^{(\chi)} \to M_{(\chi)}$ are killed by some non-zero integer, and because for $M = \mathrm{Sel}(K,T), \mathrm{Sel}(K, A\otimes_{\mathbb{Q}} K)$ or $A(K)$, the kernel and the cokernel of $n : M \to M$ are finite for any non-zero integer n.

I learned from Professor John Coates that the following result is deduced from Cor. 14.3 by using the theorem of Rohrlich introduced in 13.5 (2).

Theorem 14.4. — *Let A be an abelian variety over $\mathbb{Q}$ such that there is a surjective homomorphism $J_1(N) \to A$ for some $N \geqslant 1$. Then for any $m \geqslant 1$, $\bigcup_n A(\mathbb{Q}(\zeta_{m^n}))$ is finitely generated as an abelian group.*

The argument to deduce 14.4 from 14.2 is given in Rohrlich [**Ro1**, § 3] where he considered the case A is an elliptic curve with complex multiplication by using the result of Rubin [**Ru1**].

The "anti-cyclotomic" analogues of Thm. 14.3, Thm. 14.4 were obtained by Bertolini and Darmon [**BD**].

The following theorem is related to the Tamagawa number conjecture in [**BK2**].

Theorem 14.5. — *Let $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$. Let p be a prime number, λ a place of F lying over p, and let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)(r)$. In (1) (resp. (2) and (3)) below, we assume $L(f,k/2) \neq 0$ in the case $r = k/2$ (resp. $L_{\{p\}}(f,k-r) \neq 0$ in the case $r > k/2$).*

(1) $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p],T)$ *is finite and* $\mathrm{rank}_{O_\lambda}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p],T)) = 1$.

(2) *Let γ be an element of $V_{F_\lambda}(f)$, and let z be the image of $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ under*

$$\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \simeq \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)(r)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f)(r)).$$

Let $\pm = (-1)^{r-1}$. Then, if $\gamma^\pm \neq 0$, z is an F_λ-basis of $\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f)(r))$.

(3) *Assume $p \neq 2$. Assume either $k \geqslant 3$ or f is potentially of good reduction at p, and assume further that the condition* (12.5.1) *in Thm. 12.5 (4) is satisfied. Let γ, z, and $\pm$ be as in (2), and assume that $\gamma^\pm$ is an O_λ-basis of $T(-r)^\pm$. Then we have*

$$\#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p],T)) \leqslant [\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p],T) : z].$$

Here, $[\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p],T) : z]$ is defined as follows. Let L be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ (we take F_λ as L in the above), let M be a finitely generated O_L-module such that $\dim_L(M\otimes\mathbb{Q}) = 1$, and let z be a non-zero element of $M\otimes\mathbb{Q}$. Take $y \in M$ and a

non-zero integer c such that $z = c^{-1}y$ in $M \otimes \mathbb{Q}$. We define

$$[M : z] = [M : O_L y] \cdot [O_L : cO_L]^{-1}$$

(then this is independent of the choices of y and c).

The Tamagawa number conjecture in [**BK2**] generalized by [**FP**], [**KK2**] predicts

$$\#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T) = [\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T) : z]$$

in 14.5 (3).

The rest of § 14 is devoted to the proofs of Thm 14.2 and Thm 14.5.

14.6. In this 14.6, we show that for the proof of Thm. 14.2, we may assume $K = \mathbb{Q}$.

Let the notation be as in Thm. 14.2. Let $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Then the following is proved without difficulty:

$$\mathrm{Sel}(K, T) = \mathrm{Sel}(T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]) \ (\underset{\text{def}}{=} \mathrm{Sel}(\mathbb{Q}, T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]))$$

where the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $\mathbb{Z}[G]$ is as follows:

(14.6.1) *For $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, σ acts on $\mathbb{Z}[G]$ as the multiplication by the image of σ^{-1} under the canonical map $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to G$.*

The normalization of $O_F[G]$ has the form $\prod_{i \in I} O_{L_i}$ where $(L_i)_{i \in I}$ is a finite family of finite extensions of $\mathbb{Q}$. Let c be a non-zero integer which kills $(\prod_{i \in I} O_{L_i})/O_F[G]$. Then the kernel and the cokernel of

$$\mathrm{Sel}(T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]) \longrightarrow \mathrm{Sel}\left(T \otimes_{O_F} \prod_{i \in I} O_{L_i}\right) = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{v} \mathrm{Sel}(T \otimes_{O_\lambda} O_v)$$

are killed by c, where for each i, v ranges over all places of L_i lying over λ and O_v denotes the valuation ring of v, and where $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on O_{L_i} and on O_v via (14.6.1). Hence $\mathrm{Sel}(K, T)$ is finite if each $\mathrm{Sel}(T \otimes_{O_\lambda} O_v)$ is finite, and $\mathrm{Sel}(K, T) = 0$ if each $\mathrm{Sel}(T \otimes_{O_\lambda} O_v)$ is zero and λ does not divide c. Let $m \geqslant 1$ and S be as in the remark after Thm.14.2, and for $i \in I$, let

$$\nu_i : (\mathbb{Z}/m)^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

be the composite map:

$$(\mathbb{Z}/m)^\times \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^\times \longrightarrow (O_{L_i})^\times \subset \overline{\mathbb{Q}}^\times \subset \mathbb{C}^\times,$$

and let $f_i = \sum_{n \geqslant 1} a_{n,i} q^n$ be the normalized newform such that $L_S(f_i, s) = L_S(f, \nu_i, s)$. (Hence $a_{n,i} = a_n \nu_i(n)$ if n is prime to m.) Let $F_i = \mathbb{Q}(a_{n,i}; n \geqslant 1) \subset L_i$. Let v be a place of L_i lying over λ, and let w be the place of F_i lying over v. Then by comparing the action of Frobenius substitutions of prime numbers which are prime to Nm, we see that $V_{F_\lambda}(f) \otimes_{F_\lambda} L_{i,v}$ with the action (14.6.1) of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $L_{i,v}$ is isomorphic to $V_{F_{i,w}}(f_i) \otimes_{F_{i,w}} L_{i,v}$ with the trivial action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $L_{i,v}$, as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over $L_{i,v}$. Take any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_w-lattice T' of $V_{F_{i,w}}(f_i)$. Then both $T \otimes_{O_\lambda} O_v$ (here $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on O_v via (14.6.1))

and $T' \otimes_{O_w} O_v$ (here $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on O_v trivially) are regarded as $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_v-lattice of $V_{F_\lambda}(f) \otimes_{F_\lambda} L_{i,v}$. Since $\mathrm{Sel}(T' \otimes_{O_w} O_v) = \mathrm{Sel}(T') \otimes_{O_w} O_v$ (here $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on O_v trivially), the finiteness (resp. the vanishing) of $\mathrm{Sel}(T \otimes_{O_\lambda} O_v)$ (here $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on O_v via (14.6.1)) is reduced (resp. reduced for almost all λ by Lemma 14.7 below) to the finiteness (resp. the vanishing) of $\mathrm{Sel}(T')$. Concerning the χ-part, $\mathrm{Sel}(K,T)^{(\chi)} = \mathrm{Sel}(T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G])^{(\chi)}$. The image of $\chi : \mathbb{Q}[G] \to \mathbb{C}$ is some of the number fields L_i which appeared when we took the normalization of $\mathbb{Z}[G]$ in the above argument. The kernel and the cokernel of

$$\mathrm{Sel}(T \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_{L_i})^{(\chi)} \longrightarrow \mathrm{Sel}(T \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_{L_i})$$

are killed by the non-zero integer c which appeared in the above argument. Hence the finiteness of $\mathrm{Sel}(K,T)^{(\chi)}$ (resp. the vanishing of $\mathrm{Sel}(K,T)^{(\chi)}$ for almost all λ) is reduced by the above argument to the finiteness (resp. vanishing) of $\mathrm{Sel}(T')$ where T' is as above.

Lemma 14.7. — *Almost all finite places λ of F satisfy the following condition: For any finite extension P of F_λ and for any two $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_P-lattices T, T' of $V_{F_\lambda}(f) \otimes_{F_\lambda} P$, there exists $a \in P^\times$ such that $T' = aT$.*

Proof. — Here we give the proof in the case f has no CM. The proof for the CM case will be given in 15.19.

Assume f has no CM. Then as in (12.8.1), for almost λ, there exists an F_λ-basis (e_1, e_2) of $V_{F_\lambda}(f)$ such that $O_\lambda e_1 + O_\lambda e_2$ is stable under $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ and the image of the homomorphism $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(O_\lambda)$ associated to this basis contains $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$. We show that such λ satisfies the condition stated in 14.7. Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_P-lattice of $V_{F_\lambda}(f) \otimes_{F_\lambda} P$. Let $a_1e_1 + a_2e_2 \in T (a_i \in O_P)$. Then by applying $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ to $a_1e_1 + a_2e_2$, we obtain $a_2e_1, a_1e_2 \in T$. By applying $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ to a_2e_1, a_1e_2, we obtain $a_1e_1, a_2e_2 \in T$. This shows that $T = a(O_P e_1 + O_P e_2)$ where a is a generator of the fractional O_P-ideal generated by all $a_1, a_2 \in P$ such that $a_1e_1 + a_2e_2 \in T$. □

14.8. In general, for a finite extension K of $\mathbb{Q}$ and for a free $\mathbb{Z}_p$-module T of finite rank endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, let

$$\mathcal{S}(K,T) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(O_K[1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \bigoplus_{v|p} \mathrm{H}^1(K_v, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \mathrm{Image}(\mathrm{H}^1_f(K_v, T \otimes \mathbb{Q}))).$$

where v ranges over all places of K lying over p. Then $\mathrm{Sel}(K,T) \subset \mathcal{S}(K,T)$ and $\mathcal{S}(K,T)/\mathrm{Sel}(K,T)$ is a finite group which is embedded into the direct sum of

$$H^1(\mathbb{F}_v, H^0(K_v^{\mathrm{ur}}, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))/\mathrm{Image}(H^1_f(K_v, T \otimes \mathbb{Q}))) = H^1(\mathbb{F}_v, H^0(K_v^{\mathrm{ur}}, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))/(\mathrm{div})$$

where v ranges over all finite places of K not lying over p and div denotes the divisible part. (The last group is zero if T is unramified at v.).

In the case $K = \mathbb{Q}$, we denote $\mathcal{S}(\mathbb{Q}, T)$ by $\mathcal{S}(T)$.

For the proof of Thm 14.2, it is sufficient to prove the following : Assume $1 \leqslant r \leqslant k-1$. If k is even and $r = k/2$, assume $L(f, r) \neq 0$. Then $\mathcal{S}(T)$ is finite for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$, and for almost all λ, $\mathcal{S}(T) = 0$ for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$.

14.9. We give preliminaries on the duality theory of étale cohomology for global and local fields ([**FL**], [**FP**], [**KK1**]).

Let K be a finite extension of $\mathbb{Q}$, let L be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$, and let T be a finitely generated O_L-module endowed with a continuous O_L-linear action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ which is unramified at almost all finite places of K.

By the duality theory of Poitou-Tate [**Ta1, Ma2**], we have sequences of O_L-modules

$$\begin{aligned}(14.9.1)\quad 0 &\longrightarrow \mathrm{H}^0(O_K[1/p], T) \longrightarrow \mathrm{H}^0(K \otimes \mathbb{Q}_p, T)\\ &\longrightarrow \{\mathrm{H}^2(O_K[1/p], T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^1(O_K[1/p], T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K \otimes \mathbb{Q}_p, T)\\ &\longrightarrow \{\mathrm{H}^1(O_K[1/p], T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^2(O_K[1/p], T) \longrightarrow \mathrm{H}^2(K \otimes \mathbb{Q}_p, T)\\ &\longrightarrow \{\mathrm{H}^0(O_K[1/p], T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}^\vee \longrightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(14.9.2)\quad 0 &\longrightarrow \mathrm{H}^0(O_K[1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(K \otimes \mathbb{Q}_p, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\\ &\longrightarrow \{\mathrm{H}^2(O_K[1/p], T^*(1))\}^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^1(O_K[1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1(K \otimes \mathbb{Q}_p, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \{\mathrm{H}^1(O_K[1/p], T^*(1))\}^\vee\\ &\longrightarrow \mathrm{H}^2(O_K[1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(K \otimes \mathbb{Q}_p, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\\ &\longrightarrow \{\mathrm{H}^0(O_K[1/p], T^*(1))\}^\vee \longrightarrow 0\end{aligned}$$

($T^* = \mathrm{Hom}_{O_L}(T, O_L)$ endowed with the dual action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, and $\{\ \}^\vee = \mathrm{Hom}_{O_L}(\ , L/O_L)$), which are exact in the case $p \neq 2$, and exact upto $\times 2$ in the case $p = 2$. Here we say that a sequence of abelian groups

$$\ldots \longrightarrow C_i \xrightarrow{f_i} C_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots$$

is exact upto $\times 2$ if $2 \cdot \mathrm{Image}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ and $2 \cdot \mathrm{Ker}(f_{i+1}) \subset \mathrm{Image}(f_i)$ for all i.

We have the local Tate duality

$$\{\mathrm{H}^q(K \otimes \mathbb{Q}_p, T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}^\vee \simeq \mathrm{H}^{2-q}(K \otimes \mathbb{Q}_p, T) \qquad (q \in \mathbb{Z}).$$

If v is a place of K lying over p and $V = T \otimes \mathbb{Q}$ is de Rham as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$, we have the duality ([**BK2**], § 3)

$$\{H^1(K_v, T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\,\mathrm{Image}(\mathrm{H}^1_f(K_v, V^*(1))\}^\vee \simeq \mathrm{H}^1_f(K_v, T)$$

where $\mathrm{H}^1_f(K_v, T) \subset \mathrm{H}^1(K_v, V)$ denotes the inverse image of $\mathrm{H}^1_f(K_v, V) \subset \mathrm{H}^1(K_v, V)$. Hence, if V is de Rham as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ for any place v of K lying

over p, we obtain from (14.9.1) a sequence of O_L-modules

$$\begin{aligned}(14.9.3)\quad 0 \longrightarrow\ & \mathrm{H}^1(O_K[1/p],T)/\mathrm{H}^1_f(O_K[1/p],T)\\ \xrightarrow{a}\ & \mathrm{H}^1(K\otimes\mathbb{Q}_p,T)/\mathrm{H}^1_f(K\otimes\mathbb{Q}_p,T)\longrightarrow\{\mathcal{S}(K,T^*(1))\}^\vee\\ \longrightarrow\ & \mathrm{H}^2(O_K[1/p],T)\longrightarrow\mathrm{H}^2(K\otimes\mathbb{Q}_p,T)\\ \longrightarrow\ & \{\mathrm{H}^0(O_K[1/p],T^*(1)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}^\vee\longrightarrow 0\end{aligned}$$

(here we define $\mathrm{H}^1_f(K\otimes\mathbb{Q}_p,\ )$ to be the direct sum of $\mathrm{H}^1_f(K_v,\ )$ for places v of K lying over p, and $\mathrm{H}^1_f(O_K[1/p],T)$ to be the inverse image of $\mathrm{H}^1_f(K\otimes\mathbb{Q}_p,V)\subset\mathrm{H}^1(K\otimes\mathbb{Q}_p,V)$ in $\mathrm{H}^1(O_K[1/p],T)$), and from (14.9.2) a sequence of O_L-modules

$$\begin{aligned}(14.9.4)\quad 0\longrightarrow\ & \mathcal{S}(K,T)\longrightarrow\mathrm{H}^1(O_K[1/p],T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{b}\ & \mathrm{H}^1(K\otimes\mathbb{Q}_p,T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\operatorname{Image}(\mathrm{H}^1_f(K\otimes\mathbb{Q}_p,V))\\ \longrightarrow\ & \{\mathrm{H}^1_f(K\otimes\mathbb{Q}_p,T^*(1))\}^\vee\longrightarrow\mathrm{H}^2(O_K[1/p],T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\\ \longrightarrow\ & \mathrm{H}^2(K\otimes\mathbb{Q}_p,T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\longrightarrow\{\mathrm{H}^0(O_K[1/p],T^*(1))\}^\vee\longrightarrow 0\end{aligned}$$

which are exact in the case $p\neq 2$, and exact upto $\times 2$ in the case $p=2$.

We will use also the following results of Euler-Poincaré characteristics which are deduced from Tate [**Ta2**, Thm. 2.2]. Assume $K=\mathbb{Q}$ (we will need only this case).

$$(14.9.5)\qquad \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q\mathrm{rank}_{O_L}(\mathrm{H}^q(\mathbb{Z}[1/p],T))=-\mathrm{rank}_{O_L}(T^-).$$

$$(14.9.6)\qquad \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q\mathrm{rank}_{O_L}(\mathrm{H}^q(\mathbb{Q}_p,T))=-\mathrm{rank}_{O_L}(T).$$

14.10. We review some basic properties of the Galois representation $V_{F_\lambda}(f)$. The following are known (see [**Ca, Sa1, Sa2**]):

(14.10.1) *$V_{F_\lambda}(f^*)$ is isomorphic to $\mathrm{Hom}_{F_\lambda}(V_{F_\lambda}(f),F_\lambda)(1-k)$ as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over F_λ. Hence for $r\in\mathbb{Z}$ and for a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$, $T^*(1)$ is isomorphic to a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f^*)(k-r)$ as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over O_λ.*

(14.10.2) *The action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $\det_{F_\lambda}(V_{F_\lambda}(f))$ is given by $\kappa^{1-k}\varepsilon^{-1}$ where κ is the cyclotomic character and ε is regarded as the character of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ by*

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})\simeq(\mathbb{Z}/N)^\times\xrightarrow{\varepsilon}F^\times.$$

(14.10.3) *For any prime number ℓ which is not divided by λ,*

$$\det_{F_\lambda}(1-\mathrm{Fr}_\ell^{-1}u\,;\,\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}},V_{F_\lambda}(f)))=1-a_\ell u+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1}u^2.$$

Here Fr_ℓ is the arithmetic Frobenius of ℓ. ($\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}},\ )$ means the fixed part by the inertia subgroup of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$.)

(14.10.4) *For the prime number p lying under λ,*

$$\det_{F_\lambda}(1-\varphi u\,;\,\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(\mathbb{Q}_p,V_{F_\lambda}(f)))=1-a_pu+\varepsilon(p)p^{k-1}u^2.$$

where φ is the Frobenius operator.

(14.10.5) *Let ℓ be a prime number and let α be an element of $\overline{\mathbb{Q}}$ such that $1-\alpha u$ divides $1-a_\ell u+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1}u^2$. Then $|\alpha|=\ell^{(k-1)/2}$ or $|\alpha|=\ell^{(k-2)/2}$. If ℓ does not divide N, then $|\alpha|=\ell^{(k-1)/2}$. In particular, Thm. 13.5 (1) implies that $L_S(f,s)$ has no zero on $\{s\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Re}(s)\geqslant\frac{k+1}{2}\}$ for any finite set of primes S.*

Proposition 14.11. — *Let $r\in\mathbb{Z}$.*

(1) *For any finite place λ of F and for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$, $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q},T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ is finite.*

(2) *For almost all finite places λ of F, we have $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q},T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0$ for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$.*

Proof. — (1) follows from $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q},V_{F_\lambda}(f)(r))=0$. We prove (2). Let ℓ be a prime number which does not divide N and which λ does not divide. Then by (14.10.3), the action of $1-a_\ell\mathrm{Fr}_\ell+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1}\mathrm{Fr}_\ell^2$ is zero on $V_{F_\lambda}(f)$, and hence $1-a_\ell\ell^{-r}\mathrm{Fr}_\ell+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1-2r}\mathrm{Fr}_\ell^2=0$ on $T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Since Fr_ℓ acts trivially on $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q},T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, we have that $1-a_\ell\ell^{-r}+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1-2r}=0$ on $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q},T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. If we can prove there exists a prime number ℓ which does not divide N and which satisfies $1-a_\ell\ell^{-r}+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1-2r}\neq0$, then we have that $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q},T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0$ in the case λ does not divide $\ell(1-a_\ell\ell^{-r}+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1-2r})$. Assume $1-a_\ell\ell^{-r}+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1-2r}=0$ for all prime numbers ℓ which do not divide N. Then

$$1-a_\ell\ell^{-s}+\varepsilon(\ell)\ell^{k-1-2s}=(1-\ell^{r-s})(1-\varepsilon(\ell)\ell^{k-1-r-s})$$

for all prime numbers ℓ which do not divide N, and hence we have

$$L_S(f,s)=\zeta_S(s-r)L_S(\varepsilon,s-k+1+r)$$

where $S=\mathrm{prime}(N)$, which is absurd. □

Proposition 14.12. — *Assume $1\leqslant r\leqslant k-1$. Let p be the prime number lying under λ. Then:*

(1) $\dim_{F_\lambda}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p,V_{F_\lambda}(f)(r)))=2$.
(2) $\dim_{F_\lambda}(\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p,V_{F_\lambda}(f)(r)))=1$.
(3) $\mathrm{H}^q(\mathbb{Q}_p,V_{F_\lambda}(f)(r))=0$ *for* $q\neq1$.

Proof. — By the result on $\varprojlim_n\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),T_\lambda(f))$ in Thm. 12.5 (3), we have $\mathrm{H}^q(\mathbb{Q}_p,V_{F_\lambda}(f)(r))=0$ for $q\neq1$.

By (14.9.6), we have $\dim_{F_\lambda}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r))) = 2$. From the exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r)) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f)) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f)) \oplus \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f))/\mathrm{D}^r_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) \longrightarrow \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r)) \longrightarrow 0$$

[**BK2**, § 3], we have

$$\dim_{F_\lambda}(\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r))) = \dim_{F_\lambda}(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f))/\mathrm{D}^r_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f))) = 1. \qquad \square$$

14.13. Let $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$. In the case $r = k/2$, assume $L(f, k/2) \neq 0$. In this 14.13, we prove (1)(2) of Thm. 14.5 and the finiteness of $\mathcal{S}(T)$ for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$, by using Thm. 12.5 (3) (the proof of Thm. 12.5 (3) in the CM case will be given in § 15).

Let $\pm = (-1)^{r-1}$, let γ be an element of $V_F(f)$ such that $\gamma^{\pm} \neq 0$, and let z be the image of $\mathbf{z}^{(p)}_\gamma$ under the composition

$$\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))(r) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f)(r)). \tag{14.13.1}$$

Then the image of z under

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f)(r)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r)) \xrightarrow{\exp^*} S(f) \otimes_F F_\lambda$$

is an element of $S(f)$ whose image under $\mathrm{per}_f : S(f) \to V_{\mathbb{C}}(f)^{\pm}$ coincides with $L_{\{p\}}(f, k-r)\cdot\gamma^{\pm}$. ($\exp^*$ kills $\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p,)$; [**BK2**, § 3]). This shows that if $L_{\{p\}}(f, k-r) \neq 0$, the image of $\mathbf{z}^{(p)}_\gamma$ in $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r))$ is not zero.

We prove the finiteness of $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)$ in the case $r \leqslant k/2$. Let $\mathfrak{p}$ be the kernel of the O_λ-homomorphism

$$\Lambda \longrightarrow O_\lambda$$

which sends σ_c ($c \in {\mathbb{Z}_p}^{\times}$) to c^{-r}. Then the map (14.13.1) factors through $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}$. Since $L_{\{p\}}(f, k-r) \neq 0$ by 13.5 (1) and 14.10.5, we see that the image of $\mathbf{z}^{(p)}_\gamma$ in $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))$ is a $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-basis of $\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}$. Hence $\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}} = 0$ by Thm. 12.5 (3). Since

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f)(r)) \simeq \mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f))_{\mathfrak{p}}(r),$$

we have $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f)(r)) = 0$. This proves the finiteness of $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)$.

We prove $\mathrm{rank}_{O_\lambda}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T)) = 1$ in the case $r \leqslant k/2$. This follows from the finiteness of $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)$ and $\mathrm{H}^0(\mathbb{Z}[1/p], T) = 0$ by (14.9.5).

We prove the finiteness of $\mathcal{S}(T)$ in the case $r \geqslant k/2$. By the duality (14.10.1), it is sufficient to prove the finiteness of $\mathcal{S}(T^*(1))$ in the case $r \leqslant k/2$. Consider the sequence (14.9.3) (we put $K = \mathbb{Q}$). Since the image of $z \in \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f)(r))$ in the one dimensional F_λ-vector space $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f))$ is not zero, the cokernel of

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T))$$

is finite. Furthermore, $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)$ is finite as we have already seen. Hence by the sequence (14.9.3), we obtain the finiteness of $\mathcal{S}(T^*(1))$.

We prove the finiteness of $\mathcal{S}(T)$ in the case $r \leqslant k/2$. Consider the part

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\operatorname{Image}(\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V)) \tag{14.13.2}$$

of (14.9.4) (we put $K = \mathbb{Q}$). Since $\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T)$ has O_λ-rank 1 as we have seen, $\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ has O_λ-corank 1. The last group in (14.13.2) also has O_λ-corank 1 by 14.12 (1) (2). By the fact that the image of z in

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r))$$

is not zero, the last arrow in (14.13.2) has finite cokernel. Hence we have the finiteness of $\mathcal{S}(T)$.

We prove the finiteness of $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)$ in the case $r \geqslant k/2$. By the sequence (14.9.3), this follows from the finiteness of $\mathcal{S}(T^*(1))$ and the finiteness of $\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T)$.

We prove $\operatorname{rank}_{O_\lambda}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T)) = 1$ in the case $r \geqslant k/2$. This follows from the finiteness of $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)$ and $\mathrm{H}^0(\mathbb{Z}[1/p], T) = 0$ by (14.9.5). □

14.14. We prove Thm. 14.5 (3).

Let $\mathfrak{p}$ be the kernel of the O_λ-homomorphism $\Lambda \to O_\lambda$ which sends G_∞ to 1. Since Λ is a finite product of regular local rings, $\mathfrak{p}$ is a principal ideal. Let a be a generator of $\mathfrak{p}$. By the argument as in 13.8, we have an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^1(T)/a\mathbf{H}^1(T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T) \longrightarrow {}_a\mathbf{H}^2(T) \longrightarrow 0 \tag{14.14.1}$$

and an isomorphism

$$\mathbf{H}^2(T)/a\mathbf{H}^2(T) \simeq \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T). \tag{14.14.2}$$

By Lemma 14.15 below which we apply by taking Λ as A and $\mathbf{H}^2(T)$ and $\mathbf{H}^1(T)/Z(f, T)$ as M, we obtain from 12.5 (4)

$$\#(\mathbf{H}^2(T)/a\mathbf{H}^2(T)) \cdot \#({}_a\mathbf{H}^2(T))^{-1} \leqslant [\mathbf{H}^1(T)/a\mathbf{H}^1(T) : z]$$

where ${}_a(\ )$ denotes $\operatorname{Ker}(a)$ and z is the image of $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ under (14.13.1) for an O_λ-basis γ of $T(-r)^-$. Hence

$$\begin{aligned} \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)) &= \#(\mathbf{H}^2(T)/a\mathbf{H}^2(T)) && (14.14.2) \\ &\leqslant \#({}_a\mathbf{H}^2(T)) \cdot [\mathbf{H}^1(T)/a\mathbf{H}^1(T) : z] \\ &= [\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T) : z] && (14.14.1). \end{aligned}$$

Lemma 14.15. — *Let A be a Noetherian commutative ring, let C be the category of finitely generated A-modules M such that the support of M in* $\operatorname{Spec}(A)$ *is of codimension $\geqslant 2$, and let $G(C)$ be the Grothendieck group of the abelian category C. Let M be a finitely generated A-module whose support is of codimension $\geqslant 1$, let $a \in A$, and*

assume that $M_{\mathfrak{p}} = 0$ for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of height one which contains a. Then M/aM and ${}_aM = \mathrm{Ker}(a : M \to M)$ belongs to C, and we have

$$[M/aM] - [{}_aM] = \sum_{\mathfrak{q}} \mathrm{length}_{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}).[A/(\mathfrak{q} + aA)]$$

in $G(C)$, where $\mathfrak{q}$ ranges over all prime ideals of A of height one which do not contain a, and where $[\,]$ denotes the class in $G(C)$.

