

LA CONJECTURE DE GREEN GÉNÉRIQUE
[d'après C. Voisin]

par **Arnaud BEAUVILLE**

1. ÉNONCÉ DE LA CONJECTURE

La conjecture de Green est une vaste généralisation de deux résultats classiques de la théorie des courbes algébriques. Soit C une courbe complexe⁽¹⁾ projective et lisse (connexe), de genre $g \geq 2$. Soit K_C le fibré canonique (= fibré cotangent) de C . On associe à C son *anneau canonique*

$$R := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, K_C^n).$$

Notons S l'algèbre symétrique $S^\bullet H^0(C, K_C)$; c'est un anneau de polynômes en g indéterminées.

THÉORÈME 1 (M. Noether [N]). — *L'homomorphisme naturel $S \rightarrow R$ est surjectif, sauf si C est hyperelliptique.*

Supposons désormais que C n'est pas hyperelliptique. À l'homomorphisme $S \rightarrow R$ correspond un plongement de C dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{g-1} := \mathbb{P}(H^0(C, K_C)^*)$, dit *plongement canonique*, qui joue un rôle fondamental dans l'étude de la géométrie de C . L'étape suivante est d'essayer de comprendre les équations de C dans \mathbb{P}^{g-1} , c'est-à-dire les éléments de S qui s'annulent sur l'image de C ; ils forment un idéal gradué I_C de S , qui est le noyau de l'homomorphisme $S \rightarrow R$.

THÉORÈME 2 (Petri [P]). — *L'idéal gradué I_C est engendré par ses éléments de degré 2, sauf si C est trigonale⁽²⁾ ou isomorphe à une courbe plane de degré 5.*

⁽¹⁾Les théorèmes 1 et 2 ci-dessous sont vrais en toute caractéristique [S-D]. Ce n'est pas le cas de la conjecture de Green d'après [S1].

⁽²⁾La courbe C est dite trigonale si elle admet un morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré 3.

Chacun de ces deux théorèmes décrit la structure du S -module R en termes de l'existence de certains systèmes linéaires sur la courbe C . Par exemple, le théorème de Petri se traduit (sauf pour les exceptions mentionnées dans l'énoncé) par une suite exacte

$$S(-2)^{b_1} \longrightarrow S \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

où l'on note comme d'habitude $S(-p)$ le S -module S muni de la graduation décalée de p crans vers la droite : $S(-p)_i = S_{i-p}$.

Cette présentation est un (petit) bout de la *résolution minimale* P_\bullet du S -module R , dont on sait depuis Hilbert qu'elle est de la forme

$$0 \longrightarrow P_{g-2} \longrightarrow P_{g-3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

où chaque P_i est une somme directe de modules $S(-p)$, et où les différentielles sont données par des matrices à coefficients homogènes de degré ≥ 1 . La résolution minimale est unique à isomorphisme (non unique) près⁽³⁾.

La dualité de Serre entraîne que le complexe $\mathrm{Hom}_S(P_\bullet, S(-g-1))$, décalé de $(g-2)$ crans vers la gauche, définit encore une résolution minimale de R , donc est isomorphe à P_\bullet . Supposons C non hyperelliptique ; on a alors $P_0 = S$ (Th. 1), donc $P_{g-2} = S(-g-1)$, et on s'aperçoit qu'il reste très peu de degrés possibles pour les termes P_i intermédiaires. De manière précise, un argument élémentaire montre qu'il existe un entier $c \geq 1$ tel que P_\bullet soit de la forme :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S(-g-1) \rightarrow S(-g+1)^{b_1} \rightarrow S(-g+2)^{b_2} \rightarrow \cdots \rightarrow S(-g+c-1)^{b_{c-1}} \rightarrow \\ S(-g+c+1)^{b'_c} \oplus S(-g+c)^{b''_c} \rightarrow \cdots \rightarrow S(-c-2)^{b'_c} \oplus S(-c-1)^{b''_c} \rightarrow \\ S(-c)^{b_{c-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow S(-3)^{b_2} \rightarrow S(-2)^{b_1} \rightarrow S, \end{aligned}$$

où les entiers b_i, b'_j, b''_k sont strictement positifs.

La structure de la résolution minimale est donc essentiellement⁽⁴⁾ déterminée par l'entier c .

L'autre volet des théorèmes 1 et 2 porte sur la présence de systèmes linéaires spéciaux sur C . Si L est un fibré en droites sur C , de degré d , on note $h^i(L)$ la dimension de $H^i(C, L)$ ($i = 0, 1$), et l'on pose $\mathrm{Cliff}(L) := g + 1 - (h^0(L) + h^1(L)) = d - 2h^0(L) + 2$; cet invariant vérifie la relation agréable $\mathrm{Cliff}(L) = \mathrm{Cliff}(K_C \otimes L^{-1})$. On définit alors l'*indice de Clifford* $\mathrm{Cliff}(C)$ de C comme le minimum des entiers $\mathrm{Cliff}(L)$ pour tous les fibrés en droites L sur C avec $h^0(L) \geq 2$ et $0 \leq d \leq g-1$. Un théorème classique de Clifford affirme que cet indice est toujours positif, et qu'il est nul si et seulement si C est hyperelliptique ; de plus les courbes d'indice 1 sont exactement

⁽³⁾Dans le langage des faisceaux, il revient au même de considérer une résolution \mathcal{P}_\bullet du $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}$ -module \mathcal{O}_C , où chaque \mathcal{P}_i est une somme directe de faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-p)$, et où les différentielles sont données par des matrices à coefficients homogènes de degré ≥ 1 .

⁽⁴⁾Les entiers b_i ($i \leq c-1$) ainsi que b'_c sont déterminés par c et g , mais pas b'_i ni b''_i pour $i > c$: le premier cas où l'on trouve deux valeurs distinctes est $g = 7, c = 3$ [S1].

celles qui apparaissent dans le théorème 2. Les théorèmes 1 et 2 admettent donc la reformulation suivante :

$$\text{Cliff}(C) \geq 1 \iff c \geq 1, \quad \text{Cliff}(C) \geq 2 \iff c \geq 2,$$

ce qui conduit naturellement à la

CONJECTURE DE GREEN ([G]). — $c = \text{Cliff}(C)$.

2. RÉSULTATS

Dans l'appendice de [G], Green et Lazarsfeld prouvent l'inégalité $c \leq \text{Cliff}(C)$, à l'aide des propriétés de la cohomologie de Koszul établies par Green dans le même article (voir § 3). Il s'agit donc de démontrer l'inégalité opposée, c'est-à-dire, vu ce qui précède, que la composante $(P_p)_{p+1}$ de degré $p + 1$ de P_p , avec $p = g - 1 - \text{Cliff}(C)$, est nulle.

Cette conjecture remarquable a vite attiré l'attention des géomètres algébristes. Dans [S1] Schreyer la vérifie pour $g \leq 8$; il observe aussi qu'elle est fautive en caractéristique 2, déjà pour les courbes générales de genre 7. Le « cas suivant » de la conjecture, $\text{Cliff}(C) \geq 3 \iff c \geq 3$, a été démontré (indépendamment) par Voisin [V1] (pour $g \geq 11$), puis Schreyer [S3] en général. Le cas des courbes planes est traité dans [Lo]. Divers cas particuliers ou reformulations de la conjecture apparaissent dans [E], [P-R], [S2], [T]...

Claire Voisin vient de résoudre le cas particulièrement intéressant des courbes *générales* de genre g . Elles vérifient $\text{Cliff}(C) = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ (voir l'Appendice), de sorte que l'énoncé prend une forme particulièrement simple (*conjecture de Green générique*) :

THÉORÈME 3 ([V2], [V3]). — *Posons $c = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$. Pour une courbe de genre g générale, la résolution minimale de R est de la forme*

$$0 \rightarrow S(-g-1) \rightarrow S(-g+1)^{b_1} \rightarrow \dots \rightarrow S(-c-2)^{b_c} \\ \rightarrow S(-c)^{b_{c-1}} \rightarrow \dots \rightarrow S(-2)^{b_1} \rightarrow S$$

si g est impair, et

$$0 \rightarrow S(-g-1) \rightarrow S(-g+1)^{b_1} \rightarrow \dots \rightarrow S(-c-3)^{b_{c-1}} \\ \rightarrow S(-c-2)^{b_{c/2}} \oplus S(-c-1)^{b_{c/2}} \rightarrow S(-c)^{b_c-1} \rightarrow \dots \rightarrow S(-2)^{b_1} \rightarrow S$$

si g est pair.

En fait la méthode de démonstration donne un résultat plus fort. Pour des entiers g et p fixés, considérons l'ensemble des courbes de genre g *p-gonales*, c'est-à-dire admettant un morphisme de degré p sur \mathbb{P}^1 . Elles sont paramétrées par un schéma irréductible, le schéma de Hurwitz. Nous verrons au § 6 qu'une variante de la démonstration du théorème 3 dans le cas g pair entraîne la conjecture de Green pour les courbes *p-gonales* assez générales, pour $p \geq \frac{g}{3} + 1$. Or il se trouve que M. Teixidor

a obtenu (par une méthode très différente) le résultat correspondant pour $p \leq \frac{g}{3} + 2$ [T]. Ainsi :

THÉORÈME 4 ([V2], [T]). — *Une courbe p -gonale générale vérifie la conjecture de Green.*

Plus précisément, on a $c = \text{Cliff}(C) = p - 2$ pour $p \leq [\frac{g+3}{2}]$. L'intérêt de cet énoncé vient de ce que pour presque toutes⁽⁵⁾ les courbes C , l'indice de Clifford est égal à $\gamma - 2$, où γ (la « gonalité ») est le plus petit entier tel que C soit γ -gonale.

Signalons que le Th. 3 pour g impair a la conséquence suivante, qui avait été observée par Hirschowitz et Ramanan avant la démonstration de [V3], et qui apporte un peu plus d'eau au moulin de la conjecture de Green :

COROLLAIRE ([H-R]). — *Supposons $g = 2k - 1$. Dans l'espace des modules des courbes de genre g , le lieu des courbes qui n'ont pas la résolution minimale générique coïncide avec celui des courbes k -gonales.*

3. COHOMOLOGIE DE KOSZUL

Considérons plus généralement une variété projective X , munie d'un faisceau ample L . Notons

$$V = H^0(X, L) \quad S = S \bullet V \quad R = \bigoplus_n H^0(X, L^n);$$

on s'intéresse à la résolution graduée libre minimale P_\bullet du S -module gradué R . Considérons \mathbb{C} comme un S -module via l'homomorphisme d'augmentation $S \rightarrow \mathbb{C}$. Le S -module gradué $\text{Tor}_i^S(\mathbb{C}, R)$ se calcule en substituant à R la résolution P_\bullet ; comme celle-ci est minimale, le complexe $\mathbb{C} \otimes_S P_\bullet$ est à différentielle nulle, et l'on trouve donc des isomorphismes de S -modules gradués $\text{Tor}_i^S(\mathbb{C}, R) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \otimes_S P_i$. Mais on peut aussi calculer ce module en utilisant une résolution libre graduée de \mathbb{C} . Il en existe une bien connue, le complexe de Koszul

$$0 \longrightarrow \Lambda^n V \otimes_{\mathbb{C}} S(-n) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^2 V \otimes_{\mathbb{C}} S(-2) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{C}} S(-1) \longrightarrow S$$

(avec $n = \dim V$). La différentielle $d_p : \Lambda^p V \otimes_{\mathbb{C}} S(-p) \rightarrow \Lambda^{p-1} V \otimes_{\mathbb{C}} S(-p+1)$ applique $(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \otimes P$ sur $\sum_i (-1)^{i+1} (v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_p) \otimes P.v_i$.

Ainsi la composante de degré $p + q$ du S -module gradué $\text{Tor}_p^S(\mathbb{C}, R)$ s'identifie à l'espace d'homologie $\mathcal{K}_{p,q}(X, L)$ du complexe

$$\Lambda^{p+1} V \otimes R_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1}} \Lambda^p V \otimes R_q \xrightarrow{d_p} \Lambda^{p-1} V \otimes R_{q+1}.$$

⁽⁵⁾Au moins conjecturalement – voir l'Appendice pour une formulation précise.

Les espaces $\mathcal{K}_{p,q}(X, L)$ (« cohomologie de Koszul ») possèdent un grand nombre de propriétés intéressantes, étudiées notamment dans [G]. L'une d'elles sera fondamentale pour ce qui suit : supposons pour simplifier L très ample, de sorte que X est plongée dans un espace projectif de façon que $L = \mathcal{O}_X(1)$. Soit Y une section hyperplane⁽⁶⁾ de X , définie par une équation $\ell = 0$ (avec $\ell \in H^0(X, L)$). Considérons les anneaux $S_Y = S \bullet H^0(Y, L|_Y)$ et $R_Y = \oplus_n H^0(Y, L^n|_Y)$. Faisons en outre l'hypothèse $H^1(X, L^i) = 0$ pour tout $i \geq 0$; elle garantit que S_Y s'identifie à $S/(\ell)$ et R_Y à $R/(\ell)$. Si P_\bullet est une résolution minimale du S -module R , alors $P_\bullet/(\ell P_\bullet)$ est une résolution minimale du S_Y -module R_Y . On en déduit un *isomorphisme canonique* $\mathcal{K}_{p,q}(X, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{p,q}(Y, L|_Y)$ (« théorème de Lefschetz »).

Revenons à notre courbe C . D'après le début du §2, la conjecture de Green se traduit par l'annulation de $\mathcal{K}_{p,1}(C, K_C)$ pour $p = g - 1 - \text{Cliff}(C)$, ou encore par l'exactitude de la suite

$$\begin{aligned} \Lambda^{p+1} H^0(C, K_C) &\xrightarrow{d_{p+1}} \Lambda^p H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C) \\ &\xrightarrow{d_p} \Lambda^{p-1} H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C^2). \end{aligned}$$

Pour une courbe C générale de genre g , l'indice de Clifford vaut $[\frac{g-1}{2}]$, et il s'agit donc de prouver l'annulation de $\mathcal{K}_{k,1}(C, K_C)$ avec $k = [\frac{g}{2}]$. Il suffit de l'obtenir pour une courbe de genre g ; C. Voisin utilise des courbes situées sur des surfaces très particulières, les surfaces K3.

Rappelons que les surfaces K3 sont, par définition, les surfaces (lisses, compactes) simplement connexes à fibré canonique trivial. Celles qui nous intéressent ici sont les surfaces K3 X polarisées de genre g , c'est-à-dire munies d'un fibré en droites très ample L de carré $2g - 2$; on supposera de plus que la classe de L dans le groupe de Picard $\text{Pic}(X)$ n'est divisible par aucun entier ≥ 2 . Les sections globales de L définissent un plongement de X dans \mathbb{P}^g , dans lequel les sections hyperplanes lisses de X sont des courbes de genre g , plongées dans \mathbb{P}^{g-1} par le plongement canonique. Pour chaque entier $g \geq 3$, les surfaces K3 polarisées de genre g forment une famille irréductible; une surface assez générale⁽⁷⁾ dans cette famille vérifie $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}[L]$.

Les sections hyperplanes d'une telle surface X ne sont pas génériques pour $g \geq 12$, mais elles tendent à se comporter comme la courbe générique, en particulier du point de vue de la théorie de Brill-Noether [L] : par exemple leur indice de Clifford est l'indice générique $[\frac{g-1}{2}]$. Il est donc tout à fait naturel d'essayer de prouver l'annulation de $\mathcal{K}_{k,1}(C, K_C)$, avec $k = [\frac{g}{2}]$, pour ces courbes. D'après le « théorème de Lefschetz » pour la cohomologie de Koszul, elle est équivalente à l'annulation de $\mathcal{K}_{k,1}(X, L)$. La courbe C va désormais disparaître au profit de la surface K3 X .

⁽⁶⁾Cela signifiera ici qu'aucune composante de X n'est contenue dans l'hyperplan $\ell = 0$.

⁽⁷⁾ C est-à-dire située en dehors d'une réunion dénombrable d'hypersurfaces dans l'espace des paramètres.

4. LE CAS DE GENRE PAIR : STRATÉGIE DE LA PREUVE

La première idée force de la démonstration est l'interprétation de $\mathcal{K}_{p,1}(X, L)$ en termes du schéma de Hilbert de X . Si X est une variété projective et d un entier, le schéma de Hilbert X_d (noté plutôt d'habitude $X^{[d]}$ ou $\text{Hilb}^d(X)$) paramètre les sous-schémas finis de longueur d de X . Rappelons qu'un tel sous-schéma Z consiste en la donnée de points x_1, \dots, x_m de X et en chacun de ces points d'un idéal \mathcal{I}_{x_i} de l'anneau local \mathcal{O}_{x_i} , de façon que $\sum_i \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{x_i}/\mathcal{I}_{x_i}) = d$. En associant à Z l'ensemble $\{x_1, \dots, x_m\}$, chaque x_i étant compté avec sa multiplicité $\dim(\mathcal{O}_{x_i}/\mathcal{I}_{x_i})$, on obtient un morphisme birationnel ε de X_d sur la puissance symétrique d -ième $S^d X$. Lorsque X est une *surface*, X_d est lisse et irréductible, de sorte que ε fournit une résolution des singularités de $S^d X$. Nous nous bornerons à ce cas dans la suite⁽⁸⁾.

Soit I_d la sous-variété de $X \times X_d$ formée des couples (x, Z) tels que x soit un point de Z . C'est une variété normale, munie de projections :

$$\begin{array}{ccc} & I_d & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ X & & X_d; \end{array}$$

la fibre de q en un point Z de X_d s'identifie au sous-schéma Z de X .

On associe à tout fibré en droites L sur X le fibré vectoriel $\mathcal{E}_L := q_*(p^*L)$ sur X_d , de rang d ; sa fibre en un point Z de X_d s'identifie à $H^0(Z, L|_Z)$. On pose $L_d := \det \mathcal{E}_L$. Une analyse précise du fibré en droites q^*L_d conduit alors au résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *L'espace $\mathcal{K}_{d-1,1}(X, L)$ s'identifie au conoyau de l'homomorphisme $q^* : H^0(X_d, L_d) \rightarrow H^0(I_d, q^*L_d)$.*

La démonstration sera esquissée au §5. Comme expliqué au §3, le théorème 3 pour g pair résultera de :

PROPOSITION 2. — *Soit X une surface K3 dont le groupe de Picard est engendré par un fibré ample L , avec $L^2 = 2g - 2$ et $g = 2d - 2$. L'homomorphisme $q^* : H^0(X_d, L_d) \rightarrow H^0(I_d, q^*L_d)$ est surjectif.*

Comme le morphisme q est fini et plat, on dispose d'un homomorphisme dans l'autre sens $q_* : H^0(I_d, q^*L_d) \rightarrow H^0(X_d, L_d)$, qui vérifie $q_* \circ q^* = d$. La surjectivité de q^* est donc équivalente à l'injectivité de q_* .

⁽⁸⁾La Prop. 1 ci-dessous s'étend en toute dimension à condition de se limiter aux sous-schémas finis *curvilignes*, c'est-à-dire contenus dans une courbe lisse.

Le cœur de la démonstration consiste alors à construire une variété Z , munie d'un morphisme $j : Z \rightarrow X_d$, telle que le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{j}} & I_d \\ q_Z \downarrow & & \downarrow q \\ Z & \xrightarrow{j} & X_d \end{array}$$

possède les deux propriétés suivantes :

- (i) l'homomorphisme $\tilde{j}^* : H^0(I_d, q^* L_d) \rightarrow H^0(\tilde{Z}, \tilde{j}^* q^* L_d)$ est injectif ;
- (ii) l'homomorphisme $(q_Z)_* : H^0(\tilde{Z}, q_Z^*(j^* L_d)) \rightarrow H^0(Z, j^* L_d)$ est injectif.

Au vu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(\tilde{Z}, \tilde{j}^* q^* L_d) & \xleftarrow{\tilde{j}^*} & H^0(I_d, q^* L_d) \\ (q_Z)_* \downarrow & & \downarrow q_* \\ H^0(Z, j^* L_d) & \xleftarrow{j^*} & H^0(X_d, L_d) \end{array}$$

on en déduit aussitôt l'injectivité de q_* , et donc la proposition 2.

La construction de Z repose sur l'existence d'un fibré vectoriel E de rang 2 remarquable sur X , introduit par Lazarsfeld dans [L]. C'est l'unique fibré de rang 2 stable sur X de déterminant L et seconde classe de Chern $c_2(E) = d$; il vérifie $\dim H^0(X, E) = d + 1$. En associant à une section s de E son schéma des zéros $Z(s)$, on définit un morphisme $\mathbb{P}(H^0(X, E)) \rightarrow X_d$ (qui est d'ailleurs un plongement). Notons W l'image réciproque de $\mathbb{P}(H^0(X, E))$ dans I_d . Elle est formée des couples (s, x) dans $\mathbb{P}(H^0(X, E)) \times X$ tels que $s(x) = 0$. Pour (s, x) dans un ouvert convenable W° de W , le schéma résiduel $Z(s) - x$ est bien défini. Considérons l'application rationnelle $j_0 : X \times W^\circ \dashrightarrow X_d$ qui associe à $(y, (s, x))$ le schéma $(Z(s) - x) \cup y$. En éclatant dans $X \times W$ le lieu des $(y, (s, x))$ tels que $y \in Z(s) - x$ et en restreignant à un gros ouvert, on obtient le morphisme $j : Z \rightarrow X_d$ cherché.

Le cœur de la démonstration consiste alors à vérifier les propriétés (i) et (ii) ci-dessus. Cette vérification prend 30 pages très denses de l'article [V2], qu'il n'est pas question de reproduire ici. J'essaierai d'en indiquer quelques étapes au paragraphe suivant.

5. LE CAS DE GENRE PAIR : QUELQUES DÉTAILS

a) *Démonstration de la Proposition 1.* — Suivant [V2], nous dirons qu'un ouvert V° d'une variété normale V est *gros* si le fermé complémentaire est de codimension ≥ 2 .

Si L est un fibré sur V , l'application de restriction $H^0(V, L) \rightarrow H^0(V^\circ, L)$ est alors un isomorphisme.

La première étape est le calcul de $H^0(X_d, L_d)$. Les homomorphismes de restriction $H^0(X, L) \rightarrow H^0(Z, L|_Z)$, pour $Z \in X_d$, définissent une flèche $H^0(X, L) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_d} \rightarrow \mathcal{E}_L$, d'où en passant aux Λ^d un homomorphisme $\Lambda^d H^0(X, L) \rightarrow H^0(X_d, L_d)$, qui est en fait un *isomorphisme* : on le voit en remplaçant X_d par le gros ouvert des sous-schémas ayant au plus un point double, et en écrivant ce dernier comme quotient d'un gros ouvert de X^d éclaté le long des diagonales $x_i = x_j$.

On va désormais remplacer X_d par le gros ouvert des sous-schémas *curvilignes*, c'est-à-dire contenus dans une courbe lisse – et I_d par l'ouvert des couples (x, Z) où Z est curviligne. Pour un tel couple le schéma résiduel $Z - x$ est bien défini ; on dispose donc d'un morphisme

$$\tau : I_d \longrightarrow X \times X_{d-1} \quad \text{défini par} \quad \tau(x, Z) = (x, Z - x).$$

C'est un isomorphisme sur l'ouvert U de I_d formé des couples (x, Z) pour lesquels x est un point simple de Z ; il contracte le diviseur $D := I_d - U$ sur la variété d'incidence $I_{d-1} \subset X \times X_{d-1}$.

On déduit facilement de la définition de L_d un isomorphisme

$$(*) \quad q^* L_d \cong \tau^*(L \boxtimes L_{d-1})(-D),$$

d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(I_d, q^* L_d) \longrightarrow H^0(X \times X_{d-1}, L \boxtimes L_{d-1}) \longrightarrow H^0(I_{d-1}, (L \boxtimes L_{d-1})|_{I_{d-1}}).$$

Notons $\tau' : I_{d-1} \rightarrow X \times X_{d-2}$ l'application correspondant à τ , et D' le diviseur de I_{d-1} contracté par τ' . Appliquant de nouveau $(*)$ on trouve un isomorphisme

$$(L \boxtimes L_{d-1})|_{I_{d-1}} \cong \tau'^*(L^2 \boxtimes L_{d-2})(-D'),$$

d'où une injection de $H^0(I_{d-1}, (L \boxtimes L_{d-1})|_{I_{d-1}})$ dans $H^0(X, L^2) \otimes H^0(X_{d-2}, L_{d-2})$.

On a finalement une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(I_d, q^* L_d) \longrightarrow H^0(X, L) \otimes H^0(X_{d-1}, L_{d-1}) \xrightarrow{\beta} H^0(X, L^2) \otimes H^0(X_{d-2}, L_{d-2}),$$

de sorte que le conoyau de $q^* : H^0(X_d, L_d) \rightarrow H^0(I_d, q^* L_d)$ s'identifie à l'homologie d'un complexe

$$H^0(X_d, L_d) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, L) \otimes H^0(X_{d-1}, L_{d-1}) \xrightarrow{\beta} H^0(X, L^2) \otimes H^0(X_{d-2}, L_{d-2});$$

on vérifie que ce complexe s'identifie via les isomorphismes $\Lambda^p H^0(X, L) \xrightarrow{\sim} H^0(X_p, L_p)$ au complexe de Koszul

$$\Lambda^d H^0(X, L) \xrightarrow{d_d} H^0(X, L) \otimes \Lambda^{d-1} H^0(X, L) \xrightarrow{d_{d-1}} H^0(X, L^2) \otimes \Lambda^{d-2} H^0(X, L),$$

d'où la Proposition 1.

b) *Démonstration de la Proposition 2 : propriété (i).* — Dans la suite de ce paragraphe il est commode de poser $k = d - 1$ (de sorte qu'on a $g = 2k$). Notons \mathbb{P} le gros ouvert de $\mathbb{P}(H^0(X, E))$ formé des sections dont le schéma des zéros est curviligne. Reprenons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & I_{k+1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P} & \longrightarrow & X_{k+1}; \end{array}$$

soit $\psi : W \rightarrow X_k$ le morphisme $(\sigma, x) \mapsto Z(\sigma) - x$. En explicitant la définition de Z on se ramène facilement à prouver l'injectivité de l'application

$$\psi^* : H^0(X_k, L_k) \longrightarrow H^0(W, \psi^* L_k).$$

Le point clé pour cela est la construction, à partir d'une étude fine du fibré de Lazarsfeld E , d'un isomorphisme canonique $\Lambda^k H^0(X, L) \xrightarrow{\sim} S^k H^0(X, E)^*$. D'autre part on montre que le fibré $\psi^* L_k$ est isomorphe à $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$, d'où un homomorphisme injectif $S^k H^0(X, E)^* \hookrightarrow H^0(W, \psi^* L_k)$. On conclut en vérifiant que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k H^0(X, L) & \longrightarrow & S^k H^0(X, E)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X_k, L_k) & \xrightarrow{\psi^*} & H^0(W, \psi^* L_k) \end{array}$$

est commutatif à un scalaire près.

c) *Démonstration de la propriété (ii).* — Notons \widetilde{W} le produit fibré $W \times_{X_{k+1}} I_{k+1}$, de sorte qu'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{W} & \longrightarrow & I_k \\ q_W \downarrow & & \downarrow q \\ W & \longrightarrow & X_k. \end{array}$$

Après quelques péripéties, on se ramène à prouver la surjectivité de l'homomorphisme $q_W^* : H^0(W, \psi^* L_k) \rightarrow H^0(\widetilde{W}, q_W^* \psi^* L_k)$. Rappelons qu'on a $\psi^* L_k \cong \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$. Notons r l'application composée $\widetilde{W} \rightarrow W \rightarrow \mathbb{P}$. En fait Voisin prouve un résultat plus fort, à savoir :

- *L'homomorphisme $r^* : H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) \rightarrow H^0(\widetilde{W}, r^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k))$ est surjectif.*

La démonstration de ce résultat occupe 16 pages de [V2] et je ne peux faire mieux qu'y renvoyer le lecteur. Disons simplement qu'on réalise \widetilde{W} comme un sous-schéma de $B_{\Delta}(S \times S) \times \mathbb{P}$, où $B_{\Delta}(S \times S)$ est obtenu en éclatant $S \times S$ le long de la diagonale. La surjectivité cherchée est équivalente à l'annulation d'un H^1 convenable sur $B_{\Delta}(S \times S) \times \mathbb{P}$. Des calculs de cohomologie délicats sur cette variété ramènent cette annulation à des énoncés sur les sections globales du fibré de Lazarsfeld.

**6. LA CONJECTURE DE GREEN POUR LES COURBES
p-GONALES GÉNÉRALES**

Soit toujours X notre surface K3, munie d'un fibré en droites L vérifiant $L^2 = 2g - 2$, $g = 2d - 2$ et $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}[L]$. Comme promis, nous allons voir que l'annulation de $\mathcal{K}_{d-1,1}(X, L)$ entraîne le théorème 4. Choisissons des points généraux x_1, \dots, x_δ de X , avec $\delta \leq (d-1)/2$. Comme $\dim H^0(X, E) = d+1$, il existe deux sections linéairement indépendantes s, t de E s'annulant en ces points. Pour un choix générique des x_i et de s, t , la courbe C où s'annule la section $s \wedge t$ de $\Lambda^2 E = L$ est lisse sauf en x_1, \dots, x_δ , où elle a des points doubles ordinaires. Soit $n : N \rightarrow C$ sa normalisation.

PROPOSITION 3. — *La courbe N est $(d-\delta)$ -gonale, et vérifie $c = \text{Cliff}(N) = d-\delta-2$.*

La courbe N est de genre $\gamma = 2d - 2 - \delta$; les inégalités $0 \leq \delta \leq (d-1)/2$ se traduisent par $\frac{\gamma}{3} + 1 \leq d - \delta \leq \frac{\gamma}{2} + 1$. Cela donne la conjecture de Green pour les courbes p -gonales générales de genre γ , avec $\frac{\gamma}{3} + 1 \leq p \leq \frac{\gamma}{2} + 1$, et donc, compte tenu de [T], le théorème 4.

Démonstration de la proposition 3. — Les sections s, t engendrent un sous-faisceau de rang 1 de $n^*(E|_C)$; la partie mobile du système linéaire correspondant est un pinceau de degré $d - \delta$ (le nombre de zéros de s ou t en dehors des x_i). La courbe N est donc $(d - \delta)$ -gonale, et il suffit de prouver qu'on a $\mathcal{K}_{p,1}(N, K_N) = 0$ pour $p = \gamma - 1 - (d - \delta - 2) = d - 1$. Or l'annulation de $\mathcal{K}_{d-1,1}(X, L)$ (Prop. 1 et 2) garantit celle de $\mathcal{K}_{d-1,1}(C, K_C) = 0$; il s'agit de comparer $\mathcal{K}_{d-1,1}(C, K_C)$ et $\mathcal{K}_{d-1,1}(N, K_N)$. L'application trace $n_*K_N \rightarrow K_C$ fournit des injections naturelles $H^0(N, K_N) \hookrightarrow H^0(C, K_C)$ et $H^0(N, K_N^2) \hookrightarrow H^0(C, K_C^2)$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{r_N} & & \\
 \Lambda^d H^0(N, K_N) & \xrightarrow{d_N} & \Lambda^{d-1} H^0(N, K_N) \otimes H^0(N, K_N) & \longrightarrow & \Lambda^{d-2} H^0(N, K_N) \otimes H^0(N, K_N^2) \\
 \downarrow j' & & \downarrow j & & \downarrow j'' \\
 \Lambda^d H^0(C, K_C) & \xrightarrow{d_C} & \Lambda^{d-1} H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C) & \longrightarrow & \Lambda^{d-2} H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C^2) \\
 & & \xleftarrow{r_C} & &
 \end{array}$$

Les différentielles d_N et d_C admettent des rétractions canoniques r_N et r_C , définies par $r_\bullet(\tau \otimes \omega) = \frac{1}{d} \omega \wedge \tau$, qui commutent aux flèches verticales; cela entraîne que l'homomorphisme $\mathcal{K}_{d-1,1}(N, K_N) \rightarrow \mathcal{K}_{d-1,1}(C, K_C)$ induit par j est injectif. En effet, si un élément v de $\Lambda^{d-1} H^0(N, K_N) \otimes H^0(N, K_N)$ est tel que $j(v)$ est un bord, on a

$$j(v) = d_C r_C j(v) = d_C j' r_N(v) = j d_N r_N(v),$$

d'où, puisque j est injectif, $v = d_N r_N(v)$. Ainsi $\mathcal{K}_{d-1,1}(C, K_C)$ est nul, d'où la proposition 3.

7. LE CAS DE GENRE IMPAIR

Ce qui précède repose de manière essentielle sur les propriétés du fibré de Lazarsfeld, qui n'existe qu'en genre pair. Pour traiter le cas g impair, C. Voisin considère une surface K3 X dont le groupe de Picard est engendré par un fibré en droites très ample L , de carré $2g - 2$, et la classe d'une courbe rationnelle lisse Δ telle que $\deg(L|_{\Delta}) = 2$. Posons $L' = L(\Delta)$. On a $L'^2 = 2g$, $\deg(L'|_{\Delta}) = 0$; le morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}^{g+1}$ associé à L' est un plongement en dehors de Δ et contracte Δ sur un point.

Posons $g = 2k + 1$. La première étape de la démonstration est de vérifier que la proposition 2 s'étend à (X, L') , donnant $\mathcal{K}_{k+1,1}(X, L') = 0$. La démonstration de la propriété (i) s'adapte immédiatement, celle de (ii) demande nettement plus de travail.

Il s'agit maintenant d'en déduire l'annulation de $\mathcal{K}_{k,1}(X, L)$. Il est commode pour cela d'utiliser la dualité de Serre, qui fournit une dualité canonique entre $\mathcal{K}_{p,1}(X, L)$ et $\mathcal{K}_{g-2-p,2}(X, L)$. Ainsi $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L')$ est nul, et on veut en déduire l'annulation de l'espace $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L)$. Rappelons que celui-ci est l'homologie du complexe⁽⁹⁾

$$\Lambda^k H^0(L) \otimes H^0(L) \xrightarrow{d_L} \Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L^2) \xrightarrow{d_L} \Lambda^{k-2} H^0(L) \otimes H^0(L^3).$$

Au couple (X, L') est associé comme plus haut le fibré de Lazarsfeld E , de déterminant L' ; la preuve repose sur la construction d'un homomorphisme

$$\varphi : S^k H^0(E) \longrightarrow \Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L(-\Delta))$$

qui s'inspire d'une construction analogue utilisée par Green et Lazarsfeld pour prouver l'inégalité $c \leq \text{Cliff}(C)$ ([G], Appendice). Étant données deux sections globales v, w de E , on notera $v \wedge w$ leur produit extérieur dans $H^0(\Lambda^2 E) = H^0(L')$. On choisit une base (w_1, \dots, w_{k+1}) de $H^0(E(-\Delta))$, et on pose⁽¹⁰⁾, pour $v \in H^0(E)$,

$$\varphi(v^k) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (v \wedge w_1) \wedge \cdots \wedge (\widehat{v \wedge w_i}) \wedge \cdots \wedge (\widehat{v \wedge w_j}) \wedge \cdots \wedge (v \wedge w_{k+1}) \otimes (w_i \wedge w_j);$$

la condition $w_i \in H^0(E(-\Delta))$ entraîne bien $v \wedge w_i \in H^0(L)$ et $w_i \wedge w_j \in H^0(L(-\Delta))$.

Choisissons d'autre part une section σ de $H^0(L')$ dont la restriction à Δ n'est pas nulle; elle fournit un scindage de la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(L) \longrightarrow H^0(L') \longrightarrow H^0(L'|_{\Delta}) \cong \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

d'où une décomposition $H^0(L') = H^0(L) \oplus \mathbb{C}\sigma$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L(-\Delta)) & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^{k-2} H^0(L) \otimes H^0(L^2(-\Delta)) \\ \downarrow 1 \otimes \sigma & & \downarrow 1 \otimes \sigma \\ \Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L^2) & \xrightarrow{d_L} & \Lambda^{k-2} H^0(L) \otimes H^0(L^3). \end{array}$$

⁽⁹⁾Dans ce paragraphe, pour tout faisceau F sur X on note simplement $H^0(F)$ l'espace $H^0(X, F)$.

⁽¹⁰⁾Le chapeau sur un terme signifie comme d'habitude qu'on l'omet.

L'annulation de $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L)$ va résulter des quatre points suivants :

- (i) L'homomorphisme composé $\delta \circ \varphi$ est nul.
- (ii) L'homomorphisme induit $\varphi : S^k H^0(E) \rightarrow \text{Ker } \delta$ est surjectif.
- (iii) $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L)$ est engendré par les classes d'éléments $(1 \otimes \sigma) \cdot \alpha$ pour $\alpha \in \text{Ker } \delta$.
- (iv) Pour $t \in S^k H^0(E)$, la classe de $(1 \otimes \sigma) \cdot \varphi(t)$ dans $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L)$ est nulle.

Les assertions (i) et (iv) résultent d'un calcul sans mystères, basé sur l'identité

$$(v_1 \wedge v_2) \cdot (v_3 \wedge v_4) - (v_1 \wedge v_3) \cdot (v_2 \wedge v_4) + (v_1 \wedge v_4) \cdot (v_2 \wedge v_3) = 0 \quad \text{dans } H^0(L'^2)$$

quels que soient v_1, \dots, v_4 dans $H^0(E)$.

Prouvons (iii). Soit $\beta \in \text{Ker } d_L$. Puisque $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L') = 0$, il existe un élément γ de $\Lambda^k H^0(L') \otimes H^0(L')$ tel que $\beta = d_{L'} \gamma$. La décomposition $H^0(L') = H^0(L) \oplus \mathbb{C} \sigma$ permet d'écrire

$$\gamma = \gamma_1 + \sigma \wedge \gamma_2 + \gamma_3 \otimes \sigma + (\sigma \wedge \gamma_4) \otimes \sigma, \quad \text{avec}$$

$$\gamma_1 \in \Lambda^k H^0(L) \otimes H^0(L), \quad \gamma_2 \in \Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L), \quad \gamma_3 \in \Lambda^k H^0(L), \quad \gamma_4 \in \Lambda^{k-1} H^0(L).$$

L'élément γ_4 s'identifie à l'image de $d_{L'} \gamma$ dans $\Lambda^{k-1} H^0(L') \otimes H^0(L'_{|\Delta}^2)$; comme $d_{L'} \gamma = \beta$ appartient à $\Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L^2)$, on en déduit $\gamma_4 = 0$. Comme on peut modifier β par un bord on peut supposer $\gamma_1 = 0$. Enfin on a

$$\gamma_3 \otimes \sigma = d_{L'}(\sigma \wedge \gamma_3) + \sigma \wedge d_{L'} \gamma_3,$$

de sorte qu'en modifiant γ par un bord on peut supposer $\gamma_3 = 0$.

On a alors $\gamma = \sigma \wedge \gamma_2$, et par suite $\beta = d_{L'} \gamma = \gamma_2 \cdot (1 \otimes \sigma) - \sigma \wedge d_L \gamma_2$. En utilisant de nouveau la décomposition $H^0(L') = H^0(L) \oplus \mathbb{C} \sigma$, le fait que β appartient à $\Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L^2)$ implique d'une part que $d_L \gamma_2$ est nul, d'autre part que γ_2 appartient au sous-espace $\Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L(-\Delta))$. Par suite γ_2 appartient à $\text{Ker } \delta$, et $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L)$ est engendré par les classes des éléments $\gamma_2 \cdot (1 \otimes \sigma)$ avec $\gamma_2 \in \text{Ker } \delta$.

Le gros du travail est la démonstration de (ii), pour laquelle je ne peux que renvoyer à [V3], p. 12–26. Disons simplement qu'on se ramène à un énoncé sur la cohomologie d'un éclatement convenable de $\mathbb{P}(H^0(E)) \times X$, énoncé dont la démonstration demande une ingéniosité technique considérable.

APPENDICE : L'INDICE DE CLIFFORD

Nous utiliserons dans cet appendice une abréviation très classique : un système linéaire⁽¹¹⁾ $|D|$ sur C de degré d et de dimension projective r est appelé un g_d^r . L'indice de Clifford $\text{Cliff}(C)$ est alors le minimum des entiers $d - 2r$ sur l'ensemble des g_d^r avec $d \leq g - 1$ et $r \geq 1$. D'après le théorème de Clifford, on a $\text{Cliff}(C) \geq 0$, et $\text{Cliff}(C) = 0$

⁽¹¹⁾Étant donné un diviseur D , le système linéaire $|D|$ est l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D ; il s'identifie à l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(C, \mathcal{O}_C(D)))$.

si et seulement si C est hyperelliptique. Cet invariant a été introduit par Martens dans [M], où il montre entre autres que les courbes d'indice 1 sont exactement celles qui apparaissent dans le théorème 2.

Considérons les courbes de genre g fixé. Les courbes d -gonales, c'est-à-dire admettant un g_d^1 , ont un indice de Clifford $\leq d - 2$; lorsqu'elles sont assez générales, leur indice de Clifford est exactement $d - 2$ [B]. Il s'ensuit que l'indice de Clifford est $\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ pour une courbe générale, et prend toutes les valeurs entre 0 et $\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$.

Les courbes dont l'indice de Clifford est fourni par un g_d^r avec $r > 1$ (et pas par un système linéaire de dimension plus petite) sont beaucoup plus rares. Pour $r = 2$, ce sont les courbes planes lisses de degré d , qui sont de genre $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. Pour $3 \leq r \leq 9$, les auteurs de [ELMS] prouvent que cela impose $g = 4r - 2$, avec un indice de Clifford $2r - 3$ donné par un fibré en droites L tel que $L^2 \cong K_C$; ils conjecturent bien naturellement le même énoncé pour tout r (et construisent, pour tout r , une courbe ayant les propriétés indiquées). Si cette conjecture est correcte, et si C est une courbe de genre g et d'indice de Clifford c , alors :

- a) C est $(c + 2)$ -gonale, ou
- b) $g = \frac{1}{2}(c + 2)(c + 3)$, C est une courbe plane lisse de degré $c + 4$, ou
- c) c est impair ≥ 3 , $g = 2c + 4$, et C admet un fibré en droites L tel que $L^2 \cong K_C$ et $\text{Cliff}(L) = c$.

Pour g fixé il y a donc (moyennant la conjecture) au plus deux valeurs de c pour lesquelles il existe des courbes d'indice c qui ne soient pas $(c + 2)$ -gonales.

Remerciements. — Je remercie Olivier Debarre et Claire Voisin pour leurs commentaires pertinents sur une première version de ce texte.

RÉFÉRENCES

- [B] E. BALLICO — « On the Clifford index of algebraic curves », *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), p. 217–218.
- [E] L. EIN — « A remark on the syzygies of the generic canonical curves », *J. Differential Geom.* **26** (1987), p. 361–365.
- [ELMS] D. EISENBUD, H. LANGE, G. MARTENS & F.-O. SCHREYER — « The Clifford dimension of a projective curve », *Compositio Math.* **72** (1989), p. 173–204.
- [G] M. GREEN — « Koszul cohomology and the geometry of projective varieties », *J. Differential Geom.* **19** (1984), p. 125–171.
- [H-R] A. HIRSCHOWITZ & S. RAMANAN — « New evidence for Green's conjecture on syzygies of canonical curves », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série **31** (1998), p. 145–152.
- [L] R. LAZARSELD — « Brill-Noether-Petri without degenerations », *J. Differential Geom.* **23** (1986), p. 299–307.

- [Lo] F. LOOSE – « On the graded Betti numbers of plane algebraic curves », *Manuscripta Math.* **64** (1989), p. 503–514.
- [M] H. MARTENS – « Varieties of special divisors on a curve, II », *J. reine angew. Math.* **233** (1968), p. 89–100.
- [N] M. NOETHER – « Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen », *Math. Ann.* **17** (1880), p. 263–284.
- [P-R] K. PARANJAPÉ & S. RAMANAN – « On the canonical ring of a curve », in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II*, Kinokuniya, Tokyo, 1988, p. 503–516.
- [P] K. PETRI – « Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen », *Math. Ann.* **88** (1923), p. 242–289.
- [S-D] B. SAINT-DONAT – « On Petri’s analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve », *Math. Ann.* **206** (1973), p. 157–175.
- [S1] F.-O. SCHREYER – « Syzygies of canonical curves and special linear series », *Math. Ann.* **275** (1986), p. 105–137.
- [S2] ———, « Green’s conjecture for general p -gonal curves of large genus », in *Algebraic curves and projective geometry (Trento, 1988)*, Lect. Notes in Math., vol. 1389, Springer, Berlin, 1989, p. 254–260.
- [S3] ———, « A standard basis approach to syzygies of canonical curves », *J. reine angew. Math.* **421** (1991), p. 83–123.
- [T] M. TEIXIDOR I BIGAS – « Green’s conjecture for the generic r -gonal curve of genus $g \geq 3r - 7$ », *Duke Math. J.* **111** (2002), p. 195–222.
- [V1] C. VOISIN – « Courbes tétragonales et cohomologie de Koszul », *J. reine angew. Math.* **387** (1988), p. 111–121.
- [V2] ———, « Green’s generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a $K3$ surface », *J. Eur. Math. Soc.* **4** (2002), p. 363–404.
- [V3] ———, « Green’s canonical syzygy conjecture for generic curves of odd genus », *Compositio Math.* (à paraître), preprint arXiv : math.AG/0301359.

Arnaud BEAUVILLE

Laboratoire J.-A. Dieudonné

UMR 6621 du CNRS

Université de Nice

Parc Valrose

F-06108 Nice cedex 2

E-mail : beauville@math.unice.fr

SLE ET INVARIANCE CONFORME
[d'après Lawler, Schramm et Werner]

par **Jean BERTOIN**

1. INTRODUCTION

La physique statistique s'intéresse à des systèmes macroscopiques définis à l'échelle microscopique sur un réseau par un grand nombre de données aléatoires, éventuellement corrélées. Le modèle microscopique est souvent facile à définir ; on s'attend à ce que le changement d'échelle du microscopique au macroscopique induise une limite en loi vers un modèle continu qui garde la trace des propriétés spécifiques du modèle discret.

Un exemple fondamental est la marche aléatoire simple symétrique sur \mathbb{Z}^d : on considère une trajectoire aléatoire $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^d$, disons issue de $S_0 = 0$, telle que les accroissements $\xi_n = S_n - S_{n-1}$ soient des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), avec $\mathbb{P}(\xi_n = x) = 1/2d$, où x désigne l'un des $2d$ plus proches voisins de 0 sur \mathbb{Z}^d . Si l'on effectue le changement d'échelle

$$W_t^{(N)} = \sqrt{d/N} S_{[Nt]}, \quad t \geq 0,$$

alors le Théorème Central Limite implique que pour tous $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, le k -uplet $(W_{t_1}^{(N)}, \dots, W_{t_k}^{(N)})$ converge en loi vers $(W_{t_1}^{(\infty)}, \dots, W_{t_k}^{(\infty)})$, où $(W_t^{(\infty)}, t \geq 0)$ est un processus dont les accroissements sont indépendants et tels que pour $0 \leq s \leq t$, $W_t^{(\infty)} - W_s^{(\infty)}$ suit la loi de Gauss de moyenne nulle et de matrice de covariance $(t - s)\text{Id}$. Par ailleurs, le fait que la marche aléatoire simple ne saute que sur ses plus proches voisins suggère que sa limite macroscopique devrait avoir des trajectoires continues, et il est naturel de chercher à construire directement une mesure de probabilité \mathcal{W} sur $\mathcal{C}([0, \infty[, \mathbb{R}^d)$, dont les marginales fini-dimensionnelles sont celles de $W^{(\infty)}$. C'est ce qu'a accompli Norbert Wiener, la mesure \mathcal{W} s'appelle la mesure de Wiener, et le processus correspondant est le mouvement brownien.

Pour de nombreux modèles discrets de la physique statistique en dimension 2, et pour la valeur critique du paramètre à laquelle se produit la transition de phase, les

physiciens prédisent non seulement l'existence d'une limite continue, mais également que cette limite vérifie une propriété d'invariance conforme. Pour reprendre l'exemple du mouvement brownien dans $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, donnons-nous deux domaines simplement connexes $D, D' \neq \mathbb{C}$ contenant l'origine et $f : D \rightarrow D'$ une application conforme qui met D et D' en bijection. Notons \mathcal{W}_D (respectivement $\mathcal{W}_{D'}$) la loi sur l'espace des courbes continues à valeurs dans D (respectivement D') induite par la trajectoire brownienne arrêtée la première fois où elle quitte D (respectivement D'). Alors l'image de \mathcal{W}_D par l'application qui transforme une courbe dans D en une courbe dans D' par l'application conforme f , est $\mathcal{W}_{D'}$. Cette propriété importante du mouvement brownien complexe a été observée par Paul Lévy; il est intéressant de noter qu'elle est vérifiée pour la limite continue, mais pas pour le modèle discret, c'est-à-dire la marche aléatoire symétrique simple.

Penchons-nous maintenant sur un modèle voisin, celui de la marche aléatoire auto-évitante. Plus précisément, on se donne toujours un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$, on considère la marche aléatoire simple symétrique sur le réseau $N^{-1}\mathbb{Z}^2$ que l'on arrête lorsqu'elle quitte D . La probabilité que cette marche ne visite jamais deux fois ou plus le même site est strictement positive. On peut donc la conditionner par cet événement et on obtient ainsi une marche auto-évitante dans D . D'après ce qui précède, on s'attend d'une part à l'existence d'une limite continue donnée par une mesure de probabilité sur les trajectoires auto-évitanes à valeurs dans D , et d'autre part à ce que cette limite continue vérifie la propriété d'invariance conforme. Pour l'instant, ceci est toujours un problème ouvert. On peut également chercher à construire directement un modèle continu qui satisfasse aux propriétés fondamentales qu'on attend. Une approche naïve consisterait à tenter de conditionner une trajectoire brownienne dans D à ne jamais se recouper, mais ce conditionnement ne peut être réalisé rigoureusement⁽¹⁾ car il est bien connu que presque sûrement, le mouvement brownien plan visite à nouveau des points par lesquels il est déjà passé, et ce pour des intervalles de temps arbitrairement petits.

Depuis quelques années, des avancées spectaculaires ont été réalisées dans ce domaine par Schramm, Lawler, Werner et Smirnov. Elles reposent de façon essentielle sur une famille à un paramètre de mesures de probabilités sur les courbes du plan complexe vérifiant une propriété d'invariance conforme, qui ont été construites par Oded Schramm. Il a été établi rigoureusement que certains modèles discrets en physique statistique admettent effectivement une limite continue qui peut être décrite par ces mesures (pour des valeurs adéquates du paramètre), et des conjectures très précises prédisent que c'est encore le cas pour d'autres modèles importants. En outre, ces mesures permettent de calculer rigoureusement des valeurs des exposants critiques

⁽¹⁾Symanzik [18] a cherché à rendre rigoureux ce conditionnement, mais son programme conduit à une loi absolument continue par rapport à la mesure de Wiener, et donc pour laquelle les trajectoires ont toujours des points multiples.

pour le mouvement brownien plan ou la percolation (cf. [8, 9, 17]), et de vérifier ainsi les prédictions des physiciens (voir notamment [5] et [6]). Schramm a construit ces objets en introduisant l'aléa dans une méthode due à Loewner, qui, de façon informelle, permet de coder certaines familles croissantes de compacts du demi-plan à l'aide de courbes réelles. Il les a nommés *Stochastic Loewner Evolution* (SLE); il est désormais plus juste d'utiliser ces mêmes initiales pour *Schramm-Loewner Evolution*.

L'objet de cet exposé est de proposer une présentation succincte et non technique de ce thème, l'un des plus importants actuellement en théorie des probabilités. Nous renvoyons au papier de Lawler [7] pour une introduction plus détaillée à SLE, et aux excellentes notes de cours de Werner [19] et aux travaux qui y sont cités pour une présentation complète.

2. L'ÉQUATION DE LOEWNER ET SA VERSION STOCHASTIQUE

2.1. L'équation de Loewner

Notons $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ le demi-plan supérieur. Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{H}}$ un compact tel que $H := \mathbb{H} \setminus K$ soit simplement connexe; on dira qu'un tel K est une *cosse* (hull en anglais). Le théorème de Riemann assure l'existence d'applications conformes $g_K : H \rightarrow \mathbb{H}$ avec $g_K(\infty) = \infty$. Le principe de réflexion de Schwarz permet d'étendre analytiquement g_K à $\{z \in \mathbb{C} : z \notin K \text{ et } \bar{z} \notin K\}$. Le développement analytique de g_K au voisinage de ∞ (ce qui revient à développer $z \mapsto 1/g_K(1/z)$ au voisinage de $z = 0$) s'écrit alors sous la forme

$$g_K(z) = bz + a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots$$

avec $b > 0$ et $a_j \in \mathbb{R}$. Il y a une famille à 2 paramètres de telles applications conformes g_K (observer que pour tous $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$, l'application $z \mapsto g_K(cz) + d$ vérifie les mêmes propriétés), et on convient de choisir la normalisation, parfois dite hydrodynamique, pour laquelle $b = 1$ et $a_0 = 0$. Autrement dit, on a

$$g_K(z) = z + a_1/z + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Le coefficient $a_1 := a(K)$ s'appelle la capacité de K , il a une interprétation probabiliste simple : considérons un mouvement brownien complexe W issu de iy , et notons τ le premier temps d'atteinte de $K \cup \mathbb{R}$. Alors il est facile de voir que

$$a(K) = \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbb{E}^{iy}(\text{Im}(W_\tau)).$$

L'observation élémentaire suivante va jouer un rôle important dans la suite : si $J \subseteq K$ sont deux cosses, correspondant aux applications conformes normalisées g_J

et g_K , et si on note $L = \overline{g_J(K \setminus J)}$, alors il est facile de vérifier la formule dite de subordination

$$(1) \quad g_K = g_L \circ g_J.$$

En particulier, on en déduit l'identité entre capacités

$$a(K) = a(J) + a(L).$$

De façon informelle, ceci montre que la croissance des compacts de \mathbb{H} est très naturellement liée à la composition des applications conformes.

Loewner s'est intéressé à la situation suivante. On se donne une courbe continue simple $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ issue de $\gamma(0) = 0$, avec $\gamma(t) \in \mathbb{H}$ pour $t > 0$, et on prend $K_t := \gamma[0, t]$, de sorte que $(K_t, t \geq 0)$ est une famille de compacts simples de $\overline{\mathbb{H}}$ qui croît continûment. On suppose que $\lim_{t \rightarrow \infty} a(\gamma[0, t]) = \infty$, et pour simplifier, on se ramène au cas où la paramétrisation de γ est choisie de sorte que $a(K_t) = 2t$. Pour chaque $t \geq 0$, on posera $g_t := g_{K_t}$. Les applications conformes g_t permettent de transformer la courbe γ à valeurs dans \mathbb{H} en une courbe $\omega : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(t) := g_t(\gamma(t)), \quad t \geq 0.$$

Loewner a établi une relation très simple entre les applications conformes g_t et la courbe réelle ω (voir par exemple [1]).

PROPOSITION 2.1. — *Pour tout $z \in \overline{\mathbb{H}}$, $g_t(z)$ vérifie l'équation différentielle*

$$(2) \quad \partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \omega(t)}, \quad g_0(z) = z.$$

Cette équation est satisfaite jusqu'au premier temps T_z en lequel $g_t(z) = 0$.

Il est également naturel de prendre un autre point de vue. Au lieu de partir d'une courbe simple γ dans $\overline{\mathbb{H}}$ et de construire la courbe réelle ω , on se donne une fonction $\omega : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(0) = 0$, puis on construit pour chaque $z \in \overline{\mathbb{H}}$ une fonction $t \mapsto g_t(z)$ en résolvant l'équation (2). Cette dernière est bien définie jusqu'à ce que $g_t(z) - \omega(t)$ atteigne 0, temps que l'on note T_z . Introduisons encore

$$(3) \quad K_t = \{z \in \overline{\mathbb{H}} : T_z \leq t\}.$$

On appelle $(K_t, t \geq 0)$ la *chaîne de Loewner* associée à la fonction ω . On a alors le résultat suivant.

PROPOSITION 2.2. — *Avec les notations et hypothèses précédentes, pour tout $t > 0$, g_t est la transformation conforme normalisée de $\mathbb{H} \setminus K_t$ vers \mathbb{H} .*

Remarque 2.3. — Lorsque la fonction ω est suffisamment régulière (plus précisément, hôlderienne d'ordre 1/2 avec un coefficient de Hölder assez petit), la fonction réciproque g_t^{-1} se prolonge continûment à $\omega(t) \in \partial\mathbb{H}$ (voir [13]). On peut alors récupérer une courbe γ par l'identité $\gamma(t) = g_t^{-1}(\omega(t))$, de sorte que les compacts K_t sont donnés

par des courbes simples $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \overline{H}$. Mais en général, K_t n'est pas nécessairement donné par une courbe simple.

2.2. SLE cordal

Schramm [15] a introduit la notion d'évolution de Loewner stochastique en prenant pour la fonction ω dans les propositions 2.1–2.2, un mouvement brownien réel de variance $\kappa > 0$, *i.e.*

$$\omega(t) = W_t = \sqrt{\kappa} B_t,$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard. Pour un probabiliste, ce choix est bien sûr très naturel, car les mouvements browniens sont les seuls processus aléatoires à trajectoires continues, qui vérifient une propriété d'invariance par changement d'échelle, et dont les accroissements sont indépendants.

DÉFINITION 2.4 (Schramm). — *Pour $\kappa > 0$, on appelle SLE_κ cordal la chaîne de Loewner associée à un mouvement brownien $(W_t, t \geq 0)$ de variance κ .*

Le qualificatif *cordal* fait référence au fait que la famille de compacts $(K_t, t \geq 0)$ croît entre deux points de la frontière $\partial\mathbb{H}$ du domaine, 0 et ∞ . Schramm a construit également des processus SLE radiaux, *i.e.* pour lesquels les compacts croissent d'un point de la frontière jusqu'à atteindre un point intérieur donné. Dans cet exposé, nous nous concentrerons sur le cas cordal, à l'exception de la section 4.4.

Sans entrer dans les détails, ayant défini $(K_t, t \geq 0)$, SLE_κ cordal dans \mathbb{H} croissant de 0 vers ∞ , pour tout domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$, et A, B deux points distincts de la frontière de D , on construit SLE_κ dans D croissant de A vers B en considérant $(g(K_t), t \geq 0)$, où $g : \mathbb{H} \rightarrow D$ désigne une application conforme avec $g(0) = A$ et $g(\infty) = B$.

Les propriétés de base du mouvement brownien se traduisent aisément pour SLE :

- Le brownien est symétrique, *i.e.* W et $-W$ ont la même loi ; il en découle que si \tilde{K} désigne le symétrique de K par rapport à l'axe imaginaire, alors $(K_t, t \geq 0)$ et $(\tilde{K}_t, t \geq 0)$ ont la même loi.
- Invariance par changement d'échelle, *i.e.* pour tout $c > 0$, $(W_t, t \geq 0)$ et $(c^{-1/2}W_{ct}, t \geq 0)$ ont la même loi. Il s'ensuit que $(K_{ct}, t \geq 0)$ et $(cK_t, t \geq 0)$ ont la même loi.
- Propriété de Markov : si T est un temps d'arrêt dans $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, la filtration naturelle de W , alors $(W_{T+t} - W_T, t \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_T . Il s'ensuit que le processus $(g_{T+t}(K_{T+t} \setminus K_T) - W_T, t \geq 0)$ est également indépendant de \mathcal{F}_T et est encore un SLE_κ .

La propriété suivante, due à Rohde et Schramm [14], fait appel à des propriétés plus fines du brownien.

PROPOSITION 2.5. — (i) Pour $\kappa \in]0, 4]$, SLE_κ est une courbe simple p.s.

(ii) Pour $\kappa > 4$, il existe une courbe aléatoire continue γ qui n'est pas simple, mais qui ne se croise pas elle-même, telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{H} \setminus K_t$ coïncide avec la composante connexe infinie de $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$. Autrement dit, K_t est la réunion de $\gamma[0, t]$ et de l'intérieur de ses boucles.

Remarque 2.6. — Il est intéressant de rappeler que la trajectoire brownienne n'est pas hölderienne d'ordre $1/2$ (mais presque : localement, elle est hölderienne d'ordre $1/2 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$), et de comparer le résultat (i) avec la remarque qui suit la proposition 2.2.

On voit clairement dans cet énoncé à quel point le comportement de SLE dépend de la valeur du paramètre κ , ce qui peut paraître a priori assez surprenant. Dans cette direction, mentionnons un résultat récent de Beffara [2] qui a montré que la dimension de Hausdorff de la courbe γ permettant de représenter SLE_κ vaut $\min(2, 1 + \kappa/8)$, presque sûrement (sauf peut-être pour $\kappa = 4$).

On va maintenant présenter des propriétés cruciales de SLE_κ pour des valeurs particulières de κ , propriétés qui auront un rôle essentiel dans l'analyse de la limite continue de certains modèles de physique statistique.

3. PROPRIÉTÉS DE LOCALITÉ ET DE RESTRICTION

3.1. Localité pour $\kappa = 6$

On s'intéresse tout d'abord à l'image de SLE_κ par des applications conformes. Considérons une cosse A qui ne contient pas l'origine. Rappelons que g_A désigne l'application conforme normalisée de $\mathbb{H} \setminus A$ sur \mathbb{H} , et posons

$$\tilde{K}_t = g_A(K_t) \quad \text{pour } t < T := \inf \{s : K_s \cap A \neq \emptyset\}.$$

On a défini ainsi une nouvelle famille croissante de compacts $(\tilde{K}_t, t < T)$; il est important d'observer que la paramétrisation est donnée en fonction de la capacité de $K_t = g_A^{-1}(\tilde{K}_t)$ et non pas directement de \tilde{K}_t .

On peut montrer que la famille $(\tilde{K}_t, t < T)$ est elle aussi, à un changement de temps près, une chaîne de Loewner, qu'on peut donc représenter sous la forme des propositions 2.1–2.2. Plus précisément, si on note \tilde{g}_t l'application conforme normalisée de $g_A(\mathbb{H} \setminus (A \cup K_t))$ dans \mathbb{H} , et si on note $\alpha(t) = a(A \cup K_t) = a(A) + a(\tilde{K}_t)$, alors on obtient à partir de (2) l'équation différentielle

$$\partial \tilde{g}_t(z) = \frac{\partial \alpha(t)}{\tilde{g}_t(z) - \tilde{W}_t},$$

où $\tilde{W}_t = h_t(W_t)$ et h_t est l'application conforme normalisée de $g_t(\mathbb{H} \setminus (A \cup K_t))$ dans \mathbb{H} .

Bien sûr, \widetilde{W} n'est plus un mouvement brownien, mais la formule d'Itô (*i.e.* la formule de changement de variables du calcul différentiel pour le mouvement brownien), permet de vérifier que \widetilde{W} satisfait l'équation différentielle stochastique

$$d\widetilde{W}_t = h'_t(W_t)dW_t + \left(\frac{\kappa}{2} - 3\right) h''_t(W_t)dt.$$

On voit sur cette expression que quelque chose de remarquable se passe lorsque $\kappa = 6$, car alors le terme de dérive est identiquement nul, de sorte que

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t h'_s(W_s)dW_s,$$

où le terme de droite est une intégrale stochastique d'Itô. On sait qu'une telle intégrale peut être représentée sous la forme d'un mouvement brownien changé de temps. Plus précisément, on pose $\langle \widetilde{W} \rangle_t = \int_0^t h'_s(W_s)^2 ds$, et on définit implicitement \widehat{W} par $\widehat{W}_{\langle \widetilde{W} \rangle_t} = \widetilde{W}_t$. Alors \widehat{W} est un mouvement brownien de variance $\kappa (= 6)$. Par ailleurs, on peut vérifier également que $\langle \widetilde{W} \rangle_t = \frac{1}{2}(\alpha(t) - \alpha(0))$, de sorte que, finalement, si on définit implicitement \widehat{g}_t par $\widehat{g}_t = \widehat{g}_{\alpha(t)/2}$, alors

$$\partial_t \widehat{g}_t(z) = \frac{2}{\widehat{g}_t(z) - \widehat{W}_t}.$$

On a donc le théorème suivant, dû à Lawler, Schramm et Werner [8, 12] :

THÉORÈME 3.1 (Propriété de localité). — *Désignons par \widetilde{T} le premier temps en lequel K_t atteint $g_t(\partial A)$. Pour $\kappa = 6$, à un changement de temps près, les processus $(\widetilde{K}_t - g_A(0), t < \widetilde{T})$ et $(K_t, t < T)$ ont la même loi.*

3.2. Restriction pour $\kappa = 8/3$

Si on applique les mêmes techniques pour étudier $h'_t(W_t)$ au lieu de $h_t(W_t)$ comme précédemment, on obtient par application de la formule d'Itô que

$$dh'_t(W_t) = h''_t(W_t)dW_t + \left(\frac{h''_t(W_t)}{2h'_t(W_t)} + (\kappa/2 - 4/3)h'''_t(W_t)\right) dt.$$

Cette fois, c'est la valeur $\kappa = 8/3$ qui joue un rôle remarquable; en effet, on voit qu'alors

$$d[h'_t(W_t)^{5/8}] = \frac{5h''_t(W_t)}{8h'_t(W_t)^{3/8}} dW_t,$$

de sorte que $h'_t(W_t)^{5/8}$ est une martingale locale. Ceci permet de calculer les probabilités d'atteinte pour $SLE_{8/3}$:

PROPOSITION 3.2. — *Soit $(K_t, t \geq 0)$ un $SLE_{8/3}$ cordal. Alors pour toute cosse A qui ne contient pas l'origine,*

$$\mathbb{P}(\forall t \geq 0, K_t \cap A = \emptyset) = g'_A(0)^{5/8},$$

où $g_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ est l'application conforme normalisée.

Donnons juste l'esquisse de la preuve. Notons T le premier temps en lequel K_t atteint A ($T = \infty$ lorsque K_t n'atteint jamais A). On vérifie d'abord que $M_t := h'_t(W_t)^{5/8}$ reste compris entre 0 et 1 pour tout $t \in [0, T[$, et converge vers 1 sur l'événement $T = \infty$ (rappelons que la normalisation des applications conformes impose $h'_t(\infty) = 1$); par ailleurs, on montre que $\lim_{t \rightarrow T^-} h'(W_t) = 0$ lorsque $T < \infty$. Le théorème d'arrêt pour les martingales donne alors

$$\mathbb{P}(T = \infty) = \mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = h'_0(0)^{5/8} = g'_A(0)^{5/8}.$$

Une conséquence importante de ce calcul explicite est la propriété dite de restriction, vérifiée par $SLE_{8/3}$ (cf. [12]).

THÉORÈME 3.3 (Propriété de restriction). — *Soit $A \subset \mathbb{H}$ une cosse qui ne contient pas 0, et $(K_t, t \geq 0)$ un $SLE_{8/3}$ cordal. Alors la loi conditionnelle de K_∞ sachant $K_\infty \cap A = \emptyset$ est la même que celle de $f_A^{-1}(K_\infty)$, où f_A^{-1} désigne la réciproque de l'application conforme $f_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ donnée par $f_A(z) = g_A(z) - g_A(0)$.*

Donnons encore seulement l'esquisse de la preuve. Soit $B \subset \mathbb{H}$ une cosse qui ne contient pas l'origine. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(f_A(K_\infty) \cap B = \emptyset \mid K_\infty \cap A = \emptyset) = \frac{\mathbb{P}(K_\infty \cap (f_A^{-1}(B) \cup A) = \emptyset)}{\mathbb{P}(K_\infty \cap A = \emptyset)}.$$

Si on note $C = A \cup f(B)$, alors on sait d'après (1) que $f_C = f_B \circ f_A$, puisque $B = f_A(f_A^{-1}(B))$. On déduit de la proposition 3.2 que le quotient ci-dessus vaut

$$\left(\frac{f'_C(0)}{f'_A(0)} \right)^{5/8} = \left(\frac{f'_A(0)f'_B(f_A(0))}{f'_A(0)} \right)^{5/8} = f'_B(0)^{5/8}.$$

En appliquant à nouveau la proposition 3.2, on peut identifier cette dernière quantité comme $\mathbb{P}(K_\infty \cap B = \emptyset)$. Autrement dit, les probabilités d'atteinte pour $f_A(K_\infty)$ sachant que $K_\infty \cap A = \emptyset$ sont les mêmes que pour K_∞ , ce qui entraîne aisément l'assertion.

On peut montrer par ailleurs que $SLE_{8/3}$ cordal est la seule mesure de probabilités sur les courbes continues simples de 0 à ∞ dans \mathbb{H} pour laquelle cette propriété de restriction est vraie. Ceci est à mettre en rapport avec le fait que la propriété de restriction est vérifiée également par la courbe brownienne. Plus précisément, on considère un mouvement brownien β dans \mathbb{H} de 0 à ∞ (ce qui est facile à définir rigoureusement), et une cosse $A \subset \mathbb{H}$ qui ne contient pas l'origine. On note $f_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ l'application conforme avec $f_A(0) = 0$ et $f_A(z) \sim z$ lorsque $z \rightarrow \infty$, et f_A^{-1} son inverse. Alors $f_A^{-1}(\beta)$ a, à un changement de temps près, la même loi que β conditionné à éviter A . Bien sûr, la courbe brownienne n'est pas simple (elle a même presque sûrement des points de multiplicité infinie); on ne peut donc pas identifier la courbe de β et $SLE_{8/3}$. Cependant, de façon tout à fait informelle, si on conditionne β à ne pas avoir de points multiples, ce conditionnement devrait préserver la propriété de restriction, et donc on peut s'attendre à ce que la courbe brownienne dans \mathbb{H} de 0 à ∞

et conditionnée à être simple, soit décrite par $SLE_{8/3}$. Toujours de façon informelle, la courbe brownienne conditionnée à être simple est sensée apparaître à la limite continue de la marche aléatoire auto-évitante (déjà mentionnée dans l'introduction). Autrement dit, il est naturel de faire la conjecture que la limite continue de la marche aléatoire auto-évitante existe et est décrite par $SLE_{8/3}$. Cette conjecture est toujours ouverte pour l'instant ; elle a été confirmée par des simulations numériques.

Dans la dernière partie de cet exposé, nous allons présenter rapidement des situations dans lesquelles il a été établi de façon rigoureuse que SLE permet de décrire des courbes aléatoires remarquables du plan.

4. SLE ET QUELQUES COURBES ALÉATOIRES REMARQUABLES

4.1. $SLE_{8/3}$ et excursions browniennes

Appelons excursion brownienne dans \mathbb{H} un mouvement brownien complexe $Z = X + iY$ à valeurs dans \mathbb{H} , issu de $Z_0 = 0$, et conditionné à tendre vers ∞ . Un tel conditionnement est seulement formel (car la probabilité qu'un mouvement brownien complexe reste dans \mathbb{H} est nulle), mais il est aisé à rendre rigoureux. Plus précisément, les coordonnées X et Y sont deux processus indépendants, X est un mouvement brownien réel standard, et Y un processus de Bessel de dimension 3, c'est-à-dire la norme euclidienne d'un mouvement brownien dans \mathbb{R}^3 .

Soit $A \subset \overline{\mathbb{H}}$ une cosse qui ne contient pas l'origine, et $g_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ l'application conforme normalisée. On peut montrer que la probabilité que la trajectoire de Z n'atteigne jamais A est donnée par

$$(4) \quad \mathbb{P}(Z_t \notin A, \forall t \geq 0) = g'_A(0).$$

Esquisons la preuve de cette identité : Travaillons d'abord avec un mouvement brownien dans \mathbb{H} issu de $z \in \mathbb{H}$, et conditionné à tendre vers ∞ . La fonction $\text{Im } g_A$ est harmonique dans $\mathbb{H} \setminus A$, et il en découle que le processus

$$\frac{\text{Im } g_A(Z_t)}{Y_t}, \quad t < T_A := \inf \{t \geq 0, Z_t \in A\}$$

est une martingale. Cette martingale converge vers 1 sur l'événement $T_A = \infty$ (puisque $g_A(z) \sim z$ quand $z \rightarrow \infty$), et vers 0 quand $T_A < \infty$. Par application du théorème d'arrêt, on a donc

$$\mathbb{P}(T_A = \infty \mid Z_0 = z) = \frac{\text{Im } g_A(z)}{\text{Im } z},$$

et il ne reste alors qu'à faire tendre z vers 0.

La formule (4) est bien sûr à rapprocher de la proposition 3.2. On en tire immédiatement le résultat suivant (voir [12]).

THÉORÈME 4.1. — Soit \mathcal{H}_8 la frontière extérieure de l'union de 8 $SLE_{8/3}$ cordaux indépendants. Soit \mathcal{B}_5 la frontière extérieure de l'union de 5 excursions browniennes indépendantes. Alors \mathcal{H}_8 et \mathcal{B}_5 ont la même loi.

En effet, les probabilités que ces différentes courbes ne rencontrent pas une cosse A sont les mêmes.

Ce théorème a plusieurs conséquences intéressantes. En particulier, si on le relie à la conjecture de la section précédente, qui énonce que $SLE_{8/3}$ est la limite continue de la marche aléatoire auto-évitante, on peut alors observer que localement, la frontière extérieure de la courbe brownienne dans le plan peut être vue comme la limite continue d'une marche aléatoire auto-évitante (propriété qui avait été énoncée de façon informelle par Mandelbrot).

4.2. SLE_6 et percolation critique

L'un des résultats mathématiques les plus remarquables obtenus récemment en ce qui concerne le comportement asymptotique de modèles discrets de la physique statistique est dû à Smirnov [16]. Il porte sur la *percolation sur le réseau triangulaire*.

Commençons par considérer un réseau régulier dans le plan (pas nécessairement le réseau triangulaire). On fixe un paramètre $p \in]0, 1[$, et on décide d'ouvrir chaque site de ce réseau avec probabilité p , indépendamment les uns des autres. On s'intéresse aux composantes connexes (amas) formées par les sites ouverts. Il existe un paramètre critique p_c tel que, presque sûrement, pour $p \leq p_c$, il n'y a aucun amas de taille infinie, alors que pour $p > p_c$, il y a exactement un amas infini.

Le paramètre critique p_c dépend du réseau ; sa valeur exacte n'est pas connue en général. Il y a cependant une exception remarquable : dans le cas du réseau triangulaire, Kesten et Wierman ont montré que $p_c = 1/2$. De façon très informelle et rapide, disons que des arguments de renormalisation suggèrent que, quand on se place dans une grande échelle et pour la valeur critique du paramètre, ce qu'on observe de la percolation ne dépend pas du réseau. Par ailleurs, si on admet l'existence d'une limite continue de la percolation, cette limite doit nécessairement être invariante par changement d'échelle et par rotation (puisque la limite ne dépend pas du réseau). Ceci conduit naturellement à la conjecture plus forte que la percolation continue est invariante conforme, *i.e.* les connexions respectives dans des domaines simplement connexes devraient avoir la même loi à des transformations conformes près.

En particulier, la probabilité qu'il existe un amas permettant de traverser de gauche à droite un rectangle de longueur Na et de largeur Nb doit converger quand N tend vers l'infini, vers une limite $F(b/a)$ qui ne dépend que du rapport b/a , et où la fonction F est « universelle » (*i.e.* ne dépend pas du réseau). Cardy [3], à l'aide de considérations provenant de la théorie conforme des champs, a prédit très précisément ce que devait être cette fonction F . Par la suite Carleson a observé qu'on pouvait reformuler de façon beaucoup plus simple la conjecture de Cardy en considérant la

percolation non pas dans un rectangle, mais dans un triangle équilatéral ABC . Plus précisément, si on considère un point $X \in [CA]$, la probabilité qu'il existe un amas pour la percolation critique dans le triangle ABC qui relie $[AB]$ à $[CX]$ vaut CX/AB .

Smirnov [16] a démontré ces conjectures (existence d'une limite continue, invariance conforme et formule de Cardy) pour la percolation critique sur le réseau triangulaire. De plus, SLE_6 permet de décrire l'amas de percolation de la façon suivante. Pour faciliter la présentation, il est commode de voir le réseau triangulaire comme le pavage du plan en « nid d'abeille », *i.e.* en identifiant chaque site du réseau avec un hexagone dont il est le centre. On se donne un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$, et deux points distincts a et b sur la frontière. On fixe un petit paramètre $\delta > 0$, on considère D_δ une approximation simplement connexe de D obtenue par réunion de petits hexagones de taille δ , et on note respectivement a_δ et b_δ les points du réseau hexagonal sur la frontière de D_δ les plus proches de a et de b . Les cellules de la frontière de D_δ entre a_δ et b_δ sont coloriées en blanc, celles entre b_δ et a_δ en noir (avec l'orientation trigonométrique). On colorie ensuite chaque hexagone de l'intérieur de D_δ en blanc avec probabilité $1/2$, indépendamment les uns des autres, et on décide que les hexagones non coloriés sont noirs.

L'interface partant de a_δ et finissant en b_δ , qui sépare les cellules blanches des cellules noires, définit une courbe aléatoire γ_δ qui parcourt la frontière extérieure de l'amas de percolation contenant les points a et b . On l'appelle le processus d'exploration. Le théorème de Smirnov entraîne que quand $\delta \rightarrow 0+$, γ_δ converge en loi vers une courbe aléatoire dans \overline{D} qui débute en a et finit en b . La propriété d'invariance conforme pour la percolation critique se transpose à la courbe limite; plus précisément on montre que cette dernière vérifie la propriété de localité (*cf.* Théorème 3.1). Enfin, la formule de Cardy-Smirnov permet de calculer les probabilités d'atteinte de cosses, et de vérifier ainsi qu'elles coïncident avec celles pour SLE_6 cordal dans D , allant de a à b . Il est intéressant d'observer que la courbe limite γ n'est pas simple (*cf.* Proposition 2.5), et donc ne décrit pas seulement la frontière extérieure de l'amas de percolation, mais également une partie de la frontière intérieure qui affleure la frontière extérieure.

Pour conclure cette section, il convient de mentionner que SLE_6 permet également de décrire les points déconnectés de l'infini par la trajectoire d'un mouvement brownien réfléchi, disons dans \mathbb{H} , où l'angle de réflexion vaut $\pi/3$ sur la frontière $]0, \infty[$ et $2\pi/3$ sur $] -\infty, 0[$ (en particulier, la réflexion tend à éloigner de l'origine). Ceci permet de relier la frontière extérieure d'un amas de percolation à la frontière extérieure d'une trajectoire brownienne, et donc à $SLE_{8/3}$ d'après la section précédente.

4.3. SLE_8 et arbre couvrant aléatoire

Donnons-nous comme précédemment un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$. Fixons un petit paramètre $\delta > 0$ et notons cette fois D_δ une approximation (connexe) de D par une portion du réseau $\delta\mathbb{Z}^2$. On appelle *arbre aléatoire couvrant* dans D_δ

un sous-graphe (donné par des sommets et des arêtes) connexe qui passe par tous les sommets de D_δ et qui ne contient pas de boucle. Donnons-nous deux points distincts a et b sur la frontière de D . Soient respectivement a_δ et b_δ les sommets de D_δ les plus proches de a et b . On s'intéresse aux arbres couvrants qui contiennent toutes les arêtes sur la frontière de D_δ entre a_δ et b_δ (dans le sens trigonométrique). On peut coder de façon unique un tel arbre couvrant par une courbe de Peano (*i.e.* qui passe par tous les sommets du graphe) : on note η^d la courbe qui parcourt l'arbre en partant de a_δ et en suivant les branches dans l'ordre anti-trigonométrique jusqu'à atteindre b_δ (si on suit ensuite la frontière de D_δ de b_δ à a_δ toujours dans le sens anti-trigonométrique, on a ainsi entièrement parcouru l'arbre couvrant).

