Astérisque

ALAIN CONNES

Renormalisation et ambiguïté galoisienne

Astérisque, tome 296 (2004), p. 113-143

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__113_0>

© Société mathématique de France, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
296, 2004, p. 113–143

RENORMALISATION ET AMBIGUÏTÉ GALOISIENNE

par

Alain Connes

Résumé. — Cet article donne un exposé détaillé de mes résultats sur la renormalisation en collaboration avec D. Kreimer. Le premier résultat essentiel est l'identité entre le procédé récursif utilisé par les physiciens pour éliminer les divergences en théorie des champs quantiques et la décomposition de Birkhoff des lacets à valeurs dans un groupe pro-unipotent. Le groupe impliqué dans la renormalisation est celui des diffféographismes, construit à partir des graphes de Feynman. Le deuxième résultat important est la construction d'une action de ce groupe des diffféographismes sur les constantes de couplage sans dimension de la théorie physique. Le lien précis entre mon travail avec Kreimer et la correspondance de Riemann-Hilbert a été obtenu en collaboration avec M. Marcolli et est explicité à la fin de ce texte. Nous établissons une correspondance de Riemann-Hilbert entre connexions plates équisingulières et représentations d'un groupe de Galois « motivique » explicite U^*. Ce groupe joue dans le contexte de la renormalisation un rôle analogue à celui du tore exponentiel de Jean-Pierre Ramis dans la théorie locale des singularités irrégulières des équations différentielles et il apporte une réponse satisfaisante à la recherche proposée par P. Cartier d'un groupe de Galois « cosmique » qui sous-tend la renormalisation.

***Abstract* (Renormalisation and Galois Ambiguity).** — This paper contains a detailed exposition of my joint work with Kreimer on renormalization. The first key result is the identity between the recursive process used by physicists to remove the divergencies in quantum field theory and the Birkhoff decomposition of loops with values in a pro-unipotent Lie group. The relevant group for renormalization is the group of diffeographisms which is constructed from Feynman graphs. The second key result is the construction of an action of the group of diffeographisms on the dimensionless coupling constants of the theory. The precise link between my work with Kreimer and the Riemann-Hilbert correspondence was obtained in collaboration with M. Marcolli and is explained briefly at the end of the paper. We construct a Riemann-Hilbert correspondence between flat equisingular connections and representations of a specific motivic Galois group U^*. This group is the analogue in renormalization of the exponential torus of Ramis in the local theory of irregular singular differential equations. Our work gives a natural candidate for the "cosmic Galois group"envisaged by Cartier as the symmetry underlying renormalization.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — Primary 58B34 ; Secondary 81T15, 11R32.
Mots clefs. — Renormalisation, Galois, Hopf.

© Astérisque 296, SMF 2004

1. Introduction

La renormalisation est sans doute l'un des procédés les plus élaborés pour obtenir des quantités numériques signifiantes à partir d'expressions mathématiques a priori dépourvues de sens. A ce titre, elle est fascinante autant pour le physicien que pour le mathématicien. La profondeur de ses origines en théorie des champs et la précision avec laquelle elle est corroborée par l'expérience en font l'un des joyaux de la physique théorique. Pour le mathématicien épris de sens, mais non corseté par la rigueur, les explications données jusqu'à présent butaient toujours sur le sens conceptuel de la partie proprement calculatoire, celle qui est utilisée par exemple en électrodynamique quantique et ne tombe pas sous la coupe des « théories asymptotiquement libres » auxquelles la théorie constructive peut prétendre avoir donné un statut mathématique satisfaisant. Cet état de fait a changé récemment et cet exposé se propose de donner la signification conceptuelle des calculs effectués par les physiciens dans la théorie de la renormalisation grâce à mon travail sur la renormalisation en collaboration avec Dirk Kreimer et la relation que nous avons établie entre renormalisation et problème de Riemann-Hilbert.

Le résultat clé est l'identité entre le procédé récursif utilisé par les physiciens et les formules mathématiques qui résolvent une application $\gamma : C \mapsto G$ d'un cercle $C \subset S^2$ à valeurs dans un groupe pronilpotent G en un rapport d'applications holomorphes $\gamma_\pm : C_\pm \mapsto G$ des composantes connexes du complémentaire de C dans S^2. La signification géométrique de cette décomposition (de Birkhoff ou Wiener-Hopf) provient directement de la théorie des fibrés holomorphes de groupe structural G sur la sphère de Riemann S^2.

Dans la renormalisation perturbative, les points de la sphère S^2 sont les dimensions complexes parmi lesquelles la dimension D de l'espace-temps est un point privilégié. Le problème étant que dans les théories physiquement intéressantes les quantités à calculer conspirent pour diverger précisément au point D. On peut organiser ces quantités comme élément $g \in G$ d'un groupe pronilpotent G par analogie avec le développement de Taylor d'un difféomorphisme et donner un sens à $g = g(z)$ en remplaçant dans les formules la dimension D par une valeur complexe $z \neq D$. Le procédé de renormalisation acquiert alors la signification suivante : la valeur cherchée $g \in G$ n'est autre que la valeur $g_+(D)$ en D de la partie holomorphe de la décomposition de Riemann-Hilbert $g(z) = g_-^{-1}(z)\, g_+(z)$ du lacet $g(z)$.

La nature exacte du groupe G impliqué dans la renormalisation a été clarifiée par les étapes essentielles suivantes.

La première est la découverte due à Dirk Kreimer de la structure d'algèbre de Hopf secrètement présente dans les formules récursives de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann.

La seconde (qui est le point de départ de notre collaboration) est la similitude entre l'algèbre de Hopf des arbres enracinés de Dirk et une algèbre de Hopf que

j'avais introduite avec Henri Moscovici pour organiser les calculs très complexes de géométrie noncommutative. Ceci nous a conduit avec Dirk à définir une algèbre de Hopf directement en termes de graphes de Feynman et à lui appliquer le théorème de Milnor-Moore pour en déduire une algèbre de Lie et un groupe de Lie pronilpotent G, analogue du groupe des difféomorphismes formels.

La troisième étape est l'identification de la recette combinatoire de Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann avec la formule mathématique qui donne, par récurrence, la décomposition de Birkhoff d'un lacet à valeurs dans un groupe de Lie simplement connexe pronilpotent.

Enfin, la dernière étape est la construction d'une action du groupe G sur les constantes de couplage de la théorie physique. Ceci permet de relever le groupe de renormalisation comme un sous-groupe à un paramètre du groupe G et de montrer directement que les développements polaires des divergences sont entièrement déterminés par leur résidu.

En fait, ce groupe G est intimement relié au groupe des difféomorphismes formels des constantes de couplage sans dimension de la théorie physique. L'un des résultats essentiels de notre collaboration avec Dirk est en effet la construction, à partir de la formule qui donne la valeur *effective* d'une telle constante de couplage, d'un homomorphisme de G dans le groupe des difféomorphismes formels tangents à l'identité. Cela éclaire la nature du groupe G qu'il serait naturel d'appeler le groupe de *difféographismes* de la théorie. Cela permet aussi de formuler un corollaire indépendant du groupe G.

Théorème 1.1 **([14])**. — *Considérons la constante de couplage effective non renormalisée $g_{\mathrm{eff}}(\varepsilon)$ comme une série formelle en g et soit $g_{\mathrm{eff}}(\varepsilon) = g_{\mathrm{eff}_+}(\varepsilon)\,(g_{\mathrm{eff}_-}(\varepsilon))^{-1}$ sa décomposition de Birkhoff (opposée) dans le groupe des difféomorphismes formels. Alors le lacet $g_{\mathrm{eff}_-}(\varepsilon)$ est la constante de couplage nue et $g_{\mathrm{eff}_+}(0)$ la constante de couplage renormalisée.*

Il est naturel d'interpréter en termes galoisiens l'ambiguïté que le groupe de renormalisation introduit dans les théories physiques. La formulation mathématique du groupe de renormalisation comme un sous-groupe à un paramètre du groupe des difféographismes dans la section 5 permet de préciser cette question.

Nous montrerons le rôle que le groupe de renormalisation devrait jouer pour comprendre la composante connexe du groupe des classes d'idèles de la théorie du corps de classe comme un groupe de Galois. Cette idée s'appuie à la fois sur l'analogie entre la théorie des facteurs et la théorie de Brauer pour un corps local et sur la présence implicite en théorie des champs d'un « corps de constantes » plus élaboré que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. En fait, les calculs des physiciens regorgent d'exemples de « constantes » telles les constantes de couplage g des interactions (électromagnétiques, faibles et fortes) qui n'ont de « constantes » que le nom. Elles dépendent, en réalité, du niveau d'énergie μ auquel les expériences sont réalisées et sont des fonctions $g(\mu)$.

de sorte que les physiciens des hautes énergies étendent implicitement le « corps des constantes » avec lequel ils travaillent, passant du corps $\mathbb{C}$ des scalaires à un corps de fonctions $g(\mu)$. Le groupe d'automorphismes de ce corps engendré par $\mu\partial/\partial\mu$ est le groupe d'ambiguïté de la théorie physique.

Je terminerai cet article par un bref exposé de résultats récents obtenus en collaboration avec M. Marcolli ([**17**]) qui établissent enfin un lien précis entre renormalisation et théorie de Galois, en expliquant le rôle de la décomposition de Birkhoff en renormalisation par une correspondance de Riemann-Hilbert entre connexions plates *équisingulières* et représentations d'un *groupe de Galois motivique* explicite U^*. Ce groupe joue dans le contexte de la renormalisation un rôle analogue à celui du tore exponentiel dû à Jean-Pierre Ramis ([**35, 33**]) dans la théorie locale des singularités irrégulières des équations différentielles.

L'apparition naturelle de ce groupe comme enveloppe du groupe de renormalisation, et sa détermination comme produit semi-direct du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ par le groupe pro-unipotent U dont l'algèbre de Lie est l'algèbre libre

$$\mathrm{Lie}(U) = \mathcal{F}(1, 2, 3, \dots),$$

ayant un générateur en chaque degré positif, ouvrent la porte vers des relations très précises entre la théorie des motifs, le groupe de Grothendieck-Teichmuller et la renormalisation, relations suggérées par P. Cartier dans [**4**].