Proof. — The A-module M has a finite filtration whose graded quotients satisfy the following (i) or (ii) :

(i) It belongs to C.

(ii) It is isomorphic to $A/\mathfrak{q}$ for a prime ideal $\mathfrak{q}$ of A of height one which does not contain a.

Hence we are reduced to the case M itself satisfies (i) or (ii). □

***Proposition 14.16* (See Flach [Fla] for a more general study).** — *Let $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$. In the case $r = k/2$, assume $L(f, k/2) \neq 0$. Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)(r)$. Then*

(1) *$\#(\mathcal{S}(T)) = \#(\mathcal{S}(T^*(1)))$*

(2) *Assume $r \leqslant k/2$, let $\gamma \in V_{F_\lambda}(f)$, and let $\pm = (-1)^{r-1}$, and assume $\gamma^{\pm}$ is an O_λ-basis of $T(-r)^{\pm} = T^{-}(-r)$ and let $z \in \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f)(r))$ be the image of $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}$ under* (14.13.1)*. Then*

$$\#(\mathcal{S}(T)) = \mu^{-1} \cdot \nu \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

where

$$\mu = [\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T) : z] \cdot \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T))^{-1},$$
$$\nu = [\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T) : z] \cdot \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T))^{-1}.$$

Here in the definition of ν, we denote the image of z in $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T)$ by the same letter z.

Proof. — By the duality (14.10.1), we may assume $r \leqslant k/2$ in the proof of (1). Hence we assume $r \leqslant k/2$.

Consider the exact sequence (14.9.3) (we put $K = \mathbb{Q}$). Since $\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T)$ and $\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Z}[1/p], T)$ are of rank 1 over O_λ and the latter is torsion free, we have that $\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Z}[1/p], T)$ coincides with the torsion part $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ of $\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T)$. Hence by the exact sequence (14.9.3), we obtain

$$\#(\mathcal{S}(T^*(1))) = \mu^{-1} \cdot \nu \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

For a homomorphism h of abelian groups whose kernel and the cokernel are finite, let

$$[h] = \#(\mathrm{Coker}(h)) \cdot \#(\mathrm{Ker}(h))^{-1}.$$

Let a, b be the arrows as in (14.9.3), (14.9.4). Then the kernels and the cokernels of a, b are finite as we have seen. By the exact sequences

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Z}[1/p], T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\operatorname{Image}(\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V)) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T) \longrightarrow 0,$$

we have

$$[a] \cdot [b] = \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T)) \cdot \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T))^{-1}. \tag{14.16.1}$$

Consider the sequence (14.9.4). Since $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)$ is finite, and since the p-cohomological dimension of $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ is 2, we have

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0.$$

By the finiteness of $\mathcal{S}(T^*(1))$, we have that $\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Z}[1/p], T^*(1))$ is finite and hence

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Z}[1/p], T^*(1)) \simeq \mathrm{H}^0(\mathbb{Z}[1/p], T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Hence by the exact sequence (14.9.4), we obtain

$$\#(\mathcal{S}(T)) = [b]^{-1} \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Z}[1/p], T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})). \tag{14.16.2}$$

On the other hand, by the exact sequence (14.9.3), we have

$$\#(\mathcal{S}(T^*(1))) = [a] \cdot \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T)) \cdot \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T))^{-1} \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Z}[1/p], T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})). \tag{14.16.3}$$

By (14.16.1), (14.16.2) and (14.16.3), we have

$$\#(\mathcal{S}(T)) = \#(\mathcal{S}(T^*(1))). \qquad \square$$

14.17. We next relate the number ν in Prop. 14.16 to the λ-adic absolute value of (zeta value)/(period), by the method in [**BK2**, § 4] basing on the theory of Fontaine-Lafaille in [**FL**].

We review necessary things in [**FL**].

A filtered Dieudonné module D (called simply "filtered module" by Fontaine, and called "Fontaine module" by Ogus) over $\mathbb{Z}_p$ is a $\mathbb{Z}_p$-module of finite type endowed with

– a decreasing filtration $(D^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ where the D^i are direct summands of D,
– a family of homomorphisms $\varphi_i : D^i \to D$,

satisfying the following (i)-(iii).

(i) $D^i = D$ for $i \ll 0$ and $D^i = 0$ for $i \gg 0$.
(ii) $\varphi_i|_{D^{i+1}} = p\varphi_{i+1}$.
(iii) $D = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi_i(D^i)$.

The category of filtered Dieudonné modules over $\mathbb{Z}_p$ is abelian.

The condition (ii) shows that there is a unique homomorphism

$$\varphi : D \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow D \otimes \mathbb{Q}$$

over $\mathbb{Q}_p$ such that φ_i on $D^i \otimes \mathbb{Q}$ coincides with the restriction of $p^{-i}\varphi$. This map φ is bijective.

To a filtered Dieudonné module D satisfying the condition

(14.17.1) $D^i = D$ *and* $D^j = 0$ *for some integers* i, j *such that* $j - i < p$,

Fontaine and Lafaille [**FL**] associated a finitely generated $\mathbb{Z}_p$-module $T(D)$ endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, as follows. Take $r \in \mathbb{Z}$ such that $D^{r+1} = 0$ and $D^{r+2-p} = D$. Define

$$T(D) = \mathrm{Ker}(1 - \varphi_r : \mathrm{fil}^r(B_\infty(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} D) \to B_\infty(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} D) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-r)$$

where $\overline{\mathbb{Z}_p}$ is the integral closure of $\mathbb{Z}_p$ in $\overline{\mathbb{Q}_p}$,

$$\mathrm{fil}^r(B_\infty(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} D) = \sum_{i \geqslant 0} J(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p)^{[i]} \otimes D^{r-i} \subset B_\infty(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} D$$

(with notation as in 10.1) and φ_r is the unique homomorphism which coincides with $p^{-i}\varphi \otimes \varphi_{r-i}$ on $J(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p)^{[i]} \otimes D^{r-i}$ for $0 \leqslant i \leqslant p-2$. (For $0 \leqslant i \leqslant p-1$, since $\varphi(J(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p)^{[i]}) \subset p^i B_\infty(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p)$ and $B_\infty(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p)$ is torsion free [**FM**], $p^{-i}\varphi : J(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p)^{[i]} \to B_\infty(\overline{\mathbb{Z}_p}/\mathbb{Z}_p)$ is defined.) Then $T(D)$ is independent of the choice of r as above; for two choices r, r' such that $r \leqslant r'$, the canonical map $x \mapsto t^{r'-r}x \otimes t^{r-r'}$ with t a basis of $\mathbb{Z}_p(1)$ is an isomorphism from $T(D)$ defined by using r onto $T(D)$ defined by using r'.

By [**FL**], we have:

(14.17.2) *The functor* $D \mapsto T(D)$ *for* D *satisfying* (14.17.1) *with fixed* i *and* j *is exact and fully faithful. If* D *satisfies* (14.17.1) *for* (i, j) *and* D' *satisfies* (14.17.1) *for* (i', j') $(j - i < p, j' - i' < p)$, *and if* $(j + j') - (i + i') < p$ *(resp.* $(j' - i) - (i' + j - 1) < p$*), then*

$$T(D \otimes_{\mathbb{Z}_p} D') \simeq T(D) \otimes_{\mathbb{Z}_p} T(D')$$
$$T(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(D, D')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(D), T(D'))$$

Here the filtered Dieudonné module $D \otimes_{\mathbb{Z}_p} D'$ is defined in the evident way and the filtered Dieudonné module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(D, D')$ is defined by

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(D, D')^i = \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(D, D') \,;\, h(D^j) \subset D^{i+j} \text{ for all } j\}$$

$$\varphi_i(h)\ (h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(D, D')^i) : \sum_j \varphi_j(x_j)\ (x_j \in D^j) \longmapsto \sum_j \varphi_{i+j} h(x_j).$$

(We will use these for Tate twists (a special case of tensor products) and for the dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\ , \mathbb{Z}_p)$.)

(14.17.3) *$T(D)\otimes\mathbb{Q}$ is a de Rham representation of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *and the canonical map $T(D)\to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes D$ induces an isomorphism*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(T(D)\otimes\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} D\otimes\mathbb{Q}$$

which gives an isomorphism of filtrations.

In the following 14.18, for finitely generated $\mathbb{Z}_p$-modules M_1, M_2 and for an isomorphism of $\mathbb{Q}_p$-modules

$$h : M_1\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow M_2\otimes\mathbb{Q},$$

let $[h]$ (denoted also by $[h:\ M_1 \dashrightarrow M_2\ ]$) be the number defined as follows. Take a $\mathbb{Z}_p$-lattice M_3 in $M_2\otimes\mathbb{Q}$ such that the image of M_1 in $M_2\otimes\mathbb{Q}$ and the canonical image of M_2 in $M_2\otimes\mathbb{Q}$ are contained in M_3. Define

$$[h] = \#(\mathrm{Coker}(h : M_1\to M_3))\cdot\#(\mathrm{Ker}(h : M_1\to M_3))^{-1} \cdot(\mathrm{Coker}(M_2\to M_3))^{-1}\cdot\#(\mathrm{Ker}(M_2\to M_3)).$$

Then $[h]$ is independent of the choice of M_3. In the case h comes from a $\mathbb{Q}_p$-homomorphism $\widetilde{h} : M_1\to M_2$ whose kernel and cokernel are finite, $[h] = \#(\mathrm{Coker}(\widetilde{h}))\cdot \#(\mathrm{Ker}(\widetilde{h}))^{-1} = [\widetilde{h}]$ with $[\widetilde{h}]$ as in the proof of Prop. 14.16.

Lemma 14.18. — *Let D be a torsion free filtered Dieudonné module over $\mathbb{Z}_p$, and let D' be the filtered Dieudonné module* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(D,\mathbb{Z}_p)(1)$. *Assume the following (i) and (ii).*

(i) *There are integers i, j such that $i\leqslant 0\leqslant j$, $D^i = D, D^j = 0$ and $j-i<p$.*

(ii) *The map $1-\varphi : D'\otimes\mathbb{Q}\to D'\otimes\mathbb{Q}$ is bijective*

Then

$$\exp^* : \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T(D)\otimes\mathbb{Q})/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D)\otimes\mathbb{Q}) \longrightarrow D^0\otimes\mathbb{Q}$$

is bijective, $\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T(D))$ *is finite, and*

$$[\exp^* :\ \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T(D))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D)) \dashrightarrow D^0]\ \cdot\#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T(D))) = [1-\varphi :\ D'\dashrightarrow D']\ .$$

(The condition on $1-\varphi$ of $D'\otimes\mathbb{Q}$ in Lemma 14.18 (ii) is equivalent to the bijectivity of $1-p^{-1}\varphi^{-1} : D\otimes\mathbb{Q}\to D\otimes\mathbb{Q}$. We have

$$[1-\varphi :\ D'\dashrightarrow D'] = [1-p^{-1}\varphi^{-1} :\ D\dashrightarrow D]\ .)$$

Proof. — Lemma 14.18 is the dual formulation of [**BK2**, Thm 4.1] ; the map $\exp^*$ in 14.18 is the $\mathbb{Q}_p$-dual of

$$\exp : D'/(D')^0\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D'))\otimes\mathbb{Q},$$

and hence is bijective by [**BK2**, Thm 4.1], and $\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T(D)) \otimes \mathbb{Q}$ is the $\mathbb{Q}_p$-dual of $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, T(D')) \otimes \mathbb{Q} = 0$. Furthermore [**BK2**, Thm 4.1 (iii)] shows

$$[\exp : \ D'/(D')^0 \dashrightarrow \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D'))] \ = [1 - \varphi : \ D' \dashrightarrow D'] \ .$$

Let

$$P = \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T(D) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \operatorname{Image}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T(D) \otimes \mathbb{Q})).$$

Then we have an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T(D))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T(D)) \longrightarrow 0.$$

By taking $\mathrm{Hom}(\ , \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ of this exact sequence and by using the duality

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D')) \simeq \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

[**BK2**, Prop. 3.8], we obtain an exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D')) \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T(D))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D)), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

From this, we have

$$\begin{aligned} &[\exp^* : \ \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T(D))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D)) \dashrightarrow D^0] \\ &\quad = [\ D'/(D')^0 \dashrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T(D))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D)), \mathbb{Z}_p)] \\ &\quad = [\exp^* : \ D'/(D')^0 \dashrightarrow \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T(D'))] \ \cdot \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T(D)))^{-1} \\ &\quad = [1 - \varphi : \ D' \dashrightarrow D'] \ \cdot \#(\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T(D)))^{-1}. \end{aligned}$$ □

Correction 14.19. — *In this opportunity, we correct a mistake in* [**BK2**, § 4] *: All* H^1_e *in Lemma 4.5 should be corrected as* H^1_f.

14.20. Let p be a prime number which does not divide N. Then for any place λ of F lying over p, $V_{F_\lambda}(f)$ is a crystalline representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Hence by [**LG**], there exists an O_λ-lattice D of $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f)) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f))$ which satisfies $\varphi(D^i) \subset p^i D^i$ for all $i \in \mathbb{Z}$ ($D^i \underset{\mathrm{def}}{=} D \cap \mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f))$) and $(D, (D^i)_i, (p^{-i}\varphi \text{on } D^i)_i)$ is filtered Dieudonné module (Such D is called a strongly divisible O_λ-lattice in $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))$). If furthermore $p > k$, then $T(D) \subset V_{F_\lambda}(f)$ is defined.

Proposition 14.21. — *Let* $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k/2$. *In the case* $r = k/2$, *assume* $L(f, k/2) \neq 0$. *Let* p *be a prime number which does not divide* N *satisfying* $p > k$, *and let* λ *be a place of* F *lying over* p. *Let* $D \subset \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))$ *be a strongly divisible* O_λ*-lattice, and let* $T = T(D)(r) \subset V_{F_\lambda}(f)(r)$. *Let* $\pm = (-1)^{r-1}$, *take* $\omega \in S_F(f)$ *and* $\gamma \in V_F(f)$ *such that* ω *is an* O_λ*-basis of* $D^1 (= D^{k-1})$ *and* $\gamma^\pm$ *is an* O_λ*-basis of* $T(-r)^\pm = T^-(-r)$, *and define* $\Omega \in \mathbb{C}^\times$ *by* $\mathrm{per}_f(\omega)^\pm = \Omega \cdot \gamma^\pm$. *Let* μ *and* ν *be as in Prop. 14.16 (2) (defined with respect to* T *and* γ*). Then*

(1) $\nu = [O_\lambda : (2\pi i)^{r-1} L(f^*, k-r)/\Omega]$.

(2) $\#(\mathcal{S}(T(r))) = \mu^{-1} \cdot [O_\lambda : (2\pi i)^{r-1} L(f^*, k-r)/\Omega] \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T^*(1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$.

Proof. — (2) follows from (1) and Prop. 14.16. We prove (1). We apply Lemma 14.18 to the filtered Dieudonné module $D(r)$. Let $m = k - r$. Then the filtered Dieudonné module $D(r)' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(D(r), \mathbb{Z}_p)(1)$ has the property that $D(r)' \otimes \mathbb{Q}$ is isomorphic to $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f^*)(m))$ as a $\mathbb{Q}_p$-vector space with an operator φ. Hence we have

$$\begin{aligned}[1-\varphi : D' \dashrightarrow D'] &= [O_\lambda : \det_{F_\lambda}\left(1 - p^{-m}; \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f^*))\right)] \\ &= [O_\lambda : 1 - \overline{a}_p p^{-m} + \overline{\varepsilon}(p) p^{k-1-2m}].\end{aligned}$$

By this and by

$$[\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T) : z] \cdot [\exp^* : \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T) \dashrightarrow D^r] = [D^r : \exp^*(z)].$$

we have

$$[D^r : \exp^*(z)] = \nu \cdot [O_\lambda : 1 - \overline{a}_p p^{-m} + \overline{\varepsilon}(p) p^{k-1-2m}].$$

On the other hand, since

$$\mathrm{per}(\exp^*(z))^\pm = (1 - \overline{a}_p p^{-m} + \overline{\varepsilon}(p) p^{k-1-2m}) \cdot L(f^*, m) \cdot (2\pi i)^{r-1} \gamma^\pm,$$

we have

$$\exp^*(z) = (1 - \overline{a}_p p^{-m} + \overline{\varepsilon}(p) p^{k-1-2m}) \cdot (((2\pi i)^{r-1} L(f^*, m))/\Omega) \cdot \omega.$$

This shows

$$[D^r : \exp^*(z)] = [O_\lambda : (1 - \overline{a}_p p^{-m} + \overline{\varepsilon}(p) p^{k-1-2m}) \cdot (((2\pi i)^{r-1} L(f^*, m))/\Omega)].$$

By comparing those two expressions of $[D^r : \exp^*(z)]$, we obtain Prop. 14.21 (1). □

14.22. We complete the proof of Thm. 14.2. Let r be an integer such that $1 \leqslant r \leqslant k-1$. In the case $r = k/2$, assume $L(f, k/2) \neq 0$. We have already shown that $\mathcal{S}(T)$ is finite for any finite place λ of F and any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)(r)$. It remains to show that $\mathcal{S}(T)$ is zero for almost all finite places λ of F and for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$.

By 14.16 (1) and by the duality (14.10.1), we may assume $r \leqslant k/2$. Let $\pm = (-1)^{r-1}$, take a non-zero element ω of $S_F(f)$ and an element γ of $V_F(f)$ such that $\gamma^\pm \neq 0$ and define $\Omega \in \mathbb{C}^\times$ by $\mathrm{per}_f(\omega)^\pm = \Omega \cdot \gamma^\pm$.

Take a multiple N' of N such that $N' \geqslant 3$, and let X be a proper smooth scheme over $\mathbb{Z}[1/N']$ such that $X \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{KS}_k(N')$.

By Fontaine-Messing [**FM**], if p does not divide N' and $p > k$, $\mathrm{H}^{k-1}(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Z}_p$ has a structure of a filtered Dieudonné module whose filtration is given by $(\mathrm{H}^{k-1}(X, \Omega^{\geqslant i}_{X/\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Z}_p)_i$, and $\mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{KS}_k(N') \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z}_p)$ is identified with $T(H^{k-1}(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Z}_p)$ as a finitely generated $\mathbb{Z}_p$-module with an action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. For such p and for a place λ lying over p, let D_λ be the image of

$$(\mathrm{H}^{k-1}(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{Z}}) \otimes O_\lambda)(\widetilde{\varepsilon}) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f)).$$

($(\widetilde{\varepsilon})$ is as in § 11) Then D_λ is a strongly divisible O_λ-lattice, $D_\lambda^1 = D_\lambda^{k-1}$ is generated over O_λ by the image of

$$\mathrm{H}^{k-1}(X, \Omega_{X/\mathbb{Z}}^{\geqslant k-1})(\widetilde{\varepsilon}) \longrightarrow S(f).$$

and $T(D_\lambda)$ coincides with image of

$$(\mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{KS}_k(N')(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes O_\lambda)(\widetilde{\varepsilon}) \simeq (\mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{KS}_k(N') \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_\lambda)(\widetilde{\varepsilon}) \longrightarrow V_{F_\lambda}(f).$$

Hence for almost all λ, ω is an O_λ-basis of $D_\lambda^1 = D_\lambda^{k-1}$, and $\gamma^\pm$ is an O_λ-basis of $T(D_\lambda)^\pm$. For such λ, we have

$$\begin{aligned}\#(\mathcal{S}(T(D_\lambda)(r))) = \mu^{-1} \cdot [O_\lambda : (2\pi i)^{r-1} \cdot L(f^*, k-r)/\Omega] \\ \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T(F_\lambda)(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cdot \#(\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T(F_\lambda)^*(1-r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))\end{aligned}$$

by Prop. 14.21, where μ is the number in Prop. 14.16 defined with respect to $T(D_\lambda)(r)$ and γ and Ω is defined with respect to ω and γ. We have

$$[O_\lambda : (2\pi i)^{r-1} \cdot L(f^*, k-r)/\Omega] = 1$$

for almost all λ. We have

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T(F_\lambda)(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}, T(F_\lambda)^*(1-r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$$

for almost all λ by 14.11 (2), and we have $\mu \geqslant 1$ for almost all λ by 14.5 (3) in the non-CM case (see 15.23 for the CM-case). Hence $\mathcal{S}(T(D_\lambda)) = 0$ for almost all λ. By 14.7, this shows that $\mathcal{S}(T) = 0$ for almost all λ and for all $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattices T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$. □

15. The case of complex multiplication

In this section, we prove the theorems 12.4, 12.5, 12.6, 14.2, 14.5 in the case f has complex multiplication. We deduce them from the work of Rubin on the main conjecture for quadratic imaginary fields.

In this section, we fix an imaginary quadratic field K. We fix also an embedding $K \to \mathbb{C}$.

15.1. We first review the work of Rubin on the main conjecture of imaginary quadratic fields.

By the fixed embedding $K \subset \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ becomes the algebraic closure of K in $\mathbb{C}$. Let K^{ab} be the maximal abelian extension of K in $\mathbb{C}$, and for a non-zero ideal $\mathfrak{f}$ of O_K, let $K(\mathfrak{f}) \subset K^{ab}$ be the ray class field of conductor $\mathfrak{f}$. Fix a prime number p and a non-zero ideal $\mathfrak{f}$ of O_K, and let

$$K(p^\infty\mathfrak{f}) = \bigcup_n K(p^n\mathfrak{f}), \quad G_{p^\infty\mathfrak{f}} = \mathrm{Gal}(K(p^\infty\mathfrak{f})/K).$$

Then

$$G_{p^\infty\mathfrak{f}} \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times (\text{a finite abelian group}).$$

Let

$$\mathfrak{h}^1 = \varprojlim_{K'} O_{K'}[1/p]^\times \otimes \mathbb{Z}_p, \quad \mathfrak{h}^2 = \varprojlim_{K'} \mathrm{Cl}(K')\{p\}$$

where K' ranges over all finite extensions of K contained in $K(p^\infty\mathfrak{f})$, $\mathrm{Cl}(K')\{p\}$ denotes the p-primary part of the ideal class group $\mathrm{Cl}(K')$ of K', and the inverse limits are taken with respect to norm maps. Then $\mathfrak{h}^q$ $(q = 1, 2)$ are finitely generated modules over the three dimensional semi-local ring $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$, $\mathfrak{h}^1$ is a torsion free $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$-module having the property that $(\mathfrak{h}^1)_\mathfrak{q}$ is of dimension one for any prime ideals $\mathfrak{q}$ of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ of height 0 ($\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_\mathfrak{q}$ is a field for such $\mathfrak{q}$), and $\mathfrak{h}^2$ is a torsion $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$-module (that is, it is killed by a non-zero-divisor of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$). Let $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}^1$ be the "part of elliptic units" whose definition is reviewed in 15.5 below. Then $\mathfrak{h}^1/\mathfrak{z}$ is a torsion $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$-module.

The following Theorem is contained in the works of Rubin in [**Ru2, Ru4**].

***Theorem 15.2* (Rubin).** — *Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ of height one. Consider the following conditions (a) (b) (c).*

(a) *$\mathfrak{p}$ does not contain p.*

(b) *p does not divide the order of the group of all the roots of 1 in the Hilbert class field of K, and p does not divide the order of the torsion part of $G_{p^\infty\mathfrak{f}}$.*

(c) *p splits in K.*

We have:

(1) *If either the condition (a) or (b) is satisfied, we have*

$$\mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_\mathfrak{p}}((\mathfrak{h}^2)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]}((\mathfrak{h}^1/\mathfrak{z})_\mathfrak{p}).$$

(2) *If both the conditions (b) and (c) are satisfied, then*

$$\mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_\mathfrak{p}}((\mathfrak{h}^2)_\mathfrak{p}) = \mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]}((\mathfrak{h}^1/\mathfrak{z})_\mathfrak{p}).$$

In [**Ru2**], Rubin has an equality (not only inequality) even in the case p does not split in K under a certain condition, but we do not use it in this paper.

15.3. We review here the theory of complex multiplication.

Let $\mathfrak{f}$ be a non-zero ideal of O_K such that $O_K^\times \to (O_K/\mathfrak{f})^\times$ is injective.

For a field K' over K, by a CM-pair with modulus $\mathfrak{f}$ over K', we mean a pair (E, α) where E is an elliptic curve over K' endowed with an isomorphism $O_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(E)$ such that the composite map

$$O_K \longrightarrow \mathrm{End}(E) \longrightarrow \mathrm{End}_{K'}(\mathrm{Lie}(E)) = K'$$

coincides with the inclusion map, and α is a torsion point in $E(K')$ such that the annihilator of α in O_K coincides with $\mathfrak{f}$.

Note that if (E, α) and (E', α') are CM-pairs of modulus $\mathfrak{f}$ over K' and if they are isomorphic, the isomorphism $(E, \alpha) \to (E', \alpha')$ is unique by the injectivity of $O_K^\times \to (O_K/\mathfrak{f})^\times$.

The following (15.3.1)-(15.3.3) summarize a central part of the theory of complex multiplication.

(15.3.1) *There exist a CM-pair of modulus* $\mathfrak{f}$ *over* $K(\mathfrak{f})$ *which is isomorphic to* $(\mathbb{C}/\mathfrak{f}, 1 \bmod \mathfrak{f})$ *over* $\mathbb{C}$. *This CM-pair of modulus* $\mathfrak{f}$ *over* $K(\mathfrak{f})$ *is unique upto isomorphism (and hence unique upto unique isomorphism by the above remark).*

We call the above CM-pair of modulus $\mathfrak{f}$ over $K(\mathfrak{f})$ the canonical CM-pair over $K(\mathfrak{f})$.

(15.3.2) *Let* K' *be a field over* K *and let* (E, α) *be a CM-pair of modulus* $\mathfrak{f}$ *over* K'. *Then there exist a unique homomorphism* $K(\mathfrak{f}) \to K'$ *for which* (E, α) *is obtained from the canonical CM-pair over* $K(\mathfrak{f})$ *by the base change.*

(15.3.3) *(relation with class field theory) Let* K' *be a finite abelian extension of* K, *let* $\mathfrak{a}$ *be a non-zero ideal of* O_K *whose all prime divisors are unramified in* K', *and let* $\sigma = (\mathfrak{a}, K'/K) \in \mathrm{Gal}(K'/K)$ *be the Artin symbol. On the other hand, let* (E, α) *be a CM-pair of modulus* $\mathfrak{f}$ *over* K' *and let* $(E^{(\sigma)}, \sigma(\alpha))$ *be the CM-pair of modulus* $\mathfrak{f}$ *over* K' *obtained form* (E, α) *by the base change* $\sigma : K' \to K'$. *Then* $(E^{(\sigma)}, \sigma(\alpha))$ *is isomorphic to* $(E/_{\mathfrak{a}}E, \alpha \bmod {}_{\mathfrak{a}}E)$ *where* ${}_{\mathfrak{a}}E$ *is the part of* E *annihilated by* $\mathfrak{a}$.

We will denote the unique isomorphism in (15.3.3) as

$$\eta_{\mathfrak{a}} : (E/_{\mathfrak{a}}E, \alpha \bmod {}_{\mathfrak{a}}E) \xrightarrow{\sim} (E^{(\sigma)}, \sigma(\alpha)).$$

15.4. We give a refinement of Prop. 1.3 in the case of complex multiplication. Let K' be a field over K and let E be an elliptic curve over K' such that $\mathrm{End}(E) \simeq O_K$. We normalize this isomorphism in the way that the composite map

$$O_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(E) \longrightarrow \mathrm{End}_{K'}(\mathrm{Lie}(E)) = K'$$

is the inclusion map.