Lorsqu'on choisit l'arbre couvrant au hasard suivant la probabilité uniforme, la courbe de Peano η^δ est prise elle aussi au hasard suivant l'équiprobabilité sur l'ensemble des courbes de Peano dans D_δ partant de a_δ et finissant en b_δ . À l'aide d'arguments délicats, dont certains reposent sur l'algorithme de Wilson (qui permet de construire des arbres aléatoires couvrants à partir de trajectoires de marches aléatoires), Lawler, Schramm et Werner [10] ont établi le résultat suivant.

THÉORÈME 4.2. — *Quand $\delta \rightarrow 0$, la courbe de Peano discrète η^δ converge en loi vers une courbe de Peano aléatoire continue η , telle que, à un changement de temps près, $(\eta[0, t], t \geq 0)$ a la même loi que SLE_8 cordal dans D de a à b .*

4.4. SLE_2 radial et marche aléatoire à boucles effacées

Le dernier exemple que nous présenterons est très lié au précédent ; il fait intervenir un autre type de chaîne de Loewner, dite *radiale* (voir par exemple [4]), qui correspond à une famille de compacts croissant de la frontière vers un point intérieur du domaine.

Notons d'abord \mathbb{U} le disque unité, et considérons une courbe continue simple $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{U}}$ avec $\gamma_0 = 1$, $\gamma_t \in \mathbb{U}$ pour tout $t > 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t = 0$. Pour chaque $t \geq 0$, on note f_t l'application conforme de $U_t := \mathbb{U} \setminus \gamma[0, t]$ dans \mathbb{U} , normalisée par $f_t(0) = 0$ et $f_t(\gamma_t) = 1$. Pour simplifier, on supposera que la paramétrisation de γ est telle que $|f'_t(0)| = e^t$, ce qui n'induit pas de perte de généralité. Définissons ensuite

$$\zeta_t = \left(\frac{f'_t(0)}{|f'_t(0)|} \right)^{-1},$$

de sorte que ζ décrit une courbe sur le cercle $\partial\mathbb{U}$ telle que

$$g_t(z) := \zeta_t f_t(z)$$

soit l'application conforme de U_t dans \mathbb{U} telle que $g_t(0) = 0$ et $g'_t(0) = e^t$. Noter également que $g_t(\gamma_t) = \zeta_t$.

Loewner a établi qu'on pouvait récupérer g_t à partir de ζ_t en résolvant l'équation différentielle

$$(5) \quad \partial g_t(z) = -g_t(z) \frac{g_t(z) + \zeta_t}{g_t(z) - \zeta_t}$$

tant que $z \in U_t$, puis γ_t par la formule $\gamma_t = g_t^{-1}(\zeta_t)$, au moins dès qu'elle a un sens.

Comme dans la section 2, on prend un point de vue différent en se donnant a priori une courbe ζ sur le cercle unité, et en construisant des applications conformes $z \mapsto g_t(z)$ en résolvant (5) jusqu'au temps $T(z)$ en lequel $g_t(z)$ atteint ζ_t . On définit ensuite la chaîne de Loewner radiale

$$K_t := \{z \in \bar{\mathbb{U}} : T(z) \leq t\}.$$

Pour tout $\kappa > 0$, on appelle SLE_κ radial (croissant de 1 à 0) la chaîne de Loewner aléatoire obtenue lorsque ζ est un mouvement brownien sur le cercle de variance κ .

On va maintenant conclure cet exposé en présentant un dernier résultat de Lawler, Schramm et Werner [10] (voir également Schramm [15]) qui relie SLE_2 radial et la limite continue de la *marche aléatoire simple à boucles effacées*.

Pour cela, considérons un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$ contenant 0, et fixons un petit paramètre δ . On introduit une marche aléatoire simple symétrique sur $\delta\mathbb{Z}^2$ jusqu'à ce qu'elle sorte de D , et on note η^δ la courbe dans D obtenue en effaçant les boucles de la marche dans l'ordre inverse de leur apparition (*i.e.* on retourne la marche quand elle sort de D , et on efface au fur et à mesure les boucles de marche retournée).

Soit encore $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow D$ une application conforme avec $\Phi(0) = 0$ et η la valeur terminale d'un SLE_2 radial dans \mathbb{U} , partant d'un point uniformément distribué sur le cercle unité. Alors η^δ converge en loi quand δ tend vers 0 vers $\Phi(\eta)$.

RÉFÉRENCES

- [1] L.V. AHLFORS – *Conformal Invariants, Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, 1973.
- [2] V. BEFFARA – « The dimension of the SLE curves », Prépublication.
- [3] J. CARDY – « Critical percolation in finite geometries », *J. Phys. A* (1992), p. L201–L206.
- [4] J.B. CONWAY – *Functions of one complex variable. II*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [5] B. DUPLANTIER & K.-H. KWON – « Conformal invariance and intersections of random walks », *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988), p. 2514–2517.
- [6] C. ITZYKSON & J.-M. DROUFFE – *Statistical field theory vol. 2*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1989.
- [7] G.F. LAWLER – « An introduction to the Stochastic Loewner Evolution », in *Random walks and geometry*, Walter de Gruyter, Berlin, 2004, p. 261–293.
- [8] G.F. LAWLER, O. SCHRAMM & W. WERNER – « Values of Brownian intersection exponents I : Half-plane exponents et II : Plane exponents », *Acta Math.* **187** (2001), p. 237–273 & 275–308.
- [9] ———, « Values of Brownian intersection exponents III : Two-sided exponents », *Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist.* **38** (2002), p. 109–123.

- [10] ———, « Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees », *Ann. Probab.* **32** (2004), p. 939–995.
- [11] ———, « On the scaling limit of self-avoiding walks », in *Fractal geometry and application, A jubilee of Benoît Mandelbrot*, Proc. Symp. Pure Math, American Mathematical Society, à paraître.
- [12] ———, « Conformal restriction properties. The chordal case », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 917–955.
- [13] D. MARSHALL & S. ROHDE – « The Loewner differential equation and slit mappings », Prépublication.
- [14] S. ROHDE & O. SCHRAMM – « Basic properties of SLE », *Ann. of Math.*, à paraître.
- [15] O. SCHRAMM – « Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees », *Israel J. Math.* **118** (2001), p. 221–288.
- [16] S. SMIRNOV – « Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), p. 239–244.
- [17] S. SMIRNOV & W. WERNER – « Critical exponents for two-dimensional percolation », *Math. Res. Lett.* **8** (2001), p. 729–744.
- [18] K. SYMANZIK – « Euclidean Quantum Field Theory », in *Local Quantum Theory, Proc. International School of Physics “Enrico Fermi” XLV* (L. Jost, éd.), Academic Press, New York, 1969, p. 152.
- [19] W. WERNER – « Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions », in *Lectures on Probability Theory and Statistics, École d’été de probabilités de Saint-Flour 2002*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1840, Springer, 2004, p. 107–195.

Jean BERTOIN

Laboratoire de Probabilités
et Modèles Aléatoires

et

Institut universitaire de France
Université Pierre et Marie Curie
175, rue du Chevaleret
F-75013 Paris

E-mail : jbe@ccr.jussieu.fr

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LA LIMITE INCOMPRESSIBLE

par Isabelle GALLAGHER

1. INTRODUCTION

Les équations d'Euler compressibles modélisent le mouvement d'un fluide parfait (sans forces de viscosité interne) : elles s'écrivent sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires, portant sur le champ de vitesse et la densité du fluide. Ces équations s'obtiennent par minimisation d'une fonctionnelle d'énergie, dans l'espace des difféomorphismes (voir par exemple [2, 9]) : une particule au point x à l'instant t_0 est au point $\psi_1(x)$ au temps t_1 , où ψ_1 est un difféomorphisme. La traduction de cette écriture lagrangienne en variables eulériennes conduit aux équations d'Euler compressibles. Les équations d'Euler incompressibles s'obtiennent quant à elles en se restreignant aux difféomorphismes préservant la mesure : le fluide est incompressible, et ainsi tout ouvert de l'espace est transporté en un ouvert de même volume au cours du mouvement. Le système d'équations aux dérivées partielles obtenu ne porte plus que sur le champ de vitesse (si l'on suppose de plus la densité constante), maintenant de divergence nulle. Le lecteur intéressé par l'obtention de ces équations à partir des lois fondamentales pourra par exemple consulter [39]. Les systèmes des fluides parfaits compressibles et incompressibles seront écrits précisément dans la section 1.1 suivante (systèmes (1) et (2) respectivement).

La question du passage du premier système (Euler compressible) au second (Euler incompressible), dans la limite où un « paramètre de compressibilité » (le nombre de Mach) tend vers zéro, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux mathématiques depuis une vingtaine d'années. Les motivations sont nombreuses : mathématiquement tout d'abord, les équations incompressibles sont mieux comprises que les équations compressibles, et il est intéressant d'essayer de transposer à l'un des systèmes des résultats connus pour l'autre, par un argument de comparaison ou de passage à la limite. Physiquement ensuite, on a souvent tendance à considérer qu'un fluide « peu compressible » possède des propriétés semblables à celles d'un fluide incompressible

— encore faut-il le justifier (voir par exemple [63] et [62]). Enfin dans des calculs numériques il est souvent préférable de considérer qu'un fluide est incompressible même lorsqu'il ne l'est pas, pour simplifier l'implémentation (voir à ce propos les travaux [36], [48], [52] et [53]).

Comme nous le verrons ici, ce problème du passage du compressible à l'incompressible fait intervenir des théories mathématiques variées, suivant l'espace physique dans lequel on plonge le fluide : ainsi des idées de l'optique géométrique sont utilisées dans le cas de conditions aux limites périodiques. Pour un fluide dans l'espace entier, ces aspects sont remplacés par des phénomènes dispersifs, et l'on fait appel à des estimations de type « Strichartz », ou encore à des techniques de mesures de défaut et des estimations de décroissance de l'énergie locale.

L'objectif de cet exposé est de donner un aperçu de « l'état de l'art » sur la question de la limite incompressible et de l'implémentation des techniques évoquées ci-dessus : nous verrons les différentes approches suivies depuis les travaux de S. Klainerman et A. Majda au début des années quatre-vingts dans le cas de « données bien préparées » (notion naturelle portant sur la donnée initiale, que nous présentons dans la section 1.1 ci-dessous) jusqu'aux travaux récents de G. Métivier et S. Schochet portant sur les équations non isentropiques (où l'on couple au système d'Euler compressible l'équation de transport de l'entropie).

Le plan de l'exposé est le suivant.

Dans la section 1.1 suivante, nous présentons les équations relatives aux fluides compressibles et incompressibles respectivement, et nous rappelons brièvement les résultats principaux concernant le problème de Cauchy pour ces deux systèmes. Suit dans la section 1.2 la mise en évidence du paramètre de compressibilité dans l'équation compressible ; on étudie alors la limite formelle de ce système (retrouvant ainsi le système incompressible), et les notions de données « bien » et « mal préparées » sont dégagées.

Le paragraphe 2 traite du cas où les données initiales sont bien préparées, au sens défini dans la section 1.2 ; les premiers travaux concernant la limite incompressible se sont attachés à comprendre ce cas, plus simple.

Dans le paragraphe 3, on s'intéresse au cas général des données mal préparées. On commence par l'étude du cas où les équations sont posées dans l'espace entier (sections 3.1.1 et 3.1.2) : le mot clef de ces études est la dispersion. On s'aperçoit immédiatement que le cas de domaines bornés ne peut être résolu par de tels arguments. Le cas des conditions aux limites périodiques est ainsi traité en détail dans la section 3.2.1, alors que le cas de domaines à bords est effleuré dans la section 3.2.2.

Le dernier paragraphe est consacré à des travaux récents de G. Métivier et S. Schochet concernant la limite incompressible dans le cas non isentropique. Les difficultés mises en évidence dans les paragraphes précédents pour le cas isentropique sont amplifiées ici par le transport couplé de l'entropie : le cas de l'espace entier

présente déjà de nouvelles difficultés (surmontées) alors que le cas périodique reste encore largement à comprendre.

Remarque 1.1. — Le souci de concision nous a amenée à opérer de nombreuses « impasses » dans cette présentation. Ainsi nous avons choisi de ne pas parler de la dimension 1 d'espace (sauf à l'extrême fin de cet exposé pour étudier les équations des fluides non isentropiques), qui relève plutôt de techniques de lois de conservation ; nous renvoyons le lecteur intéressé par les problèmes spécifiques au cas monodimensionnel au livre de P.-L. Lions [40], Chapitre 8.7, et ses références. Notons que pour une étude d'oscillations dans le cas monodimensionnel on pourra aussi consulter l'article [17].

Nous ne parlerons pas non plus d'équations proches des équations d'Euler compressibles comme les équations de l'élasticité ou de la viscoélasticité, ni d'équations de la géophysique ou de la magnéto-hydrodynamique, qui soulèvent des problèmes mathématiques proches de ceux traités ici.

Enfin nous omettrons tout aspect lié à une éventuelle viscosité du fluide : les techniques pour traiter la limite incompressible dans le cas visqueux (passage de Navier–Stokes compressible à Navier–Stokes incompressible) sont bien sûr spécifiques dès que l'on cherche à utiliser l'effet régularisant du laplacien dans l'équation de Navier–Stokes (voir par exemple [10–12], [14], [42], [41] ou encore [46]), mais les effets purement « limite incompressible » sont indépendants de la présence ou non de viscosité — du moins tant qu'on ne traite pas de problèmes aux bords, nous y reviendrons en section 3.2.2 (pour d'autres travaux à ce sujet nous renvoyons le lecteur intéressé à [6], [15], [25], [37]).

Remerciements. — Je souhaite remercier P. Gérard pour de nombreux conseils sur la rédaction de ce texte. J'adresse aussi mes remerciements à R. Danchin et ainsi qu'à G. Métivier pour des discussions sur les questions évoquées ici.

1.1. Présentation des équations et rappels sur le problème de Cauchy

Considérons un fluide compressible parfait évoluant dans un domaine Ω (que nous préciserons) de l'espace d -dimensionnel \mathbb{R}^d , dont la vitesse et la densité en un point $x \in \Omega$ et à un instant $t \in \mathbb{R}^+$ sont notées respectivement $u(t, x)$ (vecteur à d composantes) et $\rho(t, x)$ (scalaire). Ces deux quantités sont reliées par les équations d'Euler compressibles (isentropiques) suivantes :

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) &= 0 \\ \rho &\geq 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \rho^\gamma &= 0 \end{aligned}$$

avec $\gamma > 1$, et les conditions initiales

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Les équations incompressibles quant à elles s'écrivent ainsi :

$$(2) \quad \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0$$

avec toujours la condition initiale $u|_{t=0} = u_0$. Dans l'équation d'Euler incompressible (2), la fonction scalaire p représente la pression du fluide (c'est une inconnue du système, due à la contrainte d'incompressibilité). Remarquons que la densité a été choisie constante dans (2), égale à un pour simplifier. Dans le cas d'un domaine borné (régulier) Ω , il convient de prescrire dans les deux équations une condition au bord : $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

Rappelons quelques résultats sur le problème de Cauchy pour ces deux systèmes d'équations. Ce sont des EDP du premier ordre d'apparence très simple mais nos connaissances en sont relativement faibles : sur les équations compressibles par exemple, la théorie classique permet d'associer à une donnée initiale assez régulière une solution unique sur un temps maximal $[0, T_c]$, qui devient discontinue en T_c . Les solutions discontinues (simplement bornées par exemple) vérifiant l'équation au sens des distributions, ne sont ni uniques, ni stables : pour assurer leur stabilité (et parfois leur unicité), il faut imposer des restrictions, dites « conditions d'entropie de Lax » (voir la théorie de Lax [38]). Nous n'allons pas détailler ici cette théorie, mais simplement énoncer l'une de ses conséquences : dès que la dimension est plus grande que deux, il y a très peu d'entropies et donc très peu d'informations sur les solutions. Nous ne parlerons pas du problème de l'apparition de chocs ici, et notre étude partira du théorème fondamental suivant, qui se démontre en symétrisant le système (1) : en définissant la vitesse du son

$$c \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial(\rho^\gamma)}{\partial\rho} \right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} \rho^{(\gamma-1)/2}$$

le système d'Euler compressible (1) devient

$$(3) \quad \begin{aligned} \partial_t c + u \cdot \nabla c + \frac{\gamma - 1}{2} c \operatorname{div} u &= 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\gamma - 1}{2} c \nabla c &= 0 \end{aligned}$$

et la théorie des systèmes symétriques hyperboliques conduit au théorème suivant (voir par exemple [43], et [44] ou [54] pour le cas de domaines à bords).

THÉORÈME 1.2. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace \mathbb{R}^d , et soit s un entier strictement plus grand que $\frac{d}{2} + 1$. Il existe une constante C telle que si (u_0, c_0) sont des éléments de $H^s(\Omega)$ (u_0 s'annulant au voisinage du bord par exemple), alors il existe un temps T et une unique solution (u, c) dans l'espace $C^0([0, T], H^s(\Omega))$ au système (3).*

En outre on a la minoration suivante sur le temps d'existence : $T \geq \frac{C}{\|(u_0, c_0)\|_{H^s(\Omega)}}$.

Dans ce théorème (et partout dans ce texte), l'espace $H^s(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω , dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s sont de carré intégrable. Dorénavant nous noterons s_0 le plus petit entier strictement plus grand que $\frac{d}{2} + 1$. Notons que l'hypothèse d'annulation de la donnée initiale au voisinage du bord donnée dans l'énoncé du théorème 1.2 est l'une des conditions de compatibilité possibles (voir par exemple [54]). Notons en outre qu'il existe des solutions qui effectivement deviennent singulières en temps fini. Nous renvoyons le lecteur intéressé au travail de T. Sideris [58].

Concernant le système incompressible, la situation est un peu meilleure, du moins en dimension deux d'espace. En effet, en dimension deux, le tourbillon $\omega \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ est conservé le long des caractéristiques : il vérifie l'équation de transport $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ grâce à la condition de divergence nulle sur le champ de vitesse. Cette remarque permet de montrer le théorème suivant (voir [9], [39], [45], [61]).

THÉORÈME 1.3. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace \mathbb{R}^2 , et soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ dont le tourbillon ω_0 est un élément de $L^r(\Omega)$ pour un réel r dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Alors il existe une solution $u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ telle que $\nabla u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^r(\Omega))$. Si $r = +\infty$, alors cette solution $u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ est unique, et le tourbillon est alors borné en temps et en espace.*

En dimension supérieure la situation est moins comprise, et le résultat est le suivant.

THÉORÈME 1.4. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace \mathbb{R}^d , et soit $s \geq s_0$. Si (u_0, c_0) est un élément de $H^s(\Omega)$, alors il existe une unique solution maximale $u \in C^0([0, T], H^s(\Omega))$. Si T est fini alors la norme de u dans $H^s(\Omega)$ tend vers $+\infty$ en T .*

Puisque nous souhaitons ici mettre en valeur les phénomènes intervenant dans la limite incompressible plus que les problèmes liés à l'étude du problème de Cauchy, nous n'avons pas énoncé tous les résultats dans leur plus grande généralité ni leur plus grande subtilité. Nous renvoyons le lecteur intéressé par exemple aux livres de J.-Y. Chemin [9] ou de P.-L. Lions [39] et [40] pour des résultats beaucoup plus précis.

1.2. La limite incompressible

Il y a de multiples façons de mettre en évidence le petit paramètre dans les équations des fluides compressibles (3) (voir par exemple [24] ou [34]). Nous présentons ici la méthode détaillée dans [50]. La limite incompressible étant comprise comme la limite où la vitesse du fluide devient négligeable devant la vitesse du son, on commence par remettre la vitesse à l'échelle, en remplaçant u par εu . Le paramètre ε est le nombre de Mach. La vitesse étant la dérivée de la position d'une particule de fluide par rapport au temps, une particule va donc se déplacer d'une distance $O(\varepsilon)$ pendant un temps de l'ordre de 1 (ou de même d'une distance de l'ordre de 1 en un temps $O(1/\varepsilon)$). Cela suggère de ré-échelonner les variables d'espace x en les remplaçant par x/ε (ou encore

la variable de temps t en la changeant en εt). En associant le changement d'échelle en vitesse à l'un ou l'autre de ces changements d'échelle spatiale ou temporelle, le système (3) devient le suivant :

$$\begin{aligned}\partial_t c + u \cdot \nabla c + \frac{\gamma-1}{2} c \operatorname{div} u &= 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon^2} c \nabla c &= 0.\end{aligned}$$

La dernière hypothèse maintenant consiste à supposer que $c(t, x) = c_1 + \varepsilon \tilde{c}(t, x)$, où c_1 est une constante donnée. En renommant \tilde{c} en c , il vient finalement le système des fluides faiblement compressibles suivant :

$$(4) \quad \begin{aligned}\partial_t c + u \cdot \nabla c + \frac{\gamma-1}{2} c \operatorname{div} u + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon} c_1 \operatorname{div} u &= 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\gamma-1}{2} c \nabla c + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon} c_1 \nabla c &= 0.\end{aligned}$$

Les données initiales sont $u|_{t=0} = u_0$ et $c|_{t=0} = c_0$. Nous verrons ci-dessous qu'il peut être pertinent de remplacer cette donnée initiale fixe par une famille de données dépendant du paramètre ε . Nous allons dorénavant nous intéresser à ce système, et chercher à en comprendre le comportement quand ε tend vers zéro. Formellement, prendre la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (4) revient à annuler les termes ayant le plus grand facteur en ε dans l'équation. On obtient ainsi formellement à la limite

$$(5) \quad \operatorname{div} u = 0, \quad \nabla c = 0,$$

ce qui revient à considérer un fluide incompressible. On s'attend donc à retrouver dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ les équations des fluides incompressibles. On se retrouve alors immédiatement devant une condition de compatibilité sur la donnée initiale : suivant qu'elle vérifie elle-même la condition (5) ou non, on peut avoir plus ou moins de difficultés à passer à la limite dans le système (4). On est ainsi amené à introduire la notion de donnée « bien » ou « mal préparée », portant sur une famille de données initiales indexée par le paramètre ε .

DÉFINITION 1.5. — Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^d et s un réel. Soit $(u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ une famille de champs de vecteurs et soit $(c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions, toutes deux bornées dans $H^s(\Omega)$. On dit que $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est « bien préparée » si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{div} u_{\varepsilon,0} = 0 \quad \text{dans } H^s(\Omega) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla c_{\varepsilon,0} = 0 \quad \text{dans } H^{s-1}(\Omega).$$

Dans le cas contraire, la famille $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est dite « mal préparée ».

Remarque 1.6. — Historiquement l'étude du passage des équations des fluides compressibles aux équations des fluides incompressibles a commencé dans le cas de données « bien préparées » au sens de la définition 1.5. Des notions plus fortes de préparation de données peuvent être trouvées dans la littérature (voir par exemple [7]) mais celle proposée ci-dessus est la plus utilisée. Dans le paragraphe suivant nous présentons

les méthodes employées pour démontrer des théorèmes de convergence des solutions compressibles vers les solutions incompressibles dans ce cadre « bien préparé ». Les autres paragraphes de cet exposé sont consacrés à l'étude (plus difficile) du cas de données quelconques.

2. LE CAS BIEN PRÉPARÉ

Le premier travail mathématique concernant la limite incompressible est dû à S. Klainerman et A. Majda, dans [34] et [35]. Il s'agit d'étudier le temps d'existence des solutions du système (4) et sa dépendance en ε , ainsi que le passage à la limite dans l'équation.

Dans [34] les auteurs s'appuient sur l'étude du système quasilinéaire abstrait suivant :

$$(6) \quad \partial_t u_\varepsilon + \sum_{j=1}^d B^j(u_\varepsilon, \varepsilon) \partial_j u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathbb{T}^d$$

avec donnée initiale $u_\varepsilon|_{t=0} = u_{\varepsilon,0}$. Ils supposent que ce système est symétrisable, au sens où il existe une matrice symétrique définie positive $A^0(u, \varepsilon)$ telle que $A^j \stackrel{\text{déf}}{=} A^0 B^j(u, \varepsilon)$ est symétrique pour tout j . Sous des conditions structurelles sur les matrices B^j et A^j que nous ne détaillons pas, et sous une condition fondamentale d'initialisation sur la famille de données initiales – qui revient à supposer, dans le cas particulier où le système est précisément (4) que la famille de données initiales est bien préparée au sens de la définition 1.5, le résultat de [34] est le suivant. Rappelons que partout dans ce texte s_0 désigne le plus petit entier strictement plus grand que $\frac{d}{2} + 1$.

THÉORÈME 2.1 ([34]). — *Soit $\Omega = \mathbb{T}^d$ un domaine périodique, et soit $s \geq s_0 + 1$. Sous les hypothèses structurelles et d'initialisation évoquées ci-dessus, il existe un temps $T > 0$ indépendant du paramètre ε tel qu'il existe une unique solution u_ε au système (6), bornée dans l'espace $C_w^0([0, T], H^s) \cap C_w^1([0, T], H^{s-1})$.*

L'espace $C_w^0([0, T], H^s)$ est défini en munissant H^s de la topologie faible.

Ce théorème est appliqué dans [34] à de nombreux systèmes de la mécanique des fluides, comme les fluides compressibles (visqueux ou non) ou la magnétohydrodynamique. Dans le cas de la limite incompressible (ce résultat n'est pas démontré pour le système abstrait (6) dans [34]), la borne *a priori* sur $\partial_t u_\varepsilon$ donnée par le théorème 2.1 permet en outre de démontrer le résultat de convergence suivant, par application d'un théorème de compacité de type Ascoli ou Lions-Aubin.

THÉORÈME 2.2 ([34]). — Soit $\Omega = \mathbb{T}^d$ un domaine périodique, et soit $s \geq s_0 + 1$. Si $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est une famille de données bien préparées dans $H^s(\mathbb{T}^d)$, avec $u_{\varepsilon,0}$ convergeant vers un champ de divergence nulle u_0 dans $H^s(\mathbb{T}^d)$, alors il existe un temps $T > 0$ indépendant du paramètre ε tel qu'il existe une unique solution $(u_\varepsilon, c_\varepsilon)$ au système (4), bornée dans l'espace $C_w^0([0, T], H^s) \cap C_w^1([0, T], H^{s-1})$. En outre, la famille u_ε tend vers \bar{u} dans $C_w^0([0, T], H^s)$ où \bar{u} est solution du système incompressible (2) avec donnée initiale u_0 , et ∇c_ε tend vers zéro dans $C_w^0([0, T], H^{s-1})$.

Ce théorème indique que, dans le cas de données bien préparées avec des conditions aux limites périodiques, il y a une solution unique au système (4), bornée uniformément en ε , et cette solution converge vers la solution du système incompressible. Ce théorème est analysé dans [34] comme un nouveau théorème, constructif, d'existence locale aux équations d'Euler incompressibles (2). En revanche, les auteurs ne comparent pas le temps d'existence T obtenu par ce biais de la limite incompressible avec celui que l'on obtiendrait par d'autres méthodes plus directes. En particulier dans le cas bidimensionnel on sait construire des solutions globales au système des fluides incompressibles (voir le théorème 1.3) mais le théorème 2.2 n'indique pas que $T = +\infty$ en dimension deux. Cette question est résolue par les mêmes auteurs dans [35] : dans ce travail l'étude est restreinte aux équations d'Euler compressibles (sans viscosité), aussi bien dans le cas périodique que dans tout l'espace. Le premier résultat de [35] est un théorème d'existence sur un temps uniforme en ε , sans exiger que la donnée soit bien préparée, ce qui est un net progrès par rapport à [34]. Bien entendu dans le cas mal préparé on ne peut espérer obtenir de borne *a priori* sur $\partial_t u_\varepsilon$, mais seulement sur $\varepsilon \partial_t u_\varepsilon$ (et $\varepsilon \partial_t c_\varepsilon$). Ainsi l'on ne peut appliquer de résultat de compacité pour passer à la limite dans l'équation, et dans [35] la restriction aux données bien préparées est nécessaire pour passer à la limite.

THÉORÈME 2.3 ([35]). — Soit $\Omega = \mathbb{T}^d$ ou \mathbb{R}^d , et soit $s \geq s_0 + 1$. Si $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est une famille bornée de $H^s(\Omega)$, alors il existe un temps $\bar{T} > 0$ indépendant du paramètre ε tel qu'il existe une unique solution $(u_\varepsilon, c_\varepsilon)$ au système (4), bornée dans $C_w^0([0, \bar{T}], H^s)$. En outre, supposons que $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ tend vers (u_0, c_0) dans $H^s(\Omega)$ avec $\operatorname{div} u_0 = 0$ et $\nabla c_0 = 0$. On suppose ici que $s \geq s_0 + 2$. Soit alors \bar{u} la solution du système incompressible (2), élément de $C^0([0, T_0[, H^s(\Omega)) \cap C^1([0, T_0[, H^{s-1}(\Omega))$ pour un certain $T_0 > 0$ (qui est infini si $d = 2$). Alors pour tout $T < T_0$, il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, l'équation (4) admet une unique solution sur le temps $[0, T]$, telle que

$$(7) \quad u_\varepsilon \rightarrow \bar{u} \text{ dans } C^0([0, T], H^{s-1}(\Omega)), \quad \text{et} \quad \nabla c_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } C^0([0, T], H^{s-2}(\Omega)).$$

Nous ne détaillerons pas la démonstration de ce théorème ici. Pour obtenir une solution sur un temps uniforme (indépendant de ε et ce sans préparation de la donnée initiale), il faut utiliser l'antisymétrie du terme de « pénalisation » qui intervient dans l'équation : de ce fait ce terme non borné n'intervient pas dans les estimations d'énergie

permettant de montrer l'existence de solutions. L'idée pour obtenir le résultat de convergence (pour une donnée bien préparée) est de former la différence entre la solution de (4) et la solution de (2) et de montrer que tant que cette dernière solution est définie, la différence reste bornée, et tend vers zéro avec ε par application de méthodes d'énergie (pour lesquelles encore une fois le terme pénalisé disparaît).

Notons que des extensions de ce résultat ont permis d'améliorer la classe d'espaces fonctionnels dans lequel la convergence (7) est vraie; nous renvoyons le lecteur par exemple aux travaux de H. Beirao da Veiga [4, 5].

3. LE CAS MAL PRÉPARÉ

Dans ce paragraphe nous allons étudier la limite incompressible sans hypothèse de préparation de la donnée initiale. D'après le théorème 2.3, on sait construire une solution à ce système sur un temps uniforme en ε (en tous cas si Ω est l'espace entier ou le tore, mais nous admettrons que ce résultat est général pour tout domaine régulier) et l'on cherche maintenant à déterminer le comportement asymptotique de cette solution. Nous allons tout d'abord nous concentrer sur le cas où l'équation est posée dans un domaine extérieur : dans la section 3.1.1 nous détaillerons la démonstration du passage à la limite incompressible dans le cas de l'espace entier, en introduisant des estimations dispersives (de type « Strichartz »). Le paragraphe 3.1.2 donnera une indication de l'application de cette méthode au cas d'un domaine extérieur. Le cas de domaines bornés est plus délicat, et nous commencerons par expliquer les phénomènes d'oscillations dans le cas périodique (section 3.2.1), en nous attardant très peu sur le cas de domaines à bords dans la section 3.2.2.

3.1. Le cas de domaines non bornés — dispersion

3.1.1. *Dans l'espace entier.* — Considérons le système (4) posé dans l'espace entier \mathbb{R}^d . Dans [60], S. Ukai démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1 ([60]). — *Soit $\Omega = \mathbb{R}^d$, et soit $s \geq s_0$. Si $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est une famille bornée de $H^s(\Omega)$, convergeant vers (u_0, c_0) dans $H^s(\Omega)$, alors la solution $(u_\varepsilon, c_\varepsilon)$ construite dans le théorème 2.3 vérifie quand ε tend vers zéro, avec les notations de ce théorème,*

$$u_\varepsilon \rightarrow \bar{u} \text{ dans } C_{\text{loc}}^0((0, T] \times \Omega), \quad \text{et} \quad \nabla c_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } C_{\text{loc}}^0((0, T] \times \Omega), \quad \forall T < T_0.$$

Remarquons que le résultat de convergence n'est pas vrai en $t = 0$, ce qui est naturel puisque la donnée initiale n'est pas supposée de type incompressible; il y a donc un phénomène de couche limite en temps. Notons d'autre part que le résultat démontré dans [60] n'est pas tout à fait celui énoncé ci-dessus : S. Ukai démontre la convergence sur le temps d'existence de (4) plutôt que celui de (2), mais nous verrons ci-dessous comment obtenir le résultat de convergence sur $(0, T)$ pour tout $T < T_0$.

La démonstration de ce théorème repose sur l'étude du système linéarisé : la partie de la solution $(u_\varepsilon, c_\varepsilon)$ qui n'est pas dans le noyau de l'opérateur de pénalisation vérifie une équation d'ondes, et l'on utilise alors des estimations de type « Strichartz » pour montrer que cette partie tend vers zéro. On décompose ainsi tout champ $U \stackrel{\text{déf}}{=} (c, u)$ de la manière suivante : $U = \bar{U} + U_{\text{osc}}$ avec $\bar{U} = (0, \bar{u}) = (0, Pu)$, où P est le projecteur de Leray, orthogonal dans L^2 sur les champs de vecteurs de divergence nulle. On pose alors $W_\varepsilon = U_\varepsilon - (0, \bar{u})$, et en écrivant $W_{\varepsilon, \text{osc}} = (c_\varepsilon, w_{\varepsilon, \text{osc}}) = (c_\varepsilon, u_{\varepsilon, \text{osc}})$, il vient :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{w}_\varepsilon + P(u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) - P(\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) &= 0 \\ \partial_t w_{\varepsilon, \text{osc}} + (\text{Id} - P)(u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) + \frac{\gamma - 1}{2} c_\varepsilon \nabla c_\varepsilon + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon} \nabla c_\varepsilon &= 0 \\ \partial_t c_\varepsilon + c_\varepsilon \text{div} w_{\varepsilon, \text{osc}} + \frac{\gamma - 1}{2} u_\varepsilon \cdot \nabla c_\varepsilon + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon} \text{div} w_{\varepsilon, \text{osc}} &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de montrer que W_ε tend vers zéro, ce qui s'obtient en deux étapes : on commence par montrer que la partie « oscillante » $W_{\varepsilon, \text{osc}}$ tend vers zéro, puis on en déduit le résultat cherché sur la partie « non oscillante » \bar{w}_ε en appliquant des méthodes relevant de la stabilité des équations d'Euler incompressibles (essentiellement par application d'un lemme de Gronwall pour absorber le terme $P(u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) - P(\bar{u} \cdot \nabla \bar{u})$).

Nous n'allons pas détailler ces étapes, mais donner un schéma de preuve. Commençons donc par introduire le linéarisé du système « oscillant » : posons ainsi $A(D)U \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t(\text{div} u, \nabla c)$, et étudions

$$(8) \quad \partial_t U + \frac{1}{\varepsilon} A(D)U = 0, \quad U|_{t=0} = U_0.$$

La matrice $A(D)$ s'écrit en variables de Fourier $A(\xi) = i \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}$, et ses valeurs propres sont $\pm i|\xi|$ avec vecteurs propres associés $\pm {}^t(|\xi|, \xi)$. Nous avons affaire à une équation des ondes (il s'agit de l'acoustique), et une estimation de phase stationnaire conduit aux estimations dispersives suivantes : dès que U_0 est à support compact en fréquences, on a

$$(9) \quad \|U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{(d-1)/2} \|U_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Il n'est pas question ici de rappeler la théorie des estimations dispersives et de Strichartz ; nous renvoyons le lecteur par exemple à [21] pour leur démonstration dans le cas des équations des ondes. Ces estimations ont été popularisées dans le domaine des équations aux dérivées partielles à la fois pour leurs propriétés dispersives (qui donnent des résultats asymptotiques pour la limite incompressible comme pour d'autres problèmes de limite singulière) que pour leurs propriétés régularisantes (qui permettent d'améliorer les résultats classiques sur le problème de Cauchy pour de nombreuses équations telles les équations des ondes ou de Schrödinger non linéaires — voir par exemple [3], [32], [33] pour les ondes). Dans notre cadre, l'inégalité (9) permet de montrer par un argument de densité que la norme L^∞ de la solution de (8) tend vers zéro quand ε tend vers zéro, pour tout temps strictement positif. Un argument de

dualité permet d'obtenir le même résultat pour une équation non linéaire du type $\partial_t U + \frac{1}{\varepsilon} A(D)U + Q(U, DU) = 0$, où D est un multiplicateur de Fourier d'ordre un et Q une forme quadratique.

On retourne alors au système vérifié par W_ε : on peut faire disparaître les termes oscillants du système, quand ε tend vers zéro, en interpolant les estimations dispersives avec des bornes *a priori* sur W^ε dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. En utilisant parallèlement le fait que la solution d'un système symétrique hyperbolique existe tant que sa norme Lipschitz en espace reste bornée, on peut en déduire que c'est le temps d'existence de \bar{u} qui va déterminer le temps d'existence de W_ε , ainsi que le fait que W_ε tend vers zéro. Nous ne détaillerons pas plus la démonstration ici, et renvoyons le lecteur intéressé à l'article original [60] ; pour le cas de Navier–Stokes on pourra consulter [13].

Remarque 3.2. — Toujours par utilisation des estimations de Strichartz mais en quantifiant précisément le taux de décroissance en ε donné par la dispersion, A. Dutrifoy et T. H'midi ont montré récemment dans [16] un résultat beaucoup plus précis que celui énoncé dans le théorème 3.1. En particulier ils autorisent la partie « compressible » de la donnée initiale à être non bornée en ε , ce qui leur permet d'obtenir en particulier un théorème d'existence en temps grand pour le problème des poches de tourbillon bidimensionnelles (le rotationnel du champ de vitesses initial est la fonction caractéristique d'un domaine borné de l'espace).

3.1.2. Un domaine extérieur. — Dans le cas d'un domaine extérieur, on s'attend à ce que les mêmes arguments de type dispersifs soient valables ; c'est en effet le cas. Dans le cas d'un demi-espace par exemple, T. Iguchi montre dans [26] la convergence des solutions du système des fluides compressibles (4) vers un champ de vecteur incompressible vérifiant (2), et ce sans hypothèse de préparation de la donnée initiale. Dans [27–29], H. Isozaki quant à lui démontre le même résultat pour le cas d'un domaine extérieur. Là encore la démonstration repose sur une estimation dispersive sur le linéarisé, obtenue par application de méthodes de théorie spectrale. La forme du bord du domaine n'intervient pas.

Nous ne nous attarderons pas plus sur ces cas ici, qui relèvent finalement des mêmes idées que dans le cas de l'espace entier, avec des techniques de théorie spectrale additionnelles.

3.2. Le cas de domaines bornés — oscillations

Nous allons maintenant discuter du cas où les équations sont posées dans un domaine borné régulier de l'espace. Il n'est plus question alors d'utiliser d'estimations dispersives, qui ne peuvent être valables globalement en temps que dans un domaine non borné ; notons qu'il existe des estimations dispersives dans des domaines bornés ou sur le tore pour des équations d'ondes, mais ces estimations ne sont vraies que

localement en temps — remises à l'échelle dans notre cadre, elles ne sont donc pas utilisables car elles deviennent vraies sur un temps de l'ordre de ε seulement.

3.2.1. Conditions aux limites périodiques. — Nous allons présenter ici les techniques de « filtrage » dues à S. Schochet [55] (voir aussi [22]). Considérons une équation abstraite du type suivant

$$(10) \quad \partial_t U_\varepsilon + Q(U_\varepsilon, U_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} A U_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d, \quad U_{\varepsilon|t=0} = U_0,$$

où A est une matrice antisymétrique de multiplicateurs de Fourier, et où Q est une forme quadratique du type $Q(a, b) = \frac{1}{2}(a \cdot \nabla b + b \cdot \nabla a)$. On pourrait bien sûr généraliser le cadre d'étude en choisissant une forme quadratique Q moins particulière, mais nous gardons celle-ci ici afin d'alléger les notations.

On suppose ici que le champ de vecteurs U_ε a d' composantes, avec $d' \geq d$ (ce qui est le cas pour la limite incompressible en particulier). La question de l'existence d'une solution sur un temps uniforme est résolue assez simplement, en remarquant que l'antisymétrie de A conduit à des estimations d'énergie sur (10) indépendantes de ε . On cherche à déterminer le comportement asymptotique de cette solution, ainsi que la dépendance en ε de son temps d'existence. Posons $\tilde{U}_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} e^{-\frac{t}{\varepsilon} A} U_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}(-t/\varepsilon) U_\varepsilon$. En remarquant que \mathcal{A} commute avec les dérivations, le champ \tilde{U}_ε vérifie le système suivant :

$$(11) \quad \partial_t \tilde{U}_\varepsilon + \mathcal{A}(-t/\varepsilon) Q(\mathcal{A}(t/\varepsilon) \tilde{U}_\varepsilon, \mathcal{A}(t/\varepsilon) \tilde{U}_\varepsilon) = 0.$$

Comme $\mathcal{A}(\pm t/\varepsilon)$ est unitaire dans tous les espaces de Sobolev H^s (par l'antisymétrie de A), on dispose d'estimations *a priori* sur $\partial_t \tilde{U}_\varepsilon$ et l'on en déduit que le champ \tilde{U}_ε converge fortement (dans un espace de type Sobolev) vers un champ limite U . Toute la question revient maintenant à déterminer l'équation vérifiée par ce champ limite ; nous allons montrer qu'aussi longtemps que U existe, il existe aussi une solution au système de départ (10) et que celle-ci converge (en un certain sens) vers U . Commençons par déterminer l'équation vérifiée par U , en passant à la limite (au sens des distributions) dans l'équation sur \tilde{U}_ε . S'il est facile de passer à la limite au sens des distributions dans les termes linéaires, c'est *a priori* moins aisé dans les termes non linéaires de (11) ; en effet on ne dispose pas d'information de convergence forte de $\mathcal{A}(t/\varepsilon) \tilde{U}_\varepsilon$. Écrivons la matrice A en variables de Fourier ; son caractère antisymétrique permet d'introduire une base orthogonale de vecteurs propres $(e_j(n))_{1 \leq j \leq d'}$ avec les valeurs propres associées $i\lambda_j(n)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, avec $\lambda_j(n) \in \mathbb{R}$. Notons ici que les variables de Fourier n sont discrètes puisque l'on est dans un cadre périodique. Ainsi l'on a pour tout champ de vecteurs a et en notant \mathcal{F} la transformée de Fourier et (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans $\mathbb{C}^{d'}$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathcal{F}(e^{-\frac{t}{\varepsilon} A} a)(n) = \sum_{j=1}^{d'} e^{-i\frac{t}{\varepsilon} \lambda_j(n)} (\mathcal{F}a(n), e_j(n)) e_j(n).$$

La forme quadratique apparaissant dans l'équation satisfaite par \tilde{U}_ε s'écrit ainsi

$$(12) \quad \mathcal{F}\mathcal{Q}_\varepsilon(a, a)(n) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathcal{F}\{\mathcal{A}(-t/\varepsilon)Q(\mathcal{A}(t/\varepsilon)a, \mathcal{A}(t/\varepsilon)a)\}(n) = \sum_{j=1}^{d'} q_{\varepsilon, j}(n) e_j(n),$$

avec $q_{\varepsilon, j}(n) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{j', j''=1}^{d'} \sum_{k+m=n} e^{i\frac{t}{\varepsilon} \lambda_{j, j', j''}^{k, m, n}} F_{j, j', j''}^{k, m, n}(\hat{a}_k; \hat{a}_m)$

et où $\lambda_{j, j', j''}^{k, m, n} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lambda_{j'}(k) + \lambda_{j''}(m) - \lambda_j(n)$. On a noté \hat{a}_k la transformée de Fourier de a au point k . La forme exacte du terme bilinéaire $F_{j, j', j''}^{k, m, n}(\hat{a}_k; \hat{a}_m)$ ne nous sera pas nécessaire ici, nous la présentons ci-dessous pour être complet : on a précisément

$$F_{j, j', j''}^{k, m, n}(\hat{a}_k; \hat{a}_m) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} (\hat{a}(k), e_{j'}(k))(e_{j'}(k), m)(\hat{a}(m), e_{j''}(m))(e_{j''}(m), e_j(n)).$$

Pour obtenir la limite au sens des distributions de cette quantité (12), il suffit d'appliquer un théorème de phase non stationnaire et l'on obtient immédiatement la forme quadratique limite : il s'agit de restreindre les fréquences (k, m, n) , dans la sommation intervenant dans (12), à celles annulant la phase d'oscillation $\lambda_{j, j', j''}^{k, m, n}$. On obtient

$$(13) \quad \mathcal{F}\mathcal{Q}(a, a)(n) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{j=1}^{d'} q_j(n) e_j(n),$$

avec $q_j(n) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{j', j''=1}^{d'} \sum_{(k, m) \in R_{j, j', j''}(n)} F_{j, j', j''}^{k, m, n}(\hat{a}_k; \hat{a}_m)$.

On a noté $R_{j, j', j''}(n)$ l'ensemble des résonances

$$R_{j, j', j''}(n) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{(k, m) \in \mathbb{Z}^{2d}, k + m = n \text{ et } \lambda_{j'}(k) + \lambda_{j''}(m) - \lambda_j(n) = 0\}.$$

Cet ensemble a une importance fondamentale dans la compréhension du système limite, nous y reviendrons plus bas. Énonçons pour l'instant le théorème de convergence de \tilde{U}_ε vers U , aussi longtemps qu'existe U . Ce résultat est dû à S. Schochet [55] (voir aussi [19], où en particulier le terme suivant de l'asymptotique est calculé).

THÉORÈME 3.3 ([55]). — *Soit $U_0 \in H^s(\mathbb{T}^d)$, avec $s \geq s_0 + 2$, et soit $U \in C^0([0, T], H^s(\mathbb{T}^d))$ la solution du système*

$$(14) \quad \partial_t U + \mathcal{Q}(U, U) = 0,$$

où la forme quadratique \mathcal{Q} a été définie en (13). Alors il existe ε_T tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_T$ la solution U_ε de (10) est un élément de l'espace $C^0([0, T], H^s(\mathbb{T}^d))$ et $U_\varepsilon - \mathcal{A}(t/\varepsilon)U$ tend vers zéro dans $C^0([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^d))$.

La démonstration de ce théorème consiste à étudier $W_\varepsilon \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathcal{A}(-t/\varepsilon)U_\varepsilon - U$, qui vérifie

$$(15) \quad \partial_t W_\varepsilon + \mathcal{Q}_\varepsilon(W_\varepsilon, W_\varepsilon + 2U) = (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_\varepsilon)(U, U).$$

Il y a ici une réelle difficulté due au fait que $(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_\varepsilon)(U, U)$ ne converge vers zéro qu'au sens des distributions, par application du théorème de la phase non stationnaire. Ainsi l'on ne peut espérer conclure par une simple estimation d'énergie. L'idée de S. Schochet est de constater que $(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_\varepsilon)(U, U)$ est en fait fortement oscillante en temps et n'est ainsi qu'une petite perturbation de l'équation $\partial_t W_\varepsilon + \mathcal{Q}_\varepsilon(W_\varepsilon, W_\varepsilon + 2U) = 0$. Précisons cette idée. On commence par se ramener au cas où les fréquences dans la sommation de (13) (et de même dans celle intervenant dans \mathcal{Q}_ε) sont uniformément bornées par un paramètre N . L'erreur commise en omettant les « hautes » fréquences en k , m ou n est arbitrairement petite pourvu que N soit assez grand, et ce uniformément en ε : on n'utilise pour cela que la régularité de U , qui ne dépend pas de ε . Une fois les fréquences k , m et n restreintes à la boule de \mathbb{Z}^{3d} de rayon N , on peut introduire la fonction auxiliaire suivante

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\varepsilon, N} &\stackrel{\text{déf}}{=} W_\varepsilon + \varepsilon R_{\varepsilon, N}, \quad \text{avec} \\ \mathcal{F}R_{\varepsilon, N}(n) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{|k|, |m|, |n| \leq N \\ k+m=n}} \sum_{(k, m) \notin R_{j, j', j''}(n)} \frac{i}{\lambda_{j, j', j''}^{k, m, n}} e^{i \frac{t}{\varepsilon} \lambda_{j, j', j''}^{k, m, n}} F_{j, j', j''}^{k, m, n}(\widehat{U}_k; \widehat{U}_m) e_j(n). \end{aligned}$$

Cette fonction est aussi régulière qu'on peut le souhaiter (elle est à fréquences bornées), et sa vertu est d'éliminer le terme oscillant de l'équation (15) sur W_ε . On a en effet, en notant $(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_\varepsilon)^N(U, U)$ la partie « hautes fréquences » du membre de droite de (15) (qui comme noté ci-dessus est arbitrairement petite, uniformément en ε),

$$\partial_t \widetilde{W}_{\varepsilon, N} + \mathcal{Q}_\varepsilon(\widetilde{W}_{\varepsilon, N} - \varepsilon R_{\varepsilon, N}, \widetilde{W}_{\varepsilon, N} - \varepsilon R_{\varepsilon, N} + 2U) = (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_\varepsilon)^N(U, U) + \varepsilon R_{\varepsilon, N}^t(U, U),$$

où $R_{\varepsilon, N}^t$ provient de la dérivée en temps de $R_{\varepsilon, N}$: cette dérivée est égale d'une part à l'opposé du terme « basses fréquences » du membre de droite de (15) (ce qui permet de l'éliminer) et d'autre part à des termes résiduels dus aux dérivées temporelles de U . Mais comme ce terme $R_{\varepsilon, N}^t$ est aussi à fréquences bornées, il est régulier et $\varepsilon R_{\varepsilon, N}^t$ est donc arbitrairement petit pour tout N . Finalement $\widetilde{W}_{\varepsilon, N}$ vérifie une équation de type quasilinear à données petites (de l'ordre de ε), avec un terme source arbitrairement petit. Des arguments classiques permettent de montrer que le temps d'existence de cette équation n'est limité que par celui de U , et que $\widetilde{W}_{\varepsilon, N}$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini et ε vers zéro. Cela clôt la démonstration du théorème 3.3 : rappelons en effet que $\varepsilon R_{\varepsilon, N}$ est arbitrairement régulier pour tout N fixé, et arbitrairement petit (pour ε assez petit), donc la limite de $\widetilde{W}_{\varepsilon, N}$ est celle de W_ε , aussi longtemps que U est définie. Nous renvoyons le lecteur à [55] pour des détails.

Nous pouvons à présent appliquer ce théorème aux équations des fluides compressibles (4), et obtenir ainsi le comportement asymptotique de ses solutions ; le problème revient à analyser le système limite (14) dans le cas de la limite incompressible, c'est-à-dire plus précisément comprendre l'ensemble des résonances $R_{j, j', j''}(n)$ dans le cas où l'opérateur A est la matrice de l'acoustique, introduite dans l'équation (8) au paragraphe 3.1.1. Nous avons dans ce cas $d' = d + 1$ où d est la dimension d'espace, et

les valeurs propres sont $\lambda_{\pm}(n) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \pm|n|$ et $\lambda_0 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} 0$. Le mode 0 correspond aux champs incompressibles, dans le noyau de l'opérateur acoustique. Décrivons plus précisément l'ensemble résonant : si nous posons $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout $j \in \{1, \dots, d'\}$, alors $R_{j,j',j''}$ est du type

$$R_{j,j',j''}(n) = \{(k, m) \in \mathbb{Z}^{2d}, k + m = n, \text{ et } \varepsilon_{j'}|k| + \varepsilon_{j''}|m| - \varepsilon_j|n| = 0\}.$$

On s'aperçoit ainsi que dans le cas particulier où $\varepsilon_j = \varepsilon_{j'} = \varepsilon_{j''} = 0$, qui correspond à l'interaction des modes incompressibles, le terme bilinéaire dans l'équation limite (14) est précisément le terme quadratique habituel des équations incompressibles $P(\bar{u} \cdot \nabla \bar{u})$, où P est le projecteur de Leray sur les champs de divergence nulle (c'est un fait général, les termes non oscillants n'interagissent pas entre eux autrement que de manière non oscillante). Plus intéressante est certainement l'étude des interactions compressible–compressible. On peut montrer que cette interaction prise sur le mode incompressible ($\varepsilon_j = 0$ et $\varepsilon_{j'}\varepsilon_{j''} \neq 0$) produit un terme gradient, et est donc responsable du terme $-\nabla p$ dans l'équation limite incompressible (voir par exemple [22], [47]). Ce qui importe donc est d'étudier l'interaction compressible–compressible sur un mode compressible, c'est-à-dire l'ensemble des résonances dans le cas où le produit $\varepsilon_j\varepsilon_{j'}\varepsilon_{j''}$ est non nul. Cette analyse a été menée précisément par N. Masmoudi dans [47]. Ainsi il a démontré que la condition de résonance

$$k + m = n \quad \text{et} \quad \pm|k| \pm|m| \pm|n| = 0$$

détermine un très faible nombre de triplets (k, m, n) , si faible que finalement le terme bilinéaire de type compressible–compressible se comporte sur les modes compressibles comme si l'on était en dimension un d'espace. Plus précisément on peut se convaincre (voir [47], ainsi que [11] pour des calculs plus quantitatifs) que deux éléments k et m de l'ensemble de résonance sont nécessairement colinéaires. N. Masmoudi restreint alors son étude aux éléments de

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{p \in \mathbb{Z}^d, p_1 \wedge \dots \wedge p_d = 1 \text{ et } p_1 > 0\}.$$

En réécrivant la forme quadratique en décomposant les variables de Fourier sur \mathcal{P} , il est alors possible de se ramener à des calculs purement monodimensionnels. Cela induit naturellement des estimations bien meilleures que les estimations de produit habituelles (la régularité Sobolev du produit de deux fonctions se dégrade essentiellement d'un facteur 1/2 avec chaque dimension d'espace supplémentaire); ainsi l'on peut démontrer assez aisément que le facteur limitant pour le temps d'existence des solutions du système limite (14) est le temps d'existence des équations d'Euler incompressibles. En particulier en dimension deux d'espace ce système limite est globalement bien posé.

On peut finalement démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.4 ([55], [47]). — *Soit $U_0 \in H^s(\mathbb{T}^d)$, avec $s \geq s_0 + 2$. Soit T^* le temps d'existence des solutions de l'équation des fluides incompressibles (2) dans*

$H^s(\mathbb{T}^d)$. Alors la solution U du système limite (14) associé à l'équation faiblement compressible (4) appartient à $C^0([0, T^*), H^s(\mathbb{T}^d))$ et pour tout temps $T < T^*$, il existe ε_T tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_T$ la solution U_ε de (14) est un élément de l'espace $C^0([0, T], H^s(\mathbb{T}^d))$ et $U_\varepsilon - \mathcal{A}(t/\varepsilon)U$ tend vers zéro dans $C^0([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^d))$.

Remarque 3.5. — Nous n'avons pas précisé ici la forme exacte du système limite des équations des fluides compressibles périodiques. Il s'agit du système suivant : la limite U s'écrit $U = \bar{U} + U_{\text{osc}} = (0, \bar{u}) + U_{\text{osc}}$ avec

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \nabla p &= 0, & \operatorname{div} \bar{u} &= 0 \\ \partial_t U_{\text{osc}} + \mathcal{Q}_{\text{osc}}(U_{\text{osc}}, U_{\text{osc}} + 2\bar{U}) &= 0, \end{aligned}$$

où \mathcal{Q}_{osc} est définie comme dans (13), restreinte aux modes $\lambda_j \neq 0$ (le mode nul est représenté dans l'équation en \bar{u}). En particulier cette forme quadratique \mathcal{Q}_{osc} , agissant sur des modes compressibles (*i.e* associés à une valeur propre non nulle de A) vérifie des estimations de type monodimensionnelles.

3.2.2. Un domaine à bord. — Pour clore cette présentation de la limite incompressible dans le cas isentropique, nous allons très brièvement considérer le cas où l'équation est posée dans un domaine de l'espace, avec condition $u \cdot n = 0$ au bord.

Dans le cas des équations non visqueuses il y a assez peu de travaux sur le sujet ; nous présentons ici les travaux de P. Secchi [56, 57]. L'existence de solutions sur un temps uniforme est démontrée sans hypothèse de préparation de la donnée initiale, comme dans [35]. La méthode repose toujours sur des estimations d'énergie utilisant l'antisymétrie de l'opérateur acoustique. Pour démontrer des résultats de convergence en revanche, P. Secchi démontre la convergence faible des solutions vers les solutions du système des fluides incompressibles, et la convergence forte n'est obtenue que dans le cas de données préparées au sens de la définition 1.5.

La situation est donc pour l'instant assez peu comprise dans le cas d'un domaine borné général. Notons au passage que pour les équations de Navier–Stokes compressibles avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, la situation est plus favorable : dans [14], B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions et N. Masmoudi démontrent en effet que sous une hypothèse géométrique sur le domaine (toutes les solutions du problème surdéterminé $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$ dans Ω avec φ constant sur le bord et $\partial_n\varphi = 0$ sur le bord, doivent être nulles) alors il y a convergence forte des solutions compressibles vers les solutions incompressibles. C'est un résultat surprenant au vu de ce que nous avons constaté dans le cas périodique (les ondes acoustiques dans le cas périodique ne disparaissent pas à la limite) ; cela est dû à l'absorption par le bord des ondes acoustiques, par un phénomène de couche limite propre au cas visqueux.

4. LES ÉQUATIONS NON ISENTROPIQUES

4.1. Présentation

Le dernier paragraphe de ce texte concerne une extension de l'étude de la limite incompressible au cas d'équations non isentropiques. Jusqu'ici en effet nous avons occulté le fait qu'un fluide compressible peut vérifier des équations plus générales que (1), dans lesquelles il faut prendre en compte le transport de l'entropie. Les équations sont ainsi les suivantes :

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u = 0 \\
 & \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \nabla p = 0 \\
 & \partial_t S + u \cdot \nabla S = 0 \\
 & (\rho, u, S)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, S_0)
 \end{aligned}$$

où ρ est la densité, p est la pression, u est la vitesse et S l'entropie. Ces variables sont reliées par l'équation d'état $\rho = R(S, p)$, et la vitesse du son c est donnée par $\frac{1}{c^2} = \frac{\partial R}{\partial p} > 0$. Dans la suite nous définirons aussi $A \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p}$.

Nous renvoyons à l'exposé [49] pour une présentation de ces équations, ainsi que pour la symétrisation et le changement d'échelle dans (16) conduisant finalement au système suivant :

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & a_\varepsilon(\partial_t q_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla q_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\
 & r_\varepsilon(\partial_t v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q_\varepsilon = 0 \\
 & \partial_t S_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla S_\varepsilon = 0 \\
 & (q_\varepsilon, v_\varepsilon, S_\varepsilon)|_{t=0} = (q_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon,0}, S_{\varepsilon,0})
 \end{aligned}$$

où $a_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}(S, \varepsilon q)$ et $r_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}(S, \varepsilon q)$. Les fonctions \mathcal{A} et \mathcal{R} correspondent aux fonctions A et R précédentes, écrites dans les nouvelles variables (S, q) plutôt que (S, p) .

Comme dans le cas isentropique étudié ci-dessus, deux questions se posent : y a-t-il des solutions au système (17) bornées uniformément en ε , sur un intervalle de temps indépendant de ε ? Si oui, quel est leur comportement quand ε tend vers zéro ? Pour deviner le système limite, comme dans le cas isentropique on annule les termes non bornés dans l'équation (17) : on trouve $\operatorname{div} v_\varepsilon = 0$ et $\nabla q_\varepsilon = 0$, et ainsi on s'attend à obtenir à la limite le système incompressible suivant :

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & r_0(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \nabla P = 0 \\
 & \partial_t S + v \cdot \nabla S = 0 \\
 & \operatorname{div} v = 0
 \end{aligned}$$

avec naturellement $r_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}(S, 0)$.

4.2. Le problème de Cauchy

Contrairement au cas isentropique étudié dans les paragraphes précédents, la question de l'existence de solutions bornées en ε sur un temps indépendant de ε est loin d'être immédiate : à première vue on peut chercher à faire fonctionner l'argument habituel d'antisymétrie du terme de pénalisation, mais cette méthode tombe immédiatement en défaut à cause du couplage avec l'entropie. On se convainc aisément de ce fait en étudiant le système modèle linéarisé suivant (nous reprenons ici un exemple de [50]) :

$$(19) \quad \begin{aligned} a(S)\partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x u_\varepsilon &= 0 \\ \partial_t S &= 0 \\ (u_\varepsilon, S)|_{t=0} &= (u_0, S_0). \end{aligned}$$

Si S est un état constant $S = \underline{S}$ alors

$$u_\varepsilon(t, x) = u_0\left(x - \frac{t}{\varepsilon a(\underline{S})}\right).$$

Ainsi une petite perturbation de l'état constant \underline{S} induit une grande perturbation dans u_ε , et le système (19) est donc instable. Dans [50] G. Métivier et S. Schochet démontrent néanmoins le théorème suivant sur le système complet (17).

THÉORÈME 4.1 ([49, 50]). — *Soit $s \geq s_0$, soit $M_0 > 0$ et soit $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou \mathbb{T}^d . Si les données initiales $(v_{\varepsilon,0}, q_{\varepsilon,0}, S_{\varepsilon,0})$ sont uniformément bornées dans $H^s(\Omega)$ par M_0 , alors il existe une unique solution $(v_\varepsilon, q_\varepsilon, S_\varepsilon)$ à (17), uniformément bornée dans $C^0([0, T], H^s(\Omega))$ où T ne dépend que de M_0 ; en outre $\partial_t S_\varepsilon$ et $\partial_t \operatorname{rot}(r_\varepsilon v_\varepsilon)$ sont bornées respectivement dans $C^0([0, T], H^{s-1}(\Omega))$ et $C^0([0, T], H^{s-2}(\Omega))$.*

L'idée de la démonstration de ce théorème peut se lire sur le système modèle (19) : l'étude du système linéarisé ne donnant pas de résultat satisfaisant, il convient d'étudier directement le système non linéaire de départ. Afin de simplifier la présentation, nous allons plutôt expliquer la démarche de [50] sur le système modèle suivant :

$$(20) \quad \begin{aligned} \sigma_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x u_\varepsilon &= 0 \\ \partial_t \sigma_\varepsilon + a(u_\varepsilon) \partial_x \sigma_\varepsilon &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce système u_ε joue le rôle des variables $(q_\varepsilon, \operatorname{div} v_\varepsilon)$ et σ_ε celui de $(S_\varepsilon, \operatorname{rot}(r_\varepsilon v_\varepsilon))$.

Pour éviter de se ramener par une estimation d'énergie à un cadre linéarisé (instable), on commute la première équation de (20) non pas avec ∂_x^k , méthode usuelle mais qui conduirait ici à une équation instable, mais plutôt avec $(\frac{1}{\sigma_\varepsilon} \partial_x)^k$. Ainsi comme $\partial_t \sigma_\varepsilon$ et σ_ε sont estimées (dans H^{s-1} et H^s respectivement) par $\|u_\varepsilon\|_{H^s}$ d'après la seconde équation de (20), les commutateurs supplémentaires obtenus peuvent être absorbés par une inégalité de type Gronwall. Cette démarche peut être mise en œuvre de manière analogue pour le système de départ (17) ce qui démontre le théorème 4.1.

Notons que dans [50] ce théorème d'existence est démontré pour une classe plus générale d'équations, faisant apparaître l'importance de la structure spéciale non linéaire. Nous ne donnerons pas plus de détails sur la preuve du théorème 4.1 et renvoyons à [50] pour toute la démonstration.

La question de l'existence de solutions uniformément bornées étant désormais résolue, nous allons à présent nous attacher à comprendre le comportement asymptotique de ces solutions quand ε tend vers zéro. Dans le cas isentropique nous avons constaté que l'étude est plus simple dans le cas de \mathbb{R}^d que dans \mathbb{T}^d . C'est le cas aussi (et bien plus encore) dans le cas non isentropique; nous allons donc commencer par nous pencher sur le cas d'équations posées dans l'espace entier dans la section 4.3, en présentant le résultat de convergence de [50]. Nous étudierons le cas périodique dans la dernière section 4.4, en nous appuyant sur le travail [51], ainsi que sur [49]; il ne sera pas question de domaines à bords dans cette étude du cas non isentropique (pour une étude du cas de domaines à bords nous renvoyons à l'article de S. Schochet [54] pour des données bien préparées, ainsi qu'au travail récent de T. Alazard [1] dans le cas général). Notons pour terminer que des études formelles dans le cas visqueux (périodique) ont été menées dans [6]; ici comme partout ailleurs dans ce texte l'on se restreint aux équations sans viscosité.

4.3. Asymptotique dans \mathbb{R}^d

Commençons par énoncer le théorème de convergence démontré dans [50].

THÉORÈME 4.2 ([49, 50]). — Soit $s \geq s_0$ et soit $\Omega = \mathbb{R}^d$. On suppose que les données initiales $(v_{\varepsilon,0}, q_{\varepsilon,0}, S_{\varepsilon,0})$ sont uniformément bornées dans $H^s(\Omega)$ et convergent vers (v_0, q_0, S_0) dans $H^s(\Omega)$ quand ε tend vers zéro, avec l'hypothèse de décroissance à l'infini suivante pour S_0 :

$$(21) \quad |S_0(x)| \leq \frac{C}{|x|^{1+\delta}} \quad \text{et} \quad |\nabla S_0(x)| \leq \frac{C}{|x|^{2+\delta}}, \quad \delta > 0.$$

Alors la famille de solutions $(v_\varepsilon, q_\varepsilon, S_\varepsilon)$ construite dans le théorème 4.1 converge dans l'espace $L^2([0, T], H_{\text{loc}}^{s'}(\Omega))$ pour tout $s' < s$, vers $(v, 0, S)$ où (v, S) est l'unique solution de (18) avec donnée (w_0, S_0) et w_0 est l'unique solution de

$$\operatorname{div} w_0 = 0, \quad \operatorname{rot}(\bar{r}_0 w_0) = \operatorname{rot}(\bar{r}_0 v_0), \quad \text{où} \quad \bar{r}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}(S_0, 0).$$

Donnons une idée de la démonstration de ce résultat.

La première étape consiste à obtenir de la compacité en espace, en utilisant les estimations uniformes données par le théorème 4.1. Ainsi l'on peut montrer facilement que S_ε converge fortement (quitte à extraire une sous-suite, ce que nous omettrons de signaler dorénavant) vers une fonction S dans $C^0([0, T], H_{\text{loc}}^{s'}(\Omega))$ et que $(q_\varepsilon, v_\varepsilon)$ converge faiblement dans $L^\infty([0, T], H^s(\Omega))$ vers un certain (q, v) . Enfin $\operatorname{rot}(r_\varepsilon v_\varepsilon)$ converge fortement dans $L^\infty([0, T], H_{\text{loc}}^{s'-1}(\Omega))$ vers $\operatorname{rot}(r_0 v)$, où nous rappelons que

$r_0 = \mathcal{R}(S, 0)$. On se convainc aussi (il suffit de multiplier les équations par ε et de passer à la limite) que

$$q = 0, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t S + v \cdot \nabla S = 0.$$

Reste à montrer le point le plus délicat du théorème, c'est-à-dire la convergence forte de q_ε vers zéro, et celle de v_ε vers v vérifiant le système limite (18).

Comme dans le cas isentropique, on commence par décomposer v_ε en une composante sur le noyau de l'opérateur de pénalisation (qui sera compacte en temps et en espace), et un reste : écrivons donc

$$v_\varepsilon = \bar{v}_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon, \quad \text{avec} \quad P v_\varepsilon = \bar{v}_\varepsilon,$$

où nous rappelons que P est le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs de divergence nulle. La suite \bar{v}_ε est compacte en temps, elle converge donc fortement vers v et l'on va maintenant s'attacher à montrer que $\tilde{V}_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} (q_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)$ converge fortement vers zéro. Pour cela il faut contrôler les oscillations en temps de cette suite de fonctions, ce qui passe par l'étude du linéarisé

$$\partial_t (\mathcal{A}(S_\varepsilon, 0) \partial_t W_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^2} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mathcal{R}(S_\varepsilon, 0)} \nabla W_\varepsilon \right) = 0.$$

Ce système est proche de l'équation des ondes (8) au fait près qu'il est à coefficients variables. Ainsi le calcul direct en variables de Fourier que nous avons pratiqué en section 3.1.1 pour obtenir la dispersion des ondes acoustiques n'est plus opérant ici. Nous obtiendrons à la place un résultat de décroissance de l'énergie locale qui permettra de conclure. Un tel résultat est obtenu dans [50] par utilisation de la théorie des mesures de défaut. Nous renvoyons le lecteur à [20] et [59] pour l'introduction de cette théorie (ainsi qu'à [8] pour une présentation générale et des applications).

L'idée de la démonstration de [50] est assez simple à décrire, et nous allons en rester à cette description générale sans rentrer dans l'implémentation technique de la preuve (celle-ci requiert entre autres une écriture par paquets d'ondes (en temps) : un résumé de la méthode peut être trouvé dans [49]). Notons \mathcal{K} (respectivement \mathcal{L}) l'espace des opérateurs compacts (respectivement à trace) sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Les mesures de défaut microlocales de \tilde{V}_ε se définissent de la manière suivante : quitte à extraire une sous-suite, il existe une mesure de Radon positive μ sur \mathbb{R}^2 et il existe M μ -intégrable à valeurs dans \mathcal{L} telle que pour toute fonction a dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ à valeurs dans \mathcal{K} , l'opérateur pseudo-différentiel semi-classique associé $A \stackrel{\text{déf}}{=} a(t, \varepsilon D_t)$ vérifie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A \tilde{V}_\varepsilon, \tilde{V}_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Tr} (M(t, \tau) a(t, \tau)) \mu(dt, d\tau).$$

Le point important est que les mesures de défaut microlocales sont supportées sur la variété caractéristique de l'équation, ce qui signifie ici que

$$\mathcal{A}(S(t, \cdot), 0) \tau^2 M(t, \tau) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mathcal{R}(S(t, \cdot), 0)} \nabla \right) M(t, \tau) = 0, \quad \mu \text{ p.p.}$$

On utilise alors le fait que la condition (21) est propagée par l'équation de transport $\partial_t S + v \cdot \nabla S = 0$ ainsi que le résultat suivant (dont une démonstration peut se trouver dans [50], paragraphe 5) : le noyau de $a\tau^2 + \operatorname{div}(b\nabla)$ est réduit à zéro, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, s'il existe une constante \bar{a} telle que

$$|a(x) - \bar{a}| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{1+\delta}}, \quad |\nabla a(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{2+\delta}}$$

et de même pour b (avec une autre constante $\bar{b} \neq 0$). En combinant ces deux propriétés l'on obtient que $M = 0$. En corollaire on peut en déduire que la mesure de défaut de \tilde{V}_ε est nulle, et les estimations a priori sur \tilde{v}_ε et q_ε permettent finalement de démontrer que \tilde{V}_ε converge fortement vers zéro dans $L^2([0, T], H_{\text{loc}}^{s'}(\mathbb{R}^d))$, pour tout $s' < s$.

On conclut enfin la démonstration en passant à la limite dans l'équation en v_ε : tous les termes de l'équation ont une limite forte, et l'équation (18) est obtenue sans difficulté.

L'implémentation de ces principes est techniquement délicate et nous renvoyons donc le lecteur à [50] pour la démonstration détaillée (un bref exposé peut être trouvé dans [49]).

4.4. Asymptotique dans \mathbb{T}^d

Dans cette section finale nous allons nous intéresser aux équations non isentropiques (17) dans le cas où le domaine d'espace est périodique.

Le résultat que nous allons présenter est celui de G. Métivier et S. Schochet [51] (nous nous inspirerons aussi de l'exposé [49]). Considérons une suite de solutions $(q_\varepsilon, v_\varepsilon, S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ donnée par le théorème 4.1, associée à une famille de données initiales $(q_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon,0}, S_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$. Cette suite de solutions vérifie les mêmes estimations *a priori* que dans le cas \mathbb{R}^d (rappelons que le théorème 4.1 est valable aussi bien dans tout l'espace que dans le cas périodique). L'étape de compacité en espace se déroule donc aussi bien que dans la section 4.3 précédente. On a donc convergence forte de S_ε et $\operatorname{rot}(r_\varepsilon v_\varepsilon)$ dans $C^0([0, T], H^{s'}(\mathbb{T}^d))$ et $C^0([0, T], H^{s'-1}(\mathbb{T}^d))$ respectivement, et le couple $(q_\varepsilon, v_\varepsilon)$ converge faiblement dans l'espace $L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^d))$ vers (q, v) , avec

$$(22) \quad \nabla q = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \partial_t S + v \cdot \nabla S = 0.$$

On peut aussi montrer (voir [51] Lemme 8.2) que q ne dépend pas non plus du temps, et est donc une constante en t et en x . Cherchons maintenant l'équation vérifiée par v . C'est ici que se fait la différence avec le cas \mathbb{R}^d : de la même façon que dans le cas isentropique, on ne peut espérer *a priori* dans le cas périodique de convergence forte sur les composantes acoustiques, et l'on va introduire la décomposition suivante :

$$v_\varepsilon = \bar{v}_\varepsilon + \frac{1}{r_\varepsilon} \nabla h_\varepsilon \quad \text{où} \quad \operatorname{div} \bar{v}_\varepsilon = 0.$$

Comme précédemment \bar{v}_ε converge fortement vers v dans $C^0([0, T], H^{s'}(\mathbb{T}^d))$, et l'on peut passer à la limite au sens des distributions dans tous les termes de l'équation

vérifiée par v_ε , sauf dans les termes bilinéaires en h_ε (puisque h_ε ne converge que faiblement). En suivant les notations de [49], posons $\mathcal{B} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho}$ et $b_0 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathcal{B}(S, 0)$. En écrivant

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} -\frac{b_0}{2r_0} \nabla \kappa^{(1)} + \frac{1}{2r_0} \nabla \kappa^{(2)}$$

$$\kappa^{(1)} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varepsilon \partial_t h_\varepsilon|^2 \quad \text{et} \quad \kappa^{(2)} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\nabla h_\varepsilon|^2,$$

il vient à la limite (rappelons que $r_0 = \mathcal{R}(S, 0)$)

$$(23) \quad r_0(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \mathcal{E} + \nabla P = 0, \quad \text{div } v = 0,$$

avec la même donnée initiale que dans le cas $\mathbb{R}^d : v|_{t=0} = w_0$ où w_0 est l'unique solution de $\text{div } w_0 = 0$, $\text{rot}(r_0 w_0) = \text{rot}(r_0 v_0)$.

Le problème maintenant est de clore le système (22, 23) en déterminant \mathcal{E} ; il n'y a pas de raison *a priori* pour que \mathcal{E} soit un gradient.

Étudions un instant (comme dans [49] et [51]) le système modèle suivant :

$$\varepsilon \partial_t u_\varepsilon = A(S_\varepsilon(t)) u_\varepsilon,$$

où A est un opérateur antisymétrique. Dans le cas où $S_\varepsilon = S$ ne dépend pas du temps, la solution est donnée par $u_\varepsilon = e^{tA(S)/\varepsilon} u_0$. Dans le cas contraire on s'aperçoit immédiatement d'une difficulté considérable liée au croisement des valeurs propres de $A(S(t))$. En effet si le spectre de A est de multiplicité constante il est connu (voir [31]) que l'évolution de u_ε est asymptotiquement diagonalisée dans la résolution spectrale de $A(S(t))$. Mais lorsque deux valeurs propres se croisent en un temps t_0 , la limite de $|u_\varepsilon|^2$ peut dépendre non seulement de S , mais aussi de la façon dont S_ε approche S , et même encore de la sous-suite en ε choisie... Des exemples à ce sujet peuvent être trouvés dans [51] Section 7, s'inspirant de travaux de [18], [23], [30]. Dans notre cadre, cela semble indiquer que si les valeurs propres de $A(S(t))$ ne sont pas de multiplicité constante, la fonction \mathcal{E} ne sera pas uniquement déterminée par v et S .

L'on constate ainsi que le cas non isentropique périodique est redoutablement plus difficile que le cas non isentropique dans \mathbb{R}^d , mais aussi surtout que le cas isentropique périodique.

L'idée de G. Métivier et S. Schochet dans [51] est de tirer parti des estimations *a priori* disponibles sur les solutions, dues au théorème 4.1, pour commencer l'étude en se restreignant à un nombre fini de modes de Fourier. Cela signifie que l'on peut commencer par considérer des modèles en dimension finie. La première partie de [51] (et la section 5 de [49]) est ainsi dévolue à l'étude du système dynamique suivant, à deux échelles en temps :

$$(24) \quad \begin{aligned} \varepsilon \partial_t u_\varepsilon &= A(S) u_\varepsilon + \varepsilon Q(S)(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \\ \partial_t S_\varepsilon &= F(S) u_\varepsilon \end{aligned}$$

sur le domaine $\mathbb{D} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} [0, L_1] \times \cdots \times [0, L_d]$ où les L_i sont des réels strictement positifs.

Des hypothèses de structure sur A et F sont dégagées, portant notamment sur les valeurs propres de A : l'ensemble des S tels que $A(S)$ a au moins une valeur propre non nulle multiple, est analytique et de codimension 2. Cette hypothèse est cruciale dans l'analyse car elle permet de montrer que génériquement les valeurs propres non nulles de $A(S(t))$ sont simples. Notons que dans [51], il est montré (Théorème 6.1) que sous certaines restrictions sur les tailles L_i (L_j^{-4} et $L_j^{-2}L_k^{-2}$ doivent être indépendantes dans \mathbb{Q}) ces hypothèses sont toujours satisfaites dans le cas où le système modèle est une troncature spectrale des équations d'Euler compressibles non isentropiques.

L'hypothèse importante de généricité est alors la suivante : en notant $(i\lambda_j(S(t)))_{j \neq 0}$ les valeurs propres non nulles de $A(S(t))$ (répétées suivant leur multiplicité) on définit

$$\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \{S \mid \lambda_j(S(t)) \neq \lambda_k(S(t)), \forall j \neq k, jk \neq 0\}.$$

DÉFINITION 4.3. — *La fonction S est générique si pour tout $t \in [0, T]$, $S(t) \in \Omega$ et*

$$\lambda_j(S) - \lambda_k(S) = \lambda_\ell(S) \implies \partial_t (\lambda_j(S) - \lambda_k(S) - \lambda_\ell(S)) \neq 0.$$

Sous cette hypothèse sur S on peut obtenir une équation sur la limite faible de u_ε , qui a une solution unique dont on montre que pour presque toutes données initiales elle est générique au sens de la définition 4.3 (ce qui justifie bien la terminologie employée dans cette définition). Ainsi l'on obtient un théorème de convergence des solutions $(u_\varepsilon, q_\varepsilon, S_\varepsilon)$ vers les solutions du système limite.