2. Renormalisation, position du problème

2.1. Motivation physique. — L'idée physique de la renormalisation est très claire et remonte aux travaux de Green au dix-neuvième siècle sur l'hydrodynamique. Pour prendre un exemple simple (voir le cours de théorie des champs de Sidney Coleman), si l'on calcule l'accélération initiale d'une balle de ping-pong plongée à quelques mètres sous l'eau, l'on obtient en appliquant la loi de Newton $F = m\,a$ à la poussée d'Archimède $F = (M - m)\,g$, où m est la masse inerte, et M la masse d'eau occupée par la balle, une accélération initiale de l'ordre de $11\,g$! (la balle pèse $m = 2,7$ grammes et a un diamètre de 4 cm de sorte que $M = 33,5$ grammes). En réalité, si l'on réalise l'expérience, l'accélération est de l'ordre de $2g$. En fait, comme le montre Green [**27**] la présence du fluide autour de la balle oblige à corriger la valeur m de la masse inerte dans la loi de Newton et à la remplacer par une « masse effective » qui en l'occurrence vaut $m + \frac{1}{2}\,M$. Dans cet exemple, l'on peut, bien sûr, déterminer la masse nue m en pesant la balle de ping-pong hors de l'eau, mais il n'en va pas de même pour un électron dans le champ électromagnétique, dont il est impossible de l'extraire. De plus, le calcul montre que pour une particule ponctuelle, comme le demande la relativité, la correction qui valait $\frac{1}{2}\,M$ ci-dessus est infinie.

2.2. Champs quantiques. — Vers 1947 les physiciens ont réussi à utiliser la distinction entre les deux masses qui apparaissent ci-dessus et, plus généralement, le concept de quantité physique « effective » pour éliminer les quantités infinies qui apparaissent en théorie des champs quantiques (voir [**21**] pour un aperçu historique).

Une théorie des champs en D dimensions est donnée par une fonctionnelle d'action classique

$$S(A) = \int \mathcal{L}(A)\, d^D x \tag{1}$$

où $A = A(x) = A(x^\mu)$ désigne un champ classique et le lagrangien est de la forme,

$$\mathcal{L}(A) = (\partial A)^2/2 - \frac{m^2}{2} A^2 - \mathcal{L}_{\text{int}}(A) \tag{2}$$

où $(\partial A)^2 = (\partial_0 A)^2 - \sum_{\mu\neq 0}(\partial_\mu A)^2$ et $\mathcal{L}_{\text{int}}(A)$ est un polynôme en A.

Le passage de la théorie classique à la théorie quantique est simple à décrire a priori. Il consiste d'abord à remplacer la notion classique de probabilité par celle (quantique) d'*amplitude de probabilité*.

En théorie des champs quantiques l'amplitude de probabilité d'une configuration classique A est donnée par la formule de Dirac et Feynman,

$$e^{i\, S(A)/\hbar} \tag{3}$$

où $\hbar$ est l'unité d'action de sorte que l'exposant $i\, S(A)/\hbar$ est sans dimension.

Cela permet alors de *définir* la valeur quantique d'une observable classique (*i.e.*, d'une fonctionnelle $\mathcal{O}$ sur les champs classiques) par

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{O}(A) e^{i\, S(A)/\hbar}\, D[A], \tag{4}$$

où $\mathcal{N}$ est un facteur de normalisation et où l'intégrale (de Feynman) n'a qu'un sens formel mais qui suffit largement, dans le cas où l'espace des champs classiques A est un espace linéaire, pour formuler sans difficulté les termes des développements perturbatifs qui font apparaître le problème de la renormalisation.

On peut, par exemple, décrire la théorie par les fonctions de Green,

$$G_N(x_1, \ldots, x_N) = \langle\, 0\, |T\, \phi(x_1) \ldots \phi(x_N)|\, 0\, \rangle \tag{5}$$

où le symbole T signifie que les champs quantiques $\phi(x_j)$ sont écrits à temps croissant de droite à gauche et si l'on pouvait ignorer les problèmes de renormalisation, l'on pourrait calculer les fonctions de Green grâce à la formule

$$G_N(x_1, \ldots, x_N) = \mathcal{N} \int e^{i\, S(A)/\hbar}\, A(x_1) \cdots A(x_N)\, [dA] \tag{6}$$

où $\mathcal{N}$ est un facteur de normalisation requis par la normalisation de l'état de vide,

$$\langle\, 0 \mid 0\, \rangle = 1. \tag{7}$$

L'on pourrait alors calculer l'intégrale fonctionnelle (6) en théorie des perturbations en traitant le terme $\mathcal{L}_{\text{int}}$ comme une perturbation, le lagrangien libre étant

$$\mathcal{L}_0(A) = (\partial A)^2/2 - \frac{m^2}{2} A^2. \tag{8}$$

de sorte que

$$S(A) = S_0(A) + S_{\text{int}}(A) \tag{9}$$

où l'action libre S_0 définit une mesure gaussienne (en prenant $h = 1$ pour l'instant)

$$\exp(i\, S_0(A))\, [dA] = d\mu. \tag{10}$$

On obtient alors le développement perturbatif des fonctions de Green sous la forme,

$$G_N(x_1, \ldots, x_N) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} i^n/n! \int A(x_1) \cdots A(x_N)\, (S_{\text{int}}(A))^n\, d\mu \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} i^n/n! \int S_{\text{int}}(A)^n\, d\mu \right)^{-1}. \tag{11}$$

2.3. Diagrammes de Feynman. — Les termes du développement (11) sont, par construction, donnés par des intégrales de polynômes sous la gaussienne $d\mu$ de la forme,

$$\int A(x_1) \cdots A(x_N)\, (S_{\text{int}}(A))^n\, d\mu \tag{12}$$

Ils s'obtiennent en intégrant par parties sous la gaussienne $d\mu$ et cela engendre un grand nombre de termes $U(\Gamma)$. Les graphes de Feynman Γ sont des données combinatoires qui servent à indicer les termes qui apparaissent dans le calcul de ces intégrales de polynômes sous une gaussienne. Ce sont des graphes dont les sommets peuvent être de plusieurs types correspondant aux termes du lagrangien de la théorie, et que nous définirons plus en détail ci-dessous. Les valeurs des termes $U(\Gamma)$ (que l'on appelle valeurs non-renormalisées du graphe Γ) sont données par des intégrales en un nombre fini de variables d'espace-temps.

L'on commence par simplifier notablement la combinatoire des graphes par des définitions convenables de fonctions génératrices. La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green est donnée par la transformée de Fourier,

$$\begin{aligned} Z(J) &= \mathcal{N} \int e^{i\frac{S(A)+(J,A)}{h}}\, [dA] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int J(x_1) \cdots J(x_N) G_N(x_1, \ldots, x_N) dx_1 \cdots dx_N \end{aligned} \tag{13}$$

où la *source* J est un élément du dual de l'espace linéaire des champs classiques A.

La zoologie des diagrammes de la théorie perturbative se simplifie d'abord en passant au logarithme de $Z(J)$ qui donne la fonctionnelle génératrice pour les fonctions de Green connexes G_c,

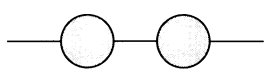
$$iW(J) = \mathrm{Log}(Z(J)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int J(x_1) \cdots J(x_N)\, G_{N,c}(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \cdots dx_N \tag{14}$$

Au niveau combinatoire formel, alors que la somme initiale (13) impliquait tous les graphes y compris ceux qui ne sont pas connexes, le log dans (14) pour $W(J)$ supprime tous les graphes non-connexes. De plus, le facteur de normalisation $\mathcal{N}$ dans (13) élimine tous les graphes sans arêtes externes. Enfin, le nombre L de boucles dans un graphe connexe détermine la puissance $\hbar^{L-1}$ de l'unité d'action qui multiplie ce terme et fait apparaître (14) comme un développement semi-classique.

Le pas suivant dans la simplification de la zoologie des graphes consiste à passer à l'*action effective* $S_{\mathrm{eff}}(A)$. Par définition, $S_{\mathrm{eff}}(A)$ est la transformée de Legendre de $W(J)$.

L'action effective donne les corrections quantiques de l'action classique. Par sa définition comme transformée de Legendre on voit que les calculs au niveau arbre (par la méthode de la phase stationnaire) à partir de $S_{\mathrm{eff}}(A)$ donnent les mêmes résultats que le calcul complet à partir de $S(A)$. Il en résulte que le calcul de l'action effective est un pas crucial dans l'analyse d'une théorie donnée.

Comme ci-dessus, l'action effective admet un développement formel en termes de graphes. En fait, cela élimine tous les graphes qui deviennent non-connexes quand on enlève une arête convenable. Les graphes restant sont appelés *Une Particule Irréductible* (1PI). Le graphe suivant n'est donc pas (1PI) :



La contribution de chacun de ces graphes Γ à la fonctionnelle non-linéaire $S_{\mathrm{eff}}(A)$ est donnée explicitement de la manière suivante, où N désigne le nombres d'arêtes externes de Γ :

$$\Gamma(A) = \frac{1}{N!} \int_{\sum p_j = 0} \widehat{A}(p_1) \cdots \widehat{A}(p_N)\, U(\Gamma(p_1, \ldots, p_N))\, dp_1 \cdots dp_N. \tag{15}$$

Ici $\widehat{A}(p)$ est la transformée de Fourier de $A(x)$ et la valeur *non-renormalisée*

$$U(\Gamma(p_1, \ldots, p_N)) \tag{16}$$

du graphe est définie en appliquant des règles simples (celles de Feynman) qui remplacent chaque arête *interne*[1] par un propagateur, *i.e.*, un terme de la forme

$$\frac{1}{k^2 - m^2}\,, \tag{17}$$

[1] Les propagateurs des arêtes externes sont éliminés pour les graphes (1PI)

où k est le moment le long de l'arête. Il n'y a rien de mystérieux dans l'apparition du propagateur (17) qui joue le rôle de l'inverse de la forme quadratique S_0 et provient simplement de la règle d'intégration par parties

$$\int f(A)\,\langle J, A\rangle\,\exp(i\,S_0(A))\,[dA] = \int \partial_X f(A)\,\exp(i\,S_0(A))\,[dA]$$

pourvu que

$$-i\,\partial_X S_0(A) = \langle J, A\rangle.$$

On intègre alors sur les moments k qui subsistent après avoir appliqué à chaque sommet la règle de conservation des moments (la somme des moments entrants est égale à zéro). Le nombre de variables d'intégration restantes est le nombre de boucles L du graphe Γ.

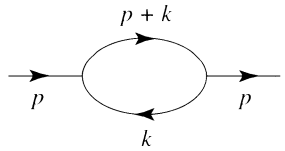
L'action effective est alors donnée par la série formelle

$$S_{\text{eff}}(A) = S_0(A) + \sum_{\Gamma\in 1PI} \frac{\Gamma(A)}{S(\Gamma)}, \tag{18}$$

où le facteur $S(\Gamma)$ est l'ordre du groupe de symétrie du graphe.