Then for an ideal $\mathfrak{a}$ of O_K which is prime to 6, there is a unique element ${}_{\mathfrak{a}}\theta_E$ of $\mathcal{O}(E \smallsetminus {}_{\mathfrak{a}}E)^{\times}$ having the following properties (i) (ii).

(i) The divisor of ${}_{\mathfrak{a}}\theta$ is $N(\mathfrak{a}) \cdot (0) - {}_{\mathfrak{a}}E$.

(ii) $N_a({}_{\mathfrak{a}}\theta_E) = {}_{\mathfrak{a}}\theta_E$ for any integer a which is prime to $\mathfrak{a}$.

The unique existence of ${}_{\mathfrak{a}}\theta$ and the following properties (15.4.1)-(15.4.3) of ${}_{\mathfrak{a}}\theta$ are proved in the same way as the proof of Prop. 1.3.

(15.4.1) *If* $\mathfrak{a} = (c)$ *for an integer* c, ${}_{\mathfrak{a}}\theta = {}_{c}\theta$.

(15.4.2) *If* $E \to E'$ *is an isogeny between elliptic curves over* K' *such that* $\mathrm{End}(E) \simeq O_K$ *and* $\mathrm{End}(E') \simeq O_K$, *the norm map sends* ${}_{\mathfrak{a}}\theta_E$ *to* ${}_{\mathfrak{a}}\theta_{E'}$.

(15.4.3) *If* $\mathfrak{a}$ *and* $\mathfrak{b}$ *are ideals of* O_K *which are prime to* 6,

$$({}_{\mathfrak{b}}\theta_E)^{N(\mathfrak{a})} \cdot (pr_1^*({}_{\mathfrak{b}}\theta_{E_1}))^{-1} = ({}_{\mathfrak{a}}\theta_E)^{N(\mathfrak{b})} \cdot (pr_2^*({}_{\mathfrak{a}}\theta_{E_2}))^{-1}$$

where $E_1 = E/_{\mathfrak{a}}E, E_2 = E/_{\mathfrak{b}}E$, *and for* $j = 1, 2$, pr_j *is the canonical projection* $E \to E_j$.

Now let $\mathfrak{f}$ be a non-zero ideal of O_K such that $O_K^\times \to (O_K/\mathfrak{f})^\times$ is injective, and let (E,α) be a CM-pair of modulus $\mathfrak{f}$ over $K(\mathfrak{f})$. Then for ideals $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ of O_K which are prime to $6\mathfrak{f}$, we have (denote $(\mathfrak{a},K(\mathfrak{f})/K)$ by $\tau_\mathfrak{a}$ and $(\mathfrak{b},K(\mathfrak{f})/K)$ by $\tau_\mathfrak{b}$)

$$({}_\mathfrak{b}\theta_E(\alpha))^{N(\mathfrak{a})}\tau_\mathfrak{a}({}_\mathfrak{b}\theta_E(\alpha))^{-1} = ({}_\mathfrak{a}\theta_E(\alpha))^{N(\mathfrak{b})}\tau_\mathfrak{b}({}_\mathfrak{a}\theta_E(\alpha))^{-1} \tag{15.4.4}$$

In fact, in (15.4.3), we have $(pr_1^*({}_\mathfrak{b}\theta_{E_1}))(\alpha) = {}_\mathfrak{b}\theta_{E_1}(pr_1(\alpha)) = \tau_\mathfrak{a}({}_\mathfrak{b}\theta_E(\alpha))$ because $(E_1, pr_1(\alpha)) \simeq (E^{(\sigma)},\sigma(\alpha))$ with $\sigma = \tau_\mathfrak{a}$ (15.3.3), and the similar thing holds when we replace $pr_1,\mathfrak{b},E_1$ by $pr_2,\mathfrak{a},E_2$, respectively. Hence we obtain (15.4.4) from (15.4.3).

15.5. We review the definition of the "part of elliptic units" $\mathfrak{z}\subset\mathfrak{h}^1$ in 15.1

Let $\mathfrak{f}$ be an ideal of O_K such that $O_K^\times \to (O_K/\mathfrak{f})^\times$ is injective, let (E,α) be the canonical CM-pair over $K(\mathfrak{f})$, and $\mathfrak{a}$ be an ideal of O_K which is prime to $6\mathfrak{f}$. Then the element

$$ {}_\mathfrak{a}z_\mathfrak{f} = {}_\mathfrak{a}\theta_E(\alpha)^{-1} \in K(\mathfrak{f})^\times$$

(the standard elliptic unit of modulus $\mathfrak{f}$ and of twist $\mathfrak{a}$) has the following relation with L-functions (Kronecker's limit formula): For any homomorphism $\chi : \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K) \to \mathbb{C}^\times$, we have

$$\sum_\sigma \chi(\sigma)\log|\sigma({}_\mathfrak{a}z_\mathfrak{f})| = (N(\mathfrak{a})-\chi(\mathfrak{a})^{-1})\cdot\lim_{s\to 0} s^{-1}L_{K,\mathfrak{f}}(\chi,s) \tag{15.5.1}$$

where $L_{K,\mathfrak{f}}(\chi,s)$ denotes $\sum_\mathfrak{b}\chi(\mathfrak{b})N(\mathfrak{b})^{-s}$ in which $\mathfrak{b}$ ranges all ideals of O_K which are prime to $\mathfrak{f}$ and $\chi(\mathfrak{b})$ denotes $\chi((\mathfrak{b},K(\mathfrak{f})/K))$. (This (15.5.1) is deduced from (3.8.2) by taking a suitable element of K as τ in (3.8.2).)

The element ${}_\mathfrak{a}\theta_E(\alpha)$ is a $\mathfrak{p}$-unit for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of O_K which is prime to $\mathfrak{f}$, and is a unit if $\mathfrak{f}$ has at least two prime divisors.

Now we define $\mathfrak{z}\subset \mathrm{H}^1$. Let $\mathfrak{f}$ be a non-zero ideal of O_K. Then for $n\geqslant 1$ such that $O_K^\times \to (O_K/p^n\mathfrak{f})^\times$ is injective and for an ideal $\mathfrak{a}$ of O_K which is prime to $6p\mathfrak{f}$, the norm map of $K(p^{n+1}\mathfrak{f})/K(p^n\mathfrak{f})$ sends ${}_\mathfrak{a}z_{p^{n+1}\mathfrak{f}}$ to ${}_\mathfrak{a}z_{p^n\mathfrak{f}}$. (This is deduced from (15.4.2).) We define $\mathfrak{z}$ to be the $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$-module of $\mathfrak{h}^1$ generated by the elements $({}_\mathfrak{a}z_{p^n\mathfrak{f}})_{n\geqslant 1}$ where $\mathfrak{a}$ ranges over all ideals of O_K which are prime to $6p\mathfrak{f}$.

15.6. We rewrite Thm. 15.2 in the form using Galois cohomology.

For a finitely generated $\mathbb{Z}_p$-module T endowed with a continuous action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ which is unramified at almost all finite places of K, let

$$\mathbf{H}^q_{p^\infty\mathfrak{f}}(T) = \varprojlim_{K'} \mathrm{H}^q(O_{K'}[1/p],T) \qquad (q\in\mathbb{Z})$$

where K' ranges over all finite extensions of K contained in $K(p^\infty\mathfrak{f})$. Then $\mathbf{H}^q_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)$ is a finitely generated $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$-module, and $\mathbf{H}^q_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)=0$ if $q\neq 1,2$.

In the case $T=\mathbb{Z}_p(1)$, we have:

$$\mathfrak{h}^1 \simeq \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1)). \tag{15.6.1}$$

(15.6.2) *There exists a homomorphism of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$-modules*

$$\mathfrak{h}^2 \longrightarrow \mathbf{H}^2_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1))$$

whose kernel and cokernel are finitely generated $\mathbb{Z}_p$-modules. In particular,

$$(\mathfrak{h}^2)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^2_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1))_{\mathfrak{p}}$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ of height one.

((15.6.2) is proved as follows. From the Kummer sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1) \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{p^n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0,$$

we obtain exact sequences

$$0 \to \mathrm{Pic}(O_{K'}, [1/p])\{p\} \to \mathrm{H}^2(O_{K'}[1/p], \mathbb{Z}_p(1)) \to \varprojlim_n \mathrm{Ker}(p^n; \mathrm{Br}(O_{K'}[1/p])) \to 0$$

for extensions K' of $\mathbb{Q}$. We have an isomorphism

$$\varprojlim_n \mathrm{Ker}(p^n; \mathrm{Br}(O_{K'}[1/p])) = \mathrm{Ker}(\mathrm{sum} : \mathbb{Z}_p^{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{Z}_p)$$

where Σ is the set of prime ideals of $O_{K'}$ lying over p, and we have a surjection $\mathrm{Cl}(K')\{p\} \to \mathrm{Pic}(O_{K'}, [1/p])$ whose kernel is generated by the classes of elements in Σ. By taking $\varprojlim_{K'}$ for finite extensions K' of K contained in $K(p^\infty\mathfrak{f})$, and by the finiteness of the number of places of $K(p^\infty\mathfrak{f})$ lying over p, we obtain (15.6.2).)

Let $Q(\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]])$ be the total quotient ring of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$. We define an element

$$z_{p^\infty\mathfrak{f}} \in \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]} Q(\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]])$$

(without ${}_{\mathfrak{a}}(\ )$) by

$$\begin{aligned} z_{p^\infty\mathfrak{f}} &= (N(\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K))^{-1} \cdot ({}_{\mathfrak{a}}z_{p^n\mathfrak{f}})_n \\ &\in \mathfrak{h}^1 \otimes_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]} Q(\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]) \simeq \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]} Q(\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]) \end{aligned}$$

where $\mathfrak{a}$ is any ideal of O_K which is prime to $6p\mathfrak{f}$ such that $\mathfrak{a} \neq O_K$ (then $N(\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)$ is a non-zero-divisor of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$). Then $z_{p^\infty\mathfrak{f}}$ is independent of the choice of $\mathfrak{a}$, for

$$(N(\mathfrak{b}) - (\mathfrak{b}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)) \cdot ({}_{\mathfrak{a}}z_{p^n\mathfrak{f}})_n = (N(\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)) \cdot ({}_{\mathfrak{b}}z_{p^n\mathfrak{f}})_n$$

for any ideals $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ of O_K which are prime to $6p\mathfrak{f}$ by (15.4.4).

We have :

(15.6.3) $(N(\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)) \cdot z_{p^\infty\mathfrak{f}} \in \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1))$ *for any ideal $\mathfrak{a}$ of O_K which is prime to $6p\mathfrak{f}$.*

The ideal I of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ generated by $N(\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)$ for all ideals $\mathfrak{a}$ of O_K which are prime to $6p\mathfrak{f}$ satisfies $I_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_{\mathfrak{p}}$ for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ of height one. Hence we have

(15.6.4) $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_{\mathfrak{p}} \cdot z_{p^\infty\mathfrak{f}}$ *for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ of height one.*

By (15.5.1), we have

(15.6.5) *Let K' be a finite extension of K contained in $K(p^\infty\mathfrak{f})$, and let $z_{K'}$ be the image of $z_{p^\infty\mathfrak{f}}$ under $\mathcal{S}^{-1}\mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1)) \to \mathrm{H}^1(O_{K'}[1/p],\mathbb{Q}_p(1))$ where $\mathcal{S}$ denotes the multiplicative subset of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ consisting of non-zero-divisors whose images in $\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(K'/K)]$ are invertible. (Note $N(\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K) \in \mathcal{S}$ for any ideal $\mathfrak{a}$ of O_K which is prime to $p\mathfrak{f}$ such that $\mathfrak{a} \neq O_K$.) Then $z_{K'}$ belongs to the image of the canonical injection*

$$(O_{K'}[1/p])^\times \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{H}^1(O_{K'}[1/p],\mathbb{Q}_p(1)).$$

If we regard $z_{K'}$ as an element of $(O_{K'}[1/p])^\times \otimes \mathbb{Q}$, we have

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K'/K)} \chi(\sigma)\log(|\sigma(z_{K'})|) = \lim_{s\to 0} s^{-1}L_{K,p\mathfrak{f}}(\chi,s)$$

for any non-trivial homomorphism $\chi : \mathrm{Gal}(K'/K) \to \mathbb{C}^\times$.

Now Thm. 15.2 is reformulated as follows: For a prime ideal $\mathfrak{p}$ of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ of height one, let

$$\ell^1_{\mathfrak{p}} = \mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_{\mathfrak{p}}}\left(\mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1))_{\mathfrak{p}}/(\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_{\mathfrak{p}}\cdot z_{p^\infty\mathfrak{f}})\right)$$
$$\ell^2_{\mathfrak{p}} = \mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1))_{\mathfrak{p}}).$$

Then, if either the conditions (a) or (b) in 15.2 is satisfied, we have

$$\ell^2_{\mathfrak{p}} \leqslant \ell^1_{\mathfrak{p}}.$$

If both the conditions (b) and (c) in 15.2 are satisfied, then

$$\ell^2_{\mathfrak{p}} = \ell^1_{\mathfrak{p}}.$$

15.7. We review basic facts about Hecke characters of K.

Let $\widehat{O_K} = \varprojlim_I O_K/I$ where I ranges over all non-zero ideals of O_K, and let $\widehat{K} = \widehat{O_K}\otimes\mathbb{Q}$. Then the adele ring of K is $\mathbb{C}\times\widehat{K}$, and the idele class group C_K of K is $(\mathbb{C}^\times\times\widehat{K}^\times)/K^\times$.

If ψ is a Hecke character of K (i.e. a continuous homomorphism $C_K\to\mathbb{C}^\times$), the homomorphism $\widehat{O_K}^\times \to \mathbb{C}^\times$ induced by ψ factors through the projection $\widehat{O_K}^\times \to (O_K/I)^\times$ for some non-zero ideal I of O_K, and there is a non-zero ideal which is the largest among such ideals I, called the conductor of ψ. If $\mathfrak{a}$ is an ideal of O_K which is prime to the conductor of ψ, we define $\psi(\mathfrak{a})$ to be $\psi(1,a)$ where 1 is the unit element of $\mathbb{C}^\times$ and a an element of $\widehat{K}^\times\cap\widehat{O_K}$ such that $\widehat{O_K}\mathfrak{a} = \widehat{O_K}\cdot a$ and such that the image of a under $\widehat{O_K}\to\widehat{O_K}/\mathfrak{f}$ is 1 (then $\psi(1,a)$ is independent of the choice of a). The L-function $L(\psi,s)$ of ψ is expressed as

$$L(\psi,s) = \sum_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a})^{-s}$$

where $\mathfrak{a}$ ranges over all ideals of O_K which are prime to the conductor of ψ.

For integers m,n and for a Hecke character ψ of K, we say that ψ is of type (m,n) if the restriction of ψ to the archimedian part $\mathbb{C}^\times$ of the idele group of K has the

form $z \mapsto z^m \cdot \overline{z}^n$. It is known that if ψ is a Hecke character of type (m,n) for some integers m,n then the subfield of $\mathbb{C}$ generated by $\psi(\widehat{K}^\times)$ is a finite extension of $\mathbb{Q}$.

15.8. Let $r \geqslant 1$, and let ψ be a Hecke character of K of type $(-r,0)$. We review the Galois representation, the period map, etc. associated to ψ.

Let L be the subfield of $\mathbb{C}$ generated by $\psi(\widehat{K}^\times)$ over K, which is a finite extension of K. In this 15.8, we define a one dimensional L-vector spaces $V_L(\psi)$ and $S(\psi)$, and a continuous L_λ-linear action of $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ on $V_{L_\lambda}(\psi) = V_L(\psi) \otimes_L L_\lambda$ for each finite place λ of L. We define also an L-linear map

$$\mathrm{per}_\psi : S(\psi) \longrightarrow V_{\mathbb{C}}(\psi) = V_L(\psi) \otimes_L \mathbb{C},$$

called the period map, and an isomorphism

$$S(\psi) \otimes_L L_\lambda \simeq \mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(K \otimes \mathbb{Q}_p, V_{L_\lambda}(\psi)) = \mathrm{D}^r_{\mathrm{dR}}(K \otimes \mathbb{Q}_p, V_{L_\lambda}(\psi)) \tag{15.8.1}$$

for each finite place λ of L where p is the prime number lying under λ.

Take a non-zero ideal $\mathfrak{f}$ of O_K contained in the conductor of ψ such that $O_K^\times \to (O_K/\mathfrak{f})^\times$ is injective, and let (E,α) be the canonical CM-pair over $K(\mathfrak{f})$ (15.3).

We define

$$V_L(\psi) = \mathrm{H}^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{\otimes r} \otimes_K L$$

where $\otimes r$ is taken over K.

For a finite place λ of L, we have a canonical identification

$$V_{L_\lambda}(\psi) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(E \otimes_{K(\mathfrak{f})} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)^{\otimes r} \otimes_{K \otimes \mathbb{Q}_p} L_\lambda$$

where $V_{L_\lambda}(\psi) = V_L(\psi) \otimes_L L_\lambda$, p is the prime number lying under λ and $\otimes r$ is taken over $K \otimes \mathbb{Q}_p$. Hence we have an L_λ-linear action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K(\mathfrak{f}))$ on $V_{L_\lambda}(\psi)$. We extend this action to an L_λ-linear action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ on $V_{L_\lambda}(\psi)$ as follows. For $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$, we define the action of σ on $V_{L_\lambda}(\psi)$ to be the composite

$$V_{L_\lambda}(\psi) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(E^{(\sigma)} \otimes_{K(\mathfrak{f})} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)^{\otimes r} \otimes_{K \otimes \mathbb{Q}_p} L_\lambda \xrightarrow[\sim]{\eta_\psi} V_{L_\lambda}(\psi)$$

where η_ψ is the following isomorphism. Take an ideal $\mathfrak{a}$ of O_K which is prime to $\mathfrak{f}$ such that $(\mathfrak{a}, K(\mathfrak{f})/K)$ coincides with the restriction of σ to $K(\mathfrak{f})$. We define $\eta_\psi = \psi(\mathfrak{a})^{-1}(\eta_{\mathfrak{a}}^*)^{\otimes r}$ in which $\eta_{\mathfrak{a}}^*$ denotes the pull back on $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}$ by

$$E \longrightarrow E/_{\mathfrak{a}}E \xrightarrow[\sim]{\eta_{\mathfrak{a}}} E^{(\sigma)} \quad (15.3.3).$$

Then η_ψ is independent of the choice of $\mathfrak{a}$.

This action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ on $V_{L_\lambda}(\psi)$ is abelian, and described by class field theory as follows. Via the reciprocity map $\widehat{K}^\times/K^\times \simeq \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ of class field theory, the image of $a \in \widehat{K}^\times$ in $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ acts on $V_{L_\lambda}(\psi)$ as multiplication by $a_v^r \psi(a)^{-1}$, where v is the place of K lying under λ and a_v denotes the v-component of a. Another class field theoretic description of this action by using Artin symbols is the following. The action of $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ on $V_{L_\lambda}(\psi)$ factors through $\mathrm{Gal}(K(p^\infty\mathfrak{f})/K)$, and for an ideal $\mathfrak{a}$

of O_K which is prime to $p\mathfrak{f}$, $(a, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)$ acts on $V_{L_\lambda}(\psi)$ as the multiplication by $\psi(\mathfrak{a})^{-1}$.

Next we define $S(\psi)$ as an L-subspace of $\mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes_K L$ such that $S(\psi)\otimes_K K(\mathfrak{f}) = \mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes_K L$, in the following way, where $\otimes r$ is taken over $K(\mathfrak{f})$.

We define an L-linear action of $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$ on $\mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes_K L$ such that $\sigma(ax) = \sigma(a)\sigma(x)$ for $a \in K(\mathfrak{f})$ and $x \in \mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes_K L$ by the following rule : $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$ acts as the composite

$$\mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes_K L \xrightarrow{\sigma\otimes 1} \mathrm{coLie}(E^{(\sigma)})\otimes_K L \xrightarrow[\sim]{\eta_\psi} \mathrm{coLie}(E)\otimes_K L$$

where η_ψ is the following isomorphism. Take an ideal $\mathfrak{a}$ of O_K which is prime to $\mathfrak{f}$ such that $\sigma = (\mathfrak{a}, K(\mathfrak{f})/K)$. We define

$$\eta_\psi = \psi(\mathfrak{a})^{-1}(\eta_{\mathfrak{a}}^*)^{\otimes r} : \mathrm{coLie}(E^{(\sigma)})^{\otimes r}\otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{coLie}(E/_{\mathfrak{a}}E)^{\otimes r}\otimes_K L = \mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes_K L$$

where the last identification is by the canonical isogeny $E \to E/_{\mathfrak{a}}E$. Then η_ψ is independent of the choice of $\mathfrak{a}$. Now we define $S(\psi)$ to be the fixed part in $\mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes_K L$ under this action of $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$.

We define the period map

$$\mathrm{per}_\psi : S(\psi) \longrightarrow V_{\mathbb{C}}(\psi)$$

as the map induced by the period map $\mathrm{coLie}(E) \to \mathrm{H}^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

Finally we define the isomorphism (15.8.1). For any finite place v of K lying under λ, $V_{L_\lambda}(\psi)$ is de Rham as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ because it is de Rham as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{K(\mathfrak{f})}_w/K(\mathfrak{f})_w)$ for any finite place w of $K(\mathfrak{f})$ lying over v. We have

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(K(\mathfrak{f})\otimes\mathbb{Q}_p, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(E\otimes_{K(\mathfrak{f})}\overline{K(\mathfrak{f})}_w, \mathbb{Q}_p)) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(E/K(\mathfrak{f}))\otimes\mathbb{Q}_p$$

and this induces

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(K(\mathfrak{f})\otimes\mathbb{Q}_p, V_{L_\lambda}(\psi)) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(E/K(\mathfrak{f}))^{\otimes r}\otimes_K L_\lambda$$

where $\otimes r$ is the r-fold tensor power as an invertible module over $K\otimes K(\mathfrak{f})$ (K acts via $K \simeq \mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}$ and $K(\mathfrak{f})$ acts because it is the base field). This induces

$$\mathrm{D}^j_{\mathrm{dR}}(K(\mathfrak{f})\otimes\mathbb{Q}_p, V_{L_\lambda}(\psi)) \simeq \mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes_K L_\lambda \qquad \text{for } 1 \leqslant j \leqslant r$$

(the left hand side does not depend on j such that $1 \leqslant j \leqslant r$) where $\otimes r$ is taken over $K(\mathfrak{f})$ and $\mathrm{coLie}(E)$ is regarded as an $K(\mathfrak{f})$-subspace of $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(E/K(\mathfrak{f}))$. By taking the $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$-invariant part of the both sides of the last isomorphism, we have

$$\mathrm{D}^j_{\mathrm{dR}}(K\otimes\mathbb{Q}_p, V_{L_\lambda}(\psi)) \simeq S(\psi)\otimes_L L_\lambda \quad \text{for } 1 \leqslant j \leqslant r.$$

In the above constructions of $V_L(\psi), S(\psi)$, etc., we fixed $\mathfrak{f}$. However every construction does not depend of the choice of $\mathfrak{f}$ in the following sense. If $\mathfrak{f}'$ is another ideal of O_K which is contained in the conductor ψ and (E', α') (resp. (E'', α'')) denotes the canonical CM-pair over $K(\mathfrak{f}')$ (resp. $K(\mathfrak{f}\mathfrak{f}')$), E is identified with $E''/_{\mathfrak{f}'}E''$ and E'

is identified with $E''/_{\mathfrak{f}}E''$. Via the isomorphisms induced by the canonical isogenies $E'' \to E$ and $E'' \to E'$, we can identify constructions using $\mathfrak{f}$ and constructions $\mathfrak{f}'$.

Proposition 15.9. — *Let $r \geqslant 1$ and let ψ be a Hecke character of K of type $(-r, 0)$. Let p be a prime number, let $\mathfrak{f}$ be a non-zero ideal of O_K contained in the conductor of ψ, let K' be a finite extension of K contained in $K(p^\infty\mathfrak{f})$, and let $\gamma \in V_L(\psi)$. Then the image of $z_{p^\infty\mathfrak{f}}$ under*

$$\mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1)) \xrightarrow{\gamma} \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1)) \otimes V_{L_\lambda}(\psi) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi)(1)) \longrightarrow$$

$$\mathrm{H}^1(O_{K'}[1/p], V_{L_\lambda}(\psi)(1)) \xrightarrow{\exp^*} \mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(K' \otimes \mathbb{Q}_p, V_{L_\lambda}(\psi)) \underset{(15.8.1)}{\simeq} (S(\psi) \otimes_L L_\lambda) \otimes_K K'$$

is an element of $S(\psi) \otimes_K K'$ whose image under

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K'/K)} \chi(\sigma)\, \mathrm{per}_\psi \circ \sigma : S(\psi) \otimes_K K' \longrightarrow V_{\mathbb{C}}(\psi)$$

coincides with $L_{p\mathfrak{f}}(\overline{\psi}, \chi, r) \cdot \gamma$ for any homomorphism $\chi : \mathrm{Gal}(K'/K) \to \mathbb{C}^\times$. Here $L_{p\mathfrak{f}}(\overline{\psi}, \chi, s)$ denotes $\sum_{\mathfrak{a}} \overline{\psi}(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a})^{-s}$ in which $\mathfrak{a}$ ranges over all ideals of $\mathcal{O}_K$ which are prime to $p\mathfrak{f}$.

Proof. — This 15.9 is proved in [**KK2**, Chap. III, § 1] under certain assumptions. The proof of 15.9 here follows the method there.

By using the trace maps, we see that we may replace K' by any finite extension of K' contained in $K(p^\infty\mathfrak{f})$. Hence we may assume $K' = K(\mathfrak{g})$, where $\mathfrak{g}$ is an ideal of O_K having the form $p^m\mathfrak{f}_0$, where $m \geqslant 1$ and $\mathfrak{f}_0$ is the smallest ideal of O_K which divides $\mathfrak{f}$ and which is prime to p, and such that $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{f}$ and $O_K^\times \to (O_K/\mathfrak{g})^\times$ is injective.

Let (E, α) be the canonical CM-pair over $K' = K(\mathfrak{g})$. Let $\beta \in \mathrm{H}_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ be the image of $1 \in K$ under the canonical K-isomorphism $K \simeq \mathrm{H}_1(\mathbb{C}/\mathfrak{g}, \mathbb{Q})$ which is induced from the canonical isomorphism $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{H}_1(\mathbb{C}/\mathfrak{g}, \mathbb{Z})$. By the K-linearity, it is sufficient to prove 15.9 in the case $\gamma = \beta^{\otimes(-r)}$.

The image of $p^m\beta$ in $\mathrm{H}_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_p) = T_pE \otimes \mathbb{Q}$ is an $O_K \otimes \mathbb{Z}_p$-basis of T_pE which we denote by $\xi = (\xi_n)_{n \geqslant 0}$ (ξ_n is the O_K/p^n-basis of ${}_{p^n}E$ corresponding to ξ). We define torsion points α_n and ν_n ($n \geqslant 0$) on E as follows. For $n \geqslant 0$, let $\alpha_n \in E(K(p^n\mathfrak{f}_0))$ be the image of $p^{m-n}\beta$ in $\mathrm{H}_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq E(\mathbb{C})_{\mathrm{tor}}$. So, $\alpha = \alpha_m$. For $n \geqslant 0$, let $\nu_n = \xi_n - \alpha_n$. Then ν_n is killed by $\mathfrak{f}_0$ and belongs to $E(K')$. Let $\theta_n(z) = {}_{\mathfrak{a}}\theta(z + \nu_n)$. We have $\theta_n(\xi_n) = {}_{\mathfrak{a}}\theta(\alpha_n)$. Furthermore $N_p(\theta_{n+1}) = \theta_n$ for $n \geqslant 1$.

By the assumption $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{f}$, the action of $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K')$ on $T_\ell E$ for any prime ℓ is unramified at any finite place of K' not lying over ℓ. Hence [**ST**], E is of good reduction at any finite place of K'.