Nous n'allons pas détailler ce système limite dans le cadre abstrait, mais revenir plutôt aux équations d'Euler pour déduire de l'analyse abstraite des théorèmes de convergence des solutions des équations d'Euler non isentropiques (17). La matrice de pénalisation ici est la suivante

$$A(S) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_0} \operatorname{div} \\ \frac{1}{r_0} \nabla & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $a_0 = A(S, 0)$ et $r_0 = \mathcal{R}(S, 0)$.

Le spectre de $A(S)$ s'obtient en analysant l'opérateur $W_S \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{a_0} \operatorname{div} \left(\frac{1}{r_0} \nabla \right)$, autoadjoint positif dans $L^2(\mathbb{D}, a dx)$, et à résolvante compacte. On note $0 = \mu_{0,S} < \mu_{1,S} \leq \dots$ ses valeurs propres, et $\lambda_{j,S} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\mu_{j,S}}$. Les vecteurs propres (normalisés) associés sont notés $\Phi_{j,S}$, et le théorème de convergence va reposer sur l'hypothèse suivante, liée à la définition de généricité 4.3.

DÉFINITION 4.4. — *La fonction $S \in C^0([0, T], H^s(\mathbb{D}))$ vérifie la condition (G) si*

- (i) *Pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $j > 0$, $\mu_{j,S(t)}$ est simple.*
- (ii) *Pour tout triplet (j, k, l) d'entiers non nuls, on a presque partout sur $[0, T]$,*

$$\lambda_{j,S(t)} - \lambda_{k,S(t)} \neq \lambda_{l,S(t)}.$$

Le théorème principal est le suivant.

THÉORÈME 4.5 ([49], [51]). — Si S vérifie la condition (G) alors (v, S) vérifient les équations limites (22,23) avec

$$\kappa^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \lambda_{j,S(t)} (\Phi_{j,S(t)}(x))^2, \quad \kappa^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{\lambda_{j,S(t)}} |\nabla \Phi_{j,S(t)}(x)|^2$$

où σ_j est calculé explicitement en fonction des données initiales et des Φ_{j,S_0} .

La démonstration de ce résultat sort du cadre de cet exposé. Indiquons simplement que la démonstration consiste comme prévu à se ramener à la dimension finie en faisant agir un projecteur spectral sur h_ε , en tirant parti des estimations a priori fournies par le théorème 4.1. On peut alors décomposer h_ε sur les J premiers vecteurs propres de $W_{S(t)}$ (pour $\varepsilon \leq \varepsilon_J$) — en utilisant la compacité de S_ε en temps on peut montrer que J peut être choisi indépendamment de $t \in [0, T]$. Les termes non linéaires dont on cherche la limite faible s'écrivent de la manière suivante :

$$\sum_{j \leq J} \beta_{j,\ell}^\varepsilon \exp \left(\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j^\varepsilon(s) ds \pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_\ell^\varepsilon(s) ds \right).$$

Notons qu'il n'y a que des interactions bilinéaires dans la phase, parce que l'on cherche la projection de ces termes non linéaires sur le noyau de l'opérateur de pénalisation, c'est-à-dire sur le mode $\Phi_{0,S(t)}$ associé à la valeur propre 0. On peut montrer que les $\beta_{j,\ell}^\varepsilon$ ont une limite forte quand ε tend vers zéro. Par le théorème de la phase stationnaire, ne demeurent à la limite dans la somme que les indices j, ℓ tels que

$$\pm \int_0^t \lambda_j^\varepsilon(s) ds \pm \int_0^t \lambda_\ell^\varepsilon(s) ds = 0,$$

c'est-à-dire que $\ell = j$ et les signes sont opposés.

Il reste alors à vérifier que les séries obtenues sont convergentes dans $C^0([0, T], H^s(\mathbb{D}))$, ce qui conclut la première partie de l'analyse : le terme \mathcal{E} est obtenu ainsi. Il reste maintenant à déterminer l'évolution temporelle des coefficients de cette série, afin d'obtenir l'expression des coefficients $\kappa^{(1)}$ et $\kappa^{(2)}$. Des hypothèses de non résonance interviennent ici, ainsi que des éléments de théorie spectrale. Nous ne rentrons pas dans les détails techniques mais renvoyons à [51], Section 9.

Nous commenterons ce résultat, en présentant les problèmes ouverts qui y sont rattachés, dans la section 4.5 suivante. Pour terminer cet exposé, plaçons-nous en dimension 1 d'espace : ce cas est bien plus favorable, d'abord parce que $W_{S(t)}$ y prend une forme plus simple (voir [51] Section 11), mais surtout parce que la contrainte incompressible sur la limite v se traduit en dimension 1 par $v(t, x) = \underline{v}(t)$, constant en x .

Le théorème dans ce cas est le suivant.

THÉORÈME 4.6 ([49], [51]). — Supposons que $\mathcal{R}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}(S, 0)$ et $\mathcal{A}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}(S, 0)$ vérifient

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial S}(\sigma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_0(\sigma) - \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial S}(\sigma) \neq 0.$$

Alors pour tout $s \geq 2$, il existe un G_δ -dense $\mathcal{G} \subset H^s(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ tel que pour tout S dans \mathcal{G} , le spectre de W_S est simple et la condition de non résonance est vérifiée : $\lambda_{j,S} \neq \lambda_{k,S} + \lambda_{\ell,S}$.

En particulier, $S(t)$ vérifie alors la condition (G) et les conclusions du théorème 4.5 sont vraies.

Remarque 4.7. — Notons comme dans [51] que dans le cas des équations compressibles on a en fait $\mathcal{A}(S, p) = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}$. Il n'y a alors pas d'hypothèse de généricité à faire dans le théorème 4.6, et l'on trouve pour la limite faible de v_ε la solution de l'équation $\frac{d}{dt} \underline{v} = 0$, et l'équation de transport (22) sur S s'écrit avec v remplacé par \underline{v} . Les données initiales du système limite sont les moyennes spatiales des données initiales du système d'origine (voir le théorème 11.1 de [51]).

4.5. Conclusion et problèmes ouverts

Nous avons présenté dans ce paragraphe les résultats mathématiques les plus récents à ce jour concernant la limite incompressible non visqueuse. Le cas où les équations sont posées dans \mathbb{R}^d est bien compris puisqu'on démontre ([50]) un résultat de convergence forte vers un système limite connu.

Dans le cas périodique en revanche, l'article [51] est un véritable travail de pionnier qui ouvre la voie sur beaucoup de recherches. Une question cruciale est de déterminer si la condition (G) de la définition 4.3 est ou non générique — pour l'instant seul le cas monodimensionnel est résolu, toujours dans [51]. Une autre question fondamentale est de comprendre le système limite obtenu dans le théorème 4.5 ; en particulier ce système est-il bien posé ? On ne connaît pour l'instant que des estimations *a priori* H^s sur ce système (voir [51] Section 12). En outre la convergence vers ce système limite est faible, et en particulier on n'a pas de description assez précise des oscillations pour pouvoir en déduire un résultat du même type que dans le cas isentropique : dans ce cas après action du groupe d'oscillations on a pu montrer la convergence forte vers un système limite dont une partie est celui vérifié par la limite faible, mais qui contient aussi une équation couplée gardant trace des oscillations.

Toutes ces questions restent largement ouvertes pour les équations non isentropiques, sans parler du cas où les équations sont posées dans un domaine plus général que \mathbb{R}^d ou \mathbb{T}^d , qui semble pour l'instant hors d'atteinte.

RÉFÉRENCES

- [1] T. ALAZARD – « Incompressible limit of the non-isentropic Euler equations with solid wall boundary conditions », soumis.
- [2] V. ARNOLD – « Sur la géométrie différentiable des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **16** (1966), p. 319–361.
- [3] H. BAHOURI & J.-Y. CHEMIN – « Équations d'ondes quasilinéaires et estimation de Strichartz », *Amer. J. Math.* **121** (1999), p. 1337–1377.
- [4] H. BEIRAO DA VEIGA – « Singular limits in compressible fluid dynamics », *Arch. Rational Mech. Anal.* **128** (1994), no. 4, p. 313–327.
- [5] ———, « On the sharp singular limit for slightly compressible fluids », *Math. Methods Appl. Sci.* **18** (1995), no. 4, p. 295–306.
- [6] D. BRESCH, B. DESJARDINS, E. GRENIER & C.K. LIN – « Low Mach number limit of viscous polytropic flows : formal asymptotics in the periodic case », *Stud. Appl. Math.* **109** (2002), no. 2, p. 125–149.
- [7] G. BROWNING & H.-O. KREISS – « Problems with different time scales for nonlinear partial differential equations », *SIAM J. Appl. Math.* **42** (1982), no. 4, p. 704–718.
- [8] N. BURQ – « Mesures semi-classiques et mesures de défaut », in *Sém. Bourbaki (1996/97)*, Astérisque, vol. 245, Société Mathématique de France, 1997, Exp. No. 826, p. 167–195.
- [9] J.-Y. CHEMIN – *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque, vol. 230, Société Mathématique de France, 1995.
- [10] R. DANCHIN – « Fluides légèrement compressibles et limite incompressible », in *Sém. Équations aux Dérivées Partielles, 2000-2001*, École polytechnique, 2001, Exp. No. III, 19 pages.
- [11] ———, « Zero Mach number limit for compressible flows with periodic boundary conditions », *Amer. J. Math.* **124** (2002), no. 6, p. 1153–1219.
- [12] ———, « Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série* **35** (2002), no. 1, p. 27–75.
- [13] B. DESJARDINS & E. GRENIER – « Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **455** (1999), no. 1986, p. 2271–2279.
- [14] B. DESJARDINS, E. GRENIER, P.-L. LIONS & N. MASMOUDI – « Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions », *J. Math. Pures Appl. (9)* **78** (1999), no. 5, p. 461–471.
- [15] B. DESJARDINS & C.-K. LIN – « A survey of the compressible Navier-Stokes equations », *Taiwanese J. Math.* **3** (1999), no. 2, p. 123–137.
- [16] A. DUTRIFOY & T. H'MIDI – « The incompressible limit of solutions of the two-dimensional compressible Euler system with degenerating initial data », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **336** (2003), no. 6, p. 471–474.

- [17] W. E – « Propagation of oscillations in the solutions of 1-D compressible fluid equations », *Comm. Partial Differential Equations* **17** (1992), no. 3-4, p. 347–370.
- [18] C. FERMANIAN & P. GÉRARD – « Mesures semi-classiques et croisements de mode », *Bull. Soc. math. France* **130** (2002), no. 1, p. 123–168.
- [19] I. GALLAGHER – « Asymptotics of the solutions of hyperbolic equations with a skew-symmetric perturbation », *J. Differential Equations* **150** (1998), p. 363–384.
- [20] P. GÉRARD – « Microlocal defect measures », *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991), p. 1761–1794.
- [21] J. GINIBRE & G. VELO – « Generalized Strichartz inequalities for the wave equation », *J. Funct. Anal.* **133** (1995), p. 50–68.
- [22] E. GRENIER – « Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations », *J. Math. Pures Appl.* **76** (1997), p. 477–498.
- [23] G. HAGEDORN – « Proof of the Landau-Zener formula in an adiabatic limit with small eigenvalue gap », *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), p. 519–524.
- [24] T. HAGSTROM & J. LORENZ – « All-time existence of classical solutions for slightly compressible flows », *SIAM J. Appl. Math.* **28** (1998), no. 3, p. 652–672.
- [25] ———, « On the stability of approximate solutions of hyperbolic-parabolic systems and the all-time existence of smooth, slightly compressible flows », *Indiana Univ. Math. J.* **51** (2002), no. 6, p. 1339–1387.
- [26] T. IGUCHI – « The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation in \mathbb{R}_+^n », *Math. Methods Appl. Sci.* **20** (1997), no. 11, p. 945–958.
- [27] H. ISOZAKI – « Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain », *J. reine angew. Math.* **381** (1987), p. 1–36.
- [28] ———, « Wave operators and the incompressible limit of the compressible Euler equation », *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), no. 3, p. 519–524.
- [29] ———, « Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain. II. Bodies in a uniform flow », *Osaka J. Math.* **26** (1989), no. 2, p. 399–410.
- [30] A. JOYE – « Proof of the Landau-Zener formula », *Asymptotic Anal.* **9** (1994), p. 209–258.
- [31] T. KATO – *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [32] S. KLAINERMAN – « Global existence for nonlinear wave equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), p. 43–101.
- [33] S. KLAINERMAN & M. MACHEDON – « Remark on Strichartz type inequalities », *Internat. Math. Res. Notices* **5** (1996), p. 201–220, with an appendix of J. Bourgain and D. Tataru.
- [34] S. KLAINERMAN & A. MAJDA – « Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters, and the incompressible limit of compressible fluids », *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), p. 481–524.
- [35] ———, « Compressible and incompressible fluids », *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), p. 629–651.
- [36] R. KLEIN – « Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics, I, One-dimensional flow », *J. Comput. Phys.* **121** (1995), no. 2, p. 213–237.

- [37] H.-O. KREISS, J. LORENZ & M.J. NAUGHTON – « Convergence of the solutions of the compressible to the solutions of the incompressible Navier-Stokes equations », *Adv. in Appl. Mech.* **12** (1991), no. 2, p. 187–214.
- [38] P. LAX – « Hyperbolic systems of conservation laws II », *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), p. 537–566.
- [39] P.-L. LIONS – *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. I, Incompressible Models*, Oxford Science Publications, 1997.
- [40] ———, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. II, Compressible Models*, Oxford Science Publications, 1997.
- [41] P.-L. LIONS & N. MASMOUDI – « Incompressible limit for a viscous compressible fluid », *J. Math. Pures Appl.* **77** (1998), no. 6, p. 585–627.
- [42] ———, « Une approche locale de la limite incompressible », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), no. 5, p. 387–392.
- [43] A. MAJDA – *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, Applied Mathematical Sciences, vol. 53, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [44] A. MAJDA & S. OSHER – « Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary », *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975), p. 607–675.
- [45] C. MARCHIORO & M. PULVIRENTI – *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Applied Mathematical Sciences, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [46] N. MASMOUDI – « Asymptotic problems and compressible-incompressible limit », in *Advances in mathematical fluid mechanics (Paseky, 1999)*, Springer, Berlin, 2000, p. 119–158.
- [47] ———, « Incompressible, inviscid limit of the compressible Navier-Stokes system », *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire* **18** (2001), no. 2, p. 199–224.
- [48] A. MEISTER – « Asymptotic single and multiple scale expansions in the low Mach number limit », *SIAM J. Appl. Math.* **60** (1999), no. 1, p. 256–271.
- [49] G. MÉTIVIER & S. SCHOCHET – « Limite incompressible des équations d’Euler non isentropiques », in *Sém. Équations aux Dérivées Partielles, 2000-2001*, École polytechnique, 2001, Exp. No. X, 17 pages.
- [50] ———, « The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations », *Arch. Rational Mech. Anal.* **158** (2001), no. 1, p. 61–90.
- [51] ———, « Averaging theorems for conservative systems and the weakly compressible Euler equations », *J. Differential Equations* **187** (2003), no. 1, p. 106–183.
- [52] C.D. MUNZ – « Computational fluid dynamics and aeroacoustics for low Mach number flow », in *Hyperbolic partial differential equations (Hamburg, 2001)*, Vieweg, Braunschweig, 2002, p. 269–320.
- [53] T. SCHNEIDER, N. BOTTA, K.J. GERATZ & R. KLEIN – « Extension of finite volume compressible flow solvers to multi-dimensional, variable density zero Mach number flows », *J. Comput. Phys.* **155** (1999), no. 2, p. 248–286.

- [54] S. SCHOCHET – « The compressible Euler equations in a bounded domain : existence of solutions and the incompressible limit », *Comm. Math. Phys.* **104** (1986), p. 49–75.
- [55] ———, « Fast singular limits of hyperbolic PDEs », *J. Differential Equations* **114** (1994), p. 476–512.
- [56] P. SECCHI – « On the incompressible limit of inviscid compressible fluids », *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)* **46** (2000), p. 21–33, in *Navier-Stokes equations and related nonlinear problems (Ferrara, 1999)*.
- [57] ———, « On the singular incompressible limit of inviscid compressible fluids », *J. Fluid Mech.* **2** (2000), no. 2, p. 107–125.
- [58] T. SIDERIS – « Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids », *Comm. Math. Phys.* **101** (1985), no. 4, p. 475–485.
- [59] L. TARTAR – « H-measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations », *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **115** (1990), p. 193–230.
- [60] S. UKAI – « The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation », *J. Math. Kyoto Univ.* **26** (1986), no. 2, p. 323–331.
- [61] V. YUDOVITCH – « Non stationary flows of an ideal incompressible fluid », *Zhur-nal Vych Matematika* **3** (1963), p. 1032–1066.
- [62] R. ZEYTOUNIAN – *Asymptotic modelling of fluid flow phenomena*, Fluid Mechanics and its Applications, vol. 64, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [63] ———, *Theory and applications of nonviscous fluid flows*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Isabelle GALLAGHER

Institut de Mathématiques de Jussieu

UMR 7586 du CNRS

Université Paris VII

Case 7012

2 place Jussieu

F-75251 Paris Cedex 05

E-mail : gallagher@math.jussieu.fr

**DÉVIATIONS DE MOYENNES ERGODIQUES, FLOTS DE
TEICHMÜLLER ET COCYCLE DE KONTSEVICH-ZORICH**
[d'après Forni, Kontsevich, Zorich...]

par Raphaël KRIKORIAN

1. INTRODUCTION

Considérons un espace topologique X sur lequel agit un flot ϕ et supposons que μ soit une mesure de probabilité invariante ergodique pour le flot ϕ (c'est-à-dire que les seuls ensembles μ mesurables ϕ -invariants sont de mesure 0 ou 1). On sait d'après le théorème de Birkhoff que pour toute observable μ -intégrable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on a pour μ -presque tout $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\phi^s(x)) ds = \int_X f d\mu.$$

En particulier si f est d'intégrale nulle, les moyennes ergodiques précédentes convergent vers 0 et il est naturel d'étudier dans ce cas le comportement asymptotique des intégrales ergodiques $\int_0^t f(\phi^s(x)) ds$. Lorsque l'on suppose que le système dynamique est hyperbolique, comme c'est le cas par exemple du flot géodésique sur des surfaces compactes de courbure négative, le comportement des intégrales ergodiques est décrit par le théorème central limite (comme dans le cas de variables aléatoires indépendantes de même loi). Pour des flots non hyperboliques, les situations dans lesquelles on peut espérer énoncer des résultats intéressants sont peu nombreux mais existent. Ainsi, pour mentionner l'exemple le plus simple, le comportement des intégrales ergodiques des flots (linéaires car le cas général s'y ramène) sur des tores est bien compris. Soit ϕ le flot du champ de vecteurs $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$; supposons que

– (hypothèse sur l'arithmétique) (α, β) vérifie une condition diophantienne de la forme

$$|k\alpha + l\beta| \geq \frac{K^{-1}}{(|k| + |l|)^\tau}, \quad \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2 - \{0, 0\}$$

condition qui, dès que $\tau > 1$, est de mesure de Lebesgue positive pour $K > 0$ assez grand et de mesure totale si l'on prend l'union sur tous les K positifs;

– (hypothèse sur la régularité de f) f soit suffisamment dérivable (par exemple $C^{\tau+2}$).

Dans ce cas il est facile de voir, en utilisant l'analyse de Fourier (bien définie sur le tore!) et la condition diophantienne, que les intégrales ergodiques sont bornées pour toute f régulière et tout $x \in \mathbb{T}^2$. Dans le cas où (α, β) n'est pas diophantien mais seulement irrationnel et f est à variations bornées, les intégrales ergodiques ne sont plus bornées mais admettent une borne de type logarithmique (en fonction de t). Il faut alors utiliser le développement en fractions continues de (α/β) (que l'on suppose irrationnel) et la propriété de Denjoy-Koksma.

Le cas qui nous intéresse ici est celui des flots des champs de vecteurs sur des surfaces de genre plus grand que 2 qui préservent une forme volume et dont les singularités sont de type selle. La dynamique dans ce cas n'est ni hyperbolique (comme c'est le cas du flot géodésique où deux points proches ont tendance à se séparer de façon exponentielle sous l'effet du flot), ni elliptique (comme dans le cas des flots sur le tore où deux points proches le restent sous l'effet de la dynamique) mais plutôt de type parabolique (comme dans le cas du flot horocyclique où deux points proches se séparent à vitesse au plus polynomiale). Ce type de flot intervient naturellement dans l'étude d'au moins deux problèmes importants de dynamique : les billards rationnels et les échanges d'intervalles.

Considérons un billard plan polygonal P dont les angles sont des multiples rationnels de 2π ; on peut réduire la dynamique des points $(x, v) \in P \times \mathbb{R}^2$, v étant de direction fixée, à celle d'un flot sur une surface de genre g obtenue en recollant des copies de la table (qui sont les images du polygone par le groupe engendré par les symétries par rapport à ses côtés). On peut ainsi voir que, pour presque toute direction v , le flot (dans l'espace des configurations) est uniquement ergodique (cf. [8] utilisant des résultats antérieurs de Masur [12], Veech [15]) et ceci permet de démontrer qu'il existe un G_δ -dense de billards (non rationnels) uniquement ergodiques (dans l'espace des phases). Je renvoie au séminaire Bourbaki de P. Arnoux [1] pour un exposé très clair de ces travaux.

Un échange d'intervalles sur n intervalles (I_1, \dots, I_n) qui forment une partition de $[0, 1]$ est déterminé par une paire (l, π) où $l = (|I_1|, \dots, |I_n|)$ (longueurs des intervalles) et π est une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On suppose que la permutation est irréductible c'est-à-dire qu'il n'existe pas $k < n$ pour lequel $\pi\{1, \dots, k\} = \{1, \dots, k\}$. Notons S_n^0 l'ensemble des permutations irréductibles. L'ensemble des échanges d'intervalles irréductibles est donc paramétré par $\Delta^{n-1} \times S_n^0$ où Δ^{n-1} est le simplexe standard de dimension $n - 1$. Une rotation est un cas particulier d'échange d'intervalles où $n = 2$. On peut définir pour les échanges d'intervalles des procédures de *renormalisation* G (cf. Rauzy, Veech, Zorich, Marmi-Moussa-Yoccoz...) qui sont des analogues de l'algorithme de Gauss pour les rotations et qui permettent une analyse fine des propriétés ergodiques des échanges d'intervalles. Nous renvoyons le lecteur à [11] pour de plus amples renseignements. L'ensemble des échanges d'intervalles (irréductibles) $\Delta^{n-1} \times S_n^0$ se décompose sous l'action de G en sous-ensembles invariants

de la forme $\Delta^{n-1} \times R$ et on appelle les ensembles R ainsi obtenus les classes de Rauzy. Zorich [18] montre qu'une de ces applications de Gauss, l'algorithme de Zorich (qui est une version accélérée de l'algorithme de Rauzy), est ergodique par rapport à une mesure de probabilité μ_R absolument continue sur chaque classe de Rauzy. C'est l'analogie d'un théorème de Veech et Masur ([15], [12]) sur l'ergodicité du flot de Teichmüller sur les composantes connexes de l'espace des modules (*cf.* section 4). Ces liens entre flots et échanges d'intervalles sont en fait naturels : on peut voir un échange d'intervalles comme la dynamique induite par l'application de retour d'un flot sur un intervalle (transverse au flot) d'une surface de genre g . Considérons un échange d'intervalles T sur n intervalles I_1, \dots, I_n et notons,

$$S_i(x, N) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi_i(T^k(x)),$$

la N -ième somme ergodique de la fonction caractéristique χ_i de l'intervalle I_i sous l'action de T (on compte le nombre de retours dans I_i entre les temps 0 et N). Formons le vecteur $S(x, N) = (S_1(x, N), \dots, S_n(x, N)) \in \mathbb{R}^n$. Si l'échange d'intervalles est uniquement ergodique (ce qui est une condition de mesure pleine) alors pour tout x

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(x, N)}{N} = l,$$

Zorich démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1 (Zorich [19]). — *Soit R une classe de Rauzy. Il existe $\theta_1 > \theta_2 \geq 0$ tels que pour presque tout échange d'intervalle et presque tout x*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |S(x, N) - Nl|}{\log N} = \frac{\theta_2}{\theta_1} < 1.$$

Les réels θ_1, θ_2 sont en fait les deux plus grands exposants de Lyapunov d'un cocycle de matrices défini au-dessus de $\Delta^{n-1} \times R$ (*cf.* section 5.1) introduit par Zorich.

Revenons aux champs de vecteurs sur les surfaces de genre $g \geq 2$. Soient M une surface orientable compacte de genre $g \geq 2$ et ω une forme volume sur M . Considérons un champ de vecteurs X (on note $\phi_X(\cdot, t)$ son flot) dont les singularités sont de type selle (Σ, ι) où $\Sigma = \{p_1, \dots, p_\sigma\}$ est l'ensemble des singularités du champ X et ι_k , $1 \leq k \leq \sigma$ est l'indice de X au point p_k . La notion de distribution sur M (au sens de Schwartz et De Rham) a bien un sens ; par ailleurs on peut définir de façon habituelle l'espace de Sobolev $H^1(M)$ et son dual $H^{-1}(M)$. Une distribution \mathcal{D} est dite X -invariante si $X\mathcal{D} = 0$ et d'ordre 1 si elle est dans $H^{-1}(M)$. Nous noterons $\mathcal{I}_X^1(M)$ l'ensemble des distributions X -invariantes et d'ordre 1.

Le résultat que démontre Giovanni Forni est le suivant :

THÉORÈME 1.2 (Forni [5]). — Pour « presque tout » champ de vecteurs X qui préserve ω et dont les singularités sont de type selle il existe des nombres réels strictement positifs $\lambda'_1(X) > \dots > \lambda'_s(X)$ et des espaces de distributions $\mathcal{I}_X^1(\lambda'_i)$, $1 \leq i \leq s$, X -invariantes et d'ordre 1 tels que

(1) on ait la décomposition

$$\mathcal{I}_X^1 = \mathcal{I}_X^1(\lambda'_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{I}_X^1(\lambda'_s),$$

(2) si $i < s$ et si une observable f à support dans $M - \Sigma$ et dans l'espace de Sobolev $H_0^1(M - \Sigma)$ vérifie

$$\forall \mathcal{D} \in \mathcal{I}_X^1(\lambda'_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{I}_X^1(\lambda'_i), \quad \mathcal{D}(f) = 0$$

alors pour presque tout point $p \in M$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_0^T f(\phi_X(p, \tau)) d\tau \right|}{\log T} \leq \lambda'_{i+1};$$

en outre il existe une distribution $\mathcal{D}_{i+1} \in \mathcal{I}_X(\lambda'_{i+1})$ telle que si $\mathcal{D}_{i+1}(f) \neq 0$ alors l'inégalité précédente est une égalité;

(3) si $i = s$ et sous les mêmes hypothèses sur f qu'en (2),

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_0^T f(\phi_X(p, \tau)) d\tau \right|}{\log T} = 0.$$

Le « presque tout » signifie la chose suivante : à tout champ de vecteurs X préservant la forme volume ω on associe la classe de cohomologie $[i_X \omega] \in H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ (cf. section 6.1). Un ensemble de champs de vecteurs préservant ω est négligeable si son image par l'application précédente est de mesure de Lebesgue nulle dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$.

La preuve de ce résultat repose sur l'analyse de deux types de dynamiques différents. Il y a, d'une part, la dynamique du champ de vecteurs X sur la surface M que l'on peut ramener à celle du feuilletage horizontal d'une différentielle quadratique q . D'autre part, il existe des dynamiques de « renormalisation » qui ont pour but d'accélérer la dynamique sur M . Les espaces dans lesquels travaillent ces dynamiques sont des espaces de modules (cf. section 2) et pour les comprendre il est important de savoir démontrer que les exposants de Lyapunov de certains cocycles, le cocycle de Kontsevich-Zorich (cf. section 3.2) et le cocycle de Forni (cf. section 6.3 et section 8) ont des exposants de Lyapunov non nuls (cf. section 5 et section 7). Pour cela Forni utilise des outils d'Analyse qu'il a développés dans [4] et que l'on peut voir comme une extension de la théorie de Hodge (section 4).

Remarque. — Il existe des liens importants entre le problème des déviations des moyennes ergodiques pour des flots sur des surfaces de genre supérieur à 2 ou des échanges d'intervalles, et celui de la résolution des équations cohomologiques. Dans le cas des flots, par exemple, il s'agit de résoudre l'équation $\mathcal{L}_X f = g$ où g est une fonction (ou une distribution) donnée (\mathcal{L}_X est la dérivation de Lie). Ces équations n'ont

pas toujours de solution, mais on connaît dans certains cas les obstructions. Nous ne parlerons pas de ce sujet dans la suite mais nous renvoyons à l'article fondateur de Forni [4] et mentionnons les résultats nouveaux de Marmi-Moussa-Yoccoz [11] dans le cadre des échanges d'intervalles.

Remerciements. — Je tiens à remercier Giovanni Forni, qui a répondu très patiemment à mes nombreuses questions, pour son aide, Jean-Paul Thouvenot, Stefano Marmi et Jean-Christophe Yoccoz pour leurs commentaires éclairés.

2. LES ESPACES DE MODULES

2.1. L'espace de Teichmüller

L'espace de Teichmüller T_g d'une surface M de genre $g \geq 2$ est l'ensemble des structures complexes de M à isotopies près, c'est-à-dire l'ensemble obtenu en décrétant que deux structures complexes sont équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par un élément de $\text{Diff}_0(M)$, l'ensemble des difféomorphismes de M isotopes à l'identité. C'est aussi l'ensemble des métriques de courbure -1 à isotopies près. On peut munir T_g d'une distance : si $[C_1]$ et $[C_2]$ sont deux classes de structures conformes, $d([C_1], [C_2])$ est l'infimum sur les $h \in \text{Diff}_0(M)$ des $(1/2) \ln K(h)$, $K(h)$ étant la constante de quasi-conformalité de h (relativement à C_1, C_2). Muni de cette distance, T_g est homéomorphe à la boule ouverte d'un espace euclidien réel de dimension $6g - 6$. On peut également munir T_g d'une structure complexe qui en fait un domaine borné d'holomorphie de \mathbb{C}^{3g-3} .

2.2. Différentielles quadratiques

Une structure complexe étant choisie sur M , une différentielle quadratique holomorphe q sur M est la donnée, pour chaque carte d'un atlas conforme $(U_i, \zeta_i)_i$, d'une expression $q_i(\zeta_i) d\zeta_i^2$ (q_i holomorphe sur U_i) où l'élément différentiel signifie que sur l'ouvert $U_i \cap U_j$ on a la relation de compatibilité

$$q_j(\zeta_j) \left(\frac{d\zeta_j}{d\zeta_i} \right)^2 = q_i(\zeta_i).$$

Le quotient de deux différentielles quadratiques est une fonction méromorphe (qui a donc autant de zéros que de pôles) et par conséquent toutes les différentielles quadratiques ont le même nombre de zéros qui est le double du nombre de zéros d'une 1-forme holomorphe : une différentielle quadratique a donc $4g - 4$ zéros (comptés avec multiplicité). L'espace des différentielles quadratiques sur M est un espace vectoriel de dimension (complexe) finie égale à $3g - 3$ (Riemann-Roch) si $g \geq 2$ et de dimension 1 sur le tore. Chaque différentielle quadratique définit une structure plate sur M avec des singularités (Gauss-Bonnet) aux zéros de q : en un point $x \in M$ où $q(x) \neq 0$

il existe un paramètre local z sur un voisinage U de x où $q = dz^2$ que l'on obtient de la façon suivante : si dans la carte (U, ζ) on a $q = q(\zeta)d\zeta^2$, on pose

$$z(y) = \int_{[x,y]} (q(\zeta))^{1/2} d\zeta.$$

Puisqu'un tel z est invariant modulo des translations et un changement de signe, M a localement une structure plate au voisinage de tout point non singulier. En un point où q admet un zéro d'ordre k on peut trouver un paramètre local pour lequel $q = z^k dz^2$. On peut ainsi définir grâce à q deux objets différentiels importants sur M et un objet de nature plus géométrique (voir pour la partie géométrique la référence qu'est [3]) :

- une métrique plate en dehors des zéros de q que nous noterons $R_q : R_q = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$ au voisinage d'un point régulier et $R_q = |z|^{k/2}(dx^2 + dy^2)^{1/2}$ au voisinage d'un zéro d'ordre k ;

- une forme volume $\omega_q = (i/2)h \wedge \bar{h}$ où $h = q^{1/2} : \omega_q = dx \wedge dy$ au voisinage d'un point régulier et $\omega_q = |z|^k dx \wedge dy$ au voisinage d'un zéro d'ordre k ;

- une paire de feuilletages mesurés transverses $(\mathcal{F}_q, \mathcal{F}_{-q})$ définis par $\mathcal{F}_q = \{\text{Im}(q^{1/2}) = 0\}$ (le feuilletage horizontal) et $\mathcal{F}_{-q} = \{\text{Re}(q^{1/2}) = 0\}$ (le feuilletage vertical).

Nous noterons Q_g l'ensemble des différentielles quadratiques modulo l'action des difféomorphismes de M isotopes à l'identité. Remarquons que Q_g se projette sur T_g (puisque une différentielle quadratique « porte » sa propre structure complexe). On peut démontrer que Q_g est naturellement l'espace cotangent de T_g (donc de dimension complexe $6g - 6$). En fait nous ne considérerons dans la suite (comme le fait Forni) que des différentielles quadratiques qui sont le carré de différentielles holomorphes (abéliennes) $q = h^2$, $h = h(z)dz$ (ce qui correspond au cas où les feuilletages sont orientables) car ce sont celles qui interviennent en dynamique ; par ailleurs, le cas général s'y ramène. On a alors $h = \alpha + i\beta$ où α, β sont deux 1-formes réelles fermées et transverses (*i.e.* $\alpha \wedge \beta > 0$ sauf en un nombre fini de points). Réciproquement si α, β sont deux 1-formes fermées réelles transverses avec des singularités canoniques (de la forme $\text{Re}(z^k dz) = 0$), il existe une unique structure conforme telle que $\alpha + i\beta$ soit une 1-forme holomorphe (c'est clair en dehors des points où $\alpha \wedge \beta$ s'annule et en ces points on invoque le théorème de Riemann sur les singularités isolées des fonctions holomorphes). Cette remarque permet de faire agir le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}^+(M)$ sur l'ensemble des différentielles quadratiques orientables : si $f \in \text{Diff}^+(M)$ et $q = h^2$ avec $h = \alpha + i\beta$, $d\alpha = d\beta = 0$, l'action de f sur q est $f^*q = (f^*\alpha + if^*\beta)^2$.

Afin d'obtenir une paramétrisation plus agréable des points de Q_g , il est nécessaire de se restreindre aux *strates* de Q_g définies de la façon suivante. Fixons $\kappa = (k_1, \dots, k_\sigma)$ un σ -uplet d'entiers positifs pairs dont la somme vaut $4g - 4$ et considérons l'ensemble des différentielles quadratiques qui sont le carré de différentielles holomorphes et dont les zéros distincts ont pour ordre (k_1, \dots, k_σ) . Il est possible de

voir que ces propriétés sont invariantes par isotopies et on note Q_κ l'ensemble obtenu en quotientant par $\text{Diff}_0(M)$; c'est un sous-ensemble complexe analytique de Q_g de dimension complexe $2g + \sigma - 1$ et quand $\sigma = 2g - 2$ (on parle alors de la strate principale) de dimension $2g + 2g - 2 - 1 = 4g - 3 = 3g - 3 + g$.

2.3. Les espaces de modules

Notons $\Gamma_g = \text{Diff}^+(M)/\text{Diff}_0(M)$ (le « pure mapping class group ») le groupe des difféomorphismes de M préservant l'orientation à isotopies près. Ce groupe agit par pull-back sur T_g, Q_g, Q_κ et on peut définir les espaces de modules de structures complexes et de différentielles quadratiques suivants : $R_g = T_g/\Gamma_g$, $\mathcal{M}_g = Q_g/\Gamma_g$, $\mathcal{M}_\kappa = Q_\kappa/\Gamma_g$. Ce sont des espaces complexes analytiques. Par ailleurs les strates \mathcal{M}_κ de \mathcal{M}_g peuvent être munies d'une structure complexe affine dont le modèle est $H^1(M, \Sigma_\kappa, \mathbb{C})$ au moyen de l'application de périodes. Fixons $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ des générateurs de l'homologie $H_1(M, \mathbb{Z})$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_{\sigma-1}$ des chemins reliant une singularité fixée de q (un point de Σ_q) aux autres singularités de q (les autres points de Σ_q). Localement, deux 1-formes holomorphes $q_1^{1/2}$ et $q_2^{1/2}$ définissent le même point de $H^1(M, \Sigma_\kappa, \mathbb{C})$ si et seulement si elles sont isotopes, ce qui identifie localement Q_κ à $H^1(M, \Sigma_\kappa, \mathbb{C})$. L'intégration de la 1-forme holomorphe $q^{1/2}$ le long des a_i, b_i, γ_i définit un point $(x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g, t_1, \dots, t_{\sigma-1})$ de $\mathbb{C}^{2g+\sigma-1}$ et on peut vérifier que les changements de cartes (obtenus par changement des générateurs (a_i, b_i, γ_i)) sont holomorphes, ce qui munit Q_κ d'une structure affine complexe. Ces changements de cartes préservent par ailleurs le volume, ce qui permet de tirer en arrière la forme $dx_1 \wedge d\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge dx_g \wedge d\bar{x}_g \wedge dy_1 \wedge d\bar{y}_1 \wedge \dots \wedge dy_g \wedge d\bar{y}_g \wedge dt_1 \wedge d\bar{t}_1 \wedge \dots \wedge dt_{\sigma-1} \wedge d\bar{t}_{\sigma-1}$ et de définir une mesure absolument continue μ_κ sur Q_κ (normalisée en demandant que la mesure de Lebesgue du tore complexe obtenu en quotientant par le réseau entier $\mathbb{C} \otimes H^1(M_q, \Sigma_q, \mathbb{Z})$ soit égale à 1). Cette mesure se projette sur \mathcal{M}_κ . Notons qu'à ce niveau il n'est pas clair que la mesure μ_κ soit finie sur \mathcal{M}_κ . D'autre part, comme cela a été mis en évidence par P. Arnoux et W.A. Veech ces espaces de modules ne sont pas toujours connexes et on devra parfois se restreindre dans la suite à leurs composantes connexes.

Pour terminer la description de ces espaces \mathcal{M}_κ , notons qu'il existe

- une fonction (la fonction d'aire) $A : \mathcal{M}_\kappa \rightarrow [0, \infty)$ définie par

$$A(q) = \int_M \omega_q$$

(c'est bien invariant par l'action de $\text{Diff}^+(M)$)

- une action du groupe $GL_+(2, \mathbb{R})$ sur \mathcal{M}_κ définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Re}(q^{1/2}) \\ \text{Im}(q^{1/2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \text{Re}(q^{1/2}) + b \text{Im}(q^{1/2}) \\ c \text{Re}(q^{1/2}) + d \text{Im}(q^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

Cette action sur Q_κ commute à celle de Γ_g .

3. DYNAMIQUES SUR LES ESPACES DE MODULES

3.1. Le flot de Teichmüller

Par définition c'est l'action du sous-groupe \mathbb{A} de $SL(2, \mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales $G_t = \text{diag}(e^t, e^{-t})$ sur l'espace Q_g . Ce flot s'identifie au flot géodésique sur l'espace de Teichmüller : si $\pi(q)$ désigne la structure complexe définie par q , on a $d(\pi(q), \pi(G_t(q))) = t$. Par ailleurs, ce flot laisse invariante chacune des strates Q_κ et la fonction d'aire A . Par conséquent les ensembles $Q_\kappa^{(1)} = Q_\kappa \cap A^{-1}(1)$ sont également invariants par la dynamique du flot de Teichmüller. Puisque l'action de $GL_+(2, \mathbb{R})$ commute à celle du groupe modulaire Γ_g , on peut définir le flot de Teichmüller sur chacun des espaces de modules, $\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_\kappa, \mathcal{M}_g^{(1)} = \mathcal{M}_g \cap A^{-1}(1), \mathcal{M}_\kappa^{(1)} = \mathcal{M}_\kappa \cap A^{-1}(1)$. On notera $\mu_\kappa^{(1)}$ la mesure induite par μ_κ sur les ensembles $\mathcal{M}_g^{(1)}, \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$.

THÉORÈME 3.1 (Masur [12], Veech [16]). — *Pour chaque strate $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$:*

- *Le volume total de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ pour la mesure $\mu_\kappa^{(1)}$ est fini.*
- *Le flot de Teichmüller G_t est ergodique sur chaque composante connexe de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ pour la mesure invariante $\mu_\kappa^{(1)}$ et est non uniformément hyperbolique (Veech).*

3.2. Le cocycle de Kontsevich et Zorich

3.2.1. *Première description.* — Soit $\mathcal{W}_\kappa \subset \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ une petite section transverse au flot de Teichmüller et soit $\widetilde{\mathcal{W}}_\kappa$ un représentant de \mathcal{W}_κ dans $Q_\kappa^{(1)}$ (l'action de Γ_g est discrète et propre sur $Q_\kappa^{(1)}$ et ses points fixes constituent un ensemble de $\mu_\kappa^{(1)}$ -mesure nulle). Pour $\mu_\kappa^{(1)}$ -presque tout point q de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ (resp. $t \in \mathbb{R}_-$) notons $0 \leq t_0 < \dots < t_r \leq t$ (resp. $t \leq t_r < \dots < t_0 \leq 0$) les temps tels que $G_{t_i}(q) \in \mathcal{W}_\kappa$. Soit $\tilde{q} \in Q_\kappa$ un représentant de $q \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ tel que $G_{t_0}(\tilde{q}) \in \widetilde{\mathcal{W}}_\kappa$ (l'action de Γ_g commute à celle de G_t). Pour chaque $0 \leq i \leq r-1$, il existe un unique $f_i \in \Gamma_g$ tel que $G_{t_{i+1}}(\tilde{q}) = f_i^* \cdot G_{t_i}(\tilde{q})$. L'action de $f_{r-1}^* \circ \dots \circ f_0^*$ sur $H^1(M, \mathbb{R})$ est symplectique et on l'identifie à une matrice de $Sp(2g, \mathbb{R})$. On pose $G_t^{KZ}(q) = f_{r-1}^* \circ \dots \circ f_0^*$. On a alors la relation de cocycle

$$G_{t+s}^{KZ}(q) = G_t^{KZ}(G_s(q))G_s^{KZ}(q).$$

On a ainsi une action de \mathbb{R} sur $\mathcal{M}_\kappa^{(1)} \times H^1(M, \mathbb{R})$: pour $(q, v) \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)} \times H^1(M, \mathbb{R})$

$$t \cdot (q, v) = (G_t(q), G_t^{KZ}(q) \cdot v).$$

Le cocycle $G^{KZ} : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_\kappa^{(1)} \rightarrow Sp(2g, \mathbb{R})$ est (une version) du cocycle de Kontsevich-Zorich. Kontsevich et Zorich donnent une définition intrinsèque de ce cocycle en utilisant le transport parallèle que fournit la connexion de Gauss-Manin (cf. [10] ou [5]).

Si l'on choisit une norme sur $H^1(M, \mathbb{R})$, il n'est pas difficile de voir que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathcal{M}_\kappa^{(1)}} \log \|G_t^{KZ}(q)\| d\mu_\kappa(q) < \infty,$$

si bien que l'on peut appliquer le théorème d'Oseledec (cf. section 5.1). La conjecture de Kontsevich et Zorich ([9], [10]) est la suivante :

CONJECTURE 3.2 (Kontsevich-Zorich). — *Les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevitch-Zorich sont tous non nuls et simples.*

Kontsevich et Zorich esquissent dans leur article [10] la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.3 (Kontsevich-Zorich)

(1) *Le plus grand exposant de Lyapunov est 1 et est simple (ce qui découle de la non hyperbolicité uniforme du flot géodésique prouvée par Veech); l'espace instable associé est $[\operatorname{Re}(q^{1/2})]$.*

(2) *Le deuxième exposant de Lyapunov gouverne le terme d'erreur dans le théorème ergodique pour les échanges d'intervalles.*

(3) *Les espaces instables au-dessus du point q ne dépendent que de la classe de cohomologie de $\operatorname{Im}(q^{1/2})$ dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$.*

Ils fournissent également une formule donnant la somme des exposants de Lyapunov positifs et conjecturent que cette somme est toujours un nombre rationnel.

Remarque. — La conjecture de Kontsevich-Zorich a été très récemment démontrée par A. Avila et M. Viana : « Simplicity of Lyapunov spectra : proof of the Zorich-Kontsevich conjecture ».

3.2.2. *Seconde description.* — Au lieu de considérer le cocycle $G_t^{KZ}(q)$ défini sur $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ et de fixer une norme sur $H^1(M, \mathbb{R})$, Forni procède de la façon suivante. Il considère le produit trivial $Q_\kappa^{(1)} \times H^1(M, \mathbb{R})$ et considère le flot \tilde{G}_t sur ce produit qui agit par le flot de Teichmüller sur Q_κ et de façon triviale sur $H^1(M, \mathbb{R})$, i.e. $\tilde{G}_t(q, v) = (G_t(q), v)$. En revanche, au lieu de fixer une norme qui est la même sur tous les $H^1(M, \mathbb{R})$, au-dessus de chaque $q \in Q_\kappa^{(1)}$, il munit $H^1(M, \mathbb{R})$ de la norme de Hodge

$$(\alpha, \beta)_q = \int_M \alpha \wedge * \beta,$$

où l'opérateur $*$ est défini par la structure complexe induite par q (i.e. dans une carte conforme $*dx = dy$, $*dy = -dx$, $x + iy$ étant le paramètre local). Une propriété évidente mais importante de cette norme est qu'elle est Γ_g -équivariante, c'est-à-dire $(\alpha, \beta)_q = (f^* \alpha, f^* \beta)_{f^* q}$ pour tout difféomorphisme f qui préserve l'orientation; par conséquent le spectre de Lyapunov du cocycle $G_t^{KZ}(x)$ étudié précédemment et celui du cocycle que définissent \tilde{G} et les normes $(\cdot, \cdot)_q$ sont les mêmes (cf. section 5.1). Nous noterons à nouveau G_t^{KZ} le cocycle \tilde{G}_t .

Forni démontre une partie de la conjecture de Kontsevich et Zorich :

THÉORÈME 3.4 (Forni [5]). — *Les exposants du cocycle de Kontsevich-Zorich sont tous non nuls et le plus grand est simple (la simplicité du plus grand exposant étant vraie pour n'importe quelle mesure invariante ergodique par le flot de Teichmüller).*

3.3. Un exemple

Nous illustrons sur un exemple simple les notions précédentes. Supposons que $f : M \rightarrow M$ soit un difféomorphisme pseudo-Anosov dont les feuilletages invariants sont orientables, c'est-à-dire qu'il existe deux feuilletages mesurés orientables transverses \mathcal{F} et \mathcal{F}^\perp et un réel non nul Λ tels que

$$f_*(\mathcal{F}) = \Lambda\mathcal{F}, \quad f_*(\mathcal{F}^\perp) = \Lambda^{-1}\mathcal{F}^\perp.$$

De façon équivalente, on peut supposer qu'il existe une différentielle quadratique orientable q telle que

$$f^*(\operatorname{Re}(q^{1/2})) = \Lambda \operatorname{Re}(q^{1/2}), \quad f^*(\operatorname{Im}(q^{1/2})) = \Lambda^{-1} \operatorname{Im}(q^{1/2}).$$

Les équations précédentes admettent des interprétations distinctes dans des espaces différents :

- sur M : les classes de $\operatorname{Re}(q^{1/2})$, $\operatorname{Im}(q^{1/2})$ dans $H^1(M, \mathbb{R})$ sont valeurs propres de l'application linéaire symplectique $f^* : H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})$ (qu'on identifie à un élément de $Sp(2g, \mathbb{R})$);
- sur \mathcal{M}_κ : $[q] \in \mathcal{M}_\kappa$ est un point périodique de période $T = \log |\Lambda|$ du flot de Teichmüller G_t .

Par définition du flot de Kontsevich-Zorich on a

$$G_T^{KZ} = f^*,$$

et donc les valeurs propres de f^* , $\Lambda_i^{\pm 1}$ $1 \leq i \leq g$ ($|\Lambda_1| \geq \dots \geq |\Lambda_g|$) et les exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_g \geq -\lambda_g \geq \dots \geq -\lambda_1$ du cocycle de Kontsevich-Zorich sont reliés par

$$\lambda_i = \frac{\log |\Lambda_i|}{\log |\Lambda|}.$$

On peut démontrer que $1 = \lambda_1 > \lambda_2$ (trou spectral, *cf.* section 4.3) et donc $\Lambda = \Lambda_1$ et $|\Lambda_1| > |\Lambda_2|$.

On va s'intéresser à présent non pas à f mais à la dynamique du feuilletage horizontal (ou vertical); ces feuilletages sont minimaux (toute feuille ne passant pas par les singularités de q est dense). On note (*cf.* section 4) S et T les champs de vecteurs associés aux feuilletages horizontal et vertical de q et ϕ_q^t le flot du champ de vecteurs horizontal S . Supposons en outre que μ soit une mesure invariante par S et même ergodique. Il n'est alors pas difficile de voir en appliquant le théorème ergodique (voir

section 6.1 pour plus de détails) que si on note $\gamma_t(p)$ le chemin $\phi_q^s(p)$, $0 \leq s \leq t$, on a pour μ -presque tout p et toute 1-forme fermée α

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\gamma_t(p)} \alpha = \rho_\mu(\alpha),$$

où $\rho_\mu \in H_1(M, \mathbb{R})$ est le vecteur de rotation de la mesure μ (défini section 6.1). Remarquer que le facteur $(1/t)$ est l'inverse de la q -longueur $L_q(\gamma_t)$ du chemin γ_t . On a toujours

$$\frac{1}{t} \int_{f_*\gamma_t(p)} f^*\alpha = \frac{1}{t} \int_{\gamma_t(p)} \alpha$$

et, comme $L_q(f(\gamma_t)) = \Lambda L_q(\gamma_t)$, on a

$$\Lambda^{-1} \langle \rho_\mu, f^*\alpha \rangle = \langle \rho_\mu, \alpha \rangle$$

et donc

$$f_*\rho_\mu = \Lambda\rho_\mu.$$

Comme Λ est simple, toutes les mesures ergodiques ont donc le même vecteur de rotation. Mais comme l'application $\mu \mapsto \rho_\mu$ est injective (cf. section 6.1), il n'y a qu'une seule mesure ergodique : le champ de vecteurs S (le feuilletage horizontal) est uniquement ergodique.

Si γ_t est une q -trajectoire horizontale de q -longueur t , on peut la fermer pour certaines valeurs de t par des chemins verticaux de q -longueurs petites. Notons $\widehat{\gamma}_t$ un tel chemin et étudions $f^n(\widehat{\gamma}_t)$; c'est un cycle de q -longueur $L_n \approx \Lambda^n L_q(\widehat{\gamma}_t)$ et si on projette $[f^n(\widehat{\gamma}_t)]$ sur l'espace propre de f_* de valeur propre Λ_2 (on note π_2 la projection), on obtient un cycle de q -longueur à peu près égale à $|\Lambda_2|^n = L_n^{\lambda_2}$. Ainsi,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\pi_2([f^n(\widehat{\gamma}_t)])|}{\log L_q(f^n(\widehat{\gamma}_t))} \leq \lambda_2.$$

Comme $f^*q = (\Lambda, \Lambda^{-1}).q$, $f^n(\widehat{\gamma}_t)$ est une trajectoire q -horizontale fermée par un petit chemin q -vertical; ceci suggère que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\pi_2([\gamma_t(x)])|}{\log t} \leq \lambda_2.$$

pour μ -presque tout $x \in M$.

Si $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une observable, ses moyennes ergodiques peuvent s'écrire

$$\frac{1}{t} \int_M F(\phi_S^t(x)) d\mu(x) = \frac{1}{t} \int_{\gamma_t} \alpha,$$

où α est la 1-forme $F\eta_T$ (pas forcément fermée) et on peut espérer obtenir des déviations de moyennes ergodiques si on projette α , donc F , sur des espaces convenables.

4. L'ANALYSE HARMONIQUE SUR M

Les résultats de cette partie sont démontrés dans [4].

Soit q un élément de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$. Notons η_{Ver} et η_{hor} les 1-formes fermées

$$\eta_{\text{Ver}} = \text{Re}(q^{1/2}), \quad \eta_{\text{hor}} = \text{Im}(q^{1/2}),$$

si bien que $\omega_q = \eta_{\text{Ver}} \wedge \eta_{\text{hor}}$. Il existe des champs de vecteurs S, T qui commutent, définis sur $M - \Sigma_q$ tels que (i_X désignant la contraction avec le champ de vecteurs X)

$$\eta_{\text{Ver}} = \eta_T = -i_T \omega_q, \quad \eta_{\text{hor}} = \eta_S = i_S \omega_q.$$

Ces champs sont C^∞ sur $M - \Sigma_q$, préservent la forme d'aire ω_q et explosent sur Σ_q . Au voisinage d'une singularité de q d'ordre $k = 2m$, ils s'écrivent ($z = x + iy$)

$$S = |z|^{-2m} \left(\text{Re}(z^m) \frac{\partial}{\partial x} - \text{Im}(z^m) \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$T = |z|^{-2m} \left(\text{Im}(z^m) \frac{\partial}{\partial x} + \text{Re}(z^m) \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

4.1. Espaces fonctionnels

Il faut distinguer plusieurs espaces fonctionnels. Tout d'abord, si ω (à ne pas confondre avec ω_q) est une forme volume non dégénérée, on peut définir l'espace $L^2(M)$ des fonctions telles que $\|u\|_0 < \infty$ pour la norme

$$\|u\|_0 = \left(\int_M |u|^2 \omega \right)^{1/2},$$

et les espaces de Sobolev standards $H^s(M)$ définis en cartes locales.

Par ailleurs, la 2-forme dégénérée ω_q définit également un espace $L_q^2(M)$ de fonctions L_q^2 -intégrable pour la norme

$$|u|_0 = \left(\int_M |u|^2 \omega_q \right)^{1/2}.$$

L'espace de Sobolev $H_q^1(M)$ est alors le complété de l'espace des fonctions $C^\infty(M)$ pour le produit scalaire

$$|u|_1 = \left(|u|_0^2 + |Su|_0^2 + |Tu|_0^2 \right)^{1/2}$$

et plus généralement les espaces $H_q^s(M)$ sont définis comme les complétés de $C^\infty(M)$ pour la norme

$$|u|_s = \left(\sum_{i+j \leq s} |S^i T^j u|_0^2 \right)^{1/2}.$$

Les espaces $H_q^s(M)$ sont naturellement des espaces de Hilbert et les opérateurs S, T vérifient pour $u, v \in H_q^1(M)$

$$(Su, v)_q = -(u, Sv)_q, \quad (Tu, v)_q = -(u, Tv)_q,$$

et la relation de commutation plus forte que $ST = TS$

$$(Su, Tv)_q = (Tu, Sv)_q,$$

ce qui se vérifie en utilisant les relations

$$(Su)\omega_q = du \wedge \eta_S = d(u\eta_S), \quad (Tu)\omega_q = -du \wedge \eta_T = -d(u\eta_T)$$

$$dv = (Tv)\eta_S + (Sv)\eta_T,$$

et la formule de Green.

Les relations entre les espaces de Sobolev standards et les $H_q^s(M)$ sont les suivantes :

- $L^2(M) \subset L_q^2(M)$
- $H^1(M) = H_q^1(M)$
- $H_q^s(M) \subset H^s(M)$ pour $s \geq 2$.

Les deuxième et troisième points se démontrent grâce à une inégalité de type Poincaré que Forni démontre dans ([4]). Remarquons que l'espace $C_0^\infty(M - \Sigma)$ n'est pas dense dans $H_q^s(M)$ pour $s \geq 2$.

Notons $L_q^2(M) = L^2(M, \omega_q)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable par rapport à la forme d'aire ; ces espaces de Hilbert sont invariants sous l'action du flot de Teichmüller, c'est-à-dire que $|u|_q = |u|_{G_t(q)}$ (attention à ne pas confondre le produit scalaire sur $L^2(M, \omega_q)$ et celui de Hodge pour les 1-formes). Notons ∂_q^\pm les opérateurs de Cauchy-Riemann

$$\partial_q^\pm = S \pm iT.$$

L'analyse harmonique sur M développée par Forni dans [4] peut en partie se résumer dans le théorème suivant

THÉORÈME 4.1 (Forni). — Soit q une différentielle quadratique qui est le carré d'une forme abélienne :

- (1) Les opérateurs ∂_q^\pm sont fermés sur le domaine $H^1(M) \subset L_q^2(M)$ constitué des fonctions L_q^2 dont les dérivées au sens des distributions sont L_q^2 .
- (2) Les opérateurs ∂_q^\pm ont des images R_q^\pm fermées et de codimension finie.
- (3) $(\partial_q^\pm)^* = -\partial_q^\mp$.
- (4) On a les décompositions orthogonales suivantes :

$$L_q^2(M) = R_q^- \oplus \mathcal{M}_q^+ = R_q^+ \oplus \mathcal{M}_q^-$$

(on notera π_q^\pm les projections orthogonales sur \mathcal{M}_q^\pm associées).

- (5) Les espaces de fonctions méromorphes (antiméromorphes) $\mathcal{M}_q^+ [\mathcal{M}_q^-]$ sont isomorphes à l'espace $H^1(M_q, \mathbb{R})$ muni de la norme de Hodge déterminée par q .

4.2. Les équations d'évolution

Le dernier point du théorème permet de *paramétrer* $H^1(M, \mathbb{R})$ muni de la norme de Hodge $\|\cdot\|_q$ par les fonctions q -méromorphes ou q -antiméromorphes de la façon suivante : les applications \mathbb{R} -linéaires $c_q^\pm : \mathcal{M}_q^\pm \rightarrow H^1(M_q, \mathbb{R})$ définies par

$$\begin{aligned} c_q^+(m^+) &= [\operatorname{Re}(m^+ q^{1/2})] \\ c_q^-(m^-) &= [\operatorname{Re}(m^- \bar{q}^{1/2})] \end{aligned}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels. En effet, d'après la théorie de Hodge, toute 1-forme fermée réelle est cohomologue à la partie réelle d'une forme abélienne h (une 1-forme harmonique). Or $h = (h/q^{1/2})q^{1/2}$, où $h/q^{1/2}$ est une fonction q -méromorphe L_q^2 -intégrable. On a en outre les relations

$$\|c_q^\pm(m^\pm)\|_q^2 = \int_M c_q^\pm(m^\pm) \wedge *c_q^\pm(m^\pm) = |m^\pm|_0^2,$$

et pour m_1^\pm, m_2^\pm dans \mathcal{M}_q^\pm

$$c_q^\pm(m_1^\pm) \wedge c_q^\pm(m_2^\pm) = \operatorname{Im}((m_1^\pm, m_2^\pm)_q).$$

La décomposition du théorème 4.1, (4)

$$u = \partial_q^+ v + \pi_q^-(u), \quad v \in H^1(M)$$

permet de définir un opérateur *unitaire* U_q sur L_q^2 par

$$U_q : u = \partial_q^+ v + \pi_q^-(u) \mapsto \partial_q^- v - \overline{\pi_q^-(u)}$$

($v \in H^1(M)$). Forni peut alors décrire l'action du cocycle de Kontsevich-Zorich. Rappelons que si $q_t = G_t(q)$

$$\begin{aligned} \eta_T(t) &= \operatorname{Re}(q_t^{1/2}) = e^t \operatorname{Re}(q^{1/2}) = e^t \eta_T \\ \eta_S(t) &= \operatorname{Im}(q_t^{1/2}) = e^{-t} \operatorname{Im}(q^{1/2}) = e^{-t} \eta_S. \end{aligned}$$

On a alors

$$\partial_t^\pm = S_t \pm iT_t = e^{-t} S \pm ie^t T.$$

Une des clés dans l'approche de Forni est la remarque suivante : il existe une correspondance entre les solutions de l'équation différentielle

$$m'(t) = U_{q_t}(m(t))$$

et le flot de Kontsevich-Zorich, en particulier

PROPOSITION 4.2. — *Avec les notations précédentes $m^+(t)$ est solution de l'équation différentielle*

$$(1) \quad m'(t) = U_{q_t}(m(t))$$

avec condition initiale $m^+ \in \mathcal{M}_q^+$ (et alors $m^+(t)$ est q_t -méromorphe) si et seulement si

$$(2) \quad G_t^{KZ}(c_q^+(m^+)) = c_{q_t}^+(m_t^+).$$

4.3. Exemple d'application : le trou spectral

Forni utilise ces équations d'évolution pour démontrer le trou spectral $\lambda_1 > \lambda_2$ (la plus grande valeur propre est simple) pour toute mesure μ invariante (et ergodique) par le flot géodésique (pas seulement $\mu_\kappa^{(1)}$).

Par définition du cocycle de Kontsevich-Zorich, les espaces $E_1(q) = \mathbb{R}[\text{Im}(q^{1/2})]$, $E_{-1}(q) = \mathbb{R}[\text{Re}(q^{1/2})]$ sont invariants et ont des exposants de Lyapunov 1 et -1 respectivement. Définissons, pour $q \in \mathcal{M}_\kappa$, $E_0(q)$ de la façon suivante :

$$E_0(q) = \{c \in H^1(M, \mathbb{R}), \quad c \wedge [\text{Re}(q^{1/2})] = c \wedge [\text{Im}(q^{1/2})] = 0\}.$$

Une classe c appartient à $E_0(q)$ si et seulement si c peut s'écrire $c = \text{Re}(m^+ q^{1/2})$ où m^+ est méromorphe (dans $L^2_q(M)$) et d'intégrale nulle, $\int_M m^+ \omega_q = 0$. Les fibrés $E_0(\cdot)$ sont invariants par le cocycle de Kontsevich-Zorich. Si $q_t = G_t(q)$, $c_t = G_t^{KZ}(c)$ avec $c \in E_0(q)$ et q μ -générique, on peut démontrer en utilisant les équations d'évolution que

$$\frac{d}{dt} \log |m_t^+|_0 = - \frac{\text{Re}((m_t^+, \overline{m_t^+})_q)}{|m_t^+|_0^2}.$$

En intégrant par rapport au temps il vient

$$\frac{1}{t} \log \frac{|m_t^+|_0}{|m^+|_0} = \frac{1}{t} \int_0^t - \frac{\text{Re}((m_t^+, \overline{m_t^+})_q)}{|m_t^+|_0^2} dt,$$

et si on applique le théorème d'Oseledec (cf. 5.1) on a

$$\lambda_2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t - \frac{\text{Re}((m_t^+, \overline{m_t^+})_q)}{|m_t^+|_0^2} dt.$$

Il est tentant d'utiliser pour le membre de droite le théorème de Birkhoff mais il faut trouver une fonction qui ne dépende que de q . À cet effet on introduit la quantité

$$\Lambda(q) = \max \left\{ - \frac{\text{Re}((m^+, \overline{m^+})_q)}{|m^+|_0^2}, \quad m^+ \in \mathcal{M}_q^+ - \{0\}, \quad \int_M m^+ \omega_q = 0 \right\}$$

et on obtient

$$\lambda_2 \leq \int_M \Lambda(q) d\mu(q).$$

Mais pour tout q , $\Lambda(q) < 1$ car sinon, d'après Cauchy-Schwarz, on aurait $\overline{m^+} = \rho m^+$, $|\rho| = 1$, ce qui voudrait dire que m^+ est méromorphe et anti-méromorphe donc constante donc nulle (cf. la condition d'intégrale nulle). Un argument de compacité donne la conclusion.

5. FORMULES POUR LES SOMMES DES EXPOSANTS DE LYAPUNOV

5.1. Rappels sur le théorème d'Oseledec

Considérons un espace X muni d'une mesure de probabilité μ et d'un flot $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ (c'est-à-dire d'une famille à un paramètre d'homéomorphismes de X tels que $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$ pour $t, s \in \mathbb{R}$). Soit par ailleurs $S : \mathbb{R} \times X \rightarrow Sp(2g, \mathbb{R})$ une application μ -intégrable vérifiant la relation de cocycle $S^{t+s}(x) = S^t(\phi^s(x))S^s(x)$ (on notera parfois dans la suite $S_t(x) = S^t(x) = S(t, x)$). On a ainsi une action de \mathbb{R} sur $X \times \mathbb{R}^{2g}$:

$$t \cdot (x, v) = (\phi^t(x), S^t(x)v).$$

On peut aussi supposer que pour μ -presque tout x il existe une norme $\|\cdot\|_x$ sur \mathbb{R}^{2g} dépendant mesurablement de x et on note $\|S^t(x)\|_{t,x}$ la norme de l'application linéaire $S^t(x) : (\mathbb{R}^{2g}, \|\cdot\|_x) \rightarrow (\mathbb{R}^{2g}, \|\cdot\|_{\phi^t(x)})$. Le théorème d'Oseledec (que nous énonçons dans le cas ergodique et symplectique) dit en partie la chose suivante

THÉORÈME 5.1. — *Si le flot $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est μ -ergodique et si pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\int_X \log \|S^t(x)\|_{t,x} d\mu(x) < \infty,$$

alors pour μ -presque tout x on peut trouver

- un entier $0 \leq h \leq 2g$
- des nombres réels $\lambda'_h < \dots < \lambda'_1$ tels que $\lambda'_i + \lambda'_j = 0$ si $i + j = h + 1$
- des espaces $E_1(x), \dots, E_h(x)$ tels que

$$\mathbb{R}^{2g} = \bigoplus_{i=1}^h E_i(x)$$

qui dépendent mesurablement de x et sont invariants par la dynamique (i.e. $\phi^t(E_i(x)) = E_i(\phi^t(x))$)

tels que pour tout vecteur $v \in E_i(x)$ non nul

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \log \|S^t(x)v\|_x = \pm\lambda'_i.$$

Par ailleurs, les espaces $E_1 \oplus \dots \oplus E_i$ $1 \leq i \leq [h/2]$ sont isotropes (et pour $i = h/2$ lagrangien).

La donnée des λ'_i et des dimensions des espaces E_i ($1 \leq i \leq h$) s'appelle le spectre de Lyapunov du cocycle ; on dit que l'exposant λ'_i est simple si $\dim E_i$ égale 1 et que le spectre est simple si tous les exposants sont simples. La somme directe des $E_i(x)$ sur les $1 \leq i \leq h$ tels que $\lambda'_i > 0$ (resp. $\lambda'_i < 0$) s'appelle l'espace instable (resp. stable) en x .

Une astuce classique pour avoir accès à la somme des exposants $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ (comptés avec multiplicités) est la suivante. On considère l'espace vectoriel $\Lambda^k E$ des

k -formes alternées sur E^* qu'on peut munir du produit scalaire suivant : pour deux k -vecteurs décomposables $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ et $w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) = \det((v_i, w_j)_{ij}).$$

Étant donnée T une application linéaire sur E on définit sur $\Lambda^k E$ l'application linéaire $T^{\wedge k}$ par son action sur les k -vecteurs décomposables

$$T^{\wedge k}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = (Tv_1) \wedge \cdots \wedge (Tv_k).$$

Si $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ et $\tilde{v} = \tilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_k$ ($\tilde{v}_i = Tv_i$),

$$\frac{\|T^{\wedge k}v\|}{\|v\|} = \frac{\|\tilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_k\|}{\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\|} = \left(\frac{\det((\tilde{v}_i, \tilde{v}_j)_{ij})}{\det((v_i, v_j)_{ij})} \right)^{1/2}$$

et cette dernière quantité ne dépend que de l'espace I engendré par les v_1, \dots, v_k . On la notera $\det A_T^k(I)$. Par ailleurs, comme la somme des k plus grands exposants $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ est égale à

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_X \log \|S_t^{\wedge k}(x)\| d\mu(x)$$

on a le lemme suivant :

LEMME 5.2. — Soit G_k la grassmannienne des k -plans isotropes I_k de \mathbb{R}^{2g} et σ_k la mesure canonique sur G_k . La somme $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ égale

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_X \int_{G_k} \log |\det A_{S^t(x)}^k(I)|^{1/2} d\sigma^k(I) d\mu(x).$$

5.2. Disques de Teichmüller et laplacien hyperbolique

L'orbite d'une différentielle quadratique q sous l'action du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ est métriquement isométrique au fibré unitaire cotangent du disque de Poincaré (muni de sa métrique de courbure -4). Le quotient $Q_g^{(1)}/SO(2, \mathbb{R})$ est feuilleté par des feuilles de dimension réelle 2 isométriques au disque de Poincaré qu'on appelle disques de Teichmüller. De façon plus explicite, soit $z = re^{i\theta}$, $|z| < 1$ un point du disque de Poincaré. Notons

$$q_z = G_t(q_\theta), \quad q_\theta = e^{i\theta}q,$$

où $t = (1/2) \log \frac{1+r}{1-r}$. On pose $j_q(z) = [q_z] \in Q_g^{(1)}/SO(2, \mathbb{R})$. Observons que $j_q(0) = [q]$. On peut projeter ce plongement sur $\mathcal{M}_g^{(1)}$ et on obtient un feuilletage \mathcal{T}_g de $\mathcal{M}_g^{(1)}/SO(2, \mathbb{R})$ qui est régulier pour presque toute feuille (cf. [10]).

Sur le disque hyperbolique muni de sa métrique $|dz|/(1-|z|^2)$ (de courbure -4) le laplacien hyperbolique en coordonnées polaires hyperboliques (t, θ) s'écrit

$$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \coth(2t) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4}{\sinh^2(2t)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Le lemme suivant est très utile pour la suite :

LEMME 5.3. — Soit $\Lambda : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et C^∞ et $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ une solution C^∞ de

$$\Delta_h L = \Lambda.$$

La relation suivante est alors vraie :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} L(t, \theta) d\theta = \frac{1}{2} \tanh(t) \frac{1}{|D_t|} \int_{D_t} \Lambda \omega_P,$$

où $|D_t|$ représente l'aire du disque de centre 0 et de rayon (hyperbolique) t et ω_P est la forme d'aire.

5.3. Utilisation des équations d'évolution

Reprenons les notations de la section 5.1 dans le cadre du cocycle de Kontsevich-Zorich. Notons $G_k(M, \mathbb{R})$ la grassmannienne des espaces isotropes de dimension k ($1 \leq k \leq g$) de l'espace symplectique $H^1(M, \mathbb{R})$ (pour la forme d'intersection) et soit $I_k \in G_k(M, \mathbb{R})$ un k -plan isotrope dont on a choisi une base (c_1, \dots, c_k) . Si q est une différentielle quadratique on peut définir (cf. section 4) des fonctions méromorphes m_1^+, \dots, m_k^+ telles que

$$c_i = \operatorname{Re}(m_i^+ q^{1/2}),$$

et introduire des fonctions $v_1, \dots, v_k \in H^1(M)$ telles que

$$m_i^+ = \partial_q^+ v_i + \pi_q^-(m_i^+),$$

où $\pi_q^- : L_q^2(M) \rightarrow \mathcal{M}_q^-$ est l'opérateur de projection orthogonal sur les fonctions anti-méromorphes défini précédemment.

D'après le lemme 5.2 la somme des exposants $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ du cocycle de Kontsevich-Zorich est égale à

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\mathcal{M}_\kappa^{(1)}} \int_{G_k(M)} \log |\det A_T^k(q, I)|^{1/2} d\sigma^k(v) d\mu_\kappa^{(1)}(x),$$

où $\det A_T^k(q, I) = \det A_{G_T(q)}^k(I)$ est le déterminant de la matrice dont le coefficient i, j est $(c_i(T), c_j(T))_q$ ou de façon équivalente $(m_i^+(T), m_j^+(T))_q$.

Pour clarifier un peu ce qui va suivre, plaçons-nous dans le cadre suivant. Soient X un espace « sympathique » sur lequel le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ agit, ν une mesure invariante par l'action du sous-groupe $SO(2, \mathbb{R})$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction « régulière ». Nous notons g_t la matrice diagonale $\operatorname{diag}(e^t, e^{-t})$ et $\rho_\theta \in SO(2, \mathbb{R})$ la rotation d'angle θ . On veut évaluer le comportement de $f(g_t \cdot x)$ quand t tend vers l'infini. L'idée est d'introduire une complexification du temps : au lieu d'étudier $f(t \cdot x) := f(g_t \cdot x)$ on va étudier $f(z \cdot x)$ où z est dans le disque de Poincaré. Définissons pour $z = re^{i\theta}$ (avec $t = (1/2) \log \frac{1+r}{1-r}$)

$$f_x(z) = f(z \cdot x) = f((g_t \rho_\theta) \cdot x).$$

La formule du lemme précédent montre que si $h_x = \Delta_h f_x$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \partial_t \int_0^{2\pi} f((g_t \rho_\theta) \cdot x) d\theta = \frac{1}{2} \tanh(t) \frac{1}{|D_t|} \int_{D_t} h(z \cdot x) \omega_P(z).$$

Comme ν est une mesure finie sur X invariante par l'action de $SO(2, \mathbb{R})$, on a en intégrant par rapport à ν

$$\partial_t \int_X f(g_t \cdot x) d\nu(x) = \frac{1}{2} \tanh(t) \frac{1}{|D_t|} \int_X \int_{D_t} h(z \cdot x) \omega_P(z) d\nu(x).$$

Si on suppose en plus que h vérifie pour tout t

$$\int_X h(g_t \cdot x) d\nu(x) = \int_X h d\nu,$$

c'est-à-dire si en plus de la $SO(2, \mathbb{R})$ -symétrie de ν , (h, ν) possède une symétrie (faible) par rapport au groupe diagonal, on obtient

$$\partial_t \int_X f(t \cdot x) d\nu(x) = \frac{1}{2} \tanh(t) \int_X h(x) d\nu(x),$$

et si on intègre en t ,

$$\int_X f(t \cdot x) d\nu(x) = \text{cste} + \log \cosh(t) \int_X h(x) d\nu(x).$$

Enfin si on divise par t et qu'on passe à la limite

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_X f(t \cdot x) d\nu(x) = \int_X h(x) d\nu(x).$$

Dans la suite l'espace X sera le produit $\mathcal{M}_\kappa^{(1)} \times G_k(M, \mathbb{R})$, $x = (q, I)$ et la mesure ν sera le produit de la mesure $\mu_\kappa^{(1)}$ par la mesure canonique σ_k sur $G_k(M, \mathbb{R})$. Notons que $\mu_\kappa^{(1)}$ est invariante par l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ tandis que σ_k et donc ν ne sont invariantes que par $SO(2, \mathbb{R})$. L'application $f_x(z)$ sera égale à $\log |\det A_z^k(q, I)|^{1/2}$. Il nous faut à présent identifier la fonction h et pour cela calculer le laplacien hyperbolique de f_x . La paramétrisation introduite par Forni que nous avons décrite en 4 se révèle alors très utile.

On a vu que l'évolution des $c_i(t)$ suivant le cocycle de Kontsevich-Zorich, c'est-à-dire l'évolution des c_i sous l'action du groupe diagonal \mathbb{A} se lisait dans la façon dont évoluent les $m_i^+(t)$ suivant la dynamique donnée par (1). De manière analogue Forni calcule le laplacien hyperbolique de f (il faut en plus dériver f par rapport à l'algèbre de Lie du groupe des rotations). Le résultat est alors le suivant : si on note

$$\begin{aligned} A_{ij}^k &= (m_i^+, m_j^+)_q, \\ H_{ij}^k &= (\pi_q^-(m_i^+), \pi_q^-(m_j^+))_q, \\ B_{ij}^k &= B_q(m_i^+, m_j^+) = (m_i^+, \overline{m_j^+})_q, \\ V_{ij}^k &= (\partial_q^+ v_i, \partial_q^+ \overline{v_j})_q = (\partial_q^- v_i, \partial_q^- \overline{v_j})_q \end{aligned}$$

on a

$$\Delta_h \log |\det(A_z^k)|^{1/2} = 4 \operatorname{tr}[(A_z^k)^{-1} H_z^k] - 2 \operatorname{tr}[(A_z^k)^{-1} B_z^k (A_z^k)^{-1} \overline{B_z^k}]$$

La fonction

$$\Phi_k = 2 \operatorname{tr}[(A^k)^{-1} H^k] - \operatorname{tr}[(A^k)^{-1} B^k (A^k)^{-1} \overline{B^k}]$$

est en fait indépendante de la base choisie pour le k -plan isotrope I_k et définit une fonction $\Phi_k : Q_\kappa^{(1)} \times G_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ invariante par l'action naturelle du groupe modulaire Γ_g . Soient $I_1 \subset \dots \subset I_g \subset H^1(M, \mathbb{R})$ une suite d'espaces isotropes, $q \in Q_\kappa^{(1)}$, et m_1^+, \dots, m_g^+ une base orthonormale de \mathcal{M}_q^+ tels que les c_1^+, \dots, c_k^+ représentent une base orthonormale de I_k (via $c_i = [\operatorname{Re}(m_i^+ q^{1/2})]$) alors

$$(1) \quad \Phi_1(q, I_1) = 2|\pi_q^-(m_1^+)|^2 - |B_q(m_1^+)|^2,$$

$$(2) \quad \Phi_k(q, I_k) = \Phi_g(q, I_g) - \sum_{i,j=k+1}^g |B_q(m_i^+, m_j^+)|^2$$

(3) $\Phi_g(q, I_g) = \Lambda_1(q) + \dots + \Lambda_g(q)$ où les $\Lambda_1(q) \geq \dots \geq \Lambda_g(q) \geq 0$ sont les valeurs propres de la matrice hermitienne positive H_q . Notons que dans le cas $k = g$ il n'y a pas de dépendance en I_g .

5.4. Conséquences

Revenons au problème de la somme des exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich. Nous avons vu précédemment que l'hypothèse sous laquelle la formule donnant la somme des exposants de Lyapunov est vraie et que la fonction $h(q, I) = \Phi_k(q, I)$ a une symétrie supplémentaire sous l'action du groupe diagonal. Comme la mesure $\mu_\kappa^{(1)}$ est invariante pour l'action de $SL(2, \mathbb{R})$, ceci est assuré quand $k = g$ car dans ce cas $h(q, I) = \Phi_g(q, I) = \Lambda_1(q) + \dots + \Lambda_g(q)$ ne dépend pas de I . Par conséquent si $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ est une composante connexe de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ (où la mesure $\mu_\kappa^{(1)}$ est ergodique ce qui permet d'appliquer la version ergodique du théorème d'Oseledec)

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_g = \frac{1}{\mu_\kappa^{(1)}(\mathcal{C}_\kappa^{(1)})} \int_{\mathcal{C}_\kappa^{(1)}} (\Lambda_1(q) + \dots + \Lambda_g(q)) d\mu_\kappa^{(1)}(q).$$

Une formule explicite donnant la somme des exposants avait déjà été obtenue par Kontsevich et Zorich ([10]). Comme $\lambda_1 = 1$ et $\Lambda_1 \equiv 1$ la formule précédente donne

$$\lambda_2 + \dots + \lambda_g = \frac{1}{\mu_\kappa^{(1)}(\mathcal{C}_\kappa^{(1)})} \int_{\mathcal{C}_\kappa^{(1)}} (\Lambda_2(q) + \dots + \Lambda_g(q)) d\mu_\kappa^{(1)}(q),$$

et montre que $\lambda_2 > 0$ pourvu que l'on sache démontrer que (par exemple) Λ_g est strictement positive sur un ouvert de la composante $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ (en fait Forni donne dans ce cas une démonstration plus simple).