2.4. Divergences. — En règle générale, les intégrales $U(\Gamma(p_1,\dots,p_N))$ sont divergentes. La plus simple (avec le graphe correspondant) est de la forme (en ignorant les puissances de 2π et après rotation de Wick aux variables euclidiennes),

(19)



$$= \int \frac{1}{k^2+m^2}\,\frac{1}{((p+k)^2+m^2)}\,d^Dk$$

Elle diverge en dimension $D = 4$. En général, les divergences les plus importantes sont causées par la présence, dans le domaine d'intégration, de moments de taille arbitrairement grande. La technique de renormalisation consiste d'abord à « régulariser » ces intégrales divergentes, par exemple, en introduisant un paramètre de « cutoff » Λ et en se restreignant à la portion correspondante du domaine d'intégration. Les intégrales sont alors finies, mais continuent, bien entendu, à diverger quand $\Lambda \to \infty$. On établit ensuite une dépendance entre les termes du lagrangien et Λ pour que les choses s'arrangent et que les résultats ayant un sens physique deviennent finis ! Cela est parfaitement justifié du point de vue de la physique par la distinction nécessaire entre les paramètres *nus* qui ne sont pas observables et les valeurs qui sont mesurées dans les expériences. En ajustant les paramètres *nus* au fur et à mesure que l'on enlève le « cutoff » on peut alors espérer éliminer les divergences. Par exemple, pour la théorie ϕ^3 de lagrangien

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{6}\phi^3, \tag{20}$$

qui est suffisamment générique pour illustrer le procédé, le lagrangien va dépendre du « cutoff » comme

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2(1-\delta Z(\Lambda)) - \left(\frac{m^2+\delta m^2(\Lambda)}{2}\right)\phi^2 - \frac{g+\delta g(\Lambda)}{6}\phi^3. \tag{21}$$

Dans le cas particulier des théories asymptotiquement libres, la forme explicite de la dépendance entre les constantes nues et le paramètre de régularisation Λ a permis dans des cas très importants ([**24**], [**22**]) de mener à bien le programme de la théorie constructive des champs ([**25**]).

Décrivons maintenant en détail la technique de renormalisation perturbative. Pour faire les choses systématiquement, on rajoute un « contre-terme » $C(\Gamma)$ au lagrangien de départ $\mathcal{L}$, chaque fois que l'on rencontre un diagramme 1PI qui est divergent, dans le but d'annuler la divergence correspondante. Pour les théories « renormalisables », les contre-termes $C(\Gamma)$ dont on a besoin sont tous déjà des termes du lagrangien $\mathcal{L}$ et ces contorsions peuvent s'interpréter à partir de l'inobservabilité des quantités numériques qui apparaissent dans $\mathcal{L}$, par opposition aux quantités physiques qui, elles, doivent rester finies.

La méthode du « cutoff » n'est pas agréable à mettre en pratique et les physiciens lui préfèrent la *régularisation dimensionnelle*, qui consiste simplement à définir l'intégration en D-dimension lorsque $D \notin \mathbb{N}$ n'est plus un entier. Ceci est très simple en se ramenant à des intégrales gaussiennes qui en dimension entière sont données par des expressions simples (23) qui continuent à avoir un sens en dimension arbitraire.

On utilise donc d'abord le passage aux *paramètres de Schwinger* que nous explicitons dans l'exemple ci-dessus :

$$\frac{1}{k^2+m^2}\,\frac{1}{(p+k)^2+m^2} = \int_{s>0\,t>0} e^{-s(k^2+m^2)-t((p+k)^2+m^2)}\,ds\,dt \tag{22}$$

puis, après avoir diagonalisé la forme quadratique qui apparaît en exposant, la formule suivante pour l'intégrale d'une gaussienne en dimension D,

$$\int e^{-\lambda k^2}\,d^Dk = \pi^{D/2}\,\lambda^{-D/2}, \tag{23}$$

ce qui donne la valeur non renormalisée du graphe (19) en dimension D sous la forme

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^\infty e^{-(y(x-x^2)p^2+y\,m^2)}\int e^{-y\,k^2}\,d^Dk\,y\,dy\,dx \\ = \pi^{D/2}\int_0^1\int_0^\infty e^{-(y(x-x^2)p^2+y\,m^2)}\,y^{-D/2}\,y\,dy\,dx \\ = \pi^{D/2}\,\Gamma(2-D/2)\int_0^1\left((x-x^2)p^2+\,m^2\right)^{D/2-2}dx.\end{aligned} \tag{24}$$

L'intégrale restante se calcule en termes de fonctions hypergéométriques, mais le point essentiel est la singularité de la fonction Γ pour $D \in 4+2\,\mathbb{N}$. Notons que l'on a alors $D/2-2 \in \mathbb{N}$ de sorte que le coefficient du pôle est un polynôme en p et sa

transformée de Fourier est un terme *local*. Cela ne suffit pas pour que la théorie soit renormalisable; si, par exemple $D = 8$, le coefficient du pôle est de degré 4 et la théorie n'est pas renormalisable. Quand $D = 6$, par contre, le coefficient du pôle est de degré 2; c'est un terme du lagrangien ce qui permet d'éliminer la divergence en ajoutant des contre-termes convenables $\delta Z(\varepsilon)$ et $\delta m^2(\varepsilon)$ au lagrangien de départ.

2.5. Sous divergences. — La principale complication dans la mise en œuvre de la procédure ci-dessus vient de l'existence de nombreux graphes Γ pour lesquels les divergences de $U(\Gamma)$ ne sont pas locales. Ceci se produit dès que l'on rencontre des pôles d'ordre > 1 dans la régularisation dimensionnelle, ce qui fait apparaître comme coefficient du terme en $1/\varepsilon$ les dérivées en D d'expressions comme $\int_0^1((x - x^2)p^2 + m^2)^{D/2-2}\,dx$ qui ne sont plus polynomiales en p même pour les valeurs entières de $D/2 - 2$ mais qui impliquent des termes comme $\log(p^2 + 4m^2)$. Un autre problème est que ces graphes possèdent déjà des sous-graphes dont les divergences doivent normalement être prises en compte avant d'aller plus loin. On a ainsi deux difficultés,

- Les divergences de $U(\Gamma)$ ne sont plus données par des termes locaux.
- Les corrections précédentes (celles des sous-graphes) doivent être prises en compte de manière cohérente.

Ces deux problèmes sont résolus par une méthode combinatoire précise, due à Bogoliubov-Parasiuk-Hepp et Zimmermann ([**2**]) et qui consiste d'abord à « préparer » le graphe Γ en remplaçant $U(\Gamma)$ par l'expression formelle,

$$\overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma) \tag{25}$$

où γ varie parmi tous les sous-graphes divergents. On montre alors que le calcul des divergences du graphe « préparé » ne donne que des expressions locales, qui pour les théories renormalisables se trouvent déjà dans le lagrangien $\mathcal{L}$.

3. Structure algébrique des graphes de Feynman

Dirk Kreimer a eu l'idée remarquable en 97 ([**31**]) d'interpréter la combinatoire des sous-divergences en terme d'une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_K$ construite à partir des arbres « enracinés ».

J'avais à la même époque, dans les calculs de Géométrie Noncommutative de l'indice transverse pour les feuilletages, montré, avec Henri Moscovici, ([**19**]) que la complexité extrême de ces calculs conduisait à introduire une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{cm}$, qui n'est ni commutative ni cocommutative mais qui est intimement reliée au groupe des difféomorphismes, dont l'algèbre de Lie apparaît en appliquant le théorème de Milnor-Moore à une sous-algèbre commutative.

Après l'exposé de Dirk à l'IHES en février 98, nous avons tous les deux été intrigués par la similarité apparente entre ces deux algèbres de Hopf $\mathcal{H}_K$ et $\mathcal{H}_{cm}$ et notre collaboration a commencé par l'application du théorème de Milnor-Moore à l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_K$ et sa caractérisation en termes de cohomologie de Hochschild ([**10**]).

3.1. L'algèbre de Hopf des graphes de Feynman. — On peut, en fait ([**13**]), associer directement une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ à toute théorie renormalisable en utilisant la formule (25) pour définir le coproduit. Pour fixer les idées et simplifier les notations nous l'expliciterons pour la théorie φ^3 en $D = 6$ dimensions.

Les graphes sont construits à partir de sommets de trois types correspondants aux trois termes du lagrangien [(2)]

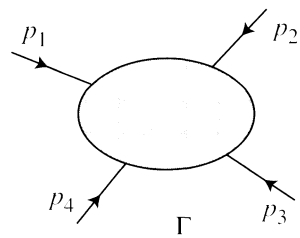
Sommet à trois arêtes  associé au terme φ^3.

Sommet à deux arêtes  associé au terme φ^2.

Sommet à deux arêtes  associé au terme $(\partial\varphi)^2$.

Le nombre d'arêtes partant d'un sommet est le degré du monôme correspondant du lagrangien. Toute arête joint deux sommets distincts (arête interne) ou n'aboutit qu'à un seul sommet (arête externe).

Comme nous l'avons vu plus haut la valeur numérique $U(\Gamma(p_1, \ldots, p_N))$ d'un graphe dépend de la valeur des moments p_j *entrants* attachés aux arêtes externes du graphe



qui vérifient la règle de conservation des moments.

$$\sum p_i = 0.$$

Par définition, comme nous l'avons vu plus haut, un graphe Γ est (1PI) s'il est connexe et le reste quand on supprime l'une quelconque de ses arêtes internes.

En tant qu'algèbre, l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ des graphes de Feynman est l'algèbre commutative libre engendrée par les graphes $\Gamma(p_1, \ldots, p_N)$ qui sont (1PI). Il est, en

[(2)] Pour la théorie de masse nulle le terme en φ^2 est absent ainsi que le type de sommet correspondant.

fait, plus pratique par linéarité d'autoriser comme structure externe une distribution arbitraire $\sigma : C^\infty(E_\Gamma) \to \mathbb{C}$ définie sur l'espace des fonctions C^∞ sur

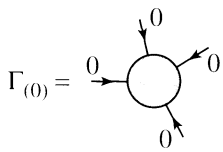
$$E_\Gamma = \left\{ (p_i)_{i=1,\dots,n} \,:\, \sum p_i = 0 \right\}. \tag{26}$$

L'algèbre $\mathcal{H}$ est alors l'algèbre symétrique sur l'espace linéaire somme directe des espaces de distributions $C_c^{-\infty}(E_\Gamma)$; en d'autres termes,

$$\mathcal{H} = S(C_c^{-\infty}(\cup E_\Gamma)). \tag{27}$$

Nous utiliserons la notation $\Gamma_{(0)}$ pour indiquer la structure externe sur le graphe Γ donnée par la masse de Dirac en $0 \in E_\Gamma$.[3]

$$\Gamma_{(0)} = (\Gamma(p))_{p=0} \tag{28}$$



Pour les graphes à deux arêtes externes Γ nous noterons

$$\Gamma_{(1)} = \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma(p) \right)_{p=0} \tag{29}$$

où $\pm p$ est le moment externe dont le signe est sans importance.