We apply the generalized explicit reciprocity law [**KK3**, Thm. 4.3.1]. (We apply the case of height $h = 1$ of this theorem, though we applied the case $h = 2$ of this theorem in § 10.) For a place v of K' lying over p and for a prime ideal $\mathfrak{p}$ of O_K lying over p, let $G(v, \mathfrak{p})$ be the part of the Néron model of E over O_v killed by some

power of $\mathfrak{p}$. Then $G(v,\mathfrak{p})$ is a p-divisible group over O_v and the triple $(K'_v, G(v,\mathfrak{p}), O_\mathfrak{p})$ satisfies the assumption of the triple (K,G,Λ) of [**KK3**, Thm. 4.3.1] with $h=1$. By applying this theorem to $(K'_v, G(v,\mathfrak{p}), O_\mathfrak{p})$ for all v and $\mathfrak{p}$ as above, we obtain the following result: The image of

$$\xi^{\otimes(-r)} \otimes (\theta_n(\xi_n))_n \in (T_pE)^{\otimes(-r)} \otimes \varprojlim_n \mathrm{H}^1(O_{K(p^n\mathfrak{f})}[1/p], \mathbb{Z}_p(1))$$

under the map

$$\begin{aligned}(T_pE)^{\otimes(-r)} \otimes \varprojlim_n \mathrm{H}^1(O_{K(p^n\mathfrak{f})}[1/p], \mathbb{Z}_p(1)) &\longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{H}^1(O_{K(p^n\mathfrak{f})}[1/p], (T_pE)^{\otimes(-r)}(1)) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1(K'\otimes\mathbb{Q}_p, (T_pE)^{\otimes(-r)}(1)) \xrightarrow{\exp^*} \mathrm{coLie}(E)^{\otimes r}\otimes\mathbb{Q}_p\end{aligned}$$

coincides with

$$p^{-mr}\cdot(r-1)!^{-1}\cdot\Big((\frac{d}{\omega})^r\log(\theta_m)\Big)(\xi_m)\otimes\omega^{\otimes r}$$

where ω is a K'-basis of $\mathrm{coLie}(E)$. This means that the image of $\xi^{\otimes(-r)}\otimes(\theta_n(\xi_n))_n$ under

$$\begin{aligned}V_{L_\lambda}(\psi)\otimes\mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(\mathbb{Z}_p(1)) &\longrightarrow \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi)(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(O_{K'}[1/p], V_{L_\lambda}(\psi)(1)) \\ &\xrightarrow{\exp^*} \mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(K'\otimes\mathbb{Q}_p, V_{L_\lambda}(\psi)) \simeq (S(\psi)\otimes_L L_\lambda)\otimes_K K'\end{aligned}$$

coincides with $p^{-mr}\cdot(r-1)!^{-1}\cdot((\frac{d}{\omega})^r\log(\theta_m))(\xi_m)\otimes\omega^{\otimes r}$. Hence the image of

$$\beta^{\otimes(-r)}\otimes({}_\mathfrak{a}\theta(\alpha_n))_n = p^{mr}\cdot\xi^{\otimes -r}\otimes(\theta_n(\xi_n))_{n\geqslant 1}$$

in $(S(\psi)\otimes_K K')\otimes_L L_\lambda$ is equal

$$\begin{aligned}&(r-1)!^{-1}\cdot((\frac{d}{\omega})^r\log(\theta_m))(\xi_m)\otimes\omega^{\otimes r} \\ &\qquad = (r-1)!^{-1}\cdot\Big((\frac{d}{\omega})^r\log({}_\mathfrak{a}\theta)\Big)(\alpha_m)\otimes\omega^{\otimes r}\in S(\psi)\otimes_K K'.\end{aligned}$$

Hence we are reduced to the following (15.9.1). □

(15.9.1) *Let*

$${}_\mathfrak{a}z = (r-1)!^{-1}\cdot\Big((\frac{d}{\omega})^r\log({}_\mathfrak{a}\theta)\Big)(\alpha_m)\otimes\omega^{\otimes r}\in S(\psi)\otimes_K K'.$$

Then

$$\sum_\sigma \chi(\sigma)\,\mathrm{per}_\psi(\sigma({}_\mathfrak{a}z)) = (N(\mathfrak{a})-\psi(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})^{-1})L_{p\mathfrak{f}}(\overline{\psi},\chi,r)\beta^{\otimes(-r)}$$

(σ ranges over $\mathrm{Gal}(K'/K)$*).*

(This (15.9.1) shows

(15.9.2) *For* $z=(N(\mathfrak{a})-\psi(\mathfrak{a})\sigma_\mathfrak{a})^{-1}{}_\mathfrak{a}z$, $\sum_\sigma\chi(\sigma)\,\mathrm{per}_\psi(\sigma(z)) = L_{p\mathfrak{f}}(\overline{\psi},\chi,r)\beta^{\otimes(-r)}$.)

Proof of (15.9.1). — Let $\sigma \in \mathrm{Gal}(K'/K)$ and fix an ideal $\mathfrak{b}$ of O_K which is prime to $\mathfrak{g}$ such that $(\mathfrak{b}, K'/K) = \sigma$. Then

$$\sigma({}_{\mathfrak{a}}z) = \psi(\mathfrak{b})^{-1}\Big(\big(\frac{d}{\omega}\big)^r \log {}_{\mathfrak{a}}\theta_{E/\,{}_{\mathfrak{b}}E}\Big)(\alpha \bmod {}_{\mathfrak{b}}E) \otimes \omega^{\otimes r}.$$

By the analytic theory of Eisenstein series in 3.8, this is equal to

$$N(\mathfrak{a})\psi(\mathfrak{b})^{-1} \sum_{c \in P(\mathfrak{b})} (c\beta)^{\otimes(-r)}|c|^{-s}\Big|_{s=0} - \psi(\mathfrak{a})\psi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1} \sum_{c \in P(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} (c\beta)^{\otimes(-r)}|c|^{-s}\Big|_{s=0}$$

where $P(J) = \{c \in K\,;\, c \equiv 1 \bmod J^{-1}\mathfrak{g}\}$. Let $Q(J)$ be the set of ideals I of O_K such that I is prime to $\mathfrak{g}$ and such that $(I, K'/K) = (J, K'/K)$. Then as is easily seen, we have a bijection $c \mapsto cJ$ from $P(J)$ to $Q(J)$, and $\psi(cJ) = c^r\psi(J)$ for $c \in P(J)$. Hence

$$\begin{aligned}\sigma({}_{\mathfrak{a}}z) &= N(\mathfrak{a}) \sum_{I \in Q(\mathfrak{b})} \psi(I)^{-1}N(I)^{-s}\beta^{\otimes(-r)}\Big|_{s=0} \\ &\qquad - \psi(\mathfrak{a}) \sum_{I \in Q(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} \psi(I)^{-1}N(I)^{-s}\beta^{\otimes(-r)}\Big|_{s=0} \\ &= N(\mathfrak{a}) \sum_{I \in Q(\mathfrak{b})} \overline{\psi}(I)N(I)^{-s}\beta^{\otimes(-r)}\Big|_{s=r} \\ &\qquad - \psi(\mathfrak{a}) \sum_{I \in Q(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} \overline{\psi}(I)N(I)^{-s}\beta^{\otimes(-r)}\Big|_{s=r}\end{aligned}$$

(since $\psi(I)\overline{\psi}(I) = N(I)^r$). This proves (15.9.1). □

15.10. In the rest of § 15, assume f has CM. Then $L(f, s) = L(\psi, s)$ for a Hecke character ψ of an imaginary quadratic field K of type $(1-k, 0)$ whose conductor divides N. We denote the conductor of ψ by $\mathfrak{f}$.

The field $F = \mathbb{Q}(a_n\,;\, n \geqslant 1)$ is contained in $L = K(\psi(K^\times))$ as is seen from $L(f, s) = L(\psi, s)$.

Let λ be a finite place of L. Then, as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over L_λ, $V_{L_\lambda}(f)$ is isomorphic to the representation

$$V^{\sim}_{L_v}(\psi) = V_{L_v}(\psi) \oplus \iota V_{L_v}(\psi)$$

induced from the representation $V_{L_v}(\psi)$ of the subgroup $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Here $\iota \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ denotes the complex conjugation, and the action of $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $V^{\sim}_{L_v}(\psi)$ sends $(x, \iota y)$ $(x, y \in V_{L_v}(\psi))$ to $(\sigma(x), \iota(\iota\sigma\iota)(y))$ if σ belongs to $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$, and to $((\iota\tau\iota)(y), \iota\tau(x))$ if $\sigma = \iota\tau$ with $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$. This can be seen by comparing the eigenpolynomial of Frobenius of each prime number which is prime to N. (See [**Ri2**].)

Lemma 15.11. — *Fix an isomorphism of one dimensional L-vector spaces*

$$S(\psi) \xrightarrow{\sim} S(f) \otimes_F L. \tag{15.11.1}$$

Then:

(1) *For each finite place λ of L, there exists a unique isomorphism of representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *over* L_λ

$$V_{L_v}^{\sim}(\psi) \xrightarrow{\sim} V_{L_v}(f) \tag{15.11.2}$$

such that the composition

$$S(\psi)\otimes_L L_\lambda \xrightarrow[\sim]{(15.8.1)} \mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(K\otimes\mathbb{Q}_p, V_{L_\lambda}(\psi)) = \mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(V_{L_v}^{\sim}(\psi)) \xrightarrow[\sim]{(15.11.2)} \mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(V_{L_v}(f)) \simeq S(f)\otimes_F L_\lambda$$

coincides with the isomorphism induced by (15.11.1).

(2) *Let*

$$V_L^{\sim}(\psi) = V_L(\psi)\oplus \iota V_L(\psi) \qquad (\iota = \textit{the complex conjugation})$$

be the representation of $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ *over L induced from the trivial representation $V_L(\psi)$ of the subgroup $\{1\}$ of* $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, *and denote the composite $S(\psi)\to V_L(\psi)\hookrightarrow V_L^{\sim}(\psi)$ also by* per_ψ. *Then there exists a unique isomorphism of representations of* $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ *over L*

$$V_L^{\sim}(\psi) \xrightarrow{\sim} V_L(f) \tag{15.11.3}$$

for which the diagram

$$\begin{array}{ccc} S(\psi) & \xrightarrow{\mathrm{per}_\psi} & V_{\mathbb{C}}^{\sim}(\psi) = V_L^{\sim}(\psi)\otimes_L \mathbb{C} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (15.11.1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (15.11.3)} \\ S(f)\otimes_F L & \xrightarrow{\mathrm{per}_\psi} & V_{\mathbb{C}}(f) \end{array}$$

is commutative

Proof.

(1) Take any isomorphism $h : V_{L_\lambda}^{\sim}(\psi) \xrightarrow{\sim} V_{L_\lambda}(f)$ of representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over L_λ. Then h induces

$$\mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(V_{L_\lambda}^{\sim}(\psi)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(V_{L_\lambda}(f))$$

and hence

$$S(\psi)\otimes_L L_\lambda \xrightarrow{\sim} S(f)\otimes_F L_\lambda$$

which is c times the isomorphism induced by (15.11.1) for some $c\in L_\lambda^\times$. The isomorphism $c^{-1}h$ is the desired one. The uniqueness follows from the irreducibility of $V_{L_\lambda}^{\sim}(\psi)$ as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over L_λ.

(2) Fix a sign $\pm$. Identify $S(\psi)$ with $S(f)\otimes_F L$ via (15.11.1). It is sufficient to show that there exists an isomorphism of one dimensional L-vector spaces

$$h : V_L^{\sim}(\psi)^{\pm} \xrightarrow{\sim} V_L(\psi)^{\pm}$$

such that $h \circ \mathrm{per}_{\psi}^{\pm} = \mathrm{per}_{f}^{\pm}$. Here

$$\mathrm{per}_{\psi}^{\pm} = \frac{1 \pm \iota}{2} \circ \mathrm{per}_{\psi}, \quad \mathrm{per}_{f}^{\pm} = \frac{1 \pm \iota}{2} \circ \mathrm{per}_{f}\,.$$

By 6.6, 13.5 and (15.9.2), there exist $m \geqslant 1$, elements

$$z \in S(\psi) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_m), \quad z' \in S(f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_m),$$

and non-zero elements

$$\gamma \in V_L^{\sim}(\psi)^{\pm}, \quad \gamma' \in V_F(f)^{\pm},$$

satisfying the following (i) (ii).

(i) For any character $\chi : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/Q) \to \mathbb{C}^{\times}$ such that $\chi(-1) = \pm$,

$$\sum_{\sigma} \chi(\sigma)\, \mathrm{per}_{\psi}^{\pm}(\sigma(z)) = L_S(\psi, \chi, k-1)\gamma,$$

$$\sum_{\sigma} \chi(\sigma)\, \mathrm{per}_{f}^{\pm}(\sigma(z')) = L_S(f, \chi, k-1)\gamma',$$

where σ ranges over $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ and $S = \mathrm{prime}(mN)$.

(ii) There exists a character $\chi : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}^{\times}$ such that $\chi(-1) = \pm$ and such that $L_S(\psi, \chi, k-1) = L_S(f, \chi, k-1)$ is not zero.

By (ii), there exists $\sigma_0 \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ such that the image of $\sigma_0(z)$ under

$$S(\psi) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_m) \longrightarrow S(\psi) \otimes_L L(\zeta_m)$$

is not zero. Let b be the element of $L(\zeta_m)$ such that the image of $\sigma_0(z')$ in

$$S(f) \otimes_F L(\zeta_m) = S(\psi) \otimes_L L(\zeta_m)$$

is b times the image of $\sigma_0(z)$. We will show that b is a non-zero element of L. The L-linear map

$$h : V_L^{\sim}(\psi)^{\pm} \longrightarrow V_L(f)^{\pm}$$

which sends γ to $b^{-1}\gamma'$ satisfies $h \circ \mathrm{per}_{\psi}^{\pm} = \mathrm{per}_{f}^{\pm}$. Now we prove $b \in L^{\times}$. From (i) (by taking $\sum_{\chi} \chi(\tau)^{-1}$ ((i) for χ) where χ ranges over all characters $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}^{\times}$ such that $\chi(-1) = \pm$), we see that for each $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$, there exists $c_\sigma \in \mathbb{C}$ such that

$$\mathrm{per}_{\psi}^{\pm}(\sigma(z) \pm \sigma\iota(z)) = c_\sigma \gamma, \qquad \mathrm{per}_{f}^{\pm}(\sigma(z') \pm \sigma\iota(z')) = c_\sigma \gamma',$$

where ι is the complex conjugation. For $\sigma = \tau\sigma_0$ with $\tau \in \mathrm{Gal}(L(\zeta_m)/L)$, we have $c_\sigma \neq 0$ and

$$\tau(b) \cdot \mathrm{per}_{f}^{\pm}(\sigma(z) \pm \sigma\iota(z)) = c_\sigma \gamma'.$$

Hence $b \neq 0$, and $\tau(b)$ is independent of $\tau \in \mathrm{Gal}(L(\zeta_m)/L)$. This shows $b \in L^{\times}$. □

In the rest of § 15, we fix an isomorphism (15.11.1). In what follows, we identify $S(\psi)$ and $S(f) \otimes_F L$ via (15.11.1). We also identify the representations $V_{L_\lambda}^{\sim}(\psi)$ and $V_{L_\lambda}(f)$ of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ via (15.11.2) for any finite place λ of L.

The "philosophy of motif" tells that the isomorphism (15.11.3) should be compatible with our identification (15.11.2), but I can not prove it. (The problem is that in the case $k \geqslant 3$, it is not known that the motif associated to f [**Sc1**] and the motif associated to ψ coincide. Here, the former motif is a direct summand of the motif associated to the Kuga-Sato variety, and the latter motif is obtained from the $(k-1)$-fold tensor power of the motif associated to an elliptic curve with complex multiplication.) So to avoid the confusion, we will never use (15.11.3) as identification.

15.12. Let λ be a finite place of L. Then we have a canonical homomorphism of $O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$-modules

$$\mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi)) \longrightarrow \mathbf{H}^1(V_{L_\lambda}(f)) \tag{15.12.1}$$

since

$$\mathbf{H}^1(V_{L_\lambda}(f)) = \mathbf{H}^1(V^\sim_{L_\lambda}(\psi)) = \big(\varprojlim_n \mathrm{H}^1(O_{K\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})}[1/p], T)\big)\otimes\mathbb{Q}$$

where T is any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$-stable O_λ-lattice of $V_{L_\lambda}(\psi)$, and since we have a canonical homomorphism

$$K\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}) \longrightarrow K(p^\infty\mathfrak{f}).$$

By 15.9, we have:

(15.12.2) *Let $\gamma \in V_L(\psi)$ and let $\gamma' \in V_L(f)$ be the image of γ under the isomorphism* (15.11.3). *For $n \geqslant 0$, consider the composite map*

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi)(1)) &\xrightarrow{(15.12.1)} \mathbf{H}^1(V_{L_\lambda}(f)(1))\\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{L_\lambda}(f)(1))\\ &\xrightarrow{\exp^*} \mathrm{D}^1_{\mathrm{dR}}(V_{L_\lambda}(f))\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})\\ &\simeq S(f)\otimes_F L_\lambda\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}).\end{aligned}$$

Let $\mathcal{S}$ be the set of non-zero-divisors of $\mathbb{Z}_p[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ whose images in $\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q})]$ are invertible. Then the induced map

$$\mathcal{S}^{-1}\mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi)(1)) \longrightarrow S(f)\otimes_F L_\lambda\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$$

sends $z_{p^\infty\mathfrak{f}}\otimes\gamma$ to an element of

$$S(f)\otimes_F L\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$$

whose image under $\sum_\sigma \chi(\sigma)\,\mathrm{per}_f\circ\sigma$, where χ is any homomorphism

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

and σ ranges over $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q})$, coincides with

$$L_{\{p\}}(f^*, \chi, k-1)\cdot(\gamma')^\pm, \qquad \pm = \chi(-1).$$

Lemma 15.13. — *Let p be a prime number and assume K is not contained in $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$. Let $\mathfrak{f}$ be the conductor of ψ, Δ the torsion part of $G_{p^\infty\mathfrak{f}}$, λ a finite place of L lying over p, $\mathfrak{p}$ a prime ideal of $O_\lambda[[G_\infty]]$, and $\mathfrak{q}$ the inverse image of $\mathfrak{p}$ in $O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$, under the surjection $O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]] \to O_\lambda[[G_\infty]]$. Assume that 2 and the order of Δ are invertible in the residue field of $\mathfrak{p}$. Then:*

(1) *$O_\lambda[[G_\infty]]_\mathfrak{p}$ and $O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_\mathfrak{q}$ are regular rings, and the kernel of $O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]_\mathfrak{q} \to O_\lambda[[G_\infty]]_\mathfrak{p}$ is a principal ideal.*

(2) *Let a be a generator of the principal ideal in (1). Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$-stable O_λ-lattice of $V_{L_\lambda}(\psi)$ and let $T^\sim = T \oplus \iota T \subset V^\sim_{L_\lambda}(\psi)$.*

Then we have

$$\mathbf{H}^2_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q}/a\mathbf{H}^2_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q} \simeq \mathbf{H}^2(T^\sim)_\mathfrak{p} \tag{15.13.1}$$

and an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q}/a\mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q} \longrightarrow \mathbf{H}^1(T^\sim)_\mathfrak{p} \longrightarrow \mathrm{Ker}(a; \mathbf{H}^2_{p^\infty\mathfrak{f}}(T))_\mathfrak{q} \longrightarrow 0. \tag{15.13.2}$$

Proof. — Consider the exact sequence of representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$

$$0 \longrightarrow T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]] \xrightarrow{a} T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]] \longrightarrow T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[[G_\infty]] \longrightarrow 0$$

where $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ acts on $O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ (resp. $O_\lambda[[G_\infty]]$) by the multiplication by the image of σ^{-1} in $G_{p^\infty\mathfrak{f}}$ (resp. G_∞). Let v be a finite place of K which does not lie over p, and let $I_v \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ be the inertia subgroup. Then the cokernel of

$$\mathrm{H}^0(I_v, T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]) \longrightarrow \mathrm{H}^0(I_v, T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[[G_\infty]])$$

is killed by the order of Δ. This is because the action of I_v on $T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]$ factors through a homomorphism $I_v \to \Delta \subset G_{p^\infty\mathfrak{f}}$. Hence if j denotes the inclusion map $\mathrm{Spec}(O_K[1/p\mathfrak{f}]) \to \mathrm{Spec}(O_K[1/p])$, the cokernel of the last arrow of the exact sequence

$$0 \longrightarrow j_*(O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]) \xrightarrow{a} j_*(O_\lambda[[G_{p^\infty\mathfrak{f}}]]) \longrightarrow j_*(T \otimes_{O_\lambda} O_\lambda[[G_\infty]])$$

is killed by the order of Δ. Hence this exact sequence induces an exact sequence

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q} \xrightarrow{a} \mathbf{H}^1_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q} \longrightarrow \mathbf{H}^1(T^\sim)_\mathfrak{p} \\ &\longrightarrow \mathbf{H}^2_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q} \xrightarrow{a} \mathbf{H}^2_{p^\infty\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q} \longrightarrow \mathbf{H}^2(T^\sim)_\mathfrak{p} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

15.14. In the case $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$, Lemma 15.13 is modified as follows. Let $G'_\infty = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/K) \subset G_\infty$, and let $\mathbf{H}^q(T) = \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T)$. Then $\mathbf{H}^q(T^\sim) \simeq \mathbf{H}^q(T) \otimes_{O_\lambda[[G'_\infty]]} O_\lambda[[G_\infty]]$. Lemma 15.13 holds when we replace G_∞ by G'_∞, and $\mathbf{H}^q(T^\sim)$ by $\mathbf{H}^q(T)$.

15.15. We prove Thm. 12.4 for f.

Once we prove Thm. 12.4 (1) (that $\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f))$ is a torsion $O_\lambda[[G_\infty]]$-module), we can deduce Thm. 12.4 (2) (3) from it by the argument in 13.8. We prove Thm. 12.4 (1). Let v be a place of L lying over λ. Since $\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f)) \otimes_{O_\lambda} O_v \simeq \mathbf{H}^2(V_{L_v}^\sim(\psi))$, it is sufficient to prove that $\mathbf{H}^2(V_{L_v}^\sim(\psi))$ is a torsion $O_v[[G_\infty]]$-module. Now by writing v as λ, let λ be a place of L lying over a prime number p.

We first assume K is not contained in $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$. In lemma 15.13, let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of height 0 of $O_\lambda[[G_\infty]]$. Then $\mathfrak{q}$ is a prime ideal of height 1 of $O_\lambda[[G_{p^{\infty}\mathfrak{f}}]]$. By 13.5 and (15.12.2), the image of $z_{p^{\infty}\mathfrak{f}} \otimes V_{L_\lambda}(\psi)(-1)$ under

$$\mathbf{H}^1_{p^{\infty}\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi))_\mathfrak{q} \longrightarrow \mathbf{H}^1(V_{L_\lambda}(\psi))_\mathfrak{p}$$

is not zero. Since $\mathbf{H}^1_{p^{\infty}\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi))_\mathfrak{q}$ is a free $O_\lambda[[G_{p^{\infty}\mathfrak{f}}]]_\mathfrak{q}$-module of rank 1, this shows that the $O_\lambda[[G_{p^{\infty}\mathfrak{f}}]]_\mathfrak{q}$-module $\mathbf{H}^1_{p^{\infty}\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi))_\mathfrak{q}$ is generated by the image of $z_{p^{\infty}\mathfrak{f}} \otimes V_{L_\lambda}(\psi)$. Hence by the theorem 15.2 by Rubin, we have $\mathbf{H}^2_{p^{\infty}\mathfrak{f}}(V_{L_\lambda}(\psi))_\mathfrak{q} = 0$. Hence by (15.13.1), $\mathbf{H}^2(V_{L_\lambda}^\sim(\psi))_\mathfrak{p} = 0$. This shows that $\mathbf{H}^2(V_{L_\lambda}^\sim(\psi))$ is a torsion $O_\lambda[[G_\infty]]$-module.

The proof for the case $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ goes similarly by using 15.14 instead of 15.13. □

15.16. We prove Thm. 12.5 and Thm. 12.6 for f in the case K is not contained in $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$. Since we have already proved Thm. 12.4 for f, Thm. 12.5 (1) (2) and Thm. 12.6 are proved by the same arguments in 13.9-13.13.

Next we prove Thm. 12.5 (3) (Thm. 12.5 (4) does not exist in the case with complex multiplication). By (15.12.2) and Thm. 12.4 (2), we have

(15.16.1) *Let $\gamma \in V_L(\psi)$ and let γ' be the image of γ in $V_L(f)$ under* (15.11.3). *Then the homomorphism* (15.12.1) *sends $z_{p^\infty} \otimes \gamma \otimes (\zeta_{p^n})_n^{\otimes(-1)}$ to $\mathbf{z}_{\gamma'}^{(p)}$.*

Hence 12.5 (3) is reduced to

Proposition 15.17. — *Let λ be a finite place of L lying over a prime number p, let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of $O_\lambda[[G_\infty]]$ of height 1, and assume either (a) or (b) in Thm. 15.2 is satisfied. Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$-stable O_λ-lattice in $V_{L_\lambda}(\psi)$ and let $Z(\psi,T)_\mathfrak{p}$ be the $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]_\mathfrak{p}$-submodule of $\mathbf{H}^1(T^\sim)_\mathfrak{p}$ generated by the image of $z_{p^{\infty}\mathfrak{f}} \otimes T(-1)$ under $\mathbf{H}^1_{p^{\infty}\mathfrak{f}}(T) \to \mathbf{H}^1(T^\sim)_\mathfrak{p}$. Then*

$$\mathrm{length}_{O_\lambda[[G_\infty]]_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^2(T^\sim)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{length}_{O_\lambda[[G_\infty]]_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(T^\sim)_\mathfrak{p}/Z(\psi,T)_\mathfrak{p}).$$

Proof. — Assume first K is not contained in $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$. Let $\mathfrak{q}$ be the inverse image of $\mathfrak{p}$ in $O_\lambda[[G_{p^{\infty}\mathfrak{f}}]]$. We apply Lemma 14.12 to $A = O_\lambda[[G_{p^{\infty}\mathfrak{f}}]]_\mathfrak{q}$ and to the A-modules $\mathbf{H}^2_{p^{\infty}\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q}$ and $\mathbf{H}^1_{p^{\infty}\mathfrak{f}}(T)_\mathfrak{q}/A\cdot(z_{p^{\infty}\mathfrak{f}}\otimes T(-1))$. Then by (15.13.1) and (15.13.2), Prop. 15.17 follows from theorem 15.2 of Rubin.

The proof for the case $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ goes similarly by using 15.14 instead of 15.13. □

15.18. We can prove Thm. 14.5 (1)(2) for f by using Thm. 12.5 (3) in the same way as in § 14. (Thm. 14.5 (3) does not exist in the case with complex multiplication.)

15.19. Here we give the proof of Lemma 14.7 in the case f has complex multiplication.

The following fact is proved easily : For a finite dimensional vector space V over a complete discrete valuation field P and for a finite extension P' of P, the canonical map

$$\{O_P\text{-lattices in } V\}/\sim \longrightarrow \{O_{P'}\text{-lattices in } P'\otimes_P V\}/\sim$$

is injective, where the first $\sim$ (resp. the second $\sim$) is the equivalence by multiplications by $P^\times$ (resp. $(P')^\times$).