Dans le cas où $1 \leq k < g$ et en supposant que l'on sache démontrer que $\Lambda_g(q)$ est strictement positive sur un ouvert de la composante $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$, l'argument précédent ne fonctionne pas directement mais dans le cas où k est inférieur ou égal à $g/2$ Forni démontre de façon analogue et par un argument de dimension que la somme $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ est strictement positive. Dans les autres cas, la conclusion de l'analyse est la suivante :

PROPOSITION 5.4. — Si pour $1 \leq k \leq g-1$ on a $\lambda_k > \lambda_{k+1} \geq 0$, alors

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = \frac{1}{\mu_\kappa^{(1)}(\mathcal{C}_\kappa^{(1)})} \int_{\mathcal{C}_\kappa^{(1)}} \Phi_k(q, E_k^+(q)) d\mu_\kappa^{(1)}(q),$$

où $E_k^+(q)$ est le sous-espace de $H^1(M, \mathbb{R})$ de dimension k correspondant aux exposants $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

5.5. Le « déterminant locus »

Comme on vient de le voir, pour obtenir des résultats de positivité d'exposants de Lyapunov il est important de savoir que $\Lambda_g(q)$ est *strictement* positive sur un ouvert de la composante $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ et il est donc important de connaître le lieu des q où $\Lambda_g(q)$ s'annule. La matrice des périodes va jouer un rôle important dans cette analyse géométrique. Si $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ est une base canonique de l'homologie (donnant le marquage de M) et $\theta_1, \dots, \theta_g$ la base duale des différentielles holomorphes (*i.e.* telle que $\theta_i(a_j) = \delta_{ij}$) la matrice des périodes Π est la matrice complexe $g \times g$ d'éléments $\Pi_{ij} = \theta_i(b_j)$ qui vit dans l'espace de Siegel des matrices complexes symétriques et de partie réelle définie positive. Cette matrice Π dépend de la structure complexe choisie. Si $(M_t, q_t) = G_t(M, q)$, posons $\Pi_t = \Pi(M_t)$. Forni définit $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$ l'ensemble des $[q] \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ où

$$\det\left(\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)\Big|_{t=0}\right) = 0$$

(c'est bien invariant par le groupe modulaire à cause du déterminant). C'est une surface analytique réelle dans $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ de codimension 2. Le lemme clé est alors

LEMME 5.5. — L'ensemble des q où $\Lambda_g(q) = 0$ est égal à $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$.

Si on pose $\phi_i^+ = \theta_i/q^{1/2}$, $\{\phi_1^+, \dots, \phi_g^+\}$ est une base de \mathcal{M}_q^+ et il est possible de voir (formule de Rauch) que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Pi}{dt}\right)\Big|_{t=0} &= \int_M \phi_i^+ \phi_j^+ \omega_q \\ &= (\phi_i^+, \overline{\phi_j^+})_q \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)\Big|_{t=0} = B_q(\phi_i^+, \phi_j^+).$$

Comme $\{\phi_1^+, \dots, \phi_g^+\}$ et $\{m_1^+, \dots, m_g^+\}$ sont deux bases, le déterminant $\det B_q(m_i^+, m_j^+)$ est nul si et seulement si $\det B_q(\phi_i^+, \phi_j^+)$ l'est. Comme $|\det H_q(m_i^+, m_j^+)| = |\det B_q(m_i^+, m_j^+)|^2$, on a bien la conclusion du lemme.

Ainsi, pour pouvoir démontrer que $\Lambda_g(q) > 0$ sur un ouvert de la composante $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$, il faut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 5.6. — Les composantes $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ ne sont jamais contenues dans le « déterminant locus ».

La preuve de ce résultat nécessite une analyse fine de ce qui se passe au bord de l'espace des modules, c'est-à-dire quand on « pince » certaines courbes sur la surface. Il se trouve que dans cette situation les calculs sont plus faciles, car pincer revient à remplacer certains morceaux de cylindres dans M par des cylindres beaucoup plus longs (mais de même diamètre) ce qui a tendance à « concentrer la masse » en des endroits (les cylindres) où les calculs sont plus explicites.

6. CYCLES ASYMPTOTIQUES ET COURANTS

6.1. Cycles asymptotiques

Considérons, sur une surface compacte M , le flot ϕ_X^t d'un champ de vecteurs X dont les singularités sont de type selle ; en genre $g \geq 2$ un tel champ de vecteurs a des singularités $\Sigma = \{p_1, \dots, p_\sigma\}$ d'indices n_1, \dots, n_σ (nombres de séparatrices moins 1) qui vérifient $n_1 + \dots + n_\sigma = 2g - 2$ (Poincaré-Hopf). Les entiers σ, p_i, n_i ($1 \leq i \leq \sigma$) déterminent le type de singularité de X . Si μ est une mesure invariante pour le flot ϕ_X^t on peut définir pour toute 1-forme fermée α la quantité,

$$\int_M i_X \alpha d\mu,$$

qui dépend linéairement de α et on vérifie facilement que si α est exacte cette quantité est nulle. On a ainsi construit un élément $\rho_{X,\mu}$ dans le dual de $H^1(M, \mathbb{R})$ (que l'on identifie à $H_1(M, \mathbb{R})$) :

$$\rho_{X,\mu}([\alpha]) = \int_M i_X \alpha d\mu,$$

que l'on appelle le vecteur de rotation de μ . Quand μ est une mesure ergodique pour le flot, on sait d'après le théorème de Birkhoff que pour μ -presque tout $x \in M$

$$\begin{aligned} \rho_{X,\mu}([\alpha]) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (i_X \alpha)(\phi_X^t(x)) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\gamma_t} \alpha, \end{aligned}$$

où γ_t est le morceau d'orbite de x pour $0 \leq s \leq t$ suivant le flot ϕ_t . Si on choisit t de façon que x et $\phi_X^t(x)$ soient proches, on peut fermer l'orbite par une petite transversale au flot pour obtenir un chemin fermé $\tilde{\gamma}_t$. On a alors dans $H_1(M, \mathbb{R})$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [\tilde{\gamma}_t] = \rho_{X,\mu}.$$

On peut aussi définir ρ d'une autre manière quand μ est définie par une forme volume ω : puisque $0 = i_X(\alpha \wedge \omega) = i_X \alpha \omega + \alpha \wedge i_X \omega$

$$\rho_{X,\mu}(\alpha) = \int_M i_X \omega \wedge \alpha$$

et, via la dualité de Poincaré, $\rho_{X,\mu}$ s'identifie à $i_X\omega$. (Dans le cas général : Si γ est un chemin fermé sur M , on laisse évoluer γ suivant le flot entre 0 et t et on calcule l'aire balayée au cours du mouvement.) Puisque $i_X \circ d + d \circ i_X = \mathcal{L}_X$, on voit que la 1-forme $i_X\omega$ est fermée si et seulement si ω est invariante par le flot de X (la mesure que définit ω est donc invariante par le flot). On peut associer deux classes de cohomologie à $i_X\omega$ qui ont des rôles distincts :

(1) d'une part sa classe de cohomologie dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ (de dimension $2g + \sigma - 1$) qui intervient dans la classification des *champs de vecteurs* X dont les singularités sont de type prescrit et qui préservent une forme volume fixée ω : un théorème de Katok (cf. [7] chap. 14) dit que deux tels champs de vecteurs qu'on peut relier par un chemin continu de champs de vecteurs sont orbite-équivalents (ou équivalents modulo changement de temps) si et seulement si leurs classes de cohomologie dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ sont colinéaires (la constante de colinéarité étant positive). La conjugaison peut être choisie Lipschitz sur M et C^∞ en dehors des singularités ;

(2) d'autre part sa classe de cohomologie dans $H^1(M, \mathbb{R})$ (de dimension $2g$) qui intervient dans la classification des *mesures* μ -invariantes par X : un théorème de Katok (cf. *loc. cit.*) dit que deux mesures μ_1 et μ_2 invariantes par X et supportées sur des composantes transitives sont égales si et seulement si $\rho_{X,\mu_1} = \rho_{X,\mu_2}$ dans $H^1(M, \mathbb{R})$. Par ailleurs l'image de ces mesures par ρ_X dans $H^1(M, \mathbb{R})$ est un espace *isotrope*, donc de dimension inférieure à g .

Détaillons un peu ce dernier point. Si μ_1, μ_2 sont deux mesures invariantes que l'on suppose régulières (*i.e.* données par des 2-formes C^∞ ω_1, ω_2) dont les nombres de rotation sont les mêmes, on a

$$i_X\omega_1 - i_X\omega_2 = df,$$

où f est une fonction C^∞ . En contractant l'égalité précédente suivant X on obtient $i_X df = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{L}_X f = 0$: f est invariante par le flot. Si on suppose ce flot (quasi-) minimal alors f est constante et donc $df = 0$ soit

$$i_X\omega_1 = i_X\omega_2,$$

et en prenant le produit extérieur avec n'importe quelle 1-forme α on voit que les fonctions $(i_X\alpha)$ sont d' ω -intégrales nulles ($\omega = \omega_1 - \omega_2$) donc $\omega_1 = \omega_2$.

Si on ne fait aucune hypothèse de régularité sur les mesures μ_1, μ_2 , hormis l'hypothèse qu'elles sont sans atomes, on a encore

$$i_X\mu_1 - i_X\mu_2 = df,$$

mais cette fois-ci au sens des distributions (ou des courants) et on voit (intégrer l'équation précédente sur un chemin) que f est continue et donc, si X est quasi-minimal, constante.

Ceci suggère qu'il est important de travailler dans l'espace des courants.

Dans le cas « générique » le flot de ϕ_X^t est (quasi-) minimal et il n'y a donc, en dehors des mesures de Dirac aux singularités qu'une seule mesure invariante (ergodique) par X : l'image des mesures dans $H^1(M, \mathbb{R})$ est donc « génériquement » de dimension 1. Nous verrons par la suite que si au lieu de considérer des mesures invariantes on considère des *distributions* invariantes on pourra atteindre, en fonction de la régularité de ces distributions, des espaces de dimension g (lagrangiens) ou même $2g - 1$.

6.2. Courants

Un courant (*cf.* [14], [2]) est une forme linéaire C sur Λ_0^*M (les formes C^∞ à support compact) continue au sens des distributions, *i.e.* $C(\phi_j)$ tend vers 0 pour toute suite de formes à support compact ϕ_j tendant vers 0 en topologie C^∞ . Il est homogène de dimension p s'il est nul sur toute k -forme $k \neq p$. Les opérations usuelles de bord, contractions... se définissent par dualité (en général via Stokes) comme pour les distributions et un point important est le théorème de De Rham : tout courant peut être régularisé, plus précisément : tout courant est cohomologue (au sens des courants) à un courant lisse.

Dans $\mathcal{D}'(M - \Sigma)$ une distribution \mathcal{D} est un courant de dimension 0 et de degré 2 et on peut lui associer canoniquement un courant $\tilde{\mathcal{D}}$ de dimension 2 et de degré 0 tel que $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}\omega_q$; tout courant de dimension 0 peut se représenter de façon unique sous cette forme. Afin de ne pas trop alourdir les notations, nous identifierons les courants de dimension 0 et 2 et parlerons plus simplement de distributions. Un courant C homogène de degré 1 dans $\mathcal{D}'(M - \Sigma)$ est dit *basique* par rapport à un feuilletage \mathcal{F} si pour tout champ de vecteurs X tangent au feuilletage \mathcal{F}

$$i_X C = 0, \quad \mathcal{L}_X C = 0.$$

Dans la suite il sera important de travailler avec des courants qui se comportent bien aux singularités. En particulier un courant est dit *q-tempéré* s'il est dans le dual topologique de l'espace des formes α qui sont C^∞ et qui au voisinage de chaque singularité $p \in \Sigma$ d'ordre m (*i.e.* $q(z) = z^{2m} dz^2$ au voisinage de p) s'écrivent $\alpha = \pi_p^*(\lambda_p)$ où λ est C^∞ et π_p s'écrit localement $\pi_p(z) = z^{m+1}/(m+1)$. On définit aussi des espaces de Sobolev : d'abord d'ordre $s \geq 0$ pour les 1-formes : une 1-forme est dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_q^s(M)$ si ses contractions avec les champs de vecteurs S, T sont des fonctions dans $H_q^s(M)$; puis par dualité on définit les espaces $\mathcal{H}_q^{-s}(M)$, $s \geq 0$. L'espace de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_q^s(M)$ (resp. $\mathcal{B}_{-q}^s(M)$) est l'ensemble des courants basiques q -tempérés C tels que $i_S C = 0$ dans $H_q^{-s}(M)$ et $\mathcal{L}_S C = 0$ dans $\mathcal{H}_q^{-s-1}(M)$ (resp. $i_T C = 0$ dans $H_q^{-s}(M)$ et $\mathcal{L}_T C = 0$ dans $\mathcal{H}_q^{-s-1}(M)$).

En fait tout courant basique tempéré $C \in \mathcal{B}_q^s(M)$ peut se représenter sous la forme $\mathcal{D}\eta_S$ (*i.e.* $\mathcal{D}.i_S\omega_q$) où \mathcal{D} est une distribution S -invariante (*i.e.* $\mathcal{L}_S \mathcal{D} = 0$) dans $H_q^{-s}(M)$ définie par

$$\mathcal{D}\omega_q = -C^+ \wedge \eta_T.$$

et réciproquement si \mathcal{D} est une distribution invariante tempérée $\mathcal{D}\eta_S$ est un courant basique tempéré.

Tout courant basique C réel est fermé et définit un élément du dual $H_c^1(M - \Sigma, \mathbb{R})^*$ des formes à support compact; par la dualité de Poincaré $H_c^1(M - \Sigma, \mathbb{R})^* = H^1(M - \Sigma, \mathbb{R})$. Si le courant est q -tempéré on peut en fait lui associer une classe de cohomologie dans $H^1(M, \mathbb{R})$. Nous notons j_q cette application. Les images par j_q des espaces \mathcal{B}_q^s ne dépendent que de la classe de cohomologie de $\text{Im } q^{1/2}$ dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ ce qui découle d'une version du théorème de Katok de la section 6.1 (1). À la différence du vecteur de rotation des mesures, la classe de cohomologie d'un courant basique tempéré ne détermine pas le courant de façon unique. D'autre part, il n'est pas clair que l'image par j_q de l'ensemble des courants basiques tempérés soit isotrope dans $H^1(M, \mathbb{R})$. En revanche, pour *presque tout* q (dans un sens à préciser) Forni apporte les réponses suivantes :

(1) Soit q une différentielle quadratique. Alors, pour presque tout θ , l'application $\mathcal{B}_{e^{i\theta}q}^1(M) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})$ qui à un courant basique $qe^{i\theta}$ -tempéré associe sa classe de cohomologie est injective (pour des courants d'ordre $s \geq 1$ il existe en fait une suite exacte qui généralise ce résultat).

(2) Il existe un entier $l > 1$ tel que pour tout $s \geq l$ et presque toute différentielle quadratique l'image par j_q dans $H^1(M, \mathbb{R})$ des courants basiques q -tempérés d'ordre s est de dimension $2g - 1$: c'est l'ensemble des classes c telles que $c \wedge [\text{Im } q^{1/2}] = 0$.

(3) Dans le cas où $s = 1$, l'image par j_q des courants basiques q -tempérés est pour presque tout q un espace lagrangien de $H^1(M, \mathbb{R})$.

Le cas où $s = 1$ est celui qui intervient dans l'étude du cocycle de Kontsevich-Zorich. On peut d'ailleurs identifier ce sous-espace lagrangien : c'est l'espace instable du cocycle de Kontsevich-Zorich au-dessus du point q . Nous reviendrons sur ce point plus tard.

6.3. Espaces stables/instables, courants basiques et cocycle de Forni

À ce stade nous ne savons pas si les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich sont tous non nuls. Plaçons-nous dans l'hypothèse de la proposition 5.4 : pour $1 \leq k \leq g - 1$ on a $\lambda_k > \lambda_{k+1} = 0$ (on prend k maximal), c'est-à-dire que pour presque tout $q \in \mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ on peut parler des espaces stables et instables $E^- = E_k^-$, $E^+ = E_k^+$ qui sont de dimension k .

THÉORÈME 6.1. — *Pour $\mu_\kappa^{(1)}$ -presque tout q les espaces $E^+(q)$, $E^-(q)$ coïncident avec $\mathcal{B}_q^1(M)$, $\mathcal{B}_{-q}^1(M)$ les espaces de courants basiques tempérés (c'est-à-dire que l'image dans $H^1(M, \mathbb{R})$ de $\mathcal{B}_{\pm q}^1(M)$ par j_q égale $E^\pm(q)$).*

A) Esquissons la preuve du fait que toute classe $[c]$ dans $E^+(q)$ peut être représentée par un courant basique tempéré d'ordre 1.

1) Déjà, d'après la théorie de Hodge c est cohomologue à une 1-forme harmonique fermée de la forme $\operatorname{Re}(m^+q^{1/2})$ où m^+ est méromorphe dans $L_q^2(M)$. Notons $c_t = G_t^{KZ}(c) = \operatorname{Re}(m_t^+q_t^{1/2})$ son image sous l'évolution du cocycle de Kontsevich-Zorich. Puisque c_t et c sont cohomologues, il existe une fonction U_t qu'on peut choisir de moyenne nulle telle que

$$(4) \quad dU_t = \operatorname{Re}(m^+q^{1/2}) - \operatorname{Re}(m_t^+q_t^{1/2}).$$

Contractons l'équation précédente suivant S ; nous obtenons

$$SU_t = \operatorname{Re}(m^+) - e^t \operatorname{Re}(m_t^+).$$

Nous allons démontrer que $|U_t|_{L_q^2}$ est bornée. On pourra ainsi extraire de U_t une sous-suite faiblement convergente dans L^2 vers un U et comme $e^t \operatorname{Re}(m_t^+)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow -\infty$ on aura au sens des distributions

$$SU = \operatorname{Re}(m^+).$$

Pour cela, rappelons que

$$(5) \quad m_t^+ = \partial_t^+ v_t + \pi_t^-(m_t^+),$$

(où v_t est définie à une constante près) vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dm_t^+}{dt} = \partial_t^- v_t - \overline{\pi_t^-(m_t^+)},$$

si bien qu'en dérivant (4) on obtient

$$\frac{d}{dt}(dU_t) = \operatorname{Re}(dv_t),$$

et en intégrant

$$(6) \quad \frac{d}{dt}U(t) = \operatorname{Re}(v_t).$$

Comme la décomposition (5) est orthogonale, on a

$$|\partial^+ v_t|_0 \leq |m_t^+|_0.$$

Forni démontre et utilise à présent une inégalité de Poincaré avec estimation de la constante :

$$|v_t|_0 \leq C(q_t)|\partial^+ v_t|_0$$

où la constante $C(q)$ est majorée par l'inverse de la longueur $l(q)$ de la plus courte géodésique entre les singularités de q_t (les éléments de Σ_{q_t}). Mais d'après un résultat de H. Masur [13] on sait que presque sûrement

$$\limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{-\log l(q_t)}{\log |t|} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$|v_t|_0 \leq Ct|m_t^+|_0,$$

et d'après (6) ($U_0 = 0$)

$$|U_t|_0 \leq C \int_{-\infty}^0 s |m_s^+|_0 ds,$$

ce qui montre que $|U_t|_0$ est bornée pour $t \rightarrow -\infty$ puisque par définition q est dans $E^+(q)$.

2) Écrivons

$$dU = SU\eta_T + TU\eta_S$$

et utilisons l'égalité que nous venons de démontrer

$$SU = \operatorname{Re}(m^+).$$

Nous obtenons,

$$dU = (1/2)[(m^+(\eta_T + i\eta_S) + \overline{m^+}((\eta_T - i\eta_S))] + \mathcal{D}\eta_S$$

avec

$$\mathcal{D} = TU - im^+ + i\overline{m^+},$$

c'est-à-dire

$$dU = \operatorname{Re}(m^+ q^{1/2}) + \mathcal{D}\eta_S,$$

ce que l'on voulait démontrer puisque $\mathcal{D}\eta_S$ est un courant basique tempéré d'ordre 1.

B) Passons à la réciproque. Il s'agit de démontrer qu'un courant basique tempéré d'ordre 1 pour le feuilletage $\mathcal{F}_{\pm q}$ a pour image dans $H^1(M, \mathbb{R})$ un élément de $E^\pm(q)$. Forni introduit un cocycle G_t^F (que nous appellerons le cocycle de Forni) sur l'espace \mathcal{Z}'_κ des courants tempérés fermés d'ordre 1 qu'il définit de façon analogue au cocycle de Kontsevich-Zorich : ce cocycle envoie de façon triviale (c'est l'identité) la fibre $\{q\} \times \mathcal{H}_q^{-1}(M)$ (munie de sa q -norme d'espace de Hilbert) au-dessus de $q \in Q_\kappa^{(1)}$ sur la fibre $\{G_t(q)\} \times \mathcal{H}_{G_t(q)}^{-1}(M)$ (munie de sa $G_t(q)$ -norme d'espace de Hilbert) au-dessus de $G_t(q) \in Q_\kappa^{(1)}$. Ce cocycle vérifie

$$j_\kappa \circ G_t^F = G_t^{KZ} \circ j_\kappa,$$

et ses fibrés stable et instable sont en fait les fibrés \mathcal{B}^\mp . Pour démontrer ce point Forni utilise une construction de Burns-Katok ([6]), inspirée d'un article de Wojtkowski ([17]), et construit des fonctions de Lyapunov \mathcal{L}^\pm pour les fibrés \mathcal{B}_q^1 qui vérifient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}^+ \circ G_t^F(C^+) &> 0, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}^- \circ G_t^F(C^+) &< 0. \end{aligned}$$

Leur construction se fait de la façon suivante (par exemple pour \mathcal{L}^+) : Pour un courant basique $C^+ \in \mathcal{B}_q^1(M)$ la distribution $\mathcal{D}^+ = C^+ \wedge \eta_T$ est dans l'espace de Sobolev $H_q^{-1}(M)$. D'après les travaux précédents de Forni ([4]) on peut écrire

$$\mathcal{D}^+ = \partial^+ U^+ + A^+,$$

où U^+ est une fonction de $L^2_q(M)$ orthogonale aux fonctions méromorphes \mathcal{M}_q^+ et $A^+ = \mathcal{D}(1)$ (« l'intégrale » de \mathcal{D}). La fonction de Lyapunov \mathcal{L}^+ que Forni définit est

$$\mathcal{L}^+(C^+) = |U^+|_0^2 + (A^+)^2.$$

7. LE COCYCLE DE KONTSEVICH-ZORICH EST NON UNIFORMÉMENT HYPERBOLIQUE (FIN)

Pour notre propos, ce qu'il faut retenir de la section précédente c'est que pour presque tout q l'espace instable $E^+(q)$ (resp. $E^-(q)$) ne dépend que (de la classe de cohomologie dans $H^1(M, \Sigma_q, \mathbb{R})$) du feuilletage horizontal $\text{Im}(q^{1/2}) = 0$ (resp. vertical $\text{Re}(q^{1/2}) = 0$). Revenons à la formule de la proposition 5.4.

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = \frac{1}{\mu_{\kappa}^{(1)}(\mathcal{C}_{\kappa}^{(1)})} \int_{\mathcal{C}_{\kappa}^{(1)}} \Phi_{\kappa}(q, E_{\kappa}^+(q)) d\mu_{\kappa}^{(1)}(q),$$

où $E_{\kappa}^+(q)$ est l'espace $H^1(M, \mathbb{R})$ de dimension k correspondant aux exposants $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Comme on suppose $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_g = 0$ on a donc d'après la proposition 5.4 que pour $\mu_{\kappa}^{(1)}$ -presque tout q

$$\Phi_{\kappa}(q, E^+(q)) = \Lambda_1(q) + \dots + \Lambda_g(q).$$

Si on choisit $\{c_1, \dots, c_g\} \in H^1(M_q, \mathbb{R})$ une base orthonormale (pour la norme de Hodge) telle que $\{c_1, \dots, c_k\}$ soit une base de $E_{\kappa}^+(q)$ et si on pose $c_i = \text{Re}(m_i^+ q^{1/2})$ on aura alors presque partout

$$(7) \quad \sum_{i,j=k+1}^g |B_q(m_i^+, m_j^+)|^2 = 0.$$

Nous allons démontrer que si $k < g$ cette égalité est violée sur un ensemble de q de mesure positive. La belle idée de Forni est la suivante :

A) comme la dépendance de $E^{\pm}(q)$ par rapport à q est mesurable, on peut trouver un ensemble de $\mu_{\kappa}^{(1)}$ -mesure positive proche de 1 tel que sur cet ensemble $q \mapsto E^{\pm}(q)$ soit continue et générique pour le théorème d'Oseledec;

B) il existe des différentielles quadratiques (que Forni appelle lagrangiennes)
 i) dont toutes les feuilles verticales sont fermées (en dehors de celles qui passent par les singularités); ii) dont les classes d'homologies engendrent un sous-espace lagrangien Λ de $H_1(M, \mathbb{R})$; iii) telles que le dual de Poincaré $\mathcal{L}_0 = P(\Lambda)$ de ce sous-espace lagrangien soit transverse à $E^+(q)$; iv) pour lesquelles on peut choisir g feuilles régulières verticales $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ telles que $M - \cup\{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$ soit une sphère moins $2g$ trous. Choisissons-en une q_0 .

C) on peut trouver proche de q_0 une différentielle quadratique q dans l'ensemble défini en A) et des courbes $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_g$ qui sont des q -trajectoires (des géodésiques pour la métrique plate R_q) presque verticales pour q et qui engendrent le même sous-espace lagrangien de $H_1(M, \mathbb{R})$. Appelons a_1, \dots, a_g ces courbes $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_g$ et b_1, \dots, b_g une base duale symplectique de a_1, \dots, a_g (pour la forme d'intersection). Le dual de Poincaré $\bar{\mathcal{L}}'_0$ de l'espace lagrangien engendré par les b_i peut être choisi transverse à $E^-(q)$.

D) On laisse agir le flot géodésique jusqu'au temps T grand, de façon que les espaces $E^+(q_T)$ de dimension k et l'espace lagrangien $\bar{\mathcal{L}}'_0(T)$ soient proches. On a ainsi au-dessus de q_T deux espaces $E^+(q_T)$ et $\bar{\mathcal{L}}'_0(T)$ qui sont proches (on a utilisé le fait que $\bar{\mathcal{L}}'_0$ et $E^-(q)$ sont transverses).

E) Forni effectue une déformation de (M, q_T) qui l'amène au bord de l'espace des modules (à la limite on obtient une surface pincée) tout en préservant le feuilletage horizontal. Pour cela : i) par un élément du flot horocyclique on peut faire en sorte que les q -trajectoires $a_i = \bar{\gamma}_i(T)$ (qui font de petits angles non nuls avec le feuilletage vertical) deviennent des trajectoires verticales sans que l'on change le feuilletage horizontal; ii) on effectue ensuite un pincement (M, \tilde{q}_T) le long des courbes a_1, \dots, a_g (il faut imaginer que les bouts de cylindre dont les génératrices horizontales qui sont orthogonales aux courbes a_i qui les entourent deviennent très longs, les longueurs des courbes a_i restant constantes); iii) on revient par l'inverse du flot horocyclique : on a effectué une conjugaison. Les courbes a_i et le feuilletage horizontal font toujours le même angle (mesuré par la nouvelle différentielle quadratique \tilde{q}_T). Comme on a préservé le feuilletage horizontal et que $E^+(q)$ ne dépend que de la classe de cohomologie dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ du feuilletage horizontal, $E^+(q_T)$ et $E^+(\tilde{q}_T)$ sont les mêmes. On a donc au-dessus du point \tilde{q}_T , qui est près du bord de l'espace des modules, un espace instable $E^+(\tilde{q}_T) = E^+(q_T)$ et un plan lagrangien $\bar{\mathcal{L}}'_0(\tilde{q}_T)$ (qui est le dual de Poincaré de l'espace engendré par les courbes b_i) qui sont proches.

F) Mais dans cette situation les calculs sont plus faciles à faire et on peut voir que si on a suffisamment pincé

$$|B_q(m_i^+, m_j^+)| \geq (1/2)$$

où les m_i sont associés aux courbes b_i (via la dualité de Poincaré) : si $\{c_1, \dots, c_g\}$ est une base orthonormale pour la forme de Hodge du dual de Poincaré de l'espace engendré par les b_i , on a posé $c_i = \operatorname{Re}(m_i^+ q^{1/2})$.

G) En utilisant la continuité de B_q , Forni trouve ainsi un ensemble de mesure positive où (7) n'est pas satisfaite.

8. LE COCYCLE DE FORNI

Le théorème fondamental qui géométrise les résultats précédents est le suivant :

THÉORÈME 8.1. — *Le fibré $\mathcal{Z}_\kappa^1 \subset \mathcal{H}_\kappa^{-1}$ des courants fermés d'ordre 1 admet la décomposition suivante qui est G_t^F -invariante :*

$$\mathcal{Z}_\kappa^1 = \mathcal{B}_{\kappa,+}^1 \oplus \mathcal{B}_{\kappa,-}^1 \oplus \mathcal{E}_\kappa^1.$$

– *Le fibré \mathcal{E}_κ^1 est défini au-dessus de tout point $q \in \mathcal{M}_\kappa$ et sa fibre \mathcal{E}_q^1 (de dimension infinie) au-dessus du point q est l'ensemble des courants exacts de \mathcal{Z}_q^1*

$$\mathcal{E}_q^1 = \{dU, \quad U \in L_q^2(M)\}.$$

– *Pour $\mu_\kappa^{(1)}$ -presque tout q les fibres $\mathcal{B}_{\pm q}^1$ de $\mathcal{B}_{\kappa,\pm}^1$ sont de dimensions finies et égales.*

– *La restriction du cocycle de Forni G_t^F au fibré*

$$\mathcal{B}_\kappa^1 = \mathcal{B}_{\kappa,+}^1 \oplus \mathcal{B}_{\kappa,-}^1,$$

est mesurablement isomorphe au cocycle de Kontsevich-Zorich (défini sur le fibré $\mathcal{H}_\kappa^1(M, \mathbb{R})$ de fibre $H^1(M_q, \mathbb{R})$) et il a donc le même spectre de Lyapunov. Les fibrés $\mathcal{B}_{\kappa,\pm}^1$ correspondent à E_κ^\pm .

– *L'exposant de Lyapunov du cocycle de Forni sur \mathcal{E}_κ^1 est zéro.*

9. DÉVIATIONS DES MOYENNES ERGODIQUES

9.1. Comment évaluer une moyenne ergodique

Considérons le cas où le champ de vecteurs X que l'on étudie est le champ S introduit précédemment. Pour une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ « régulière » on veut évaluer pour un $p \in M$ générique le comportement quand $t \rightarrow \infty$ de

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(\Phi_S^s(p)) ds$$

où Φ_S est le flot associé à S . L'intégrale précédente se récrit

$$(8) \quad \int_0^t f(\Phi_S^s(p)) ds = \int_{\gamma_+^t(p)} \alpha$$

où $\gamma_+^t(p)$ est le chemin (non fermé) $\Phi_S^s(p)$ pour $0 \leq s \leq t$ et α est la 1-forme (non fermée)

$$\alpha = f\eta_T.$$

Si on identifie $\gamma_+^t(p)$ à un courant on a

$$\int_0^t f(\Phi_S^s(p)) ds = (\gamma_+^t(p) \wedge \alpha)(1)$$

Soit $I_{+q}(p)$ (resp. $I_{-q}(p)$) le segment vertical (resp. horizontal) centré en p et de longueur $l(q)$ où $l(q)$ est la longueur de la plus petite connexion géodésique entre deux singularités de q . Nous dirons que T est un *temps de retour horizontal (resp. vertical)*

de p si $\Phi_q(p, T) \in I_{+q}(p)$ (resp. $\Phi_{-q}(p, T) \in I_{-q}(p)$) et le segment d'orbite $\gamma_q^T(p)$ (resp. $\gamma_{-q}^T(p)$) est appelé une trajectoire de retour horizontale (resp. verticale). Le premier temps de retour horizontal (resp. vertical) est défini comme le plus petit temps de retour horizontal (resp. vertical). Pour tout temps T (qui n'est pas forcément un temps de retour) on peut fermer la trajectoire horizontale (resp. verticale) $\gamma_q^T(p)$ (resp. $\gamma_{-q}^T(p)$) par le plus petit segment géodésique joignant les extrémités de $\gamma_{\pm}^T(q)$ et on note $\widehat{\gamma}_{\pm}^T(p)$ le chemin fermé ainsi obtenu. Si T est un temps de retour, le segment qui fait la jonction est évidemment vertical (resp. horizontal).

Puisque

$$(\mathcal{F}_{q_t}, \mathcal{F}_{-q_t}) = (e^{-t}\mathcal{F}_q, e^t\mathcal{F}_{-q}),$$

toute trajectoire de retour horizontale pour \mathcal{F}_{q_t} est une trajectoire de retour horizontale pour \mathcal{F}_q (au moins pour $t < 0$, $|t|$ suffisamment grand).

9.2. Temps de retour principaux

Considérons une suite de temps négatifs $-t_k$ tels que q_{-t_k} soient très proches de q_0 dans $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$. L'ergodicité du flot de Teichmüller sur $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ pour $\mu_\kappa^{(1)}$ garantit l'existence d'une telle suite. Les propriétés métriques des q_{-t_k} sont donc essentiellement les mêmes que celles de q , en particulier les longueurs $l(q_{-t_k})$ des plus petits segments géodésiques entre les singularités de q_{-t_k} sont pratiquement les mêmes et par conséquent, puisque les longueurs des intervalles verticaux $I_{q_{-t_k}}(p)$ dans la métrique définie par q sont très petits, on a une suite décroissante d'intervalles emboîtés $I_q(p) \supset \cdots \supset I_{q_{-t_k}}(p) \supset I_{q_{-t_{k+1}}}(p)$. Si $T = T_{q_{-t_k}}^{(1)}(p)$ est un temps de premier retour pour q_{-t_k} alors Te^{t_k} est un temps de retour pour q (mais pas de premier retour). On dit que les

$$(9) \quad T_q^{(k)}(p) = Te^{t_k} = T_{q_{-t_k}}^{(1)}(p)e^{t_k}$$

sont des temps de retour principaux pour q (en p). Tels que nous les avons définis les temps de retour ne sont pas vraiment canoniques. Par contre près d'un q « générique » pour Oseledec (et pour d'autres propriétés) on peut choisir sur un petit bout d'hypersurface contenant q et transverse au flot géodésique un ensemble \mathcal{P} de mesure positive (de densité proche de 1) et définir les $-t_k$ comme les temps de retour sur \mathcal{P} de $G_t(q)$ ($t < 0$).

Si on note $\gamma_q^{(k)}(p)$ la trajectoire de retour horizontale correspondant au temps $T_q^{(k)}(p)$ et $\widehat{\gamma}_q^{(p)}$ la trajectoire fermée associée on a

– en homologie

$$\widehat{\gamma}_q^{(k)}(p) = G_{t_k}^{KZ}(\widehat{\gamma}_{G_{-t_k}^{KZ}(q)}^{(1)}(p)),$$

(on a noté G^{KZ} le cocycle de Kontsevich-Zorich agissant en homologie);

– dans \mathcal{Z}^1 les courants tempérés fermés d'ordre 1

$$\widehat{\gamma}_q^{(k)}(p) = G_{t_k}^F(\widehat{\gamma}_{G_{-t_k}^F(q)}^{(1)}(p));$$

– et dans \mathcal{H}^{-1} les courants tempérés d'ordre 1

$$\gamma_q^{(k)}(p) = G_{t_k}^F(\gamma_{G_{-t_k}^F(q)}^{(1)}(p)).$$

Comme nous avons besoin d'estimer des quantités de la forme (8) ce sont plutôt les deux dernières égalités qui sont importantes. Si on note $\Pi_q^{\pm i} : \mathcal{Z}_q^1 \rightarrow E_i^{\pm}$ la projection sur l'espace stable/instable (de dimension finie) correspondant à l'exposant de Lyapunov $\pm\lambda'_i$ on a par exemple une estimée de la forme

$$(10) \quad |\Pi_q^{\pm i}(\widehat{\gamma}_q^{(k)}(p))|_{-1} \leq \text{cste} \cdot \exp(\lambda'_i{}^{\pm} |t_k|)$$

pour tous $\lambda'_i{}^+ > \lambda'_i > 0$, $-\lambda'_i < \lambda'_i{}^- < 0$.

9.3. Découper une orbite en trajectoires de retour principales

Le lemme « arithmétique » suivant est pour cela crucial. C'est l'analogie du lemme fondamental de la preuve du théorème de Denjoy-Koksma (cf. aussi Zorich [19]).

LEMME 9.1. — *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $T > 0$ il existe une suite finie de points $(p_j^{(k)})$ de l'orbite $\gamma_q^T(p)$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq m_k$ tels que les trajectoires de retour principales $\gamma_q^{(k)}(p_j^{(k)})$ ne s'intersectent pas et telles que*

$$(11) \quad \gamma_q^T(p) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \gamma_q^{(k)}(p_j^{(k)}) + b_q^T(p),$$

avec

$$(12) \quad m_k \leq \text{cste} \cdot \exp(|t_{k+1}| - t_k),$$

et la longueur du reste vérifie

$$(13) \quad L(b_q^T(p)) \leq \text{cste}.$$

Il n'est pas complètement évident, mais Forni le démontre, que l'inégalité (13) entraîne (pour q dans un compact \mathcal{P})

$$(14) \quad |b_q^T(p)|_{-1} \leq \text{cste}.$$

Voyons à présent comment on utilise les résultats précédents.

Déjà, puisque l'ensemble \mathcal{P} de la section 9.2 est de mesure positive, disons μ , on a du fait de l'ergodicité du flot de Teichmüller sur \mathcal{M}_κ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|t_k|}{k} = \frac{1}{\mu},$$

ce qui donne $|t_{k+1} - t_k| \leq C_\varepsilon \varepsilon k$ pour tout $\varepsilon > 0$ et par conséquent d'après (10), (11), (12), (14) et le théorème 8.1 on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log |\Pi_q^{+i}(\gamma_q^T(p))|_{-1}}{\log T} &\leq \lambda'_i, \\ \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log |\Pi_q^{-i}(\gamma_q^T(p))|_{-1}}{\log T} &= 0, \\ \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log |\Pi_q^{\mathcal{E}}(\gamma_q^T(p))|_{-1}}{\log T} &= 0. \end{aligned}$$

On a utilisé en outre la définition (9) des temps de retour principaux et un résultat que démontre Forni qui dit qu'on peut choisir la section \mathcal{P} (définie section 9.2) de façon que les temps de *premier* retour soient bornés.

Enfin notons que la première inégalité est une égalité pour presque tout p (mais il faut travailler un peu plus).

9.4. Moyennes ergodiques pour le champ de vecteurs S

Comme précédemment notons $E_i^+(q)$ le sous-espace de $\mathcal{B}_q^1(M)$ (l'ensemble des courants basiques tempérés d'ordre 1) associé à l'exposant $\lambda'_i > 0$ de multiplicité m_i (rappelons que c'est l'image de la projection Π_q^{+i}) et soit $C_{i,j}^+$, $1 \leq j \leq m_i$ une base de courants basiques tempérés d'ordre 1 de $E^i(q)$. Les distributions tempérées d'ordre 1

$$\mathcal{D}_{i,j}^S = C_{i,j}^+ \wedge \eta_T,$$

sont S -invariantes. De plus, pour toute fonction dans $H^1(M)$

$$\begin{aligned} C_{i,j}^+ \wedge (f\eta_T) &= fC_{i,j}^+ \wedge \eta_T \\ &= \mathcal{D}_{i,j}^S(f). \end{aligned}$$

Par conséquent si on note $\mathcal{I}_S^1(\lambda'_i)$ l'espace des distributions S -invariantes engendrées par les $\mathcal{D}_{i,j}$, $1 \leq j \leq m_i$, on a bien, en utilisant le résultat de la fin de la section précédente, que si f dans $H^1(M)$ est annihilée par les distributions $\mathcal{D} \in \mathcal{I}_S^1(\lambda'_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_S^1(\lambda'_i)$ alors

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_0^T f(\Phi_S(p, \tau)) d\tau \right|}{\log T} \leq \lambda'_{i+1}.$$

La démonstration de l'existence de distributions tempérées d'ordre 1, $\mathcal{D}_{i+1} \in \mathcal{I}_S^1(\lambda'_{i+1})$, dont la non annulation par f assure l'égalité dans l'équation précédente est un peu plus délicate.

9.5. Le cas général

Supposons à présent que X soit un champ de vecteurs dont le flot est quasi-minimal avec des singularités de type selle d'indice ι_k aux points p_k , $k = 1, \dots, \sigma$, et préserve une forme volume ω (non singulière). On sait alors que l'on peut réaliser le feuilletage \mathcal{F}_X en orbites de X par le feuilletage horizontal d'une différentielle quadratique q (qui est le carré d'une forme holomorphe) avec $\kappa = -2\iota$. Il existe alors une fonction W avec des zéros d'ordre fini aux points de Σ telle que $\omega = W^{-1}\omega_q$ et $X = WS$. On considère l'espace de Sobolev

$$H_W^1(M) = \{f, W^{-1}f \in H^1(M)\},$$

et on pose pour $f \in H_W^1(M)$

$$\mathcal{D}^X(f) = \mathcal{D}^S(W^{-1}f);$$

la distribution $\mathcal{D}^X \in H_W^{-1}(M)$ est X -invariante. Notons $\gamma_X^T(p)$ l'orbite de p du temps 0 au temps T sous l'action de X . Il existe un temps $\tilde{T}(T)$ tel que

$$\gamma_S^{\tilde{T}(T)}(p) = \gamma_X^T(p).$$

Pour toute fonction $f \in H_W^1(M)$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^T f(\Phi_X(p, \tau)) d\tau &= \int_{\gamma_X^T(p)} W^{-1}f \eta_T, \\ &= \int_{\gamma_S^{\tilde{T}(T)}(p)} W^{-1}f \eta_T. \end{aligned}$$

Mais la moyenne $(1/T) \int_0^T W(\Phi_X(p, \tau)) d\tau$ qui est égale à $(1/T)L_q(\gamma_X^T(p))$ (où $L_q(\cdot)$ est la q -longueur), c'est-à-dire $(\tilde{T}(T)/T)$, converge d'après le théorème ergodique vers $\int_M W\omega = \int_M \omega_q = 1$. On obtient donc la conclusion du théorème.

RÉFÉRENCES

- [1] P. ARNOUX – « Ergodicité générique des billards polygonaux [d'après Kerchhoff, Masur, Smillie] », in *Sém. Bourbaki (1987/88)*, Astérisque, vol. 161-162, Société Mathématique de France, 1988, p. 202–221.
- [2] G. DE RHAM – *Variété différentiables, formes, courants, formes harmoniques*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1222b, Hermann, Paris, 1973.
- [3] A. FATHI, F. LAUDENBACH & V. POÉNARU – *Travaux de Thurston sur les surfaces*, *Séminaire Orsay*, Astérisque, vol. 66-67, Société Mathématique de France, 1979.
- [4] G. FORNI – « Solution of the cohomological equation for area-preserving flows on compact surfaces of higher genus », *Ann. of Math.* **146** (1997), p. 295–344.
- [5] _____, « Deviation of ergodic averages for area preserving flows on surfaces of higher genus », *Ann. of Math.* **155** (2002), p. 1–103.

- [6] A. KATOK – « Infinitesimal Lyapunov functions, invariant cones families and stochastic properties of smooth dynamical systems », *Ergodic Theory Dynamical Systems* **14** (1994), p. 757–785, with the collaboration of K. Burns.
- [7] A. KATOK & B. HASSELBLAT – *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [8] S. KERCHOFF, H. MASUR & J. SMILLIE – « Erodicity of Billard flows and Quadratic Differentials », *Ann. of Math.* **124** (1986), p. 293–311.
- [9] M. KONTSEVICH – « Lyapunov exponents and Hodge Theory », in *The Mathematical Beauty of Physics (Saclay, 1996)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 24, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, p. 318–332.
- [10] M. KONTSEVICH & A. ZORICH – « Lyapunov exponents and Hodge Theory », arXiv : hep-th/9701164v1, 1997.
- [11] S. MARMI, P. MOUSSA & J.-C. YOCCOZ – « The cohomological equation for Roth type interval exchange map », preprint arXiv : math.DS/0403518v1, 30 mars 2004.
- [12] H. MASUR – « Interval exchange transformations and measured foliations », *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 169–200.
- [13] ———, « Logarithmic law for geodesics in moduli space », in *Mapping Class Groups and Moduli Spaces of Riemann Surfaces (Göttingen, 1991/ Seattle, WA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 150, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, p. 229–245.
- [14] L. SCHWARTZ – *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [15] W.A. VEECH – « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 201–242.
- [16] ———, « The Teichmüller geodesic flow », *Ann. of Math.* **124** (1986), p. 441–530.
- [17] M. WOJTKOWSKI – « Invariant family of cones and Lyapunov exponents », *Ergodic Theory Dynamical Systems* **5** (1985), p. 145–161.
- [18] A. ZORICH – « Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **46** (1996), p. 325–370.
- [19] ———, « Deviation for interval exchange transformation », *Ergodic Theory Dynamical Systems* **17** (1997), p. 1477–1499.

Raphaël KRIKORIAN

Laboratoire de Probabilités
et Modèles Aléatoires
Université Pierre et Marie Curie
Boîte courrier 188
F-75252 Paris Cedex 05
E-mail : krikoria@ccr.jussieu.fr

INÉGALITÉ DE BRUNN-MINKOWSKI-LUSTERNIK, ET AUTRES INÉGALITÉS GÉOMÉTRIQUES ET FONCTIONNELLES

par **Bernard MAUREY**

INTRODUCTION

La théorie des corps convexes a commencé à la fin du XIX^e siècle avec l'inégalité de Brunn, généralisée ensuite en inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik qui s'applique à des ensembles non nécessairement convexes. Ce thème a depuis longtemps des contacts avec les problèmes isopérimétriques et avec des inégalités d'Analyse, telles que celles qui traduisent les plongements de Sobolev. Nous allons développer quelques aspects plus récents des inégalités géométriques, dont certains sont liés à la technique du transport de mesure, notamment le transport dit « de Brenier ». On ne trouvera pas ici l'approche d'un résultat faramineux, mais des pistes vers un ensemble convergent de techniques qui ont prouvé leur applicabilité.

L'essentiel de notre travail sera fait dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n ; on notera le produit scalaire par $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et la norme par $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$. On notera $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ ou bien $\int_{\mathbb{R}^n} f$ l'intégrale d'une fonction f pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . On notera $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de \mathbb{R}^n , et $A + B$ la somme de Minkowski de deux sous-ensembles A, B de \mathbb{R}^n , égale à $\{a + b : a \in A, b \in B\}$.

1. BRUNN-MINKOWSKI ET INÉGALITÉS GÉOMÉTRIQUES

L'inégalité de Brunn-Minkowski *sans dimension* se formule ainsi : si A, B sont deux compacts non vides de \mathbb{R}^n , et si on note $|A|, |B|$ leurs volumes (pour la mesure de Lebesgue), on a

$$\left| \frac{A + B}{2} \right| \geq |A|^{1/2} |B|^{1/2}.$$

En réalité, l'inégalité $|(1-t)A + tB| \geq |A|^{1-t} |B|^t$ est valable pour tout $t \in [0, 1]$, et elle se transforme facilement par des arguments d'homogénéité en la forme classique

pour l'inégalité de Brunn-Minkowski dans \mathbb{R}^n ,

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}.$$

Si A est convexe et si B est un translaté d'un homothétique de A , l'inégalité devient une égalité. Appliquée en prenant pour B une boule euclidienne de rayon tendant vers 0, cette inégalité conduit à une démonstration de l'inégalité isopérimétrique dans \mathbb{R}^n . Démontrée d'abord par Brunn (1887) en dimension 2 ou 3 pour deux convexes, reprise par Minkowski au tout début du xx^e siècle, l'inégalité a été étendue par Lusternik à des compacts quelconques de \mathbb{R}^n ; curieusement, le nom de Lusternik est rarement associé de nos jours à cette extension considérable (voir [Lus], [HeM]). Hadwiger et Ohmann [HaO] en donnent une démonstration assez simple, en approchant A et B par des réunions finies de rectangles, et en réalisant une association bien choisie entre parties de A et B de même mesure; la preuve finit par l'inégalité entre moyennes arithmétiques et géométriques. Ces deux ingrédients se retrouvent dans la plupart des autres preuves.

L'article récent de Richard Gardner [Gar] couvre presque tous les thèmes traités dans cet exposé, et bien d'autres qui ne seront pas abordés ici.

1.1. Prékopa-Leindler

On attribue généralement à Prékopa le résultat suivant : si $\varphi(x, t)$ est convexe sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la fonction Φ définie sur \mathbb{R} par

$$e^{-\Phi(t)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x,t)} dx$$

est convexe (on admettra les valeurs infinies). L'inégalité de Prékopa-Leindler a un rapport plus direct avec Brunn-Minkowski-Lusternik : on se donne $0 < \theta < 1$ et trois fonctions réelles s.c.i. f_0, f_θ, f_1 sur \mathbb{R}^n qui vérifient pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité

$$(H_{PL}) \quad f_\theta((1-\theta)x_0 + \theta x_1) \leq (1-\theta)f_0(x_0) + \theta f_1(x_1)$$

et on obtient l'énoncé qui suit.

THÉORÈME 1.1 (Prékopa, Leindler). — *Si les fonctions f_0, f_θ, f_1 satisfont (H_{PL}) , on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f_\theta(x)} dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f_0(x)} dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f_1(x)} dx \right)^\theta.$$

En attribuant ce résultat aux seuls Prékopa [Pre] et Leindler [Lei], nous faisons un choix de simplicité qui n'est sans doute pas historiquement tout à fait correct; en effet, la paternité de ce type de résultat a été revendiquée par deux groupes différents (voir Das Gupta [DaG] pour une autre vision de l'histoire). Le théorème 1.1 redonne immédiatement Brunn-Minkowski-Lusternik en prenant les fonctions f_0, f_θ, f_1 égales à 0 sur les ensembles $A_0, A_\theta = (1-\theta)A_0 + \theta A_1, A_1$, et égales à $+\infty$ en dehors, de sorte que pour $j = 0, \theta, 1$ on ait l'égalité $\mathbf{1}_{A_j} = e^{-f_j}$.

Pour éviter ces valeurs infinies, il est souvent plus agréable d'écrire l'hypothèse sous la forme suivante : trois fonctions réelles positives s.c.s. g_0, g_θ, g_1 sur \mathbb{R}^n vérifient pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité

$$(H_{PL2}) \quad g_\theta((1-\theta)x_0 + \theta x_1) \geq g_0(x_0)^{1-\theta} g_1(x_1)^\theta$$

et on déduit que $\int g_\theta \geq (\int g_0)^{1-\theta} (\int g_1)^\theta$. Cette inégalité est adaptée à l'étude des mesures log-concaves. Une mesure μ sur \mathbb{R}^n à densité log-concave s'écrit $d\mu(x) = e^{-\varphi(x)} dx$, avec φ convexe sur \mathbb{R}^n ; on voit facilement que le triplet $g_j = \mathbf{1}_{A_j} e^{-\varphi}$, $j = 0, \theta, 1$ avec $A_\theta = (1-\theta)A_0 + \theta A_1$ vérifie l'hypothèse (H_{PL2}) , ce qui conduit à l'inégalité

$$(1) \quad \mu((1-\theta)A_0 + \theta A_1) \geq \mu(A_0)^{1-\theta} \mu(A_1)^\theta.$$

Appliquée à une mesure log-concave symétrique (c'est-à-dire invariante par $x \rightarrow -x$), cette inégalité donne le résultat de T.W. Anderson (en fait, le résultat d'Anderson [And] est un peu plus général que le théorème 1.2, et il a été montré directement à partir de Brunn-Minkowski) : si $\theta = 1/2$, si $A_0 = C + v$ et $A_1 = C - v$, où C est un convexe symétrique et v un vecteur quelconque, on trouve que $(A_0 + A_1)/2 = C$, pendant que $\mu(A_0) = \mu(A_1)$ par la symétrie de μ ; ainsi, on obtient

$$\mu(C) = \mu((A_0 + A_1)/2) \geq \mu(A_0)^{1/2} \mu(A_1)^{1/2} = \mu(C + v),$$

ce qui signifie ceci : parmi les translatés d'un convexe symétrique, le convexe centré en 0 a la plus grande mesure.

THÉORÈME 1.2 (Anderson). — Si μ est une mesure log-concave symétrique sur \mathbb{R}^n , si C est un convexe symétrique et v un vecteur quelconque, on a

$$\mu(C + v) \leq \mu(C).$$

Un cas particulier important est celui de la mesure gaussienne. Désignons par γ_n la mesure gaussienne standard sur \mathbb{R}^n , dont la densité est $(2\pi)^{-n/2} \exp(-|x|^2/2)$. Elle est bien sûr log-concave, symétrique. Le principe précédent s'applique donc à γ_n , et il joue un rôle important dans certaines questions de statistique.

1.2. Isopérimétrie gaussienne

Le problème isopérimétrique gaussien a été résolu par Christer Borell [Bo1], Vladimir Sudakov et Boris Tsirelson [SuT]. Plus tard, Antoine Ehrhard [Ehr] a donné une autre démonstration et apporté d'autres informations, que nous discuterons plus loin. Si A est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n , on désigne par A_ε son épaississement de taille $\varepsilon > 0$ pour la distance euclidienne,

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

THÉORÈME 1.3. — Parmi les ensembles fermés A de mesure gaussienne $\gamma_n(A) = a$ fixée, les demi-espaces affines minimisent l'accroissement de mesure $\gamma_n(A_\varepsilon) - \gamma_n(A)$, ou ce qui revient au même, minimisent la mesure $\gamma_n(A_\varepsilon)$.

Par exemple, lorsque $\gamma_n(A) = a = 1/2$, un demi-espace affine B de même mesure que A est donné par $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$, et on peut énoncer en passant aux complémentaires

$$\gamma_n(A_\varepsilon^c) \leq \gamma_n(B_\varepsilon^c) = \gamma_n(\{x_1 > \varepsilon\}) = \int_\varepsilon^{+\infty} d\gamma_1(t).$$

Si f est une fonction 1-lipschitzienne sur \mathbb{R}^n (vérifiant $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pour tous x, y) possédant une valeur médiane m , c'est-à-dire une valeur telle que $\gamma_n(f \leq m) = 1/2$, on voit que f reste inférieure ou égale à $m + \varepsilon$ sur l'épaisseur A_ε de $A = \{f \leq m\}$, donc

$$\gamma_n(\{f > m + \varepsilon\}) \leq \gamma_n(A_\varepsilon^c) \leq \int_\varepsilon^{+\infty} d\gamma_1(t);$$

on a la même majoration pour $\gamma_n(\{f < m - \varepsilon\})$, ce qui donne une bonne borne pour la probabilité $\gamma_n(\{|f - m| > \varepsilon\})$ que f dévie de plus de ε de sa valeur médiane m ,

$$\gamma_n(\{|f - m| > \varepsilon\}) \leq \gamma_1(\{t \in \mathbb{R} : |t| > \varepsilon\}) \leq e^{-\varepsilon^2/2}.$$

Cette propriété de concentration a eu de nombreuses applications en *théorie asymptotique*, la théorie des espaces normés de dimension finie tendant vers l'infini, voir par exemple le fameux théorème de Dvoretzky dans le livre de Gilles Pisier [Pis]. Cependant, il est suffisant pour ce type d'applications d'avoir un résultat moins précis, de la forme

$$\gamma_n(\{|f - m_1| > \varepsilon\}) \leq 2 e^{-\varepsilon^2/4}$$

par exemple, où m_1 peut désigner la moyenne de f au lieu de sa médiane, et ce type d'inégalité peut être obtenu de bien des manières (intégrale stochastique, méthodes d'espace gaussien, voir [Led]), mais aussi à partir de Prékopa-Leindler comme ci-dessous.

PROPOSITION 1.4. — Pour toute fonction f réelle 1-lipschitzienne sur \mathbb{R}^n et pour tout nombre réel t , on a

$$\int e^{tf(x) - tf(y)} d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) \leq e^{t^2}.$$

Sous cette forme le résultat est optimal, puisque l'inégalité ci-dessus est une égalité pour les fonctions linéaires. À partir de cette estimation de transformée de Laplace, on obtient les inégalités de concentration par Markov, comme il est habituel.

Démonstration. — Posons

$$g_t(x) = \min\{tf(x+h) + |h|^2/4 : h \in \mathbb{R}^n\}.$$

Le triplet de fonctions $\varphi_0(x) = -g_t(x) + |x|^2/2$, $\varphi_{1/2}(z) = |z|^2/2$, $\varphi_1(y) = tf(y) + |y|^2/2$ vérifie l'hypothèse de Prékopa-Leindler (H_{PL}), car pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(y) \geq -tf(y) - |x - y|^2/4 + |x|^2/2 + tf(y) + |y|^2/2 = 2\varphi_{1/2}\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

On en déduit que

$$\left(\int e^{g_t(x)} d\gamma_n(x)\right) \left(\int e^{-tf(y)} d\gamma_n(y)\right) \leq \left(\int d\gamma_n(z)\right)^2 = 1.$$

Comme $tf(x+h) \geq tf(x) - |th|$ par la condition de Lipschitz, et que $tf(x) - |th| + |h|^2/4 \geq tf(x) - t^2$ pour tout h , on a $tf(x) \leq g_t(x) + t^2$, donc

$$\int e^{tf(x)-tf(y)} d\gamma_n(x)d\gamma_n(y) = \left(\int e^{tf(x)} d\gamma_n(x)\right) \left(\int e^{-tf(y)} d\gamma_n(y)\right) \leq e^{t^2}. \quad \square$$

Avec une preuve apparentée à la précédente mais nettement plus subtile, Sergueï Bobkov et Michel Ledoux ont obtenu une démonstration d'une inégalité Log-Sobolev pour γ_n ([BoL]).

1.3. Une inégalité de Brascamp-Lieb

Une inégalité de Brascamp et Lieb [BrL] a trouvé des applications nombreuses en convexité; on va l'énoncer sous une forme particulière due à Keith Ball [Ba2]. On se place dans \mathbb{R}^n ou dans un espace euclidien E de dimension n . Désignons par $v \otimes v$ l'opérateur de rang un $x \rightarrow (x \cdot v)v$, et supposons que

$$(J) \quad \text{Id}_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^N c_j v_j \otimes v_j,$$

avec des vecteurs v_j de norme un et des scalaires $c_j > 0$, qui satisfont $\sum_{j=1}^N c_j = n$ par un calcul de trace immédiat. Il en résulte que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^N c_j (x \cdot v_j) (y \cdot v_j), \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^N c_j (x \cdot v_j)^2.$$

Cette décomposition de l'identité est fortement liée à une notion géométrique importante, l'ellipsoïde de John, et à ses propriétés remarquables; l'ellipsoïde de John pour un corps convexe symétrique C est l'ellipsoïde maximal contenu dans C ; Fritz John a montré que lorsque cet ellipsoïde est égal à la boule euclidienne unité B , l'identité de \mathbb{R}^n admet la décomposition (J) avec des v_j choisis parmi les points de contact de B et du bord de C .

THÉORÈME 1.5 (Brascamp-Lieb, version Ball). — Si les vecteurs (v_j) et les nombres (c_j) vérifient la relation (J), on a pour toutes les fonctions positives (f_j) intégrables sur \mathbb{R}

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^N f_j(x \cdot v_j)^{c_j}\right) dx \leq \prod_{j=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt\right)^{c_j}.$$

Le cas trivial est celui d'une base orthonormée v_1, \dots, v_n , avec des (c_j) égaux à 1 : on trouve simplement Fubini dans ce cas, et on a bien sûr égalité. La méthode utilisée par Brascamp et Lieb est assez compliquée, et consiste à montrer que, si on fixe $\int f_j = 1$, le maximum du terme de gauche est atteint pour des fonctions gaussiennes. On peut remarquer que, si $f_j(t) = e^{-t^2}$, la relation

$$\prod_{j=1}^N f_j(x \cdot v_j)^{c_j} = \exp\left(-\sum_{j=1}^N c_j(x \cdot v_j)^2\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

montre qu'on a égalité dans Brascamp-Lieb. Le théorème 1.5 a été généralisé par Lieb [Lie] au cas où l'identité de \mathbb{R}^n est représentée sous la forme $\sum_{j=1}^N c_j P_j$, où les P_j sont des projecteurs orthogonaux sur \mathbb{R}^n .

Franck Barthe a trouvé une preuve simple du théorème 1.5, et sa preuve lui a permis de montrer en même temps une inégalité inverse, qui avait été conjecturée par Ball. Cette inégalité inverse a elle aussi des applications géométriques intéressantes.

THÉORÈME 1.6 (Barthe, [Bar]). — *Si les vecteurs (v_j) et les nombres (c_j) vérifient la relation (J), on a pour toutes les fonctions positives (f_j) intégrables sur \mathbb{R} et pour toute fonction mesurable F sur \mathbb{R}^n telle que*

$$F(x) \geq \prod_{j=1}^N f_j(a_j)^{c_j} \text{ chaque fois que } x = \sum_{j=1}^N a_j c_j v_j$$

l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx \geq \prod_{j=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{c_j}.$$

Si on applique le théorème précédent avec $n = 1$, $N = 2$, $v_1 = v_2 = 1$ et $c_1 = 1 - \theta$, $c_2 = \theta$, on retrouve Prékopa-Leindler sur \mathbb{R} (qui entraîne assez facilement le cas général par Fubini et itération).

En appliquant l'inégalité de Brascamp-Lieb, Ball a montré le résultat qui suit sur les sections des cubes N -dimensionnels. Le résultat n'est optimal que lorsque la dimension k de la section divise N , mais il donne toujours une information non triviale. Lorsque $k = N - 1$, on trouve une majoration des volumes des sections hyperplanes par $e^{1/2}$, alors que le résultat optimal (dû également à Ball, [Ba1]) est $\sqrt{2}$. Mentionnons la méthode d'unimodalité de Kanter, qui donne d'autres informations dans des problèmes de volumes de sections ([Kan], voir [MeP]). Le lecteur consultera avec profit le bel article de Ball [Ba4] dans le *Handbook of the Geometry of Banach spaces*.

THÉORÈME 1.7 (K. Ball, [Ba2]). — *Toutes les sections k -dimensionnelles d'un cube N -dimensionnel de volume 1 ont un volume (k -dimensionnel) majoré par*

$$\left(\frac{N}{k}\right)^{k/2}.$$

Démonstration. — La démonstration va mettre en lumière la parfaite adéquation de la version de Ball de l'inégalité de Brascamp-Lieb. Prenons pour cube C de volume 1 l'ensemble $[-1/2, 1/2]^N$ dans \mathbb{R}^N ; soit $(e_j)_{j=1}^N$ la base canonique de \mathbb{R}^N , soit E un sous-espace de dimension k ; en projetant sur E l'identité évidente $\text{Id}_{\mathbb{R}^N} = \sum_{j=1}^N e_j \otimes e_j$, on obtient $\text{Id}_E = \sum_{j=1}^N c_j v_j \otimes v_j$, où $c_j^{1/2} v_j$ est la projection orthogonale de e_j sur E et $|v_j| = 1$. Les points x de $E \cap C$ sont caractérisés par les inégalités $|x \cdot (c_j^{1/2} v_j)| \leq 1/2$, $j = 1, \dots, N$, donc l'indicatrice de $E \cap C$ est le produit des fonctions $f_j(x \cdot v_j)$, où $f_j(t) = \mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}(c_j^{1/2} t)$. D'après le théorème 1.5,

$$|E \cap C|_k = \int_E \prod_{j=1}^N f_j(x \cdot v_j)^{c_j} dx \leq \prod_{j=1}^N \left(\int_{-1/2}^{1/2} f_j(t) dt \right)^{c_j} = \prod_{j=1}^N c_j^{-c_j/2}.$$

Sachant que $\sum_{j=1}^N c_j = k$, l'expression est maximale quand les c_j sont égaux, ce qui donne le résultat. \square

2. TRANSPORT OPTIMAL

On trouve Gaspard Monge à l'origine lointaine de la théorie du transport optimal; dans [Mon], il pose le problème du transport optimal d'une masse de terre vers un emplacement de même volume; pour Monge, le coût du transport est mesuré dans L_1 , c'est-à-dire que l'élément de coût dc du transport d'un élément de masse dm placé au point x et transporté au point Tx est $dc = |x - Tx| dm$. La théorie devient beaucoup plus agréable lorsqu'on cherche à minimiser le coût quadratique $|x - Tx|^2 dm$: étant données deux mesures finies μ et ν de même masse sur \mathbb{R}^n , on cherche à réaliser

$$\min \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |x - Tx|^2 d\mu(x) \right\},$$

l'inf étant pris sur toutes les transformations T telles que $T(\mu) = \nu$ (l'image de μ par T est ν). Au milieu du XX^e siècle, Kantorovitch exprime la question du transport optimal comme un problème de programmation convexe; on parle alors du problème de Monge-Kantorovitch. Cette théorie a une histoire riche qui ne sera pas évoquée ici.

À la fin des années 90, Yann Brenier [Bre] montre que, sous certaines hypothèses, le transport optimal T d'une mesure finie à densité $f(x) dx$ sur \mathbb{R}^n vers une autre mesure à densité $g(y) dy$ de même masse est donné par le gradient d'une fonction convexe u , fonction unique à une constante près. Robert McCann a assoupli les conditions d'existence.

THÉORÈME 2.1 (McCann [MC1]). — Si μ et ν sont deux probabilités sur \mathbb{R}^n , et si μ ne charge aucun ensemble borélien de dimension de Hausdorff $n - 1$, il existe une fonction u convexe sur \mathbb{R}^n telle que l'image de μ par l'application μ -presque partout définie ∇u soit égale à ν . Si u_1 et u_2 sont deux solutions, la différence $\nabla u_1 - \nabla u_2$ est nulle μ -presque partout.

Quelques commentaires s'imposent; la fonction convexe u est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; elle est continue dans l'intérieur de l'ensemble convexe $\text{dom}(u) = \{x : u(x) < +\infty\}$, et on sait qu'elle y est différentiable, sauf sur un sous-ensemble de dimension de Hausdorff $\leq n - 1$; pour pouvoir définir la mesure image ν en posant $\nu(B) = \mu((\nabla u)^{-1}(B))$ pour tout borélien B , il suffit que ∇u soit défini μ -presque partout. Le résultat de McCann est très général, mais il oblige à travailler avec des notions de calcul différentiel généralisé, telles que le Hessien au sens d'Alexandrov. Une autre approche, initiée par Luis Caffarelli immédiatement après l'article de Brenier, est d'utiliser des théorèmes de régularité de solutions d'une équation de Monge-Ampère pour pouvoir affirmer que le transport de Brenier est régulier sous certaines conditions (on est content quand u est C^2 , ce qui donne un transport C^1).

En dimension un, il n'y a qu'une façon raisonnable de définir ce transport optimal : pour transporter la probabilité $f(x) dx$ sur la probabilité $g(y) dy$, on introduit la fonction croissante $T(t)$ définie par

$$(T_1) \quad \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^{T(t)} g(y) dy.$$

La fonction convexe u n'apparaît pas naturellement, mais il suffit de prendre une primitive quelconque de la fonction croissante T pour obtenir u , et l'étude de la régularité de u est évidente. Passons au cas multi-dimensionnel; notons $\nabla_x u$ le gradient de u au point x , et de même pour le hessien $H_x u$. Supposons que la mesure $f(x) dx$ soit envoyée sur $g(y) dy$ par le changement de variable régulier $y = \nabla_x u$. Alors

$$g(\nabla_x u) \det(H_x u) = f(x),$$

donc u satisfait l'équation de Monge-Ampère

$$\det H_x u = \frac{f(x)}{g(\nabla_x u)}.$$

Si on a une propriété minimale de régularité pour ∇u , un argument de bootstrap et les résultats de régularité connus pour l'équation de Monge-Ampère entraînent que u est régulière quand f et g le sont, sous une certaine condition géométrique sur les supports (Caffarelli, [Ca1]).

Faisons un commentaire élémentaire sur cette condition géométrique. Il est évident que la régularité de l'application u est rompue si on doit transporter, par exemple, la mesure de $[-1, 1]$ sur la mesure de l'ensemble non connexe $[-2, -1] \cup [1, 2]$; mais c'est la convexité de l'image qui est le véritable enjeu. Si on transporte une mesure dont le

support est \mathbb{R}^n sur une autre mesure par le gradient d'une fonction convexe régulière u , l'application gradient donnera de \mathbb{R}^n une image dont l'intérieur est convexe. Ainsi, il n'est pas possible de transporter de façon *régulière* la mesure de Gauss γ_n sur la mesure de Lebesgue d'un ouvert non convexe, par un transport de la forme ∇u , avec u convexe. Les bons résultats de régularité sont obtenus lorsque la mesure image est portée par un ensemble convexe C , et qu'elle possède une densité g , régulière et bornée inférieurement sur C .

McCann [MC2] a généralisé le transport de Brenier au cas des variétés riemanniennes. Il s'agit encore d'un transport optimal pour le coût quadratique. Pour appréhender cette généralisation, il faut reformuler le transport de Brenier par un gradient ∇u en termes de *déplacement* : à chaque point x , on associe le vecteur $V_x = \nabla_x u - x$; on obtient le point Tx en se déplaçant à partir de x sur la géodésique tangente à V_x , dans le sens donné par V_x , et d'une longueur égale à $|V_x|$; on peut voir ce vecteur V_x comme le gradient d'une nouvelle fonction $v(x) = u(x) - |x|^2/2$. C'est sous cette forme que le résultat est généralisé : *il existe une fonction v sur la variété telle que $Tx = \exp_x(\nabla_x v)$ pour μ -presque tout x* , mais nous n'entrerons pas dans les détails.

L'inégalité de Prékopa-Leindler a été généralisée dans [CMS] au cas des variétés riemanniennes, mais à ma connaissance, elle attend encore à ce jour des applications qui soient au niveau des applications de l'inégalité classique.

2.1. Quelques applications du transport

On va donner quelques exemples simples, où on mettra en avant la grande simplicité de l'idée, en laissant malhonnêtement de côté les précautions techniques nécessaires. On va aussi laisser de côté un grand nombre d'autres aspects, qu'on pourra trouver dans la monographie de Cédric Villani [Vil].

2.1.1. Preuve de l'inégalité de Prékopa-Leindler par transport (McCann). — Supposons que le triplet (g_0, g_θ, g_1) satisfasse les hypothèses de Prékopa-Leindler (H_{PL2}), que $\int g_0 = \int g_1$ et que le gradient ∇u d'une fonction convexe transporte la mesure $g_0(x) dx$ sur la mesure $g_1(y) dy$. Alors, en effectuant le changement de variable $z = (1 - \theta)x + \theta \nabla_x u$, en utilisant l'équation de transport $g_1(\nabla_x u) \det H_x u = g_0(x)$, le fait que le Hessien de u est positif et la concavité de la fonction $A \rightarrow \ln \det A$ sur le convexe des matrices réelles symétriques définies positives, on obtiendra la chaîne d'inégalités

$$\begin{aligned} \int g_\theta(z) dz &\geq \int g_\theta((1 - \theta)x + \theta \nabla_x u) \det((1 - \theta)I_n + \theta H_x u) dx \\ &\geq \int g_0(x)^{1-\theta} g_1(\nabla_x u)^\theta (\det H_x u)^\theta dx \\ &= \int g_0(x) dx = \left(\int g_0(x) dx \right)^{1-\theta} \left(\int g_1(y) dy \right)^\theta. \end{aligned}$$

Avec Knothe [Kno] on avait déjà en 1957 une preuve de Brunn-Minkowski par une sorte de transport, qui est certainement moins élégante que celle obtenue par le transport de Brenier, mais où les problèmes de régularité ne se posent pas. L'application de Knothe peut se décrire ainsi en dimension deux : on se donne deux probabilités $d\mu(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ et $d\nu(y_1, y_2) = g(y_1, y_2) dy_1 dy_2$; on transporte $f_1(x_1) dx_1$, où $f_1(x_1) = \int f(x_1, x_2) dx_2$ sur $g_1(y_1) dy_1$, définie de façon analogue, par un transport 1-dimensionnel T_1 ; on transporte ensuite la section en x_1 de μ , renormalisée en probabilité par produit avec $f_1(x_1)^{-1}$, sur la section en $T_1(x_1)$ de ν , renormalisée, par un transport 1-dimensionnel T_2 dépendant de x_1 ; la matrice jacobienne de l'application de Knothe est triangulaire.

2.1.2. Preuve de l'inégalité de Sobolev par transport (Gromov). — Supposons que f soit une fonction ≥ 0 régulière à support compact sur \mathbb{R}^n , et que $\int f^{n/(n-1)} = |B_n|$, le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n . La mesure $f(x)^{n/(n-1)} dx$ est envoyée sur la mesure de Lebesgue de la boule unité de \mathbb{R}^n par une application de la forme ∇u , avec u convexe. Il en résulte que $|\nabla u| \leq 1$ sur le support de f . En utilisant l'équation de transport et l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$\begin{aligned} |B_n| &= \int f^{n/(n-1)} = \int f f^{1/(n-1)} = \int f (\det Hu)^{1/n} \\ &\leq \frac{1}{n} \int f \Delta u = -\frac{1}{n} \int \nabla f \cdot \nabla u \leq \frac{1}{n} \int |\nabla f|. \end{aligned}$$

Si on rétablit l'homogénéité, on retrouve l'inégalité de Sobolev optimale

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{n/(n-1)} \right)^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{n|B_n|^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|.$$

On peut aussi obtenir par transport les inégalités de Sobolev L_p avec constantes optimales (voir [CNV]).

2.1.3. Preuve de l'inégalité de Brascamp-Lieb par transport. — La preuve de Barthe pour le théorème 1.5 utilise le transport dans son cas élémentaire, celui de la dimension un, mais Barthe montre aussi dans [Bar] l'inégalité plus générale de Lieb, qui demande d'utiliser le transport en plusieurs dimensions. On considère $g(t) = e^{-t^2}$, on suppose que $\int f_j = \int g$ pour chaque $j = 1, \dots, N$ et on suppose aussi $f_j > 0$. On définit $T_j(t)$ par l'équation

$$\int_{-\infty}^t f_j(x) dx = \int_{-\infty}^{T_j(t)} g(y) dy;$$

on a $f_j(t) = g(T_j(t)) T_j'(t)$. Désignons par u_j la fonction (strictement) convexe sur \mathbb{R} telle que $u_j' = T_j$ et $u_j(0) = 0$. On définit une fonction convexe u sur \mathbb{R}^n par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u(x) = \sum_{j=1}^N c_j u_j(x \cdot v_j),$$

où les (v_j) , (c_j) vérifient la relation (J). On va s'intéresser à la transformation T de \mathbb{R}^n définie par

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow Tx = \sum_{j=1}^N c_j T_j(x \cdot v_j) v_j = \nabla_x u$$

et l'utiliser comme changement de variable dans \mathbb{R}^n ; en effet, la stricte convexité de u et sa croissance à l'infini garantissent que ∇u est bijective sur \mathbb{R}^n ; la matrice jacobienne de T au point x est

$$T'x = \sum_{j=1}^N c_j T'_j(x \cdot v_j) v_j \otimes v_j;$$

on utilisera la majoration

$$(2) \quad \left| \sum_{j=1}^N a_j c_j v_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^N c_j a_j^2$$

et l'estimation

$$(3) \quad \det \left(\sum_{j=1}^N a_j c_j v_j \otimes v_j \right) \geq \prod_{j=1}^N a_j^{c_j},$$

où les (a_j) sont des réels positifs. On aura donc en posant $\xi_j = x \cdot v_j$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, en utilisant les équations pour les transports T_j et les inégalités (2) et (3)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^N f_j(\xi_j)^{c_j} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^N g(T_j(\xi_j))^{c_j} \prod_{j=1}^N T'_j(\xi_j)^{c_j} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(- \sum_{j=1}^N c_j (T_j(\xi_j))^2 \right) \prod_{j=1}^N T'_j(\xi_j)^{c_j} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|Tx|^2) \det \left(\sum_{j=1}^N T'_j(\xi_j) c_j v_j \otimes v_j \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|Tx|^2} \det(T'x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} g \right)^n = \prod_{j=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}} f_j \right)^{c_j}. \end{aligned}$$

Revenons aux inégalités (2) et (3); l'inégalité (2) résulte du fait que les vecteurs $c_j^{1/2} v_j$ peuvent être vus comme les projections d'une base orthonormée w_1, \dots, w_N de \mathbb{R}^N : si $(w_{j,k})_{k=1}^n$ désigne les coordonnées de $c_j^{1/2} v_j$, la relation (J) montre que les colonnes $(w_{j,k})_{j=1}^N$, $k = 1, \dots, n$ sont orthonormées, et on peut par conséquent les compléter en une matrice orthogonale qui fournit les vecteurs w_1, \dots, w_N .

Prouvons (3): si $(e_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^n , si Det désigne le déterminant de n vecteurs par rapport à cette base et si $M = \sum_{j=1}^N M_j$ est une somme de

matrices $n \times n$ de rang 1, on voit que $\det M$ est égal à

$$\text{Det} \left(\sum_{j=1}^N M_j e_1, \dots, \sum_{j=1}^N M_j e_n \right) = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^N \text{Det}(M_{j_1} e_1, \dots, M_{j_n} e_n) = \sum_I \det M_I$$

où la somme est étendue à tous les sous-ensembles I à n éléments de $\{1, \dots, N\}$, et où on a posé $M_I = \sum_{j \in I} M_j$; comme les M_j sont de rang 1, les j_1, \dots, j_n qui donnent une contribution non nulle dans le terme central sont des entiers deux à deux distincts; on obtient la dernière égalité en regroupant selon les valeurs de $I = \{j_1, \dots, j_n\}$. Si $A = \sum_{j=1}^N a_j M_j$, le même développement montre que $\det A = \sum_I a^I \det M_I$, où on a posé $a^I = \prod_{j \in I} a_j$; si $M_j = c_j v_j \otimes v_j$, on a $M = I_n$ donc $\sum_I \det M_I = 1$. L'inégalité arithmético-géométrique donne alors

$$(4) \quad \det A \geq \prod_I (a^I)^{\det M_I} = \prod_{j=1}^N a_j^{\sum_{I: j \in I} \det M_I}.$$

Mais $\sum_{j \neq i} c_j v_j \otimes v_j$ est égal à $I_n - c_i v_i \otimes v_i$, dont le déterminant est

$$\sum_{I: i \notin I} \det M_I = 1 - c_i,$$

ce qui montre que $\sum_{I: i \in I} \det M_I = c_i$ pour tout $i = 1, \dots, N$, et donne le résultat voulu (3) à partir de l'inégalité (4).