Pour définir le coproduit,

$$\Delta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \tag{30}$$

il suffit de le donner sur les graphes 1PI : on a

$$\Delta\Gamma = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subset \Gamma} \gamma_{(i)} \otimes \Gamma/\gamma_{(i)}. \tag{31}$$

Ici, γ est un sous-ensemble non vide et de complémentaire non-vide $\gamma \subset \Gamma^{(1)}$ de l'ensemble $\Gamma^{(1)}$ des arêtes internes de Γ dont les composantes connexes γ' sont 1PI et telles que l'ensemble $\varepsilon(\gamma')$ des arêtes de Γ qui rencontrent γ' sans appartenir à γ' ait deux ou trois éléments [**13**]. On note $\gamma'_{(i)}$ le graphe qui admet γ' comme ensemble d'arêtes internes et $\varepsilon(\gamma')$ comme ensemble d'arêtes externes avec pour structure externe (28) pour $i = 0$ et (29) pour $i = 1$.

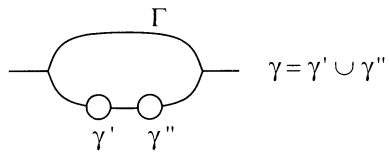
La somme (31) porte sur tous les multi-indices i de valeurs indépendantes sur les composantes connexes de γ. Ceux-ci prennent les valeurs 0 ou 1 pour les graphes à deux arêtes externes et la valeur 0 pour les graphes à trois arêtes externes. On note $\gamma_{(i)}$ le produit des graphes $\gamma'_{(i)}$ associés aux composantes connexes de γ. Le graphe

[3] pour la théorie de masse nulle, on prend $p^2 = \mu^2$ au lieu de $p = 0$.

$\Gamma/\gamma_{(i)}$ est obtenu en remplaçant chacune des composantes connexes γ' de γ par le sommet correspondant de type (i) pour $\gamma'_{(i)}$. On vérifie que $\Gamma/\gamma(i)$ est un graphe 1PI.

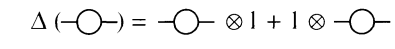
On notera que, bien que les composantes γ' de γ soient disjointes par construction, les graphes $\gamma'_{(i)}$ ne le sont plus nécessairement car les composantes peuvent avoir des arêtes externes communes, $\varepsilon(\gamma') \cap \varepsilon(\gamma'') \neq \varnothing$.

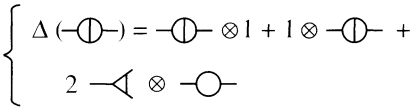
C'est le cas dans l'exemple suivant,

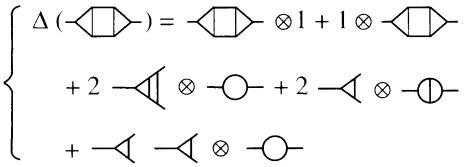


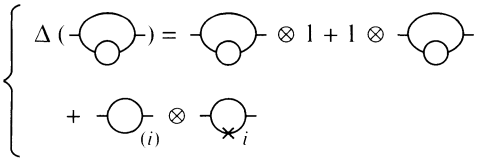
La structure externe du graphe $\Gamma/\gamma_{(i)}$ est identique à celle de Γ.

Voici quelques exemples de coproduit [**13**] :









On notera que le coproduit (31) vérifie par construction la propriété suivante de « linéarité à droite » qui signale sa similitude avec le coproduit donné par la composition des séries formelles :

Proposition 3.1. — *Soit $\mathcal{H}_{(1)}$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par* 1 *et les graphes 1PI. Alors pour tout $\Gamma \in \mathcal{H}_{(1)}$ on a.*

$$\Delta(\Gamma) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{(1)}.$$

Le coproduit (31) se prolonge en un unique homomorphisme d'algèbre $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ et l'on a ([**13**])

Théorème 3.2. — *Le couple* $(\mathcal{H}, \Delta)$ *est une algèbre de Hopf.*

On notera que la structure externe des graphes joue un rôle mineur dans le coproduit car la structure externe de chacun des graphes $\Gamma/\gamma_{(i)}$ est identique à celle de Γ.

3.2. L'algèbre de Lie des graphes, le groupe G et sa structure. — L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ admet plusieurs graduations naturelles. Il suffit pour définir une graduation de donner le degré des graphes 1PI puis de poser, en général,

$$\deg(\Gamma_1 \dots \Gamma_e) = \sum \deg(\Gamma_j), \quad \deg(1) = 0. \tag{32}$$

On doit vérifier que

$$\deg(\gamma) + \deg(\Gamma/\gamma) = \deg(\Gamma) \tag{33}$$

pour tout sous-graphe admissible γ.

Les deux graduations les plus naturelles sont

$$I(\Gamma) = \text{nombre d'arêtes internes de } \Gamma \tag{34}$$

et

$$v(\Gamma) = V(\Gamma) - 1 = \text{nombre de sommets de } \Gamma - 1. \tag{35}$$

On a aussi la combinaison importante

$$L = I - v = I - V + 1 \tag{36}$$

qui est le nombre de boucles du graphe.

Le théorème de Milnor-Moore montre que l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ est duale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie graduée $\underline{G}$ dont une base est donnée par les graphes 1-particule irréductibles. Le crochet de Lie de deux graphes est obtenu par insertion d'un graphe dans l'autre. Le groupe de Lie correspondant G est le groupe des caractères de $\mathcal{H}$.

Nous avons ensuite analysé le groupe G et montré qu'il est produit semi-direct d'un groupe abélien par un groupe très relié au groupe des difféomorphismes des constantes de couplage sans dimension de la théorie des champs (voir section 6).

Nous appliquons alors le théorème de Milnor-Moore à l'algèbre de Hopf bigraduée $\mathcal{H}$.

Ce théorème donne une structure d'algèbre de Lie sur

$$\oplus_\Gamma C^\infty(E_\Gamma) = L \tag{37}$$

où, pour chaque graphe 1PI Γ, on définit E_Γ comme ci-dessus. Soit $X \in L$ et soit Z_X la forme linéaire sur $\mathcal{H}$ donnée, sur les monômes Γ, par

$$\langle \Gamma, Z_X \rangle = 0 \tag{38}$$

sauf si Γ est connexe et 1PI et, dans ce cas, par

$$\langle \Gamma, Z_X \rangle = \langle \sigma_\Gamma, X_\Gamma \rangle \tag{39}$$

où σ_Γ est la distribution qui donne la structure externe de Γ et X_Γ la composante correspondante de X. Par construction, Z_X est un caractère infinitésimal de $\mathcal{H}$ ainsi que les commutateurs,

$$[Z_{X_1}, Z_{X_2}] = Z_{X_1} Z_{X_2} - Z_{X_2} Z_{X_1}. \tag{40}$$

Le produit étant obtenu par transposition du coproduit de $\mathcal{H}$, *i.e.*, par

$$\langle Z_1 Z_2, \Gamma \rangle = \langle Z_1 \otimes Z_2, \Delta \Gamma \rangle. \tag{41}$$

Soient Γ_j, $j = 1, 2$ des graphes 1PI et $\varphi_j \in C^\infty(E_{\Gamma_j})$ les fonctions test correspondantes.

Pour $i \in \{0, 1\}$, soit $n_i(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma)$ le nombre de sous-graphes de Γ isomorphes à Γ_1 et tels que

$$\Gamma / \Gamma_1(i) \simeq \Gamma_2. \tag{42}$$

Soit (Γ, φ) l'élément de L associé à $\varphi \in C^\infty(E_\Gamma)$, le crochet de Lie de (Γ_1, φ_1) et (Γ_2, φ_2) est donné par,

$$\sum_{\Gamma, i} \sigma_i(\varphi_1)\ n_i(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma)\, (\Gamma, \varphi_2) - \sigma_i(\varphi_2)\ n_i(\Gamma_2, \Gamma_1; \Gamma)\, (\Gamma, \varphi_1). \tag{43}$$

où les σ_i sont les structures externes spécifiées dans (28) et (29).

***Théorème 3.3* ([13]).** *L'algèbre de Lie L est produit semi-direct d'une algèbre de Lie Abélienne L_0 par L_c où L_c admet une base canonique indéxée par les graphes $\Gamma_{(i)}$ avec*

$$[\Gamma, \Gamma'] = \sum_v \Gamma \circ_v \Gamma' - \sum_{v'} \Gamma' \circ_{v'} \Gamma \tag{44}$$

où $\Gamma \circ_v \Gamma'$ est obtenu en greffant Γ' sur Γ en v.

Nous noterons G_c le groupe des caractères de la sous-algèbre de Hopf associée à L_c.

4. Renormalisation et problème de Riemann-Hilbert

La clé de notre travail avec Dirk Kreimer réside dans l'identité entre les formules qui gouvernent la recette combinatoire des pas successifs de la renormalisation perturbative et celles qui calculent la décomposition de Birkhoff (ou de Wiener-Hopf) d'un lacet à valeurs dans un groupe pronilpotent simplement connexe.

4.1. Problème de Riemann-Hilbert. — L'origine de la décomposition de Birkhoff (ou de Wiener-Hopf) est le problème de Riemann-Hilbert qui vient du 21^{e} problème de Hilbert qu'il formulait ainsi :

« Montrer qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire fuchsienne de singularités et monodromies données. »

Sous cette forme, il admet une réponse positive due à Plemelj et Birkhoff (*cf.* [**1**] pour un exposé détaillé). Quand on le reformule pour les systèmes linéaires de la forme,

$$y'(z) = A(z)\, y(z), \quad A(z) = \sum_{\alpha \in S} \frac{A_\alpha}{z - \alpha}, \tag{45}$$

où S est l'ensemble fini donné des singularités. $\infty \notin S$, et les A_α sont des matrices complexes telles que

$$\sum A_\alpha = 0 \tag{46}$$

pour éviter les singularités à ∞, la réponse n'est pas toujours positive [**3**], mais la solution existe quand les matrices de monodromie M_α sont suffisamment proches de 1. On peut alors l'écrire explicitement sous la forme d'une série de polylogarithmes [**32**].