Take an ideal $\mathfrak{a}$ of O_K which is prime to N such that $\psi(\mathfrak{a}) \neq \psi(\overline{\mathfrak{a}})$. We show that the condition in 14.7 is satisfied by all finite places λ of F which do not divide $(\psi(\mathfrak{a})-\psi(\overline{\mathfrak{a}}))N(\mathfrak{a})$. By the above remark, we may assume $P \supset L_v$ for some place v of L lying over λ. Let e be a P-basis of $V_P(\psi)$, and let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_P-lattice of $V_P^{\sim}(\psi)$ $(\simeq V_{F_\lambda}(f)\otimes_{F_\lambda} P)$. We show that $T = a\cdot(O_P e + O_P \iota e)$ for some $a \in P^\times$. Let $a_1 e + a_2 \iota e \in T$ $(a_i \in P)$. Let p be the prime number lying under λ. By applying $(\mathfrak{a}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)$ to $a_1 e + a_2\iota e$ and by using $\iota(\mathfrak{a}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)\iota = (\overline{\mathfrak{a}}, K(p^\infty\mathfrak{f})/K)$, we have $\psi(\mathfrak{a})^{-1}a_1 e + \psi(\overline{\mathfrak{a}})^{-1}a_2\iota e \in T$. (Note $\psi(\mathfrak{a}), \psi(\overline{\mathfrak{a}}) \in O_P^\times$ as is easily seen.) By $\psi(\mathfrak{a}) - \psi(\overline{\mathfrak{a}}) \in O_P^\times$, we have $a_1 e \in T$. By applying ι, we have $a_1\iota e \in T$. Similarly we have $a_2 e, a_2\iota e \in T$. This shows that $T = a\cdot(O_P e + O_P\iota e)$ where a is a generator of the fractional O_P-ideal generated by all $a_1, a_2 \in P$ such that $a_1 e + a_2\iota e \in T$.

Lemma 15.20. — *Almost all finite places λ of F have the following property: For any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)$, $T/m_\lambda T$ is irreducible as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.*

Proof. — By 14.7, it is sufficient to prove that for almost all finite places λ of L and for any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$-stable lattice T of $V_{L_\lambda}(\psi)$, $T^\sim/m_\lambda T^\sim$ is irreducible as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Take an ideal $\mathfrak{a}$ of O_K which is prime to N such that $\psi(\mathfrak{a}) \neq \psi(\overline{\mathfrak{a}})$. By the similar argument as in 15.19, we can see that any finite place λ of L which does not divide $(\psi(\mathfrak{a})-\psi(\overline{\mathfrak{a}}))N(\mathfrak{a})$ has this property. □

Proposition 15.21. — *Almost all finite places λ of F have the following property: For any $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ lattice T of $V_{F_\lambda}(f)$,*

$$Z(f,T) \subset \mathbf{H}^1(T) \quad \textit{in } \mathbf{H}^1(T)\otimes\mathbb{Q},$$

and

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^2(T)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(T)_\mathfrak{p}/Z(f,T)_\mathfrak{p})$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of Λ of height one.

Proof. — The first part is proved in the same way as in the non-CM case in 13.14 by 12.4 (1), 12.6, 14.7, 15.20.

We prove the second part (the property about length). If p is an odd prime number which does not divide the order of $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$ and which is unramified in K, then p does not divide the order of the torsion part of $G_{p^\infty\mathfrak{f}}$ as is easily seen. Hence by Prop. 15.17 and lemma 14.7, we are reduced to

Lemma 15.22. — *Let γ be a non-zero element of $V_L(\psi)$ and let γ' be an element of $V_L(f)$ such that $(\gamma')^+ \neq 0, (\gamma')^- \neq 0$. Then for almost all finite places λ of L, $\gamma'^+ = u\gamma^+$ and $\gamma'^- = v\gamma^-$ in $V^-_{L_\lambda}(\psi) = V_{L_\lambda}(f)$ for some $u, v \in O_\lambda^\times$.*

Proof. — Fix an L-basis ω of $S(\psi) = S(f) \otimes_F L$. For almost all finite places λ of L, the O_λ lattices

$$T_\lambda \underset{\text{def}}{=} O_\lambda\gamma^+ + O_\lambda\gamma^- \quad \text{and} \quad T'_\lambda \underset{\text{def}}{=} O_\lambda \cdot (\gamma')^+ + O_\lambda \cdot (\gamma')^-$$

of $V^\sim_{L_\lambda}(\psi) = V_{L_\lambda}(f)$ are $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable. For almost all λ, $T_\lambda = T(D_\lambda)$ and $T'_\lambda = T(D'_\lambda)$ for strongly divisible lattices D_λ and D'_λ of $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V^\sim_{L_\lambda}(\psi)) = \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{L_\lambda}(f))$ such that ω is an O_λ-basis of $D^1_\lambda = D^{k-1}_\lambda$ and also is an O_λ-basis of $(D'_\lambda)^1 = (D'_\lambda)^{k-1}$. For almost all λ, $T'_\lambda = a_\lambda \cdot T_\lambda$ for some $a_\lambda \in L^\times_\lambda$ (14.7) and this implies $D'_\lambda = a_\lambda D_\lambda$ and hence $(D'_\lambda)^1 = a_\lambda \cdot D^1_\lambda$. For almost all λ, since ω is an O_λ-basis of D^1_λ and also an O_λ-basis of $(D'_\lambda)^1$, we have $a_\lambda \in O^\times_\lambda$ and hence $T'_\lambda = T_\lambda$. This proves Lemma 15.22. □

15.23. From 15.22, we can deduce the following result by the argument in § 14: *Let $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k/2$. In the case $r = k/2$, assume $L(f, k/2) \neq 0$. Then for almost all places λ of F and for all $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattices T of $V_{F_\lambda}(f)(r)$, the number μ in Prop. 14.16 (2) satisfies*

$$\mu \geqslant 1.$$

By this, the proof of Thm. 14.2 goes in the same way as in the non-CM-case.

CHAPTER IV
IWASAWA THEORY FOR MODULAR FORMS (WITH p-ADIC ZETA FUNCTIONS)

In this chapter, we study the Iwasawa theory concerning p-adic zeta functions of modular forms, and p-adic Birch and Swinnerton-Dyer conjectures for modular forms.

As in Chap. III, we fix $k \geqslant 2, N \geqslant 1$, and a normalized newform

$$f = \sum_{n \geqslant 1} a_n q^n \in S_k(X_1(N)) \otimes \mathbb{C}.$$

We also fix a prime number p and a place λ of $F = \mathbb{Q}(a_n\,;\, n \geqslant 1)$ lying over p.

We denote by $\overline{\mathbb{Q}}$ the algebraic closure of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$. We fix an algebraic closure $\overline{F}_\lambda$ of F_λ and an embedding $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{F}_\lambda$ over F_λ.

16. The p-adic zeta function

In this section, we review the theory of p-adic zeta function of f, and then show (Thm. 16.6) that the p-adic zeta function of f is the image of the p-adic zeta element of $f^* = \sum_{n\geqslant 1} \overline{a}_n q^n$ under a homomorphism of Perrin-Riou. This in fact provides a new construction of the p-adic zeta function of f.

16.1. We assume that there exists $\alpha \in (\overline{F}_\lambda)^\times$ such that

$$1 - \alpha u | 1 - a_p u + \varepsilon(p) p^{k-1} u^2 \qquad \text{in } \overline{F}_\lambda[u]$$

and

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) < k - 1$$

where ord_p is the additive valuation of $\overline{F}_\lambda$ normalized by $\mathrm{ord}_p(p) = 1$. The p-adic zeta function of f is defined after we fix such α.

The p-adic zeta function of f corresponding to α lives in a certain ring $\mathscr{H}_{\infty,L}$ with $L = F_\lambda(\alpha)$ which contains $O_L[[G_\infty]]$ as a subring. We introduce the ring $\mathscr{H}_{\infty,L}$.

Let $G_n = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}), G_\infty = \varprojlim_n G_n$, and let $G_\infty = \Delta \times G_\infty^1$ be the decomposition in 12.1. Let u be a topological generator of G_∞^1. Then, for a finite extension L of $\mathbb{Q}_p$, $O_L[[G_\infty]]$ is identified with the ring $O_\lambda[\Delta][[u-1]]$ of formal power series over the group ring $O_\lambda[\Delta]$ in one variable $u - 1$.

For $h \geqslant 1$, let

$$\mathscr{H}_{h,L} = \left\{ \sum_{\substack{n\geqslant 0 \\ \sigma\in\Delta}} c_{n,\sigma} \cdot \sigma \cdot (u-1)^n \in L[\Delta][[u-1]];\ \lim_{n\to\infty} |c_{n,\sigma}|_p \cdot n^{-h} = 0 \text{ for all } \sigma \in \Delta \right\}$$

where $|\ |_p$ denotes the multiplicative valuation of L normalized by $|p|_p = \frac{1}{p}$. Then

$$O_L[[G_\infty]] \subset \mathscr{H}_{1,L} \subset \mathscr{H}_{2,L} \subset \mathscr{H}_{3,L} \subset \cdots$$

Define

$$\mathscr{H}_{\infty,L} = \bigcup_h \mathscr{H}_{h,L}.$$

Then $\mathscr{H}_{\infty,L}$ is a ring since $\mathscr{H}_{i,L} \cdot \mathscr{H}_{j,L} \subset \mathscr{H}_{i+j,L}$ for any $i, j \geqslant 1$. We defined $\mathscr{H}_{h,L}$ and $\mathscr{H}_{\infty,L}$ by fixing u, but they are in fact independent of the choice of u in the following sense.

Let

$$X(G_\infty) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_\infty, \overline{L}^\times). \tag{16.1.1}$$

For $\chi \in X(G_\infty)$, we have a ring homomorphism

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{\infty,L} &\longrightarrow \overline{L} \\ \mu &\longmapsto \mu(\chi) \\ \sum_{\substack{n\geqslant 0\\ \sigma\in\Delta}} c_{n,\sigma}\cdot\sigma\cdot(u-1)^n &\longmapsto \sum_{\substack{n\geqslant 0\\ \sigma\in\Delta}} c_{n,\sigma}\cdot\chi(\sigma)\cdot(\chi(u)-1)^n. \end{aligned}$$

The homomorphism $\mathscr{H}_{\infty,L} \to \mathrm{Map}(X(G_\infty),\overline{L})\,;\, \mu \mapsto (\chi \mapsto \mu(\chi))$ is injective, and $\mathscr{H}_{\infty,L}$ is identified with a subring of $\mathrm{Map}(X(G_\infty),\overline{L})$. This subring is independent of the choice of u, and for $h \geqslant 1$, $\mathscr{H}_{h,L}$ regarded as a subset of $\mathrm{Map}(X(G_\infty),\overline{L})$ is independent of the choice of u.

***Theorem 16.2* (Amice-Vélu [AV], Vishik [Vi])**. — *Fix $\alpha \in (\overline{F}_\lambda)^\times$ as above. Fix also a non-zero element ω of $S(f^*)$, and a non-zero element $\gamma \in V_F(f^*)$ such that $\gamma^+ \neq 0$, $\gamma^- \neq 0$. Define $\Omega_+, \Omega_- \in \mathbb{C}^\times$ by*

$$\mathrm{per}(\omega) = \Omega_+\gamma^+ + \Omega_-\gamma^-.$$

Then there exist a unique element

$$L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f) \in \mathscr{H}_{k-1,F_\lambda(\alpha)}$$

(which we denote $L_{p\text{-adic},\alpha}(f)$ for simplicity) having the following properties (i) (ii) for any integer r such that $1 \leqslant r \leqslant k-1$.

(i) *Let $n \geqslant 1$, let $\chi : G_n \to \overline{F}_\lambda^\times$ be a homomorphism which does not factor through G_{n-1}, and regard $\kappa^r\chi$ as an element of $X(G_\infty)$* (16.1.1)*. Then*

$$L_{p\text{-adic},\alpha}(f)(\kappa^r\chi^{-1}) = (r-1)!\cdot p^{nr}\alpha^{-n}\cdot G(\chi,\zeta_{p^n})^{-1}\cdot(2\pi i)^{k-r-1}\cdot\frac{1}{\Omega_\pm}\cdot L_{\{p\}}(f,\chi,r)$$

(both sides belong to $\overline{\mathbb{Q}}$, and the equality holds in $\overline{\mathbb{Q}}$) where $\pm = (-1)^{k-r-1}\chi(-1)$, χ is regarded here as a character of $(\mathbb{Z}/p^n)^\times$ via the cyclotomic character $G_n \simeq (\mathbb{Z}/p^n)^\times$, and $G(\chi,\zeta_{p^n})$ means the Gauss sum $\sum_b \chi(b)\zeta_{p^n}^b$ where b ranges over all elements of $(\mathbb{Z}/p^n)^\times$.

(ii)

$$L_{p\text{-adic},\alpha}(f)(\kappa^r) = (r-1)!\cdot(2\pi i)^{k-r-1}\cdot\frac{1}{\Omega_\pm}\cdot(1-p^{r-1}\alpha^{-1})(1-\varepsilon(p)p^{k-r-1}\alpha^{-1})\cdot L(f,r)$$

where $\pm = (-1)^{k-r-1}$.

Remark 16.3

(1) Let $h \geqslant 1$ and let $\mu, \mu' \in \mathscr{H}_{h,L}$. Let $r(1),\dots,r(h)$ be distinct h integers, and assume

$$\mu(\kappa^{r(i)}\chi) = \mu'(\kappa^{r(i)}\chi)$$

for any $i = 1,\dots,h$ and for almost all elements $\chi \in X(G_\infty)$ of finite orders. Then $\mu = \mu'$. Hence the property (i) in Thm. 16.2 characterizes the element $L_{p\text{-adic},\alpha}(f)$ of $\mathscr{H}_{k-1,F_\lambda(\alpha)}$.

(2) For $a, b \in F^\times$, we have $L_{p\text{-adic},\alpha,a\omega,b\gamma}(f) = a^{-1}b\cdot L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f)$.

The following theorems follows from the work of Perrin-Riou [**Pe2**].

***Theorem 16.4* (Perrin-Riou).** — *Let L be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ and let V be a finite dimensional L-vector space endowed with a continuous L-linear action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Assume V is a de Rham representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, and assume*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V^*(1)) \subset \mathrm{D}^0_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \quad \text{in } \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \tag{16.4.1}$$

where $V^* = \mathrm{Hom}_L(V, L)$ endowed with the dual action of $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Let $\eta \in \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V^*(1))$. Then there exists a unique homomorphism

$$\mathfrak{L}_\eta : \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V) \longrightarrow \mathscr{H}_{\infty,L}$$

having the following properties (i) (ii) for any integer $r \geqslant 1$.

(i) *Let $n \geqslant 1$, and let $\chi : G_n \to \overline{L}^\times$ be a homomorphism which does not factor through G_{n-1}. Then for any $x \in \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V)$, we have*

$$\mathfrak{L}_\eta(x)(\kappa^r\chi^{-1}) = (r-1)! \cdot G(\chi, \zeta_{p^n})^{-1} \sum_{\sigma \in G_n} \chi(\sigma)\langle \sigma(\exp^*(x_{-r,n})), (p^{-r}\varphi)^{-n}(\eta)\rangle.$$

Here $x_{-r,n}$ denotes the image of x under the composite

$$\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V(-r)) \xrightarrow{\mathrm{proj}} \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), V(-r))$$

where the first arrow is the product with $((\zeta_{p^j})^{\otimes(-r)})_{j\geqslant 1}$ and the second arrow is the canonical projection (so $\exp^*(x_{-r,n})$ is an element of $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V(-r)) = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$), $\langle\ ,\ \rangle$ is the canonical pairing

$$(\mathbb{Q}(\zeta_{p^j}) \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)) \times \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V^*(1)) \longrightarrow \overline{L}$$

induced by $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \times \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V^*(1)) \to L$, and φ is the Frobenius.

(ii) *Assume $\eta = (1 - p^{-r}\varphi)\eta'$ with $\eta' \in \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))$. Then for any $x \in \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V)$,*

$$\mathfrak{L}_\eta(x)(\kappa^r) = (r-1)! \cdot \langle \exp^*(x_{-r,0}), (1 - p^{r-1}\varphi^{-1})\eta'\rangle.$$

This map $\mathfrak{L}_\eta$ is Λ-linear, and the map $\eta \mapsto \mathfrak{L}_\eta$ is L-linear. Furthermore, if $r \geqslant 1$ and if η belongs to an L-subspace of $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V^*(1))$ on which the slope of the Frobenius is $< h$, then $\mathrm{Image}(\mathfrak{L}_\eta) \subset \mathscr{H}_{h,L}$.

Remark 16.5

(1) In the paper [**Pe2**], Perrin-Riou in fact defined a canonical homomorphism

$$\mathscr{H}_{\infty,L} \longrightarrow \mathscr{H}_{\infty,L} \otimes_\Lambda \Big(\varprojlim_n \mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T^*(1)\big)\Big) \big/ (\text{some small thing}),$$

associated to $\eta \in \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V^*(1))$. The homomorphism in 16.4 is obtained from this homomorphism by taking $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\infty,L}}(\ ,\mathscr{H}_{\infty,L})$.

(2) In the paper [**Pe2**], the assumption V is crystalline appears to have a map in the above (1) for $\eta \in \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V^*(1))$. Kurihara,Tsuji and I checked that this assumption is not necessary [**KKT**]. See also [**CP**], [**Pe5**].

We apply 16.4 by taking $V_{F_\lambda}(f^*)(k)$ as V in 16.4. Since $(V_{F_\lambda}(f^*)(k))^*(1) = V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k)$ is isomorphic to $V_{F_\lambda}(f)$ as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (14.10.1), the condition (16.4.1) is satisfied.

Theorem 16.6. — *Let α, ω, γ be as in 16.2, and let*

$$\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(f^*)(k) \in \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f^*)(k))$$

be the image of the p-adic zeta element

$$\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(f^*) \in \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))$$

(12.5 (1)) under the product with $(\zeta_{p^n})_{n\geqslant 1}^{\otimes k}$. Then:

(1) *There exists an element η of $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$ such that*

$$\varphi(\eta) = \alpha\eta \quad \textit{and} \quad \langle \omega, \eta \rangle = 1.$$

(2) *For η as in (1), we have*

$$L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f) = \mathfrak{L}_\eta(\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(f^*)(k)).$$

Here ω is regarded as an element of $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f^*))$ via the embedding $S(f^*) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f^*))$.

Proof. — We prove (1). Since $V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k) \simeq V_{F_\lambda}(f)$ and

$$1 - a_p u + \varepsilon(p) p^{k-1} u^2 = \det_{F_\lambda}(1 - \varphi u \text{ on } \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f)))$$

by [**Sa1**], there exists a non-zero element η of $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$ such that $\varphi(\eta) = \alpha\eta$. It is sufficient to prove $\langle \omega, \eta \rangle \neq 0$. Since the annihilator of $S(f^*)$ in $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$ is $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{k-1}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$, it is sufficient to prove that in $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$, η does not belong to $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{k-1}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$. Hence it is sufficient to show that a non-zero element η in $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$ such that $\varphi(\eta) = \alpha\eta$ does not belong to $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{k-1}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$. Consider the $F_\lambda(\alpha)$-subspace $F_\lambda(\alpha) \cdot \eta$ of $F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$. This subspace is stable under the action of the Frobenius φ. The Newton polygon of this subspace has slope $\mathrm{ord}_p(\alpha) < k-1$, and if $\eta \in F_\lambda(\alpha) \otimes_{F_\lambda} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{k-1}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$, the Hodge polygon of this subspace has slope $k-1$ [**Fo3**, § 4.4]. By [**Fo3**, § 4.4], this contradicts the result of Tsuji and Faltings that $V_{F_\lambda}(f)$ is potentially semi-stable (as explained in 11.4).

Next we prove (2). Let $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$ and let n and χ be as in 16.4 (i). Write

$$\exp^*(\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(f^*)(k)_{-r,n}) = c_{-r,n}\omega \qquad \text{with } c_{-r,n} \in \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \otimes F.$$

Then by 16.4

$$\mathfrak{L}_\eta(\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(f^*)(k))(\kappa^r\chi^{-1}) = (r-1)! \cdot p^{nr}\alpha^{-n} \cdot G(\chi, \zeta_{p^n})^{-1} \sum_{\sigma \in G_n} \chi(\sigma)\sigma(c_{-r,n}).$$

Let $\pm = (-1)^{k-r-1}\chi(-1)$. By the characterizing property of the p-adic zeta element $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(f^*)$ in 12.5, the image of $\sum_{\sigma\in G_n}\chi(\sigma)\sigma(c_{-r,n})\cdot\omega$ under

$$\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})\otimes S(f^*)\longrightarrow \mathbb{C}\otimes_F V_F(f^*)\longrightarrow \mathbb{C}\otimes_F V_F(f^*)^{\pm}$$

is $(2\pi i)^{k-r-1}L_{\{p\}}(f,\chi,r)\cdot\gamma^{\pm}$. This shows

$$\Big(\sum_{\sigma\in G_n}\chi(\sigma)\sigma(c_{-r,n})\Big)\cdot\Omega_{\pm} = (2\pi i)^{k-r-1}L_{\{p\}}(f,\chi,r).$$

This proves $\mathfrak{L}_\eta(\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(f^*)(k)) = L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f)$ by 16.3 (1). □

17. The main conjecture, II

In § 17 and § 18, we consider the relation between the p-adic zeta function of f and the Selmer groups associated to f. In this section, we consider the analogue of Iwasawa main conjecture in the case f is of good ordinary reduction.

The following is known:

Proposition 17.1. — *The following three conditions (i)-(iii) are equivalent.*

(i) *p does not divide N and $a_p\in O_\lambda^\times$.*

(ii) *p does not divide N and there exists an element α of $O_\lambda^\times$ such that $1-\alpha u$ divides the polynomial $1-a_pu+\varepsilon(p)p^{k-1}u^2$.*

(iii) *$V_{F_\lambda}(f)$ is crystalline as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, and there exists a one dimensional F_λ-subspace $V'_{F_\lambda}(f)$ of $V_{F_\lambda}(f)$ which is stable under the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ and is unramified as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.*

Furthermore, if these equivalent conditions are satisfied, the element α in (ii) is unique, and the subspace $V'_{F_\lambda}(f)$ in (iii) is unique, and if we put $V''_{F_\lambda}(f) = V_{F_\lambda}(f)/V'_{F_\lambda}(f)$, $V''_{F_\lambda}(f)(k-1)$ is unramified as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

We give the proof of 17.1 in 17.7.

We say that f has good ordinary reduction at λ if the equivalent conditions in 17.1 are satisfied.

If f has good ordinary reduction at λ, f^* also has good ordinary reduction at λ. This follows from $V_{F_\lambda}(f^*)\simeq \mathrm{Hom}_{F_\lambda}(V_{F_\lambda}(f),F_\lambda)(1-k)$ by using the above condition (iii).

Proposition 17.2. — *Assume f has good ordinary reduction at λ. Let $V'_{F_\lambda}(f)$ and $V''_{F_\lambda}(f)$ be as in 17.1, let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice in $V_{F_\lambda}(f)$, and let*

$$0\longrightarrow T'\longrightarrow T\longrightarrow T''\longrightarrow 0$$

be the exact sequence defined by $T' = T\cap V'_{F_\lambda}(f), T'' = T/T'\subset V''_{F_\lambda}(f)$. Then for $1\leqslant r\leqslant k-1$, the subgroup

$$\varinjlim_n \mathrm{Sel}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),T(r))(-r)$$

of $\varinjlim_n \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *coincides with the kernel of*

$$\varinjlim_n \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \varinjlim_n \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T'' \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

and hence is independent of r.

The proof of 17.2 is given in 17.10.

17.3. Assume f has good ordinary reduction at λ. For a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice T of $V_{F_\lambda}(f)$, let

$$\mathrm{Sel}_\infty(T) = \varinjlim_n \mathrm{Sel}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r))(-r) \qquad (1 \leqslant r \leqslant k-1)$$

which is independent of r, and let

$$\mathfrak{X}(T) = \mathrm{Hom}_{O_\lambda}(\mathrm{Sel}_\infty(T), F_\lambda/O_\lambda).$$

We regard $\mathfrak{X}(T)$ as a module over $\Lambda = O_\lambda[[G_\infty]]$ in the natural way. It is easily seen that $\mathfrak{X}(T)$ is a finitely generated Λ-module.

The aim of this section is to prove the following Thm. 17.4.

Theorem 17.4. — *Assume f has good ordinary reduction at λ. Let T be a* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$*-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)$.*

(1) *$\mathfrak{X}(T)$ is a torsion Λ-module.*

(2) *Let α be as in 17.1, let ω be a non-zero element of $S(f^*)$, and let γ be an element of $V_F(f^*)$ such that $\gamma^+ \neq 0$ and $\gamma^- \neq 0$. Then, $L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f) \in \Lambda \otimes \mathbb{Q}$, and we have*

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathfrak{X}(T)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f))$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ in Λ of height one which does not contain p.

(3) *Let α, ω, γ be as in (2), and assume that both ω and γ are good for some* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$*-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)$ in the sense of 17.5 below. Assume further $p \neq 2$ and that the condition 12.5.2 in 12.5 (4) is satisfied. Then $L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f)$ belongs to Λ and*

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathfrak{X}(T)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f))$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of Λ of height one.

17.5. Assume f has good ordinary reduction at λ. Then as we will see in 17.8, the composite map

$$S(f) \otimes_F F_\lambda \hookrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V''_{F_\lambda}(f)) \tag{17.5.1}$$

is an isomorphism. (Here $V''_{F_\lambda}(f)$ is as in 17.1.)

Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)$. Then $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T''(k-1))$ is an O_λ-lattice of the one dimensional F_λ-vector space $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V''_{F_\lambda}(f))$, where T'' is the image of T in $V''_{F_\lambda}(f)$ and $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ denotes the p-adic completion of the valuation ring of $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$.

We say an element ω of $S(f)$ is good for T if the image of ω in $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V''_{F_\lambda}(f))$ under the map (17.5.1) is an O_λ-basis of $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T''(k-1))$. Note that a good ω for T exists. In the case f of weight 2 and $T = (T_pE)(-1)$ for an elliptic curve E over $\mathbb{Q}$, ω is good for T if and only if ω is a $\mathbb{Z}_p$-basis of $\mathrm{coLie}(\overline{E}) \otimes \mathbb{Z}_p$ where $\overline{E}$ is the Néron model of E.

Recall 14.18 that we say an element γ of $V_{F_\lambda}(f)$ is good for T if γ^+ is an O_λ-basis of T^+ and γ^- is an O_λ-basis of T^-.

The following is an old conjecture due to Mazur and Greenberg.

***Conjecture 17.6* (main conjecture).** — *Assume f has good ordinary reduction at λ, and let $T, \mathfrak{X}(T), \alpha, \omega, \gamma$ be as in Thm. 17.4 (2). Then*

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathfrak{X}(T)_\mathfrak{p}) = \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f))$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of height one of Λ which does not contain p. If furthermore $p \neq 2$ and if ω and γ are good in the sense of 17.5 for some $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f^*)$ which is isomorphic to $T^*(1-k)$ as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over O_λ, then

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathfrak{X}(T)_\mathfrak{p}) = \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f))$$

for any prime ideal $\mathfrak{p}$ of height one.

See Greenberg [**Gr1**], [**Gr2**], Schneider [**Scp**] for more general aspects for motives.

As we will see in 17.13, the main conjecture 12.10 implies the main conjecture 17.6. The arguments to do this are similar to the arguments in deducing the classical Iwasawa main conjecture for the p-adic Riemann zeta function from the Iwasawa main conjecture of the form 12.9, and are well known to experts.

17.7. We prove 17.1.

Assume (i). We prove (ii). Write $1 - a_p u + \varepsilon(p)p^{k-1}u^2$ in the form $(1-\alpha u)(1-\beta u)$ with $\alpha, \beta \in \overline{F}_\lambda^\times$. If α does not belong to F_λ, we have $\mathrm{ord}_p(\alpha) = \mathrm{ord}_p(\beta)$ because α and β are conjugate over F_λ. Since $\alpha\beta = \varepsilon(p)p^{k-1}$, $\mathrm{ord}_p(\alpha) = \mathrm{ord}_p(\beta) = \frac{k-1}{2} > 0$ and this contradicts $\alpha + \beta = a_p \in O_\lambda^\times$. Hence $\alpha \in F_\lambda$. This shows $\alpha, \beta \in O_\lambda$. By $\alpha + \beta \in O_\lambda^\times$, one of α, β belongs to $O_\lambda^\times$. Hence (i) implies (ii).