2.1.4. Questions gaussiennes. — Caffarelli [Ca2] a remarqué que le transport de Brenier est contractant quand on transporte la probabilité gaussienne γ_n sur une probabilité μ de la forme $e^{-|x|^2/2 - \varphi(x)} dx$, φ convexe. Le caractère contractant de T peut être utilisé pour transporter certaines inégalités vraies pour γ_n en inégalités pour μ . On peut aussi utiliser ce résultat dans le problème de la corrélation gaussienne ([Co1], voir aussi [Ha2] pour un résultat connexe). La conjecture de la *corrélation gaussienne* prévoit que

$$\gamma_n(A \cap B) \geq \gamma_n(A) \gamma_n(B)$$

lorsque A, B sont deux convexes symétriques dans \mathbb{R}^n . Elle est prouvée dans \mathbb{R}^2 [Pit], mais seuls quelques cas particuliers sont connus en dimension plus grande (voir par exemple Gilles Hargé [Ha1]).

3. QUELQUES RÉSULTATS EN GÉOMÉTRIE GAUSSIENNE

L'inégalité isopérimétrique gaussienne du théorème 1.3 peut se montrer à partir de l'isopérimétrie sur la sphère (Borell, Sudakov-Tsirelson), par des techniques de symétrisation (Ehrhard) ou par des méthodes de semi-groupes. Posons pour tout x réel

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x d\gamma_1 = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt;$$

la fonction isopérimétrique gaussienne I est définie par $I(t) = \varphi \circ \Phi^{-1}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, c'est-à-dire qu'on a $I(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-s^2/2}$ exactement quand $t = \int_{-\infty}^s d\gamma_1$. Le résultat du théorème 1.3 se reformule ainsi : pour tout fermé $A \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$(5) \quad \gamma_n^+(A) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} (\gamma_n(A_\varepsilon) - \gamma_n(A)) \geq I(\gamma_n(A)),$$

où A_ε est le ε -épaississement de A pour la distance euclidienne. Autrement dit, si on définit $s \in \mathbb{R}$ par l'équation $\gamma_n(A) = \int_{-\infty}^s d\gamma_1$, on a $\gamma_n^+(A) \geq (2\pi)^{-1/2} e^{-s^2/2}$. Il est clair que cette inégalité est une égalité pour les demi-espaces affines de \mathbb{R}^n .

Bobkov [Bob] a montré une forme fonctionnelle pour l'isopérimétrie gaussienne : pour toute fonction f localement lipschitzienne de \mathbb{R}^n dans $[0, 1]$, on a

$$(6) \quad I\left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I^2(f) + |\nabla f|^2} d\gamma_n.$$

On voit que ce résultat contient l'information isopérimétrique précédente en prenant pour f une fonction égale à 1 sur A , et décroissant vers 0 autour de A , pour s'annuler hors de A_ε . Bobkov déduit ce résultat d'une *inégalité à deux points* : pour tous $a, b \in [0, 1]$,

$$(7) \quad I\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \sqrt{I^2(a) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{I^2(b) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}.$$

Utilisant les propriétés de tensorisation de cette inégalité et le théorème central limite, Bobkov montre que (7) implique (6). Comme il est noté dans [Bob], l'inégalité (6) pour \mathbb{R}^n peut aussi se déduire de (5) pour \mathbb{R}^{n+1} en choisissant pour $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ le sous-graphe de $\Phi^{-1} \circ f$; en fait cette remarque est déjà chez Ehrhard, mais le point remarquable de l'article [Bob] est que (6) y est déduite de l'inégalité élémentaire pour deux points; on peut aussi transcrire la preuve de Bobkov dans le langage des semi-groupes ou des martingales browniennes (voir [CHL]).

Ehrhard a montré dans [Ehr] un renforcement de l'inégalité de Brunn-Minkowski gaussienne (1) : si A, B sont deux ensembles convexes fermés non vides dans \mathbb{R}^n , on a

$$\Phi^{-1}(\gamma_n((1-t)A + tB)) \geq (1-t)\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + t\Phi^{-1}(\gamma_n(B))$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Cette propriété est plus forte que celle de l'inégalité (1), car pour tous $a, b \in [0, 1]$ on a $(1-t)\Phi^{-1}(a) + t\Phi^{-1}(b) \geq \Phi^{-1}(a^{1-t}b^t)$; cette dernière inégalité provient par exemple de l'inégalité de Brunn-Minkowski gaussienne (1) dans \mathbb{R} , appliquée aux deux intervalles $]-\infty, \Phi^{-1}(a)]$ et $]-\infty, \Phi^{-1}(b)]$. Donnons une interprétation plus géométrique de l'inégalité d'Ehrhard : si H_A et H_B sont deux demi-espaces affines limités par deux hyperplans parallèles, et si $\gamma_n(H_A) = \gamma_n(A)$, $\gamma_n(H_B) = \gamma_n(B)$, la mesure gaussienne de $(1-t)A + tB$ est au moins celle du demi-espace $(1-t)H_A + tH_B$.

La question de savoir si la convexité de A et B est nécessaire dans l'inégalité d'Ehrhard est restée longtemps ouverte. Rafał Łatała [Lat] a généralisé au cas où un seul des ensembles A, B est convexe et très récemment Borell [Bo2] a étendu le résultat à deux fermés quelconques; sa méthode se formule en termes de semi-groupes

ou d'équation d'évolution. Elle aura probablement d'autres retombées : on a déjà pu montrer [BaC] qu'elle donne une preuve stochastique de l'inégalité Brascamp-Lieb inverse (théorème 1.6).

Les mesures des dilatés d'un convexe symétrique C ont également un comportement intéressant ; il résulte de Prékopa-Leindler que $t \rightarrow \ln \gamma_n(tC)$ est concave sur $]0, +\infty[$. La *B-conjecture*, démontrée récemment [CFM], dit plus : la fonction $t \rightarrow \ln \gamma_n(e^t C)$ est concave sur \mathbb{R} . Latała et Oleszkiewicz [LaO] ont montré la *S-conjecture*, dont la seule preuve connue à ce jour est très compliquée ; elle emprunte dans son début des idées d'Ehrhard. Le résultat est le suivant : si on envisage l'accroissement de volume gaussien produit en passant d'un convexe symétrique C à un homothétique tC , $t > 1$, l'accroissement est minimal pour une bande symétrique $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq b\}$ telle que $\gamma_n(B) = \gamma_n(C)$,

$$\forall t \geq 1, \quad \gamma_n(tC) \geq \gamma_n(tB).$$

4. DÉVELOPPEMENTS PLUS RÉCENTS AUTOUR DE PRÉKOPA

Ball, Barthe et Naor [BBN] ont récemment donné une expression utile pour la dérivée seconde en 0 de la fonction Φ définie par

$$e^{-\Phi(t)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x,t)} dx$$

sur un intervalle réel contenant 0. Ils montrent (dans un langage équivalent) le résultat suivant : désignons par $\mathcal{H}_y \varphi$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par le Hessien de φ au point $\mathbf{y} = (y, 0)$ et par $H_y v$ la matrice hessienne au point y d'une fonction v définie sur \mathbb{R}^n ; on a

$$(8) \quad e^{-\Phi(0)} \Phi''(0) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(y,0)} \left((\mathcal{H}_y \varphi)(\nabla_y v, 1) + \text{tr}((H_y v)^2) \right) dy \right\},$$

où l'inf est pris sur l'ensemble des fonctions v .

Si φ est convexe du couple (x, t) , le résultat sera bien sûr ≥ 0 , ce qui redonne le résultat de Prékopa. On a déjà pu trouver une application de cette formule, où la présence du terme positif $\text{tr}((H_y v)^2)$ permet d'obtenir la convexité de Φ dans des cas où φ n'est pas convexe [CFM].

Artstein, Ball, Barthe et Naor [ABBN] utilisent cet ingrédient pour montrer la croissance avec n de l'entropie de la suite des variables $Z_n = n^{-1/2}(X_1 + \dots + X_n)$ qui apparaissent dans le théorème central limite (les (X_i) sont des variables aléatoires indépendantes de carré intégrable, de même loi). Auparavant, on ne savait établir la croissance de l'entropie que sur la sous-suite (Z_{2^n}) .

Une approche heuristique pour le résultat sur $\Phi''(0)$ est la suivante : pour t tendant vers 0, on peut introduire la fonction convexe u_t sur \mathbb{R}^n , nulle en 0, dont le gradient transporte la probabilité $e^{\Phi(0)} e^{-\varphi(x,0)} dx$ sur $e^{\Phi(t)} e^{-\varphi(x,t)} dx$; la fonction $v = \dot{u}_0$,

dérivée par rapport à t au point $t = 0$, est un bon candidat pour minimiser l'expression ci-dessus. En fait, cette approche est difficile à mettre en œuvre, et il est plus facile de traiter directement l'équation obtenue comme limite de l'équation de Monge-Ampère satisfaite par u_t , ce qui conduit à un opérateur linéaire du type Ornstein-Uhlenbeck.

Supposons que $\Phi(0) = 0$, de sorte que $d\mu(x) = e^{-\varphi(x,0)} dx$ soit une probabilité, et supposons qu'on puisse dériver deux fois sous le signe somme qui définit Φ . Le calcul direct de la dérivée seconde $\ddot{\Phi}(0)$ donne

$$(9) \quad \ddot{\Phi}(0) = \left(\int \dot{\varphi}_0 d\mu \right)^2 + \int (\ddot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_0^2) d\mu,$$

où $\dot{\varphi}_0$ représente la fonction $x \rightarrow \dot{\varphi}(x, 0)$; de même $\ddot{\varphi}_0, \varphi_0$ représentent dans ce qui suit les fonctions sur \mathbb{R}^n obtenues en fixant $t = 0$. La proposition qui suit ne prétend pas donner le résultat le plus général. On remarquera que si on veut prouver la convexité de Φ dans un intervalle autour de 0, on peut se permettre de modifier φ de façon à vérifier les hypothèses ci-dessous, et d'obtenir Φ comme limite simple de fonctions convexes, si les fonctions modifiées $\tilde{\varphi}$ donnent des $\tilde{\Phi}$ à dérivée seconde positive.

PROPOSITION 4.1. — *On suppose que φ_0 est de classe C^2 sur \mathbb{R}^n , que $\dot{\varphi}_0 \in L_2(\mu)$ et $\ddot{\varphi}_0 \in L_1(\mu)$, et que $\ddot{\Phi}(0)$ est donné par la formule (9). Dans ce cas, $\ddot{\Phi}(0)$ est donné aussi par la formule (8), où l'inf est pris sur l'ensemble des fonctions v de classe C^2 à support compact.*

Démonstration. — Considérons l'opérateur différentiel $L = \Delta - (\nabla\varphi_0) \cdot \nabla$, agissant sur l'espace C_{comp}^2 des fonctions à support compact de classe C^2 sur \mathbb{R}^n . Il est bien connu et facile à vérifier que la transformation isométrique U de $L_2(\mu)$ sur $L_2(\mathbb{R}^n)$ définie par $Uf = e^{-\varphi_0/2} f$ transforme l'opérateur $-L$ en l'opérateur $S = -\Delta + V$, avec $V = \frac{1}{4}|\nabla\varphi_0|^2 - \frac{1}{2}\Delta\varphi_0$; si $g = Uf$, on voit facilement que

$$\langle -Lf, f \rangle = \int |\nabla f|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla_x g|^2 + V(x)|g(x)|^2) dx = \langle -\Delta g + Vg, g \rangle.$$

On va montrer que l'image par L de C_{comp}^2 est dense dans le sous-espace H_0 de $L_2(\mu)$ formé des fonctions h telles que $\int h d\mu = 0$. Sinon, il existerait une fonction $f \in H_0$ non nulle orthogonale à toutes les Lh , ce qui implique que $g = Uf$ est orthogonale à toutes les $-\Delta\psi + V\psi$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On a donc $\Delta g = Vg$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui entraîne que $g \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ par la théorie classique. Si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $\theta g \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et on note (en utilisant la nullité de l'intégrale de la divergence de $\theta^2 g \nabla g$) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(\theta g)|^2 + \theta^2 g \Delta g) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 g^2.$$

En supposant que $\theta = 1$ dans un voisinage de 0, en introduisant $\theta_k(x) = \theta(x/k)$ pour tout $k \geq 1$, et en utilisant la relation $\Delta g = Vg$, on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(\theta_k g)|^2 + V|\theta_k g|^2) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta_k|^2 g^2 \xrightarrow[k]{} 0,$$

ce qui implique en revenant à f que $\int |\nabla f|^2 d\mu = 0$; la fonction f est par conséquent constante, donc nulle puisqu'elle est d'intégrale nulle. On atteint une contradiction qui montre que l'image de L est dense dans H_0 (on pourra trouver l'origine du calcul précédent chez Christian Simader [Sim]). On en déduit que

$$\left(\int \dot{\varphi}_0 d\mu\right)^2 = \min\left\{\int (h - \dot{\varphi}_0)^2 d\mu : h \in H_0\right\} = \inf_v\left\{\int (Lv - \dot{\varphi}_0)^2 d\mu\right\},$$

où v varie dans C_{comp}^2 . On a déjà observé que $-\int (Lv) \dot{\varphi}_0 d\mu = \int \nabla v \cdot \nabla \dot{\varphi}_0 d\mu$; en intégrant par parties, et avec la relation formelle $\nabla L = L\nabla - \nabla^2 \varphi \cdot \nabla$, on trouve

$$\int (Lv)^2 d\mu = -\int (\nabla Lv) \cdot \nabla v d\mu = \int (\nabla^2 v \cdot \nabla^2 v + (\nabla^2 \varphi_0 \cdot \nabla v) \cdot \nabla v) d\mu.$$

On voit que $\nabla^2 v \cdot \nabla^2 v$ est le carré de la norme Hilbert-Schmidt du Hessien Hv de v , égal à $\text{tr}((Hv)^2)$. Ainsi, on a montré que $\ddot{\Phi}(0)$ est l'inf en v de

$$\begin{aligned} \int (Lv - \dot{\varphi}_0)^2 d\mu + \int (\ddot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_0^2) d\mu &= \int ((Lv)^2 - 2(Lv) \dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_0) d\mu = \\ &= \int ((\nabla^2 \varphi_0 \cdot \nabla v) \cdot \nabla v + 2 \nabla \dot{\varphi}_0 \cdot \nabla v + \ddot{\varphi}_0 + \text{tr}((Hv)^2)) d\mu, \end{aligned}$$

qui coïncide avec l'expression attendue. \square

4.1. Le cas complexe

Les ensembles pseudo-convexes jouent dans une certaine mesure en analyse complexe le rôle des ensembles convexes, et les fonctions pluri-sous-harmoniques celui des fonctions convexes. On pourrait se demander si la fonction Φ définie sur \mathbb{C} par

$$e^{-\Phi(z)} = \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\varphi(x,z)} dx$$

est sous-harmonique lorsque φ est pluri-sous-harmonique sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, mais on sait depuis longtemps que cet énoncé trop général n'est pas vrai. Bo Berndtsson [Ber] a trouvé certaines conditions qui garantissent néanmoins ce résultat, et Dario Cordero [Co2] a remarqué que ce résultat de Berndtsson s'applique à certaines quantités géométriques liées à l'interpolation complexe en dimension finie. Par exemple, le volume de la boule unité de l'espace A_θ de la théorie de Calderón est log-concave par rapport à $\theta \in [0, 1]$. Ce résultat donne une preuve de l'inégalité de Santaló dans le cas d'espaces normés complexes.

L'inégalité de Santaló dit que le produit des volumes $|C| |C^\circ|$ d'un convexe symétrique C de \mathbb{R}^n et de son polaire C° est maximal pour la boule euclidienne. Si on se place dans \mathbb{C}^n , si C est la boule unité de l'espace normé complexe $A_0 = X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, on sait que la boule unité de X^* est le polaire C° , et que l'interpolé de Calderón $(X, X^*)_{1/2}$ est isométrique à \mathbb{C}^n muni du produit scalaire usuel. Le résultat précédent donne donc Santaló dans le cas de boules unité complexes, mais il donne aussi un résultat pour les volumes calculés avec certaines mesures log-concaves.

RÉFÉRENCES

- [And] T.W. ANDERSON – « The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities », *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), p. 170–176.
- [ABBN] S. ARTSTEIN, K. BALL, F. BARTHE & A. NAOR – « Solution of Shannon’s problem on the monotonicity of entropy », *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), p. 975–982.
- [Ba1] K. BALL – « Cube slicing in \mathbb{R}^n », *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), p. 465–473.
- [Ba2] ———, « Volumes of sections of cubes and related problems », in *Geometric aspects of functional analysis (1987-88)*, Lect. Notes in Math., vol. 1376, Springer, p. 251–260.
- [Ba3] ———, « Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality », *J. London Math. Soc. (2)* **44** (1991), p. 351–359.
- [Ba4] ———, « Convex geometry and functional analysis », in *Handbook of the Geometry of Banach spaces*, vol. 1, North Holland, 2001, p. 161–194.
- [BBN] K. BALL, F. BARTHE & A. NAOR – « Entropy jumps in the presence of a spectral gap », *Duke Math. J.* **119** (2003), p. 41–63.
- [Bar] F. BARTHE – « On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality », *Invent. Math.* **134** (1998), p. 335–361.
- [BaC] F. BARTHE & D. CORDERO-ERAUSQUIN – « Inverse Brascamp-Lieb inequalities along the Heat equation », in *Geometric Aspects of Functional Analysis, Israel Seminar 2002-2003*, Lect. Notes in Math., vol. 1850, Springer, 2004, p. 65–71.
- [Ber] B. BERNDTSSON – « Prékopa’s theorem and Kiselman’s minimum principle for plurisubharmonic functions », *Math. Ann.* **312** (1998), p. 785–792.
- [Bob] S.G. BOBKOV – « An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space », *Ann. Probab.* **25** (1997), p. 206–214.
- [BoL] S.G. BOBKOV & M. LEDOUX – « From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), p. 1028–1052.
- [Bo1] C. BORELL – « The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space », *Invent. Math.* **30** (1975), p. 207–216.
- [Bo2] ———, « The Ehrhard inequality », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **337** (2003), p. 663–666.
- [BrL] H.J. BRASCAMP & E.H. LIEB – « Best constants in Young’s inequality, its converse, and its generalization to more than three functions », *Adv. in Math.* **20** (1976), p. 151–173.
- [Bre] Y. BRENIER – « Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions », *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), p. 375–417.
- [Ca1] L.A. CAFFARELLI – « The regularity of mappings with a convex potential », *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), p. 99–104.

- [Ca2] ———, « Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities », *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), p. 547–563, Erratum, *ibid.* **225** (2002), p. 449–450.
- [CHL] M. CAPITAINÉ, E.P. HSU & M. LEDOUX – « Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces », *Electron. Comm. Probab.* **2** (1997), p. 71–81.
- [Co1] D. CORDERO-ERAUSQUIN – « Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities », *Arch. Rational Mech. Anal.* **161** (2002), p. 257–269.
- [Co2] ———, « Santaló’s inequality on \mathbb{C}^n by complex interpolation », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **334** (2002), p. 767–772.
- [CFM] D. CORDERO-ERAUSQUIN, M. FRADELIZI & B. MAUREY – « The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems », *J. Funct. Anal.* **214** (2004), p. 410–427.
- [CMS] D. CORDERO-ERAUSQUIN, R. MCCANN & M. SCHMUCKENSCHLÄGER – « A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb », *Invent. Math.* **146** (2001), p. 219–257.
- [CNV] D. CORDERO-ERAUSQUIN, B. NAZARET & C. VILLANI – « A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities », *Adv. in Math.* **182** (2004), p. 307–332.
- [DaG] S. DAS GUPTA – « Brunn-Minkowski inequality and its aftermath », *J. Multivariate Anal.* **10** (1980), p. 296–318.
- [Ehr] A. EHRHARD – « Symétrisation dans l’espace de Gauss », *Math. Scand.* **53** (1983), p. 281–301.
- [Gar] R.J. GARDNER – « The Brunn-Minkowski inequality », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **39** (2002), p. 355–405.
- [HaO] H. HADWIGER & D. OHMANN – « Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie », *Math. Z.* **66** (1956), p. 1–8.
- [Ha1] G. HARGÉ – « A particular case of correlation inequality for the Gaussian measure », *Ann. Probab.* **27** (1999), p. 1939–1951.
- [Ha2] ———, « Inequalities for the Gaussian measure and an application to Wiener space », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), p. 791–794.
- [HeM] R. HENSTOCK & A.M. MACBEATH – « On the measure of sum-sets. I. The theorems of Brunn, Minkowski, and Lusternik », *Proc. London Math. Soc. (3)* **3** (1953), p. 182–194.
- [Kan] M. KANTER – « Unimodality and dominance for symmetric random vectors », *Trans. Amer. Math. Soc.* **229** (1977), p. 65–85.
- [Kno] H. KNOTHE – « Contributions to the theory of convex bodies », *Michigan Math. J.* **4** (1957), p. 39–52.
- [Lat] R. LATAŁA – « A note on the Ehrhard inequality », *Studia Math.* **118** (1996), p. 169–174.
- [LaO] R. LATAŁA & K. OLESZKIEWICZ – « Gaussian measures of dilations of convex symmetric sets », *Ann. Probab.* **27** (1999), p. 1922–1938.

- [Led] M. LEDOUX – *The concentration of measure phenomenon*, American Mathematical Society, 2001.
- [Lei] L. LEINDLER – « On a certain converse of Hölder's inequality », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **33** (1972), p. 217–223.
- [Lie] E.H. LIEB – « Gaussian kernels have only Gaussian maximizers », *Invent. Math.* **102** (1990), p. 179–208.
- [Lus] L. LUSTERNIK – « Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (1935), no. 3, p. 55–58.
- [MC1] R.J. MCCANN – « Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps », *Duke Math. J.* **80** (1995), p. 309–323.
- [MC2] ———, « Polar factorization of maps on Riemannian manifolds », *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), p. 589–608.
- [MeP] M. MEYER & A. PAJOR – « Sections of the unit ball of ℓ_n^p », *J. Funct. Anal.* **80** (1988), p. 109–123.
- [Mon] G. MONGE – « Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais », in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année*, 1781, p. 666–704.
- [Pis] G. PISIER – *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 94, Cambridge University Press, 1989.
- [Pit] L.D. PITT – « A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets », *Ann. Probab.* **5** (1977), p. 470–474.
- [Pre] A. PRÉKOPA – « On logarithmic concave measures and functions », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **34** (1973), p. 335–343.
- [Sim] C.G. SIMADER – « Essential self-adjointness of Schrödinger operators bounded from below », *Math. Z.* **159** (1978), p. 47–50.
- [SuT] V.N. SUDAKOV & B.S. TSIREL'SON – « Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures », *J. Soviet Math.* **9** (1978), p. 9–18, traduit de *Zap. Nauch. Sem. L.O.M.I.* **41** (1974), p. 14–24.
- [Vil] C. VILLANI – *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 58, American Mathematical Society, 2003.

Bernard MAUREY

Université Paris 7

et

Laboratoire d'Analyse et Mathématiques Appliquées

UMR 8050 du CNRS

Université de Marne la Vallée

Cité Descartes – Champs sur Marne

F-77454 Marne La Vallée Cedex 2

E-mail : maurey@math.jussieu.fr

MOTIFS DE DIMENSION FINIE
[d'après S.-I. Kimura, P. O'Sullivan,...]

par Yves ANDRÉ

Table des matières

1. Introduction : les groupes de Chow sont-ils « de dimension finie » ?	116
1.1. Contre	116
1.2. Pour	117
2. Motifs purs	118
2.1. Définitions	118
2.2. Exemples	120
2.3. Équivalences adéquates et \otimes -idéaux	121
2.4. Le théorème de semi-simplicité de Jannsen	122
2.5. Motifs de dimension finie. La conjecture de Kimura-O'Sullivan	124
2.6. La conjecture de nilpotence de Voevodsky	124
2.7. Filtration sur les groupes de Chow. La conjecture de Bloch-Beilinson ...	125
3. Catégories de Kimura-O'Sullivan	126
3.1. Foncteurs de Schur	126
3.2. Objets pairs et objets impairs	127
3.3. Propriétés de \otimes -nilpotence	129
3.4. Propriétés de nilpotence	130
3.5. Le théorème de scindage	133
3.6. La stratégie de O'Sullivan	133
3.7. Objets de dimension finie et super-fibrés vectoriels équivariants	135
4. Applications	137
4.1. Motifs de surfaces	137
4.2. Motifs sur les corps finis	138
4.3. Rationalité de fonctions zêta motiviques	140
4.4. Construction inconditionnelle des groupes de Galois motiviques	141
4.5. Motifs de Chow vus comme super-fibrés vectoriels équivariants sous le groupe de Galois motivique. Hauteurs	142
Références	143

1. INTRODUCTION : LES GROUPES DE CHOW SONT-ILS « DE DIMENSION FINIE » ?

1.1. Contre

Soit X une variété projective lisse connexe de dimension d sur un corps k algébriquement clos. Soit $Z^*(X)$ le groupe des cycles algébriques sur X (groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irréductibles de X), gradué par la codimension. Le groupe de Chow $\text{CH}^*(X)$ est le quotient de $Z^*(X)$ par l'équivalence rationnelle.

En codimension 1, sa structure est bien connue (le cas $d = 1$ et $k = \mathbb{C}$ remonte au XIX^e siècle) : on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{CH}^1(X)_0 \longrightarrow \text{CH}^1(X) \longrightarrow \text{NS}(X) \longrightarrow 0$$

où $\text{NS}(X)$ est un groupe abélien de type fini (dit de Néron-Severi), ainsi qu'un isomorphisme (dit d'Abel-Jacobi)

$$\text{AJ}_X^1 : \text{CH}^1(X)_0 \cong \text{Pic}_X^0(k),$$

où Pic_X^0 est la variété abélienne de Picard attachée à X .

En codimension > 1 , l'espoir de comprendre ces groupes par dévissage en une partie discrète dénombrable et une partie continue contrôlée par les points d'une variété algébrique a donné naissance à la construction de théories de variétés de Picard et d'applications d'Abel-Jacobi intermédiaires.

À la fin des années 60, cet espoir s'est écroulé, même dans le cas le mieux compris après celui de la codimension 1, à savoir le cas de codimension maximale d . Dans ce cas, l'application d'Abel-Jacobi s'écrit

$$\text{AJ}_X^d : \text{CH}^d(X)_0 \longrightarrow \text{Alb}_X(k),$$

où $\text{CH}^d(X)_0$ est le groupe des 0-cycles de degré 0, et Alb_X la variété abélienne d'Albanese attachée à X . Cette application est surjective.

En 1969, D. Mumford [37] a démontré que si X est une surface sur $k = \mathbb{C}$, AJ_X^2 n'est injective que si le genre géométrique $p_g(X)$ est nul (*i.e.* que si $H^2(X)$ est engendré par les classes de diviseurs). Par exemple, si X est le carré d'une courbe Y de genre ≥ 2 , (d'où $p_g(X) \neq 0$), et en notant δ_Y l'application diagonale de Y , le 0-cycle $[D \times D] - \text{deg } D \cdot (\delta_Y)_*[D]$ sur X est dans le noyau de AJ_X^2 pour tout diviseur D sur Y ; dans un article récent [13], M. Green et P. Griffiths montrent que ce 0-cycle n'est pas nul si D est « assez général ».

A. Roitman [42] a d'ailleurs démontré peu après Mumford que AJ_X^2 induit un isomorphisme sur la torsion, et est injective si et seulement si l'application différence

$$S^n(X) \times S^n(X) \longrightarrow \text{CH}^2(X)_0, \quad (\{x_1, \dots, x_n\}, \{x'_1, \dots, x'_n\}) \longmapsto \sum x_i - \sum x'_i$$

est surjective pour n assez grand (où $S^n(X)$ désigne la puissance symétrique n -ième de X , c'est-à-dire X^n/\mathfrak{S}_n). Ces résultats impliquent qu'en un sens convenable, $\text{CH}^2(X)_0$ n'est pas contrôlé par une variété de dimension finie si $p_g(X) \neq 0$.

1.2. Pour

Dans l'article [26], qui remonte à plusieurs années, S.-I. Kimura introduit un point de vue tout à fait nouveau sur cette question de la « dimension finie » des groupes de Chow. Étant donnés $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} := \mathrm{CH}^*(X) \otimes \mathbb{Q}$, on peut former leur produit $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n \in \mathrm{CH}^*(X^n)_{\mathbb{Q}}$ et définir les produits alternés et symétriques par la recette usuelle

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{n!} \alpha_{\sigma(1)} \times \dots \times \alpha_{\sigma(n)}, \quad \beta_1 \bullet \dots \bullet \beta_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} \beta_{\sigma(1)} \times \dots \times \beta_{\sigma(n)}.$$

Kimura montre que lorsque X est le produit de deux courbes projectives lisses, *il existe un entier n tel que, pour tout n -uplet de cycles $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans le noyau de $\mathrm{AJ}_X^2 \otimes \mathbb{Q}$, on ait $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = 0$.*

Il montre par ailleurs que si X est une courbe, l'assertion analogue est vraie à condition de remplacer produits alternés par produits symétriques : *il existe un entier n tel que, pour tout n -uplet de cycles $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ dans $\mathrm{CH}^1(X)_0 \otimes \mathbb{Q}$, on ait $\beta_1 \bullet \dots \bullet \beta_n = 0$.*

Ces observations suggèrent que les groupes de Chow $\otimes \mathbb{Q}$ se comportent en un sens comme des *super-espaces vectoriels de dimension finie*.

S.-I. Kimura, et indépendamment P. O'Sullivan, ont avancé au milieu des années 90 l'idée audacieuse qu'il s'agirait d'un phénomène tout à fait général : ils conjecturent que, pour toute variété projective lisse X , *il existe une décomposition (en général non canonique)*

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^*(X)_+ \oplus \mathrm{CH}^*(X)_-$$

et un entier naturel n , tels que pour tout n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'éléments de $\mathrm{CH}^(X)_+$ et tout n -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ d'éléments de $\mathrm{CH}^*(X)_-$, on ait*

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = \beta_1 \bullet \dots \bullet \beta_n = 0.$$

L'exposé est consacré à l'analyse des tenants et aboutissants de cette conjecture.

Plan de l'exposé. — Le cadre naturel pour comprendre la nature de cette conjecture et ses implications est celui des motifs. Nous commencerons donc par rappeler la construction et diverses propriétés des motifs purs (pour une équivalence adéquate quelconque), notamment la semi-simplicité des motifs numériques conjecturée par A. Grothendieck et prouvée par U. Jannsen.

La forme générale de la conjecture de Kimura-O'Sullivan est que tout motif pour l'équivalence rationnelle est somme d'un motif pair (*i.e.* dont une puissance extérieure s'annule) et d'un motif impair (*i.e.* dont une puissance symétrique s'annule). C'est prouvé pour les motifs « de type abélien ». Nous indiquons aussi les liens entre cette conjecture et deux autres conjectures fondamentales sur les groupes de Chow (Voevodsky, Bloch-Beilinson).

Nous passons ensuite à l'étude générale de la notion catégorique d'objet pair et d'objet impair, puis à celle des catégories F -tensorielles dans lesquelles tout objet est somme d'un pair et d'un impair. Cet axiome tout simple s'avère extrêmement fécond, comme l'ont mis en lumière Kimura et surtout O'Sullivan. Nous verrons qu'une telle catégorie se décrit d'une part comme « extension » d'une catégorie F -tensorielle abélienne semi-simple par un « radical » localement nilpotent, et d'autre part comme catégorie de super-fibrés vectoriels équivariants.

Revenant aux motifs et aux groupes de Chow, nous tirons pour terminer les fruits de ces considérations catégoriques.

Remerciements. — Je remercie Bruno Kahn pour sa lecture critique attentive d'une première version de ce texte. Je remercie Shun-Ichi Kimura et Peter O'Sullivan d'avoir mis à ma disposition les versions les plus récentes de leurs papiers soumis, et d'avoir répondu diligemment à toutes mes questions concernant leurs travaux. Ce texte s'est nourri des nombreuses discussions que j'ai eues avec eux trois à propos des motifs de dimension finie.

Convention générale. — Dans tout le texte, F désigne un corps de caractéristique nulle. Nous dirons *catégorie F -tensorielle* pour « catégorie F -linéaire monoïdale symétrique \mathcal{T} , essentiellement petite⁽¹⁾, rigide (tout objet M a un dual M^\vee), pseudo-abélienne (tout endomorphisme idempotent a un noyau), et vérifiant $\text{End } \mathbf{1} = F$ ($\mathbf{1}$ désignant l'objet unité) ».

Dans toute catégorie F -tensorielle, on a la notion de *trace d'un endomorphisme*, et de *rang* (ou dimension) d'un objet : $\text{rg } M = \text{tr}(\text{id}_M) \in F$. Nous renvoyons à [43] pour les bases de la théorie des catégories monoïdales.

Étant donnés deux objets M, N , on note $\mathcal{T}(M, N)$ le F -espace des morphismes de M vers N . Les \otimes -foncteurs entre catégories F -tensorielles sont sous-entendus F -linéaires.

2. MOTIFS PURS

2.1. Définitions

La notion de motif pur a été introduite par Grothendieck dans les années soixante. Elle permet notamment de mettre en valeur les propriétés catégoriques du calcul des correspondances algébriques. Un exposé Bourbaki lui a été consacré il y a 35 ans [12]. La théorie s'étant beaucoup développée depuis une quinzaine d'années, un bref tour d'horizon s'impose.

⁽¹⁾*i.e.* les classes d'isomorphisme d'objets, et les morphismes entre deux objets quelconques, forment des ensembles appartenant à un univers fixé.

Soit $\mathcal{P}(k)$ la catégorie des variétés projectives lisses sur un corps k . Pour tout $X \in \mathcal{P}(k)$, notons $\mathcal{Z}^*(X)_F$ le F -espace vectoriel engendré par les sous-variétés irréductibles de X , gradué par la codimension. On fixe une relation d'équivalence *adéquate* \sim (en termes vagues, il s'agit d'une relation d'équivalence linéaire \sim sur $\mathcal{Z}^*(X)_F$ pour tout $X \in \mathcal{P}(k)$, telle que modulo \sim , les images directes et inverses des cycles sont définies ainsi que le produit d'intersection⁽²⁾). Muni du produit d'intersection, le quotient $\mathcal{Z}_{\sim}^*(X)_F = \mathcal{Z}^*(X)_F / \sim$ acquiert alors une structure d'anneau gradué. Les éléments de $\mathcal{Z}_{\sim}^{\dim X+r}(X \times Y)_F$ s'appellent correspondances algébriques (modulo \sim) entre X et Y , de degré r . La formule

$$g \circ f = \text{pr}_{XZ^*}^{XYZ}(\text{pr}_{XY}^{XYZ^*}(f) \cdot \text{pr}_{YZ^*}^{XYZ^*}(g))$$

définit une loi de composition associative pour les correspondances modulo \sim (les degrés s'additionnent). Les équivalences adéquates qui nous intéresseront sont les suivantes, de la plus fine à la plus grossière :

- l'équivalence rationnelle : $\alpha \sim_{\text{rat}} 0$ dans $\mathcal{Z}^*(X)_F$ s'il existe $\beta \in \mathcal{Z}^*(X \times \mathbb{P}^1)_F$ tel que $\beta(0)$ et $\beta(\infty)$ soient bien définis et que $\alpha = \beta(0) - \beta(\infty)$; on écrit plutôt $\text{CH}^*(X)_F$ que $\mathcal{Z}_{\text{rat}}^*(X)_F$,
- l'équivalence homologique pour une cohomologie de Weil fixée H (à coefficients dans une extension K/F) : $\alpha \sim_{\text{hom}} 0$ si sa classe fondamentale en cohomologie H est nulle,
- l'équivalence numérique : $\alpha \sim_{\text{num}} 0$ dans $\mathcal{Z}^r(X)_F$ si pour tout cycle de dimension complémentaire β , le degré $\langle \alpha, \beta \rangle$ du 0-cycle $\alpha \cdot \beta$ est nul⁽³⁾.

Définissons à présent la *catégorie* $M_{\sim}(k)_F$ *des motifs purs* à coefficients dans F sur le corps de base k , pour l'équivalence \sim .

Les objets sont les triplets (X, e, r) , où $X \in \mathcal{P}(k)$, $r \in \mathbb{Z}$, et $e \in \mathcal{Z}_{\sim}^{\dim X+r}(X \times X)_F$ est une correspondance idempotente : $e^2 = e$. Il est suggestif de noter ce triplet $e\mathfrak{h}_{\sim}(X)(r)$ (ou simplement $e\mathfrak{h}(X)(r)$), en pensant au symbole \mathfrak{h} comme à une cohomologie universelle.

Un morphisme $e\mathfrak{h}(X)(r) \rightarrow f\mathfrak{h}(Y)(s)$ est un élément de

$$f \circ \mathcal{Z}_{\sim}^{\dim X-r+s}(X \times Y)_F \circ e$$

(correspondance de degré $s - r$). La composition des morphismes est celle des correspondances.

On a un foncteur contravariant $\mathfrak{h}_{\sim} : \mathcal{P}(k) \rightarrow M_{\sim}(k)_F$ qui associe à X le motif $\mathfrak{h}_{\sim}(X) = \text{id} \cdot \mathfrak{h}_{\sim}(X)(0)$ et à tout morphisme le transposé de son graphe.

⁽²⁾Voir [45] ou [2] pour plus de précisions.

⁽³⁾Une conjecture « standard » de Grothendieck prédit que l'équivalence homologique coïncide avec l'équivalence numérique.

Le produit cartésien des variétés (et des cycles) induit une structure monoïdale sur $M_{\sim}(k)_F$. On vérifie aisément que c'est une *catégorie F -tensorielle* (au sens de notre convention générale). L'unité est le motif du point $\mathbf{1} = \mathfrak{h}(\mathrm{Spec} k)$.

Pour \sim_{rat} , on note plutôt $\mathrm{CHM}(k)_F$ que $M_{\mathrm{rat}}(k)_F$; c'est la catégorie des « motifs de Chow » à coefficients dans F . On a la formule

$$\mathrm{CH}^r(X)_F = \mathrm{CHM}(k)_F(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r)),$$

ce qui suggère de poser

$$\mathrm{CH}^r(M) := \mathrm{CHM}(k)_F(\mathbf{1}, M(r))$$

pour un motif de Chow quelconque M à coefficients dans F .

Par ailleurs, si \sim est au moins aussi fine que l'équivalence homologique, H définit un \otimes -foncteur

$$M_{\sim}(k)_F \longrightarrow s\mathrm{Vec}_K$$

vers la catégorie K -tensorielle des super-espaces vectoriels de dimension finie sur une extension K de F .

2.2. Exemples

Variétés abéliennes. — Soit X une variété abélienne de dimension d sur k . D'après A. Shermenev [46] (et d'autres auteurs après lui), il existe une décomposition canonique

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_0^{2d} \mathfrak{h}^n(X),$$

avec la propriété que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la correspondance diagonale $\mathfrak{h}(X^n) = \mathfrak{h}(X)^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{h}(X)$ induit un isomorphisme

$$S^n(\mathfrak{h}^1(X)) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}^n(X),$$

où S^n désigne la puissance symétrique n -ième⁽⁴⁾. Nous nous servirons du corollaire suivant :

PROPOSITION 2.1. — *Pour $n > 2d$, $S^n(\mathfrak{h}^1(X)) = 0$.*

Il existe plusieurs preuves voisines de ce fait bien connu. Voici celle de O'Sullivan, dans le cas où X est la jacobienne d'une courbe projective lisse géométriquement connexe C munie d'un k -point x . On a $\mathfrak{h}^1(X) \cong \mathfrak{h}^1(C) = \pi_C^1 \mathfrak{h}(C)$ où $\pi_C^1 = [\Delta_C - \mathrm{pr}_1^* x - \mathrm{pr}_2^* x]$, qui s'écrit aussi $\pi_C^1 = (\iota, \iota)^*[P]$, où ι est le plongement de C dans X envoyant x sur l'origine, et P est le diviseur de Poincaré sur $X \times X$. En posant $P_{i,j} = (\mathrm{pr}_i, \mathrm{pr}_j)^*[P]$,

⁽⁴⁾Appliquant une cohomologie de Weil, on obtient la formule analogue $S^n H^1(X) = H^n(X)$ dans la catégorie tensorielle des super-espaces vectoriels de dimension finie (avec la contrainte de commutativité donnée par la règle des signes de Koszul). Dans la catégorie tensorielle des espaces vectoriels, compte tenu de ce que $H^1(X)$ est de degré impair 1, cela redonne l'isomorphisme canonique usuel pour la cohomologie de X : $\wedge^n H^1(X) = H^n(X)$.

on est donc ramené à prouver que $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} P_{1,\sigma(1)} \cdots P_{n,\sigma(n)} = 0$ dans $\text{CH}(X^n \times X^n)$ si $n > 2d$. Or on a $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} P_{1,\sigma(1)} \cdots P_{n,\sigma(n)} = \sum_{I, J \subset [1, n]} (-1)^{|I|+|J|} (\sum_{i \in I, j \in J} P_{i,j})^n$, nul du fait que $[P]^n \in \text{CH}^n(X^2) = 0$ si $n > 2d$.

On note $\text{CHM}(k)_F^{\text{ab}}$ la plus petite sous-catégorie F -tensorielle strictement pleine, stable par facteurs directs, de $\text{CHM}(k)_F$ contenant les motifs des variétés abéliennes sur une extension finie séparable de k . Par exemple, le motif de toute variété projective lisse dominée par un produit de courbes projectives lisses est dans $\text{CHM}(k)_F^{\text{ab}}$.

Autre exemple : le motif de toute hypersurface de Fermat de degré N sur un corps k de caractéristique $\neq N$ est isomorphe à un motif découpé sur une variété abélienne [24].

Surfaces. — Soient X une surface projective lisse géométriquement connexe sur k , Pic_X^0 sa variété de Picard, Alb_X sa variété d'Albanese. J. Murre [38] construit une décomposition

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_0^4 \mathfrak{h}^n(X)$$

avec $\mathfrak{h}^0(X) \cong \mathbf{1}$, $\mathfrak{h}^1(X) \cong \mathfrak{h}^3(X)(1) \cong \mathfrak{h}^1(\text{Pic}_X^0) \cong \mathfrak{h}^1(\text{Alb}_X)$. En outre, $\mathfrak{h}^2(X)(1)$ se décompose en $\mathbf{1}^{\text{rg NS}(X)} \oplus \mathfrak{t}^2(X)(1)$ pour un $\mathfrak{t}^2(X)$ convenable (dont l'image par H est la « partie transcendante » de $H^2(X)$).

2.3. Équivalences adéquates et \otimes -idéaux

Un anneau n'est autre qu'une catégorie (pré-)additive avec un seul objet. Inversement, on peut considérer les catégories additives (resp. F -linéaires) comme des anneaux (resp. F -algèbres) à plusieurs objets, ce qui permet d'importer en théorie des catégories nombre de concepts, voire d'énoncés, de l'algèbre non commutative. Exemple : un idéal \mathcal{I} d'une catégorie F -linéaire \mathcal{A} est la donnée pour tout couple d'objets (M, N) d'un sous-espace $\mathcal{I}(M, N)$ de $\mathcal{A}(M, N)$, cette famille de sous-espaces (lorsque M et N varient) étant stable par composition à gauche et à droite avec un morphisme arbitraire. On peut alors former la catégorie F -linéaire quotient \mathcal{A}/\mathcal{I} . La somme $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ et le produit $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ de deux idéaux sont définis comme d'habitude.

Si \mathcal{T} est une catégorie F -tensorielle, on a aussi la notion de \otimes -idéal : idéal \mathcal{I} stable par produit tensoriel avec tout morphisme. Le quotient \mathcal{T}/\mathcal{I} hérite d'une structure monoïdale, et son enveloppe pseudo-abélienne $(\mathcal{T}/\mathcal{I})^{\natural}$ est une catégorie F -tensorielle.

Exemples 2.2

1) Un exemple d'idéal est le *radical* (de Kelly) \mathcal{R} , défini par $\mathcal{R}(M, N) = \{f \in \mathcal{T}(M, N) \mid \forall g \in \mathcal{T}(N, M), 1_M - gf \text{ est inversible}\}$. Ce n'est pas en général un \otimes -idéal (voir ci-dessous 3.5).

2) \mathcal{T} admet un unique \otimes -idéal maximal (distinct de \mathcal{T}) noté \mathcal{N} [4, 7.1] : il est défini par

$$\mathcal{N}(M, N) = \{f \in \mathcal{T}(M, N) \mid \forall g \in \mathcal{T}(N, M), \text{tr}(gf) = 0\}.$$

Il coïncide avec \mathcal{R} si et seulement si \mathcal{R} est un \otimes -idéal.

3) Les morphismes dont une puissance tensorielle est nulle forment un \otimes -idéal $\sqrt[\otimes]{0}$, le \otimes -nilradical [4, 7.4]. C'est la réunion des \otimes -idéaux nilpotents⁽⁵⁾. Il est contenu dans $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}$. Le \otimes -foncteur $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} / \sqrt[\otimes]{0}$ est *conservatif*, *i.e.* reflète les isomorphismes.

4) Le noyau de tout foncteur (*i.e.* l'ensemble des flèches qu'il annule) est un idéal. Le noyau de tout \otimes -foncteur est un \otimes -idéal.

Comme \sim_{rat} est l'équivalence adéquate la plus fine, on a pour toute équivalence adéquate un foncteur plein $\text{CHM}(k) \rightarrow M_{\sim}(k)$ dont on note \mathcal{I}_{\sim} le noyau⁽⁶⁾. On a (*cf.* [20, 1.7], [4, II.6.3].) :

LEMME 2.3. — *Tout \otimes -idéal \mathcal{I} de $\text{CHM}(k)$ est de la forme \mathcal{I}_{\sim} pour une équivalence adéquate \sim convenable. La catégorie $M_{\sim}(k)$ n'est alors autre que l'enveloppe pseudo-abélienne de $\text{CHM}(k)/\mathcal{I}$.*

Exemples 2.4

1) Dans $\text{CHM}(k)$, on a $\mathcal{N} = \mathcal{I}_{\text{num}}$. En effet, $\mathcal{N}(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r)) \subset \text{CHM}(k)(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r)) = \text{CH}^r(X)$ est l'ensemble des cycles f tels que, pour tout cycle $g \in \text{CHM}(k)(\mathfrak{h}(X)(r), \mathbf{1}) = \text{CH}^{\dim X - r}(X)$, $\text{tr}(fg) = 0$. Mais $\text{tr}(fg)$ n'est autre que $\langle f, g \rangle$.

2) Dans $\text{CHM}(k)$, l'équivalence adéquate associée à $\sqrt[\otimes]{0}$ est l'équivalence de \otimes -nilpotence : $\alpha \sim_{\otimes \text{nil}} 0$, si $\alpha^{\times n} \sim_{\text{rat}} 0$ pour $n \gg 0$. Du fait que les $\sqrt[\otimes]{0}(M, M)$ sont des nil-idéaux, les idempotents se relèvent, et il suit que $M_{\otimes \text{nil}}(k) = \text{CHM}(k) / \sqrt[\otimes]{0}$.

2.4. Le théorème de semi-simplicité de Jannsen

La théorie des motifs purs n'est vraiment sortie des limbes qu'avec le théorème de semi-simplicité de U. Jannsen [18], qui résout une conjecture de Grothendieck, appartenant au cercle des conjectures « standard » (l'état essentiellement conjectural de la théorie avant le théorème de Jannsen est résumé à la fin de [43]).

THÉORÈME 2.5 (Jannsen). — $M_{\text{num}}(k)$ est abélienne semi-simple.

Ce résultat n'utilise que l'existence d'un \otimes -foncteur H de $\text{CHM}(k) \rightarrow s\text{Vec}_K$ (un tel \otimes -foncteur est fourni par toute cohomologie de Weil à coefficients dans K). Modulo les remarques précédentes, il découle immédiatement du résultat général suivant appliqué à $\mathcal{T} = \text{CHM}(k)$:

⁽⁵⁾La composition de n morphismes s'obtient à partir du produit tensoriel de ces morphismes en appliquant une permutation cyclique et une contraction. Il s'ensuit, comme l'ont remarqué plusieurs auteurs, que tout endomorphisme \otimes -nilpotent est nilpotent, et engendre même un idéal nilpotent, *cf. e.g.* [4, 7.4.2].

⁽⁶⁾On omet désormais l'indice F pour alléger.

PROPOSITION 2.6. — Soient \mathcal{T} une catégorie F -tensorielle et $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ un \otimes -foncteur à valeurs dans une catégorie K -tensorielle (pour une extension K/F convenable) dans laquelle les Hom sont de dimension finie et les endomorphismes nilpotents sont de trace nulle. On pose $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/\mathcal{N}$. Alors pour tout couple d'objets (M, N) , $\overline{\mathcal{T}}(M, N)$ est de dimension finie sur F , et $\overline{\mathcal{T}}$ est semi-simple.

Dans le cas de $\text{CHM}(k)$, la première assertion signifie que les espaces de cycles modulo équivalence numérique sont de dimension finie.

Prouvons 2.6. Comme le noyau de H est contenu dans \mathcal{N} , on peut remplacer \mathcal{T} par $\mathcal{T}/\text{Ker } H$, c'est-à-dire supposer H fidèle.

Commençons par le cas où $K = F$. Les espaces $\mathcal{T}(M, N)$ sont alors de dimension finie puisque par hypothèse il en est ainsi de leur image par H . Ceci implique que le radical de la F -algèbre $\mathcal{T}(M, M)$ est nilpotent, et que le quotient par ce radical est semi-simple. On est donc ramené à prouver que tout idéal nilpotent I de $\mathcal{T}(M, M)$ est contenu dans $\mathcal{N}(M, M)$. Or pour tout $f \in I$ et tout $g \in \mathcal{T}(M, M)$, gf est nilpotent, donc $H(gf)$ aussi, ce qui implique $\text{tr } H(gf) = 0$ par hypothèse, d'où aussi $\text{tr}(gf) = 0$, et finalement $f \in \mathcal{N}(M, M)$. Ainsi $\overline{\mathcal{T}}(M, M)$ est semi-simple pour tout M , donc $\overline{\mathcal{T}}$ est semi-simple (cf. e.g. [4, A.2.10]).

On ramène le cas général au cas où $F = K$ de la manière suivante. Soit \mathcal{T}_K la catégorie K -tensorielle obtenue en étendant les scalaires de \mathcal{T} de F à K et en passant au quotient par le noyau de H puis à l'enveloppe pseudo-abélienne. Alors H s'étend en un \otimes -foncteur fidèle sur la catégorie K -tensorielle \mathcal{T}_K . Il reste à voir que $\overline{\mathcal{T}}(M, N) \otimes_F K$ s'identifie à $\overline{\mathcal{T}}_K(M, N)$ ⁽⁷⁾. Soit V le sous- K -espace de $\text{Hom}_K(H(M^\vee \otimes N), H(\mathbf{1}))$ engendré par $H(\mathcal{T}(M^\vee \otimes N, \mathbf{1}))$. On peut donc trouver des éléments b_1, \dots, b_n de $\mathcal{T}(M^\vee \otimes N, \mathbf{1})$, dont les images par H forment une base de V . Soit $a \in \mathcal{T}(M, N) \cong \mathcal{T}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$. Dire que $a \in \mathcal{N}(M, N) \cong \mathcal{N}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$, c'est dire que $b \circ a = 0$ dans $F = \text{End } \mathbf{1}$ pour tout $b \in \mathcal{T}(M^\vee \otimes N, \mathbf{1})$, ou encore que $V \circ H(a) = 0 \in K$. On voit donc que $a \mapsto (b_i \circ a)_i$ définit un isomorphisme F -linéaire de $\overline{\mathcal{T}}(M, N) \cong \overline{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$ sur F^n . On conclut en appliquant le même argument à \mathcal{T}_K , en remplaçant F par K .

Le théorème de Jannsen explicite la structure de la catégorie des motifs pour la plus grossière des équivalences adéquates. Au-delà, on aimerait comprendre la structure de la catégorie des motifs pour des équivalences plus fines, notamment les motifs de Chow (à coefficients dans $F = \mathbb{Q}$ pour fixer les idées). Nous allons énoncer trois conjectures fondamentales allant dans ce sens, en commençant par celle de Kimura-O'Sullivan.

⁽⁷⁾Dans le cas des motifs, il s'agit du fait que les cycles modulo équivalence numérique commutent à l'extension des coefficients, ce qui était connu depuis longtemps.

2.5. Motifs de dimension finie. La conjecture de Kimura-O’Sullivan

CONJECTURE 2.7 (Kimura, O’Sullivan). — *Tout motif de Chow M est somme d’un motif M_+ dont une puissance extérieure est nulle et d’un motif M_- dont une puissance symétrique est nulle.*

Appliquant ceci au motif $M = \mathfrak{h}(X)$, en posant $\mathrm{CH}(X)_+ = \mathrm{CH}(M_+)$, $\mathrm{CH}(X)_- = \mathrm{CH}(M_-)$, on obtient la décomposition $\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}(X)_+ \oplus \mathrm{CH}(X)_-$ dont il était question dans l’introduction.

THÉORÈME 2.8 (Shermenev, Kimura, O’Sullivan). — *La conjecture de Kimura-O’Sullivan est vraie pour les motifs de $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$ (cf. 2.2).*

Compte tenu de ce que $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$ est la plus petite sous-catégorie F -tensorielle strictement pleine, stable par facteurs directs, de $\mathrm{CHM}(k)_F$ contenant les \mathfrak{h}^1 des variétés abéliennes sur une extension finie séparable de k , cela découle de 2.1 (via 3.7 ci-dessous).

Cela fournit un réservoir assez abondant d’exemples illustrant la théorie⁽⁸⁾.

2.6. La conjecture de nilpotence de Voevodsky

Dans une direction un peu différente, V. Voevodsky a proposé dans [49] une conjecture de nilpotence très forte pour les groupes de Chow. Notons $\mathrm{CH}^*(X)_0$ le sous-groupe de $\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ formé des cycles numériquement équivalents à 0.

CONJECTURE 2.9 (Voevodsky). — *Pour tout $\alpha \in \mathrm{CH}^*(X)_0$, sa puissance « cartésienne » n -ième $\alpha^{\times n} \in \mathrm{CH}^*(X^n)_{\mathbb{Q}}$ est nulle pour n assez grand.*

Traduisant en termes d’idéaux tensoriels (cf. 2), cela donne : $\otimes^{\infty} 0 \stackrel{?}{=} \mathcal{N}$.

Un petit pas dans cette direction est le suivant, qui montre du moins que négliger la \otimes -nilpotence simplifie énormément la structure des groupes de cycles :

PROPOSITION 2.10. — *Les groupes de cycles modulo \otimes -nilpotence sont dénombrables. Ce sont des invariants géométriques : si k est algébriquement clos, leur formation commute à toute extension algébriquement close de k .*

En effet, Voevodsky montre dans [49] que les cycles algébriquement équivalents⁽⁹⁾ à 0 sont \otimes -nilpotents, et la théorie des variétés de Chow montre que les espaces de cycles modulo équivalence algébrique ont les propriétés énoncées en 2.10 [28]. Il en est donc de même pour toute équivalence adéquate moins fine.

⁽⁸⁾Je ne connais en revanche aucun motif hors de $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$ pour lequel on sache démontrer la conjecture de Kimura-O’Sullivan.

⁽⁹⁾L’équivalence algébrique est définie comme l’équivalence rationnelle en remplaçant \mathbf{P}^1 par une courbe projective lisse quelconque.

PROPOSITION 2.11. — *La conjecture de Voevodsky implique celle de Kimura-O’Sullivan.*

En effet, il est clair que 2.9 implique la conjecture standard selon laquelle $\sim_{\text{hom}} = \sim_{\text{num}}$ (M_{hom} est *via* H une sous-catégorie non pleine de $s\text{Vec}_K$, et toute application linéaire dont une puissance tensorielle est nulle est nulle). Par le formalisme des conjectures standard (cf. [27], [2]), cela implique l’existence d’un idempotent dans $M_{\text{hom}} = \text{CHM}(k)/\mathbb{V}\overline{0}$ qui découpe la partie paire de la cohomologie $H(M)$. Comme $\mathbb{V}\overline{0}(M, M)$ est un nil-idéal, il se relève en un idempotent de $\text{CHM}(k)(M, M)$. Notons $M_+ \oplus M_-$ la décomposition correspondante de M . Que $\wedge^n M_+ = S^n M_- = 0$ pour $n \gg 0$ se voit en appliquant H , compte tenu de ce que le \otimes -foncteur $\text{CHM}(k) \rightarrow M_{\text{hom}} = \text{CHM}(k)/\mathbb{V}\overline{0}$ est conservatif.

La question de la réciproque sera considérée en 3.33.

2.7. Filtration sur les groupes de Chow. La conjecture de Bloch-Beilinson

L’existence de filtrations remarquables sur les groupes de Chow a été conjecturée par S. Bloch et A. Beilinson [7], [6] d’une part, et par J. Murre d’autre part [39] sous une forme différente (mais équivalente d’après Jannsen [19]). Bien que concernant les motifs purs, sa véritable justification se situe dans le cadre de la philosophie des motifs mixtes, cf. [6], [19], [20], [2, ch. 22].

CONJECTURE 2.12 (Bloch-Beilinson). — *On suppose que les projecteurs de Künneth π_X^i (relatifs à une cohomologie H fixée) sont algébriques. Il existe une filtration $F^* \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ d’anneau, décroissante, finie, exhaustive et séparée, respectée par l’action des correspondances algébriques, telle que F^1 soit l’idéal des cycles $\sim_{\text{hom}} 0$ et⁽¹⁰⁾ que π_X^i agisse sur le gradué $Gr^{\nu} \text{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}}$ par l’identité si $i = 2r - \nu$, par 0 sinon.*

On renvoie aux références ci-dessus ainsi qu’à [2, ch. 11] pour la discussion de cette conjecture et de ses implications, notamment l’existence d’une *filtration croissante par le poids* canonique dans $\text{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}$. Pour deux motifs de Chow M et N purement de poids respectifs m et n , la conjecture implique que $\text{CHM}(k)(M, N) = M_{\text{hom}}(M, N)$ si $m = n$, et $\text{CHM}(k)(M, N) = 0$ si $m < n$.

Si la filtration de Bloch-Beilinson existe, chaque cran F^i de la filtration définit un \otimes -idéal de $\text{CHM}(k)$ (donc une relation d’équivalence adéquate), encore noté F^i . On a $F^1 = \mathcal{I}_{\text{hom}}$.

THÉORÈME 2.13 (Jannsen [20]). — *Si la conjecture de Bloch-Beilinson est vraie, de même que la conjecture standard de type Lefschetz⁽¹¹⁾, alors $F^i = (\mathcal{I}_{\text{hom}})^i$.*

⁽¹⁰⁾Ces conditions impliquent que les correspondances algébriques modulo l’équivalence homologique agissent sur les gradués $Gr^{\nu} \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$.

⁽¹¹⁾La conjecture standard de type Lefschetz pour $X \in \mathcal{P}(k)$ de dimension d prédit que l’inverse de l’isomorphisme de Lefschetz $H^i(X) \cong H^{2d-i}(X)(d-i)$ (induit par le $(d-i)$ -ème cup-produit itéré avec une polarisation de X) est induit par une correspondance algébrique.

THÉORÈME 2.14 (O’Sullivan [40]). — *La conjecture de Bloch-Beilinson, jointe à la conjecture standard $\sim_{\text{hom}} = \sim_{\text{num}}$, implique la conjecture de nilpotence de Voevodsky.*

Voir aussi [2, 11.5].

Les liens entre ces conjectures, et ce qu’elles disent sur la structure de $\text{CHM}(k)$, deviendront nettement plus transparents dans le formalisme de O’Sullivan, voir 4.5 ci-dessous. Auparavant, il nous faut toutefois effectuer un assez long périple au pays des catégories tensorielles et aborder l’étude générale de la notion d’objet pair et d’objet impair.

3. CATÉGORIES DE KIMURA-O’SULLIVAN

Commençons par quelques préliminaires sur les représentations du groupe symétrique (voir [33] et [11] pour plus de détails).

3.1. Foncteurs de Schur

Soit \mathcal{T} une catégorie F -tensorielle. Pour tout objet M de \mathcal{T} et tout $n \geq 1$, le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit canoniquement sur $M^{\otimes n}$.

Par ailleurs les classes d’isomorphie V_λ de \mathbb{Q} -représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n sont en bijection canonique avec les partitions λ de n . On a donc $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n] = \prod_{\lambda, |\lambda|=n} \text{End}_{\mathbb{Q}} V_\lambda$. Notons c_λ l’idempotent de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ définissant V_λ . Le *foncteur de Schur* $S_\lambda : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est défini par

$$S_\lambda(M) = c_\lambda(M^{\otimes n}).$$

Exemple 3.1. — $S_{(n)} = S^n$ (puissance symétrique), $S_{(1,1,\dots,1)} = \wedge^n$ (puissance extérieure).

Le diagramme de Young d’une partition λ de $n = |\lambda|$ est l’ensemble $[\lambda]$ des couples (i, j) d’entiers ≥ 1 tels que $j \leq \lambda_i$.

Soient n_1 et n_2 deux entiers de somme n , et soient μ et ν des partitions de n_1 et n_2 respectivement. On définit le coefficient de Littlewood-Richardson $N_{\mu\nu\lambda} = [V_\lambda : V_\mu \otimes V_\nu]$ comme étant la multiplicité de $V_\mu \otimes V_\nu$ dans V_λ (vues comme représentations de $\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \subset \mathfrak{S}_n$). Ces nombres se calculent par une règle combinatoire bien connue [33, I9]. Le formulaire suivant, classique dans le cas où $\mathcal{T} = \text{Vec}_F$ (ou $s\text{Vec}_F$), s’étend formellement à toute catégorie F -tensorielle \mathcal{T} ([11]) :

Formulaire 3.2

- 1) $S_\mu(M) \otimes S_\nu(M) \cong \bigoplus_{\lambda, |\lambda|=|\mu|+|\nu|} S_\lambda(M)^{N_{\mu\nu\lambda}}$,
- 2) $S_\lambda(M \oplus N) \cong \bigoplus_{\mu, \nu, |\lambda|=|\mu|+|\nu|} (S_\mu(M) \otimes S_\nu(N))^{N_{\mu\nu\lambda}}$,
- 3) $S_\lambda(M \otimes N) \cong \bigoplus_{\mu, \nu, |\lambda|=|\mu|+|\nu|} (S_\mu(M) \otimes S_\nu(N))^{[V_\mu \otimes V_\nu : V_\lambda]}$,
- 4) $S_\lambda(M^\vee) = S_\lambda(M)^\vee$,
- 5) si $[\lambda] \subset [\mu]$, $S_\lambda(M) = 0 \Rightarrow S_\mu(M) = 0$.

3.2. Objets pairs et objets impairs

Soit de nouveau \mathcal{T} une catégorie F -tensorielle.

DÉFINITIONS 3.3⁽¹²⁾

- 1) Un objet M de \mathcal{T} est dit pair (resp. impair) s'il existe n tel que $\wedge^n M = 0$ (resp. $S^n M = 0$).
- 2) Un objet M de \mathcal{T} est dit de dimension finie au sens de Kimura-O'Sullivan s'il est somme d'un objet pair M_+ et d'un objet impair M_- .
- 3) \mathcal{T} est dite de Kimura-O'Sullivan si tout objet est de dimension finie.

Le modèle qui inspire la définition 2) est évidemment celui des super-espaces vectoriels de dimension finie sur F .

Exemples 3.4. — Outre cet exemple, et celui de $\text{CHM}(k)^{\text{ab}}$ que nous avons déjà rencontré, voici quelques autres exemples de catégories de Kimura-O'Sullivan (nous en verrons d'autres) :

- 1) la catégorie $\text{Rep}_F G$ des représentations (de dimension finie) d'un schéma en groupes affine sur F ; plus généralement, toute catégorie tannakienne. En fait, d'après [10], une catégorie F -tensorielle abélienne est tannakienne si et seulement si tout objet est pair,
- 2) la catégorie $s\text{Rep}_F G$ des super-représentations d'un F -schéma en groupes affine G ; plus généralement, si ε est un élément central de $G(k)$ d'ordre divisant 2, la catégorie $\text{Rep}_F(G, \varepsilon)$ des super-représentations pour lesquelles l'automorphisme de parité est induit par l'action de ε (cf. [11]),
- 3) la catégorie F -tensorielle des fibrés vectoriels sur une base X projective géométriquement connexe sur le corps F ,
- 4) si G est un F -schéma en groupes affine, la catégorie F -tensorielle des (super-)fibrés vectoriels G -équivariants sur un (super-) G -schéma affine $X = \text{Spec } A$ avec $A^G = F$.

Remarque 3.5. — Dans les exemples 2) et 4), il est essentiel que G soit un « vrai » schéma en groupes affine, et non un super-schéma en groupes affine. La catégorie des représentations du super-schéma en groupes affine $GL(1, 1)$ (formé des matrices 2-2 de la forme $\begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon^2 = 0$) n'est pas de Kimura-O'Sullivan [4, 10.1] :

⁽¹²⁾Nous nous écartons ici un peu tant de la terminologie de Kimura que de celle de O'Sullivan. Au lieu d'objet pair, Kimura parle d'objet pairement de dimension finie, tandis que O'Sullivan parle d'objet positif. O'Sullivan dit semi-positif plutôt que de dimension finie, et appelle catégorie semi-positif une catégorie dans laquelle tout objet est semi-positif. Par ailleurs, Kimura ne considère que le cas où \mathcal{T} est la catégorie des motifs de Chow, mais ses arguments s'étendent au cas général, ainsi qu'il est montré dans [4, §7, §9].

la représentation irréductible standard $V = F[\varepsilon] \oplus \overline{F[\varepsilon]}$ ⁽¹³⁾ est annulée par le foncteur de Schur $S_{(2,2)}$ mais n'est ni paire ni impaire⁽¹⁴⁾.

C'est un exemple de catégorie super-tannakienne. D'après [11], une catégorie F -tensorielle abélienne est super-tannakienne si et seulement si tout objet est annulé par un foncteur de Schur.

Il résulte du point 5) du formulaire 3.2 que pour M pair (resp. impair), il existe un plus petit entier naturel $\text{kim } M$ tel que pour tout $n > \text{kim } M$, $\wedge^n M = 0$ (resp. $S^n M = 0$). Pour tout objet de dimension finie, notons $\text{kim } M$ le minimum des $\text{kim } M_+ + \text{kim } M_-$ parmi les décompositions de M en objet pair et objet impair⁽¹⁵⁾. Il sera calculé en 3.20.

LEMME 3.6. — *Le rang $\text{rg } M$ de tout objet de dimension finie est un entier, et $|\text{rg } M| \leq \text{kim } M$.*

Il suffit de traiter séparément les cas pair et impair. Supposons M pair, de sorte que $\wedge^n M = 0$ si et seulement si $n > \text{kim } M$. On a $\text{rg}(\wedge^n M) = \binom{\text{rg } M}{n}$, qui ne s'annule que si $\text{rg } M$ est un entier naturel $> n$. D'où $\text{rg } M \leq \text{kim } M$. Le cas d'un objet impair est analogue, en utilisant le fait que $\text{rg}(S^n M) = \binom{\text{rg } M + n - 1}{n}$.

LEMME 3.7

- 1) *La notion d'objet pair (resp. impair) est stable par somme, facteur direct, et passage au dual.*
- 2) *Le produit tensoriel de deux objets M, N de même parité (resp. parité différente) est pair (resp. impair), et en outre $\text{kim}(M \otimes N) \leq \text{kim } M \cdot \text{kim } N$.*
- 3) *La notion d'objet de dimension finie est stable par \oplus, \otimes , dualité [et facteur direct].*

Les points 1) et 2) se déduisent du formulaire 3.2, en s'aidant de la règle de Littlewood-Richardson (*cf. e.g.* [26, 5]). Le point 3) en découle immédiatement [excepté en ce qui concerne le passage aux facteurs directs (il n'est pas immédiat qu'une décomposition en pair et impair en induise une sur tout facteur direct), qui suivra du corollaire 3.11 ci-dessous].

On peut aussi se demander si ces notions sont stables par extension⁽¹⁶⁾. C'est le cas pour la notion d'objet pair (resp. impair) [35], [14]. Par là, C. Mazza et V. Guletskii

⁽¹³⁾La barre indique le changement de parité.

⁽¹⁴⁾Dans cet exemple, le radical de Kelly n'est pas un \otimes -idéal (il est distinct de \mathcal{N}) puisque le passage au quotient par \mathcal{N} n'est pas conservatif.

⁽¹⁵⁾Nous verrons bientôt qu'en fait cette somme ne dépend pas de la décomposition, 3.10.

⁽¹⁶⁾En un sens convenable ; par exemple si \mathcal{T} est abélienne ou triangulée.

prouvent indépendamment (et différemment) que le motif de toute courbe non nécessairement lisse ni projective, vu comme objet de la catégorie triangulée des motifs mixtes⁽¹⁷⁾, à coefficients rationnels, est de dimension finie.

3.3. Propriétés de \otimes -nilpotence

PROPOSITION 3.8 (Kimura, O’Sullivan). — *Tout morphisme entre objets M, N de parités différentes est \otimes -nilpotent (d’échelon $\leq \text{kim } M \cdot \text{kim } N + 1$).*

L’argument suivant est tiré de [4, 9.1.9]. La donnée d’un morphisme $f : M \rightarrow N$ équivaut à celle d’un morphisme $\mathbf{1} \rightarrow M^\vee \otimes N$, ce qui nous ramène au cas où $M = \mathbf{1}$ et N est impair. Le morphisme $f^{\otimes n} : \mathbf{1} \rightarrow N^{\otimes n}$ est alors invariant sous \mathfrak{S}_n , donc se factorise à travers $S^n N$. Pour $n = \text{kim } N + 1$, on trouve 0.

COROLLAIRE 3.9. — *Pour tout objet \widetilde{M} de dimension finie dans $\mathcal{T} / \mathbb{Q}\overline{0}$, la décomposition $\widetilde{M}_+ \oplus \widetilde{M}_-$ en pair et impair est unique.*

C’est immédiat.

COROLLAIRE 3.10. — *Tout objet M dont l’image \widetilde{M} dans $\mathcal{T} / \mathbb{Q}\overline{0}$ est de dimension finie dans $\mathcal{T} / \mathbb{Q}\overline{0}$ est lui-même de dimension finie. La décomposition $M_+ \oplus M_-$ en pair et impair n’est pas unique en général, mais les classes d’isomorphie de M_+ et de M_- respectivement sont uniques. En particulier, un objet à la fois pair et impair est nul.*

L’argument est le même que celui vu en 2.11. Cela découle du fait que $\mathbb{Q}\overline{0}(M, M)$ est un nil-idéal. L’idempotent définissant la partie paire de \widetilde{M} se relève en un idempotent de M . Que cet idempotent définisse « la » partie paire de M et que cette partie paire soit unique à isomorphisme près découle de ce que le \otimes -foncteur plein $\mathcal{T}_{\text{kim}} \rightarrow (\mathcal{T} / \mathbb{Q}\overline{0})_{\text{kim}}$ est conservatif.

COROLLAIRE 3.11 ([4], 9.2.1)

1) *Soit \mathcal{T}_{kim} la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} formée des objets de dimension finie. C’est une sous-catégorie F -tensorielle de Kimura-O’Sullivan.*

2) *Son image dans $\mathcal{T} / \mathbb{Q}\overline{0}$ n’est autre que $(\mathcal{T} / \mathbb{Q}\overline{0})_{\text{kim}}$. Elle admet une $\mathbb{Z}/2$ -gradation canonique, compatible à la structure monoïdale, qui induit la décomposition de chaque objet en pair et impair.*

3) *En changeant le signe de la contrainte de commutativité (tressage) de $(\mathcal{T} / \mathbb{Q}\overline{0})_{\text{kim}}$ suivant la règle de Koszul, on obtient une nouvelle catégorie F -tensorielle dont tout objet est pair.*

⁽¹⁷⁾Par exemple celle construite par V. Voevodsky.

Le lemme 3.7 montre que \mathcal{T}_{kim} et $(\mathcal{T}/\sqrt[0]{0})_{\text{kim}}$ ont toutes les propriétés d'une catégorie F -tensorielle, sauf peut-être la pseudo-abélianité non encore démontrée. Mais cette dernière ainsi que les autres assertions découlent aisément du corollaire précédent.

Exemple 3.12. — Pour $\mathcal{T} = M_{\text{hom}}(k)$, \mathcal{T}_{kim} est formée des motifs M pour lesquels l'idempotent (de Künneth) π_M^+ de $H(M)$ d'image la partie paire de la cohomologie provient d'un endomorphisme de M . On note $M_{\text{hom}}^\pm(k)$ cette catégorie de Kimura-O'Sullivan.

L'une des conjectures standard prédit que $M_{\text{hom}}^\pm(k) = M_{\text{hom}}(k)$. Par [25], on sait du moins que c'est le cas si H est la cohomologie ℓ -adique (ou cristalline) et si k est algébrique sur \mathbf{F}_p , $p \neq \ell$.

3.4. Propriétés de nilpotence

Soient \mathcal{T} une catégorie F -tensorielle, \mathcal{N} son \otimes -idéal maximal, et $\overline{\mathcal{T}}$ le quotient \mathcal{T}/\mathcal{N} . Pour tout objet M de \mathcal{T} , notons \overline{M} son image dans $\overline{\mathcal{T}}$. Notons ι_M l'isomorphisme $\mathcal{T}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes M) \cong \mathcal{T}(M, M)$ et ε_M l'évaluation $M \otimes M^\vee \rightarrow \mathbf{1}$.

LEMME 3.13. — *Soit M un objet pair ou impair. Alors pour tout $f \in \mathcal{N}(M, M)$, $f^{\text{kim } M+1} = 0$ ⁽¹⁸⁾.*

La preuve repose sur des calculs formels de traces dans \mathcal{T} . On a une formule du type suivant ⁽¹⁹⁾ :

$$\iota_M((\text{id}_{M^\vee} \otimes \varepsilon_{M^{\otimes n-1}} \otimes \text{id}_M) \circ (\iota_{M^{\otimes n}}^{-1}(S_\lambda f))) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t_{\lambda, \sigma} f^{\ell(\sigma)},$$

où $\ell(\sigma)$ est la longueur du cycle de σ ayant 1 dans son support, et où $t_{\lambda, \sigma}$ est un nombre rationnel (explicite) si $\ell(\sigma) = n$, et un nombre rationnel multiplié par un produit de traces de puissances non nulles de f si $\ell(\sigma) < n$. Si $f \in \mathcal{N}(M, M)$, les traces en question sont nulles, et le second membre se réduit à $(\sum_{\sigma \text{ cyclique}} t_{\lambda, \sigma}) f^n$. Pour $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ ou $\lambda = (n)$, il s'avère que le coefficient $\sum_{\sigma \text{ cyclique}} t_{\lambda, \sigma}$ est non nul (il vaut $(-1)^{n-1}/n$ et $1/n$ respectivement).

Prenons $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ si M est pair, et $\lambda = (n)$ si M est impair, avec $n = \text{kim } M + 1$. Alors $S_\lambda f = 0$, donc le membre de gauche de la formule s'annule, et l'on obtient $f^{\text{kim } M+1} = 0$.

THÉORÈME 3.14 ([4]). — *Si M est de dimension finie, $\mathcal{N}(M, M)$ est un idéal nilpotent, d'échelon borné en fonction de $\text{kim } M$. En outre, $\overline{\mathcal{T}}(\overline{M}, \overline{M})$ est une F -algèbre semi-simple de dimension finie ⁽²⁰⁾.*

⁽¹⁸⁾ On peut en fait remplacer $\text{kim } M + 1$ par $\text{kim } M$, comme l'ont remarqué Jannsen (cf. § 10 de la version récente de [26]) et O'Sullivan (cf. 3.22 ci-dessous).

⁽¹⁹⁾ Dans le cas des motifs, cette formule apparaît dans [26], dans le langage des correspondances ; elle est prouvée en général dans [4, 7.2.6].

⁽²⁰⁾ Des énoncés similaires, un peu plus faibles, ont aussi été obtenus par Kimura (dans le cas des motifs) et par O'Sullivan.

Soit $M = M_+ \oplus M_-$ une décomposition en pair et impair. On décompose alors tout endomorphisme en $f = f_+ + f_- + f_\pm$, où f_+ est le terme préservant M_+ , f_- le terme préservant M_- , $f_+f_- = f_-f_+ = 0$. Un monôme typique intervenant dans le développement de f^n est de la forme

$$m = f_{\varepsilon_1}^{k_1} \circ f_\pm \circ f_{\varepsilon_2}^{k_2} \circ f_\pm \circ \cdots \circ f_\pm \circ f_{\varepsilon_r}^{k_r}$$

avec $\varepsilon_i \in \{+, -\}$.

Supposons $f \in \mathcal{N}(M, M)$. D'après le lemme précédent, on a alors $m = 0$ dès que l'un des k_i dépasse $\text{kim } M$. D'autre part, d'après la proposition 3.8, on a $f_\pm^{\otimes N} = 0$ dès que N dépasse $(\text{kim } M)^2$, ce qui implique que $m = 0$ dès que le nombre de fois où f_\pm apparaît est $> (\text{kim } M)^2$.

Ceci montre que $\mathcal{N}(M, M)$ est un nil-idéal d'échelon borné en fonction de $\text{kim } M$. Grâce à un théorème de Nagata-Higman ([17], voir aussi [4, 7.2.8]), il résulte de là que $\mathcal{N}(M, M)$ est un idéal nilpotent d'échelon borné en fonction de $\text{kim } M$.

Pour voir que $\overline{\mathcal{T}}(\overline{M}, \overline{M})$ est semi-simple de dimension finie sur F , il est loisible de remplacer \mathcal{T} par $\overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$, puis de changer le tressage comme en 3.11.3), ce qui nous ramène au cas pair. Soient f_1, \dots, f_n des endomorphismes de M linéairement indépendants sur F . Compte tenu de l'hypothèse $\mathcal{N} = 0$, ils définissent un facteur direct $\mathbf{1}^n$ de $M^\vee \otimes M$. On en déduit que $n \leq \text{rg } M^2$, d'où $\dim_F \mathcal{T}(M, M) \leq (\text{rg } M)^2 < \infty$. Le radical $\mathcal{R}(M, M)$ est donc nilpotent, donc formé d'éléments de trace nulle; ainsi $\mathcal{R}(M, M) \subseteq \mathcal{N}(M, M) = 0$, et $\mathcal{T}(M, M)$ est semi-simple.

COROLLAIRE 3.15. — *Tout idempotent (resp. tout système orthogonal d'idempotents) de \overline{M} se relève en un idempotent (resp. en un système orthogonal d'idempotents) de M .*

COROLLAIRE 3.16

1) $\overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$ est abélienne semi-simple et le foncteur plein $\mathcal{T}_{\text{kim}} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$ est conservatif.
 2) Deux objets de \mathcal{T}_{kim} sont isomorphes si leurs images dans $\overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$ le sont. En particulier, \mathcal{T}_{kim} n'a pas d'objet fantôme, c'est-à-dire d'objet non nul qui devient nul dans $\mathcal{T}_{\text{kim}} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$.