4.2. Décomposition de Birkhoff. — Soit $C \subset P_1(\mathbb{C})$ une courbe simple contenant l'ensemble S des singularités et $\gamma : C \mapsto \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ l'application constante par morceaux sur $C \backslash S$ produit des matrices de monodromie M_α rencontrées le long du parcours.

Une solution $A(z)$ du problème de Riemann-Hilbert serait obtenue en posant

$$A(z)dz = d\gamma_\pm(z)\, \gamma_\pm(z)^{-1},$$

si l'on disposait de la *décomposition de Birkhoff* du lacet γ,

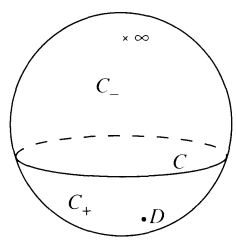
$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1}\, \gamma_+(z), \qquad \forall\, z \in C, \tag{47}$$

où les trois applications γ et $\gamma_\pm$ sont à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\gamma_\pm$ sont les valeurs au bord d'applications holomorphes

$$\gamma_\pm : C_\pm \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \tag{48}$$

avec C_- la composante connexe du complément de C contenant $\infty \notin C$ et C_+ la composante bornée. La condition $\gamma_-(\infty) = 1$ assure l'unicité de la décomposition si elle existe.

(49)



En général, pour une courbe simple C et un lacet régulier

$$\gamma : C \longmapsto \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

l'existence de la décomposition de Birkhoff (47) est intimement reliée à la classification des fibrés vectoriels holomorphes sur la sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$, et équivalente à l'annulation,

$$c_1(L_j) = 0 \tag{50}$$

des nombres de Chern $n_j = c_1(L_j)$ des fibrés en droites holomorphes de la décomposition de Birkhoff-Grothendieck

$$E = \oplus L_j \tag{51}$$

où E est le fibré vectoriel holomorphe sur $P_1(\mathbb{C})$ associé à γ, *i.e.*, d'espace total

$$(C_+ \times \mathbb{C}^n) \cup_\gamma (C_- \times \mathbb{C}^n). \tag{52}$$

La discussion ci-dessus pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ s'étend aux groupes de Lie complexes arbitraires en remplaçant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par G dans les formules ci-dessus.

4.3. Décomposition de Birkhoff pour les groupes pronilpotents. — Quand G est un groupe de Lie complexe et simplement connexe l'existence (et l'unicité) de la décomposition de Birkhoff (47) est vraie pour tout γ.

Quand le lacet $\gamma : C \to G$ se prolonge en un lacet holomorphe : $C_+ \to G$, la décomposition de Birkhoff est donnée par $\gamma_+ = \gamma$, $\gamma_- = 1$. En général, pour $z_0 \in C_+$ l'évaluation,

$$\gamma \longrightarrow \gamma_+(z_0) \in G \tag{53}$$

donne un principe naturel pour extraire une valeur finie à partir de l'expression singulière $\gamma(z_0)$.

Soit C un cercle de rayon infinitésimal centré en z_0. Cette extraction de partie finie est alors une division par la partie polaire pour un lacet méromorphe γ. En effet, γ_- est alors essentiellement la partie polaire de γ en z_0. Explicitons maintenant les formules qui donnent cette extraction de partie polaire pour un groupe de Lie complexe pro-nilpotent G dont l'algèbre de Hopf de coordonnées $\mathcal{H}$ est graduée.

La table ci-dessous donne la traduction entre langages algébriques et géométriques, en désignant par $\mathcal{R}$ l'anneau des germes de fonctions méromorphes dans un voisinage de z_0, $\mathcal{R}_- \subset \mathcal{R}$ le sous-anneau des polynômes en $(z - z_0)^{-1}$ et $\mathcal{R}_+ \subset \mathcal{R}$ celui des fonctions régulières en z_0.

Pour $X \in \mathcal{H}$, notons le coproduit sous la forme

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X + \sum X' \otimes X'' \tag{54}$$

où, pour X homogène de degré n, tous les termes X' et X'' sont de degré $< n$. La décomposition de Birkhoff s'obtient de manière récursive grâce au théorème suivant :

Lacet γ de C à valeurs dans G	Homomorphisme $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$
γ est régulier en z_0	$\phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}_+$
γ se prolonge en une application holomorphe de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{z_0\} \to G$ et $\gamma(\infty) = 1$	$\phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}_-$
$\gamma(z) = \gamma_1(z)\gamma_2(z),\ \forall\, z \in C$	$\phi = \phi_1 \star \phi_2$
$z \to \gamma(z)^{-1}$	$\phi \circ S$

***Théorème 4.1* ([13]).** — *Soit $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ un homomorphisme d'algèbres et $\gamma : C \mapsto G$ le lacet correspondant. Sa décomposition de Birkhoff est donnée de manière récursive par les égalités*

$$\phi_-(X) = -T\left(\phi(X) + \sum \phi_-(X')\phi(X'')\right),$$
$$\phi_+(X) = \phi(X) + \phi_-(X) + \sum \phi_-(X')\phi(X'')$$

où T désigne la projection sur $\mathcal{R}_-$ parallèlement à $\mathcal{R}_+$.

4.4. Formules de BPHZ et décomposition de Birkhoff. — La clé de notre travail avec Dirk Kreimer réside dans l'identité entre les formules du théorème 4.1 et celles qui gouvernent la combinatoire des calculs de graphes. Nous avons déjà vu la formule qui définit la préparation d'un graphe.

$$\overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma) \tag{55}$$

Celle qui donne le contre-terme $C(\Gamma)$ est alors,

$$C(\Gamma) = -T(\overline{R}(\Gamma)) = -T\left(U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)\right) \tag{56}$$

et celle qui donne la valeur renormalisée du graphe est,

$$R(\Gamma) = \overline{R}(\Gamma) + C(\Gamma) = U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma) \tag{57}$$

Il est alors clair, en posant $\phi = U$, $\phi_- = C$, $\phi_+ = R$, que ces équations sont identiques à celles du théorème 4.1 donnant la construction récursive de la décomposition de Birkhoff.

Décrivons plus en détails ce résultat. Étant donnée une théorie renormalisable en dimension D la théorie non-renormalisée donne, en utilisant la régularisation dimensionnelle, un lacet γ d'éléments du groupe G associé à la théorie dans la section 3. Le paramètre z du lacet $\gamma(z)$ est une variable complexe et $\gamma(z)$ est méromorphe dans un

voisinage de D. Notre résultat principal est que la théorie renormalisée est donnée par l'évaluation à $z = D$ de la partie non-singulière γ_+ de la décomposition de Birkhoff,

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1}\,\gamma_+(z) \tag{58}$$

de γ.

Les règles de Feynman et la régularisation dimensionnelle associent un nombre,

$$U_\Gamma(p_1,\dots,p_N) = \int d^d k_1 \cdots d^d k_L \; I_\Gamma(p_1,\dots,p_N,k_1,\dots,k_L) \tag{59}$$

à chaque graphe Γ. Nous les utilisons en métrique euclidienne pour éviter les facteurs imaginaires.

Pour respecter les dimensions physiques des quantités impliquées quand on écrit ces règles en dimension d, il faut introduire une unité de masse μ et remplacer partout la constante de couplage par $\mu^{3-d/2}\,g$. On normalise ainsi les calculs par,

$$U(\Gamma) = g^{(2-N)}\,\mu^{-B}\,\langle \sigma, U_\Gamma \rangle \tag{60}$$

où $B = B(d)$ est la dimension de $\langle \sigma, U_\Gamma \rangle$.

On étend la définition aux réunions disjointes de graphes 1PI Γ_j par

$$U(\Gamma = \cup\,\Gamma_j) = \Pi\, U(\Gamma_j). \tag{61}$$

Le résultat principal est alors le suivant :

Théorème 4.2 **([13])**

a) *Il existe une unique application méromorphe $\gamma(z) \in G$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq D$ dont les Γ-coordonnées sont données par $U(\Gamma)_{d=z}$.*

b) *La valeur renormalisée d'une observable physique $\mathcal{O}$ est obtenue en remplaçant $\gamma(D)$ dans le développement perturbatif de $\mathcal{O}$ par $\gamma_+(D)$ où*

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1}\,\gamma_+(z)$$

est la décomposition de Birkhoff du lacet $\gamma(z)$ relativement à un cercle infinitésimal autour de D.

En d'autres termes, la théorie renormalisée est obtenue en évaluant en $z = D$ la partie holomorphe γ_+ de la décomposition de Birkhoff du lacet γ associé à la théorie non-renormalisée. La renormalisation apparaît ainsi comme un cas particulier d'un procédé général d'extraction de parties finies de nature multiplicative, basé sur la décomposition de Birkhoff.

Il est également remarquable que la partie γ_- de la décomposition de Birkhoff donne les contre-termes et que la même expression formelle déjà utilisée pour l'action effective (18) donne l'action avec ses contre-termes,

$$S_c(A) = S_0(A) + \sum_{\Gamma \in 1PI} \frac{C(\Gamma)(A)}{S(\Gamma)}. \tag{62}$$

5. Le groupe de renormalisation

Montrons comment le groupe de renormalisation apparaît très simplement de notre point de vue. Comme nous l'avons vu ci-dessus, la régularisation dimensionnelle implique le choix arbitraire d'une unité de masse μ et l'on constate d'abord que la partie singulière de la décomposition de Birkhoff de γ est, en fait, indépendante de ce choix. Il en résulte une contrainte très forte sur cette partie singulière et le groupe de renormalisation s'en déduit immédiatement. Nous en déduisons également une formule explicite pour l'action nue en terme du résidu.

5.1. Stabilité de γ_-. — On montre d'abord, en se limitant à la théorie φ_6^3 pour simplifier les notations, que, bien que le lacet $\gamma(d)$ dépende du choix de l'unité de masse μ,

$$\mu \longrightarrow \gamma_\mu(d), \tag{63}$$

la partie singulière γ_{μ^-} de sa décomposition de Birkhoff

$$\gamma_\mu(d) = \gamma_{\mu^-}(d)^{-1}\,\gamma_{\mu^+}(d) \tag{64}$$

est, en fait, indépendante de μ,

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\,\gamma_{\mu^-}(d) = 0. \tag{65}$$

Cet énoncé découle immédiatement de l'analyse dimensionnelle.