Assume (ii). We prove (iii). Since p does not divide N, $V_{F_\lambda}(f)$ is a crystalline representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. The space $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))$ has a Frobenius φ and a filtration $(\mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)))_{i\in\mathbb{Z}}$ via the identification $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f)) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f))$. We have

$$\mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) = \begin{cases} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) & \text{for } i \leqslant 0, \\ S(f) \otimes_F F_\lambda & \text{for } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ 0 & \text{for } i \geqslant k. \end{cases}$$

Let α be as in condition (ii). Since

$$\det_{F_\lambda}\bigl(1 - \varphi u\,;\, \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))\bigr) = 1 - a_p u + \varepsilon(p)p^{k-1}u^2$$

[**Sa1**], $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))_\alpha = \{x \in \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))\,;\, \varphi(x) = \alpha x\}$ is a one dimensional F_λ-vector space.

Let U be a one dimensional F_λ-vector space which is endowed with an unramified action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ such that the arithmetic Frobenius acts by α^{-1}. Then the Frobenius on $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(U)$ coincides with the multiplication by α, $\mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(U) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(U)$ for $i \leqslant 0$, and $\mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(U) = 0$ for $i \geqslant 1$. Let $h : \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(U) \to \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))$ be an injective F_λ-linear map whose image is $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))_\alpha$. Then h preserves the Frobenius operators and the filtrations, and hence comes from an $F_\lambda[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$-homomorphism $U \to V_{F_\lambda}(f)$ [**Fo1**]. Let $V'_{F_\lambda}(f)$ be the image of this homomorphism. Then $V'_{F_\lambda}(f)$ is unramified.

It is easy to see that (ii) implies (i).

We prove that (iii) implies (ii). Since $V_{F_\lambda}(f)$ is crystalline as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, p does not divide N by [**Ca**] and [**Sa1**]. Since

$$1 - \overline{a}_p u + \varepsilon(p)u^2 = \det(1 - \varphi u\,;\, \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f))) \quad (14.10.4)$$

and since the slope of the unramified representation $V'_{F_\lambda}(f)$ is zero, we have (ii).

Thus we have proved that the conditions (i)-(iii) are equivalent. Assume now that these equivalent conditions are satisfied. Then α in (ii) is unique as is easily seen. Let $V''_{F_\lambda}(f) = V_{F_\lambda}(f)/V'_{F_\lambda}(f)$. Since

$$V'_{F_\lambda}(f) \otimes_{F_\lambda} V''_{F_\lambda}(f)(k-1) \simeq \big(\det_{F_\lambda}(V_{F_\lambda}(f))\big)(k-1)$$

is unramified (14.10.2), we have that $V''_{F_\lambda}(f)(k-1)$ is unramified. Since $V'_{F_\lambda}(f)$ is not isomorphic to $V''_{F_\lambda}(f)$, we see that $V'_{F_\lambda}(f)$ is unique.

This completes the proof of Prop. 17.1. □

17.8. We prove the bijectivity of the composite map (17.5.1). For $i \in \mathbb{Z}$, we have an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V'_{F_\lambda}(f)) \longrightarrow \mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) \longrightarrow \mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V''_{F_\lambda}(f)) \longrightarrow 0.$$

For i such that $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$$\mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V'_{F_\lambda}(f)) = 0,\ \mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)) = S_F(f) \otimes_F F_\lambda \text{ and } \mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V''_{F_\lambda}(f)) = \mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V_{F_\lambda}(f)).$$

Hence $S_F(f) \otimes_F F_\lambda \to \mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V''_{F_\lambda}(f))$ is an isomorphism.

Lemma 17.9. — *Assume f has good ordinary reduction at λ, let T, T', T'' be as in 17.2, and let r be an integer such that $1 \leqslant r \leqslant k-1$. Then the image of $\varprojlim_n \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T(r))$ in $\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(r))$ coincides with the image of $\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T'(r))$.*

Proof. — By Prop. 14.12, we have

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, V) = \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, V) = 0 \quad &\text{for } V = V'_{F_\lambda}(f)(r), V_{F_\lambda}(f)(r), V''_{F_\lambda}(f)(r),\\
\dim_{F_\lambda} \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r)) &= 2,\\
\dim_{F_\lambda} \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f)(r)) &= 1,\\
\dim_{F_\lambda} \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V) = 1 \quad &\text{for } V = V'_{F_\lambda}(f)(r), V''_{F_\lambda}(f)(r),\\
\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V'_{F_\lambda}(f)(r)) &= \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V'_{F_\lambda}(f)(r)),\\
\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V''_{F_\lambda}(f)(r)) &= 0.
\end{aligned}$$

We have also $\mathrm{H}^m(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{F_\lambda}(f)(r)) = \oplus_i \mathrm{H}^m(\mathbb{Q}_p, V_{L_i}(f \otimes \chi_i)(r))$ and similar facts for $V'_{F_\lambda}(f)(r)$, $V''_{F_\lambda}(f)(r)$, where L_i are finite extensions of $\mathbb{Q}_p$ satisfying $F_\lambda[(\mathbb{Z}/p^n)^\times] = \prod_i L_i$ and where $\chi_i : (\mathbb{Z}/p^n)^\times \to L_i^\times$ are induced homomorphisms. These show that $\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{F_\lambda}(f)(r))$ coincides with the image of $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), V'_{F_\lambda}(f)(r))$ in $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), V_{F_\lambda}(f)(r))$. Hence $\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T(r))$ contains the image of the injection $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T'(r)) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T(f)(r))$, and

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T(r))/\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T'(r))$$

is a finite group and is embedded into the torsion part of $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T''(r))$. Since the torsion part of $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T''(r))$ is the image of $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T''(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, it is sufficient to prove that $\varprojlim_n \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T''(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ is zero. But this follows from the finiteness of $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}), T''(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (13.13). □

17.10. We prove Prop. 17.2. Let $1 \leqslant i \leqslant k-1$. For each prime number ℓ, let

$$\begin{aligned}
A^n_\ell &= \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_\ell \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\\
B^n_\ell &= \mathrm{Image}\left(\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_\ell \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r) \otimes \mathbb{Q}) \to A^n_\ell\right).
\end{aligned}$$

For each prime number $\ell \neq p$, let

$$C^n_\ell = \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathbb{Z}[\zeta_{p^n}], T(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset A^n_\ell.$$

Then for any prime number $\ell \neq p$, B^n_ℓ coincides with the biggest divisible subgroup of C^n_ℓ. We have

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sel}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r)) &= \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to A^n_p/B^n_p \oplus \left(\bigoplus_{\ell \neq p} A^n_\ell/B^n_\ell\right)\right)\\
\mathcal{S}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T_\lambda(f)(r)) &= \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to A^n_p/B^n_p \oplus \left(\bigoplus_{\ell \neq p} A^n_\ell/C^n_\ell\right)\right)\\
\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &= \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{\ell \neq p} A^n_\ell/C^n_\ell\right).
\end{aligned}$$

We have $\varinjlim_n C^n_\ell = 0$ since

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathbb{Z}[\zeta_{p^n}],\ ) = \mathrm{H}^1(\mathbb{F}_\ell \otimes \mathbb{Z}[\zeta_{p^n}],\ )$$

and the p-cohomological dimension of $\bigcup_n \mathbb{F}_\ell(\zeta_{p^n})$ is zero. Hence we have also $\varinjlim_n B_\ell^n = 0$, and

$$\begin{aligned}\varinjlim_n \mathrm{Sel}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r)) &= \varinjlim_n \mathcal{S}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r)) \\ &= \varinjlim_n \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T(r)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to A_p^n/B_p^n\right).\end{aligned} \tag{17.10.1}$$

Hence it is sufficient to prove that B_p^n is equal to the kernel of

$$\varinjlim_n A_p^n \longrightarrow \varinjlim_n \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T''(r)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

But this follows from Lemma 17.9 by duality [**BK2**, Prop. 3.8].

The following Prop. 17.11 and Lemma 17.12 are preliminaries for the proof of Thm. 17.4.

Proposition 17.11. — *Assume f has good ordinary reduction at λ, let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f^*)$, let $T' = T \cap V'_{F_\lambda}(f^*)$, $T'' = T/T' \subset V''_{F_\lambda}(f^*)$. Let η be a basis of the invertible O_λ-module*

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Hom}_{O_\lambda}(T'', O_\lambda)(1-k)) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k)).$$

Then the homomorphism

$$\mathfrak{L}_\eta : \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k)) \longrightarrow \mathscr{H}_{\infty, F_\lambda} \quad (16.4)$$

induces an injection

$$\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k))/\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T'(k)) \longrightarrow \Lambda,$$

whose cokernel is a finite group.

Proof. — Since $\eta \in \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(V''_{F_\lambda}(f^*)^*(1-k))$, the map $\mathfrak{L}_\eta$ factors through $\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k)) \to \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T''(k))$. Since $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T'(k))$ is a finite group, the cokernel of the injective homomorphism

$$\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k))/\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T'(k)) \longrightarrow \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T''(k))$$

is a finite group. It remains to prove that $\mathfrak{L}_\eta$ induces an injective homomorphism $\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T''(k)) \to \Lambda$ with finite cokernel. Hence we are reduced to the following lemma 17.12 which we apply by taking $T''(k-1)$ as T in Lemma 17.12. □

Lemma 17.12. — *Let L be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$, and let T be an invertible O_L-module endowed with a continuous unramified O_L-linear action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ such that $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, T) = 0$. Let η be an O_L-basis of the invertible O_L-module*

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T^*).$$

Then $\mathfrak{L} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(1)) \to \mathscr{H}_{\infty, L}$ induces an injection $\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(1)) \to O_L[[G_\infty]]$ whose cokernel is a finite group.

Proof. — In this case, the homomorphism $\mathfrak{L}_\eta$ is expressed by using the theory of Coleman power series.

Let $\overline{\mathbb{F}}_p$ be the residue field of $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$, which is an algebraic closure of $\mathbb{F}_p$. Since T is unramified, T is regarded as $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$-module. The map $\mathfrak{L}_\eta$ is written as

$$\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(1)) \xrightarrow{a} \mathrm{H}^0\Big(\mathbb{F}_p, \varprojlim_n \mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}(\zeta_{p^n}), \mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} T\Big)$$
$$\xrightarrow{b} \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T) \otimes_{O_L} O_L[[G_\infty]] \xrightarrow[\sim]{\eta} O_L[[G_\infty]]$$

where a is the evident map and b is defined as follows. Let

$$P = \varprojlim_n (\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}(\zeta_{p^n})^\times)\hat{}\,, \quad Q = \varprojlim_n (\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[\zeta_{p^n}]^\times)\hat{}$$

where $(\ )\hat{}$ denotes the p-adic completion $\varprojlim_n (\ )/p^n(\ )$. Then

$$P \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}(\zeta_{p^n}), \mathbb{Z}_p(1)),$$
$$P/Q \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p \qquad \text{by the additive valuation.}$$

By Coleman [**CR1, CR2**], we have an exact sequence of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow Q \xrightarrow{c} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[G_\infty]] \longrightarrow 0, \tag{17.12.1}$$

where the map $\mathbb{Z}_p \to Q$ sends $1 \in \mathbb{Z}_p$ to $(-\zeta_{p^n})_{n \geqslant 1} \in Q$ and c is defined as follows. Let t be an indeterminate, and let

$$\varphi \text{ (resp. } \phi) : \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[t-1]] \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[t-1]]$$

be the unique continuous ring homomorphism such that $\varphi(t) = t^p$ ($\phi(t) = t$) and such that the restriction of φ (resp. ϕ) to $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ is the Frobenius automorphism of $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$. Since G_∞ acts on $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[t-1]]$ as $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$-linear continuous ring automorphisms in the way that $\sigma \in G_\infty$ sends t to $t^{\kappa(\sigma)}$, we can regard $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[t-1]]$ as a $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[G_\infty]]$-module. For each $u = (u_n)_n \in \varprojlim_n \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[\zeta_{p^n}]^\times \subset Q$, by the theory of Coleman, there exists a unique element $\widetilde{u} = \widetilde{u}(t)$ of $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[t-1]]^\times$ (the Coleman power series associated to u) such that $u_n = \phi^{-n}(\widetilde{u})(\zeta_{p^n})$ for all $n \geqslant 1$. Furthermore, there exists a unique element μ_u of $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[G_\infty]]$ such that

$$\frac{1}{p} \cdot \log((\widetilde{u})^p \varphi(\widetilde{u})^{-1}) = \mu_u \cdot t \text{ in } \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[t-1]].$$

Here $\mu_u \cdot t$ is defined by the above $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[G_\infty]]$-module structure of $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[t-1]]$. The map c is defined by $c(u) = \mu_u$. Now the definition of b is as follows. Since

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, P/Q \otimes_{\mathbb{Z}_p} T) \simeq \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, T) = 0,$$

we have $\mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, P\otimes_{\mathbb{Z}_p} T) = \mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, Q\otimes_{\mathbb{Z}_p} T)$. The map b is defined to be the composite

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, P\otimes_{\mathbb{Z}_p} T) = \mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, Q\otimes_{\mathbb{Z}_p} T) \xrightarrow{c} \mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[[G_\infty]]\otimes_{\mathbb{Z}_p} T) = \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}\otimes_{\mathbb{Z}_p} T)\otimes_{O_L} O_L[[G_\infty]].$$

It remains to prove that the map a is bijective and that the map b is injective and the cokernel of b is finite. The bijectivity of a follows from $\mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}(\zeta_{p^n}), \mathbb{Z}_p(1)) = \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}(\zeta_{p^n}), \mathbb{Z}_p(1))$ and from the spectral sequence

$$E_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(\mathbb{F}_p, \mathrm{H}^j(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}(\zeta_{p^n}),\ )) \Longrightarrow E_\infty^{i+j} = \mathrm{H}^{i+j}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),\ ).$$

Next by the exact sequence (17.12.1), $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, T)$ and $\mathrm{Coker}(b) \subset \mathrm{H}^1(\mathbb{F}_p, T)$. Hence the injectivity of b follows from the vanishing of $\mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, T) = \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, T)$, and the finiteness of the cokernel of b is reduced to the finiteness of $\mathrm{H}^1(\mathbb{F}_p, T) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Frob}_p - 1; T)$, which follows $\mathrm{Ker}(\mathrm{Frob}_p - 1; T) = \mathrm{H}^0(\mathbb{F}_p, T) = 0$. □

17.13. We prove Thm. 17.4.

First the property $L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f) \in \Lambda\otimes\mathbb{Q}$ (resp. $L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f) \in \Lambda$) in 17.4 (2) (resp. 17.4 (3)) is known but follows also from 17.11 and 16.6 (resp. 17.11, 12.5 (4) and 16.6).

Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f^*)$. Take any integer r such that $1 \leqslant r \leqslant k-1$. By taking $\varprojlim_n$ of the sequence (14.9.3) for $K = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ and for $T(r)$ (we use $T(r)$ as T in (14.9.3)), and by using (17.10.1), we obtain a sequence of Λ-modules

$$\begin{aligned}(17.13.1)\quad 0 \longrightarrow\ & \mathbf{H}^1(T(k))/(\varprojlim_n \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T(r))(k-r)) \\ \longrightarrow\ & \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k))/(\varprojlim_n \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T(r))(k-r)) \\ \longrightarrow\ & \mathfrak{X}(T^*(1-k)) \longrightarrow \mathbf{H}^2(T(k)) \longrightarrow \mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T(k))\end{aligned}$$

($T^* = \mathrm{Hom}_{O_\lambda}(T, O_\lambda)$) which is exact if $p \neq 2$, and is exact upto $\times 2$ in the case $p = 2$.

We show first

$$(17.13.2)\qquad \varprojlim_n \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p], T(r)) = 0.$$

For this, since $\mathbf{H}^1(T(k))$ has no Λ-torsion and is of Λ-rank 1 (12.4), it is sufficient to show that the image of $\mathbf{H}^1(T(k))$ in $\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k))/(\varprojlim_n \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T(r))(k-r))$ is of Λ-rank 1. This fact is shown by observing that the image of $Z(f)(k)$ (12.5 (2)) is already of Λ-rank 1.

Next by 17.9, we have

$$(17.13.3)\qquad \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T)/(\varprojlim_n \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T(r))(k-r)) = \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k))/\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T'(k))$$

where $T' = T \cap V'_{F_\lambda}(f^*)$. Furthermore by the latter half of Thm. 12.5 (3),

(17.13.4) $\mathbf{H}^2_{\mathrm{loc}}(T(k))$ *is a finite group.*

Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of Λ of height one. In the case $\mathfrak{p}$ contains p, we assume $p \neq 2$ and that the condition (12.5.2) in 12.5 (4) is satisfied. By (17.13.2)-(17.13.4), we obtain from (17.13.1) an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^1(T(k))_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k))_{\mathfrak{p}}/\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T'(k))_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathfrak{X}(T^*(1-k))_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathbf{H}^2(T(k))_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

Let ω be an element of $S(f^*)$ which is good for T, and let γ be an element of $V_F(f^*)$ which is good for T, in the sense of 17.5. By 17.11 and by 12.5, 16.6, we have an isomorphism $\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T(k))_{\mathfrak{p}}/\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(T'(k))_{\mathfrak{p}} \simeq \Lambda_{\mathfrak{p}}$ which sends the image of $Z(f,T)(k)_{\mathfrak{p}}$ (12.5 (4)) onto $\Lambda_{\mathfrak{p}} \cdot L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f)$. Hence we obtain an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^1(T(k))_{\mathfrak{p}}/Z(f,T)(k)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \Lambda_{\mathfrak{p}}/(\Lambda_{\mathfrak{p}} \cdot L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f)) \longrightarrow \mathfrak{X}(T^*(1-k))_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathbf{H}^2(T(k))_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

Hence $\mathfrak{X}(T^*(1-k))_{\mathfrak{p}}$ is a torsion $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-module, and

$$\mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{X}(T^*(1-k))_{\mathfrak{p}}) - \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\Lambda_{\mathfrak{p}}/(L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma})) = \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2(T(k))) - \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^1(T(k))_{\mathfrak{p}}/Z(f,T)(k)_{\mathfrak{p}}).$$

Hence Thm. 17.4 (resp. Conj. 17.6) becomes a consequence of Thm. 12.5 (resp. Conj. 12.10).

18. p-adic Birch Swinnerton-Dyer conjectures

In this section, we assume k is even.

Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)(k/2)$. We consider the relation between the corank of the Selmer group $\mathrm{Sel}(T)$ and the order of the p-adic zeta function of f at $s = k/2$.

18.1. For the order of the complex zeta function $L(f,s)$, the "modular form version" of the Birch Swinnerton-Dyer conjecture says

$$\mathrm{corank}_{O_\lambda}(\mathrm{Sel}(T)) = \mathrm{ord}_{s=k/2}(L(f,s)).$$

A p-adic analogue of this is formulated in [**MTT**].

Assume that there is $\alpha \in \overline{F}_\lambda$ such that $1 - \alpha u$ divides $1 - a_p u + \varepsilon(p)p^{k-1}u^2$ and such that $\mathrm{ord}_p(\alpha) < k-1$. Let ω be a non-zero element of $S(f^*)$, and let γ be an element of $V_F(f^*)$ such that $\gamma^+ \neq 0$ and $\gamma^- \neq 0$. Write $L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f)$ simply as $L_{p\text{-adic},\alpha}(f)$ (the choices of ω and γ are not important in the following). We denote $\mathscr{H}_{\infty,F_\lambda(\alpha)}$ simply by $\mathscr{H}_\infty$.

For an element μ of $\mathscr{H}_\infty$ and for $r \in \mathbb{Z}$, we define the order of μ at $s = r$, denoted by $\mathrm{ord}_{s=r}(\mu)$, as follows. Let $\mathfrak{p}$ be the kernel of the ring homomorphism $\mathcal{H}_\infty \to \overline{F}_\lambda(\alpha); \mu \mapsto \mu(\kappa^r)$ induced by the group homomorphism $\kappa^r : G_\infty \to {\mathbb{Z}_p}^\times \subset \overline{F}_\lambda^\times$.

Then as we will see in 18.6, the local ring $\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}$ is a discrete valuation ring. We define $\mathrm{ord}_{s=r}(\mu) = \mathrm{length}_{\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}}(\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}/\mu\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}})$.

***Conjecture 18.2* ([MTT])**. — *If $\alpha \neq p^{(k-2)/2}$, we have*

$$\mathrm{corank}_{O_\lambda}(\mathrm{Sel}(T)) = \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)).$$

If $\alpha = p^{(k-2)/2}$, we have

$$\mathrm{corank}_{O_\lambda}(\mathrm{Sel}(T)) = \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) - 1.$$

Remark 18.3. — If $\alpha = p^{(k-2)/2}$, then $L_{p\text{-adic},\alpha}(f, k/2) = 0$ (16.2 (ii)) and hence

$$\mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) \geqslant 1.$$

If $\alpha = p^{(k-2)/2}$, then p divides N. In the case $k = 2$ and f corresponds to an elliptic curve E over $\mathbb{Q}$, $\alpha = 1$ if and only if $E \otimes \mathbb{Q}_p$ is a Tate curve.

Theorem 18.4. — *Let T be $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)(k/2)$. Then we have $\leqslant$ in place of $=$ in Conj. 18.2. That is,*

$$\mathrm{corank}_{O_\lambda}(\mathrm{Sel}(T)) \leqslant \begin{cases} \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) & \text{if } \alpha \neq p^{(k-2)/2}, \\ \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) - 1 & \text{if } \alpha = p^{(k-2)/2}. \end{cases}$$

In particular, if $k = 2, F = \mathbb{Q}$, and f corresponds to an elliptic curve E over $\mathbb{Q}$, we have

$$\mathrm{rank}(E(\mathbb{Q})) \leqslant \mathrm{ord}_{s=1}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f))$$

if E is not a Tate curve, and

$$\mathrm{rank}(E(\mathbb{Q})) \leqslant \mathrm{ord}_{s=1}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) - 1$$

if E is a Tate curve.

The arguments in the proof below for the case $\alpha \neq p^{(k-2)/2}$ is given in Perrin-Riou [**Pe1**], [**Pe3**]. The proof for the case $\alpha = p^{(k-2)/2}$ will be given in [**KKT**], and we give below the outline of it.

18.5. We prove that for $\mathfrak{p}$ as in 18.1, the local ring $\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}$ is a discrete valuation ring. This is reduced to the case $r = 0$, and then to the following fact. Let L be a complete discrete valuation field of mixed characteristic $(0, p)$, and let

$$A = \left\{ \textstyle\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \,;\, |a_n|_p \cdot n^{-h} \to 0 \text{ for some } h \geqslant 1 \right\} \subset L[[X]].$$

Here $|\ |_p$ denotes the multiplicative valuation of L normalized by $|p|_p = p^{-1}$. Let $\mathfrak{p}$ be the prime ideal $\{\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \in A \,;\, a_0 = 0\}$ of A. Then the local ring $A_\mathfrak{p}$ is a discrete valuation ring. We prove this. If $\mu = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \in A$, $\mu \neq 0$, and $m = \min\{n \geqslant 0 \,;\, a_n \neq 0\}$, then $\mu X^{-m} = \sum_{n\geqslant 0} a_{n+m} X^n$ belongs to A. (In fact, $|a_n|_p \cdot n^{-h} \to 0$ for some $h \geqslant 1$, and hence $\lim_{n\to\infty} |a_{n+m}|_p \cdot n^{-h} = \lim_{n\to\infty} |a_n|_p \cdot (n-m)^{-h} = 0$.) Hence any non-zero element of A can be written in the form $X^m\mu$ for some $m \geqslant 0$

and for some $\mu \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$. This shows that all ideals of $A_{\mathfrak{p}}$ are given by (X^n) $(n \geqslant 0)$ and (0). Hence $A_{\mathfrak{p}}$ is a discrete valuation ring.

Proposition 18.6. — *Let T be a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f)(k/2)$, and let j be the canonical map*

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T^*(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T^*(1))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T^*(1)).$$

Then

$$\mathrm{corank}_{O_\lambda}(\mathrm{Sel}(T)) = \begin{cases} \dim_{F_\lambda} \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)) & \text{if } j \otimes \mathbb{Q} \neq 0, \\ \dim_{F_\lambda} \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)) - 1 & \text{if } j \otimes \mathbb{Q} = 0. \end{cases}$$

This follows from the exact sequence in the category $\{\text{abelian groups}\}/\{\text{finite groups}\}$

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], T^*(1)) \xrightarrow{j} \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T^*(1))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T^*(1)) \longrightarrow \mathrm{Sel}(T)^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], T^*(1)) \longrightarrow 0$$

where $(\ )^\vee = \mathrm{Hom}_{O_\lambda}(\ , K_\lambda/O_\lambda)$. (see (14.9.4). Here we used the fact $\mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T^*(1))$ is finite (14.12), and the fact that $T^*(1)$ is isomorphic to a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable O_λ-lattice of $V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)$ as a representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ over O_λ.

Lemma 18.7. — *Let $\mathfrak{p}$ be the ring homomorphism $\Lambda \to O_\lambda$ which sends G_∞ to 1. Then we have*

$$\dim_{F_\lambda}(\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f^*)(k/2))) \leqslant \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_{\mathfrak{p}}/Z(f^*)(k/2)_{\mathfrak{p}}).$$

Proof. — By

$$\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)),$$

we have

$$\begin{aligned} &\dim_{F_\lambda}(\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f^*)(k/2))) \\ &\qquad = \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_{\mathfrak{p}}) \\ &\qquad \leqslant \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^2(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_{\mathfrak{p}}) \\ &\qquad \leqslant \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_{\mathfrak{p}}/Z(f^*)(k/2)_{\mathfrak{p}}), \end{aligned}$$

where the last $\leqslant$ follows from Thm. 12.5 (3). □

18.8. Let $\mathfrak{p}$ be as in Lemma 18.7. Then the kernel of the ring homomorphism

$$\mathrm{triv} : \mathscr{H}_\infty \longrightarrow F_\lambda(\alpha)$$

which sends G_∞ to 1 coincides with $\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty$.