1) En effet, $\overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$ est semi-simple en vertu de 3.14 et pseudo-abélienne en vertu de 3.15, donc abélienne semi-simple. Pour la conservativité du foncteur plein $\mathcal{T}_{\text{kim}} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$, il suffit de vérifier que tout endomorphisme de M qui induit l'identité sur \overline{M} est un automorphisme, ce qui est clair puisque $\mathcal{N}(M, M)$ est nilpotent.

2) résulte de ce que $\mathcal{T}_{\text{kim}} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$ est plein et conservatif.

COROLLAIRE 3.17. — *Supposons M de dimension finie. Alors M est pair (resp. impair) si et seulement si \overline{M} l'est dans $\overline{\mathcal{T}}$.*

Cela découle de ce que $M \in \mathcal{T}_{\text{kim}}$ et de la conservativité de $\mathcal{T}_{\text{kim}} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$.

COROLLAIRE 3.18. — *Tout objet M de \mathcal{T}_{kim} est somme d'objets indécomposables; M est indécomposable si et seulement si son image \overline{M} dans $\overline{\mathcal{T}}_{\text{kim}}$ est irréductible.*

COROLLAIRE 3.19. — *Supposons $M \in \mathcal{T}$ pair ou bien impair. Si $\text{rg } M = 0$, $M = 0$. Si $\text{rg } M = 1$ ou -1 , M est inversible (eu égard à \otimes).*

Modulo \mathcal{N} , c'est clair. On remonte à M par nilpotence de $\mathcal{N}(M, M)$.

COROLLAIRE 3.20. — *Pour tout objet $M = M_+ \oplus M_-$ de \mathcal{T} , $\text{kim } M = \text{rg } M_+ - \text{rg } M_-$.*

L'inégalité \geq résulte de 3.6 et 3.10. L'inégalité inverse dit que $\wedge^{\text{rg } M_+} M_+ \otimes S^{\text{rg } M_-} M_- \neq 0$. Or $\wedge^{\text{rg } M_+} M_+$ (resp. $S^{\text{rg } M_-} M_-$) est pair (resp. impair) de rang 1 (resp. -1), donc inversible d'après 3.19.

COROLLAIRE 3.21 ([41]). — *Supposons M pair de dimension m . Alors il existe un \otimes -foncteur $\text{Rep}_F GL(m) \rightarrow \mathcal{T}$ qui envoie la représentation standard de $GL(m)$ sur M .*

(Il y a un énoncé correspondant pour les objets impairs, en remplaçant $\text{Rep}_F GL(m)$ par $\text{Rep}_F(GL(-m), -\text{id})$.)

Cela suit de 3.19. Le point est que $\text{Rep}_F GL(m)$ est la catégorie F -tensorielle obtenue à partir de la catégorie monoïdale symétrique rigide librement engendrée par un objet V en passant à l'enveloppe pseudo-abélienne, en tuant $\wedge^{m+1} V$ et en inversant $\wedge^m V$ (la démonstration de ce fait se ramène au résultat classique selon lequel l'homomorphisme canonique $F[\mathfrak{S}_n] \rightarrow \text{End}_{GL(m)}(V^{\otimes n})$ est bijectif pour $n \leq m$, et surjectif pour $n > m$ de noyau engendré par l'antisymétriseur $c_{(1, \dots, 1)}$ (qui induit \wedge^{m+1})).

Pour tout n et tout endomorphisme f d'un objet M de \mathcal{T} (non nécessairement pair), on a la formule $\text{tr}(\wedge^n(1_M + f)) = \sum_{i=0}^n \text{tr}(\wedge^i f)$, d'où, en étendant les scalaires de F à $F(t)$:

$$\text{tr}(\wedge^n(1_M - tf)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(\wedge^i f) t^i,$$

cf. [4, 7.2.5]. Pour M pair de rang m , $\wedge^m M$ est inversible d'après ce qui précède, donc $\wedge^m(1_M - tf)$ s'identifie à un polynôme $P_f(t)$, égal à $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{tr}(\wedge^i f) t^i \in F[t]$, et appelé *polynôme caractéristique* de f .

COROLLAIRE 3.22 (Cayley-Hamilton-O'Sullivan). — *Pour tout endomorphisme f d'un objet pair, on a $P_f(f) = 0$.*

Par le corollaire précédent, cela résulte du théorème de Cayley-Hamilton usuel.

Le résultat suivant est un complément à 3.14 dans le « cas pair » :

THÉORÈME 3.23 ([4], 8.2.4). — *Soit \mathcal{T} une catégorie F -tensorielle. On suppose que la dimension de tout objet est un entier naturel. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *tout objet est pair,*
- ii) *\mathcal{T}/\mathcal{N} est tannakienne semi-simple sur F , et pour tout $M \in \mathcal{T}$, $\mathcal{N}(M, M)$ est un idéal nilpotent,*
- iii) *$\mathcal{R} = \mathcal{N}$,*
- iv) *il n'y a pas d'objet fantôme dans \mathcal{T} .*

Remarque 3.24. — Dans l'exemple 3.5, aucune de ces conditions n'est vérifiée, bien que $\overline{\mathcal{T}} \cong \text{Vec}_F$. Que M soit annulé par un foncteur de Schur ne suffit donc pas à entraîner la nilpotence de $\mathcal{N}(M, M)$. Cette propriété met à part les puissances extérieures et symétriques parmi tous les foncteurs de Schur.

3.5. Le théorème de scindage

THÉORÈME 3.25 (André-Kahn). — *Soit \mathcal{T} une catégorie F -tensorielle. Supposons que, pour tout objet M de \mathcal{T} , $\mathcal{N}(M, M)$ soit un idéal nilpotent (ce qui est le cas notamment si \mathcal{T} est de Kimura-O'Sullivan par 3.14), et que $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/\mathcal{N}$ soit semi-simple. Alors le \otimes -foncteur de projection $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}$ admet une section σ (comme \otimes -foncteur), qui est unique à isomorphisme près.*

Ce résultat est un analogue \otimes -catégorique du théorème classique de Wedderburn-Malcev affirmant que pour toute F -algèbre associative A dont le radical est nilpotent et dont le quotient \overline{A} par le radical est semi-simple (ce qui est le cas notamment si A est de dimension finie sur F), l'homomorphisme $A \rightarrow \overline{A}$ admet une section, unique à conjugaison près.

La preuve de [4] procède par approximations successives, partant d'une section « ensembliste », et la corrigeant petit à petit pour en faire 1) une section fonctorielle, puis 2) une section monoïdale; enfin 3) on prouve que toute section monoïdale est compatible à la contrainte de commutativité (tressage).

Elle est très longue et nous ne pouvons en dire ici que quelques mots.

Le pas 1) s'inspire de la preuve de Hochschild du théorème de Wedderburn, basée sur le fait que le H^1 (de Hochschild) d'une F -algèbre semi-simple est nul (la cohomologie de Hochschild a été étendue aux catégories F -linéaires par B. Mitchell [36]). Ceci fournit une section fonctorielle σ . Pour le pas 2), on montre que dans des gradués convenables associés aux puissances du radical, $\sigma(f \otimes g) - \sigma(f) \otimes \sigma(g)$ a la propriété de 2-cocycle, puis que c'est un 2-cobord en utilisant le fait que le H^2 du monoïde libre sur les classes d'isomorphisme d'objets de \mathcal{T} est nul. Ceci permet de corriger σ par approximations successives, et d'en faire une section monoïdale. Le pas 3) repose sur un calcul de cocycles similaire.

Ce théorème s'applique notamment à $\text{CHM}(k)^{\text{ab}}$, et fournit une section (fonctorielle monoïdale symétrique) de la projection $\text{CHM}(k)^{\text{ab}} \rightarrow M_{\text{num}}^{\text{ab}}$, unique à isomorphisme près. D'après O'Sullivan, elle est même unique à isomorphisme unique près⁽²¹⁾.

3.6. La stratégie de O'Sullivan

Dans le cas où \mathcal{T} est de Kimura-O'Sullivan, O'Sullivan a proposé indépendamment une démonstration complètement différente du théorème de scindage [40], [41]. L'intérêt majeur de cette preuve est qu'elle conduit à un théorème de structure pour les catégories de Kimura-O'Sullivan, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

⁽²¹⁾Ceci est dû à la structure d'algèbre de Hopf du motif de Chow d'une variété abélienne.

En voici les grandes lignes, en supposant pour simplifier que tout objet est pair (cf. 3.11), de sorte que \overline{T} est tannakienne semi-simple, et qu'il existe un foncteur fibre à valeurs dans Vec_F , de sorte $\overline{T} \cong Rep_F G_T$ pour un certain groupe pro-réductif G_T sur F (c'est par exemple le cas si F est algébriquement clos).

Soit G un groupe pro-réductif sur F . Si A est une G -algèbre commutative (c'est-à-dire une algèbre commutative dans la \otimes -catégorie $REP_F G$ des Ind-objets de $Rep_F G$), on note $X = \text{Spec } A$ le G -schéma affine sur F correspondant, et $Vec(G, X)$ la catégorie F -tensorielle des fibrés vectoriels équivariants sur X . On a un \otimes -foncteur évident $\mathcal{O}_X \otimes - : Rep_F G \rightarrow Vec(G, X)$. On peut démontrer que tout objet de $Vec(G, X)$ est facteur direct d'un objet dans l'image de ce foncteur.

Exemple 3.26. — Prenons $G = \mathbf{G}_m$, agissant sur $A = F[X, Y]$ de manière standard (X, Y en poids 1). Alors $Vec(\mathbf{G}_m, \mathbf{A}_F^2)$ est équivalente à la catégorie F -tensorielle $Vec(\mathbf{P}_F^1)$ des fibrés vectoriels sur \mathbf{P}_F^1 . La représentation de dimension 1 et de poids i de \mathbf{G}_m correspond à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(i)$, et tout objet de $Vec(\mathbf{P}_F^1)$ est somme directe d'objets du type $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(i)$, $i \in \mathbb{Z}$ (Grothendieck).

La preuve de O'Sullivan repose sur les trois lemmes suivants.

LEMME 3.27. — Soit $\Sigma : Rep_F G \rightarrow \mathcal{T}$ un \otimes -foncteur vers une catégorie F -tensorielle \mathcal{T} . Alors il existe un G -schéma affine $X = \text{Spec } A$ sur F , et un \otimes -foncteur pleinement fidèle $S : Vec(G, X) \rightarrow \mathcal{T}$ tel que $\Sigma = S \circ (\mathcal{O}_X \otimes -)$. Le couple (X, S) est universel parmi ceux réalisant $\Sigma = S \circ (\mathcal{O}_X \otimes -)$.

Par semi-simplicité de $Rep_F G$, Σ admet un Ind-adjoint à droite $\Theta : \mathcal{T} \rightarrow REP_F G$, et $A = \Theta(\mathbf{1})$ est automatiquement une G -algèbre, dont on note X le spectre. On définit alors S sur les objets en envoyant $\mathcal{O}_X \otimes M$ sur $\Sigma(M)$. Pour définir S sur les morphismes, on utilise les isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} Vec(G, X)(\mathcal{O}_X \otimes M, \mathcal{O}_X \otimes N) &\cong REP_F G(M \otimes N^\vee, A) \\ &\cong \mathcal{T}(\Sigma(M \otimes N^\vee), \mathbf{1}) \cong \mathcal{T}(\Sigma(M), \Sigma(N)). \end{aligned}$$

L'universalité du couple (X, S) se vérifie sans difficulté.

On notera que $\mathcal{T}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = F \Leftrightarrow Vec(G, X)(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = F \Leftrightarrow A^G = F$.

LEMME 3.28. — On suppose $A^G = F$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $X = \text{Spec } A$ est un G -espace homogène,
- ii) X n'a pas de sous-schéma fermé $\neq X$ stable sous G ,
- iii) $Vec(G, X)$ est semi-simple.

L'équivalence de i) et ii) est due à A. Magid [34]. Prouvons ii) \Leftrightarrow iii). L'hypothèse $A^G = F$ permet d'appliquer 3.23, qui montre que $\mathcal{R} = \mathcal{N}$ dans $Vec(G, X)$. Il suit que $Vec(G, X)$ est semi-simple si et seulement si tout morphisme non nul $M \rightarrow \mathbf{1} = \mathcal{O}_X$ dans $Vec(G, X)$ admet une section. Par ailleurs, ii) $\Leftrightarrow A$ est simple \Leftrightarrow tout morphisme

non nul $M \rightarrow \mathcal{O}_X$ dans $\text{Vec}(G, X)$ est un épimorphisme. Or tout tel épimorphisme admet une section : le morphisme canonique $\mathbf{1} = F \rightarrow A$ dans la catégorie Ind-semi-simple $\text{Rep}_F G$ se relève en un morphisme $F \rightarrow M$, donc l'automorphisme identique de $\mathbf{1} = \mathcal{O}_X$ dans $\text{Vec}(G, X)$ se relève en un morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow M$.

LEMME 3.29. — Soient $\iota : \overline{X} \hookrightarrow X$ une G -immersion fermée de G -schémas affines sur F , \overline{X} étant homogène, et $X = \text{Spec } A$ vérifiant $A^G = F$. Alors ι admet une G -rétraction.

Ce lemme est une variante du théorème du « slice étale » de D. Luna [32, Cor. 2]. Une réduction assez délicate permet de se ramener au cas où G et l'algèbre A sont de type fini. On montre alors que A est complète vis-à-vis de l'idéal de \overline{X} dans X , ce qui permet de se ramener ensuite au cas où cet idéal est de carré nul. Comme $\overline{X} = \text{Spec } \overline{A}$ est homogène, donc lisse sur F , il existe des sections $\overline{A} \rightarrow A$ de la projection (non nécessairement G -équivariantes). De plus, il est clair que ces sections forment un espace affine sur lequel G agit. Comme G est réductif, son action a un point fixe, d'où l'existence d'une section équivariante.

Indiquons pour finir comment l'existence d'une section σ de $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}$ découle de ces lemmes, sous l'hypothèse simplificatrice que tout objet de \mathcal{T} est pair et que $\overline{\mathcal{T}} \cong \text{Rep}_F G_{\mathcal{T}}$. D'après 3.21, il existe un \otimes -foncteur essentiellement surjectif $\text{Rep}_F G \rightarrow \mathcal{T}$, où G est un produit de groupes linéaires. En appliquant 3.27 à cette situation, on obtient $X = \text{Spec } A$ et une \otimes -équivalence $\text{Vec}(G, X) \cong \mathcal{T}$. Le quotient \overline{A} de A par un G -idéal maximal est simple, donc \overline{X} est homogène et $\text{Vec}(G, \overline{X})$ est semi-simple en vertu de 3.28 appliqué à $\overline{X} = \text{Spec } \overline{A}$. Il suit que $\text{Vec}(G, X) \rightarrow \text{Vec}(G, \overline{X})$ induit $\overline{\mathcal{T}} \cong \text{Vec}(G, X)/\mathcal{N} \cong \text{Vec}(G, \overline{X})$. Toute G -rétraction de $\overline{X} \hookrightarrow X$ comme dans 3.29 induit une section de $\text{Vec}(G, X) \rightarrow \text{Vec}(G, \overline{X})$, d'où un quasi-inverse à droite de π , qu'on modifie en une vraie section σ .

3.7. Objets de dimension finie et super-fibrés vectoriels équivariants

Une fois connue l'existence d'une section $\overline{\mathcal{T}} \cong \text{Rep}_F G_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ de la projection π , on peut lui appliquer le lemme 3.27. On en déduit :

THÉORÈME 3.30 (O'Sullivan [40]). — Soit \mathcal{T} une catégorie F -tensorielle dans laquelle tout objet est pair. Supposons en outre $\overline{\mathcal{T}}$ neutre, c'est-à-dire l'existence d'une équivalence $\overline{S} : \text{Rep}_F G \cong \overline{\mathcal{T}}$ pour un groupe pro-réductif G .

Alors il existe un G -schéma affine $X = \text{Spec } A$ muni d'un F -point fixe x , avec $A^G = F$, et une équivalence $S : \text{Vec}(G, X) \cong \mathcal{T}$ telle que $\overline{S} \circ x^* = \pi \circ S$. Le triplet (X, x, S) est unique à isomorphisme près.

Exemple 3.31. — Même dans le cas classique où \mathcal{T} est tannakienne neutre, cela conduit à une description tout à fait nouvelle de telles catégories. Par exemple, si $\mathcal{T} = \text{Rep}_F \mathbf{G}_a$, il découle du théorème de Jacobson-Morosov que $G = SL(2)$, et on

vérifie que $Rep_F \mathbf{G}_a \cong Vec(SL(2), \mathbf{A}_F^2)$. Le \otimes -foncteur π correspond à prendre la fibre en $0 \in \mathbf{A}^2$.

Plus généralement, le théorème de scindage permet d'associer à tout F -schéma en groupes affine H son *enveloppe pro-réductive* $G = {}^pRed(H)$, qui est un groupe pro-réductif bien défini à conjugaison près tel que $(Rep_F H)/\mathcal{N} \cong Rep_F G$ [4], [40]. Les classes d'isomorphismes de représentations indécomposables de H sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G . Le théorème précédent montre de plus l'existence d'un G -schéma affine X pointé tel que $Rep_F H \cong Vec(G, X)$.

Il n'est pas difficile de généraliser 3.30 au cas où \mathcal{T} est une catégorie de Kimura-O'Sullivan quelconque. Il suffit pour cela de remplacer A par une algèbre commutative dans $Ind \overline{\mathcal{T}}$, et $Vec(G, Spec A)$ par la catégorie $Proj_A$ des A -modules projectifs sur les objets de $\overline{\mathcal{T}}$ (c'est-à-dire l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie dont les objets sont ceux de $\overline{\mathcal{T}}$ et les morphismes entre deux objets M et N définis par $Hom_A(A \otimes M, A \otimes N)$). C'est une catégorie F -tensorielle⁽²²⁾, et il y a un \otimes -foncteur évident $A \otimes - : \overline{\mathcal{T}} \rightarrow Proj_A$ qui est l'identité sur les objets. Tout homomorphisme $a : A \rightarrow B$ détermine un \otimes -foncteur $a_* : Proj_A \rightarrow Proj_B$.

On a alors la variante suivante du théorème précédent :

VARIANTE 3.32. — *Soit \mathcal{T} une catégorie de Kimura-O'Sullivan. Alors il existe une algèbre commutative A dans $Ind \overline{\mathcal{T}}$ munie d'une augmentation $a : A \rightarrow \mathbf{1}$, telle que $Ind \overline{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, A) = F$, et une équivalence $S : Proj_A \cong \mathcal{T}$ telle que $a_* = \pi \circ S$. Le triplet (A, a, S) est unique à isomorphisme près.*

Les propriétés de \mathcal{T} sont fidèlement décrites en termes de A . O'Sullivan en a dressé un dictionnaire dont voici un extrait :

<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">A</div> <p>idéal de A</p> <p>l'idéal maximal de A (le noyau de a)</p> <p>$\sqrt{0}$ (nilradical de A)</p> <p>A est intègre</p> <p>$\sqrt{0} = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ premier}} \mathfrak{p}$</p>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">$\mathcal{T} \cong Proj_A$</div> <p>\otimes-idéal de \mathcal{T}</p> <p>\mathcal{N}</p> <p>$\otimes \sqrt{0}$</p> <p>\mathcal{T} admet un super-foncteur fibre, i.e. un \otimes-foncteur fidèle $\mathcal{T} \rightarrow sVec_K$</p> <p>$\otimes \sqrt{0}$ est l'intersection des noyaux des \otimes-foncteurs $\mathcal{T} \rightarrow sVec_K$ (pour diverses extensions K/F)</p>
---	--

Revenons enfin aux motifs, et ne les quittons plus. O'Sullivan déduit du dernier article de ce dictionnaire la forme renforcée suivante de 2.11 :

⁽²²⁾Si $\overline{\mathcal{T}} = Rep_F(G, \varepsilon)$, $Proj_A$ n'est autre que la catégorie F -tensorielle des super-fibrés vectoriels sur $Spec A$ équivariants sous G et tels que l'action de ε définisse la parité.

THÉORÈME 3.33 (O’Sullivan). — *La conjecture de Voevodsky équivaut à celle de Kimura-O’Sullivan jointe à la conjecture suivante : tout \otimes -foncteur $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}} \rightarrow s\mathrm{Vec}_K$ se factorise à travers l’équivalence numérique.*

Spécialisant au cas de la sous-catégorie $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$, cela montre que la conjecture de Voevodsky pour les variétés abéliennes équivaut à une version forte de la conjecture standard $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$ (qui est connue sur les variétés abéliennes en caractéristique 0, pour une cohomologie classique [31]) : le noyau de *tout* \otimes -foncteur $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \rightarrow s\mathrm{Vec}_K$ est $\mathcal{I}_{\mathrm{num}}$, question ouverte.

4. APPLICATIONS

Il est temps de tirer les fruits de toutes ces considérations abstraites. Nous allons décliner divers résultats ou perspectives plus ou moins concrets qu’elles offrent en théorie des cycles algébriques.

4.1. Motifs de surfaces

Considérons à nouveau la décomposition de Murre du motif de Chow d’une surface projective lisse X (cf. 2.2) : $\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_0^4 \mathfrak{h}^n(X)$, avec

$$\mathfrak{h}^0(X) \cong \mathbf{1}, \quad \mathfrak{h}^1(X) \cong \mathfrak{h}^3(X)(1) \cong \mathfrak{h}^1(\mathrm{Alb}_X), \quad \mathfrak{h}^2(X) \cong (\mathbf{1}(-1))^{\mathrm{rg}\, \mathrm{NS}(X)} \oplus \mathfrak{t}^2(X).$$

On a $\mathrm{Ker}\, \mathrm{AJ}_X^2 \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{CH}^2(\mathfrak{h}^2(X)) = \mathrm{CH}^2(\mathfrak{t}^2(X))$.

Comme $\mathfrak{h}_{\mathrm{hom}}^2(X)$ est un objet pair de $M_{\mathrm{hom}}(k)$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{num}}^2(X)$ est un objet pair de $\mathrm{CHM}(k)/\mathcal{N}$. Si $\mathfrak{h}^2(X)$ est de dimension finie (ce qui revient à dire que $\mathfrak{h}(M)$ l’est, compte tenu de 2.8), il suit de 3.17 que $\mathfrak{h}^2(X)$ est pair et de 3.20 que $\wedge^{t_2+1} \mathfrak{h}^2(X) = 0$, en notant $t_2 = b_2 - \mathrm{rg}\, \mathrm{NS}$ la dimension de la partie transcendante de $H^2(X)$. On en déduit comme dans 1.2 que pour tout n -uplet de cycles $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans le noyau de $\mathrm{AJ}_X^2 \otimes \mathbb{Q}$, on a $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = 0$ dès que $n > t_2$.

Si $X = C_1 \times C_2$ est un produit de courbes de genres respectifs g_1 et g_2 , on a $t_2 \leq 4g_1 \cdot g_2$, et on sait que $\mathfrak{t}^2(X) \subset \mathfrak{h}^1(C_1) \otimes \mathfrak{h}^1(C_2)$ est de dimension finie, d’où l’assertion de dimensionalité finie énoncée en 1.2⁽²³⁾.

Revenons à notre point de départ, le théorème de Mumford selon lequel, si X est une surface sur un corps k assez gros (par exemple \mathbb{C}), l’injectivité de AJ_X^2 implique que $H^2(X)$ est engendré par les classes de diviseurs.

S. Bloch *conjecture la réciproque, sur un corps k quelconque* [8], [9]. En termes motiviques, cette conjecture revient à dire que $t_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{CH}^2(\mathfrak{t}^2(X)) = 0$.

Si $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie, on a vu que $\mathfrak{t}^2(X)$ est alors pair, donc $t_2 = 0 \Rightarrow \mathfrak{t}^2(X) = 0$ (3.19), et a fortiori $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{t}^2(X)) = 0$. La réciproque est d’ailleurs vraie [16] :

⁽²³⁾Dans [26, 10.9], Kimura affine la borne de $4g_1g_2$ à g_1g_2 .

THÉORÈME 4.1. — *Soit X une surface avec $b_2 = \text{rg NS}$. Alors X vérifie la conjecture de Bloch si et seulement si $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie.*

Par cette voie, V. Guletskii et C. Pedrini [15] donnent une preuve uniforme de la conjecture de Bloch lorsque X n'est pas de type général (voir aussi [50, 23.1.4] pour un exemple de type général) : dans tous ces cas, $\mathfrak{h}(X) \in \text{CHM}(k)^{\text{ab}}$. Par ailleurs, M. Saito [44] montre, du moins sur $k = \mathbb{C}$, que les conditions de 4.1 équivalent aussi à $(\mathcal{N}(\mathfrak{h}(X), \mathfrak{h}(X)))^3 = 0$.

On trouvera dans [26] d'autres applications concrètes de ces idées aux groupes de Chow, dans la même veine.

Un cas ouvert particulièrement intéressant de la conjecture de Bloch est celui des *faux plans projectifs* : surfaces de type général dont le motif homologique est isomorphe à celui de \mathbf{P}^2 . En est-il de même du motif de Chow ? Le fait qu'il s'agisse de surfaces de Shimura (cf. [23]), avec leur pléthore de correspondances de Hecke, pourrait s'avérer utile ici.

4.2. Motifs sur les corps finis

La catégorie \mathbb{Q} -tensorielle des motifs $M_{\sim}(\mathbf{F}_q)_{\mathbb{Q}}$ sur le *corps fini* \mathbf{F}_q (pour une équivalence adéquate \sim arbitraire) a la propriété remarquable de posséder un automorphisme non trivial du \otimes -foncteur identique : l'automorphisme de Frobenius Fr .

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q)$ une variété projective lisse sur \mathbf{F}_q . La conjecture de Tate pour X s'énonce de deux façons équivalentes [48] :

- pour tout entier r , l'ordre du pôle en q^{-r} de la fonction zêta $Z(X, T) \in \mathbb{Q}(T)$ est le rang de $\mathcal{Z}_{\text{num}}^r(X)$,
- pour tout r , l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ sur $H_{\text{ét}}^r(X_{\overline{\mathbf{F}}_q}, \mathbb{Q}_{\ell}(r))$ est semi-simple pour la valeur propre $1^{(24)}$, et l'application classe de cycle ℓ -adique ($\ell \nmid q$)

$$c_{X, \ell}^r : \text{CH}^r(X) \otimes \mathbb{Q}_{\ell} \longrightarrow (H_{\text{ét}}^{2r}(X_{\overline{\mathbf{F}}_q}, \mathbb{Q}_{\ell}(r)))^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)}$$

est *surjective*.

D'autre part, une conjecture de Beilinson [6, 1.0] prédit que l'application classe de cycle est aussi *injective*, et qu'en fait $\text{CH}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathcal{Z}_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}}$.

THÉORÈME 4.2 (Kahn [21]). — *Si le motif de Chow $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie, la conjecture de Tate pour X implique la conjecture de Beilinson pour X .*

La conjecture de Tate est connue pour les produits de courbes elliptiques [47] et pour certaines hypersurfaces de Fermat [48], [24], de même que la conjecture de Kimura-O'Sullivan par 2.8 ; on en déduit :

COROLLAIRE 4.3 ([21]). — *Sur tout produit de courbes elliptiques sur \mathbf{F}_q , $\sim_{\text{rat}} = \sim_{\text{num}}$. De même sur toute hypersurface de Fermat sur \mathbf{F}_q dont le degré divise un nombre de la forme $q^m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.*

⁽²⁴⁾ i.e. l'homomorphisme naturel des invariants vers les coinvariants est un isomorphisme.

Dans [21], B. Kahn va beaucoup plus loin et prouve la conjecture de Lichtenbaum [30] sur les valeurs spéciales de la fonction zêta de telles variétés.

Prouvons 4.2, c'est-à-dire que sous la conjecture de Tate pour X et en supposant $\mathfrak{h}(X) \in \text{CHM}(\mathbf{F}_q)_{\text{kim}}$, on a $\text{CHM}(\mathbf{F}_q)(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r)) = M_{\text{num}}(\mathbf{F}_q)(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r))$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Par 3.18, on peut remplacer $\mathfrak{h}(X)(r)$ par un facteur direct $M \neq 0$ indécomposable; le motif numérique \overline{M} correspondant est alors irréductible. Si $M \cong \mathbf{1}$, la question est réglée puisque $\text{End } \mathbf{1} = \mathbb{Q}$. Supposons donc $M \not\cong \mathbf{1}$ et montrons que $\text{CHM}(\mathbf{F}_q)(\mathbf{1}, M) = 0$. On a $\overline{M} \not\cong \mathbf{1}$ (conservativité du foncteur de passage aux motifs numériques 3.16), et a fortiori le motif homologique M_{hom} attaché à M n'est pas isomorphe à $\mathbf{1}$. Par la conjecture de Tate, ceci entraîne que l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ sur $H_{\text{ét}}(M)$ est non triviale (et semi-simple pour la valeur propre 1). Il est bien connu que l'inverse du Frobenius galoisien $\in \text{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ agit par $\text{Fr}(M_{\text{hom}})$. Ainsi $\text{Fr}(M_{\text{hom}})$ est semi-simple pour la valeur propre 1 et distinct de l'identité. Il suit que $\text{Fr}(\overline{M})$ est distinct de l'identité, et comme \overline{M} est irréductible, $\text{Fr}(\overline{M}) - \text{id}_{\overline{M}}$ est un automorphisme de \overline{M} . Par conservativité du passage aux motifs numériques, $\text{Fr}(M) - \text{id}_M$ est donc un automorphisme de M . Pour tout $f \in \text{CHM}(\mathbf{F}_q)(\mathbf{1}, M)$, on a $\text{Fr}(M)f = f \text{Fr}(\mathbf{1}) = f$, et on conclut que $f = 0$.

Remarque 4.4. — Dans [3], il est démontré que la conjecture standard de type Lefschetz pour les espaces X fibrés en variétés abéliennes sur une courbe projective lisse sur $\overline{\mathbf{F}}_q$ implique la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur \mathbf{F}_q . Compte tenu de 4.2 et de 2.8, elle implique donc aussi la conjecture de Beilinson pour les variétés abéliennes sur \mathbf{F}_q .

Signalons aussi le résultat remarquable suivant, dont la preuve dépasse le cadre modeste de ces notes :

THÉORÈME 4.5 (Kahn [21]). — *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- 1) *la conjecture de Tate vaut pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q)$, et la conjecture de Kimura-O'Sullivan vaut pour $\text{CHM}(\mathbf{F}_q)$,*
- 2) *la conjecture de Tate vaut pour toute variété abélienne sur \mathbf{F}_q , et $\text{CHM}(\mathbf{F}_q)^{\text{ab}} = \text{CHM}(\mathbf{F}_q)$,*
- 3) *les groupes de cohomologie de Lichtenbaum $H_W^i(X, \mathbb{Z}(n))$ sont de type fini pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q)$ et tout $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.*

(D'après le théorème précédent, ces énoncés impliquent aussi la conjecture de Beilinson.)

La cohomologie de Lichtenbaum (« Weil-étale cohomology ») se définit ainsi. Ses coefficients sont les faisceaux étales \mathbb{Z} -équivariants \mathcal{F} sur $X_{\overline{\mathbf{F}}_q}$, l'action de \mathbb{Z} étant donnée par le Frobenius galoisien (on n'exige pas la $\widehat{\mathbb{Z}}$ -équivariance!). La cohomologie de Lichtenbaum est donnée par les foncteurs dérivés de $\mathcal{F} \rightarrow H_W^0(X, \mathcal{F}) := H_{\text{ét}}^0(X_{\overline{\mathbf{F}}_q}, \mathcal{F})^{\mathbb{Z}}$.

4.3. Rationalité de fonctions zêta motiviques

L'une des expressions de la fonction zêta $Z(X, T)$ est

$$Z(X, T) = 1 + |X(\mathbf{F}_q)| T + |S^2(X)(\mathbf{F}_q)| T^2 + \dots$$

(où S^n désigne la puissance symétrique n -ième de X).

Dans [22], M. Kapranov a eu l'idée de considérer l'expression

$$1 + X T + S^2(X) T^2 + \dots$$

pour une variété X quelconque (disons quasi projective pour que les puissances symétriques soient définies) sur un corps k non nécessairement fini. Pour donner un sens précis à cette expression, on se place dans le groupe $K_0(\text{Var}(k))$ quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphismes $[X]$ de k -variétés (non nécessairement projectives ni lisses) par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[X] - [U] - [Z]$ si $X = U \amalg Z$ avec Z fermé dans X , et U l'ouvert complémentaire. Le produit des variétés en fait un anneau commutatif.

On vérifie alors que la formule précédente définit un homomorphisme $Z_{\text{var}}(-, T)$ de $K_0(\text{Var}(k))$ vers le groupe abélien (multiplicatif) $1 + TK_0(\text{Var}(k))[[T]]$. Kapranov montre que pour toute courbe X , $Z_{\text{var}}([X], T)$ est une fonction rationnelle ; si X est projective lisse de genre g , $(1-T)(1-[\mathbf{A}^1]T)Z_{\text{var}}([X], T)$ est un polynôme de degré $2g$.

La question de la rationalité de $Z_{\text{var}}([X], T)$ en général, conjecturée par Kapranov, a été tranchée négativement par M. Larsen et V. Lunts [29]⁽²⁵⁾ : si X est un produit de deux courbes de genre non nul, $Z_{\text{var}}([X], T)$ n'est pas rationnelle.

Plutôt que $K_0(\text{Var}(k))$, on peut prendre comme groupe de coefficients $K_0(M_{\sim}(k))$, quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme $[M]$ d'objets de $M_{\sim}(k)_{\mathbb{Q}}$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[M] - [M'] - [M'']$ avec $M \cong M' \oplus M''$. Le produit tensoriel des motifs en fait un anneau commutatif.

On obtient une variante motivique de la fonction zêta de Kapranov en montrant que l'expression

$$1 + [M] T + [S^2 M] T^2 + \dots$$

définit un homomorphisme $Z_{\text{mot}}(-, T)$ de $K_0(M_{\sim}(k))$ vers le groupe abélien (multiplicatif) $1 + TK_0(M_{\sim}(k))[[T]]$, [2, ch. 13].

PROPOSITION 4.6. — *Si le motif M est de dimension finie au sens de Kimura-O'Sullivan (par exemple si $M \in \text{CHM}(k)^{\text{ab}}$), alors $Z_{\text{mot}}([M], T)$ est rationnelle.*

⁽²⁵⁾La question de la rationalité reste ouverte si l'on localise $K_0(\text{Var}(k))$ en inversant $[\mathbf{A}^1]$ (qui est un diviseur de zéro!).

Supposons que $M = M_+ \oplus M_-$ avec $\wedge^m M_+ = S^m M_- = 0$. Il est clair que $Z_{\text{mot}}([M_-], T)$ est de la forme $1 + TP_-(T)$ où P_- est un polynôme de degré $< m$. Pour $Z_{\text{mot}}([M_+], T)$, on utilise la formule suivante :

$$\sum [S^n M_+] T^n = \frac{1}{\sum [\wedge^n M_+] (-T)^n}$$

et le dénominateur est de la forme $1 - TP_+(T)$ où P_+ est un polynôme de degré $< m$.

COROLLAIRE 4.7. — *La conjecture de Kimura-O'Sullivan implique la rationalité de $Z_{\text{mot}}([M], T)$ pour tout motif de Chow M , et en outre l'égalité $K_0(\text{CHM}(k)) = K_0(M_{\text{num}}(k))$.*

(Pour la seconde assertion, utiliser la conservativité du passage aux motifs numériques.)

Pour plus de détails, notamment sur le lien entre $Z_{\text{var}}(-, T)$ et $Z_{\text{mot}}(-, T)$, voir [2, ch. 13].

Les deux derniers paragraphes sont consacrés à des applications du théorème de scindage 3.25, appliqué d'abord à des motifs homologues, et ensuite à des motifs de Chow.

4.4. Construction inconditionnelle des groupes de Galois motiviques

Rappelons d'abord la construction de Grothendieck des groupes de Galois motiviques, en admettant la conjecture standard $\sim_{\text{hom}} = \sim_{\text{num}}$ (pour une cohomologie H fixée à coefficients dans une extension K/F). Cette conjecture entraîne l'algébricité des projecteurs de Künneth pairs π_X^\pm , ce qui permet de modifier le tressage selon la règle des signes de Koszul. Ceci fait, la catégorie \mathbb{Q} -tensorielle abélienne semi-simple $M_{\text{hom}}(k) = M_{\text{num}}(k)$ est munie d'un \otimes -foncteur fidèle exact vers Vec_K défini par la cohomologie (et encore noté H). Le groupe de Galois motivique $G_{\text{mot}, k}$ est le K -groupe pro-réductif $\text{Aut} H$. Remplaçant $M_{\text{num}}(k)$ par la sous-catégorie tannakienne engendré par un objet $\mathfrak{h}(X)$, on obtient un quotient $G_{\text{mot}}(X)$ de $G_{\text{mot}, k}$, qui est un sous-groupe réductif de $GL(H(X))$.

Un certain nombre de problèmes géométriques faisant intervenir les correspondances algébriques modulo équivalence homologique se traduisent alors en des problèmes de représentations de groupes réductifs, traitables par la théorie classique des poids, cf. e.g. [2, ch. 5, 6, 7, 10].

Pour définir les groupes de Galois motiviques sans avoir à admettre la conjecture standard, on peut utiliser le théorème de scindage monoïdal comme suit [5]. Considérons la catégorie \mathbb{Q} -tensorielle $M_{\text{hom}}^\pm(k)$ introduite en 3.12 (sous-catégorie pleine de $M_{\text{hom}}(k)$ formée des motifs dont le projecteur de Künneth pair est donné par un morphisme de $M_{\text{hom}}(k)$). C'est une catégorie de Kimura-O'Sullivan. On peut modifier le tressage selon la règle de Koszul pour faire en sorte que $M_{\text{hom}}^\pm(k)/\mathcal{N} = M_{\text{num}}^\pm(k)$ soit tannakienne semi-simple. Ceci fait, on dispose du \otimes -foncteur fidèle exact $H : M_{\text{hom}}^\pm(k) \rightarrow \text{Vec}_K$.

Le théorème de scindage fournit une \otimes -section σ de la projection $\pi : M_{\text{hom}}^{\pm}(k) \rightarrow M_{\text{num}}^{\pm}(k)$, unique à isomorphisme près. On définit alors $G_{\text{mot},k}^{\pm}$ comme le K -groupe pro-réductif $\text{Aut}(H \circ \sigma)$. Remplaçant $M_{\text{num}}(k)$ par la sous-catégorie tannakienne engendrée par un objet $\mathfrak{h}(X)$, on obtient un quotient $G_{\text{mot}}(X)$ de $G_{\text{mot},k}^{\pm}$, qui est un sous-groupe réductif de $GL(H(X))$ ⁽²⁶⁾.

Remarque 4.8. — Le composé $H \circ \sigma \circ \pi$ définit une nouvelle cohomologie⁽²⁷⁾, et l'équivalence homologique qui lui est associée n'est autre que l'équivalence numérique. Elle vérifie le théorème de Lefschetz fort si et seulement si la conjecture standard de type Lefschetz est vraie pour H .

4.5. Motifs de Chow vus comme super-fibrés vectoriels équivariants sous le groupe de Galois motivique. Hauteurs

Le théorème de structure 3.32 s'applique en particulier à toute catégorie F -tensorielle de motifs de Chow qui est Kimura-O'Sullivan. Plutôt que de nous limiter à des catégories telles $\text{CHM}(k)_F^{\text{ab}}$, nous prendrons ici le parti d'appliquer 3.32 à $\text{CHM}(k)_F$ tout entière, en supposant la conjecture de Kimura-O'Sullivan vraie, de même (pour simplifier) que la conjecture standard $\sim_{\text{hom}} = \sim_{\text{num}}$. D'après 3.32, il existe une algèbre commutative A dans la catégorie F -tensorielle des Ind-motifs numériques, vérifiant $\text{Ind } M_{\text{num}}(k)_F(\mathbf{1}, A) = F$ et munie d'une augmentation $a : A \rightarrow \mathbf{1}$, ainsi qu'une équivalence $S : \text{Proj}_A \cong \text{CHM}(k)_F$ telle que $a_* = \pi \circ S$. Le triplet (A, a, S) est unique à isomorphisme près. Les équivalences adéquates sont en bijection avec les idéaux de A .

Remarque 4.9. — S'il existe une cohomologie à coefficients dans F , on obtient une équivalence $\overline{S} : \text{Rep}_F(G_{\text{mot},k}, -\text{id}) \cong M_{\text{num}}(k)_F$ (où $-\text{id}$ désigne l'image de -1 par le cocaractère des poids). On est alors dans le « super-analogie » de la situation de 3.30 : il existe un super- $G_{\text{mot},k}$ -schéma affine X bien défini à isomorphisme près (sur lequel l'action de $-\text{id}$ définit la parité) tel que $\text{CHM}(k)_F$ s'identifie à la catégorie F -tensorielle des super-fibrés vectoriels sur X équivariants sous $G_{\text{mot},k}$ (et sur lesquelles l'action de $-\text{id}$ définit la parité). Le super-schéma X a un unique F -point fixe sous $G_{\text{mot},k}$ qui correspond à l'équivalence numérique. Prendre la fibre d'un super-fibré vectoriel équivariant en ce point correspond au passage du motif de Chow au motif numérique associé.

Comprendre la structure de $\text{CHM}(k)_F$ revient donc à comprendre celle de A . À cet égard, O'Sullivan [40] fait les observations suivantes :

- on a la graduation par le poids $A = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} A_i$, qui est une graduation d'algèbre,
- la conjecture de Voevodsky équivaut à dire que $\ker a$ est un nil-idéal,

⁽²⁶⁾Changer σ change ce sous-groupe en un conjugué.

⁽²⁷⁾Mêmes espaces de cohomologie, mais nouvelle application classe de cycles.

– la conjecture de Bloch-Beilinson équivaut à dire que la partie de poids strictement négative de A est nulle. Elle équivaut aussi (*via* 2.13) à dire que $A_0 = \mathbf{1}$ et A est engendrée par A_1 ,

– une version plus fine de la conjecture de Bloch-Beilinson implique que $\mathcal{I}_{\text{hom}}^i = 0$ dès que i dépasse la dimension de Kronecker $d(k)$ de k . Ceci équivaut à $(A_1)^i = 0$ pour $i > d(k)$.

Pour un corps fini, cela donne $A = \mathbf{1}$, et on retrouve la conjecture de Beilinson mentionnée en 4.2.

Pour un corps de nombres, cela donne $A = \mathbf{1} \oplus A_1$. L'échelon de nilpotence dans la conjecture de Voevodsky serait donc 2 dans ce cas.

Par ailleurs, toujours pour k un corps de nombres, et prenant $F = \mathbb{R}$, O'Sullivan traduit l'existence des accouplements de hauteur de Beilinson en l'existence d'un accouplement symétrique $S^2 A_1 \rightarrow \mathbf{1}(-1)$ induisant sur chaque sous-objet de rang fini de A_1 une forme de Weil relativement à la polarisation canonique de $M_{\text{num}}(k)_{\mathbb{R}}$.

RÉFÉRENCES

- [1] Y. ANDRÉ – *Period mappings and differential equations. From \mathbb{C} to \mathbb{C}_p* , MSJ Memoirs, vol. 12, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2003.
- [2] ———, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas & Synthèses, vol. 17, Société Mathématique de France, 2004.
- [3] ———, « Cycles de Tate et cycles motivés sur les variétés abéliennes en caractéristique p », à paraître dans *J. Inst. Math. Jussieu*, 2005.
- [4] Y. ANDRÉ & B. KAHN – « Nilpotence, radicaux et structures monoïdales », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **108** (2002), p. 107–291, et erratum, **113** (2005).
- [5] ———, « Construction inconditionnelle de groupes de Galois motiviques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2002), p. 989–994.
- [6] A. BEILINSON – « Height pairing between algebraic cycles », in *K-theory, Arithmetic and Geometry*, Lect. Notes in Math., vol. 1289, Springer, 1987, p. 27–41.
- [7] S. BLOCH – « Some elementary theorems about algebraic cycles on Abelian varieties », *Invent. Math.* **37** (1976), no. 3, p. 215–228.
- [8] ———, *Lectures on algebraic cycles*, Math. series, vol. IV, Duke Univ., 1980.
- [9] S. BLOCH, A. KAS & D. LIEBERMAN – « Zero-cycles on surfaces with $p_g = 0$ », *Compositio Math.* **33** (1976), p. 135–145.
- [10] P. DELIGNE – « Catégories tannakiennes », in *Grothendieck Festschrift, vol. II*, Progress in Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 111–198.
- [11] ———, « Catégories tensorielles », *Moscow Math. J.* **2** (2002), p. 227–248.
- [12] M. DEMAZURE – « Motifs des variétés algébriques », in *Séminaire Bourbaki (1969/70)*, Lect. Notes in Math., vol. 180, Springer, Paris, 1971, Exp. n° 365, p. 11–38.

- [13] M. GREEN & P. GRIFFITHS – « An interesting 0-cycle », *Duke Math. J.* **119** (2003), p. 261–313.
- [14] V. GULETSKIĬ – « Finite dimensional objects in distinguished triangles », prépublication <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0637>.
- [15] V. GULETSKIĬ & C. PEDRINI – « The Chow motive of the Godeaux surface », in *Algebraic Geometry (in memory of P. Francia)*, de Gruyter, 2002, p. 179–195.
- [16] ———, « Finite dimensional motives and the conjectures of Beilinson and Murre », *K-Theory* **550** (2003), p. 1–21.
- [17] G. HIGMAN – « On a conjecture of Nagata », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **52** (1956), p. 1–4.
- [18] U. JANNSEN – « Motives, numerical equivalence and semi-simplicity », *Invent. Math.* **107** (1992), p. 447–452.
- [19] ———, « Motivic sheaves and filtrations on Chow groups », in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, vol. I, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, American Mathematical Society, 1994, p. 245–302.
- [20] ———, « Equivalence relations on algebraic cycles », in *The arithmetic and Geometry of algebraic cycles, proc. NATO conference (Banff, 1998)*, NATO series, vol. 548, Kluwer, 2000, p. 225–260.
- [21] B. KAHN – « Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série* **36** (2003), no. 6, p. 977–1002.
- [22] M. KAPRANOV – « The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups », prépub. ArXiv AG/0001005, 2000.
- [23] F. KATO – « An overview of p -adic uniformization », in *Period mappings and differential equations. From \mathbb{C} to \mathbb{C}_p* [1], appendice 2.
- [24] T. KATSURA & T. SHIODA – « On Fermat varieties », *Tôhoku Math. J.* **31** (1979), p. 97–115.
- [25] N. KATZ & W. MESSING – « Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields », *Invent. Math.* **23** (1974), p. 73–77.
- [26] S.-I. KIMURA – « Chow motives can be finite-dimensional, in some sense », *Math. Ann.* **331** (2005), p. 173–201.
- [27] S. KLEIMAN – « Algebraic cycles and the Weil conjectures », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, Masson, 1968, p. 359–386.
- [28] ———, « Finiteness theorems for algebraic cycles », in *Actes Congrès intern. math. (Nice, 1970)*, tome 1, Gauthier-Villars, 1970, p. 445–449.
- [29] M. LARSEN & V. LUNTS – « Rationality criteria for motivic zeta-functions », prépub. ArXiv AG/0212158, 2002.
- [30] S. LICHTENBAUM – « Values of zeta functions at non-negative integers », *Lect. Notes in Math.*, vol. 1068, Springer, 1984, p. 127–138.
- [31] D. LIEBERMAN – « Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds », *Amer. J. Math.* **90** (1968), p. 366–374.
- [32] D. LUNA – « Théorème du slice étale », in *Sur les groupes algébriques*, Mém. Soc. Math. France, vol. 33, Société Mathématique de France, 1973, p. 81–105.

- [33] I. MACDONALD – *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [34] A. MAGID – « Equivariant completions of rings with reductive group action », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), p. 173–185.
- [35] C. MAZZA – « Schur functors and motives », Prépublication <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0641>.
- [36] B. MITCHELL – « Rings with several objects », *Adv. in Math.* **8** (1972), p. 1–161.
- [37] D. MUMFORD – « Rational equivalence of zero-cycles on surfaces », *J. Math. Kyoto Univ.* **9** (1969), p. 195–204.
- [38] J. MURRE – « On the motive of an algebraic surface », *J. reine angew. Math.* **409** (1990), p. 190–204.
- [39] ———, « On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety I, II », *Indag. Math.* **4** (1993), p. 177–201.
- [40] P. O’SULLIVAN – *Papiers secrets. Deux lettres à Y. André et B. Kahn, 29/4/02, 12/5/02. Deux projets de notes aux CRAS.*
- [41] ———, « The structure of certain rigid tensor categories », soumis.
- [42] A. ROITMAN – « Rational equivalence of zero-cycles », *Math. USSR-Sb.* **18** (1972), p. 571–588.
- [43] N. SAAVEDRA RIVANO – *Catégories tannakiennes*, Lect. Notes in Math., vol. 265, Springer, 1972.
- [44] M. SAITO – « Bloch’s conjecture and Chow motives », preprint RIMS, 2000.
- [45] P. SAMUEL – « Relations d’équivalence en géométrie algébrique », in *Proc. Internat. Congress Math., 1958*, Cambridge Univ. Press, 1960, p. 470–487.
- [46] A. SHERMENEV – « The motive of an abelian variety », *Functional Anal. Appl.* **8** (1974), p. 47–53.
- [47] M. SPIESS – « Proof of the Tate conjecture for products of elliptic curves over finite fields », *Math. Ann.* **314** (1999), p. 285–290.
- [48] J. TATE – « Conjectures on algebraic cycles in ℓ -adic cohomology », in *Motives (Seattle, WA, 1991), vol. I*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, American Mathematical Society, 1994, p. 71–83.
- [49] V. VOEVODSKY – « A nilpotence theorem for cycles algebraically equivalent to zero », *Internat. Math. Res. Notices* **4** (1995), p. 1–12.
- [50] C. VOISIN – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

Yves ANDRÉ
École Normale Supérieure
D.M.A.
UMR 8553 du CNRS
45 rue d’Ulm
F-75230 Paris Cedex 05
E-mail : yves.andre@ens.fr

**ÉQUATIONS DE CHAMP MOYEN POUR LA DYNAMIQUE
QUANTIQUE D'UN GRAND NOMBRE DE PARTICULES**
[d'après Bardos, Erdős, Golse, Gottlieb, Mauser, Yau]

par **Patrick GÉRARD**

INTRODUCTION

Considérons N particules quantiques dans l'espace \mathbf{R}^3 , interagissant deux à deux selon un potentiel V fonction de la distance r entre les deux particules. L'exemple le plus courant est le potentiel coulombien

$$(1) \quad V(r) = \frac{C}{r},$$

où la constante C ci-dessus est positive dans le cas d'une interaction répulsive (par exemple entre charges de même signe), et négative dans le cas d'une interaction attractive (par exemple gravitationnelle). Après adimensionnement des constantes, le hamiltonien quantique associé est l'opérateur différentiel

$$(2) \quad H_N = - \sum_{j=1}^N \Delta_j + \sum_{1 \leq j < k \leq N} V(|x_j - x_k|)$$

où Δ_j désigne l'opérateur de Laplace agissant sur la j -ième position x_j . Le système est alors décrit à l'instant t par sa fonction d'onde $\Psi_N(t) \in L^2(\mathbf{R}^{3N})$ selon l'équation de Schrödinger

$$(3) \quad i \frac{\partial \Psi_N}{\partial t} = H_N \Psi_N, \quad \Psi_N(0) = \Psi_{N,0}.$$

Le fait que ce problème de Cauchy soit bien posé pour tout élément $\Psi_{N,0}$ de $L^2(\mathbf{R}^{3N})$ fait l'objet d'un théorème démontré par Kato en 1951. Pour l'énoncer, rappelons quelques notations. Pour tout entier naturel d , on désigne par $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact sur \mathbf{R}^d . Si m est un entier naturel, on introduit l'espace de Sobolev

$$H^m(\mathbf{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^d) \mid \forall \alpha \in \mathbf{N}^d, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^2(\mathbf{R}^d)\},$$

les dérivées étant définies au sens des distributions.

THÉORÈME 0.1 (Kato [19], 1951). — On suppose que la fonction $x \mapsto V(|x|)$ est à valeurs réelles et appartient à $L^2(\mathbf{R}^3) + L^\infty(\mathbf{R}^3)$. L'opérateur $H_N : C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^{3N})$ admet une unique extension autoadjointe. Son domaine est l'espace de Sobolev $H^2(\mathbf{R}^{3N})$.

On note encore H_N l'opérateur autoadjoint ainsi défini. En considérant le groupe à un paramètre unitaire $\exp(-itH_N)$ engendré par H_N grâce au théorème de Stone (cf. par exemple [25]), on en déduit :

COROLLAIRE 0.2. — Sous les hypothèses du théorème 0.1, soit $\Psi_{N,0} \in L^2(\mathbf{R}^{3N})$. Il existe une unique solution $\Psi_N \in C(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^{3N}))$ au problème de Cauchy (3), l'équation aux dérivées partielles étant satisfaite au sens des distributions dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{3N}$.

Dans le résultat ci-dessus, le caractère unitaire de l'évolution équivaut à la loi de conservation

$$(4) \quad \|\Psi_N(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^{3N})} = \|\Psi_{N,0}\|_{L^2(\mathbf{R}^{3N})}$$

tandis que la conservation de l'énergie est traduite par la continuité de l'opérateur $\exp(-itH_N)$ sur $H^1(\mathbf{R}^{3N})$ et par le fait que la quantité

$$(5) \quad E_N = \int_{\mathbf{R}^{3N}} |\nabla_X \Psi_N(t, X)|^2 dX + \sum_{1 \leq j < k \leq N} \int_{\mathbf{R}^{3N}} V(|x_j - x_k|) |\Psi_N(t, X)|^2 dX$$

reste constante au cours du temps. Dans la formule ci-dessus, on a noté $X = (x_1, \dots, x_N)$ le point courant de \mathbf{R}^{3N} .

Un problème fondamental en physique mathématique consiste à décrire cette évolution lorsque N tend vers l'infini. Précisons ce que l'on entend par là. Tout d'abord, afin d'assurer que la force exercée sur chaque particule reste bornée, il convient de normaliser le potentiel V en imposant

$$(6) \quad V(r) = \frac{1}{N} V_1(r)$$

où V_1 est un potentiel indépendant de N . Il faut ensuite préciser la notion de convergence utilisée pour étudier, à chaque instant t , une suite $(\Psi_N(t))$ de fonctions dont le nombre de variables tend vers l'infini avec N . Dans ce but, rappelons que, selon les principes de la mécanique quantique (cf. par exemple [29]), la fonction d'onde Ψ_N est de norme 1 dans L^2 , et les quantités physiques sont évaluées dans l'état Ψ_N par des expressions du type

$$\langle A \rangle_{\Psi_N} = \langle \Psi_N | A \Psi_N \rangle_{L^2},$$

où A est un opérateur (éventuellement non borné) sur L^2 (le produit scalaire est ici supposé linéaire par rapport au deuxième vecteur). Par exemple, l'énergie (5) du système n'est autre que la quantité $E_N = \langle H_N \rangle_{\Psi_N}$. On constate que toutes ces quantités ne dépendent de Ψ_N qu'à travers l'opérateur de projection orthogonale sur la droite engendrée par Ψ_N ,

$$\rho_N = |\Psi_N\rangle \langle \Psi_N|$$

ou encore l'opérateur de noyau

$$\rho_N(X, Y) = \Psi_N(X) \overline{\Psi_N(Y)}.$$

Nous allons nous restreindre à des opérateurs A bornés n'agissant que sur un nombre fixe k de variables, de sorte que, pour tout $N \geq k$,

$$\langle A \rangle_{\Psi_N} = \text{Tr}(A \rho_{N:k})$$

où $\rho_{N:k}$ est l'opérateur sur $L^2(\mathbf{R}^{3k})$ de noyau

$$(7) \quad \rho_{N:k}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \int_{\mathbf{R}^{3(N-k)}} \Psi_N(x_1, \dots, x_k, Z) \overline{\Psi_N(y_1, \dots, y_k, Z)} dZ.$$

Compte tenu des hypothèses sur Ψ_N , $\rho_{N:k}$ est un opérateur positif à trace sur $L^2(\mathbf{R}^{3k})$, de trace égale à 1. La suite $(\rho_{N:k})_{N \geq 1}$ admet donc une valeur d'adhérence $\rho^{(k)}$ pour la topologie faible $\sigma(\mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k})), \mathcal{K}(L^2(\mathbf{R}^{3k})))$ issue de la dualité entre opérateurs à trace et opérateurs compacts. En d'autres termes, il existe une sous-suite $(\rho_{N_n:k})$ et un opérateur $\rho^{(k)} \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k}))$ tels que, pour tout opérateur compact A sur $L^2(\mathbf{R}^{3k})$,

$$\text{Tr}(A \rho_{N_n:k}) \longrightarrow \text{Tr}(A \rho^{(k)}).$$

Un argument d'extraction diagonale assure ainsi l'existence d'une suite $(\rho^{(k)})_{k \geq 1}$. En supposant qu'un tel procédé puisse être réalisé pour tout temps t (ce qui est le cas grâce à un peu d'équicontinuité), une question naturelle est bien sûr de décrire l'évolution d'une telle suite $(\rho^{(k)}(t))$.

La réponse à cette question dépend beaucoup de la donnée initiale $\Psi_{N,0}$. On distingue à ce sujet deux types de particules, correspondant à des propriétés différentes des fonctions d'onde.

a) *Les bosons* : leurs fonctions d'onde sont symétriques en les variables (x_1, \dots, x_N) : pour toute permutation σ de $\{1, \dots, N\}$,

$$\Psi_N(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = \Psi_N(x_1, \dots, x_N).$$

Cette propriété est conservée par le flot $\exp(-itH_N)$. Un exemple typique de donnée initiale qui la vérifie est

$$(8) \quad \Psi_{N,0}(x_1, \dots, x_N) = \psi_0(x_1) \dots \psi_0(x_N) = \psi_0^{\otimes N}(x_1, \dots, x_N),$$

où ψ_0 est un élément de $L^2(\mathbf{R}^3)$, de norme 1. La présence du potentiel d'interaction V_1 s'oppose à ce que la structure de produit tensoriel (8) soit conservée par l'évolution. L'objet des travaux présentés ici est de montrer que, sous des hypothèses raisonnables sur ψ_0 et sur V_1 , cette structure réapparaît après le passage à la limite décrit ci-dessus, au sens où il existe, pour tout t , un élément $\psi(t)$ de $L^2(\mathbf{R}^3)$ tel que, pour tout $k \geq 1$,

$$\rho^{(k)}(t, x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \psi(t, x_1) \dots \psi(t, x_k) \overline{\psi(t, y_1)} \dots \overline{\psi(t, y_k)}.$$

De plus, l'évolution de $\psi(t)$ est décrite par une équation aux dérivées partielles non linéaire, appelée équation de Hartree.

b) *Les fermions* : leurs fonctions d'onde sont antisymétriques en les variables (x_1, \dots, x_N) : pour toute permutation σ de $\{1, \dots, N\}$,

$$\Psi_N(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = \varepsilon(\sigma) \Psi_N(x_1, \dots, x_N).$$

Là encore, cette propriété est conservée par le flot $\exp(-itH_N)$. Un exemple typique de donnée initiale qui la vérifie est un « déterminant de Slater » (cf. [26])

$$(9) \quad \Psi_{N,0}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det(\psi_{j,0}(x_l))_{1 \leq j, l \leq N},$$

où $(\psi_{j,0})_{1 \leq j \leq N}$ est un système orthonormé de $L^2(\mathbf{R}^3)$. Là encore, une telle structure n'est pas conservée par l'évolution. De plus, si l'on se donne un système orthonormé $(\psi_{j,0})_{j \geq 1}$ de $L^2(\mathbf{R}^3)$, on montre que, pour tout $k \geq 1$, $\rho_{N:k}(t)$ tend vers 0 pour la topologie faible $\sigma(\mathcal{L}^1, \mathcal{K})$. Néanmoins, sous des hypothèses supplémentaires sur ce système, il existe, pour tout t et pour tout N , un système orthonormé $(\psi_j(t))_{1 \leq j \leq N}$ de $L^2(\mathbf{R}^3)$ dont le déterminant de Slater $\Psi_N^S(t)$ approche bien la dynamique des N corps au sens suivant : si $\rho_N^S(t)$ désigne le projecteur orthogonal sur $\Psi_N^S(t)$, alors, pour tout k , pour tout t ,

$$\text{Tr}(|\rho_{N:k}(t) - \rho_N^S(t)|) \longrightarrow 0$$

quand N tend vers l'infini. Enfin, pour chaque N , le repère mobile $(\psi_j(t))_{1 \leq j \leq N}$ évolue dans $L^2(\mathbf{R}^3)$ selon un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, appelé système de Hartree–Fock.

Dans les deux cas décrits ci-dessus, on a donc réduit la dynamique d'un grand nombre de particules à des équations non linéaires « modèles » sur des fonctions de trois variables. La suite de cet exposé est consacrée à la description de ces équations, ainsi qu'aux résultats de convergence correspondants.

Remarque 0.3. — Un cas particulier important de la dynamique à N corps est bien sûr l'étude des fonctions propres (états liés) et des valeurs propres de l'opérateur H_N , en particulier son état fondamental. Nous n'aborderons pas ici l'abondante littérature consacrée à cette question, qui justifierait largement un autre exposé, et renvoyons à l'article de revue de Lieb [20], à l'ouvrage de Catto–Le Bris–Lions [8], ou au cours donné cette année par P.–L. Lions au Collège de France.

Remerciements. — Je remercie C. Bardos et F. Golse pour les discussions que nous avons eues sur les travaux présentés dans cet exposé, et pour m'avoir transmis le manuscrit [5]. Je suis reconnaissant à C. Gérard de m'avoir aidé à comprendre les résultats de [14].

1. LE CAS DES BOSONS : ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

1.1. Hypothèses sur le potentiel

Dans ce paragraphe et le suivant, on désigne par V_1 une fonction de classe C^∞ de $]0, +\infty[$ dans \mathbf{R} , vérifiant les estimations suivantes : pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que

$$(10) \quad \forall r \in]0, r_1], |V_1^{(m)}(r)| \leq \frac{C_m}{r^{m+1}}.$$

Il est clair que $V = V_1/N$ satisfait aux hypothèses du théorème 0.1.

1.2. L'équation de Hartree

Soit ψ_0 une fonction de $H^1(\mathbf{R}^3)$, de norme L^2 égale à 1, et soit $\Psi_{N,0}$ la fonction d'ondes $\psi_0^{\otimes N}$ qui lui est associée par (8). L'énergie totale E_N du système, donnée par (5), vérifie, compte tenu de la normalisation (6), lorsque N tend vers l'infini :

$$\frac{E_N}{N} \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \psi_0(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} V_1(|x-y|) |\psi_0(x)|^2 |\psi_0(y)|^2 dx dy.$$

Le second membre de l'identité ci-dessus est une fonction régulière de $\psi_0 \in H^1(\mathbf{R}^3)$, et, en utilisant la forme symplectique

$$\sigma(f, g) = 2 \operatorname{Im} \langle f | g \rangle_{L^2}$$

sur $L^2(\mathbf{R}^3)$, on lui associe un champ hamiltonien dont les courbes intégrales sont les solutions de

$$(11) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi + W \psi, \quad W(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} V_1(|x-y|) |\psi(t, y)|^2 dy.$$

L'équation (11) est l'équation de Hartree (cf. [17], où le contexte est plutôt celui des fonctions propres). Dans le cas où $V_1(r) = C/r$, le potentiel W est donné par l'équation de Poisson $-\Delta W = 4\pi C |\psi|^2$, de sorte que (11) est également connue sous le nom de système de Schrödinger–Poisson. Le problème de Cauchy pour (11) a été étudié en détail par Ginibre–Velo dans [15], dont nous citons le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1 ([15], 1980). — *Pour tout entier $m \geq 1$, pour toute donnée initiale ψ_0 appartenant à $H^m(\mathbf{R}^3)$, il existe une unique solution $\psi \in C(\mathbf{R}, H^m(\mathbf{R}^3))$ de l'équation (11) vérifiant $\psi(0) = \psi_0$.*

Dans le cadre du théorème ci-dessus, on a de plus les lois de conservation

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \text{cste},$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \psi(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} V_1(|x-y|) |\psi(t, x)|^2 |\psi(t, y)|^2 dx dy = \text{cste}.$$

1.3. Le théorème de convergence

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui fait l'objet de cet exposé.

THÉORÈME 1.2 ([2], [6], [12]). — Soit $\psi_0 \in H^2(\mathbf{R}^3)$, et soit $\psi \in C(\mathbf{R}, H^2(\mathbf{R}^3))$ la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Hartree (11) avec donnée initiale ψ_0 . Pour tout $N \geq 1$, soit Ψ_N la solution du problème à N corps (3), (6) telle que $\Psi_N(0) = \Psi_{N,0} = \psi_0^{\otimes N}$. Pour tout entier $k \geq 1$, pour tout nombre réel t , la suite $(\rho_{N:k}(t))_{N \geq k}$ définie par (7) vérifie, pour tout opérateur compact A sur $L^2(\mathbf{R}^{3k})$,

$$\mathrm{Tr}(A\rho_{N:k}(t)) \longrightarrow \langle \psi(t)^{\otimes k} | A\psi(t)^{\otimes k} \rangle_{L^2}$$

lorsque N tend vers l'infini, localement uniformément par rapport à t .

L'équation de Hartree (11) apparaît donc comme l'évolution d'une particule typique de \mathbf{R}^3 , soumise à l'interaction moyenne résultant d'un grand nombre d'autres particules du même type; c'est un exemple d'équation de champ moyen.

Les premiers résultats proches du théorème 1.2 semblent avoir été obtenus dans le cadre de la théorie quantique des champs, c'est-à-dire avec des données dépendant effectivement d'une infinité de variables : cf. Hepp [18] pour des potentiels réguliers, puis Ginibre-Velo [14]. Dans ce contexte, l'asymptotique peut être comprise comme une limite classique associée à l'hamiltonien de Hartree, la valeur moyenne de l'opérateur de nombre tendant vers l'infini. Néanmoins, le type de données utilisées ne permet pas de couvrir le théorème ci-dessus.

En 1980, une première démonstration est proposée par Spohn [27], dans le cas d'un potentiel borné, avec une donnée initiale $\psi_0 \in L^2(\mathbf{R}^3)$, en passant directement à la limite dans l'expression de ρ_N en série de perturbations. De plus, la convergence de $\rho_{N:k}(t)$ vers $|\psi(t)^{\otimes k}\rangle\langle\psi(t)^{\otimes k}|$ a alors lieu en norme trace (cf. l'appendice de [4] pour une démonstration plus détaillée).

Afin de couvrir des potentiels plus singuliers, Bardos, Golse et Mauser ont récemment proposé dans [6] une autre approche, consistant d'abord à passer à la limite dans le système d'équations vérifié par $(\rho_{N:k})_{1 \leq k \leq N}$. On obtient un système infini d'équations pour toute valeur d'adhérence $(\rho^{(k)})_{k \geq 1}$ dont la suite des projecteurs $(|\psi^{\otimes k}\rangle\langle\psi^{\otimes k}|)_{k \geq 1}$ est solution. Il reste alors à établir un théorème d'unicité pour ce système. Si la première partie de cette stratégie est menée à bien dans [6] pour des potentiels coulombiens (avec d'ailleurs une plus grande généralité sur les données initiales, cf. *infra*), la seconde partie n'y est traitée que sous l'hypothèse V_1 borné. Plus récemment, Erdős et Yau [12] ont complété ce programme en démontrant l'unicité de ce même système dans une classe de suites d'opérateurs à trace qui permet de contrôler les singularités coulombiennes du potentiel.

2. LE CAS DES BOSONS : ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION

2.1. La hiérarchie BBGKY quantique

Écrivons l'équation sur $\rho_N(t) = |\Psi_N(t)\rangle\langle\Psi_N(t)|$ déduite de (3), dite équation de von Neumann,

$$(12) \quad i\partial_t \rho_N = [H_N, \rho_N].$$

On en déduit le système suivant sur les traces partielles $(\rho_{N:k})_{1 \leq k \leq N}$, que nous écrivons pour les noyaux :

$$(13) \quad i\partial_t \rho_{N:k}(t, X, Y) = \\ - (\Delta_X - \Delta_Y) \rho_{N:k}(t, X, Y) + \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j < l \leq k} (V_1(|x_j - x_l|) - V_1(|y_j - y_l|)) \rho_{N:k}(t, X, Y) \\ + \frac{N-k}{N} \sum_{1 \leq j \leq k} \int_{\mathbf{R}^3} (V_1(|x_j - z|) - V_1(|y_j - z|)) \rho_{N:k+1}(t, X, z, Y, z) dz, \\ 1 \leq k \leq N-1,$$

où l'on a regroupé les termes en utilisant la symétrie par rapport aux variables. En passant à la limite formellement dans (13) lorsque N tend vers l'infini, on obtient un système infini sur une suite d'inconnues $(\rho^{(k)})_{k \geq 1}$,

$$(14) \quad i\partial_t \rho^{(k)} = -(\Delta_X - \Delta_Y) \rho^{(k)}(t, X, Y) \\ + \sum_{1 \leq j \leq k} \int_{\mathbf{R}^3} (V_1(|x_j - z|) - V_1(|y_j - z|)) \rho^{(k+1)}(t, X, z, Y, z) dz, \quad k \geq 1.$$

Les systèmes (13) et (14) constituent la version quantique de la « hiérarchie BBGKY » (Bogoliubov, Born et Green, Kirkwood, Yvon) introduite à partir des années 1930 en mécanique classique. Nous renvoyons à [16] pour une introduction unifiée aux théories de champ moyen dans les cadres classique et quantique.

Passons à la justification du passage à la limite ci-dessus. Montrons tout d'abord l'existence d'une valeur d'adhérence $(\rho^{(k)})$. Compte tenu du fait que les opérateurs $\rho_{N:k}$ sont positifs de trace 1, le seul point restant à élucider est l'équicontinuité en temps des quantités $\text{Tr}(A\rho_{N:k})$ lorsque N tend vers l'infini, et A décrit les opérateurs compacts. Par un argument facile de densité, on peut supposer que le noyau de A est C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}^{3k} \times \mathbf{R}^{3k}$. On utilise alors l'équation (13) pour estimer la dérivée par rapport à t de $\text{Tr}(A\rho_{N:k})$. Seule la contribution du troisième terme au second membre de (13) pose une difficulté, que l'on résout en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\rho_{N:k+1}(t, X, z, Y, z)| \leq \rho_{N:k+1}(t, X, z, X, z)^{1/2} \rho_{N:k+1}(t, Y, z, Y, z)^{1/2}$$

et le fait que le potentiel d'interaction appartient à $L^2(\mathbf{R}^3) + L^\infty(\mathbf{R}^3)$.

THÉORÈME 2.1 ([6]). — *Supposons de plus qu'il existe une constante B telle que l'énergie totale E_N du système vérifie, pour tout $N \geq 1$,*

$$(15) \quad E_N \leq B N.$$

Alors toute valeur d'adhérence $(\rho^{(k)})$ de $(\rho_{N:k})$ vérifie le système (14).

Remarquons que le résultat ci-dessus concerne des données beaucoup plus générales que le théorème 1.2. Dans le cas d'une donnée du type $\Psi_{N,0} = \psi_0^{\otimes N}$ et d'un potentiel V_1 vérifiant (10), on vérifie aisément que la condition (15) équivaut à $\psi_0 \in H^1(\mathbf{R}^3)$. En outre, les hypothèses sur le potentiel V_1 peuvent être affaiblies : la démonstration du théorème 2.1 utilise seulement que la fonction V_1 est continue sur $]0, +\infty[$, tend vers 0 à l'infini et vérifie

$$\int_0^1 r^2 (V_1(r))^2 dr < +\infty.$$

Esquisse de démonstration. — Compte tenu de la symétrie de Ψ_N par rapport aux N variables x_j , la condition (15) assure que, pour tout j , la norme $L^2(\mathbf{R}^{3N})$ de $\nabla_{x_j} \Psi_N$ est bornée lorsque N tend vers l'infini. Cette estimation induit la propriété de continuité suivante : pour toute fonction $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3k} \times \mathbf{R}^{3k})$, le noyau

$$K_N(t, z, w) = \int_{\mathbf{R}^{3k} \times \mathbf{R}^{3k}} a(X, Y) \rho_{N:k+1}(t, X, z, Y, w) dX dY$$

vérifie

$$\sup_{N \geq 1, t \in \mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^3} |K_N(t, z+h, z) - K_N(t, z, z)| dz \leq C|h|.$$

Cette propriété permet de passer à la limite faible dans le troisième terme du second membre de (13), les autres termes ne posant pas de problème. \square

Enfin, on vérifie facilement qu'une suite $(\rho^{(k)})$ du type $(|\psi^{\otimes k}\rangle\langle\psi^{\otimes k}|)$ est solution de la hiérarchie (14) dès que ψ est solution de l'équation de Hartree (11). Le théorème 1.2 sera donc démontré dès que l'on aura établi un résultat d'unicité du problème de Cauchy pour le système (14).

Remarquons par ailleurs que le système (13) fournit une (autre) introduction naturelle de l'équation de Hartree (11) : si l'on cherche à « fermer » le système (13) dès la première équation en déterminant une courbe $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ dans l'espace des projecteurs de $L^2(\mathbf{R}^3)$ telle que $\rho^{(1)} = \rho$ et $\rho^{(2)} = \rho \otimes \rho$ vérifient la première équation de (13), on obtient l'équation de Hartree pour $\psi(t)$ (à un facteur de phase $e^{i\theta(t)}$ près).

2.2. Un théorème d'unicité dans le cas d'un potentiel borné

Introduisons les opérateurs suivants agissant sur les espaces d'opérateurs à trace :

$$(16) \quad A_k \gamma^{(k)}(X, Y) = -(\Delta_X - \Delta_Y) \gamma^{(k)}(X, Y),$$

$$C_{k,k+1} \gamma^{(k+1)}(X, Y) = \sum_{1 \leq j \leq k} \int_{\mathbf{R}^3} (V_1(|x_j - z|) - V_1(|y_j - z|)) \gamma^{(k+1)}(X, z, Y, z) dz.$$

L'opérateur A_k est non borné sur l'espace de Banach $\mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k}))$ et engendre le groupe d'isométries défini par

$$\exp(-itA_k) \gamma^{(k)} = \exp(it\Delta) \gamma^{(k)} \exp(-it\Delta).$$

En général, $C_{k,k+1}$ est un opérateur non borné de $\mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k+3}))$ dans $\mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k}))$. Néanmoins, si V_1 est une fonction bornée, alors on vérifie sans mal que $C_{k,k+1}$ est borné, avec l'estimation

$$\text{Tr}(|C_{k,k+1} \gamma^{(k+1)}|) \leq 2 \|V_1\|_{L^\infty} k \text{Tr}(|\gamma^{(k)}|).$$

Le résultat d'unicité souhaité est alors un cas particulier du lemme suivant (avec $\nu = 1$) :

LEMME 2.2. — Soit $(E_k)_{k \geq 1}$ une chaîne d'espaces de Banach. Pour tout k , soit A_k un opérateur non borné sur E_k engendrant un groupe à un paramètre d'isométries $\exp(-itA_k)$ sur E_k , et soit $C_{k,k+1}$ un opérateur borné de E_{k+1} dans E_k . On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \geq 1$,

$$\|C_{k,k+1}\|_{E_{k+1} \rightarrow E_k} \leq Ck.$$

Pour tout k , soit $\gamma^{(k)} \in C(\mathbf{R}, E_k)$ vérifiant $\gamma^{(k)}(0) = 0$; on suppose que la suite $(\gamma^{(k)})$ vérifie le système infini

$$i\partial_t \gamma^{(k)} = A_k \gamma^{(k)} + C_{k,k+1} \gamma^{(k+1)}, \quad k \geq 1$$

et qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$(17) \quad \forall k \geq 1, \forall t \in \mathbf{R}, \|\gamma^{(k)}(t)\|_{E_k} \leq \nu^k.$$

Alors $\gamma^{(k)}(t) = 0$ pour tout k et pour tout t .

Démonstration. — La formule de variation de la constante donne

$$\gamma^{(k)}(t) = -i \int_0^t \exp(-i(t-s)A_k) C_{k,k+1} \gamma^{(k+1)}(s) ds,$$

et les estimées sur les opérateurs entraînent donc

$$\|\gamma^{(k)}(t)\|_{E_k} \leq Ck \left| \int_0^t \|\gamma^{(k+1)}(s)\|_{E_{k+1}} ds \right|.$$

Pour tout $T > 0$, pour tout $\sigma > 0$, posons

$$M_\sigma(T) = \sup_{|t| \leq T} \sup_{k \geq 1} \frac{\|\gamma^{(k)}(t)\|_{E_k}}{\nu^k (1 + \sigma|t|)^k}$$

qui est fini grâce à l'hypothèse (17). Alors l'estimation ci-dessus conduit à

$$M_\sigma(T) \leq \sup_{|t| \leq T} \sup_{k \geq 1} \frac{C\nu M_\sigma(T)}{(1 + \sigma|t|)^k} \int_0^{|t|} k(1 + \sigma s)^{k+1} ds \leq \frac{C\nu}{\sigma} (1 + \sigma T)^2 M_\sigma(T),$$

ce qui, si l'on choisit $\sigma > 4C\nu$ et $T = 1/\sigma$, impose $M_\sigma(T) = 0$, c'est-à-dire $\gamma^{(k)}(t) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et pour $|t| < (4C\nu)^{-1}$. Le lemme résulte alors de l'invariance de l'équation par translation en temps. \square

Le lemme ci-dessus est relié aux versions abstraites du théorème de Cauchy-Kowalevsky développées dans les années 1970 par Ovcyannikov [24], Nirenberg [22], Nishida [23] et Baouendi-Goulaouic [1].