Soit

$$\theta_t \in \operatorname{Aut} G, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{66}$$

le groupe à un paramètre d'automorphismes du groupe de Lie G qui est associé à la graduation de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ donnée par le nombre de boucles

$$L(\Gamma) = \text{nombre de boucles } \Gamma \tag{67}$$

pour tout graphe 1PI Γ.

On a, par construction, l'égalité

$$\gamma_{e^t\mu}(d) = \theta_{t\varepsilon}(\gamma_\mu(d)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \varepsilon = D - d \tag{68}$$

Il en résulte que les lacets $\gamma = \gamma_\mu$ associés à la théorie non-renormalisée satisfont à la propriété suivante :

Proposition 5.1. — *La partie singulière γ_- de la décomposition de Birkhoff*

$$\gamma(d) = \gamma_-(d)^{-1}\,\gamma_+(d)$$

est inchangée par l'opération

$$\gamma(d) \longrightarrow \theta_{t\varepsilon}(\gamma(d)), \quad \varepsilon = D - d.$$

Comme $\gamma_-(d)\,\gamma(d)$ et $\gamma_-(d)\,\theta_{t\varepsilon}(\gamma(d))$ sont réguliers en $\varepsilon = 0$, il en est de même pour $\theta_{-t\varepsilon}(\gamma_-(d))\,\gamma(d)$ de sorte que l'on obtient :

Corollaire 5.2. — *La partie singulière $\gamma_-(d)$ est indépendante de μ et vérifie*

$$\gamma_-(d)\,\theta_{t\varepsilon}(\gamma_-(d)^{-1}) \text{ est régulier en } \varepsilon = 0. \tag{69}$$

Nous donnerons ci-dessous une caractérisation complète des lacets $\gamma_-(\varepsilon) \in G$ vérifiant cette propriété.

5.2. Le groupe F_t. — Il est facile de voir que la limite de (69) pour $\varepsilon \to 0$ définit un sous-groupe à un paramètre.

$$F_t \in G,\ t \in \mathbb{R}, \quad F_{t_1+t_2} = F_{t_1}\,F_{t_2}, \quad \forall\, t_j \in \mathbb{R}.$$

La signification de ce groupe est donnée par

Proposition 5.3. — *La valeur finie $\gamma_\mu^+(D)$ de la décomposition de Birkhoff vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\gamma_{e^t\mu}^+(D) = F_t\,\gamma_\mu^+(D).$$

En effet, $\gamma_\mu^+(D)$ est la valeur régulière de $\gamma_-(d)\,\gamma_\mu(d)$ en $\varepsilon = 0$ et $\gamma_{e^t\mu}^+(D)$ celle de $\gamma_-(d)\,\theta_{t\varepsilon}(\gamma_\mu(d))$ ou, ce qui revient au même, celle de $\theta_{-t\varepsilon}(\gamma_-(d))\,\gamma_\mu(d)$ en $\varepsilon = 0$. Mais $\theta_{-t\varepsilon}(\gamma_-(d))\,\gamma_-(d)^{-1} \to F_t$ quand $\varepsilon \to 0$, d'où le résultat.

Le groupe F_t gouverne donc le comportement de la théorie renormalisée lorsque l'on modifie le choix arbitraire de l'échelle de masse μ. Il apparaît ainsi comme un groupe d'ambiguïté de la théorie physique. C'est cette ambiguïté que nous rapprocherons plus loin de l'ambiguïté entre les racines d'une équation algébrique inhérente à la théorie de Galois.

L'on peut réécrire l'énoncé de la proposition 5.3 en terme du générateur infinitésimal $\beta = \left(\frac{\partial}{\partial t}\,F_t\right)_{t=0}$ sous la forme

$$\mu\partial/\partial\mu\,\gamma_\mu^+(D) = \beta\,\gamma_\mu^+(D). \tag{70}$$

5.3. Le résidu et la fonction β. — Le corollaire 5.2 permet de montrer ([**14**]) que le générateur $\beta = \left(\frac{\partial}{\partial t}\,F_t\right)_{t=0}$ de ce sous-groupe est relié au *résidu* de γ

$$\mathrm{Res}_{\varepsilon=0}\,\gamma = -\left(\frac{\partial}{\partial u}\,\gamma_-\left(\frac{1}{u}\right)\right)_{u=0} \tag{71}$$

par l'équation

$$\beta = Y\ \mathrm{Res}\,\gamma \tag{72}$$

où $Y = \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\theta_t\right)_{t=0}$ est la graduation associée au nombre de boucles des graphes.

Ceci est immédiat mais notre résultat ([**14**]) donne la formule explicite suivante (74) qui exprime $\gamma_-(\varepsilon)$ en fonction de β. Introduisons le produit semi-direct de l'algèbre de Lie G par la graduation. On a donc un élément Z_0 tel que

$$[Z_0, X] = Y(X) \qquad \forall\, X \in \mathrm{Lie}\ G. \tag{73}$$

et le groupe G^* produit semi-direct de G par le groupe à un paramètre θ_t. On a alors ([**14**])

Théorème 5.4. — *L'application $\gamma_-(\varepsilon)$ est entièrement déterminée par son résidu par la formule*

$$\gamma_-(\varepsilon) = \lim_{t\to\infty} e^{-t\left(\frac{A}{\varepsilon}+Z_0\right)} e^{tZ_0}. \tag{74}$$

Les deux facteurs du terme de droite appartiennent au groupe G^* mais leur rapport appartient au groupe G.

Cette formule montre que toute la structure des divergences est uniquement déterminée par le résidu et donne une forme forte des relations de 't Hooft [**28**].

6. Le groupe G et les difféomorphismes formels

Bien entendu, on pourrait facilement objecter aux développements précédents en arguant que le mystère de la renormalisation n'est pas complètement éclairci car le groupe G construit à partir des graphes de Feynman apparaît également mystérieux. Cette critique est complètement levée par la merveilleuse relation, basée sur la physique, entre les algèbres de Hopf $\mathcal{H}$ des graphes de Feynman et celle, $\mathcal{H}_{\rm diff}$, des difféomorphismes formels.

6.1. L'action de G sur les constantes de couplage. — Nous montrons, dans le cas de masse nulle, que la formule qui donne la constante de couplage effective

$$g_{\rm eff} = \left(g + \sum_{\text{-}\bigcirc\!\!\!\!\!\!\diagup} g^{2\ell+1}\,\frac{\Gamma}{S(\Gamma)}\right)\left(1 - \sum_{\text{-}\bigcirc\text{-}} g^{2\ell}\,\frac{\Gamma}{S(\Gamma)}\right)^{-3/2} \tag{75}$$

considérée comme une série formelle dans la variable g d'éléments de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, définit, en fait, un homomorphisme d'algèbres de Hopf de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\rm diff}$ des coordonnées sur le groupe des difféomorphismes formels de $\mathbb{C}$ tels que

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = \mathrm{id} \tag{76}$$

vers l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ de la théorie de masse nulle.

Soit $\mathcal{H}_{\rm diff}$ l'algèbre de Hopf des coordonnées du groupe des difféomorphismes formels vérifiant (76). Prenons les générateurs a_n de $\mathcal{H}_{\rm diff}$ donnés par

$$\varphi(x) = x + \sum_{n\geqslant 2} a_n(\varphi)\, x^n. \tag{77}$$

Le coproduit dans $\mathcal{H}_{\rm diff}$ est défini par l'égalité

$$\langle \Delta a_n,\ \varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle = a_n(\varphi_2 \circ \varphi_1) \tag{78}$$

On utilise alors la formule (75) pour définir un homomorphisme d'algèbres

$$\Phi : \mathcal{H}_{\rm diff} \longrightarrow \mathcal{H} \tag{79}$$

de la manière suivante. On développe d'abord g_{eff} en série de puissances de g sous la forme

$$g_{\text{eff}} = g + \sum_{2}^{\infty} \alpha_n \, g^n \tag{80}$$

où tous les coefficients α_{2n} d'indice pair sont nuls et les coefficients α_{2n+1} sont des combinaisons linéaires finies de produits de graphes, de sorte que

$$\alpha_{2n+1} \in \mathcal{H} \qquad \forall\, n \geqslant 1. \tag{81}$$

L'on définit alors Φ par

$$\Phi(a_n) = \alpha_n. \tag{82}$$

C'est, par construction, un morphisme d'algèbres. Le résultat essentiel est que Φ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

Théorème 6.1 **([14])**

$$(\Phi \otimes \Phi)\, \Delta\, x = \Delta\, \Phi(x) \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}_{\text{diff}}.$$

Il en résulte, en transposant un homomorphisme de groupes,

$$\rho : G_c \longrightarrow G_2. \tag{83}$$

où G_2 est le groupe des caractères de $\mathcal{H}_{\text{diff}}$, *i.e.*, le groupe opposé du groupe des difféomorphismes formels. Cela donne, en particulier, une action formelle du groupe G_c sur la constante de couplage.

6.2. La décomposition de Birkhoff de la constante de couplage. — Nous montrons, en particulier, que l'image par ρ de $\beta = Y \operatorname{Res} \gamma$ est la fonction β de la constante de couplage g.

Nous obtenons ainsi un corollaire du théorème principal qui se formule sans faire intervenir ni le groupe G ni l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$.

Théorème 6.2 **([14])**. *Considérons la constante de couplage effective non-renormalisée $g_{\text{eff}}(\varepsilon)$ comme une série formelle en g et soit $g_{\text{eff}}(\varepsilon) = g_{\text{eff}_+}(\varepsilon)\,(g_{\text{eff}_-}(\varepsilon))^{-1}$ sa décomposition de Birkhoff (opposée) dans le groupe des difféomorphismes formels. Alors, le lacet $g_{\text{eff}_-}(\varepsilon)$ est la constante de couplage nue et $g_{\text{eff}_+}(0)$ la constante de couplage renormalisée.*

Comme la décomposition de Birkhoff d'un lacet à valeurs dans le groupe des difféomorphismes (formels) est évidemment reliée à la classification des fibrés (non-linéaires) holomorphes, ce résultat suggère qu'un tel fibré ayant pour base un voisinage de la dimension D de l'espace-temps et pour fibre les valeurs (complexifiées) des constantes de couplage devrait donner une interprétation entièrement géométrique de l'opération de renormalisation.

Il faut tout de même noter que la décomposition de Birkhoff a lieu ici relativement à un cercle infinitésimal autour de d et qu'il s'agit de difféomorphismes formels.

Les résultats ci-dessus montrent qu'au niveau des développements perturbatifs le procédé de renormalisation admet une interprétation géométrique simple grâce au groupe G et à la décomposition de Birkhoff. Le problème essentiel consiste à passer du développement perturbatif à la théorie non-perturbative, ce qui revient en termes de difféomorphismes à passer du développement de Taylor à la formule globale.