For $r \in \mathbb{Z}$, let $\tau_r : \mathscr{H}_\infty \to \mathscr{H}_\infty$ be the ring isomorphism induced by

$$G_\infty \longrightarrow \mathscr{H}_\infty, \quad \sigma \longmapsto \kappa(\sigma)^r \sigma.$$

Let η be as in Thm. 16.6. Then the Λ-homomorphism

$$\mathfrak{L}_\eta : \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f^*)(k)) \longrightarrow \mathscr{H}_\infty$$

induces a Λ-homomorphism

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\eta,k/2} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)) &\longrightarrow \mathscr{H}_\infty \\ x &\longmapsto \tau_{k/2}\mathfrak{L}_\eta(x \otimes (\zeta_{p^n})_{n\geqslant 1}^{\otimes(k/2)}).\end{aligned}$$

Let I be the ideal of $\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty}$ generated by the image of $Z(f^*)(k/2)$ under $\mathfrak{L}_{\eta,k/2}$. Then I coincides with the ideal generated by $\tau_{k/2}L_{p\text{-adic},\alpha}(f)$. Hence

$$\begin{aligned}\mathrm{length}_{\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty}}(\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty}/I) &= \mathrm{ord}_{s=0}(\tau_{k/2}L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) \\ &= \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)).\end{aligned} \tag{18.8.1}$$

Lemma 18.9

(1) *We have*

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_\mathfrak{p}/Z(f^*)(k/2)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)).$$

(2) *If* $j \otimes \mathbb{Q} = 0$,

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_\mathfrak{p}/Z(f^*)(k/2)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) - 1.$$

Proof. — (1) is clear from (18.8.1). Assume $j \otimes \mathbb{Q} = 0$. Since the composite

$$\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2) \xrightarrow{\mathfrak{L}_{\eta,k/2}} \mathscr{H}_\infty \xrightarrow{\mathrm{triv}} F_\lambda(\alpha) \tag{18.9.1}$$

coincides with $(1 - p^{(k-2)/2}\alpha^{-1})(1 - p^{(k-2)/2}\alpha)^{-1}$ times the composite

$$\begin{aligned}&\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Z}[1/p], V_{F_\lambda}(f^*)) \xrightarrow{j \otimes \mathbb{Q}} \\ &\quad \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f^*)(k/2))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)) \xrightarrow{\exp^*} S(f^*) \otimes_F F_\lambda \xrightarrow{\eta} F_\lambda(\alpha)\end{aligned}$$

(16.4 (ii)), the map (18.9.1) is the zero map. Hence the image of

$$\mathfrak{L}_{\eta,k/2} : \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2) \longrightarrow \mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty}$$

is contained in $\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty$. Hence we have the $\leqslant$ in

$$\begin{aligned}\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_\mathfrak{p}/Z(f^*)(k/2)_\mathfrak{p}) &\leqslant \mathrm{length}_{\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty}}(\mathfrak{p}\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty}/I) \\ &= \mathrm{length}_{\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty}}(\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty}/I) - 1. \quad \square\end{aligned}$$

18.10. Now the case $\alpha \neq p^{(k-2)/2}$ of Thm. 18.4 follows from Lemma 18.6, 18.7, 18.9.

18.11. Finally we give the outline of the proof of the case $\alpha = p^{(k-2)/2}$ of Thm. 18.4. In the case, by [**KKT**], the image of

$$\mathfrak{L}_{\eta,k/2} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)) \longrightarrow \mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}\mathscr{H}_\infty$$

is contained in $\mathfrak{p}\mathscr{H}_\infty$, and the composite map

$$\mathfrak{L}_{\eta,k/2} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)) \longrightarrow \mathfrak{p}\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}\mathscr{H}_\infty \longrightarrow \mathfrak{p}\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}\mathscr{H}_\infty/\mathfrak{p}^2\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}\mathscr{H}_\infty$$

factors through the canonical projection

$$\mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f^*)(k/2))/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)).$$

Hence in the case $\alpha = p^{(k-2)/2}$ and $j \otimes \mathbb{Q} = 0$, the image of

$$\mathfrak{L}_{\eta,k/2} : \mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*)(k/2)) \longrightarrow \mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}\mathscr{H}_\infty$$

is contained in $\mathfrak{p}^2\mathscr{H}_{\infty,\mathfrak{p}}\mathscr{H}_\infty$. These show that

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_\mathfrak{p}/Z(f^*)(k/2)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) - 1$$

in the case $\alpha = p^{(k-2)/2}$ and $j \otimes \mathbb{Q} \neq 0$, and

$$\mathrm{length}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\mathbf{H}^1(V_{F_\lambda}(f^*))(k/2)_\mathfrak{p}/Z(f^*)(k/2)_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{ord}_{s=k/2}(L_{p\text{-adic},\alpha}(f)) - 2$$

in the case $\alpha = p^{(k-2)/2}$ and $j \otimes \mathbb{Q} = 0$. This and Lemma 18.6, 18.7 prove the case $\alpha = p^{(k-2)/2}$ of Thm. 18.4.

Table of special Notation

Zeta elements

${}_{c,d}z_{M,N}$ (a zeta element in K_2 of a modular curve $Y(M,N)$) 2.2

$z_{M,N}$ (a zeta element in $K_2 \otimes \mathbb{Q}$ of a modular curve $Y(M,N)$) 2.2

${}_{c,d}z_{M,N}(k,r,r')$, $z_{M,N}(k,r,r')$ (zeta modular forms of weight k on $X(M,N)$) 4.2

${}_{c,d}z^{(p)}_{M,N}(k,r,r')$ (a p-adic zeta element on $X(M,N)$) 8.4

$z_{1,N,m}(\xi,S)$ (a zeta element in $K_2(Y_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)) \otimes \mathbb{Q}$) 5.1

${}_{c,d}z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$, $z_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$ (zeta modular forms of weight k on $X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$) 5.2

${}_{c,d}z^{(p)}_{1,N,m}(k,r,r',\xi,S)$ (a p-adic zeta element of weight k on $X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$) 8.9

$z_m(f,\xi,S)$ (a zeta element in $K_2 \otimes \mathbb{Q}$ of a new form f) 5.1

$z_m(f,r,r',\xi,S)$, ${}_{c,d}z_m(f,r,r',\xi,S)$ (zeta modular forms of a new form f) .. 5.2

${}_{c,d}z^{(p)}_m(f,r,r',\xi,S)$ (a p-adic zeta element of a new form f) 8.11

Zeta functions

$Z_{M,N}(s)$ 2.5
$Z_{M,N}(k,s)$ 4.5
$\zeta(\alpha,s)$ 3.9
$\zeta^*(\alpha,s)$ 3.9
$L_{p\text{-adic},\alpha,\omega,\gamma}(f)$, $L_{p\text{-adic},\alpha}(f)$ (the p-adic zeta function of a new form f) 16.2

Iwasawa algebra and a related ring

Λ 12.3
$\mathcal{H}_{\infty,L}$ 16.1

Modular curves

$Y(N)$ 1.1
$Y(M,N)$ 2.1
$Y_1(N)=Y(1,N)$ ..... 2.1, § 5
$Y(M(A),N), Y(M,N(A))$ 2.8
$X(N), X(M,N), X_1(N)$,... smooth compactifications of $Y(N), Y(M,N), Y_1(N)$,...
f^* (the dual modular form) 6.5

Spaces associated to modular curves or to modular forms

$V_{k,A}(Y(M,N))$, $V_{k,A}(X(M,N))$ 4.5
M_k, ($M_k(X(N))$ etc.) (space of modular forms of weight k) 3.1
S_k ($S_k(X(N))$ etc.) (space of cusp forms of weight k) 3.1
$V_A(f)$ 6.3
$S(f)$ 6.3

Maps related to modular curves

ν 1.8
φ_A 2.8
reg (regulator map for K_2) 2.10
per (period map) 4.10
exp* (the dual exponential map) 9.4
$\mathfrak{L}_\eta$ (Perrin-Riou map) 16.4

Special functions

${}_c\theta_E$ (a theta function on an elliptic curve E) 1.3

${}_cg_{\alpha,\beta}$, $g_{\alpha,\beta}$ (Siegel units) 1.2

${}_cE^{(k)}_{\alpha,\beta}$ (Eisensetein series of weight k) 3.2, 4.2

$E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ (Eisenstein series of weight k) 3.3

$\widetilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta}$ (Eisenstein series of weight 2) 3.4

$F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ (Eisenstein series of weight k) 3.6

Operators

$T(n)$ (a Hecke operator) 2.9, 4.9

$T'(n)$ (a dual Hecke operator) 2.9, 4.9

Special integral cohomology classes

$\delta_{M,N}$ 2.7

$\delta_{M,N}(k,j)$ 4.7

$\delta(f,j,\xi)$ 6.3

Groups related to Galois cohomology

$\mathbf{H}^m$ 12.2

$\mathbf{H}^m_{\mathrm{loc}}$ 12.2

$Z(f)$, $Z(f,T)$ 12.5

$\mathrm{Sel}(K,T)$ (Selmer group) 14.1

References

[AV] Y. Amice & J. Vélu – Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, in *Journées arithmétiques de Bordeaux*, Astérisque, vol. 24-25, Société Mathématique de France, 1975, p. 119–131.

[AS] A. Ash & G. Stevens – Modular forms in characteristic ℓ and special values of their L-functions, *Duke Math. J.* **53** (1986), p. 849–868.

[AL] A.O.L. Atkin & J. Lehner – Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, *Math. Ann.* **185** (1970), p. 134–160.

[Be] A. Beilinson – Higher regulators and values of L-functions, *J. Soviet Math.* **30** (1985), p. 2036–2070.

[BBM] P. Berthelot, L. Breen & W. Messing – Théorie de Dieudonné cristalline II, Lect. Notes in Math., vol. 930, Springer, 1986, p. 849–868.

[BD] M. Bertolini & H. Darmon – A rigid analytic Gross-Zagier formula and arithmetic applications, with Appendix by B. Edixhoven, *Ann. of Math.* **146** (1997), p. 117–147.

[BK1] S. Bloch & K. Kato – p-adic etale cohomology, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **63** (1986), p. 107–152.

[BK2] ———, Tamagawa numbers of motives and L-functions, in *The Grothendieck Festschrift, 1*, Progress in Math., vol. 86, Birkäuser, 1990, p. 333–400.

[BCDT] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond & R. Taylor – On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$, or 3-adic exercises, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 849–939.

[Ca] H. Carayol – Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^{e} *série* **19** (1986), p. 409–468.

[CW] J. Coates & A. Wiles – On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **39** (1977), p. 223–251.

[CR1] R. Coleman – Division values in local fields, *Invent. Math.* **53** (1979), p. 91–116.

[CR2] ———, Local units modulo cyclotomic units, *Proc. Amer. Math. Soc.* **89** (1983), p. 1–7.

[CP] P. Colmez – Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, *Ann. of Math.* **148** (1998), p. 485–571.

[DJ] J. Dee – Selmer groups of Hecke characters and Chow groups of self products of CM elliptic curves, preprint, `http://www.math.uiuc.edu/Algebraic-Number-Theory/0162/`.

[De1] P. Deligne – Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, Lect. Notes in Math., vol. 179, Springer, 1971, p. 139–172.

[De2] ———, Formes modulaires et représentations de GL(2), Lect. Notes in Math., vol. 349, Springer, 1973, p. 55–105.

[DR] P. Deligne & M. Rapoport – Les schémas de modules des courbes elliptiques, Lect. Notes in Math., vol. 349, Springer, 1973, p. 143–316.

[Fa1] G. Faltings – Hodge-Tate decompositions and modular forms, *Math. Ann.* **278** (1987), p. 133–149.

[Fa2] ———, Crystalline cohomology and p-adic Galois representations, in *Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory*, Johns Hopkins Univ. Press, 1989, p. 25–80.

[Fa3] ———, Crystalline cohomology of semi-stable curves, the $\mathbb{Q}_p$-theory, *J. Alg. Geom.* **6** (1997), p. 1–18.

[Fa4] ———, Almost étale extensions, in *Cohomologie p-adiques et applications arithmétiques. II*, Astérisque, vol. 279, Société Mathématique de France, 2002, p. 185–270.

[Fla] M. Flach – A generalisation of the Cassels-Tate pairing, *J. reine angew. Math.* **412** (1990), p. 113–127.

[Fo1] J.-M. Fontaine – Modules galoisiens, modules filtrés et anneau de Barsotti-Tate, in *Journées de Géométrie algébrique de Rennes*, Astérisque, vol. 63, Société Mathématique de France, 1979, p. 3–80.

[Fo2] ———, Sur certains types de représentations p-adiques d'un corps local: construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 547–608.

[Fo3] ———, Représentations p-adiques semi-stables, in *Périodes p-adiques (séminaire de Bures, 1988)*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, 1994, p. 113–184.

[FL] J.-M. Fontaine & G. Lafaille – Constructions de représentations p-adiques, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^{e} *série* **15** (1982), p. 547–608.

[FM] J.-M. Fontaine & W. Messing – p-adic periods and p-adic étale cohomology, *Contemp. Math.* **67** (1987), p. 179–207.

[FP] J.-M. Fontaine & B. Perrin-Riou – Autour des conjectures de Bloch et Kato, cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, Proc. Symp. Pure Math., vol. 55, American Mathematical Society, 1994, p. 599–706.

[Gr1] R. Greenberg – Iwasawa theory for p-adic representations, Adv. Stud. in Pure Math., vol. 17, 1989, p. 97–137.

[Gr2] ———, Iwasawa theory for motives, in *L-functions and arithmetic (Durham, 1989)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 153, Cambridge University Press, 1991, p. 211–233.

[Gu] L. Guo – General Selmer groups and critical values of Hecke L-functions, *Math. Ann.* **297** (1993), p. 221–233.

[Ha] B. Han – On Bloch-Kato's Tamagawa number conjecture for Hecke characters of imaginary quadratic fields, preprint.

[HK] O. Hyodo & K. Kato – Semi-stable reduction and crystalline cohomology with log poles, in *Périodes p-adiques (séminaire de Bures, 1988)*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, 1994, p. 221–268.

[Iw] K. Iwasawa – On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.* **98** (1973), p. 246–326.

[JS] H. Jaquet & J. Shalika – A nonvanishing theorem for zeta functions of GL_n, *Invent. Math.* **38** (1976), p. 1–16.

[KK1] K. Kato – Iwasawa theory and p-adic Hodge theory, *Kodai Math. J.* **16** (1993), p. 1–31.

[KK2] ———, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via $\mathrm{B_{dR}}$. I., in *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, Lect. Notes in Math., vol. 1553, Springer, 1993, p. 50–163.

[KK3] ———, Generalized explicit reciprocity laws, in *Algebraic number theory (Hapcheon/Saga, 1996)*, Adv. Stud in Contemp. Math., vol. 1, 1999, p. 57–126.

[KK4] ———, Euler systems, Iwasawa theory and Selmer groups, *Kodai Math. J.* **22** (1999), p. 313–372.

[KKT] K. Kato, M. Kurihara & T. Tsuji – Local Iwasawa theory of Perrin-Riou and syntomic complexes, I (preprint), II (in preparation).

[KN] N. Katz – p-adic interpolations of real analytic Eisenstein series, *Ann. of Math.* **104** (1976), p. 459–571.

[KM] N. Katz & B. Mazur – *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Ann. of Math. Studies, vol. 108, Princeton Univ. Press, 1985.

[Ko] V.A. Kolyvagin – Euler Systems, in *The Grothendieck Festschrift, 2*, Progress in Math., vol. 88, Birkäuser, 1990, p. 435–483.

[KoL] V.A. Kolyvagin & D.Yu. Logachëv – Finiteness of the Shafarevich-Tate group and the group of rational points for some modular abelian varieties, *Algebra i Analiz* **1** (1989), no. 5, p. 171–196, translation in *Leningrad Math. J.* **1** (1990), no. 5, p. 1229–1253.

[KL] D. Kubert & S. Lang – Units in the modular function fields II, *Math. Ann.* **218** (1975), p. 175–189.

[LG] G. Lafaille – Groupes p-divisibles et modules filtrés, le cas peu ramifié, *Bull. Soc. math. France* **108** (1980), p. 187–206.

[Ma1] B. Mazur – Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields, *Invent. Math.* **18** (1972), p. 183–266.

[Ma2] ———, Notes on étale cohomology of number fields, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^{e} *série* **6** (1973), p. 521–556.

[MTT] B. Mazur, J. Tate & J. Teitelbaum – On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.

[MW] B. Mazur & A. Wiles – Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, *Invent. Math.* **76** (1984), p. 179–330.

[Ne] J. Nekovář – Kolyvagin's method for Chow groups of Kuga-Sato varieties, *Invent. Math.* **107** (1992), p. 99–125.

[Pe0] B. Perrin-Riou – Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques, *Invent. Math.* **109** (1992), p. 137–185.

[Pe1] ———, Fonctions L p-adiques d'une courbe elliptique et points rationnels, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), p. 945–995.

[Pe2] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994), p. 81–149.

[Pe3] ———, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque, vol. 229, Société Mathématique de France, 1995.

[Pe4] ———, Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1998), p. 1231–1307.

[Pe5] ———, *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques semi-stables*, Mém. Soc. math. France (N.S.), vol. 84, Société Mathématique de France, 2001.

[Ri1] K. Ribet – On ℓ-adic representations attached to modular forms, *Invent. Math.* **28** (1975), p. 245–275.

[Ri2] ———, Galois representations attached to eigenforms with nebentypes, Lect. Notes in Math., vol. 601, Springer, 1977, p. 17–52.

[Ri3] ———, On ℓ-adic representations attached to modular forms II, *Glasgow Math. J.* **27** (1985), p. 185–194.

[Ro1] D. Rohrlich – On L-functions of elliptic curves and cyclotomic towers, *Invent. Math.* **75** (1984), p. 409–423.

[Ro2] ———, L-functions and division towers, *Math. Ann.* **281** (1988), p. 611–632.

[Ru1] K. Rubin – Elliptic curves with complex multiplication and the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **64** (1981), p. 455–470.

[Ru2] ———, The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields, *Invent. Math.* **103** (1991), p. 25–68.

[Ru3] ———, Euler systems and modular elliptic curves, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, London Math. Soc. Lecture Notes, vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 351–367.

[Ru4] ———, *Euler systems, Hermann Weyl lectures*, Ann. of Math. Studies, vol. 147, Princeton Univ. Press, 2000.

[Sa1] T. Saito – Modular forms and p-adic Hodge theory, *Invent. Math.* **129** (1997), p. 607–620.

[Sa2] ———, Weight-Monodromy conjecture for ℓ-adic representations associated to modular forms, in *The Arithmetic and Geometry of Algebraic cycles*, Kluwer academic Publishers, 2000, p. 427–431.

[Scp] P. Schneider – Motivic Iwasawa theory, Adv. Stud. Pure Math., vol. 17, 1989, p. 421–456.

[Sc1] A. Scholl – Motives for modular forms, *Invent. Math.* **100** (1990), p. 419–430.

[Sc2] ———, An introduction to Kato's Euler systems, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, London Math. Soc. Lecture Notes, vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 379–460.

[Se1] J.-P. Serre – *Cohomologie Galoisienne*, Lect. Notes in Math., vol. 5, Springer, 1965.

[Se2] ———, *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, 1968.

[Se3] ———, Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Invent. Math.* **15** (1972), p. 259–331.

[ST] J.-P. Serre & J. Tate – Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.* **88** (1968), p. 492–517.

[Sh] G. Shimura – The special values of the zeta functions associated with cusp forms, *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976), p. 783–804.

[So] C. Soulé – On higher p-adic regulators, Lect. Notes in Math., vol. 854, Springer, 1981, p. 371–401.

[Ta1] J. Tate – Duality theorems in Galois cohomology over number fields, in *Proc. Intern. Cong. Math.* (Stockholm), 1962, p. 234–241.

[Ta2] ———, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, 1968, Sém. Bourbaki exposé n° 306, p. 189–214.

[Th] F. Thaine – On the ideal class groups of real abelian number fields, *Ann. of Math. (2)* **128** (1998), p. 1–18.

[TT] T. Tsuji – p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, *Invent. Math.* **137** (1999), p. 233–411.

[TN] N. Tsuzuki – Variations of p-adic de Rham structures, preprint.

[Vi] M.M. Vishik – Non-archimedian measures connected with Dirichlet series, *Math. USSR Sbornik* **28** (1976), p. 216–228.

[Vo] S.V. Vostokov – Explicit construction of class field theory for multidimensional local field, *Math. USSR Izv.* **26** (1986), p. 263–287.

[We] A. Weil – *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Ergebnisse der Math., vol. 88, Springer, 1976.

[Wi] A. Wiles – Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, *Ann. of Math.* **141** (1995), p. 443–551.

K. Kato, Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, Japan
E-mail : kazuya@kusm.kyoto-u.ac.jp

Astérisque
295, 2004, p. 291–299

CORRECTION TO "p-ADIC BOUNDARY VALUES"

by

Peter Schneider & Jeremy Teitelbaum

***Abstract.* —** Correction to the article "p-adic boundary values" published in *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (I), Astérisque **278** (2002), p. 51–125.

Proposition 5.4 of the paper "p-adic boundary values" in the first volume (*Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (I), Astérisque **278** (2002), p. 51–125) is incorrect. The proposition asserts that the map

$$\begin{aligned}\nabla_J : \mathcal{O}(B)^{\mathfrak{b}_J^{\geq}=0}/\mathcal{O}(B)^{\mathfrak{b}_J=0} &\xrightarrow{\cong} \quad \mathcal{O}(U_J^+ \cap B, M_J')^{\mathfrak{d}_J=0} \\ f \qquad\qquad\quad &\longmapsto \sum_{\mu\in B(J)} [(L_\mu f)|U_J^+ \cap B] \otimes L_\mu^*\end{aligned}$$

is an isomorphism of Banach spaces. In fact, it is only injective, with dense image. However, its only application, the main theorem of the paper (Theorem 8.6), is still true. In the following we indicate the necessary changes. For the convenience of the reader, in the course of presenting these changes we reproduce here some portions of Proposition 5.4 and Lemma 5.5 from Section 5 of the original paper.

A.

In section 5 of the paper Prop. 5.4 and Lemma 5.5 have to be replaced as follows:

Proposition 5.4. — *The map*

$$\begin{aligned}\nabla_J : \mathcal{O}(B)^{\mathfrak{b}_J^{\geq}=0}/\mathcal{O}(B)^{\mathfrak{b}_J=0} &\longrightarrow \quad \mathcal{O}(U_J^+ \cap B, M_J')^{\mathfrak{d}_J=0} \\ f \qquad\qquad\quad &\longmapsto \sum_{\mu\in B(J)} [(L_\mu f)|U_J^+ \cap B] \otimes L_\mu^*\end{aligned}$$

is a continuous and injective map of Banach spaces.

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 11F85, 14F40, 22E50.
***Key words and phrases.* —** p-adic symmetric space, integral transform, residue, p-adic representation.

© Astérisque 295, SMF 2004

Proof. — For $\mathfrak{Z} = \sum_\nu \mathfrak{z}(\nu) \otimes L_\nu \in \mathfrak{d}_J \subseteq U(\mathfrak{n}_J^+) \otimes_K M_J$ we have

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{Z}, \sum_\mu [(L_\mu f)|U_J^+ \cap B] \otimes L_\mu^* \rangle &= \sum_{\mu,\nu} L_\mu^*(L_\nu) \cdot (\mathfrak{z}(\nu) L_\mu f)|U_J^+ \cap B \\ &= (\sum_\nu \mathfrak{z}(\nu) L_\nu) f|U_J^+ \cap B = 0\end{aligned}$$

since $\sum_\nu \mathfrak{z}(\nu) L_\nu \in U(\mathfrak{n}_J^+) \cap \mathfrak{b}_J^>$. Morover for $\mu \in B(J)$ we have $L_\mu \in \mathfrak{b}_J$. Hence the map ∇_J is well defined. It clearly is continuous. The Banach space on the left hand side of the assertion has the orthonormal basis $\pi^{-\ell(\nu)} f_\nu|B$ for $J(\nu) = J$. Concerning the right hand side we observe that the above pairing composed with the evaluation in 1 induces an injection

$$\mathcal{O}(U_J^+ \cap B) \underset{K}{\otimes} M_J' \hookrightarrow \mathrm{Hom}_K(U(\mathfrak{n}_J^+) \underset{K}{\otimes} M_J, K)$$

which restricts to an injection

$$\mathcal{O}(U_J^+ \cap B, M_J')^{\mathfrak{d}_J = 0} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{b}_J/\mathfrak{b}_J^>, K).$$

Hence the only weights which can occur in the right hand side are those ν with $J(-\nu) = J$ and the corresponding weight spaces are at most 1-dimensional. Moreover the same argument as after Prop. 2 shows that the occurring weight vectors (scaled appropriately) form an orthonormal basis. Since ∇_J visibly preserves weights the assertion follows once we show that

$$\nabla_J(f_\nu|B) \neq 0 \text{ for any } \nu \text{ with } J(\nu) = J.$$

All that remains to be checked therefore is the existence, for a given ν with $J(\nu) = J$, of a $\mu \in B(J)$ such that $L_\mu f_\nu$ does not vanish identically on $U_J^+ \cap B$.

The weight ν is of the form $\nu = \sum_{j=0}^d n_j \varepsilon_j$ with $n_j > 0$ for $j \in J$ and $n_j \leqslant 0$ for $j \notin J$. We have

$$\#J \leqslant \sum_{j \in J} n_j = -\sum_{j \notin J} n_j.$$

Choose integers $n_j \leqslant m_j \leqslant 0$ for $j \notin J$ such that $\#J = -\sum_{j \notin J} m_j$ and define

$$\mu := \sum_{j \in J} \varepsilon_j + \sum_{j \notin J} m_j \varepsilon_j \in B(J).$$

Observe that $J(\nu - \mu) \subseteq J$ and $J(\mu - \nu) \cap J = \varnothing$. This means that $L_{\nu-\mu} \in U(\mathfrak{n}_J^+)$. It suffices to check that $L_{\nu-\mu} L_\mu f_\nu(1) \neq 0$. We compute

$$\begin{aligned}L_{\nu-\mu} L_\mu f_\nu(1) &= \mathrm{Res}_{(\overline{C},0)} \Xi_{-\nu} \cdot L_{\nu-\mu} L_\mu \xi \\ &= -\mathrm{Res}_{(\overline{C},0)} \Xi_{-\nu} \cdot L_{\nu-\mu}(\Xi_\mu \xi).\end{aligned}$$

As a consequence of the formula (+) in section 4 we have $L_{\nu-\mu}(\Xi_\mu \xi) = m \cdot \Xi_\nu \xi$ for some nonzero integer m. Hence we obtain

$$L_{\nu-\mu} L_\mu f_\nu(1) = -m \cdot \mathrm{Res}_{(\overline{C},0)} \xi = \pm m \neq 0. \qquad \square$$

In section 8 we will need more precise information about the image of the map ∇_J. This means we have to investigate the norms of the elements $\nabla_J(\pi^{-\ell(\nu)} f_\nu|B)$ for $J(\nu) = J$. We first set some additional notation. Let

$$I_J(\mu) := \{\underline{m} \in I(\mu) : m_{ij} = 0 \text{ unless } i \in J \text{ and } j \notin J\} \subseteq I(\mu)$$

and set

$$u(\underline{m}) := \prod_{i\in J, j\notin J} u_{ij}^{m_{ij}} \qquad \text{for } \underline{m} \in I_J(\mu)$$

where the u_{ij} are the functions on $U_J^+ \cap B$ which give the matrix entries. It is easy to see that $I_J(\mu)$ is nonempty if and only if $J(\mu) \subseteq J$ and $J(-\mu) \cap J = \varnothing$; this is the same as saying that L_μ belongs to $U(\mathfrak{n}_J^+)$. Note also that, for $\underline{m} \in I_J(\mu)$ with $\mu = \sum_{i=0}^d n_i\epsilon_i$, the "degree" of the monomial $u(\underline{m})$ is given by the formula

$$\deg(u(\underline{m})) = \sum_{i\in J, j\notin J} m_{ij} = \sum_{i\in J} n_i.$$

The spectral norm ω_J on the affinoid algebra $\mathcal{O}(U_J^+ \cap B)$ is such that, if $\underline{m} \in I_J(\nu)$, then, by Lemma 1,

$$\omega_J(u(\underline{m})) = \pi(\underline{m}) \geqslant \ell(\nu).$$

Therefore, if a general analytic function

$$h = \sum_{\nu, \underline{m}\in I_J(\nu)} a(\underline{m})u(\underline{m})$$

is expanded in the $u(\underline{m})$ on $U_J^+ \cap B$ then

$$\omega_J(h) = \inf_{\nu, \underline{m}\in I_J(\nu)} \{\omega(a(\underline{m})) + \pi(\underline{m})\}.$$

We also need a norm on $\mathcal{O}(U_J^+ \cap B, M_J')$; to make later formulas work nicely, we define

$$\omega_J\Big(\sum_{\mu\in B(J)} h_\mu \otimes L_\mu^*\Big) := \inf_\mu \{\omega_J(h_\mu) - \ell(-\mu)\}.$$

Lemma 5.5. — *Given any weight ν such that $I_J(\nu)$ is nonempty, there exists $\underline{m} \in I_J(\nu)$ such that $\pi(\underline{m}) = \ell(\nu)$.*

Proof. — As usual, set $\nu = \sum_{i=0}^d n_i\epsilon_i$. We will proceed by a double induction, on d and on $|\nu| := \sum_{i=0}^d |n_i| = 2\sum_{i\in J} n_i$. The base case is $d = 1$. If $J = \varnothing$ or $\{0, 1\}$, then $\nu = 0$ and $\pi((0, 0)) = \ell(0) = 0$. If $J = \{0\}$, then $\nu = m_{01}(\epsilon_0 - \epsilon_1)$ with $m_{01} \geqslant 0$, and $\pi((m_{01}, 0)) = \ell(\nu) = m_{01}$. If $J = \{1\}$, then $\nu = m_{10}(\epsilon_1 - \epsilon_0)$ with $m_{10} \geqslant 0$, and $\pi((0, m_{10})) = \ell(\mu) = 0$.