2.3. Le cas d'un potentiel coulombien : choix de la chaîne d'espaces

Si le potentiel V_1 présente une singularité coulombienne, l'opérateur $C_{k,k+1}$ n'est plus borné de $\mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k+3}))$ dans $\mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k}))$ et la démonstration ci-dessus ne s'applique plus. L'idée d'Erdős et Yau est d'introduire une nouvelle chaîne d'espaces d'opérateurs qui permette de se ramener au lemme 2.2. Introduisons, pour tout j ,

$$S_j = \sqrt{I - \Delta_j}$$

et les « espaces de Sobolev d'opérateurs à trace » suivants,

$$\mathcal{H}^{1,(k)} = \{\gamma^{(k)} \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k})), |S_1 \cdots S_k \gamma^{(k)} S_k \cdots S_1| \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathbf{R}^{3k}))\}.$$

On vérifie que $\mathcal{H}^{1,(k)}$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\gamma^{(k)}\|_{\mathcal{H}^{1,(k)}} = \text{Tr}(|S_1 \cdots S_k \gamma^{(k)} S_k \cdots S_1|).$$

Il est par ailleurs trivial que A_k engendre un groupe d'isométries de $\mathcal{H}^{1,(k)}$. De plus, Erdős et Yau montrent le lemme suivant :

LEMME 2.3 ([12]). — *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $k \geq 1$, l'opérateur $C_{k,k+1}$ est borné de $\mathcal{H}^{1,(k+1)}$ dans $\mathcal{H}^{1,(k)}$ avec une norme au plus égale à Ck .*

La preuve du lemme 2.3 est un ensemble assez technique de manipulations sur les opérateurs à traces, combinant des inégalités abstraites avec la version suivante, bien connue, de l'inégalité de Hardy :

$$(18) \quad \int_{\mathbf{R}^3} \frac{|\psi(x)|^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \psi(x)|^2 dx.$$

2.4. Le cas d'un potentiel coulombien : régularisation et propagation des estimées

Pour achever la démonstration du théorème 1.2 en appliquant le lemme 2.2, il convient de vérifier que les deux suites $(\gamma^{(k)}) = (\rho^{(k)})$ et $\gamma^{(k)} = (|\psi^{\otimes k}\rangle\langle\psi^{\otimes k}|)$ satisfont à l'hypothèse (17) de croissance géométrique des normes. Dans le cas de la seconde suite, cela ne pose pas de problème dès que $\psi_0 \in H^1(\mathbf{R}^3)$. Le cas de la première suite est beaucoup plus délicat, car il faut propager des estimations dans $\mathcal{H}^{1,(k)}$ par le flot du système (13). La démarche la plus naturelle consiste bien sûr à remplacer l'opérateur $S_1 \cdots S_k$ par une fonction de H_N , et un premier pas dans cette direction est l'inégalité suivante, que l'on déduit sans mal de la symétrie de ρ_N par rapport aux variables :

$$(19) \quad \|\rho_{N;k}(t)\|_{\mathcal{H}^{1,(k)}} \leq 2^k \operatorname{Tr}\left(\left(I - \frac{\Delta}{N}\right)^k \rho_N(t)\right), \quad 2k \leq N.$$

D'un autre côté, à $t = 0$, le second membre de (19) est plus délicat à estimer, car il fait apparaître des termes du type $\Delta^k \psi_0$, dont l'estimation nécessite une trop grande régularité pour ψ_0 . Pour pallier cet inconvénient, Erdős et Yau régularisent la donnée ψ_0 par le noyau de la chaleur $\exp(\kappa\Delta)$, où $\kappa = \kappa(N)$ doit être choisi assez grand pour permettre d'estimer le second membre de (19), et assez petit pour que l'erreur commise sur les données disparaisse par passage à la limite. C'est cette double contrainte qui impose finalement la régularité additionnelle $\psi_0 \in H^2(\mathbf{R}^3)$. En introduisant, pour tout $\delta > 0$, la solution Ψ_N^δ de (3) associée à la donnée initiale régularisée

$$\Psi_{N,0}^\delta = (e^{\delta\Delta/N} \psi_0)^{\otimes N},$$

on vérifie les estimées suivantes :

LEMME 2.4 ([12]). — *Il existe $C > 0$ et, pour tous $\delta > 0, k \geq 1$, il existe $N(\delta, k)$ telle que, pour tout $N \geq N(\delta, k)$,*

$$\left\langle \left(I - \frac{\Delta}{N}\right)^k \Psi_{N,0}^\delta \middle| \Psi_{N,0}^\delta \right\rangle_{L^2(\mathbf{R}^{3N})} \leq (C\|\psi_0\|_{H^2})^k.$$

De plus,

$$(20) \quad \sup_{t \in \mathbf{R}} \|\Psi_N^\delta(t) - \Psi_N(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^{3N})} \leq \delta\|\psi_0\|_{H^2}.$$

Il faut maintenant propager les estimées sur Ψ_N^δ . On est alors conduit à comparer les puissances de $(I - \Delta/N)$ à celles de $(I + H_N/N)$, ce qui nécessite d'estimer des dérivées d'ordre arbitraire de V_1 . C'est à ce stade qu'intervient pleinement l'hypothèse (10). La singularité à l'origine impose alors de tronquer le potentiel V_1 en le remplaçant par

$$V_1^\varepsilon(r) = \theta\left(\frac{\sqrt{N}r}{\varepsilon}\right)V_1(r),$$

où θ est une fonction de classe C^∞ valant 0 près de $r = 0$, et valant 1 pour $r \geq 1$. On note H_N^ε l'hamiltonien correspondant, et $\Psi_N^{\delta,\varepsilon}$ la solution correspondante, avec donnée initiale $\Psi_{N,0}^\delta$. On démontre alors le lemme de perturbation suivant :

LEMME 2.5 ([12]). — *Il existe $\beta > 0$, $\tilde{C} > 0$ et, pour tous $\varepsilon > 0$, $k \geq 1$, il existe un entier $\tilde{N}(\varepsilon, k)$ tel que, pour tout $N \geq \tilde{N}(\varepsilon, k)$,*

$$\tilde{C}^{-k} \left(\beta I - \frac{\Delta}{N} \right)^k \leq \left(\beta I + \frac{H_N^\varepsilon}{N} \right)^k \leq \tilde{C}^k \left(\beta I - \frac{\Delta}{N} \right)^k.$$

De plus, il existe $B > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$(21) \quad \sup_{\delta > 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \|\Psi_N^{\delta,\varepsilon}(t) - \Psi_N^\delta(t)\|_{L^2}^2 \leq B(1 + \|\psi_0\|_{H^2}^2) \varepsilon |t|.$$

La démonstration du théorème 1.2 peut alors se conclure ainsi : à δ, ε fixés, on passe à la limite dans le système (13) tronqué, selon le théorème 2.1, ou plutôt sa variante avec le potentiel tronqué V_1^ε . On constate que la troncature et la régularisation de la donnée, qui dépendent de N , disparaissent par passage à la limite quand N tend vers l'infini, de sorte que la valeur d'adhérence $(\rho^{\delta,\varepsilon,(k)})$ ainsi obtenue est solution de la hiérarchie BBGKY (14) avec la condition initiale $(|\psi_0^{\otimes k}\rangle\langle\psi_0^{\otimes k}|)$, tout en vérifiant les estimations de croissance géométrique (17) dans la chaîne $(\mathcal{H}^{1,(k)})$, grâce aux lemmes 2.4 et 2.5. Le lemme 2.2 assure donc que $\rho^{\delta,\varepsilon,(k)}(t) = |\psi(t)^{\otimes k}\rangle\langle\psi(t)^{\otimes k}|$ pour tout t , et les estimations d'erreur (20) et (21) permettent de passer à la limite quand ε et δ tendent vers 0.

3. LE CAS DES FERMIONS

Les résultats dans ce cas sont plus récents et, dans le cas coulombien, n'ont probablement pas atteint leur forme définitive. Aussi nous contentons-nous d'en donner un bref aperçu.

3.1. Les déterminants de Slater

L'espace des phases fermionique est le sous-espace fermé $L_a^2(\mathbf{R}^{3N})$ de $L^2(\mathbf{R}^{3N})$ constitué des fonctions d'ondes antisymétriques en les N variables x_1, \dots, x_N de \mathbf{R}^3 ; il s'identifie à $\bigwedge^N(L^2(\mathbf{R}^3))$. Pour toute permutation σ de $\{1, \dots, N\}$, on désigne par U_σ l'opérateur unitaire de $L^2(\mathbf{R}^{3N})$ défini par

$$U_\sigma \Psi(x_1, \dots, x_N) = \Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}),$$

de sorte que le projecteur orthogonal sur $L_a^2(\mathbf{R}^{3N})$ est $P_N = (N!)^{-1} \Sigma_N$, avec

$$\Sigma_N = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) U_\sigma.$$

Si (ψ_1, \dots, ψ_N) est un système orthonormé de $L^2(\mathbf{R}^3)$, on normalise l'élément $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_N$ de $L^2_a(\mathbf{R}^{3N})$ en posant

$$(22) \quad S(\psi_1, \dots, \psi_N)(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det(\psi_j(x_k))_{1 \leq j, k \leq N}.$$

Les références historiques pour l'introduction de ces quantités comme *Ansatz* de l'équation de Schrödinger stationnaire sont Fock [13] et Slater [26]. Les traces partielles du projecteur orthogonal associé

$$\rho_N^S = |S(\psi_1, \dots, \psi_N)\rangle\langle S(\psi_1, \dots, \psi_N)|$$

sont données par les expressions suivantes :

$$(23) \quad \rho_{N:1}^S = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad \rho_{N:k}^S = \frac{N^k(N-k)!}{N!} (\rho_{N:1}^S)^{\otimes k} \Sigma_k.$$

Ces formules inspirent la définition suivante, introduite dans [3].

DÉFINITION 3.1. — Pour tout N , soit ρ_N un opérateur positif sur $L^2(\mathbf{R}^{3N})$ de trace 1, et qui commute aux opérateurs U_σ . On dit que la suite (ρ_N) vérifie la propriété de fermeture de Slater si, pour tout entier $k \geq 1$, quand N tend vers l'infini,

$$\text{Tr}(|\rho_{N:k} - (\rho_{N:1})^{\otimes k} \Sigma_k|) \rightarrow 0.$$

3.2. Le système de Hartree-Fock

Revenons à la hiérarchie (13) et cherchons cette fois un système orthonormé mobile de N vecteurs $(\psi_1(t), \dots, \psi_N(t))$ tel que

$$\rho^{(1)}(t) = (|S(\psi(t), \dots, \psi_N(t))\rangle\langle S(\psi(t), \dots, \psi_N(t))|)_{:1}, \quad \rho^{(2)}(t) = (\rho^{(1)}(t) \otimes \rho^{(1)}(t))_{\Sigma_2}$$

vérifie la première équation de (13),

$$i\partial_t \rho^{(1)}(t, x, y) = -(\Delta_x - \Delta_y) \rho^{(1)}(t, x, y) + \int_{\mathbf{R}^3} (V_1(|x-z|) - V_1(|y-z|)) \rho^{(2)}(t, x, z, y, z) dz.$$

Après une renormalisation convenable, on aboutit au système d'évolution de Hartree-Fock, introduit par Dirac [11],

$$(24) \quad \begin{aligned} i\partial_t \psi_j &= -\Delta \psi_j + W \psi_j - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N W_{jl} \psi_l, \quad 1 \leq j \leq N, \\ W(t, x) &= \int_{\mathbf{R}^3} V_1(|x-z|) \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |\psi_l(t, z)|^2 dz, \\ W_{jl}(t, x) &= \int_{\mathbf{R}^3} V_1(|x-z|) \psi_j(t, z) \overline{\psi_l(t, z)} dz. \end{aligned}$$

Notons qu'au potentiel d'interaction moyenne W déjà présent dans l'équation de Hartree (11) s'est ajouté un « potentiel d'échange » W_{jl} . On peut également obtenir le système (24) comme une évolution hamiltonienne sur $L^2(\mathbf{R}^3)^N$ associée à l'énergie

$$(25) \quad E_N^{HF} = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \psi_j|^2 dx + \frac{1}{2N} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} V_1(|x-z|) \left(\left(\sum_j |\psi_j(x)|^2 \right) \left(\sum_j |\psi_j(z)|^2 \right) - \left| \sum_j \psi_j(x) \overline{\psi_j(z)} \right|^2 \right) dx dz.$$

Le problème de Cauchy pour (24) ne pose pas de difficultés si V_1 est borné. Dans le cas d'un potentiel coulombien, il a été étudié par Chadam et Glassey [10] puis par Bove, Da Prato et Fano [7] dans le formalisme des opérateurs.

THÉORÈME 3.2 ([10], [7]). — *On suppose V_1 coulombien. Pour tout entier $m \geq 1$, pour tout système orthonormé de $L^2(\mathbf{R}^3)$ $(\psi_{1,0}, \dots, \psi_{N,0})$ constitué de fonctions de $H^m(\mathbf{R}^3)$, il existe une unique solution $(\psi_1, \dots, \psi_N) \in C(\mathbf{R}, H^m(\mathbf{R}^3)^N)$ au système (3.2) avec la donnée initiale $(\psi_{1,0}, \dots, \psi_{N,0})$ en $t = 0$. De plus, le système $(\psi_1(t), \dots, \psi_N(t))$ est orthonormé pour tout t , et l'énergie (25) est constante au cours du temps.*

3.3. Le théorème d'approximation

Le résultat suivant est dû à Bardos, Golse, Gottlieb et Mauser.

THÉORÈME 3.3 ([3]). — *Soit $(\psi_{j,0})_{j \geq 1}$ un système orthonormé de $L^2(\mathbf{R}^3)$. Pour tout $N \geq 1$, on désigne par Ψ_N la solution de l'équation de Schrödinger (3) ayant pour donnée initiale $\Psi_{N,0} = S(\psi_{1,0}, \dots, \psi_{N,0})$. On note par ailleurs $(\psi_1^{(N)}, \dots, \psi_N^{(N)})$ la solution du système de Hartree-Fock (24) avec la donnée initiale $(\psi_{1,0}, \dots, \psi_{N,0})$, et $\Psi_N^S(t) = S(\psi_1^{(N)}(t), \dots, \psi_N^{(N)}(t))$ le déterminant de Slater correspondant. Alors les projecteurs $\rho_N(t) = |\Psi_N(t)\rangle\langle\Psi_N(t)|$ et $\rho_N^S(t) = |\Psi_N^S(t)\rangle\langle\Psi_N^S(t)|$ vérifient, pour tout $k \geq 1$, lorsque N tend vers l'infini,*

$$\mathrm{Tr}(|\rho_{N:k}(t) - \rho_{N:k}^S(t)|) \longrightarrow 0.$$

La démonstration de ce théorème est basée sur une analyse du second membre du système (13) pour la différence $\rho_{N:k} - \rho_{N:k}^S$, combinée avec une adaptation de la démonstration du lemme d'unicité (2.2). Pour $|t|$ au plus de l'ordre de l'inverse de $\|V_1\|_{L^\infty}$, on peut estimer la norme trace de la différence $\rho_{N:k}(t) - \rho_{N:k}^S(t)$ par ν^k/N (cf. [4]), mais ces estimations se dégradent vite au cours du temps.

La même approche montre, plus généralement, que la propriété de fermeture de Slater est conservée par la hiérarchie (13).

Dans le cas d'un potentiel coulombien répulsif, un résultat tout récent des mêmes auteurs [5] établit, en adaptant les techniques d'Erdős et Yau, un résultat analogue,

mais sous des hypothèses beaucoup plus fortes sur les données initiales. Pour tout $m \geq 1$, on demande que

$$\sup_{N \geq 1} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|\psi_{j,0}\|_{H^m(\mathbf{R}^3)}^2 < +\infty.$$

4. REMARQUES ET QUESTIONS OUVERTES

4.1. Le problème de la régularité des données

Le théorème de Kato 0.1 assure l'existence d'un groupe à un paramètre unitaire sur $L^2(\mathbf{R}^{3N})$. Par ailleurs, on peut aussi vérifier (bien que cela ne soit pas explicitement écrit dans [15]) que l'équation de Hartree (11) est bien posée dans $L^2(\mathbf{R}^3)$. L'idée est d'utiliser les propriétés dispersives du flot de Schrödinger sur \mathbf{R}^3 à travers les inégalités suivantes, dites de Strichartz (voir par exemple [9]),

$$\left(\int_{\mathbf{R}} \|e^{it\Delta} f\|_{L^q(\mathbf{R}^3)}^p dt \right)^{1/p} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}$$

pour tout couple (p, q) de nombres réels vérifiant

$$\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}, \quad p \geq 2,$$

en s'inspirant d'une démonstration analogue donnée par Tsutsumi [28] pour une équation de Schrödinger avec une perturbation non linéaire locale.

Il est donc naturel de se demander si le théorème 1.2 reste vrai pour des données $\psi_0 \in L^2(\mathbf{R}^3)$ (ce qui est déjà connu, comme on l'a dit, si le potentiel est borné). Dans le cas coulombien, la réponse à cette question nécessiterait sans doute de comprendre ce que deviennent les inégalités de Strichartz sur la solution Ψ_N et sur les opérateurs $\rho_{N;k}$, et en quoi elles peuvent éviter le recours à la chaîne d'espaces $(\mathcal{H}^{1,(k)})$, qui est une grosse consommatrice de dérivées... En outre, cette approche pourrait se révéler utile dans le cas des fermions, les inégalités de Strichartz pouvant également s'appliquer au système de Hartree-Fock.

4.2. Principe d'exclusion de Pauli et énergie d'interaction

Dans le cas d'un potentiel coulombien répulsif, la pertinence de l'approximation par le système de Hartree-Fock se heurte à la remarque suivante, qui nous a été communiquée par C. Bardos et F. Golse. Si (ψ_1, \dots, ψ_N) est un système orthonormé de $L^2(\mathbf{R}^3)$, un résultat de Lieb–Thirring [21] assure que la densité moyenne

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\psi_j(x)|^2$$

est contrôlée à l'aide de l'énergie cinétique moyenne

$$T = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \psi_j|^2 dx$$

selon l'inégalité

$$\int_{\mathbf{R}^3} \tilde{\rho}(x)^{5/3} dx \leqslant A N^{-2/3} T$$

où A est une constante universelle. En combinant cette information avec l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev, on constate que

$$\int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{\tilde{\rho}(x) \tilde{\rho}(y)}{|x-y|} dx dy \leqslant B \|\tilde{\rho}\|_{L^{6/5}}^2 \leqslant B N^{-1/3} T^{1/2}.$$

Il en résulte que, si l'énergie moyenne de Hartree–Fock E_N^{HF}/N est bornée, l'énergie d'interaction tend uniformément vers 0 comme $N^{-1/3}$. En reportant cette information dans le système (3.2), on en déduit que la solution $(\psi_1^{(N)}, \dots, \psi_N^{(N)})$ de ce système est approchée pour tout temps par la solution de l'équation de Schrödinger *libre* selon

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|\psi_j^{(N)}(t) - e^{it\Delta} \psi_{j,0}\|_{L^2}^2 \leqslant C N^{-1/3}.$$

Dans ce cas, la pertinence du système de Hartree–Fock par rapport au système de Schrödinger libre ne serait confirmée que si l'approximation établie dans la version coulombienne du théorème 3.3 était d'ordre supérieur. Ce fait ne semble pas être une conséquence des résultats de [5].

Une autre interprétation de ce phénomène pourrait être que la normalisation (6), si elle est justifiée dans le cas des bosons, devient trop brutale dans le cadre du principe d'exclusion de Pauli, et qu'il conviendrait de la remplacer par une normalisation mieux adaptée aux interactions coulombiennes des fermions.

RÉFÉRENCES

- [1] M.S. BAOUENDI & C. GOULAOUIC – « Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy–Kovalevsky theorems », *Comm. Partial Differential Equations* **2** (1977), p. 1151–1162.
- [2] C. BARDOS, L. ERDÖS, F. GOLSE, N. MAUSER & H.T. YAU – « Derivation of the Schrödinger–Poisson equation from the quantum N -body problem », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **334** (2002), p. 515–520.
- [3] C. BARDOS, F. GOLSE, A. GOTTLIEB & N. MAUSER – « Mean field dynamics of fermions and the time-dependent Hartree–Fock equation », *J. Math. Pures Appl.* **82** (2003), p. 665–683.
- [4] ———, « Accuracy of the time-dependent Hartree–Fock approximation for uncorrelated initial states », *J. Statist. Phys.* **115** (2004), à paraître.

- [5] ———, « Derivation of the time-dependent Hartree-Fock equation with Coulomb potential », manuscrit, 2004.
- [6] C. BARDOS, F. GOLSE & N. MAUSER – « Weak coupling limit of the N -particle Schrödinger equation », *Methods Appl. Anal.* **7** (2000), p. 275–293.
- [7] A. BOVE, G. DA PRATO & G. FANO – « On the Hartree-Fock time-dependent problem », *Comm. Math. Phys.* **49** (1976), p. 25–33.
- [8] I. CATTO, C. LE BRIS & P.-L. LIONS – *Mathematical theory of thermodynamic limits : Thomas-Fermi type models*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 1998.
- [9] T. CAZENAVE – *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, American Mathematical Society, 2003.
- [10] G. CHADAM & R. GLASSEY – « Global existence of solutions to the Cauchy problem for time-dependent Hartree-Fock equations », *J. Math. Phys.* **16** (1975), p. 1122–1130.
- [11] P.A.M. DIRAC – « Note on exchange phenomena in the Thomas atom », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **26** (1930), p. 376–385.
- [12] L. ERDÖS & H.T. YAU – « Derivation of the nonlinear Schrödinger equation from a many body Coulomb system », *Adv. Theor. Math. Phys.* **5** (2001), p. 1169–1205.
- [13] V. FOCK – « Näherungsmethode zur Lösung des quantenmechanischen Mehrkörperproblems », *Z. Phys.* **61** (1930), p. 126–148.
- [14] J. GINIBRE & G. VELO – « The classical field limit of scattering theory for non-relativistic many-bosons systems, I-II », *Comm. Math. Phys.* **66** (1979), p. 37–76, **68** (1979), p. 45–68.
- [15] ———, « On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interactions », *Math. Z.* **170** (1980), p. 109–145.
- [16] F. GOLSE – « The mean-field limit for the dynamics of large particle systems », in *Actes des Journées « Équations aux dérivées partielles » (Forges-les-Eaux, 2-6 juin 2003)*, GDR 2434 du CNRS, Version électronique disponible sur le site : <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa>.
- [17] D. HARTREE – « The wave mechanics of an atom with a non-Coulomb central field. Part I. Theory and methods », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **24** (1928), p. 89–132.
- [18] K. HEPP – « The classical limit for quantum mechanical correlation functions », *Comm. Math. Phys.* **35** (1974), p. 265–277.
- [19] T. KATO – « Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type », *Trans. Amer. Math. Soc.* **70** (1951), p. 195–201.
- [20] E.H. LIEB – « The stability of matter : from atoms to stars », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **22** (1990), p. 1–49.
- [21] E.H. LIEB & W.E. THIRRING – « Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities », in *Studies in Mathematical Physics, Essays in Honor of Valentine Bargmann* (E.H. Lieb, B. Simon & W.E. Thirring, éd.), Princeton University Press, 1976.
- [22] L. NIRENBERG – « On an abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem », *J. Differential Geom.* **6** (1972), p. 561–576.

- [23] T. NISHIDA – « A note on a theorem of Nirenberg », *J. Differential Geom.* **12** (1977), p. 629–633.
- [24] L.V. OVCYANNIKOV – « A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **200** (1971), no. 4, traduction anglaise dans *Sov. Math. Dokl.* **12** (1971), p. 1497-1502.
- [25] M. REED & B. SIMON – *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. I-IV, Academic Press, 1978.
- [26] J.C. SLATER – « A note on Hartree's method », *Phys. Rev.* **35** (1930), p. 210–211.
- [27] H. SPOHN – « Kinetic equations from Hamiltonian dynamics : Markovian limits », *Rev. Modern Phys.* **53** (1980), p. 569–615.
- [28] Y. TSUTSUMI – « L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups », *Funkcial. Ekvac.* **30** (1987), p. 115–125.
- [29] H. WEYL – *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928, traduction et deuxième édition : *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, 1950.

Patrick GÉRARD
Université Paris XI
Département de Mathématiques
UMR 8628 du CNRS
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
E-mail : patrick.gerard@math.u-psud.fr

OBSTRUCTIONS AU PRINCIPE DE HASSE ET À L'APPROXIMATION FAIBLE

par Emmanuel PEYRE

INTRODUCTION

Face à un système d'équations polynomiales à coefficients entiers, les questions de l'existence d'une solution à coordonnées entières ou rationnelles sont les premières qui viennent à l'esprit. Bien que les travaux de Davis, Putnam, Robinson, Matijacevič et Čudnovskii (*cf.* [Az] et [Ma2]) sur le dixième problème de Hilbert aient montré que l'existence d'une solution entière ne peut être déterminée de façon algorithmique, le problème analogue sur \mathbf{Q} est toujours ouvert et il est raisonnable de chercher des critères d'existence de solutions rationnelles pour certaines classes de variétés. Une condition nécessaire évidente pour l'existence d'une telle solution est l'existence d'une solution sur le corps des réels et sur tout complété p -adique de \mathbf{Q} . Hasse fut le premier à étudier de manière systématique la réciproque de cette condition nécessaire. En s'appuyant sur les progrès du corps de classes, il put démontrer cette réciproque pour certaines classes de variétés, dont les quadriques [Hasse1], qui avaient été antérieurement étudiées par Legendre et Minkowski [Mi]. Mais ce passage du local au global ne s'étend pas à tout système d'équations. Hasse lui-même donna des contre-exemples à cette réciproque [Hasse2]. Par la suite, ceux-ci se multiplièrent : Reichardt [Re] et Lind [Li] vers 1940 produisirent de manière indépendante une courbe de genre un, intersection de deux quadriques qui n'admet pas de points sur \mathbf{Q} mais en admet sur tous ses complétés (cet exemple est également décrit dans [Ca]). La construction d'autres contre-exemples parmi les variétés géométriquement rationnelles demanda plus de temps, mais Swinnerton-Dyer en exhiba en 1962 au sein des surfaces cubiques non singulières [SD1]. En 1970, dans son exposé au congrès international de Nice [Ma1], Manin décrivit un critère général basé sur la formule de réciprocité de la théorie du corps de classes qui permit d'expliquer tous les contre-exemples antérieurs (*cf.* [CTKS]). De manière plus précise, supposons que V soit une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur \mathbf{Q} et notons $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ l'espace adélique associé

à V , c'est-à-dire l'espace topologique produit $V(\mathbf{R}) \times \prod_p V(\mathbf{Q}_p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers. Le principe du critère de Manin est de construire une partie $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}}$ de $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ qui contient l'adhérence de l'ensemble des points rationnels dans l'espace adélique. Si $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}) \neq \emptyset$ mais que $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}}$ est vide, alors V n'admet pas de point rationnel sur \mathbf{Q} , alors qu'elle en admet sur tous ses complétés. Cette construction fournit également des contre-exemples à l'approximation faible : si $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}} \neq V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$, alors les points rationnels de V ne sont pas denses dans l'espace adélique (cf. [CTS3]).

Muni de cette construction, on peut alors affiner les questions précédentes de la façon suivante : étant donnée une variété projective, lisse et géométriquement intègre telle que $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}}$ soit non vide,

- la variété V admet-elle un point rationnel ?
- L'ensemble de ces points rationnels est-il dense dans $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}}$?

Ces questions ont été explorées par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer Borovoi, Colliot-Thélène, Harari, Salberger, Sansuc, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer et une réponse positive à la seconde question fut obtenue pour diverses classes de variétés géométriquement rationnelles. Deux types de méthodes se sont révélées particulièrement efficaces. La première dite de descente consiste à construire des morphismes

$$f_i : W_i \longrightarrow V$$

de sorte que W_i soit plus simple du point de vue arithmétique et de déduire le résultat pour V des propriétés des W_i . Cette méthode fut systématisée par Colliot-Thélène et Sansuc ([CTS1], [CTS2], [CTS3], [CTS4] et [CTS5]) à l'aide des toiseurs universels. La seconde dite de fibration s'applique dans le cas où l'on dispose d'un morphisme

$$p : V \longrightarrow B.$$

On cherche alors à déduire le résultat pour V des résultats connus pour les fibres de p .

Tous les experts se doutaient que la non-vacuité de $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}}$ n'entraîne pas toujours celle de $V(\mathbf{Q})$, mais l'obtention d'un tel contre-exemple se révéla difficile. En 1999, dans [Sk3], Skorobogatov fut le premier à exhiber un exemple explicite de variété V vérifiant $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}} \neq \emptyset$ et ne possédant pas de points rationnels. Ce contre-exemple peut s'expliquer à l'aide d'un analogue non commutatif de l'obstruction de Brauer-Manin dû à Harari et Skorobogatov [HS]. Par ailleurs, Sarnak et Wang en 1995 dans [SW], puis Poonen en 2001 dans [Po] montrent que des conjectures de Lang impliquent l'existence de variétés sans point rationnel qui échappent au critère de Manin et à ses généralisations non abéliennes.

Dans la première partie de ces notes, nous revenons sur les notions de principe de Hasse et d'approximation faible, la seconde partie est consacrée à la description du critère de Brauer-Manin, la troisième aux méthodes utilisées pour montrer la densité

des points rationnels dans l'espace $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$ et la quatrième aux contre-exemples à cette densité. Nous terminons par des extensions de cette démarche à d'autres cadres.

1. LE PRINCIPE DE HASSE ET L'APPROXIMATION FAIBLE

1.1. Terminologie

Fixons quelques notations pour la suite de cet exposé.

Notations 1.1. — Désormais K désigne un corps de nombres, \mathcal{O}_K son anneau des entiers et M_K l'ensemble des places de K . Pour toute place v de K , on note K_v le complété de K pour la topologie définie par v . Si la place v est non archimédienne, on note \mathcal{O}_v l'anneau des entiers de K_v . Si \mathcal{X} est un schéma sur le spectre d'un anneau A et B une A -algèbre commutative, on note $\mathcal{X}(B)$ l'ensemble $\text{Hom}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(B), \mathcal{X})$ et \mathcal{X}_B le produit $\mathcal{X} \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B)$. En particulier, si V est une variété sur un corps F , \overline{F} une clôture algébrique de F et F^s la clôture séparable de F dans \overline{F} , $V(F)$ est l'ensemble des points rationnels de V et \overline{V} (resp. V^s) désigne la variété $V_{\overline{F}}$ (resp. V_{F^s}) sur \overline{F} (resp. F^s).

Nous dirons qu'une variété V sur un corps F est une *bonne variété* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre. Deux variétés intègres V et W sur F sont *F -birationnellement équivalentes* si un ouvert non vide de V est isomorphe à un ouvert de W . Une variété intègre V est dite *F -rationnelle* si elle est F -birationnellement équivalente à un espace projectif. Une variété géométriquement intègre V est dite *géométriquement rationnelle* si \overline{V} est \overline{F} -rationnelle.

Une bonne variété V sur un corps F est dite *F -rationnellement connexe* s'il existe une variété M , un ouvert non vide U du produit $\mathbf{P}^1 \times M$ et un morphisme $e : U \rightarrow V$ de sorte que l'application induite $U \times_M U \rightarrow V \times_F V$ soit dominante. On dit que V est *géométriquement rationnellement connexe* si \overline{V} est \overline{F} -rationnellement connexe; autrement dit, il existe une famille de courbes rationnelles sur \overline{V} de sorte que deux points généraux de $V(\overline{F})$ puissent être reliés par une courbe de cette famille.

Si V est une variété irréductible et \mathcal{V} un modèle de V sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, c'est-à-dire que \mathcal{V}_K est isomorphe à V , alors pour toute place non archimédienne v de K , on a une application naturelle $j_v : \mathcal{V}(\mathcal{O}_v) \rightarrow V(K_v)$. L'espace des adèles associé à V est défini comme l'ensemble des $(x_v)_{v \in M_K}$ du produit $\prod_{v \in M_K} V(K_v)$ tels que x_v appartienne à l'image de j_v pour tout v en dehors d'une partie finie de M_K . Cet espace topologique est indépendant du modèle choisi et si V est projective, il coïncide avec le produit.

1.2. Passage du local au global

Si V est une variété sur le corps de nombres K , on a une implication évidente :

$$(1) \quad V(K) \neq \emptyset \implies \forall v \in M_K, V(K_v) \neq \emptyset.$$

L'intérêt de ce critère provient du fait qu'il est algorithmiquement possible de déterminer si la condition

$$\forall v \in M_K, V(K_v) \neq \emptyset$$

est vérifiée ou pas. En effet, si K_v est isomorphe au corps des réels, la vacuité de $V(K_v)$ est une question décidable grâce aux travaux de Tarski et Seidenberg (cf. [Ta] et [Sei]); le lemme de Hensel et ses généralisations montrent que pour toute place non archimédienne v de K correspondant à un idéal premier \mathfrak{p} de \mathcal{O}_K , déterminer si $V(K_v)$ est non vide se réduit à étudier des solutions d'équations polynomiales sur $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^n$ pour un n convenable et, par conséquent, est décidable. Enfin les estimations de Lang-Weil [LW] permettent de montrer que si V n'est pas vide, alors $V(K_v) \neq \emptyset$ pour toute place v en dehors d'une partie finie de M_K que l'on peut déterminer explicitement.

Hasse fut le premier à étudier de façon systématique la réciproque de l'implication (1). Il énonça en particulier le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2 (Hasse [Hasse1], Minkowski [Mi]). — *Une forme quadratique $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ à coefficients dans \mathbf{Q} admet un zéro non trivial dans \mathbf{Q}^n si et seulement si elle en a sur tout complété de \mathbf{Q} .*

Le cas $n = 2$ est élémentaire, le cas $n = 3$ remonte à Legendre. La difficulté de la démonstration réside dans le passage de trois à quatre variables qui utilise le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet et la formule de réciprocité de Gauss. Nous suggérons à l'auditeur de cet exposé qui n'aurait jamais lu la démonstration de ce théorème de se reporter à l'article de Hasse [Hasse1] ou au cours d'arithmétique de Serre [Se2]. Ce résultat se généralise à tout corps de nombres.

Une autre famille d'équations considérée par Hasse est celle associée aux normes d'extensions galoisiennes cycliques de corps.

THÉORÈME 1.3 (Hasse [Hasse2]). — *Soit L/K une extension galoisienne cyclique de corps de nombres. Notons $N_{L/K} : L^\times \rightarrow K^\times$ le morphisme de norme. Un élément a de K^\times appartient à son image si et seulement si, pour toute place v de K et toute extension w de v à L , a appartient à l'image de la norme N_{L_w/K_v} .*

Dans ce cas, si (e_1, \dots, e_n) est une base du K -espace vectoriel L , la variété considérée est la variété affine définie par l'équation

$$N_{L/K} \left(\sum_{i=1}^n X_i e_i \right) = a.$$

1.3. Le principe de Hasse et l'approximation faible

Pour une variété V arbitraire sur un corps de nombres K , il est aisé de donner des contre-exemples à la réciproque de (1). Considérons par exemple le polynôme

$$P(X) = (X^2 - 3)(X^2 + 3)(X^2 + 1)(X^2 + 23).$$

Pour tout nombre premier p impair, le groupe $\mathbf{F}_p^\times / \mathbf{F}_p^{\times 2}$ est cyclique d'ordre 2. Par conséquent si $p \geq 5$, au moins un des entiers -1 , 3 ou -3 est un carré modulo p et donc dans \mathbf{Q}_p . D'autre part -23 est un carré dans \mathbf{Q}_2 et \mathbf{Q}_3 . Enfin 3 est un carré sur \mathbf{R} . Le polynôme P a donc une racine dans chacun des complétés de \mathbf{Q} . Toutefois, il n'a pas de racine sur \mathbf{Q} .

Plus généralement, si $(V_i)_{i \in I}$ est une famille finie de sous-variétés d'une variété V sur le corps de nombres K telle que

$$\forall v \in M_K, \exists i \in I, V_i(K_v) \neq \emptyset$$

et

$$\forall i \in I, \exists v \in M_K, V_i(K_v) = \emptyset,$$

alors $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un contre-exemple à la réciproque de (1).

D'autre part, si on considère la surface affine S d'équation

$$Y^2 + Z^2 = -(X^2 - 3)^2(X^2 + 3)(X^2 + 1)(X^2 + 23),$$

cette surface est irréductible, les remarques faites sur les racines de P montrent qu'elle admet un point sur chaque complété de \mathbf{Q} , mais ses seuls points réels sont $(\sqrt{3}, 0, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0, 0)$ qui ne sont pas définis sur \mathbf{Q} . On obtient à nouveau un contre-exemple à la réciproque de (1). Là encore, cet exemple se généralise aisément en considérant des variétés dont les seuls points sur un des complétés sont des points singuliers.

Par contre, si V est une variété géométriquement irréductible, v une place de K et x_0 un point lisse de $V(K_v)$, le théorème des fonctions implicites [Bki, VAR, § 1, n° 5] assure qu'il existe un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de x_0 pour la topologie v -adique sur un ouvert de $K_v^{\dim(V)}$. En particulier, $V(K_v)$ est dense dans V_{K_v} pour la topologie de Zariski. Les arguments qui précèdent ne permettent donc plus de montrer la vacuité de $V(K)$.

Ces considérations amènent aux définitions qui suivent :

DÉFINITION 1.4. — *On dira par la suite qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K vérifie le principe de Hasse si et seulement si elle vérifie l'implication suivante*

$$(\forall v \in M_K, V(K_v) \neq \emptyset) \implies V(K) \neq \emptyset.$$

On dira qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K vérifie l'approximation faible si et seulement si l'ensemble des points rationnels $V(K)$ est dense dans l'espace topologique produit $\prod_{v \in M_K} V(K_v)$.

Remarques 1.5

(i) Si le produit $\prod_{v \in M_K} V(K_v)$ n'est pas vide, la variété V vérifie l'approximation faible si et seulement si $V(K)$ est dense dans $\prod_{v \in S} V(K_v)$ pour toute partie finie S de M_K .

(ii) Notons qu'avec ces définitions, toute variété qui vérifie l'approximation faible vérifie également le principe de Hasse.

Ces deux propriétés sont des invariants birationnels des bonnes variétés :

PROPOSITION 1.6. — *Soient V et V' deux bonnes variétés sur le corps de nombres K qui sont K -birationnellement équivalentes. Alors V vérifie le principe de Hasse (resp. l'approximation faible) si et seulement s'il en est de même pour V' .*

Cette proposition découle du lemme de Nishimura [Ni], qui assure que l'existence d'un point rationnel est un invariant birationnel des bonnes variétés, et du théorème des fonctions implicites.

1.4. Classes de variétés vérifiant le principe de Hasse et l'approximation faible

L'approximation faible et, par conséquent, le principe de Hasse ont été démontrés pour plusieurs familles de variétés. Nous en donnerons ici deux exemples qui nous semblent particulièrement marquants :

THÉORÈME 1.7. — *Si V est une variété de drapeaux généralisée sur K , c'est-à-dire une variété projective homogène sous l'action d'un groupe algébrique linéaire connexe, alors V vérifie l'approximation faible et le principe de Hasse.*

Ce résultat englobe le résultat de Legendre, Hasse et Minkowski sur les quadriques et celui de Châtelet sur les variétés de Severi-Brauer, c'est-à-dire les K -formes des espaces projectifs. Eichler [Ei], Landherr [Lan], Kneser [Kn], Harder [Harder1] [Harder2] et Chernousov [Che] ont montré le principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous un groupe algébrique semi-simple simplement connexe. Platonov et Rapinchuk ont prouvé l'approximation faible pour ces groupes [PR, theorem 7.8]. Les travaux de Harder [Harder3, Satz 4.3.3] et Borovoi [Bo1] permettent d'en déduire le théorème qui précède.

Le second résultat que je souhaite mentionner est une conséquence de la méthode du cercle et s'applique aux intersections complètes lisses dans l'espace projectif lorsque la dimension est grande relativement aux degrés des équations.

THÉORÈME 1.8 (Hardy, Littlewood, Davenport, Birch [Bir])

Si $V \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^N$ est une intersection complète non singulière définie par des équations f_1, \dots, f_m de même degré d avec

$$N > 2^{d-1}m(m+1)(d-1),$$

alors V vérifie l'approximation faible et le principe de Hasse.

Pour les cubiques, ce résultat vaut en fait dès que $N \geq 8$ (Heath-Brown [HB] et Hooley [Ho1], [Ho2], cf. l'exposé de Deshouillers [De]).

La méthode du cercle s'applique aussi à des équations de degrés différents (cf. les travaux de Schmidt [Sch]) et fournit également des résultats sur un corps de nombres (Skinner [Skinner]).

2. L'OBSTRUCTION DE BRAUER-MANIN

2.1. Un premier contre-exemple au principe de Hasse

Hasse lui-même savait que le théorème 1.3 qu'il avait démontré pour les extensions de corps cycliques L/K ne se généralisait pas : il connaissait des exemples d'extension galoisienne L/K de groupe de Galois $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ telle que l'équation

$$N_{L/K}(x) = a$$

avec a un élément de K a une solution sur tous les complétés de K mais n'en possède pas sur K .

Le principe de Hasse n'est donc pas toujours vérifié. Je voudrais en donner maintenant un exemple dû à Iskovskih [Is] qui fut revisité par Colliot-Thélène, Coray et Sansuc [CTCS]. On considère la surface S fibrée en coniques définie sur \mathbf{Q} par l'équation

$$(2) \quad Y^2 + Z^2 = (3 - X^2)(X^2 - 2).$$

Rappelons (cf. [Se2, chap. III]) que si v est une place de \mathbf{Q} et si a, b sont deux éléments inversibles de \mathbf{Q}_v , le symbole de Hilbert $(a, b)_v$ est défini par

$$(a, b)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } Z^2 - aX^2 - bY^2 = 0 \text{ a une solution non nulle dans } \mathbf{Q}_v^3, \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

que ce symbole est bilinéaire et qu'il vérifie la formule du produit :

$$\forall a, b \in \mathbf{Q}^\times, \quad \prod_{v \in M_{\mathbf{Q}}} (a, b)_v = 1$$

qui découle de la formule de réciprocité quadratique de Gauss. En outre, on dispose des formules explicites suivantes :

– si p est un nombre premier impair et $a \in \mathbf{Q}_p^\times$,

$$(-1, a)_p = (-1)^{v_p(a)\varepsilon(p)}$$

où $\varepsilon(p)$ est la classe de $(p-1)/2$ modulo 2,

– si $a = 2^k u$ avec $u \in \mathbf{Z}_2^\times$, on a

$$(-1, a)_2 = (-1)^{\varepsilon(u)}$$

– et si $a \in \mathbf{R}^\times$,

$$(-1, a)_\infty = \frac{a}{|a|}.$$

Si v est une place de \mathbf{Q} et x un élément de \mathbf{Q}_v tel que $(3 - x^2)(x^2 - 2)$ soit inversible, alors la conique définie par $Y^2 + Z^2 = (3 - x^2)(x^2 - 2)$ admet un point défini sur \mathbf{Q}_v si et seulement si

$$(3) \quad (-1, 3 - x^2)_v = (-1, x^2 - 2)_v.$$

Des expressions qui précèdent on déduit que cette condition est vérifiée pour tout x de \mathbf{Q}_p tel que $(3 - x^2)(x^2 - 2)$ soit inversible si $4 \mid p - 1$. Si $4 \mid p - 3$, cette égalité vaut dès que $v_p(x) < 0$. Pour $p = 2$, elle est vérifiée pour $x = 0$ et sur \mathbf{R} on l'obtient pour $x \in] -\sqrt{3}, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$. Il en résulte que la surface définie par (2) admet un point lisse sur tout complété de \mathbf{Q} . Supposons que $(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3$ soit solution de (2). Notons tout d'abord que $(3 - x^2)(x^2 - 2) \neq 0$. D'autre part, les formules qui précèdent donnent que

- si p est un nombre premier tel que $4 \mid p - 1$, alors $(-1, 3 - x^2)_p = 1$,
- si p est un nombre premier congru à 3 modulo 4, alors soit $v_p(x) < 0$ auquel cas on obtient $(-1, 3 - x^2)_p = 1$; soit $v_p(x) \geq 0$, mais la relation $x^2 - 2 = 1 - (3 - x^2)$ fournit $v_p(x^2 - 2) = 0$ ou $v_p(3 - x^2) = 0$ et en utilisant la relation (3), on en déduit que $(-1, 3 - x^2)_p = 1$.
- Pour $p = 2$, si $v_2(x) > 0$, alors $3 - x^2 \equiv 3 \pmod{4}$ et donc $(-1, 3 - x^2)_2 = -1$; de même si $v_2(x) < 0$, alors $3/x^2 - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ et donc $(-1, 3 - x^2)_2 = -1$. Enfin si $v_2(x) = 0$, alors $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ d'où $(3 - x^2)/2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $x^2 - 2 \equiv 3 \pmod{4}$, ce qui contredit la relation (3).
- Pour la place archimédienne, la relation $(-1, 3 - x^2)_\infty = (-1, x^2 - 2)_\infty$ entraîne $x \in] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ et donc $(-1, 3 - x^2)_\infty = 1$.

En définitive, on a obtenu

$$(-1, 3 - x^2)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \neq 2, \\ -1 & \text{si } v = 2. \end{cases}$$

Mais ceci implique la relation

$$\prod_{v \in M_{\mathbf{Q}}} (-1, 3 - x^2)_v = -1,$$

ce qui contredit la formule du produit. L'équation (2) n'a donc pas de solution sur \mathbf{Q} .

Un modèle projectif et lisse \tilde{S} de S est obtenu en recollant les deux sous-variétés lisses de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^1 \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ d'équations respectives

$$Y^2 + Z^2 = (3 - X^2)(X^2 - 2)T^2$$

et

$$Y^2 + Z^2 = (3X^2 - 1)(1 - 2X^2)T^2.$$

Cette dernière n'ayant pas de point rationnel pour $X = 0$, on obtient que \tilde{S} ne vérifie pas le principe de Hasse.

Le critère de Brauer-Manin est une généralisation de cet exemple, la formule de réciprocité de la théorie du corps de classes prenant le rôle de la formule du produit pour les symboles de Hilbert.

2.2. Rappels sur le groupe de Brauer cohomologique des variétés

Avant de passer au critère lui-même, nous rappelons ici quelques propriétés du groupe de Brauer cohomologique qui nous seront utiles par la suite (*cf.* [Ma3, chap. VI]).

Notations 2.1. — Si V est une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps F , on note $\text{Pic}(V)$ le groupe de Picard de V et $\text{Br}(V)$ le groupe de Brauer cohomologique de V , c'est-à-dire le groupe

$$\text{Br}(V) = H_{\text{ét}}^2(V, \mathbf{G}_m),$$

où \mathbf{G}_m désigne le faisceau associé au groupe multiplicatif, qui à une variété U associe $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times$. Si V est le spectre d'un corps F , son groupe de Brauer peut être décrit comme un groupe de cohomologie galoisienne

$$\text{Br}(\text{Spec}(F)) = H^2(\text{Gal}(F^s/F), F^{s\times}),$$

où $\text{Gal}(F^s/F)$ désigne le groupe de Galois de l'extension F^s/F . Dans ce cas, ce groupe coïncide avec le groupe des classes d'équivalence d'algèbres simples centrales sur F pour la relation d'équivalence \sim définie par $A \sim B$ si et seulement s'il existe deux entiers strictement positifs m, n et un isomorphisme d'algèbres $M_m(A) \xrightarrow{\sim} M_n(B)$, la loi de groupe étant induite par le produit tensoriel des algèbres simples centrales sur le corps F (*cf.* [Se1, X, § 5]). Si v est une valuation discrète de rang un sur F , de corps résiduel parfait $\kappa(v)$, on dispose d'un morphisme résidu

$$\partial_v : \text{Br}(F) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Si F est un corps local non archimédien ce morphisme induit un isomorphisme

$$\text{inv}_v : \text{Br}(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

(*cf.* [Se1, XII § 3]). D'autre part, le groupe $\text{Br}(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, engendré par la classe de l'algèbre de quaternions. Pour toute place v du corps de nombres K , on dispose donc d'un morphisme injectif canonique

$$\text{inv}_v : \text{Br}(K_v) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

La théorie du corps de classes global (*cf.* [NSW, theorem 8.1.17]) fournit alors une suite exacte naturelle :

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \text{Br}(K) \longrightarrow \bigoplus_{v \in M_K} \text{Br}(K_v) \xrightarrow{\sum_{v \in M_K} \text{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Notons au passage que l'injectivité du morphisme de gauche peut se réinterpréter comme le principe de Hasse pour les variétés de Severi-Brauer ; d'autre part, la formule de réciprocity du corps de classes, c'est-à-dire le fait que cette suite forme un complexe, implique la formule du produit pour les symboles de Hilbert.

Décrivons deux méthodes pour construire des éléments dans le groupe de Brauer d'une variété.

Si V est une variété intègre sur un corps F , de corps de fonctions $F(V)$, la contravariance du groupe de Brauer fournit un morphisme

$$\mathrm{Br}(V) \longrightarrow \mathrm{Br}(F(V)).$$

Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique 0, il découle des théorèmes de pureté de Grothendieck [Gr, § 6.7] que ce morphisme induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}(V)$ sur

$$\bigcap_{v \in \mathcal{P}(F(V)/F)} \ker(\partial_v)$$

où $\mathcal{P}(F(V)/F)$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de rang un sur $F(V)$ dont la restriction à F est triviale. On retrouve en particulier que le groupe de Brauer est un invariant birationnel des bonnes variétés (cf. [Gr, corollaire 7.5]).

Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique nulle, la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie étale à coefficients dans \mathbf{G}_m donne une suite exacte

$$(5) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(V) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{V})^{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \\ \longrightarrow \ker(\mathrm{Br}(V) \longrightarrow \mathrm{Br}(\overline{V})) \longrightarrow H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \longrightarrow H^3(F, \mathbf{G}_m),$$

où \mathcal{G} désigne le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Si V est une bonne variété sur le corps de nombres K , alors $H^3(K, \mathbf{G}_m)$ est nul et on en déduit une suite exacte

$$\mathrm{Br}(K) \longrightarrow \ker(\mathrm{Br}(V) \longrightarrow \mathrm{Br}(\overline{V})) \longrightarrow H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \longrightarrow 0.$$

Notations 2.2. — Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique nulle, on note

$$\mathrm{Br}_1(V) = \ker(\mathrm{Br}(V) \longrightarrow \mathrm{Br}(\overline{V}))$$

et

$$\mathrm{Br}_0(V) = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(V)).$$

Par abus de langage, un élément de $\mathrm{Br}(V) - \mathrm{Br}_1(V)$ est dit transcendant.

Remarque 2.3. — Notons que si V est géométriquement rationnelle, alors $\mathrm{Br}(\overline{V})$ est nul puisque c'est un invariant birationnel et le groupe $\mathrm{Br}(V)$ coïncide avec $\mathrm{Br}_1(V)$. En outre, le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est alors un \mathbf{Z} -module libre de rang fini (cf. [CTS5, corollaire 2.A.2]) et le groupe $H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$ est fini. Par conséquent, le groupe $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est fini dans ce cas.

2.3. Le critère de Brauer-Manin

Notations 2.4. — Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K . Pour toute place v de K et tout point x de $V(K_v)$, la contravariance du groupe de Brauer fournit un morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}(V) &\longrightarrow \mathrm{Br}(K_v) \\ A &\longmapsto A(x_v). \end{aligned}$$

On obtient ainsi un accouplement

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}(V) \times V(K_v) &\longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (A, x) &\longmapsto \langle A, x \rangle_v = \mathrm{inv}_v(A(x_v)). \end{aligned}$$

On peut montrer (*cf.* [San, lemme 6.2]) que pour tout A de $\mathrm{Br}(V)$, l'application induite de $V(K_v)$ dans \mathbf{Q}/\mathbf{Z} est localement constante. Pour une place réelle, cette application est donc constante sur les composantes connexes. En outre, cette application est triviale pour presque toute place v de K . On obtient donc un accouplement

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{A}_K} : \mathrm{Br}(V) \times V(\mathbf{A}_K) &\longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (A, (x_v)_{v \in M_K}) &\longmapsto \sum_{v \in M_K} \langle A, x_v \rangle_v \end{aligned}$$

tel que, pour tout A de $\mathrm{Br}(V)$, l'application induite de $V(\mathbf{A}_K)$ dans \mathbf{Q}/\mathbf{Z} est localement constante.

L'idée cruciale du critère de Manin est alors la suivante : si x est un point rationnel de V sur K et A un élément de $\mathrm{Br}(V)$, alors

$$\langle A, x \rangle_{\mathbf{A}_K} = \sum_{v \in M_K} \langle A, x \rangle_v = \sum_{v \in M_K} \mathrm{inv}_v(A(x)) = 0$$

où la dernière égalité résulte du fait que la suite (4) est un complexe. On en déduit donc que, pour tout point x de l'adhérence de $V(K)$ dans $V(\mathbf{A}_K)$ et pour tout élément A de $\mathrm{Br}(V)$, on a

$$\langle A, x \rangle_{\mathbf{A}_K} = 0.$$

Ceci nous amène aux définitions suivantes :

DÉFINITION 2.5. — *Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K . Pour tout élément x de $V(\mathbf{A}_K)$, le morphisme de groupes*

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}(V) &\longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ A &\longmapsto \langle A, x \rangle_{\mathbf{A}_K} \end{aligned}$$

s'annule sur l'image de $\mathrm{Br}(K)$ et définit par passage au quotient un morphisme ω_x de $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ dans \mathbf{Q}/\mathbf{Z} . On appellera obstruction de Brauer-Manin en x le morphisme ω_x et espace de Brauer-Manin l'ensemble

$$V(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \{x \in V(\mathbf{A}_K) \mid \omega_x = 0\}.$$

Les remarques qui précèdent montrent que, pour tout point adélique x , l'obstruction de Brauer-Manin en x est une obstruction à ce que x appartienne à l'adhérence des points rationnels. Autrement dit, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.6. — Avec les notations qui précèdent, l'adhérence $\overline{V(K)}$ des points rationnels dans l'espace adélique est contenue dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$.

Remarque 2.7

(i) Si A est un élément de $\text{Br}(V)$, l'ensemble

$$\{x \in V(\mathbf{A}_K) \mid \langle A, x \rangle_{\mathbf{A}_K} = 0\}$$

est à la fois ouvert et fermé dans $V(\mathbf{A}_K)$. Par conséquent, si $\text{Br}(V)/\text{Br}_0(V)$ est fini, il en est de même de l'ensemble de $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$. Par la remarque 2.3, c'est le cas si V est géométriquement rationnelle.

(ii) On ne dispose pas de méthode algorithmique pour décider de la vacuité de $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$ en général : pour une courbe de genre 1, cela revient en fait à calculer explicitement le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne. Par contre, si V est géométriquement rationnelle (ou plus généralement géométriquement rationnellement connexe), alors le groupe quotient $\text{Br}(V)/\text{Br}_0(V)$ est fini et des méthodes sont disponibles pour calculer explicitement $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$.

Exemple 2.8. — Dans l'exemple du paragraphe 2.1, soit \tilde{S} un modèle projectif et lisse de $\mathbf{Q}(S)$ sur \mathbf{Q} , soit A l'algèbre de quaternions $\left(\frac{-1, 3-x^2}{\mathbf{Q}(S)}\right)$ qui est l'algèbre associative unifère engendrée par deux éléments I et J avec les relations $I^2 = -1$, $J^2 = 3 - x^2$ et $IJ = -JI$. La classe de cette algèbre provient de $\text{Br}(\tilde{S})$ et le raisonnement fait montre que

$$\{x \in \tilde{S}(\mathbf{A}_K) \mid \langle [A], x \rangle_{\mathbf{A}_K} = 0\}$$

est vide. Donc $\tilde{S}(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}} = \emptyset$ et $\tilde{S}(K) = \emptyset$.

Remarque 2.9. — La plupart des contre-exemples au principe de Hasse utilisent le quotient $\text{Br}_1(V)/\text{Br}_0(V)$. Toutefois quelques auteurs ont également fourni des exemples provenant de la partie transcendante du groupe de Brauer (Harari [Ha2] et Wittenberg [Wi]).

Abus de langage 2.10. — Suivant la terminologie couramment utilisée, nous dirons par abus de langage que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour une bonne variété V si on a l'implication

$$V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}} \neq \emptyset \implies V(K) \neq \emptyset.$$

On dit également que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour V si et seulement si les points rationnels de V sont denses dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$.

Enfin si \mathcal{C} est une classe de bonnes variétés, on dit que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour \mathcal{C} si et seulement si c'est la seule pour toute variété V de \mathcal{C} .

Remarque 2.11. — La validité de l'implication

$$V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}} \neq \emptyset \implies V(K) \neq \emptyset$$

ou la densité de $V(K)$ dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$ est un invariant birationnel des bonnes variétés. On peut donc étendre la terminologie précédente aux variétés géométriquement irréductibles sur le corps de nombres K en disant que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour une variété géométriquement irréductible X si et seulement si c'est la seule pour un modèle projectif et lisse de $K(X)$.

3. L'OBSTRUCTION DE BRAUER-MANIN EST LA SEULE

Dans ce paragraphe, nous souhaitons décrire deux méthodes particulièrement efficaces pour montrer la densité des points rationnels dans l'espace de Brauer-Manin. Nous terminerons par une liste de cas pour lesquels cette densité a été démontrée.

3.1. Techniques de descente

Inspirée du travail de Châtelet [Ch] et de la méthode de descente classique pour les courbes de genre 1, la méthode de descente a été développée par Colliot-Thélène et Sansuc avec l'introduction de la notion de torseur universel d'une variété géométriquement rationnelle.

Si F est un corps algébriquement clos et V une bonne variété sur F dont le groupe de Picard est un \mathbf{Z} -module libre de rang fini, alors un torseur universel sur V peut être construit de la façon suivante : soient L_1, \dots, L_t des fibrés en droites sur V dont les classes forment une base du groupe de Picard de V . Pour $i \in \{1, \dots, t\}$, notons L_i^\times le complémentaire de la section nulle dans L_i et posons

$$\mathcal{T} = L_1^\times \times_V \cdots \times_V L_t^\times.$$

Le groupe algébrique \mathbf{G}_m^t agit sur \mathcal{T} et l'application naturelle $\pi : \mathcal{T} \rightarrow V$ fait de V un quotient de \mathcal{T} sous l'action de ce groupe. En outre, à isomorphisme près, les structures obtenues ne dépendent pas des choix effectués.

Dans le cas général, nous allons définir les torseurs universels comme solution à un problème universel.

DÉFINITIONS 3.1. — *On dit qu'un groupe algébrique G sur un corps F est de type multiplicatif si et seulement s'il existe un entier n tel que \overline{G} soit isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathbf{G}_{m, \overline{F}}^n$. Notons $\mathcal{G} = \text{Gal}(F^s/F)$ le groupe de Galois absolu de F . On a une équivalence de catégorie contravariante entre la catégorie des groupes de type*

multiplicatif et la catégorie des \mathbf{Z} -modules de type fini munis d'une action continue de \mathcal{G} , c'est-à-dire se factorisant via un quotient fini de \mathcal{G} . Cette équivalence associe à un groupe G le groupe des caractères de G

$$X^*(G) = \text{Hom}_{F^s}(G^s, \mathbf{G}_{m, F^s}).$$

Si G est un groupe algébrique sur un corps F et X une variété sur F , on appelle *torseur sur X sous G* ou *espace principal homogène sur X sous G* la donnée d'une variété \mathcal{T} sur F munie d'un morphisme $\pi : \mathcal{T} \rightarrow X$ fidèlement plat et d'une action de G au-dessus de X de sorte que, localement pour la topologie plate, \mathcal{T} soit isomorphe au produit $G \times X$. Autrement dit, si $m : G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ définit l'action de G , on a l'égalité $\pi \circ m = \pi \circ \text{pr}_2$ et l'application

$$\rho : G \times_F \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \times_X \mathcal{T}$$

définie comme la composée des applications

$$G \times_F \mathcal{T} \xrightarrow{\text{Id} \times \delta} G \times_F \mathcal{T} \times_X \mathcal{T} \xrightarrow{m \times \text{Id}} \mathcal{T} \times_X \mathcal{T}$$

où δ désigne la diagonale, est un isomorphisme.

Si X est une variété lisse et géométriquement intègre sur F telle que $\Gamma(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^\times = \overline{F}^\times$ et si x est un point rationnel de X , un *torseur universel au-dessus de (X, x)* est une paire (\mathcal{T}, t) où \mathcal{T} est un tosseur sur X sous un groupe de type multiplicatif T et t un point rationnel de \mathcal{T} au-dessus de x vérifiant en outre la propriété universelle suivante : pour toute paire (\mathcal{T}', t') où \mathcal{T}' est un tosseur sur X sous un groupe de type multiplicatif T' et t' un point rationnel de \mathcal{T}' au-dessus de x , il existe un unique morphisme de groupes $\phi : T \rightarrow T'$ et un unique morphisme $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ au-dessus de X , compatible avec l'action de T sur \mathcal{T} et de T' sur \mathcal{T}' et tel que $\psi(t) = t'$.

Exemple 3.2. — Si G est un groupe semi-simple, et \tilde{G} le revêtement universel de G , alors (\tilde{G}, e) est un tosseur universel au-dessus de (G, e) (cf. [Sk4, §3.2]).

Expliquons maintenant comment obtenir de tels tosseurs. Supposons que X soit une bonne variété sur F ; alors, pour tout groupe de type multiplicatif T de groupe de caractères $X^*(T)$, les classes d'isomorphismes de tosseurs sur X sous T sont en bijection avec $H_{\text{pl}}^1(X, T)$. Colliot-Thélène et Sansuc construisent alors une suite exacte canonique [CTS5, (2.0.2)]

$$0 \longrightarrow H^1(F, T) \longrightarrow H_{\text{pl}}^1(X, T) \xrightarrow{\rho} \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X^*(T), \text{Pic}(\overline{X})) \xrightarrow{\delta} H^2(F, T).$$

DÉFINITIONS 3.3. — Soit X une bonne variété sur un corps F de caractéristique 0. Si le groupe de Picard géométrique $\text{Pic}(\overline{X})$ de X est un \mathbf{Z} -module de type fini, alors on note T_{NS} le groupe de type multiplicatif qui lui est associé par l'équivalence de catégorie ci-dessus. Un *torseur versel* est un tosseur \mathcal{T} sur X sous T_{NS} dont la classe $[\mathcal{T}]$ dans $H_{\text{pl}}^1(X, T_{\text{NS}})$ est telle que $\rho([\mathcal{T}])$ soit l'isomorphisme de $X^*(T_{\text{NS}})$ sur $\text{Pic}(\overline{X})$ donné par l'équivalence de catégorie.

Remarque 3.4. — Sous les hypothèses précédentes, un toreur versel muni d'un point rationnel t au-dessus de x est un toreur universel au-dessus de (X, x) . Nous avons choisi ici de distinguer la notion de toreur universel, solution du problème universel, de celle de toreur versel, ce qui nous amène à diverger de la terminologie usuelle introduite par Colliot-Thélène et Sansuc pour lesquels un toreur versel est dit universel.

Colliot-Thélène et Sansuc montrent que, sous les hypothèses qui précèdent, pour tout point rationnel x de X , il existe, à unique isomorphisme près, un unique toreur universel (\mathcal{T}, t) au-dessus de (X, x) . De plus si F est un corps de type fini sur son sous-corps premier, alors les classes d'isomorphismes de toseurs versels ayant un point rationnel sont en nombre fini [CTS4, proposition 2]. En notant $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille de représentants de ces classes d'isomorphisme, on obtient une partition canonique finie de l'ensemble des points rationnels de X :

$$X(F) = \coprod_{i \in I} \pi_i(\mathcal{T}_i(F)),$$

$\pi_i : \mathcal{T}_i \rightarrow X$ désignant le morphisme associé au toreur \mathcal{T}_i .

L'intérêt des toseurs versels est souligné par les deux résultats suivants :

THÉORÈME 3.5 (Colliot-Thélène, Sansuc [CTS5, théorème 2.1.2])

Soit V une bonne variété géométriquement rationnelle sur le corps de nombres K . Soit \mathcal{T} un toreur versel au-dessus de X et \mathcal{T}^c une compactification projective et lisse de \mathcal{T} , alors

$$\mathrm{Br}(\mathcal{T}^c) / \mathrm{Br}_0(\mathcal{T}^c) = \{0\}.$$

En particulier

$$\mathcal{T}^c(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \mathcal{T}^c(\mathbf{A}_K).$$

THÉORÈME 3.6 (Colliot-Thélène, Sansuc [CTS5, corollaire 3.7.2])

Soit V une bonne variété géométriquement rationnelle sur le corps de nombres K . L'espace de Brauer-Manin $V(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ est la réunion des images de $\prod_{v \in M_K} \mathcal{T}(K_v)$, où \mathcal{T} décrit un système de représentants des toseurs versels au-dessus de V .

Remarque 3.7. — Cet énoncé montre d'une part que l'implication

$$V(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset \implies V(K) \neq \emptyset$$

est vraie si les toseurs versels \mathcal{T} sur V vérifient l'implication

$$\prod_{v \in M_K} \mathcal{T}(K_v) \neq \emptyset \implies \mathcal{T}(K) \neq \emptyset$$

et d'autre part que les points rationnels de V sont denses dans $V(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ si les compactifications projectives et lisses des toseurs versels au-dessus de V vérifient l'approximation faible.

Donnons quelques exemples où cette méthode a été utilisée :

Exemple 3.8. — Une surface de Châtelet S sur K est un modèle projectif et lisse d'une surface définie par une équation de la forme

$$Y^2 - aZ^2 = P(X),$$

où P est un polynôme séparable de degré 3 ou 4. L'exemple d'Iskovskih décrit au paragraphe 2.1 est une surface de ce type. Pour ces surfaces, Colliot-Thélène et Sansuc ont démontré dans [CTS4, §IV] que les toiseurs versels au-dessus de S sont stablement K -birationnellement équivalents au produit d'une conique et d'une variété X intersection complète géométriquement intègre et non conique de deux quadriques dans \mathbf{P}^7 . En outre, X contient deux droites gauches conjuguées. Le principe de Hasse et l'approximation faible ayant été démontrés pour ces variétés via la méthode de fibration décrite plus loin, on obtient que les points rationnels de S sont denses dans $S(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$ (Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer [CTSSD1] et [CTSSD2], cf. également [CT2]).

Exemple 3.9. — Soit F un corps de groupe de Galois absolu \mathcal{G} . Un tore algébrique sur F est un groupe algébrique T sur F tel que \overline{T} soit isomorphe à un groupe de la forme $\mathbf{G}_{m, \overline{F}}^n$. L'équivalence de catégorie entre groupes de type multiplicatif et \mathbf{Z} -modules de type fini munis d'une action continue de \mathcal{G} envoie les tores algébriques sur les \mathcal{G} -réseaux, c'est-à-dire les \mathbf{Z} -modules libres de rang fini munis d'une action continue de \mathcal{G} . Une variété torique généralisée est une variété irréductible V munie d'une action d'un tore algébrique T avec une orbite ouverte U telle que \overline{U} soit isomorphe à \overline{T} .

Les toiseurs universels au-dessus d'une variété torique projective et lisse ont d'abord été étudiés par Colliot-Thélène et Sansuc [CTS1, §4], ils ont ensuite été redécouverts par Delzant dans le cadre de la géométrie symplectique [Del]. Nous reprenons ici la construction de Cox [Co] qui en donne une description particulièrement élégante (cf. Salberger [Sal2] et Madore [Madore]).

Soit V une variété torique généralisée projective et lisse sur un corps F . Notons $\Sigma(1)$ l'ensemble des orbites de codimension 1 dans \overline{V} . On a alors une suite exacte naturelle de \mathcal{G} -réseaux

$$0 \longrightarrow X^*(T) \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \longrightarrow \text{Pic}(\overline{V}) \longrightarrow 0$$

correspondant à une suite de tores algébriques

$$1 \longrightarrow T_{\text{NS}} \longrightarrow T_{\Sigma(1)} \longrightarrow T \longrightarrow 1.$$

On considère alors l'espace affine

$$\mathbf{A}_{\Sigma(1)} = \text{Spec}(F^s[X_\sigma, \sigma \in \Sigma(1)]^{\mathcal{G}}).$$

Pour toute partie I de $\Sigma(1)$, on note H_I le sous-espace affine de $\overline{\mathbf{A}}_{\Sigma(1)}$ défini par le système d'équations

$$X_\sigma = 0 \quad \text{pour } \sigma \in I.$$

Pour tout σ de $\Sigma(1)$, notons $D_\sigma = \bar{\sigma}$ le diviseur correspondant de \bar{V} . On note alors \bar{X} le fermé réunion des sous-espaces H_I pour $I \subset \Sigma(1)$ tel que $\bigcap_{\sigma \in I} D_\sigma = \emptyset$. Ce fermé est défini sur F et l'ouvert $\mathcal{T} = \mathbf{A}_{\Sigma(1)} - X$ de l'espace affine $\mathbf{A}_{\Sigma(1)}$ est une variété torique pour le tore $T_{\Sigma(1)}$. Si x est un point rationnel dans l'orbite ouverte U de V , l'application naturelle $T \rightarrow V$ qui envoie l'élément neutre 1 de T sur x induit une application $T_{\Sigma(1)} \rightarrow V$ qui s'étend en un morphisme $\mathcal{T} \rightarrow V$.

On vérifie que cela fait de $(\mathcal{T}, 1)$ un torseur universel au-dessus de (V, x) . Les torseurs versels au-dessus de V sont isomorphes à \mathcal{T} en tant que variétés. Ils vérifient donc tous l'approximation faible et les points rationnels de V sont denses dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$. Notons que les équations de normes considérées par Hasse sont des exemples de variétés toriques.

Signalons enfin les travaux de Heath-Brown et Skorobogatov qui combinent la méthode du cercle avec les techniques de descente [HBS].

3.2. Techniques de fibration

Cette méthode apparaît déjà dans l'étude faite par Hasse du cas des quadriques : si $n \geq 5$, le passage du cas de $n - 1$ variables à celui de n variables peut se faire en utilisant des fibrations en quadriques.

Étant donné un morphisme $p : V \rightarrow B$, l'objectif est d'étudier si on peut déduire du fait que les obstructions de Brauer-Manin sont les seules pour les fibres de p que cela reste vrai pour V . Cette technique fut notamment explorée par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer dans [CTSSD1] et [CTSSD2], puis par Harari et Skorobogatov pour des fibrations au-dessus de la droite projective (cf. [Sk1], [Ha1], [Ha3] et [Sk2]). Un archétype de ce que donne cette démarche est le résultat suivant :

THÉORÈME 3.10 (Harari [Ha3, proposition 3.1.1]). — *Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K et $p : V \rightarrow \mathbf{P}_K^1$ un morphisme dominant de fibre générique géométriquement irréductible. Supposons que :*

- (i) *les fibres géométriques de p au-dessus de \mathbf{A}_K^1 sont irréductibles et de multiplicité 1,*
- (ii) *la fibre générique géométrique $V_{\overline{K(T)}}$ de p est rationnellement connexe,*
- (iii) *pour presque tout P appartenant à $\mathbf{P}^1(K)$ tel que la fibre V_P soit non singulière, on a*

$$\overline{V_P(K)} = V_P(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}.$$

Alors les points rationnels de V sont denses dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$.

La difficulté est d'approcher les points de $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$ par des points appartenant à l'espace de Brauer-Manin de fibres de l'application p au-dessus de points convenables de $\mathbf{P}^1(K)$. Identifions le corps des fonctions de \mathbf{P}_K^1 avec $K(T)$ et considérons le groupe

$$\text{Br}_{\text{nr}}(K(V)/K(T)) = \bigcap_{v \in \mathcal{P}(K(V)/K(T))} \ker(\partial_v)$$

où ∂_v est le morphisme résidu défini dans le paragraphe 2.2 et $\mathcal{P}(K(V)/K(T))$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de rang un sur $K(V)$ qui sont triviales sur $K(T)$. Le groupe

$$\text{coker}(\text{Br}(K(T)) \longrightarrow \text{Br}_{\text{nr}}(K(V)/K(T)))$$

est fini. Il existe donc un ouvert U de V de sorte que ce conoyau soit engendré par des éléments A_1, \dots, A_r dans l'image de l'application $\text{Br}(U) \rightarrow \text{Br}(K(V))$. Harari montre alors le lemme suivant :

LEMME FORMEL 3.11 (Harari [Ha1, corollaire 2.6.1], [CT6])

Soient V une bonne variété sur le corps de nombres K et U un ouvert non vide de V . Soit B un sous-groupe fini de $\text{Br}(U)$. Soit $(P_v)_{v \in M_K} \in \prod_{v \in M_K} U(K_v)$ tel que pour tout A de $B \cap \text{Br}(V)$, on ait

$$\langle A, (P_v)_{v \in M_K} \rangle_{\mathbf{A}_K} = 0;$$

alors, pour toute partie finie S de M_K , il existe $(M_v)_{v \in M_K}$ appartenant à l'espace des adèles de U tel que $M_v = P_v$ pour $v \in S$ et

$$\forall A \in B, \quad \sum_{v \in M_K} \langle A, M_v \rangle_v = 0.$$

D'autre part, Harari montre qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $\mathbf{P}^1(K)$ de sorte que pour tout P de H , le groupe $\text{Br}(V_P)/\text{Br}_0(V_P)$ pour la fibre soit engendré par les images des éléments A_1, \dots, A_r de $\text{Br}(K(V))$. La fin de la démonstration utilise un argument d'approximation forte pour les ensembles hilbertiens de la droite affine. Enfin l'énoncé donné ici utilise un résultat de Graber, Harris et Starr [GHS] qui montre que la condition de la proposition 3.1.1 de [Ha3] portant sur l'existence d'une section de la fibration sur \overline{K} est automatiquement vérifiée.

3.3. Une liste de résultats

Nous reprenons ici une liste de cas connus donnée par Colliot-Thélène dans un exposé récent [CT5] (*cf.* également [Sk4, § 5.2]).

L'ensemble des points rationnels de V est dense dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$ si V est une variété d'un des types suivants :

- un modèle projectif et lisse d'un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe si le stabilisateur d'un point géométrique est connexe (Voskresenskii, Sansuc [San], Borovoi [Bo2]), ou d'un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe et simplement connexe si le stabilisateur d'un point géométrique est abélien (Borovoi [Bo2]),
- un modèle projectif et lisse d'une intersection complète géométriquement irréductible et non conique de deux quadriques de \mathbf{P}_K^n si $n \geq 8$ (Colliot-Thélène, Sansuc, Swinnerton-Dyer, [CTSSD1] et [CTSSD2]); le groupe de Brauer étant trivial dans ce cas, ces variétés vérifient en fait le principe de Hasse et l'approximation faible,
- une surface fibrée en coniques sur la droite projective lorsque le nombre de fibres géométriques dégénérées est au plus 4 [CT1],

– une hypersurface cubique dans \mathbf{P}_K^n avec 3 points singuliers définis dans leur ensemble sur K , si $n \geq 3$ (Colliot-Thélène, Salberger [CTSa]); si, en outre, $n \neq 4$, alors l'approximation faible est vérifiée,

– une hypersurface cubique non singulière contenant une droite projective définie sur K dans \mathbf{P}_K^n si $n \geq 3$ (Salberger et Skorobogatov [Sa1] et [SaSk] pour $n = 3$, Harari [Ha3, §5.2.2] si $n \geq 4$). Pour $n \geq 4$, on a également l'approximation faible.

Remarque 3.12. — Parmi les cas pour lesquels la question de la densité de $V(K)$ dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$ reste ouverte, on peut mentionner :

– les surfaces cubiques générales; la question de savoir si l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour les surfaces cubiques diagonales sur \mathbf{Q} a été explorée de manière algorithmique dans [CTKS];

– l'intersection complète lisse de deux quadriques dans \mathbf{P}_K^n pour $7 \geq n \geq 4$, la difficulté étant de montrer que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule dans ce cas.

Remarque 3.13. — Sous l'hypothèse de la finitude du groupe de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques, Swinnerton-Dyer a obtenu les résultats qui suivent (cf. [SD2] et [CT6, §2 et 3]).

Si V est la surface projective cubique sur \mathbf{Q} définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^3 a_i T_i^3 = 0$$

où les a_i sont des entiers non nuls sans facteur commun, non divisibles par un cube et vérifiant une des conditions suivantes :

(i) il existe un nombre premier $p \neq 3$ divisant a_0 mais aucun des autres coefficients et un nombre premier $q \neq 3$ divisant a_1 mais aucun des autres coefficients,

(ii) il existe un nombre premier $p \neq 3$ divisant a_0 mais aucun des autres coefficients et tel que les classes de a_1, a_2 et a_3 dans $\mathbf{F}_p^\times / \mathbf{F}_p^{\times 3}$ ne soient pas toutes égales,

alors V vérifie le principe de Hasse.

En outre, toujours sous l'hypothèse de la finitude du groupe de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques sur un corps de nombres, il a montré que toute hypersurface cubique diagonale dans $\mathbf{P}_\mathbf{Q}^n$ pour $n \geq 4$ vérifie le principe de Hasse.

Remarque 3.14. — D'autres résultats ont été obtenus sous l'hypothèse de Schinzel. Cette hypothèse arithmétique forte s'énonce comme suit : soit $(f_i(x))_{1 \leq i \leq m} \in \mathbf{Z}[X]$ une famille de polynômes irréductibles dont les coefficients dominants sont positifs et telle que $\text{pgcd}_{n \in \mathbf{Z}}(\prod_{i=1}^m f_i(n)) = 1$; alors il existe une infinité de n tels que $f_i(n)$ soit premier pour $i = 1, \dots, m$. Le seul cas connu est le théorème de la progression arithmétique avec un polynôme de degré un, qui est utilisé par Hasse dans le passage de 3 à 4 variables pour les formes quadratiques. Ces résultats conditionnels concernent notamment des fibrations au-dessus de \mathbf{P}_K^1 .

3.4. Le cas des espaces principaux homogènes sous une variété abélienne

Jusqu'à maintenant nous sommes essentiellement resté dans le cadre des variétés géométriquement rationnellement connexes. Toutefois, Manin dans son exposé à Nice avait déjà montré que, pour une variété abélienne de groupe de Tate-Shafarevich fini, l'obstruction au principe de Hasse qu'il construisait était la seule. Le cas de l'approximation faible fut traité plus tard par Wang [Wa], ce qui donne l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3.15 (Manin, Wang). — *Soit A une variété abélienne sur le corps de nombres K et soit V un espace principal homogène sous A . Supposons que le groupe de Tate-Shafarevich de A*

$$\text{III}^1(K, A) = \ker\left(H^1(K, A) \longrightarrow \prod_{v \in M_K} H^1(K_v, A)\right)$$

soit fini; alors

- (i) $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}} \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \neq \emptyset$.
- (ii) Notons $M_{K, \infty}$ l'ensemble des places archimédiennes de K . Si l'adhérence de $A(K)$ dans $\prod_{v \in M_{K, \infty}} A(K_v)$ est une partie ouverte de ce produit, alors

$$\overline{V(K)} = V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}.$$

Remarques 3.16

(i) L'accouplement $\langle \alpha, \cdot \rangle_{\mathbf{A}_K}$ étant localement constant, la conclusion de la deuxième assertion ne peut être valide sans l'hypothèse faite.

(ii) La finitude du groupe de Tate-Shafarevich est une conjecture forte mais classique pour les contemplateurs des variétés abéliennes.

4. L'OBSTRUCTION DE BRAUER-MANIN N'EST PAS LA SEULE

4.1. Au-delà du critère de Manin

La notion de torseur versel donne une description alternative de l'obstruction de Brauer-Manin. Si \mathcal{T} est un torseur sur V sous un groupe de type multiplicatif T , alors pour toute extension L de K et pour tout point x de $V(L)$, l'image inverse de \mathcal{T} par x est un espace principal homogène sur $\text{Spec}(L)$ sous T . Notons $\mathcal{T}(x)$ sa classe dans $H^1(L, T)$. On a alors que $\overline{V(K)}$ est contenu dans

$$V(\mathbf{A}_K)^{\mathcal{T}} = \left\{ (x_v)_{v \in M_K} \in V(\mathbf{A}_K) \mid (\mathcal{T}(x_v))_{v \in M_K} \in \text{Im}\left(H^1(K, T) \rightarrow \prod_{v \in M_K} H^1(K_v, T)\right) \right\}.$$

Harari et Skorobogatov ont montré que cette inclusion subsiste si on remplace T par un groupe algébrique linéaire G arbitraire [HS]. Cet argument permet d'expliquer le premier exemple explicite de variété telle que

$$V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad V(K) = \emptyset$$

produit par Skorobogatov en 1999 dans [Sk3]. Cet exemple est donné par les équations affines

$$(X^2 + 1)Y^2 = (X^2 + 2)Z^2 = 3(T^4 - 54T^2 - 117T - 243);$$

un modèle projectif et lisse de cette surface est donné par une surface bielliptique quotient d'un produit $C \times E$ où C et E sont deux courbes de genre 1. Dans le même esprit, Harari dans [Ha4] a créé une méthode fournissant des exemples où $V(K)$ n'est pas dense dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$ à partir de variétés dont le groupe fondamental géométrique n'est pas abélien.