Il est très naturel de postuler que le passage de la théorie non-renormalisée à la théorie renormalisée dans le cadre non-perturbatif sera toujours donné par la décomposition de Birkhoff. Il est crucial pour appliquer cette idée de disposer de la décomposition de Birkhoff dans ces situations non-perturbatives, *i.e.,* en ce qui concerne les difféomorphismes pour des groupes de difféomorphismes dont le développement de Taylor vérifie des conditions de type Gevrey. Un résultat important dans cette direction a été récemment obtenu par F. Menous [**34**].

7. Le groupe de renormalisation et la théorie de Galois

Cette section consiste en la juxtaposition des quatre éléments d'un puzzle à la recherche d'une théorie de Galois satisfaisante aux places archimédiennes d'un corps de nombres. Le quatrième élément du puzzle est l'apparition dans ma collaboration récente avec M. Marcolli de la théorie de Galois motivique dans la reformulation de la renormalisation comme une correspondance de Riemann-Hilbert. Notre motivation était d'obtenir l'analogue du tore exponentiel dans la théorie développée par Jean-Pierre Ramis pour étendre la correspondance de Riemann-Hilbert au cadre irrégulier ([**33, 35**]).

7.1. Groupe de Weil. — La généralisation conceptuelle de la notion de corps de nombres est celle de corps global. Un corps k est *global* si c'est un sous-corps discret co-compact d'un anneau localement compact (non discret) semi-simple et commutatif A (*cf.* [**29**]). L'anneau topologique A est alors canoniquement associé à k et s'appelle l'anneau des Adèles de k ; on a

$$A = \prod_{\text{res}} k_v. \tag{84}$$

où le produit est le produit restreint des corps locaux k_v indéxés par les places de k. Les k_v sont les corps localement compacts obtenus comme complétions de k de même que l'on obtient les nombres réels en complétant les rationnels.

Quand la caractéristique de k est $p > 1$, *i.e.*, quand k est un corps de fonctions sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, on a

$$k \subset k_0 \subset k_{\text{ab}} \subset k_{\text{sep}} \subset \overline{k}, \tag{85}$$

où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k, k_{sep} la clôture séparable dans $\overline{k}$, k_{ab} l'extension abélienne maximale et k_0 l'extension obtenue en adjoignant à k les racines de l'unité d'ordre premier à p.

On définit le groupe de Weil W_k comme le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(k_{\mathrm{ab}} : k)$ formé par les automorphismes de $(k_{\mathrm{ab}} : k)$ qui induisent sur k_0 une puissance entière de l'automorphisme de « Frobenius » θ :

$$\theta(\mu) = \mu^q \qquad \forall\, \mu \text{ racine de l'unité d'ordre premier à } p.$$

Le résultat principal de la théorie du corps de classe global est l'existence d'un isomorphisme canonique

$$W_k \simeq C_k = GL_1(A)/GL_1(k),$$

de groupes localement compacts.

Quand k est de caractéristique nulle, *i.e.*, un corps de nombres, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Gal}(k_{\mathrm{ab}} : k) \simeq C_k/D_k$$

où D_k désigne la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe des classes d'idèles $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$; mais à cause des places archimédiennes de k, l'on n'a pas d'interprétation de C_k analogue au cas des corps de fonctions. Citons A. Weil [**37**] :

« La recherche d'une interprétation pour C_k si k est un corps de nombres, analogue en quelque manière à l'interprétation par un groupe de Galois quand k est un corps de fonctions, me semble constituer l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des nombres à l'heure actuelle : il se peut qu'une telle interprétation renferme la clé de l'hypothèse de Riemann... ».

Cela signifie qu'aux places archimédiennes (*i.e.*, aux complétions de k qui donnent soit les nombres réels soit les nombres complexes), il devrait y avoir un groupe continu de symétries secrètement présent.

7.2. Classification des facteurs. — Mon intérêt pour ce problème vient de mon travail sur la classification des facteurs qui indiquait clairement que l'on possédait là l'analogue de la théorie de Brauer qui est l'une des clés de la théorie du corps de classe local.

Les groupes de Galois sont par construction des limites projectives de groupes finis attachés à des extensions finies. Pour obtenir des groupes connexes il faut évidemment relaxer cette condition de finitude qui est la même que la restriction en théorie de Brauer aux algèbres simples centrales de dimension finie. Comme ce sont les places archimédiennes de k qui sont à l'origine de la composante connexe D_k, il est naturel de considérer la question préliminaire suivante :

« Existe-t-il une théorie de Brauer non-triviale d'algèbres simples centrales sur $\mathbb{C}$? »

J'ai montré dans [**7**] que la classification des facteurs *approximativement finis* sur $\mathbb{C}$ donnait une réponse satisfaisante à cette question. Ils sont classifiés par leur module

$$\mathrm{Mod}(M) \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*,$$

qui est un sous-groupe (virtuel) fermé de $\mathbb{R}_+^*$.

Ce groupe joue un rôle analogue dans le cas archimédien au module des algèbres simples centrales sur un corps local nonarchimédien. Dans ce dernier cas le module se définit très simplement par l'action du groupe multiplicatif d'une algèbre simple centrale sur la mesure de Haar du groupe additif. La définition de $\mathrm{Mod}(M)$ pour les facteurs est beaucoup plus élaborée, mais reste basée sur l'action du groupe $\mathbb{R}_+^*$ de changement d'échelle.

Pour poursuivre l'analogie avec la théorie de Brauer où le lien avec le groupe de Galois s'obtient par la construction d'algèbres simples centrales comme produits croisés d'un corps par un groupe d'automorphismes, le pas suivant consiste à trouver des exemples naturels de construction de facteurs comme produits croisés d'un corps K, extension transcendante de $\mathbb{C}$ par un groupe d'automorphismes. Dans nos recherches sur les variétés sphériques noncommutatives [**8**], avec M. Dubois-Violette, l'algèbre de Sklyanin ([**36**]) est apparue comme solution en dimension 3 du problème de classification formulé dans [**15**]. La représentation « régulière » de cette algèbre engendre une algèbre de von Neumann intégrale directe de facteurs approximativement finis de type II_1, tous isomorphes au facteur hyperfini R. Les homomorphismes correspondants de l'algèbre de Sklyanin ([**36**]) vers le facteur R se factorisent miraculeusement ([**9**]) à travers le produit croisé du corps K_q des fonctions elliptiques, où le module $q = e^{2\pi i\tau}$ est réel, par l'automorphisme de translation par un nombre réel (mais, en général, irrationnel). On obtient ainsi le facteur R comme produit croisé de K_q par un sous-groupe du groupe de Galois, en parfaite analogie avec la construction des algèbres simples centrales sur un corps local. Il reste à obtenir une construction semblable et naturelle du facteur R_∞ de type III_1. La théorie des algèbres de Hecke modulaires ébauchée dans ([**18**]) devrait y jouer un rôle important.

7.3. Les « constantes » en théorie des champs. — Il est sans doute prématuré d'essayer d'identifier le corps K correspondant, qui devrait jouer le rôle de l'extension non ramifiée maximale $\mathbb{C}_{\mathrm{nr}}$ de $\mathbb{C}$ et être doté d'une action naturelle du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$.

Le rôle du corps K en physique des hautes énergies devrait être relié à l'observation suivante concernant les « constantes » qui interviennent en théorie des champs. En fait, les calculs des physiciens regorgent d'exemples de « constantes » telles les constantes de couplage g des interactions (électromagnétiques, faibles et fortes) qui n'ont de « constantes » que le nom. Elles dépendent en réalité du niveau d'énergie μ auquel les expériences sont réalisées et sont donc des fonctions $g(\mu)$. Ainsi les physiciens des hautes énergies étendent implicitement le « corps des constantes » avec lequel ils

travaillent, passant du corps $\mathbb{C}$ des scalaires à un corps de fonctions $g(\mu)$. Le générateur du groupe de renormalisation est simplement $\mu\partial/\partial\mu$ comme dans l'équation (70).

L'on peut mettre l'exemple plus simple du corps K_q des fonctions elliptiques sous la même forme en passant aux fonctions loxodromiques, c'est-à-dire, en posant $\mu = e^{2\pi i z}$ de sorte que la première périodicité (en $z \to z+1$) est automatique alors que la deuxième s'écrit $g(q\,\mu) = g(\mu)$. Le groupe des automorphismes de la courbe elliptique est alors lui aussi engendré par $\mu\partial/\partial\mu$.

Les points fixes du groupe de renormalisation sont les scalaires ordinaires, mais il se pourrait que la physique quantique conspire pour nous empêcher d'espérer une théorie qui englobe toute la physique des particules et soit construite comme point fixe du groupe de renormalisation. Les interactions fortes sont asymptotiquement libres et l'on peut les analyser à très hautes énergies en utilisant les points fixes du groupe de renormalisation, mais la présence du secteur électrodynamique montre qu'il est vain de vouloir s'en tenir à de tels points fixes pour décrire une théorie qui incorpore l'ensemble des forces observées. Le problème est le même dans le domaine infrarouge où les rôles des interactions fortes et électrodynamiques sont inversés.

Il est bien connu des physiciens que le groupe de renormalisation joue le rôle d'un groupe d'ambiguïté ; l'on ne peut distinguer entre elles deux théories physiques qui appartiennent à la même orbite de ce groupe, ce qui nous ramène à Galois dont la « théorie de l'ambiguïté » allait bien au delà des équations algébriques.

7.4. Renormalisation et groupes de Galois motiviques. — Je terminerai cet article par un bref exposé de résultats récents obtenus en collaboration avec M. Marcolli ([**17**]) qui établissent enfin un lien précis entre renormalisation et théorie de Galois.

Nous montrons que les divergences de la théorie des champs codent, en fait, exactement l'action d'un *groupe de Galois motivique* explicite U^* sur l'ensemble des théories physiques. Le groupe de renormalisation apparaît comme un sous-groupe à un paramètre $\mathbb{G}_a \subset U^*$ du groupe de Galois U^*.