For the general case, consider the sequence of integers

$$h_d(\nu) := n_d,\ h_{d-1}(\nu) := n_d + n_{d-1}, \ldots,\ h_0(\nu) := n_d + \cdots + n_1 + n_0 = 0.$$

The integer $-\ell(\nu)$ is the smallest number on this list. We consider three cases: $n_d = 0$, $n_d > 0$, and $n_d < 0$. If $n_d = 0$, then we may treat the problem as a lower dimensional

one and by the inductive hypothesis we can find $\underline{m} \in I_J(\nu)$ with all $m_{id} = m_{dj} = 0$ such that $\pi(\underline{m}) = \ell(\nu)$.

If $n_d > 0$, then $d \in J(\mu) \subseteq J$. Let i' be the maximal index between 0 and d such that $n_{i'} < 0$. Let j' be maximal so that $h_{j'}(\nu) = -\ell(\nu)$. We claim that $i' \geqslant j'$. If not, then $-\ell(\nu) = h_{j'}(\nu) > 0$, which is impossible. Let $\nu_0 := \nu + \epsilon_{i'} - \epsilon_d$. Then $h_i(\nu_0) = h_i(\nu)$ for all $0 \leqslant i \leqslant i'$, and $h_i(\nu) - 1 = h_i(\nu_0) \geqslant 0$ for all $i > i'$. Therefore $\ell(\nu) = \ell(\nu_0)$. Also, $J(\nu_0) \subseteq J(\nu)$ and $J(-\nu_0) \subseteq J(-\nu)$. We may therefore apply the inductive hypothesis to find $\underline{m}^0 \in I_J(\nu_0)$ so that $\pi(\underline{m}^0) = \ell(\nu_0)$. If we define $\underline{m}$ by setting $m_{di'} := m^0_{di'} + 1$, and all other $m_{ij} := m^0_{ij}$, then we obtain an $\underline{m} \in I_J(\nu)$ with $\pi(\underline{m}) = \pi(\underline{m}^0)$. This solves the problem in this case.

If $n_d < 0$, then let i' be the minimal index between 0 and d such that $n_{i'} > 0$. Let j' be minimal so that $h_{j'}(\nu) = -\ell(\nu)$. We claim that $i' < j'$; otherwise $0 = h_0(\nu) \leqslant h_{j'}(\nu)$, forcing $\ell(\nu) = 0$. But we know that $\ell(\nu) \geqslant -n_d > 0$. Now let $\nu_0 := \nu + \epsilon_d - \epsilon_{i'}$. Since all i such that $h_i(\nu) = -\ell(\nu)$ satisfy $d \geqslant i > i'$ it follows that $\ell(\nu_0) = \ell(\nu) - 1$. Again we have modified ν to obtain ν_0 in such a way that $I_J(\nu_0)$ is nonempty, and so we may apply the inductive hypothesis to find a $\underline{m}^0 \in I_J(\nu_0)$ with $\pi(\underline{m}^0) = \ell(\nu_0)$. Defining this time $\underline{m}$ by setting $m_{i'd} := m^0_{i'd} + 1$, and all other $m_{ij} := m^0_{ij}$, we obtain a $\underline{m} \in I_J(\nu)$ with $\pi(\underline{m}) = \pi(\underline{m}^0) + 1$. This completes the proof. □

Since the f_ν and $L_\mu f_\nu$, for $J(\nu) = J$ and $\mu \in B(J)$, are homogeneous of weights $-\nu$ and $\mu - \nu$ respectively, we may expand each of these functions as polynomials in the u_{ij} of the correct weights:

$$f_\nu|(U_J^+ \cap B) = \sum_{\underline{m} \in I_J(\nu)} c_\nu(\underline{m}) u(\underline{m})$$
$$L_\mu f_\nu|(U_J^+ \cap B) = \sum_{\underline{m} \in I_J(\nu - \mu)} b_{\nu,\mu}(\underline{m}) u(\underline{m})$$

Lemma 5.6. — *The coefficients $c_\nu(\underline{m})$ ($\underline{m} \in I_J(\nu)$) and $b_{\nu,\mu}(\underline{m})$ ($\underline{m} \in I_J(\nu - \mu)$) are given by*

$$c_\nu(\underline{m}) = \pm \prod_{j \notin J} \frac{(\sum_{i \in J} m_{ij})!}{\prod_{i \in J} m_{ij}!}, \quad b_{\nu,\mu}(\underline{m}) = \pm \prod_{j \notin J} \frac{(-n_j(\nu))!}{(-n_j(\mu))! \cdot \prod_{i \in J} m_{ij}!}$$

where $\mu = \sum_{j=0}^d n_j(\mu)\epsilon_j$ and $\nu = \sum_{j=0}^d n_j(\nu)\epsilon_j$ as usual.

Proof. — A simple computation shows that, for $i \in J$ and $j \notin J$, L_{ij} acts on $\mathcal{O}(U_J^+ \cap B)$ by

$$L_{ij} h = \frac{\partial h}{\partial u_{ij}}.$$

By Taylor's formula,

$$c_\nu(\underline{m}) = \Big(\Big(\prod_{i \in J, j \notin J} \frac{1}{m_{ij}!} L_{ij}^{m_{ij}} \Big) f_\nu \Big)(1).$$

Arranging things correctly, formula (+) in section 4 gives

$$\prod_{i\in J, j\notin J} L_{ij}^{m_{ij}} \equiv \pm\Big(\prod_{j\notin J}\Big(\sum_{i\in J} m_{ij}\Big)!\Big)L_\nu \bmod \mathfrak{b}.$$

Since $L_\nu f_\nu(1) = \pm 1$, and f_ν is killed by $\mathfrak{b}$, this gives the formula for $c_\nu(\underline{m})$.

The formula for $b_{\nu,\mu}(\underline{m})$ is found by a similar method. First we have, for $\underline{m} \in I_J(\nu-\mu)$, that

$$\begin{aligned} b_{\nu,\mu}(\underline{m}) &= \Big(\Big(\prod_{i\in J, j\notin J} \frac{1}{m_{ij}!} L_{ij}^{m_{ij}}\Big) L_\mu f_\nu\Big)(1) \\ &= \pm \prod_{j\notin J} \frac{(\sum_{i\in J} m_{ij})!}{\prod_{i\in J} m_{ij}!} \cdot (L_{\nu-\mu} L_\mu f_\nu)(1). \end{aligned}$$

But it is easy to see, using formula (+) in section 4 again, that

$$L_{\nu-\mu} L_\mu \equiv \pm\Big(\prod_{j\notin J} \binom{-n_j(\nu)}{-n_j(\mu)}\Big) L_\nu \bmod \mathfrak{b}$$

where the binomial coefficient $\binom{-n_j(\nu)}{-n_j(\mu)}$ should be interpreted as one unless $0 \leqslant -n_j(\mu) \leqslant -n_j(\nu)$. It remains to note that $\sum_{i\in J} m_{ij} = -n_j(\nu) + n_j(\mu)$ for $j \notin J$. □

Corollary 5.7. — *We have the estimate*

$$\omega(b_{\nu,\mu}(\underline{m})) \leqslant \frac{\omega(p)}{p-1}\Big(\sum_{i\in J} n_i(\nu)\Big)$$

Proof. — The integer $b_{\nu,\mu}(\underline{m})$ is obtained from a fraction with numerator

$$\prod_{j\notin J} (-n_j(\nu))!$$

so

$$\omega(b_{\nu,\mu}(\underline{m})) \leqslant \sum_{j\notin J} \frac{\omega(p)(-n_j(\nu))}{p-1} \leqslant \frac{\omega(p)}{p-1}\Big(-\sum_{j\notin J} n_j(\nu)\Big) = \frac{\omega(p)}{p-1}\Big(\sum_{i\in J} n_i(\nu)\Big).$$ □

Proposition 5.8. — *Suppose that $\nu = \sum n_i \epsilon_i$ and that $J(\nu) = J$; then*

$$\omega_J(\nabla_J(\pi^{-\ell(\nu)} f_\nu | B)) \leqslant \frac{\omega(p)}{p-1}\Big(\sum_{i\in J} n_i\Big).$$

Proof. — Suppose μ is chosen as in the proof of Prop. 4 so that $I_J(\nu-\mu)$ is nonempty. Then, using Lemma 5 and Cor. 7, we have

$$\begin{aligned} \omega_J((L_\mu f_\nu)|U_J^+ \cap B) &= \inf_{\underline{m}\in I_J(\nu-\mu)} \{\omega(b_{\nu,\mu}(\underline{m})) + \pi(\underline{m})\} \\ &\leqslant \ell(\nu-\mu) + \frac{\omega(p)}{p-1}\Big(\sum_{i\in J} n_i\Big). \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}\omega_J(\nabla_J(\pi^{-\ell(\nu)}f_\nu|B)) &= \inf_{\mu'\in B(J)}\{\omega_J((\pi^{-\ell(\nu)}L_{\mu'}f_\nu)|U_J^+\cap B)-\ell(-\mu')\}\\ &\leqslant \ell(\nu-\mu)+\frac{\omega(p)}{p-1}\Big(\sum_{i\in J}n_i\Big)-\ell(\nu)-\ell(-\mu)\\ &\leqslant \frac{\omega(p)}{p-1}\Big(\sum_{i\in J}n_i\Big),\end{aligned}$$

where for the last inequality we use the subadditivity of the function ℓ from the proof of Lemma 1. □

Remark 5.9. — If $\nu=\sum n_i\epsilon_i$ such that $J(\nu)=\{0,\dots,j-1\}$ for some $0\leq j\leq d$ (this is the case of interest in section 8) then $\sum_{i\in J}n_i=\ell(\nu)$ so that

$$\omega_J(\nabla_J(\pi^{-\ell(\nu)}f_\nu|B))\leqslant\frac{\omega(p)}{p-1}\ell(\nu).$$

Using Prop. 8 we will be able to show that "sufficiently overconvergent" M'_J-valued power series on $U_J^+\cap B$ that are killed by $\mathfrak{d}_J$ belong to the image of the map ∇_J.

More precisely, let y_J be the diagonal matrix in G with π in the i^{th} entry when $i\in J$, and 1 in the other entries. Fix an integer $x>\omega(p)/(p-1)$. Then $y_J^{-x}(U_J^+\cap B)y_J^x$ is an affinoid polydisk containing $U_J^+\cap B$. We let $\omega_{J,x}$ denote the spectral norm on the affinoid algebra $\mathcal{O}(y_J^{-x}(U_J^+\cap B)y_J^x)$ and define on $\mathcal{O}(y_J^{-x}(U_J^+\cap B)y_J^x,M'_J)$ the Banach norm

$$\omega_{J,x}\Big(\sum_{\mu\in B(J)}h_\mu\otimes L_\mu^*\Big):=\inf_\mu\{\omega_{J,x}(h_\mu)-\ell(-\mu)\}.$$

Thus there is a continuous and injective restriction map

$$r_x:\mathcal{O}(y_J^{-x}(U_J^+\cap B)y_J^x,M'_J)\longrightarrow\mathcal{O}(U_J^+\cap B,M'_J).$$

We set

$$E_{J,x}:=r_x(\mathcal{O}(y_J^{-x}(U_J^+\cap B)y_J^x,M'_J))\ \cap\ \mathcal{O}(U_J^+\cap B,M'_J)^{\mathfrak{d}_J=0}$$

and view it as a K-Banach space with respect to the norm induced by $\omega_{J,x}$. Hence the inclusion $E_{J,x}\subset\mathcal{O}(U_J^+\cap B,M'_J)$ is continuous but not a topological embedding.

Lemma 5.10. — *The map ∇_J restricts to a bijection $\nabla_J^{-1}(E_{J,x})\xrightarrow{\sim}E_{J,x}$ whose inverse viewed as a map*

$$E_{J,x}\longrightarrow\mathcal{O}(B)^{\mathfrak{b}_J^>=0}/\mathcal{O}(B)^{\mathfrak{b}_J=0}$$

is continuous.

Proof. — If h is in the image of r_x, then it has an expansion

$$h=\sum_{\mu\in B(J)}h_\mu\otimes L_\mu^*$$

and each h_μ has an expansion

$$h_\mu = \sum_{\nu, \underline{m} \in I_J(\nu-\mu)} a_\mu(\underline{m}) u(\underline{m})$$

with

$$\omega(a_\mu(\underline{m})) + \pi(\underline{m}) - x \sum_{i \in J, j \notin J} m_{ij} = \omega(a_\mu(\underline{m})) + \pi(\underline{m}) - x \sum_{i \in J} n_i(\nu - \mu) \longrightarrow \infty$$

writing, as before, each weight $\nu = \sum_{i=0}^{d} n_i(\nu)\epsilon_i$. On the other hand, because h satisfies the differential equations, we know that the homogeneous components of h are multiples of the corresponding $\nabla_J(\pi^{-\ell(\nu)} f_\nu | B)$ where $J(\nu) = J$. In fact, then, we have

$$\sum_{\mu \in B(J)} \Big(\sum_{\underline{m} \in I_J(\nu-\mu)} a_\mu(\underline{m}) u(\underline{m}) \Big) \otimes L_\mu^* = c_\nu \nabla_J(\pi^{-\ell(\nu)} f_\nu | B)$$

for some $c_\nu \in K$, whereas the other coefficients $a_\mu(\underline{m})$ vanish. Now we see that

$$\begin{aligned}
\omega(c_\nu) &= \inf_{\mu \in B(J)} \Big(\inf_{\underline{m} \in I_J(\nu-\mu)} \{\omega(a_\mu(\underline{m})) + \pi(\underline{m})\} - \ell(-\mu) \Big) - \omega_J(\nabla_J(\pi^{-\ell(\nu)} f_\nu | B)) \\
&\geqslant \inf_{\mu \in B(J)} \Big(\inf_{\underline{m} \in I_J(\nu-\mu)} \{\omega(a_\mu(\underline{m})) + \pi(\underline{m}) - \frac{\omega(p)}{p-1} \sum_{i \in J} n_i(\nu)\} - \ell(-\mu) \Big) \\
&= \inf_{\mu \in B(J)} \Big(\inf_{\underline{m} \in I_J(\nu-\mu)} \{\omega(a_\mu(\underline{m})) + \pi(\underline{m}) - \frac{\omega(p)}{p-1} \sum_{i \in J} n_i(\nu - \mu)\} - \ell(-\mu) \Big) \\
&\quad - \frac{\omega(p) \cdot \sharp J}{p-1} \\
&\geqslant \inf_{\mu \in B(J)} \Big(\inf_{\underline{m} \in I_J(\nu-\mu)} \{\omega(a_\mu(\underline{m})) + \pi(\underline{m}) - x \sum_{i \in J} n_i(\nu - \mu)\} - \ell(-\mu) \Big) \\
&\quad - \frac{\omega(p) \cdot \sharp J}{p-1} \\
&\quad \longrightarrow \infty \text{ as } \nu \longrightarrow \infty \text{ (i.e. as } \textstyle\sum_{i \in J} n_i(\nu) \longrightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Then $f := \sum_{J(\nu)=J} c_\nu \pi^{-\ell(\nu)} f_\nu | B$ converges in $\mathcal{O}(B)^{\mathfrak{b}_J^> = 0}$ and satisfies $\nabla_J(f) = h$. Moreover

$$\omega_B(f) = \inf_{J(\nu)=J} \omega(c_\nu) \geq \omega_{J,x}(h) - \frac{\omega(p) \cdot \sharp J}{p-1}.$$

Hence the map $\nabla_J^{-1}(E_{J,x}) \xrightarrow{\nabla_J} E_{J,x}$ is a bijection whose inverse is continuous. □

We observe that, since the $(L_\mu f_\nu)|U_J^+ \cap B$ are polynomials in the u_{ij}, the weight vectors $\sum_{\mu \in B(J)} [(L_\mu f_\nu)|U_J^+ \cap B] \otimes L_\mu^*$, for $J(\nu) = J$, do lie in $E_{J,x}$.

As a consequence of this discussion (mainly Prop. 3 and Lemma 10) we in particular have the following map.

Lemma 5.11. — *There is a unique continuous linear map*

$$D_J : E_{J,x} \longrightarrow [\Omega^d_b(U^0)^j/\Omega^d_b(U^0)^{j+1}]',$$

where $j := \#J$, *which sends the weight vector* $\sum_{\mu\in B(J)}[(L_\mu f_\nu)|U_J^+ \cap B] \otimes L^*_\mu$, *for* ν *with* $J(\nu) = J$, *to the linear form* $\lambda_\nu(\eta) := \mathrm{Res}_{(\overline{C},0)}\Xi_{-\nu}\eta$.

B.

In section 8 of the paper in the proof of Theorem 8.6 the six sentences on p. 120 starting "We rephrase ..." have to be replaced as follows:

Finally, in order to be able to apply Lemma 5.11, we have to reduce to the case where ε is "sufficiently overconvergent". Fix an integer $x > \omega(p)/(p-1)$ and find coset representatives v_i for $U^{(0)}_{\underline{j}}/U^{(x)}_{\underline{j}}$. Then

$$BP_{\underline{j}} = (U^+_{\underline{j}} \cap B)P_{\underline{j}} = \dot{\bigcup_i} v_i y^x (U^+_{\underline{j}} \cap B)P_{\underline{j}}.$$

Now define

$$f_i := ((v_i y^x)^{-1} f)|BP_{\underline{j}} \text{ extended by zero to } G.$$

Then

$$f = \sum_i v_i y^x f_i.$$

Now, if $u \in U^+_{\underline{j}} \cap B$, then

$$f_i(u) = f(v_i y^x u) = \pi^{jx} f(v_i y^x u y^{-x}) = \pi^{jx}\varepsilon(v_i y^x u y^{-x}) \otimes \varphi_o.$$

If we write $f_i|U^+_{\underline{j}} \cap B = \varepsilon_i \otimes \varphi_o$, then $\varepsilon_i(u) = \pi^{jx}\varepsilon(v_i y^x u y^{-x})$ is not only analytic, it is visibly the restriction of the analytic function $\pi^{jx}\varepsilon(v_i y^x . y^{-x})$ from the larger disk $y^{-x}(U^+_{\underline{j}} \cap B)y^x$. Hence $\varepsilon_i \in E_{\underline{j},x}$. Treating the f_i separately we are reduced to considering a function f such that

– f is supported on $BP_{\underline{j}}$ with $f|U^+_{\underline{j}} \cap B = \varepsilon \otimes \varphi_o$ for some $\varepsilon \in E_{\underline{j},x}$.

We rephrase the above discussion in the following way. We have the linear map

$$\mathrm{Ext}_{\underline{j}} : \mathcal{O}(U^+_{\underline{j}} \cap B, M'_{\underline{j}})^{\mathfrak{d}_{\underline{j}}=0} \longrightarrow C^{\mathrm{an}}(G, P_{\underline{j}}; \mathrm{Hom}_K(M_{\underline{j}}, \mathrm{St}_{d+1-j}))^{\mathfrak{d}_{\underline{j}}=0}$$

defined by

$$\mathrm{Ext}_{\underline{j}}(\varepsilon)(g) := \begin{cases} h^{-1}(\varepsilon(u) \otimes \varphi_o) & \text{for } g = uh \text{ with } u \in U^+_{\underline{j}} \cap B, h \in P_{\underline{j}}, \\ 0 & \text{otherwise .} \end{cases}$$

Starting with the natural bilinear map

$$\mathrm{Hom}_K(M'_{\underline{j}}, \mathrm{Hom}_K(M_{\underline{j}}, \mathrm{St}_{d+1-j})) \times M'_{\underline{j}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(M_{\underline{j}}, \mathrm{St}_{d+1-j})$$

an argument analogous to the proof of [Fea] 4.3.1 shows that $\mathrm{Ext}_{\underline{j}}$ is continuous. The image $\mathrm{Ext}_{\underline{j}}(E_{\underline{j},x})$ generates the target of $\mathrm{Ext}_{\underline{j}}$ (algebraically) as a G-representation.

On the other hand, in section 6 after Lemma 4 we had constructed a continuous linear map

$$D_{\underline{j}} : E_{\underline{j},x} \longrightarrow [\Omega^d(\mathfrak{X})^j/\Omega^d(\mathfrak{X})^{j+1}]'.$$

The surjectivity of $I^{[j]}$ therefore will follow from the identity

$$\mathrm{Ext}_{\underline{j}} = I^{[j]} \circ D_{\underline{j}}.$$

P. Schneider, Mathematisches Institut, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster, Germany • *E-mail :* pschnei@math.uni-muenster.de
Url : http://www.math.uni-muenster.de/math/u/schneider

J. Teitelbaum, Department of Mathematics, Statistics, and Computer Science (M/C 249), University of Illinois at Chicago, 851 S. Morgan St., Chicago, IL 60607, USA
E-mail : jeremy@uic.edu • *Url :* http://raphael.math.uic.edu/∼jeremy

TABLE DES MATIÈRES GÉNÉRALE

Volume I
- Introduction
- Shinichi Mochizuki — *An Introduction to p-adic Teichmüller Theory*
- Peter Schneider & Jeremy Teitelbaum — *p-adic boundary values*
- Thomas Zink — *The Display of a Formal p-Divisible Group*

Volume II
- Introduction
- Pierre Berthelot — *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*
- Christophe Breuil & William Messing — *Torsion étale and crystalline cohomologies*
- Gilles Christol & Zoghman Mebkhout — *Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes*
- Gerd Faltings — *Almost Étale Extensions*
- Luc Illusie — *An Overview of the Work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on Logarithmic Étale Cohomology*
- Takeshi Tsuji — *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey*

Volume III
- Introduction
- Jean-Marc Fontaine — *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques*
- Kazuya Kato — *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*
- Peter Schneider & Jeremy Teitelbaum — *Correction to "p-adic boundary values"*

ASTÉRISQUE

2004

295. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III), P. BERTHELOT, J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE, K. KATO, M. RAPOPORT, éditeurs
294. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 2003/2003, exposés 909-923
293. M. EMERTON, M. KISIN – *The Riemann-Hilbert correspondence for unit F-crystals*
292. F. LE ROUX – *Homéomorphismes de surfaces. Théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable*
291. L. FARGUES, E. MANTOVAN – *Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales*

2003

290. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 2001/2002, exposés 894-908
289. P. SCOTT, G.A. SWARUP – *Regular neighbourhoods and canonical decompositions for groups*
288. M. REES – *Views of Parameter Space : Topographer and Resident*
287. Geometric Methods in Dynamics (II), volume in honor of Jacob Palis, W. DE MELO, M. VIANA, J.-C. YOCCOZ, editors
286. Geometric Methods in Dynamics (I), volume in honor of Jacob Palis, W. DE MELO, M. VIANA, J.-C. YOCCOZ, editors
285. PO HU – *Duality for Smooth Families in Equivariant Stable Homotopy Theory*
284. Autour de l'analyse microlocale, volume en l'honneur de Jean-Michel Bony, G. LEBEAU, éditeur

2002

283. L. ROBBIANO, C. ZUILY – *Analytic theory for the quadratic scattering wave front set and application to the Schrödinger equation*
282. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 2000/2001, exposés 880-893
281. T. DUQUESNE, J.-F. LE GALL – *Random Trees, Lévy Processes and Spatial Branching Processes*
280. A. MOKRANE, P. POLO, J. TILOUINE – *Cohomology of Siegel varieties*
279. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (II), P. BERTHELOT, J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE, K. KATO, M. RAPOPORT, éditeurs
278. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (I), P. BERTHELOT, J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE, K. KATO, M. RAPOPORT, éditeurs
277. B. RÉMY – *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*
276. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1999/2000, exposés 865-879

2001

275. J.-M. BISMUT, S. GOETTE – *Families torsion and Morse functions*
274. A. BONNET, G. DAVID – *Cracktip is a global Mumford-Shah minimizer*
273. K. NISHIYAMA, H. OCHIAI, K. TANIGUCHI, H. YAMASHITA, S. KATO – *Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations*
272. M. BOILEAU, J. PORTI – *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type (avec la collaboration de M. HEUSENER)*
271. M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA – *Ind-Sheaves*
270. M. BONK, J. HEINONEN, P. KOSKELA – *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*
269. J.-L. WALDSPURGER – *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*

2000

268. J. FRANCHETEAU, G. MÉTIVIER – *Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels*
267. R. CERF – *Large Deviations for three Dimensional Supercritical Percolation*
266. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1998/1999, exposés 850-864
265. O. BIQUARD – *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*
264. L. LIPSHITZ, Z. ROBINSON – *Rings of Separated Power Series and Quasi-Affinoid Geometry*
263. C. SABBAH – *Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*
262. A. VASY – *Propagation of singularities in three-body scattering*
261. Géométrie complexe et systèmes dynamiques, colloque en l'honneur d'Adrien Douady, Orsay 1995, M. FLEXOR, P. SENTENAC et J.-C. YOCCOZ, éditeurs

1999

260. S. D. CUTKOSKY – *Local monomialization and factorization of morphisms*
259. R. KRIKORIAN – *Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts*
258. Structure Theory of Set Addition, J.-M. DESHOUILLERS, B. LANDREAU and A.A. YUDIN, editors
257. J.-P. LABESSE – *Cohomologie, stabilisation et changement de base (avec la collaboration de L. BREEN et L. CLOZEL)*
256. F. MOREL – *Théorie homotopique des schémas*
255. R.E. KOTTWITZ, D. SHELSTAD – *Foundations of twisted endoscopy*
254. C.J. BUSHNELL, G. HENNIART – *Local tame lifting for* $\mathrm{GL}(n)$ *II : wildly ramified supercuspidals*
253. B. MAGNERON – *Involutions complexes et vecteurs sphériques associés pour les groupes de Lie nilpotents réels*

1998

252. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1997/1998, exposés 835-849
251. Nombre et répartition de points de hauteur bornée, E. PEYRE, éditeur
250. C. BONATTI, R. LANGEVIN – *Difféomorphismes de Smale des surfaces (avec la collaboration de E. JEANDENANS)*
249. P. AUSCHER, P. TCHAMITCHIAN – *Square root problem for divergence operators and related topics*
248. P. COLMEZ – *Intégration sur les variétés* p*-adiques*
247. G. PISIER – *Non-commutative vector valued* L_p*-spaces and completely* p*-summing maps*

1997

246. V. TARASOV, A. VARCHENKO – *Geometry of* q*-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups*
245. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1996/1997, exposés 820-834
244. J.-M. BISMUT – *Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms*
243. L. LAFFORGUE – *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*
242. N. BURQ – *Pôles de diffusion engendrés par un coin*
241. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1995/1996, exposés 805-819

1996

240. A. SÀ BARETTO, R. B. MELROSE, M. ZWORSKI – *Semilinear diffraction of conormal waves*
239. J.-L. VERDIER – *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*
238. A. BROISE, F. DAL'BO, M. PEIGNÉ – *Méthodes des opérateurs de transfert : transformations dilatantes de l'intervalle et dénombrement de géodésiques fermées*
237. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1994/1995, exposés 790-804
236. Hommage à P. A. MEYER et J. NEVEU
235. J.-P. OTAL – *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*
234. A. GENESTIER – *Espaces symétriques de Drinfeld*