Notre point de départ est le Théorème 5.4 que nous améliorons en donnant la classification des familles de lacets $\gamma_\mu(d)$ vérifiant les conditions (65), (68) à valeurs dans un groupe pro-unipotent positivement gradué arbitraire G :

***Théorème 7.1* ([17]).** — *Soit $\gamma_\mu(z)$ une famille de lacets à valeurs dans G vérifiant les conditions* (65), (68). *Il existe alors un unique élément $\beta \in \mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie de G et un lacet $\gamma_{\rm reg}(z)$ régulier en $z=0$ tels que*

$$\gamma_\mu(z) = \mathrm{T}\mathbf{e}^{-\frac{1}{\mathbf{z}}\int_{\infty}^{-\mathbf{z}\log\mu}\theta_{-\mathbf{t}}(\beta)\,\mathbf{dt}}\;\theta_{z\log\mu}(\gamma_{\rm reg}(z)).$$

Pour tout $\beta \in \mathfrak{g}$ et tout lacet régulier $\gamma_{\rm reg}(z)$ la décomposition de Birkhoff du lacet $\gamma_\mu(z)$ est donnée par

$$\gamma_\mu^+(z) = \mathrm{T}\mathbf{e}^{-\frac{1}{\mathbf{z}}\int_{0}^{-\mathbf{z}\log\mu}\theta_{-\mathbf{t}}(\beta)\,\mathbf{dt}}\;\theta_{z\log\mu}(\gamma_{\rm reg}(z)),$$

$$\gamma_\mu^-(z) = \mathrm{T}\mathbf{e}^{-\frac{1}{\mathbf{z}}\int_{0}^{\infty}\theta_{-\mathbf{t}}(\beta)\,\mathbf{dt}}.$$

La notation

$$\mathrm{T}\mathbf{e}^{\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \alpha(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \int_{a \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant b} \alpha(s_1) \cdots \alpha(s_n) \prod ds_j,$$

désigne l'exponentielle ordonnée des physiciens qui est une notation commode pour la valeur en b de la solution A, $A(a) = 1$ de l'équation différentielle

$$dA(t) = A(t)\,\alpha(t)\,dt$$

à valeurs dans le groupe G et qui est, bien entendu, intimement reliée aux intégrales itérées.

Le pas suivant consiste à exhiber la correspondance de Riemann-Hilbert secrètement présente dans le théorème 7.1. Comme toute correspondance de Riemann-Hilbert elle relie des objets géométriques, qui dans notre cas sont les connexions plates équisingulières, aux représentations d'un groupe de « monodromie généralisée ». Notre modèle était le tore exponentiel de J.-P. Ramis dans la théorie locale des points singuliers irréguliers des équations différentielles.

Le procédé de régularisation dimensionnelle discuté en détails plus haut fournit, en fait, du fait de l'arbitraire dans la normalisation de l'intégrale en dimension complexe $d = D - z$, la donnée géométrique suivante :

– Un fibré principal B de groupe $\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^*$, de base un disque infinitésimal Δ centré en D.

– Une connexion plate ω à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, obtenue en différentiant la théorie des champs vue comme section du fibré $B \times G$ de base B.

La fibre $\pi^{-1}(d)$ du fibré B au dessus de $d \in \Delta$ est l'ensemble des normalisations possibles de l'intégration en dimension d (*cf.* (23)). La fibre spéciale $V = \pi^{-1}(D)$ joue un rôle particulier à cause des divergences de sorte que la connexion ω est singulière sur $V \subset B$.

En général, définissons l'*équivalence* de deux connexions singulières ω_j par l'existence d'une conjugaison régulière h entre elles,

$$\omega_2 = h^{-1}\,dh + h^{-1}\omega_1\,h.$$

La notion géométrique qui abstrait les propriétés (65), (68) est la suivante :

Definition 7.2. — Une connexion plate ω à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie sur $B^* = B \backslash V$ est *équisingulière* si elle est invariante par $\mathbb{G}_m$ et si la classe d'équivalence de sa restriction à une section $\sigma : \Delta \mapsto B$ ne dépend que de $\sigma(0)$.

Notre résultat principal est la classification complète des connexions équisingulières à équivalence près. En fait, nous construisons une catégorie tannakienne ayant pour objets les *fibrés plats équisinguliers* lesquels sont des couples (E, ∇) où E est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué et ∇ une (classe de) connexion équisingulière sur le fibré équivariant $B \times E$. Notre résultat s'énonce alors ainsi :

***Théorème 7.3* ([17]).** — *La catégorie des fibrés plats équisinguliers est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie d'un (unique) groupe algébrique affine U^*. Ce groupe est le produit semi-direct par $\mathbb{G}_m$ (agissant par la graduation) du groupe pro-unipotent U dont l'algèbre de Lie*

$$\mathrm{Lie}(U) = \mathcal{F}(1, 2, 3, \dots),$$

est librement engendrée par un générateur e_{-n} de degré n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Le groupe de renormalisation est un sous-groupe canonique $\mathbf{rg} : \mathbb{G}_a \mapsto U$ et nous construisons un repère singulier universel sur un fibré principal de base B et de groupe U dans lequel les divergences de la théorie des champs disparaissent.

Nous développons de plus l'analogie entre la catégorie des fibrés plats équisinguliers et celle des motifs de Tate mixtes. On sait, en particulier, que le groupe de Galois motivique $G_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{O})$ ([**20**], [**26**]) du schéma $S_4 = \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ associé aux racines quatrièmes de l'unité (de sorte que $\mathcal{O}$ est l'anneau $\mathbb{Z}[i][\frac{1}{2}]$) est (non-canoniquement) isomorphe au groupe U^*.

L'ensemble de ces résultats montre que les divergences de la théorie des champs indiquent, en fait, la présence de symétries de nature « galoisienne » et, bien loin d'être des pathologies à éliminer, elles révèlent sans doute la subtilité de la géométrie qui gouverne l'espace-temps, une fois prise en compte la régularisation dimensionnelle.

Références

[1] A. Beauville – « Monodromie des systèmes différenticls linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann », in *Sém. Bourbaki, Vol. 1992/1993*, Astérisque, vol. 216, Société Mathématique de France, Paris, 1993, Exp. n° 765, p. 103–119.

[2] N.N. Bogoliubov & O. Parasiuk – *Acta Math.* **97** (1957), p. 227–266, K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2** (1966), p. 301–326.

[3] A. Bolibruch – « Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann-Hilbert problem », in *Global analysis –studies and applications, V*, Lect. Notes in Math., vol. 1520, Springer, Berlin, 1992, p. 139–155.

[4] P. Cartier – « A mad day's work : from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2001), no. 4, p. 389–408.

[5] J. Collins – *Renormalization*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1984.

[6] A. Connes – « Symétries : de Galois au monde quantique », volume en l'honneur de Louis Michel (à paraître).

[7] ———, « Noncommutative Geometry and the Riemann Zeta Function », in *Mathematics : Frontiers and perspectives*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, p. 35–54.

[8] A. Connes & M. Dubois-Violette – « Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. Spherical manifolds and related examples », *Comm. Math. Phys.* **230** (2002), no. 3, p. 539–579, arXiv : `math.QA/0107070`.

[9] ———, « Moduli Space and Structure of NonCommutative 3-Spheres », *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), no. 1–2, p. 91–121, arXiv : `math.QA/0308275`.

[10] A. CONNES & D. KREIMER – « Hopf algebras, renormalization and Noncommutative geometry », *Comm. Math. Phys.* **199** (1998), p. 203–242.

[11] ———, « Lessons from quantum field theory : Hopf algebras and spacetime geometries », *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), no. 85, arXiv : `hep-th/9904044`.

[12] ———, « Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem », *J. High Energy Phys.* **9** (1999), no. 24.

[13] ———, « Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem. I », *Comm. Math. Phys.* **210** (2000).

[14] ———, « Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II, the β function, diffeomorphisms and the renormalization group », *Comm. Math. Phys.* (2001), arXiv : `hep-th/0003188`.

[15] A. CONNES & G. LANDI – « Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations », arXiv : `math.QA/0011194`.

[16] A. CONNES & M. MARCOLLI – « From Physics to Number Theory through Noncommutative Geometry », à paraître dans les actes « Les Houches 2003 ».

[17] ———, « Renormalization and Motivic Galois Theory », à paraître dans IMRN, arXiv : `math.NT/0409306`.

[18] A. CONNES & H. MOSCOVICI – « Modular Hecke Algebras and their Hopf Symmetry », arXiv : `math.QA/0301089`.

[19] ———, « Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem », *Comm. Math. Phys.* **198** (1998), p. 199–246.

[20] P. DELIGNE & A.B. GONCHAROV – « Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte », arXiv : `math.NT/0302267`, 2003.

[21] M. DRESDEN – « Renormalization in historical perspective – The first stage », in *Renormalization* (L. Brown, éd.), Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.

[22] J. FELDMAN, J. MAGNEN, V. RIVASSEAU & R. SENEOR – « Massive Gross-Neveu model : a rigorous perturbative construction », *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985).

[23] E. GALOIS – *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris, London, 1962.

[24] K. GAWEDZKI & A. KUPIAINEN – « Exact renormalization of the Gross-Neveu model of quantum fields », *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985).

[25] J. GLIMM & A. JAFFE – *Quantum Physics*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1987.

[26] A.B. GONCHAROV – « Multiple polylogarithms and mixed Tate motives », arXiv : `math.AG/0103059`, 2001.

[27] G. GREEN – « Researches on the vibration of Pendulums in Fluid Media », *Royal Society of Edinburgh Transactions* (1836), p. 315–324.

[28] G.'T. HOOFT – *Nuclear Phys. B* **61** (1973), no. 455.

[29] K. IWASAWA – « On the rings of valuation vectors », *Ann. of Math. (2)* **57** (1953), p. 331–356.

[30] T. KRAJEWSKI & R. WULKENHAAR – *European J. Phys.* **C7** (1999), p. 697–708, arXiv : `hep-th/9805098`.

[31] D. KREIMER – *Adv. Theor. Math. Phys.* **2.2** (1998), no. 303, arXiv : `q-alg/9707029`.

[32] I. LAPPO-DANILEVSKII – *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, Chelsea, 1953.

[33] J. MARTINET & J.-P. RAMIS – « Elementary acceleration and multisummability », *Ann. Inst. H. Poincaré* **54** (1991), p. 331–401.

[34] F. MENOUS – « The Birkhoff decomposition in the group of formal diffeomorphisms », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* (2004).

[35] J.-P. RAMIS – *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panoramas & Synthèses, Société Mathématique de France, Paris, 1993.

[36] E.K. SKLYANIN – « Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation », *Functional Anal. Appl.* **16** (1982), p. 263–270.

[37] A. WEIL – « Sur la théorie du corps de classe », *J. Math. Soc. Japan* **3** (1951).

A. CONNES, Collège de France, 11 place M. Berthelot, 75005 Paris et IHES, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette (France) • *E-mail :* alain@connes.org