Remarque 4.1. — Harari a montré dans [Ha5] que si G est un groupe linéaire abélien ou connexe, cette construction ne donne pas plus d'informations que l'obstruction de Brauer-Manin : l'espace obtenu contient $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$.

4.2. Lien avec des conjectures de Lang

Soit $V \subset \mathbf{P}_K^n$ une hypersurface lisse de degré d et de dimension supérieure ou égale à trois. Le théorème de Lefschetz permet de montrer que, sous ces hypothèses, le quotient $\text{Br}(V)/\text{Br}_0(V)$ est trivial. Si $V(K)$ était dense dans $V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}}$, il le serait dans $V(\mathbf{A}_K)$. Pour toute telle hypersurface possédant un point rationnel, $V(K)$ serait dense pour la topologie de Zariski. Mais si $d > n$, V est de type général et cela contredirait une conjecture de Lang qui prédit que les points rationnels d'une variété de type général ne sont pas denses pour la topologie de Zariski [La, §3].

L'implication

$$V(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}} \neq \emptyset \quad \implies \quad V(K) \neq \emptyset$$

est également en contradiction avec des conjectures de Lang, bien que cela soit plus délicat à montrer. En 1995, Sarnak et Wang [SW] considèrent l'hypersurface de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^5$ définie par l'annulation du polynôme

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = X_5^{1130} + H(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$$

avec

$$\begin{aligned} H(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = & \sum_{i=0}^4 X_i^{1130} - 15(X_0 X_1^4)^{226} + (X_1 X_2^4)^{226} \\ & + (X_2 X_3^4)^{226} + (X_3 X_4^4)^{226} + (X_4 X_0^4)^{226} + (X_0^2 X_2^3)^{226} \\ & + (X_1^2 X_3^3)^{226} + (X_2^2 X_4^3)^{226} + (X_3^2 X_0^3)^{226} + (X_4^2 X_1^3)^{226}. \end{aligned}$$

Cette variété est hyperbolique au sens de Brody ou Kobayashi. Des conjectures de Lang prévoient que X ne possède qu'un nombre fini de points. Par conséquent, l'hy-persurface X_k de \mathbf{P}_K^4 d'équation

$$F(kX_2, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = 0$$

ne peut admettre de point rationnel pour k assez grand. Mais $X_k(\mathbf{A}_K)^{\text{Br}} \neq \emptyset$ pour une infinité de valeurs de k . Ces exemples ne peuvent pas être non plus expliqués par la construction d'Harari et Skorobogatov.

Plus récemment, Poonen dans [Po] montre que les conjectures de Lang entraînent l'existence d'intersections complètes lisses de dimension 3 dans \mathbf{P}_K^N pour lesquelles le principe de Hasse n'est pas vérifié. Une telle variété est simplement connexe et de groupe de Brauer trivial et, à nouveau, l'absence de points rationnels ne peut donc être expliquée ni par la méthode de Manin ni par ses extensions non abéliennes.

5. L'OBSTRUCTION DE BRAUER-MANIN EST-ELLE LA SEULE ?

La formule de réciprocité du corps de classes permet également de construire des obstructions à l'existence d'un 0-cycle de degré 1. Plus généralement, ce paragraphe est consacré aux questions d'existence de cycles algébriques.

En combinant la dualité de Poitou-Tate avec la dualité de Poincaré, Saito [Sa] a construit pour toute bonne variété de dimension d sur K une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_{\text{ét}}^{2i}(V, \mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow \prod_{v \in M_K} \tilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow \text{Hom}(H_{\text{ét}}^{2j}(V, \mu_n^{\otimes j}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow \dots$$

où $j = d + 1 - i$, où $\tilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ désigne $H_{\text{ét}}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ pour une place v non archi-médienne, vaut $\{0\}$ si v est complexe et est un groupe fini de 2-torsion muni d'un morphisme naturel

$$H_{\text{ét}}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow \tilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$$

lorsque v est réelle et où $\prod_{v \in M_K} \tilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ est le produit restreint des groupes précédents relativement aux images de $H_{\text{ét}}^{2i}(\mathcal{V}_{\mathcal{O}_v}, \mu_n^{\otimes i})$ pour un modèle projectif et lisse \mathcal{V} de V sur un ouvert $\text{Spec}(\mathcal{O}_S)$ de $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ sur lequel n est inversible. Notons $\text{CH}^i(V)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i de V modulo l'équivalence rationnelle. En utilisant l'application cycle

$$\text{cl}_n : \text{CH}^i(V_L) \longrightarrow H_{\text{ét}}^{2i}(V_L, \mu_n^{\otimes i})$$

pour toute extension L de K , on obtient un accouplement (cf. [CT3])

$$(\cdot, \cdot) : H_{\text{ét}}^{2j}(V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) \times \prod_{v \in M_K} \text{CH}^i(V_{K_v}) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui est trivial sur l'image de $\text{CH}^i(V)$ dans $\prod_{v \in M_K} \text{CH}^i(V_{K_v})$. Colliot-Thélène [CT3] énonce alors la conjecture suivante :

CONJECTURE 5.1. — Soit $z = (z_v)_{v \in M_K}$ un élément de $\prod_{v \in M_K} \text{CH}^i(V_{K_v})$. Supposons que

$$\forall \xi \in H_{\text{ét}}^{2j}(V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)), \quad (\xi, z) = 0;$$

alors, pour tout $n > 0$, il existe $y \in \text{CH}^i(V)$ tel que pour toute place non archimédienne v de K , on ait $\text{cl}_n(y) = \text{cl}_n(z_v)$ dans $H_{\text{ét}}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$.

Remarques 5.2

(i) Si le groupe de Tate-Shafarevich de la variété de Picard de V est fini, la conjecture est vraie pour $i = 1$.

(ii) Pour $i = \dim(V)$, on obtient un accouplement

$$\text{Br}(V) \times \prod_{v \in M_K} \text{CH}_0(V_{K_v}) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

où CH_0 désigne le groupe des 0-cycles modulo l'équivalence rationnelle. Dans ce cas, il est induit par les accouplements naturels

$$\begin{aligned} \text{Br}(V) \times Z_0(V_{K_v}) &\longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ \left(A, \sum_P n_P P\right) &\longmapsto \text{inv}_v \left(\sum_P n_P \text{cores}_{K_v(P)/K_v}(A(P))\right) \end{aligned}$$

définis par Manin [Ma1]. Une condition nécessaire pour l'existence d'un 0-cycle de degré 1 sur K est donc l'existence d'une famille de 0-cycles $z = (z_v)_{v \in M_K}$ tous de degré 1 tels que

$$\forall A \in \text{Br}(V), \quad (A, z) = 0.$$

La conjecture impliquerait que cette condition est également suffisante; autrement dit, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un 0-cycle de degré un serait la seule.

Cette conjecture a été vérifiée pour $i = \dim(V)$ dans le cas des bonnes variétés V pour lesquelles il existe un morphisme propre et surjectif $\pi : V \rightarrow C$, de fibre générique une variété de Severi-Brauer dont l'indice est sans facteur carré, au-dessus d'une courbe C projective et lisse, dont on suppose que sa jacobienne a un groupe de Tate-Shafarevich fini. Cela a été démontré par Frossard [Fr] en utilisant des résultats de Salberger [Sal1] et Colliot-Thélène [CT4] (cf. également l'article de van Hamel [vH]).

6. AUTRES CADRES

Mentionnons pour terminer que la problématique du principe de Hasse et de l'approximation faible a également été considérée dans un cadre fonctionnel :

– Dans le cas où le corps de base est $K = k(C)$ où C est une courbe projective, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos. En particulier, Colliot-Thélène et Gille ont montré dans [CTG] que l’approximation faible vaut pour les K -variétés géométriquement rationnellement connexes qui se ramènent par des fibrations à des espaces homogènes sous des groupes linéaires connexes.

– Le cas fonctionnel réel où le corps de base est le corps des fonctions d’une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps des réels \mathbf{R} . En particulier, Ducros [Du1] et Scheiderer [Sc] ont montré que le principe de Hasse vaut pour les espaces principaux homogènes sous un groupe semi-simple simplement connexe. D’autre part, Ducros a prouvé que l’analogue de l’obstruction de Brauer-Manin dans ce cadre est la seule pour les fibrés en coniques ou, plus généralement, en variétés de Severi-Brauer au-dessus de la droite projective ([Du2], [Du3]).

Remerciements. — Je remercie chaleureusement ceux qui ont accepté de relire ce texte dans un délai incroyablement bref et, en particulier, J.-L. Colliot-Thélène, A. Ducros, D. Harari et G. Rémond.

RÉFÉRENCES

- [Az] J.-P. AZRA – « Relations diophantiennes et la solution négative du 10^e problème de Hilbert (d’après M. Davis, H. Putnam, J. Robinson & I. Matiasевич) », in *Sém. Bourbaki (1970/71)*, Exp. n° 383, Lect. Notes in Math., vol. 244, Springer-Verlag, 1971, p. 11–28.
- [Bir] B.J. BIRCH – « Forms in many variables », *Proc. Roy. Soc. London* **265A** (1962), p. 245–263.
- [Bo1] M.V. BOROVOI – « Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology », *Duke Math. J.* **72** (1993), n° 1, p. 217–239.
- [Bo2] ———, « The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer », *J. Reine Angew. Math.* **473** (1996), p. 181–194.
- [Bki] N. BOURBAKI – *Variétés différentielles et analytiques, fascicule de résultats*, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1988.
- [Ca] J.W.S. CASSELS – *Lectures on elliptic curves*, London mathematical society student texts, vol. 24, Cambridge university press, Cambridge, 1991.
- [Ch] F. CHÂTELET – « Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques », *Enseignement Math. (2)* **5** (1959), p. 153–170.
- [Che] V.I. CHERNOUSOV – « The Hasse principle for groups of type E_8 », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **306** (1989), n° 5, 1059–1063; English transl. in *Soviet Math. Dokl.* **39** (1989), n° 3, p. 592–596.
- [CT1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – « Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4 », in *Séminaire de théorie des nombres (Paris 1988–1989)* (C. Goldstein ed.), Progress in Math., vol. 91, Birkhäuser, Basel, 1990, p. 43–53.

- [CT2] ———, « L'arithmétique des variétés rationnelles », *Ann. Fac. Sci. Toulouse (6)* **1** (1992), n° 3, p. 295–336.
- [CT3] ———, « Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale », in *Algebraic K-theory (Seattle, 1997)* (W. Raskind & C. Weibel, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, p. 1–12.
- [CT4] ———, – « Principe local-global pour les zéro-cycles sur les surfaces réglées », *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), n° 1, p. 101–124.
- [CT5] ———, « The local-global principle for rational points and zero-cycles », Raymond and Beverley Sackler distinguished lectures in mathematics, Tel Aviv University, 2003.
- [CT6] ———, « Points rationnels sur les fibrations », in *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001)* (K. Böröczky, J. Kollár & T. Szamuely, eds.), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 2003, p. 171–221.
- [CTCS] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. CORAY & J.-J. SANSUC – « Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles », *J. Reine Angew. Math.* **320** (1980), p. 150–191.
- [CTG] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & P. GILLE – « Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable », in *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, 2002)* (B. Poonen & Y. Tschinkel eds.), Progress in Math., vol. 226, Birkhäuser, Basel, 2004, p. 121–134.
- [CTKS] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. KANEVSKY & J.-J. SANSUC – « Arithmétique des surfaces cubiques diagonales », in *Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985)*, Lect. Notes in Math., vol. 1290, Springer-Verlag, Berlin, 1987, p. 1–108.
- [CTSal] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & P. SALBERGER – « Arithmetic on some singular cubic hypersurfaces », *Proc. London Math. Soc. (3)* **58** (1989), n° 3, p. 519–549.
- [CTS1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & J.-J. SANSUC – « Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **282** (1976), p. 1113–1116.
- [CTS2] ———, « Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **284** (1977), p. 967–970.
- [CTS3] ———, « La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **284** (1977), p. 1215–1218.
- [CTS4] ———, « La descente sur les variétés rationnelles », in *Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979)* (A. Beauville, éd.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, p. 223–237.
- [CTS5] ———, « La descente sur les variétés rationnelles, II », *Duke Math. J.* **54** (1987), n° 2, p. 375–492.
- [CTSSD1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC & H.P.F. SWINNERTON-DYER – « Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I », *J. für Math.* **373** (1987), p. 37–107.

- [CTSSD2] ———, « Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II », *J. für Math.* **374** (1987), p. 72–168.
- [Co] D. COX – « The homogeneous coordinate ring of a toric variety », *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), n° 1, p. 17–50.
- [Del] T. DELZANT – « Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment », *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), n° 3, p. 315–339.
- [De] J.-M. DESHOILLERS – « L’étude des formes cubiques rationnelles via la méthode du cercle (d’après D.R. Heath-Brown, C. Hooley et R.C. Vaughan) », in *Sém. Bourbaki (1989/90)*, Exp. n° 720, Astérisque, vol. 189-190, Société mathématique de France, 1990, p. 155-177.
- [Du1] A. DUCROS – « Principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous les groupes classiques sur un corps de dimension cohomologique virtuelle au plus 1 », *Manuscripta Math.* **89** (1996), n° 3, p. 335–354.
- [Du2] ———, « L’obstruction de réciprocity à l’existence de points rationnels pour certaines variétés sur le corps des fonctions d’une courbe réelle », *J. Reine Angew. Math.* **504** (1998), p. 73–114.
- [Du3] ———, « Fibrations en variétés de Severi-Brauer au-dessus de la droite projective sur le corps des fonctions d’une courbe réelle », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), n° 1, p. 71–75.
- [Ei] M. EICHLER – « Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme », *Math. Z.* **43** (1938), p. 481–494.
- [Fr] E. FROSSARD – « Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles sur des fibrations en variétés de Severi-Brauer », *J. Reine Angew. Math.* **557** (2003), p. 81–101.
- [GHS] T. GRABER, J. HARRIS & J. STARR – « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), n° 1, p. 57–67.
- [Gr] A. GROTHENDIECK – « Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968, p. 88–188.
- [vH] J. VAN HAMEL – « The Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on Severi-Brauer fibrations over curves », *J. London Math. Soc. (2)* **68** (2003), n° 2, p. 317–337.
- [Ha1] D. HARARI – « Méthode des fibrations et obstruction de Manin », *Duke Math. J.* **75** (1994), n° 1, p. 221–260.
- [Ha2] ———, « Obstructions de Manin transcendantes », in *Number theory (Paris 1993-1994)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 235, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, p. 75–87.
- [Ha3] ———, « Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **125** (1997), p. 143–166.
- [Ha4] ———, « Weak approximation and non-abelian fundamental groups », *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4)* **33** (2000), n° 4, p. 467–484.
- [Ha5] ———, « Groupes algébriques et points rationnels », *Math. Ann.* **322** (2002), n° 4, p. 811–826.

- [HS] D. HARARI & A.N. SKOROBOGATOV – « Non-abelian cohomology and rational points », *Compositio Math.* **130** (2002), n° 3, p. 241–273.
- [Harder1] G. HARDER – « Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen­gruppen, I », *Math. Z.* **90** (1965), p. 404–428.
- [Harder2] ———, « Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen­gruppen, II », *Math. Z.* **92** (1966), p. 396–415.
- [Harder3] ———, « Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen », *Jber. Deutsche Math.-Verein.* **70** (1967/68) Heft 4, Abt. 1, p. 182–216.
- [Hasse1] H. HASSE – « Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen », *J. Reine Angew. Math.* **152** (1923), p. 129–148.
- [Hasse2] ———, « Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol », *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl. H 1* (1931), p. 64–69.
- [HB] D.R. HEATH-BROWN – « Cubic forms in ten variables », *Proc. London Math. Soc. (3)* **47** (1983), n° 2, p. 225–257.
- [HBS] D.R. HEATH-BROWN & A. SKOROBOGATOV – « Rational solutions of certain equations involving norms », *Acta Math.* **189** (2002), n° 2, p. 161–177.
- [Ho1] C. HOOLEY – « On nonary cubic forms », *J. Reine Angew. Math.* **386** (1988), p. 32–98.
- [Ho2] ———, « On nonary cubic forms. III », *J. Reine Angew. Math.* **456** (1994), p. 53–63.
- [Is] V.A. ISKOVSKIĖ – « A counterexample to the Hasse principle for systems of two quadratic forms in five variables », *Mat. Zametki* **10** (1971), p. 253–257; English transl. in *Math. Notes* **10** (1971), p. 575–577.
- [Kn] M. KNESER – « Hasse principle for H^1 of simply connected groups », in *Algebraic groups and discontinuous subgroups (Boulder, 1965)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 9, 1966, p. 159–163.
- [Lan] W. LANDHERR – « Über einfache Liesche Ringe », *Abh. Math. Semin. Hamb. Univ.* **11** (1935), p. 41–64.
- [La] S. LANG – *Number Theory III, diophantine geometry*, Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [LW] S. LANG & A. WEIL – « Number of points of varieties in finite fields », *Amer. J. Math.* **76** (1954), p. 819–827.
- [Li] C.-E. LIND – *Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven von Geschlecht Eins*, Diss. Uppsala, 1940.
- [Madore] D. MADORE – « Very free R-equivalence on toric models », 2003.
- [Ma1] Y.I. MANIN – « Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne », in *Actes du congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970)*, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 401–411.
- [Ma2] ———, *A course in mathematical logic*, Graduate Texts in Math., vol. 53, Springer-Verlag, New York, 1977.

- [Ma3] ———, *Cubic forms (second edition)*, North-Holland Math. Library, vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [Mi] H. MINKOWSKI – « Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können », *J. Reine Angew. Math.* **106** (1890), p. 5–26.
- [NSW] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT & K. WINGBERG – *Cohomology of number fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [Ni] H. NISHIMURA – « Some remarks on rational points », *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.* **29** (1955), p. 189–192.
- [PR] V.P. PLATONOV & A. RAPINCHUK – *Algebraic groups and number theory*, Pure and applied mathematics, vol. 139, Academic press, London, 1991.
- [Po] B. POONEN – « The Hasse principle for complete intersections in projective space », in *Rational points on algebraic varieties*, Progress in Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 307–311.
- [Re] H. REICHARDT – « Einige im Kleinen überall lösbare, im Großen unlösbare diophantische Gleichungen », *J. Reine Angew. Math.* **184** (1942), p. 12–18.
- [Sa] S. SAITO – « A global duality theorem for varieties over global fields », in *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, 1987)* (J.F. Jardine & V.P. Snaith, eds.), Kluwer Academic Publishers, Lake Louise, 1987, 1989, p. 425–444.
- [Sal1] P. SALBERGER – « Zero-cycles on rational surfaces over number fields », *Invent. Math.* **91** (1988), n° 3, p. 505–524.
- [Sal2] ———, « Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties », in *Nombre et répartition de points de hauteur bornée*, Astérisque, vol. 251, Société mathématique de France, Paris, 1998, p. 91–258.
- [SaSk] P. SALBERGER & A.N. SKOROBOGATOV – « Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms », *Duke Math. J.* **63** (1991), n° 2, p. 517–536.
- [San] J.-J. SANSUC – « Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres », *J. Reine Angew. Math.* **327** (1981), p. 12–80.
- [SW] P. SARNAK & L. WANG – « Some hypersurfaces in \mathbf{P}^4 and the Hasse principle », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321** (1995), p. 319–322.
- [Sc] C. SCHEIDERER – « Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces over fields of virtual cohomological dimension one », *Invent. Math.* **125** (1996), n° 2, p. 307–365.
- [Sch] W.M. SCHMIDT – « The density of integer points on homogeneous varieties », *Acta. Math.* **154** (1985), n° 3–4, p. 243–296.
- [Sei] A. SEIDENBERG – « A new decision method for elementary algebra », *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 365–374.
- [Se1] J.-P. SERRE – *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

- [Se2] ———, *Cours d'arithmétique*, Le mathématicien, PUF, Paris, 1988.
- [Skinner] C.M. SKINNER – « Forms over number fields and weak approximation », *Compositio Math.* **106** (1997), n° 1, p. 11–29.
- [Sk1] A.N. SKOROBOGATOV – « On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation », in *Séminaire de théorie des nombres (Paris, 1988–1989)* (C. Goldstein, ed.), Progress in Math., vol. 91, Birkhäuser, Boston, 1990, p. 205–219.
- [Sk2] ———, « Descent on fibrations over the projective line », *Amer. J. Math.* **118** (1996), n° 5, p. 905–923.
- [Sk3] ———, « Beyond the Manin obstruction », *Invent. Math.* **135** (1999), n° 2, p. 399–424.
- [Sk4] ———, *Torsors and rational points*, Cambridge tracts in math., vol. 144, Cambridge University Press, 2001.
- [SD1] H.P.F. SWINNERTON-DYER – « Two special cubic surfaces », *Mathematika* **9** (1962), p. 54–56.
- [SD2] ———, « The solubility of diagonal cubic surfaces », *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4)* **34** (2001), p. 891–912.
- [Ta] A. TARSKI – *A decision method for elementary algebra and geometry*, RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948.
- [Wa] L. WANG – « Brauer-Manin obstruction to weak approximation on abelian varieties », *Israel J. Math.* **94** (1996), p. 189–200.
- [Wi] O. WITTENBERG – « Transcendental Brauer-Manin obstruction on a pencil of elliptic curves », in *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, 2002)* (B. Poonen & Y. Tschinkel eds.), Progress in Math., vol. 226, Birkhäuser, Basel, 2004, p. 259–267.

Emmanuel PEYRE

Institut Fourier

UFR de Mathématiques, UMR 5582

Université de Grenoble I et CNRS

BP 74

F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex

E-mail : Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr

COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ

par Jean-Pierre SERRE

1. INTRODUCTION : LE CAS DU GROUPE LINÉAIRE

1.1. Rappels

Soient k un corps commutatif et Γ un groupe. Un Γ -module (ou une *représentation linéaire* de Γ) est un k -espace vectoriel V de dimension finie, muni d'une action linéaire de Γ .

On dit que :

(1.1.1) V est *irréductible* (ou *simple*) si $V \neq 0$ et si V ne contient aucun sous- Γ -module distinct de 0 et de V .

(1.1.2) V est *complètement réductible* (ou *semi-simple*) si V est somme directe de Γ -modules irréductibles.

(1.1.3) V est *indécomposable* si $V \neq 0$, et si V n'est pas somme directe de deux sous- Γ -modules $\neq 0$.

[Dans la suite, nous abrègerons en écrivant *ir*, *cr*, *ind* respectivement.]

Les propriétés suivantes sont bien connues :

(1.1.4) V est *cr* si et seulement si, pour tout sous-module W de V , il existe un sous-module W' de V tel que $V = W \oplus W'$.

(1.1.5) Si V est somme directe de sous-modules V_i , alors V est *cr* \Leftrightarrow tous les V_i sont *cr*.

On connaît moins bien les propriétés relatives au produit tensoriel $V \otimes V'$ de deux représentations V et V' . La plupart des cours d'Algèbre se bornent à définir le produit en question, et à en démontrer des propriétés évidentes. Aucun, à ma connaissance, ne signale le résultat très frappant suivant, dû à Chevalley :

THÉORÈME 1.1 ([Ch55, p. 88]). — *Supposons k de caractéristique 0. Si V et V' sont des Γ -modules complètement réductibles, leur produit tensoriel $V \otimes V'$ est complètement réductible.*

(Noter que l'on ne fait aucune hypothèse sur le groupe Γ .)

Lorsqu'on veut étendre ce théorème à la caractéristique p (avec des conditions restrictives sur $\dim V$ et $\dim V'$, cf. prop. 5.8), il est utile de disposer d'une notion de *complète réductibilité* dans laquelle le groupe linéaire $\mathbf{GL}(V)$ est remplacé par un groupe réductif quelconque. Cette notion peut se définir, soit en termes de sous-groupes paraboliques, soit en termes d'*immeubles de Tits*, cf. [Se97b], [Se98]. C'est ce que nous allons voir. Les §§ 2,3 contiennent les énoncés généraux, et les §§ 4,5 donnent des critères plus précis, ainsi que diverses applications.

1.2. Exemple : l'immeuble de $\mathbf{GL}(V)$

Soit V un k -espace vectoriel de dimension finie n . On supposera $n \geq 2$ (sinon, l'immeuble correspondant est vide).

1.2.1. *Définition.* — L'immeuble de $\mathbf{GL}(V)$, appelé aussi immeuble de V , est un complexe simplicial $X = X(V)$, de dimension $n - 2$, qui est défini de la manière suivante :

– les sommets de X correspondent bijectivement aux sous-espaces vectoriels de V distincts de 0 et de V . (Si W est un tel sous-espace, on note x_W le sommet correspondant.)

– un ensemble s de sommets de X est un simplexe de X si et seulement si les sous-espaces vectoriels correspondants forment un drapeau, i.e. une filtration strictement croissante de V . [Si l'on préfère la géométrie projective à la géométrie affine, on peut aussi voir les sommets de X comme les sous-variétés projectives de l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$, distinctes de \emptyset et de $\mathbf{P}(V)$.]

1.2.2. *Type.* — Si $x = x_W$ est un sommet de X , on note $\text{type}(x)$ la dimension de l'espace vectoriel W . L'ensemble des types de sommets est l'ensemble $I = \{1, \dots, n - 1\}$.

1.2.3. *Opposition.* — Deux sommets $x = x_W$ et $x' = x_{W'}$ sont dits *opposés* si V est somme directe de W et W' ; leurs types se correspondent par l'involution $t \mapsto n - t$ de I . Deux simplexes sont *opposés* si tout sommet de l'un est opposé à un sommet de l'autre. En termes de filtrations, cela correspond à la notion usuelle de *filtrations opposées*.

1.2.4. *Sous-groupes paraboliques.* — Les sous-groupes paraboliques de $\mathbf{GL}(V)$ sont les stabilisateurs des drapeaux de V . Les sous-groupes paraboliques *propres* (i.e. distincts de $\mathbf{GL}(V)$) correspondent donc aux simplexes non vides de l'immeuble X ; les paraboliques maximaux correspondent aux sommets de X et le groupe $\mathbf{GL}(V)$ au simplexe \emptyset . Deux simplexes s et s' , correspondant aux paraboliques P et P' , sont opposés au sens du n° 1.2.3 si et seulement si P et P' sont opposés au sens

usuel du terme, c'est-à-dire si $P \cap P'$ est un sous-groupe de Levi de chacun d'eux, cf. [BT65, 4.8].

1.2.5. Appartements. — Soit T un tore déployé maximal de $\mathbf{GL}(V)$. L'action de T sur V décompose V en somme directe de droites D_i . Si, dans la définition de X , on se restreint aux W qui sont sommes directes de certaines des D_i , on obtient un sous-complexe C de X qui est isomorphe au *complexe de Coxeter* du groupe symétrique \mathcal{S}_n . D'un point de vue combinatoire, c'est la subdivision barycentrique du bord d'un $(n - 1)$ -simplexe; topologiquement, c'est une sphère de dimension $n - 2$. Un sous-complexe de X obtenu de cette façon est appelé un *appartement* de X . Par construction, les appartements correspondent aux tores déployés maximaux de $\mathbf{GL}(V)$.

1.2.6. Exemple. — Prenons $n = 3$. L'immeuble correspondant est un *graphe*, qui a deux types de sommets : ceux qui correspondent aux points du plan projectif et ceux qui correspondent aux droites. Deux sommets sont voisins (i.e. sont les extrémités d'une arête) si et seulement si ils correspondent à un point situé sur une droite : la relation de voisinage est la relation d'incidence. Les appartements sont les hexagones $a - B - c - A - b - C - a$ associés aux triangles ABC , de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$: la théorie de Tits transforme triangles en hexagones !

1.3. Traductions immobilières : le cas de $\mathbf{GL}(V)$

Si V est un Γ -module, le groupe Γ opère de façon naturelle sur l'immeuble $X = X(V)$ du n° 1.2. Cette action respecte les types (au sens du n° 1.2.2). En particulier, si un simplexe s de X est stable par Γ , il est fixé par Γ . Si P est le sous-groupe parabolique correspondant à s , P est normalisé par Γ , i.e. contient Γ (puisque'un parabolique est son propre normalisateur). Le sous-espace X^Γ des points fixes de Γ est un *sous-complexe simplicial* de X , et les définitions du n° 1.1 se traduisent de la façon suivante :

(1.3.1) V est *irréductible* $\Leftrightarrow X^\Gamma = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma$ n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{GL}(V)$.

(1.3.2) V est *complètement réductible* \Leftrightarrow pour tout sommet x de X^Γ il existe un sommet x' de X^Γ qui est opposé à x (cf. 1.2.3) \Leftrightarrow pour tout parabolique maximal P contenant Γ , il existe un parabolique P' opposé à P qui contient Γ .

(1.3.3) V est *indécomposable* $\Leftrightarrow X^\Gamma$ ne contient aucun couple de sommets opposés \Leftrightarrow il n'existe pas de couple (P, P') de paraboliques propres de $\mathbf{GL}(V)$ qui soient opposés et contiennent tous deux Γ .

Il n'est pas difficile de montrer que (1.3.2) équivaut à :

(1.3.2') pour tout simplexe s de X^Γ , il existe un simplexe s' de X^Γ qui est opposé à $s \Leftrightarrow$ pour tout parabolique P (maximal ou pas) contenant Γ , il existe un parabolique opposé à P qui contient Γ .

2. LA COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ DANS LES IMMEUBLES SPHÉRIQUES

2.1. Immeubles sphériques

Un immeuble sphérique est un complexe simplicial X , muni d'une famille de sous-complexes appelés *appartements*. Je renvoie à [Ti74] pour la liste des axiomes ; voir aussi [Br89], [Ron89] et [TW02, §40]. Voici quelques-unes des propriétés de ces immeubles :

2.1.1. Dimension et rang. — Le complexe X est de dimension finie. L'entier $r = \dim(X) + 1$ est appelé le *rang* de X . Lorsque $X = \emptyset$, on convient que $\dim(X) = -1$, de sorte que $r = 0$. Tout simplexe maximal est de dimension $\dim(X)$.

2.1.2. Types des sommets. — Soit $\text{som}(X)$ l'ensemble des sommets de X . Il existe une unique relation d'équivalence R sur $\text{som}(X)$ ayant les propriétés suivantes :

- (a) L'ensemble quotient $\text{som}(X)/R$ a r éléments.
- (b) Deux sommets appartenant à un même simplexe ne sont R -équivalents que s'ils sont égaux.

Si $x \in \text{som}(X)$, l'image de x dans $I = \text{som}(X)/R$ est appelée le *type* de x , et notée $\text{type}(x)$. On dit qu'un automorphisme f de X *préserve les types* si x et $f(x)$ ont même type quel que soit $x \in \text{som}(X)$.

Exemple. — Lorsque X est l'immeuble $X(V)$ du n° 1.2, on peut identifier I à $\{1, \dots, n-1\}$, cf. 1.2.2.

2.1.3. Appartements. — Un appartement est isomorphe au complexe de Coxeter d'un groupe de Coxeter fini qui ne dépend que de X ; c'est une sphère de dimension $r-1$. Deux simplexes quelconques sont contenus dans un appartement.

2.1.4. Opposition et géodésiques. — Soient x et y deux points de X (c'est-à-dire de sa réalisation géométrique), et soit A un appartement les contenant. On dit que x et y sont *opposés* dans X s'ils le sont dans A (ce qui a un sens puisque A est un complexe de Coxeter) ; cela ne dépend pas du choix de A . Deux simplexes sont dits opposés si chaque sommet de l'un est opposé à un sommet de l'autre. Si x et y ne sont pas opposés, il y a une unique géodésique xy qui les joint dans A . Elle est indépendante (paramétrisation comprise) du choix de A .

2.1.5. Convexité. — Une partie Y de X est dite *convexe*, si l'on a $xy \subset Y$ pour tout couple de points x, y de Y , non opposés. On dit que Y est *strictement convexe* si Y est convexe et ne contient aucun couple de points opposés (c'est la notion de « convexité » de [Ti74] et de [Mu65, p.63]).

2.1.6. Sphères de Levi. — Une sphère de Levi est un sous-complexe S de X , qui est contenu dans un appartement A , et qui est l'intersection de A (vu comme sphère) avec un sous-espace vectoriel.

2.1.7. Remarque. — Ces définitions se présentent de façon un peu plus naturelle si l'on introduit l'immeuble vectoriel X^{vect} associé à X , dans lequel les points de X sont remplacés par des demi-droites, ayant en commun un point « 0 » (cf. [Rou78]). Les appartements deviennent alors des espaces vectoriels de dimension r , et les sphères de Levi des sous-espaces vectoriels définis par l'annulation de certaines racines. Si x et y sont deux points de X^{vect} , leur somme $x + y$ a un sens, et l'on a

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

pourvu que x, y et z appartiennent à un même appartement. Deux points x et x' sont opposés si $x + x' = 0$. Une partie de X est convexe si le cône correspondant de X^{vect} est stable par $(x, y) \mapsto x + y$, autrement dit si son intersection avec tout appartement est un cône convexe au sens usuel du terme.

2.1.8. Immeuble résiduel. — Soit s un simplexe de X de dimension m . On note X_s , ou $\text{St}(s)$, l'immeuble résiduel (« link ») de X en s , cf. [Ti74]). Rappelons que les simplexes de X_s de dimension d correspondent bijectivement aux simplexes de X contenant s de dimension $d + m + 1$ (de sorte que le simplexe vide de X_s correspond à s). Si Y est un sous-complexe de X , les simplexes de Y contenant s définissent un sous-complexe Y_s de X_s ; si Y est convexe, il en est de même de Y_s .

Soit S une sphère de Levi, et soient s et s' deux simplexes de S de dimension maximale. Il y a un isomorphisme canonique $\text{proj} : X_s \rightarrow X_{s'}$ (défini dans [Ti74, §3.19]). Ces isomorphismes satisfont à la condition de transitivité usuelle, ce qui permet d'écrire X_S à la place de X_s . L'immeuble X_S peut être appelé *l'immeuble* de S . Les sphères de Levi de X_S correspondent bijectivement aux sphères de Levi de X contenant S .

2.2. Complète réductibilité et contractibilité

2.2.1. Définition. — Une partie Y de X est dite *complètement réductible* (en abrégé : X -cr, ou simplement cr) si elle est convexe, et si, pour tout point $y \in Y$, il existe $y' \in Y$ qui est opposé à y .

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout au cas où Y est un sous-complexe convexe de X (ou, parfois, de sa subdivision barycentrique); dans ce cas, la condition cr équivaut à dire que, pour tout simplexe s de Y , il existe un simplexe s' de Y qui est opposé à s (il suffit même que tout sommet de Y ait un opposé dans Y , cf. th. 2.2 ci-dessous).

Exemple de sous-complexe convexe. — Prenons pour X l'immeuble $X(V)$ du n° 1.2. Soit L un ensemble de sous-espaces vectoriels de V tel que :

$$W, W' \in L \implies W \cap W' \in L \quad \text{et} \quad W + W' \in L.$$

Soit Y_L le sous-complexe plein de $X(V)$ dont les sommets sont les x_W , pour $W \in L$ et $W \neq 0, V$ (cf. 1.2.1). Alors Y_L est *convexe*, et l'on obtient ainsi tous les sous-complexes convexes de $X(V)$.

2.2.2. Nous allons donner un critère topologique permettant de reconnaître si un sous-complexe convexe est cr. Précisons que nous munissons X de la topologie limite inductive : une partie de X est ouverte si ses intersections avec les sous-complexes finis de X le sont. (Une autre topologie est souvent utile : celle définie par la distance angulaire ; elle n'interviendra pas ici.)

Rappelons d'autre part qu'un espace est *contractile* s'il a le type d'homotopie d'un point ; un espace discret est contractile si et seulement si son cardinal est égal à 1 (l'ensemble vide n'est pas contractile!).

THÉORÈME 2.1 ([Se97b]). — *Soit Y un sous-complexe convexe de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) Y est X -cr.
- (b) Y contient un couple (s, s') de simplexes opposés ayant même dimension que Y .
- (c) Y contient une sphère de Levi S de dimension $\dim(Y)$.
- (d) Y n'est pas contractile.

Démonstration. — (a) \implies (b) est clair.

(b) \implies (c) : le plus petit sous-complexe convexe $C(s, s')$ contenant s et s' est une sphère de Levi.

(c) \implies (d) : la sphère S définit un cycle dans Y qui n'est pas homologue à 0 puisqu'il est de même dimension que Y (ceci ne vaut que si $\dim(Y) \geq 1$, mais le cas $\dim(Y) \leq 0$ est immédiat).

(d) \implies (a) : si Y n'est pas cr, il existe un point $y \in Y$ qui n'a pas d'opposé dans Y , et l'on contracte Y grâce aux géodésiques issues de y . \square

THÉORÈME 2.2. — *Les conditions (a), ..., (d) du th. 2.1 sont équivalentes à :*

- (e) *Pour tout sommet x de Y , il existe un sommet x' de Y qui est opposé à x .*

La démonstration sera donnée au n° 2.2.5 ci-dessous.

Remarques. — 1) Un résultat analogue au th. 2.1 vaut pour les sous-complexes convexes de la subdivision barycentrique de X , à condition d'utiliser d'autres sphères que les sphères de Levi.

2) Supposons que Y soit cr, et non vide. On peut préciser sa structure topologique de la façon suivante :

Choisissons un simplexe s de Y de dimension maximum, et soit $U(s)$ l'ensemble des simplexes de Y qui sont opposés à s . Si $t \in U(s)$, soit $S_t = C(s, t)$ la sphère de Levi définie par s et t . Soit $B = *S_t$ le bouquet des sphères S_t ($t \in U(s)$); le choix d'un point x de s permet d'envoyer B dans Y .

PROPOSITION 2.3. — *L'application $B \rightarrow Y$ ainsi définie est une équivalence d'homotopie.*

(Autrement dit, Y a le type d'homotopie d'un bouquet de n -sphères, où $n = \dim(Y)$.)

Démonstration. — Soit x un point intérieur à s , et soit Y' le complexe obtenu en retirant de Y les intérieurs des simplexes appartenant à $U(s)$. Si $y \in Y'$, il est clair que y n'est pas opposé à x ; de plus, on peut montrer que la géodésique xy est contenue dans Y' . Il en résulte que Y' est contractile. On peut donc contracter Y' en un point sans changer le type d'homotopie de Y . On obtient ainsi le bouquet de sphères B , et la prop. 2.3 s'en déduit. (Noter que cet argument est le même que celui employé par Solomon-Tits [So69] dans le cas particulier où $Y = X$.) \square

On peut aussi se placer à un point de vue homologique. Il est commode d'utiliser les groupes d'homologie réduits $\tilde{H}_i(Y, \mathbf{Z})$; rappelons que ces groupes sont égaux aux groupes d'homologie usuels si $i > 0$ et que $\tilde{H}_0(Y, \mathbf{Z})$ et $\tilde{H}_{-1}(Y, \mathbf{Z})$ sont respectivement le noyau et le conoyau de l'homomorphisme $H_0(Y, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$. En particulier $\tilde{H}_{-1}(Y, \mathbf{Z})$ est 0 si $Y \neq \emptyset$ et est \mathbf{Z} si $Y = \emptyset$. Si Y est contractile, tous les $\tilde{H}_i(Y, \mathbf{Z})$ sont nuls.

PROPOSITION 2.4. — *Si Y est un sous-complexe convexe de dimension n , on a $\tilde{H}_i(Y, \mathbf{Z}) = 0$ pour $i \neq n$, et $\tilde{H}_n(Y, \mathbf{Z})$ est un groupe abélien libre de rang égal à $\text{Card}(U(s))$; il est $\neq 0$ si et seulement si Y est cr.*

Cela résulte de la prop. 2.3.

2.2.3. *Réduction.* — L'énoncé suivant permet souvent de passer de X à l'un des immeubles résiduels X_s du n° 2.1.8.

PROPOSITION 2.5. — *Soit Y un sous-complexe convexe de X , et soit S une sphère de Levi contenue dans Y . Soit X_S l'immeuble associé à S , et soit Y_S le sous-complexe de X_S défini par Y . Pour que Y soit X -cr, il faut et il suffit que Y_S soit X_S -cr.*

(Précisons comment est défini Y_S : on choisit un simplexe s de S de dimension maximum, et l'on prend l'image de Y_s par l'isomorphisme naturel $X_s \rightarrow X_S$.)

La démonstration utilise le lemme suivant ([Ti74, p. 54]) :

LEMME 2.6. — *Soit $\{s, s'\}$ un couple de simplexes opposés, et soient t_1, t_2 deux simplexes de X_s (identifiés à des simplexes de X contenant s). Soit t'_1 le simplexe de $X_{s'}$ correspondant à t_1 par l'isomorphisme $\text{proj} : X_s \rightarrow X_{s'}$. Alors :*

t_1 et t_2 sont opposés dans $X_s \iff t'_1$ et t_2 sont opposés dans X .

2.2.4. *Démonstration de la prop. 2.5.* — Soit s un simplexe de S de dimension maximum, et soit t_1 un simplexe de Y contenant s et de dimension égale à $\dim(Y)$. Supposons d'abord que Y_s soit X_s -cr. Soit s' l'unique simplexe de S opposé à s . Puisque Y_s est cr, il existe un simplexe t_2 de Y contenant s , qui est opposé à t_1 dans Y_s . Le simplexe t'_1 du lemme 2.6 est opposé à t_2 , et est contenu dans Y du fait que Y est convexe (utiliser la définition de l'isomorphisme $\text{proj} : X_s \rightarrow X_{s'}$ donnée dans [Ti74, §3.19]). On en déduit que Y contient la sphère de Levi définie par $\{t_2, t'_1\}$, d'où le fait que Y est cr d'après le th. 2.1. Inversement, si Y est cr, il contient un simplexe opposé à t_1 , d'où une sphère de Levi S' de même dimension que Y ; le sous-complexe S'_s de X_s est une sphère de Levi contenue dans Y_s et de même dimension; il en résulte que Y_s est cr.

2.2.5. *Démonstration du théorème 2.2.* — Il s'agit de prouver que (e) \Leftrightarrow (a). L'implication (a) \Rightarrow (e) est évidente. On prouve (e) \Rightarrow (a) par récurrence sur $\dim(X)$. Si $Y = \emptyset$, l'énoncé est clair. Sinon, choisissons un sommet y de Y , que nous identifions à un simplexe de dimension 0. Puisque Y satisfait à (e), il contient un sommet y' opposé à y . Le couple $\{y, y'\}$ est une sphère de Levi de dimension 0. Vu la prop. 2.5, pour prouver que Y est X -cr il suffit de montrer que le sous-complexe Y_y de l'immeuble résiduel X_y est X_y -cr. Comme $\dim(X_y) = \dim(X) - 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au couple (X_y, Y_y) ; il suffit donc de prouver que Y_y a la propriété (e). Cela revient à montrer que, pour toute arête yz de Y d'extrémité y , il existe une autre arête yz_1 qui est opposée à la précédente dans X_y . Choisissons un sommet z' de Y opposé à z , ce qui est possible d'après (e). Il existe une sphère de Levi D de dimension 1 (« cercle de Levi ») contenant z' et yz . De plus, z' et yz sont contenus dans le demi-cercle formé de la réunion de yz et de la géodésique yz' . Soit z_1 le sommet de la géodésique yz' qui est le plus proche de y , tout en étant distinct de y . L'image D_y de D dans X_y est égale à $\{yz, yz_1\}$, et c'est une sphère de Levi de dimension 0 de X_y ; il en résulte que yz et yz_1 sont opposés dans X_y , comme on le désirait.

2.3. Groupes agissant sur X

2.3.1. Soit Γ un groupe agissant sur X , i.e. muni d'un homomorphisme $\Gamma \rightarrow \text{Aut}(X)$. Soit X^Γ le sous-espace de X fixé par Γ . Il est clair que X^Γ est convexe : si Γ fixe deux points x et y qui ne sont pas opposés, il fixe la géodésique xy . Par analogie avec le n° 1.3, nous dirons que l'action de Γ sur X est :

- *irréductible*, si $X^\Gamma = \emptyset$;
- *complètement réductible*, si X^Γ est cr;
- *indécomposable*, si X^Γ est strictement convexe (cf. n° 2.1.5).

Comme précédemment, nous utiliserons les abréviations ir, cr et ind.

Remarque. — L'espace X^Γ est un sous-complexe de la subdivision barycentrique de X . Si l'action de Γ préserve les types (ce qui sera le cas dans les §§ 3,4,5), c'est

même un sous-complexe de X . D'après le th. 2.1 (complété par la Remarque 2.2.1), X^Γ est contractile si et seulement si l'action de Γ sur X n'est pas cr.

2.3.2. Voici une propriété de réduction, au sens du n° 2.2.3 :

PROPOSITION 2.7. — *Supposons que Γ préserve les types, et qu'il fixe une sphère de Levi S , auquel cas il opère sur l'immeuble X_S correspondant. On a l'équivalence suivante :*

L'action de Γ sur X est cr \Leftrightarrow L'action de Γ sur X_S est cr.

Cela résulte de la prop. 2.5, appliquée au sous-complexe $Y = X^\Gamma$ de X .

2.4. La conjecture du point fixe

CONJECTURE 2.8. — *Soit Y un sous-complexe de X (ou de sa subdivision barycentrique), convexe et contractile. Il existe alors un point de Y qui est fixé par tout automorphisme de X qui stabilise Y .*

(Un tel point mérite d'être appelé un *centre* de Y .)

Cette conjecture a été faite par Tits dans les années 50, sous l'hypothèse supplémentaire que Y est strictement convexe; son but était, semble-t-il, de prouver un résultat sur les groupes unipotents que Borel et lui ont démontré ensuite par une méthode différente, cf. [BT71]. Sous cette forme plus restrictive, la conjecture est signalée par Mumford [Mu65, p. 64] à cause de ses relations avec la « Geometric Invariant Theory » (G.I.T.). En fait, le cas particulier utile pour G.I.T. a été démontré en 1978 par Kempf [Ke78] et Rousseau [Rou78]. Il y a d'ailleurs beaucoup d'autres cas où 2.8 a été démontrée, cf. [Rou78], [Ti97] et [Mue97].

PROPOSITION 2.9. — *Admettons la conjecture 2.8. Soit Y un sous-complexe convexe contractile de X et soit Γ un groupe d'automorphismes de X préservant les types, et stabilisant Y . Alors Y^Γ est contractile.*

Il est clair que Y^Γ est un sous-complexe convexe de X . D'après 2.8, il est non vide. Il s'agit de montrer qu'il n'est pas cr. S'il l'était, il contiendrait une sphère de Levi S de même dimension, cf. th. 2.1. L'image Y_S de Y dans X_S est stable par Γ , et est contractile (prop. 2.5). En lui appliquant la conjecture 2.8, on en déduirait que $(Y^\Gamma)_S = (Y_S)^\Gamma$ est non vide, ce qui est impossible puisque S et Y^Γ ont la même dimension.

PROPOSITION 2.10. — *La prop. 2.9 est vraie (sans supposer que la conjecture 2.8 le soit) dans chacun des deux cas suivants :*

- (a) $\dim(Y) \leq 1$.
- (b) L'image de Γ dans $\text{Aut}(Y)$ est un groupe résoluble fini.

Le cas (a) est clair si $\dim(Y) = 0$, car Y est réduit à un point ; il est facile si $\dim(Y) = 1$ car Y est un arbre de diamètre borné, et un tel arbre a un centre, à savoir le milieu des chemins sans aller-retour de longueur égale au diamètre.

Pour (b), on se ramène par dévissage au cas où Γ agit sur Y par un groupe cyclique d'ordre premier p . Comme les $\tilde{H}_i(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sont tous nuls, il en est de même des $\tilde{H}_i(Y^\Gamma, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ d'après la théorie de Smith ; en effet, cette théorie dit que, si $\Gamma \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ opère sur un complexe Y de dimension finie, et si les $\tilde{H}_i(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sont nuls pour $i > N$ (où N est un entier fixé), il en est de même des $\tilde{H}_i(Y^\Gamma, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ pour $i > N$. Or, si Y n'était pas contractile, il serait cr, et le groupe $\tilde{H}_i(Y^\Gamma, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ correspondant à $i = \dim(Y^\Gamma)$ serait non nul d'après la prop. 2.4.

Action de sous-groupes normaux

PROPOSITION 2.11. — *Admettons la conjecture 2.8. Soit Γ un groupe d'automorphismes de X respectant les types, et soit Γ' un sous-groupe normal de Γ . Si l'action de Γ est cr, il en est de même de celle de Γ' .*

(Comparer avec le résultat bien connu suivant : si une représentation linéaire d'un groupe Γ est complètement réductible, il en est de même de ses restrictions aux sous-groupes normaux de Γ , cf. e.g. [Se94, lemme 5].)

Posons $Y' = X^{\Gamma'}$ et $Y = X^\Gamma = Y'^{\Gamma/\Gamma'}$. Il s'agit de montrer que Y' n'est pas contractile. S'il l'était, la prop. 2.9, appliquée à (X, Y', Γ) , montrerait que $Y = X^\Gamma$ est contractile, contrairement à l'hypothèse faite.

Un argument analogue, utilisant la prop. 2.10, démontre :

PROPOSITION 2.12. — *Si Γ/Γ' est un groupe résoluble fini, la prop. 2.11 est vraie sans supposer que la conjecture 2.8 le soit.*

Nous verrons au § 3.3, th. 3.6, un autre cas du même genre.

3. COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ DES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE RÉDUCTIF

Dans ce qui suit, G désigne un groupe algébrique réductif sur un corps k (cf. [BT65]). Rappelons qu'un tel groupe est lisse et connexe.

Par un « sous-groupe algébrique » de G , on entend un k -sous-groupe algébrique (« défini sur k »).

3.1. L'immeuble de G

3.1.1. *Sous-groupes paraboliques.* — Un sous-groupe parabolique de G est un sous-groupe algébrique P tel que G/P soit une variété projective (définition équivalente : après extension des scalaires, P contient un sous-groupe de Borel). Un tel groupe est lisse, connexe, et coïncide avec son normalisateur dans G . Les propriétés de ces groupes dont nous aurons besoin se trouvent dans [BT65] ; voir aussi [DG70, XXVI].

3.1.2. *L'immeuble de G .* — Sa définition est donnée dans [Ti74, §5]. On le notera $X(G)$ ou simplement X . Ses simplexes correspondent aux sous-groupes paraboliques de G ; si s est un simplexe, on note P_s le sous-groupe parabolique correspondant. Les sommets de X correspondent aux paraboliques propres maximaux ; le simplexe vide correspond à G . Le rang r de X est égal au k -rang semi-simple de G , c'est-à-dire au k -rang (ou *rang relatif*) de $G^{\text{ad}} = G/C_G$, où C_G est le centre de G . On a $r = 0$ (et $X = \emptyset$) si G^{ad} est anisotrope.

3.1.3. *Appartements.* — Ils correspondent aux tores déployés maximaux (de G , ou de G^{ad} , c'est la même chose).

3.1.4. *Types de sommets.* — L'ensemble I des types de sommets peut être identifié à l'ensemble des sommets du k -diagramme de Dynkin de G .

3.1.5. *Opposition.* — Deux simplexes s et s' de X sont opposés si et seulement si les paraboliques P_s et $P_{s'}$ sont opposés au sens de [BT65, §4], i.e. si $P_s \cap P_{s'}$ est réductif, auquel cas c'est un sous-groupe de Levi de chacun d'eux.

3.1.6. *Action de $G(k)$.* — Le groupe $G(k)$ des k -points de G opère sur X (par conjugaison des paraboliques). Cette action respecte les types. Si s est un simplexe de X , le sous-groupe de $G(k)$ fixant (ou stabilisant) s est $P_s(k)$.

3.1.7. *Sphères de Levi.* — Soit L un sous-groupe de Levi d'un parabolique. Les sous-groupes paraboliques contenant L correspondent aux simplexes d'une *sphère de Levi* S_L , et l'on obtient ainsi une bijection entre les L et les sphères de Levi (ce qui explique la terminologie utilisée au §2). Les paraboliques ayant L pour sous-groupe de Levi correspondent aux simplexes de dimension maximale de la sphère S_L . Si s est l'un de ces simplexes, l'immeuble résiduel X_s (cf. 2.1.8) peut être identifié à l'immeuble de L .

3.1.8. *Critère de convexité.* — Soit Y un sous-complexe de X , et soit H l'ensemble des paraboliques correspondant aux simplexes de Y .

PROPOSITION 3.1. — *Pour que Y soit convexe, il faut et il suffit que H satisfasse à la propriété suivante :*

(C) *Si trois paraboliques P, P', Q sont tels que $P \in H, P' \in H$, et $Q \supset P \cap P'$, alors $Q \in H$.*

(Attention : l'inclusion $Q \supset P \cap P'$ est une inclusion de groupes algébriques. Il ne suffit pas que $Q(k)$ contienne $P(k) \cap P'(k)$.)

L'énoncé revient à déterminer l'enveloppe convexe de la réunion de deux simplexes (ceux correspondant à P et P'), ce qui se fait au moyen d'un appartement les contenant tous deux.

3.1.9. Relations avec les sous-groupes multiplicatifs à 1 paramètre (G.I.T.). — Soit $\lambda : \mathbf{G}_m \rightarrow G$ un homomorphisme. On peut lui associer de façon naturelle deux points opposés $h_+(\lambda)$ et $h_-(\lambda)$ de l'immeuble vectoriel X^{vect} , cf. 2.1.7. Si λ est à valeurs dans le centre de G , on a $h_+(\lambda) = h_-(\lambda) = 0$. Sinon, les demi-droites engendrées par $h_+(\lambda)$ et $h_-(\lambda)$ définissent deux points $x_+(\lambda)$ et $x_-(\lambda)$ de l'immeuble X ; ces points sont opposés. Soient $s_+(\lambda)$ et $s_-(\lambda)$ les plus petits simplexes de X contenant respectivement $x_+(\lambda)$ et $x_-(\lambda)$, et soient $P_+(\lambda)$ et $P_-(\lambda)$ les sous-groupes paraboliques correspondants. Le groupe $P_+(\lambda)$ est formé des points g de G qui sont *contractés* par λ , i.e. tels que $\lambda(t).g.\lambda(t^{-1})$ ait une limite pour $t \rightarrow 0$ (cf. [Mu65, p. 55] ou [Ri88, § 2]). De même, $P_-(\lambda)$ est l'ensemble des g tels que $\lambda(t) \cdot g \cdot \lambda(t^{-1})$ ait une limite pour $t \rightarrow \infty$, et le groupe de Levi $P_+(\lambda) \cap P_-(\lambda)$ est le *centralisateur* de l'image de λ .

Remarque. — Les $h_+(\lambda)$ jouent le rôle de *points entiers* pour l'immeuble vectoriel, et les $x_+(\lambda)$ sont les *points rationnels* de l'immeuble sphérique. L'interprétation des sous-groupes paraboliques en termes de contractions est à la base de la « Geometric Invariant Theory »; elle joue un rôle essentiel dans les résultats de Richardson et de Bate-Martin-Röhrle cités plus loin.

3.2. Les propriétés G -ir, G -cr et G -ind

3.2.1. À partir de maintenant, Γ désigne un sous-groupe de $G(k)$. Son action sur X permet de lui appliquer les définitions du n° 2.3.1 : irréductibilité, complète réductibilité et indécomposabilité. Pour mettre G en évidence, nous écrirons G -ir, G -cr et G -ind. Autrement dit :

Γ est G -ir $\Leftrightarrow \Gamma$ n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de G .

Γ est G -cr \Leftrightarrow Pour tout parabolique P de G contenant Γ , il existe un sous-groupe de Levi de P contenant Γ (ou, ce qui revient au même, il existe un parabolique P' opposé à P tel que $\Gamma \subset P(k) \cap P'(k)$).

Γ est G -ind $\Leftrightarrow \Gamma$ n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de G .

3.2.2. Exemples. — Lorsque G est un groupe classique (ou un groupe de type G_2) la notion de « G -cr » peut se traduire très concrètement :

(a) Lorsque $G = \mathbf{GL}(V)$, elle signifie que le Γ -module V est semi-simple, cf. n° 1.3.

(b) Supposons k de caractéristique $\neq 2$, et prenons pour G un groupe $\mathbf{SO}(V)$ (ou $\mathbf{Sp}(V)$), relatif à une forme bilinéaire symétrique (ou alternée) B sur V , non dégénérée. La définition de « G -cr » donnée ci-dessus dit que Γ est G -cr si et seulement si, pour tout sous- Γ -module totalement isotrope W de V , il existe un autre sous- Γ -module totalement isotrope W' , de même dimension, tel que la restriction de B à $W + W'$ soit

non dégénérée. Un argument élémentaire permet de montrer que *cela se produit si et seulement si le Γ -module V est semi-simple* (c'est aussi une conséquence de la théorie de Richardson, du moins quand k est algébriquement clos, cf. [Ri88, cor. 16.10]).

(c) Supposons G de type G_2 , et k de caractéristique $\neq 2$. Soit V l'unique représentation irréductible de G de dimension 7. Ici encore, on peut montrer que Γ est G -cr si et seulement si le Γ -module V est semi-simple. Cela se voit en utilisant la description des paraboliques donnée dans [AS86].

On verra au §5 des résultats analogues pour d'autres représentations – mais on devra alors éviter d'autres caractéristiques que la caractéristique 2.

3.2.3. La proposition suivante est une conséquence immédiate de la prop. 2.5 :

PROPOSITION 3.2. — *Supposons que Γ soit contenu dans un sous-groupe de Levi L d'un sous-groupe parabolique de G . On a alors*

$$\Gamma \text{ est } G\text{-cr} \iff \Gamma \text{ est } L\text{-cr.}$$

(Lorsque $G = \mathbf{GL}_n$, cela redonne (1.1.5).)

3.2.4. On peut définir un « G -analogue » de la *semi-simplification* d'une représentation :

Choisissons un parabolique P contenant Γ et minimal pour cette propriété (cela revient à choisir un simplexe de dimension maximum de X^Γ). Soit L un sous-groupe de Levi de P et soit $\pi : P \rightarrow L$ la projection de P sur L de noyau le radical unipotent $R_u(P)$ de P .

PROPOSITION 3.3. — (a) *Le groupe $\pi(\Gamma) \subset L(k)$ est L -ir et G -cr.*

(b) *Différents choix de (P, L) donnent des homomorphismes $\Gamma \rightarrow L(k) \rightarrow G(k)$ qui sont conjugués par $G(k)$.*

(Lorsque $G = \mathbf{GL}(V)$, l'homomorphisme $\Gamma \rightarrow L(k) \rightarrow G(k)$ est le semi-simplifié de $\Gamma \rightarrow G(k)$, et l'assertion d'unicité de (b) est le *théorème de Jordan-Hölder*.)

Dans (a), le fait que $\pi(\Gamma)$ soit L -ir provient de ce que P est minimal ; on en déduit que Γ est G -cr en appliquant la prop. 3.2. On prouve (b) en remarquant que, pour P fixé, le choix de L n'a pas d'importance puisque deux L différents sont conjugués par $R_u(P)(k)$; et, pour un autre choix P' de P , on utilise le fait que P et P' ont un sous-groupe de Levi commun (c'est une propriété générale des simplexes maximaux d'un sous-complexe convexe).

3.2.5. Voici un autre résultat, inspiré par des arguments de [Ri88] et de [BMR04] :

PROPOSITION 3.4. — Soit C_Γ le centralisateur de Γ dans G . Soit T un tore déployé maximal de C_Γ , et soit L le centralisateur de T dans G . On a $\Gamma \subset L(k)$. De plus :

- (a) L est un sous-groupe de Levi d'un parabolique de G ; il est minimal parmi tous les Levi de paraboliques contenant Γ .
- (b) Γ est L -ind.
- (c) Pour que Γ soit G -cr, il faut et il suffit qu'il soit L -ir.
- (d) Si k est parfait, les différents choix de L sont conjugués par $C_\Gamma(k)$.

(Lorsque $G = \mathbf{GL}(V)$, le choix de L correspond à une décomposition du Γ -module V en somme directe de modules indécomposables, et (d) est le théorème de Krull-Remak-Schmidt.)

L'assertion (a) se déduit du fait que les sous-groupes de Levi de paraboliques sont les centralisateurs des tores déployés de G , cf. [BT65, 4.16]. L'assertion (b) provient de la minimalité de L , et (c) se déduit de (b) et de la prop. 3.2. Quant à (d), il résulte de la conjugaison des tores déployés maximaux de C_Γ , qui est valable quand k est parfait, d'après [BT65, 11.6].

3.3. La propriété de « forte réductivité » de Richardson

On suppose maintenant que k est algébriquement clos, ce qui assure que tous les tores sont déployés. La prop. 3.4 (c) s'énonce alors de la façon suivante :

THÉORÈME 3.5 ([BMR04]). — Soit T un tore maximal du centralisateur de Γ , et soit L le centralisateur de T . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Γ est G -cr.
- (ii) Γ n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de L .

La propriété (ii) a été introduite en 1988 par Richardson [Ri88, § 16] sous le nom de « strong reductivity ». Ce n'est que tout récemment que Bate, Martin et Röhrle ont démontré qu'elle équivaut à la propriété (i). Ils en ont tiré de nombreuses conséquences, que l'on trouvera dans [BMR04]. En voici quelques unes :

THÉORÈME 3.6 ([Ma03b] et [BMR04]). — Soit Γ' un sous-groupe normal de Γ . Si Γ est G -cr, il en est de même de Γ' .

(Comparer avec la prop. 2.11 du § 2.)

THÉORÈME 3.7 ([Ri88] et [BMR04]). — Supposons que Γ soit engendré topologiquement par des éléments x_1, \dots, x_m . Soit $f : G \rightarrow G \times \dots \times G$ (m copies) l'application

$$g \mapsto (gx_1g^{-1}, \dots, gx_mg^{-1}).$$

Pour que Γ soit G -cr, il faut et il suffit que $f(G)$ soit une partie fermée de $G \times \dots \times G$.

Dans le cas particulier $m = 1$, on retrouve le fait qu'une classe de conjugaison est fermée si et seulement si ses éléments sont semi-simples.

THÉORÈME 3.8 ([BMR04]). — *Soit G' un groupe réductif contenant G , et tel que :*

- (a) *Le centralisateur (schématique) de Γ dans G' est lisse.*
- (b) *Il existe un sous-espace vectoriel \mathfrak{m} de $\text{Lie } G'$, stable par conjugaison par G et tel que $\text{Lie } G' = \mathfrak{m} \oplus \text{Lie } G$.*

Alors, si Γ est G' -cr, il est G -cr.

(Dans [BMR04], la condition (a) est appelée « séparabilité » ; quant à (b), elle exprime que (G', G) est un « couple réductif » au sens de Richardson.)

COROLLAIRE 3.9. — *Soit V un G -module fidèle. Supposons que la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \text{Tr}(x_V \cdot y_V)$ sur $\text{Lie } G$ soit non dégénérée. Alors, si V est Γ -semi-simple, le groupe Γ est G -cr.*

Cela résulte du th. 3.8, appliqué à $G' = \mathbf{GL}(V)$. La condition (a) est satisfaite. La condition (b) l'est aussi : on prend pour \mathfrak{m} l'orthogonal de $\text{Lie } G$ dans $\text{Lie } \mathbf{GL}(V)$ pour la forme trace.

4. CRITÈRES DE COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ

Dans ce qui suit, G est un groupe réductif sur un corps algébriquement clos k , et Γ est un sous-groupe de $G(k)$. À partir du n° 4.2, on suppose que la caractéristique p de k est > 0 .

On se propose de donner des critères, aussi explicites que possible, permettant de reconnaître si Γ possède la propriété G -cr. Si $\bar{\Gamma}$ est l'adhérence de Γ pour la topologie de Zariski, il est clair que Γ est G -cr $\Leftrightarrow \bar{\Gamma}$ est G -cr. Cela nous permettra souvent de supposer que Γ est fermé, i.e. que c'est un sous-groupe algébrique (lisse) de G .

[Il serait intéressant de considérer aussi le cas d'un sous-groupe algébrique *non nécessairement lisse*. Il n'y a pas de difficulté à étendre à de tels groupes la définition de « G -cr », non plus que celle du sous-complexe convexe « X^Γ ». Ce qui est moins clair, c'est ce qui doit remplacer la *saturation* du § 5. Une fois cet obstacle surmonté, on peut espérer que les résultats des n°s 5.2 et 5.3 s'étendent sans changement.]

4.1. Une première condition

Notons $R_u(\Gamma)$ le radical unipotent de Γ , i.e. son plus grand sous-groupe unipotent normal (connexe ou non). (Lorsque k est de caractéristique $p > 0$, et que Γ est fini, on a $R_u(\Gamma) = O_p(\Gamma)$, avec les notations usuelles de la théorie des groupes finis.)

PROPOSITION 4.1. — *Si Γ est G -cr, on a $R_u(\Gamma) = 1$.*

Quitte à remplacer G par un Levi de l'un de ses sous-groupes paraboliques, on peut supposer que Γ est G -ir (cf. prop. 3.3). Soit alors U l'adhérence de $R_u(\Gamma)$. D'après [BT71, prop. 3.1], il existe un sous-groupe parabolique P de G , avec $U \subset R_u(P)$, qui est stable par tout automorphisme du couple (G, U) . Comme Γ normalise U , il normalise P , donc est contenu dans P . Puisque Γ est G -ir, cela entraîne $P = G$, d'où $U = 1$ puisque $R_u(G) = 1$.

PROPOSITION 4.2. — *Supposons k de caractéristique 0, et supposons que Γ soit fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) Γ est G -cr.
- (ii) $R_u(\Gamma) = 1$.
- (iii) La composante neutre Γ^0 de Γ est un groupe réductif.

L'équivalence de (ii) et (iii) provient de ce que tout sous-groupe unipotent de Γ est contenu dans Γ^0 . L'implication (i) \Rightarrow (ii) est la prop. 4.1. L'implication (iii) \Rightarrow (i) provient du fait bien connu suivant (spécial à la caractéristique 0) : toute extension de Γ par un groupe unipotent est scindée, et deux scindages quelconques sont conjugués (on se ramène, par dévissage à une annulation de groupes de cohomologie, cf. [Mo56] et [DG70, p. 393]).

COROLLAIRE 4.3. — *Supposons k de caractéristique 0. Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de G dans un groupe réductif G' . Si Γ est G -cr, alors $f(\Gamma)$ est G' -cr ; la réciproque est vraie si f est presque fidèle.*

(Un homomorphisme f est dit *presque fidèle* si $\text{Ker}(f)$ est un groupe de type multiplicatif.)

C'est clair, grâce à (iii).

Remarques. — 1) Le cor. 4.3 redonne le théorème de Chevalley cité au n° 1.1 : il suffit de l'appliquer à l'homomorphisme naturel $f : \mathbf{GL}(V) \times \mathbf{GL}(V') \rightarrow \mathbf{GL}(V \otimes V')$.

2) La prop. 4.2 montre que la propriété « G -cr » n'a pas grand intérêt en caractéristique 0. C'est pour cela que, à partir de maintenant, on supposera que le corps k est de caractéristique $p > 0$. On donnera alors des conditions sur p (du genre « p est assez grand ») permettant d'avoir des résultats analogues à ceux de la caractéristique 0, cf. th. 4.4, th. 4.5 et th. 5.3.

4.2. Le cas où Γ est connexe

Définissons un entier $a(G)$ par la recette suivante :

- (1) Si G est simple : $a(G) = 1 + \text{rang}(G)$.
- (2) Si $\{G_1, \dots, G_r\}$ sont les quotients simples de G , on pose :

$$a(G) = \sup(1, a(G_1), \dots, a(G_r)).$$

THÉORÈME 4.4 (Jantzen, McNinch, Liebeck-Seitz). — *Supposons que $p \geq a(G)$, que Γ soit un sous-groupe fermé de G , et que $(\Gamma : \Gamma^0)$ soit premier à p . Il y a alors équivalence entre :*

- (i) Γ est G -cr.
- (ii) Γ^0 est réductif.

L'implication (i) \Rightarrow (ii) a été démontrée plus haut. Supposons que la condition (ii) soit satisfaite. En utilisant le fait que $(\Gamma : \Gamma^0)$ est premier à p , on démontre facilement que Γ^0 est G -cr $\Rightarrow \Gamma$ est G -cr. On peut donc supposer que Γ est connexe, autrement dit que c'est un sous-groupe réductif de G ; on peut aussi supposer que G est quasi-simple. Le cas où G est de type exceptionnel est traité dans [LS96] (sauf pour $p = 3$ et G de type G_2 , mais ce cas n'offre pas de difficultés). Lorsque G est de type A_n , le théorème signifie que toute représentation linéaire de degré $\leq p$ d'un groupe réductif est semi-simple, ce qui a été démontré par Jantzen [Ja97]. De même, si G est de type B_n , C_n ou D_n , on est ramené à montrer que toute représentation self-duale d'un groupe réductif est semi-simple si sa dimension est $< 2p$; cela a été démontré récemment par McNinch (non publié : le cas crucial est celui où le groupe réductif est de type A_1 – les autres cas se déduisent de [Mc98]).

Remarque. — La borne $p \geq a(G)$ du th. 4.4 est essentiellement optimale lorsque le groupe Γ^0 est de rang 1. Elle peut par contre être améliorée lorsque les facteurs simples de Γ^0 sont de rang > 1 , cf. [LS96] et [Mc98].

4.3. Le cas non connexe

On se borne au cas où $G^{\text{ad}} = G/C_G$ est un groupe simple. On remplace l'entier $a(G)$ du n° 4.2 par un entier $b(G)$ un peu plus grand :

$$\begin{aligned} b(G) &= 2, 3, 5 && \text{si } G^{\text{ad}} \text{ est de type } A_1, A_2, B_2; \\ b(G) &= n + 3 && \text{si } G^{\text{ad}} \text{ est de type } A_n \ (n \geq 3); \\ b(G) &= 2n + 3 && \text{si } G^{\text{ad}} \text{ est de type } B_n, C_n \ (n \geq 3) \text{ ou } D_n \ (n \geq 4); \\ b(G) &= 11, 29, 29, 59, 251 && \text{si } G^{\text{ad}} \text{ est de type } G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. \end{aligned}$$

THÉORÈME 4.5. — *Supposons que Γ soit un sous-groupe fermé de $G(k)$, avec G^{ad} simple, et $p \geq b(G)$. Il y a équivalence entre :*

- (i) Γ est G -cr.
- (ii) $R_u(\Gamma) = 1$.

(Autrement dit, on a le même énoncé que 4.2, pourvu que $p \geq b(G)$.)

Ici encore, il suffit de montrer que (ii) \Rightarrow (i). Le cas essentiel est celui où $G = \mathbf{GL}_n$; il est dû à Guralnick, cf. [Gu99, th. C]. (La démonstration est loin d'être élémentaire : elle utilise non seulement la classification des groupes finis simples, mais aussi la liste des caractères modulaires irréductibles des groupes sporadiques donnée dans [JLPW95].) Les autres cas s'en déduisent en appliquant le th. 5.4 ci-dessous à des représentations linéaires de G de basse dimension.

Remarques. — 1) Voici quelques exemples de couples (Γ, G) montrant que, pour les groupes classiques, la condition $p \geq b(G)$ du th. 4.5 ne peut guère être améliorée :

Type A : $\Gamma = \mathcal{S}_p$; $G = \mathbf{SL}_{p-1}$

Types B, C, D : $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ ou $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_p)$; $G = \mathbf{SO}_{p+2}, \mathbf{Sp}_{p-1}, \mathbf{SO}_{p+1}$.

Supposons $p > 3$. Dans chaque cas, on a $R_u(\Gamma) = 1$, et l'on peut construire un plongement de Γ dans $G(k)$ qui donne une représentation linéaire non semi-simple, ce qui signifie que Γ n'est pas G -cr, d'après 3.2.2. On a $p = b(G) - 2, b(G) - 4, b(G) - 4, b(G) - 2$ respectivement.

2) La situation est différente pour les groupes exceptionnels ; la borne $p \geq b(G)$ peut être grandement améliorée, par exemple en utilisant les méthodes de [LS96]. Ainsi, pour le type G_2 , on peut remplacer « $p \geq 11$ » par « $p \geq 5$ », qui est optimal. J'ignore quelles sont les bornes optimales pour les types F_4, E_6, E_7 et E_8 .

5. SATURATION ET REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

5.1. Exponentielle et saturation

On note $h(G)$ la borne supérieure des nombres de Coxeter des quotients simples de G . (S'il n'y en a aucun, i.e. si G est un tore, on convient que $h(G) = 1$.) Rappelons que, si G est simple, on a $h(G) = \dim(G)/\text{rang}(G) - 1$; les valeurs de h pour les différents types sont :

$A_n : h = n + 1$; $B_n, C_n : h = 2n$; $D_n : h = 2n - 2$; $G_2 : h = 6$; $F_4, E_6 : h = 12$; $E_7 : h = 18$; $E_8 : h = 30$.

Supposons maintenant que $p \geq h(G)$. Soit u un élément unipotent de G . D'après [Te95], on a $u^p = 1$. De plus, si t est un élément de k , on peut définir de façon canonique (c'est là un point essentiel) la « t -ième puissance » u^t de u , cf. [Se98] (voir aussi [Sei00] qui traite un cas plus général). L'application $t \mapsto u^t$ est un homomorphisme du groupe additif \mathbf{G}_a dans le groupe G . Lorsque $G = \mathbf{GL}_n$, l'hypothèse $p \geq h(G)$ signifie que $p \geq n$, de sorte que $u = 1 + v$ avec $v^p = 0$, et u^t est donné par le développement binomial : $(1 + v)^t = 1 + t \cdot v + \dots$.

[L'hypothèse « k algébriquement clos » faite au début du § 4 n'intervient pas dans la définition de l'exponentielle u^t . En fait, le cas crucial est celui d'un schéma en groupes semi-simples, déployé et simplement connexe, sur le localisé $\mathbf{Z}_{(p)}$ de \mathbf{Z} en p . Les autres cas s'en déduisent par descente, en utilisant les méthodes de [DG70], cf. [Sei00, § 5].]

DÉFINITION 5.1. — *Un sous-groupe Γ de $G(k)$ est dit saturé s'il est fermé et si l'on a $u^t \in \Gamma$ pour tout élément unipotent u de Γ , et tout $t \in k$.*

[Par exemple, tout sous-groupe parabolique est saturé ; tout centralisateur d'un sous-groupe est saturé.]

On démontre facilement :

PROPOSITION 5.2. — *Si Γ est saturé, l'indice de Γ^0 dans Γ est premier à p .*

Pour tout sous-groupe Γ de $G(k)$, il existe un plus petit sous-groupe saturé le contenant ; on l'appelle le *saturé* de Γ et on le note Γ^{sat} . (Lorsque $G = \mathbf{GL}_n$, on retrouve la notion utilisée dans [No87] et [Se94].)

THÉORÈME 5.3 ([Se98, th. 8]). — *Il y a équivalence entre :*

- (1) Γ est G -cr.
- (2) Γ^{sat} est G -cr.
- (3) La composante neutre de Γ^{sat} est un groupe réductif.

(Rappelons que l'on suppose $p \geq h(G)$.)

L'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) est claire : les sous-groupes paraboliques et leurs sous-groupes de Levi sont saturés. L'équivalence de (ii) et (iii) résulte du th. 4.4 et de la prop. 5.2 ; noter que le th. 4.4 est applicable car $a(G) \leq h(G)$.

5.2. Représentations linéaires : l'invariant $n(V)$

Choisissons un tore maximal T de G , ainsi qu'un sous-groupe de Borel B de G contenant T . Soit $X(T) = \text{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ le groupe des caractères de G , et soit $Y(T) = \text{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ son dual. Notons $R \subset X(T)$ le système de racines de (G, T) . Si $a \in R$, notons a^* la racine duale ; c'est un élément de $Y(T)$.

Pour tout $\chi \in X(T)$, on pose

$$n(\chi) = \sum \langle \chi, a^* \rangle,$$

où a parcourt les éléments > 0 de R (pour la relation d'ordre associée à B).

Si V est un G -module, on définit un *invariant* $n(V)$ de V par la formule :

$$n(V) = \sup n(\chi),$$

où χ parcourt l'ensemble des poids de T dans V , cf. [Dy52, n° 12]. C'est un entier ≥ 0 . Voici quelques unes de ses propriétés (on en trouvera d'autres dans [Dy52], [Se98] et [IMP03]) :

(5.2.1) Si V a une suite de composition dont les facteurs successifs sont V_1, \dots, V_r , on a $n(V) = \sup n(V_i)$.

(5.2.2) Si V est irréductible de plus grand poids λ , on a $n(V) = n(\lambda)$.

(5.2.3) On a $n(V) = 0$ si et seulement si le groupe dérivé de G opère trivialement sur V , i.e. si l'image de $G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ est un tore.

(5.2.4) Si V est presque fidèle (au sens du cor. 4.3), on a $n(V) \geq h(G) - 1$.

(5.2.5) Si $V = V_1 \otimes V_2$, on a $n(V) = n(V_1) + n(V_2)$.

(5.2.6) On a $n(\text{Lie } G) = 2h(G) - 2$.

Remarque. — L'invariant $n(V)$ « se calcule sur \mathbf{SL}_2 » au sens suivant :

Soit $f : \mathbf{SL}_2 \rightarrow G$ un homomorphisme tel que le composé $\mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{SL}_2 \rightarrow G$ soit à valeurs dans T , et soit égal dans $Y(T)$ à la somme $\sum a^*$, où a parcourt les racines > 0 . Un tel f existe : cela se démontre par réduction à partir de la caractéristique 0.

Grâce à f , le G -module V peut être vu comme un \mathbf{SL}_2 -module, et son invariant $n(V)$ comme G -module est le même que son invariant $n(V)$ comme \mathbf{SL}_2 -module. [Autre interprétation de $n(V)$: à un facteur 2 près, c'est le degré en la variable « q » de la dimension quantique de V .]

L'intérêt de l'invariant $n(V)$ provient du théorème suivant, qui relie la semi-simplicité du Γ -module V à la propriété « G -cr » :

THÉORÈME 5.4. — *Supposons $p > n(V)$. Soit Γ un sous-groupe de $G(k)$.*

(i) *Si Γ est G -cr, alors V est Γ -semi-simple (i.e. semi-simple comme Γ -module).*

(ii) *Inversement, si V est Γ -semi-simple, et si V est presque fidèle, alors Γ est G -cr.*

(Si l'on regarde V comme un \mathbf{SL}_2 -module – cf. Remarque ci-dessus – l'hypothèse $p > n(V)$ signifie que V est un \mathbf{SL}_2 -module restreint (« restricted ») : ses poids sont $< p$.)

On peut supposer que V est presque fidèle. D'après (5.2.4), on a alors $p \geq h(G)$, ce qui permet d'utiliser le th. 5.3. Les détails de la démonstration se trouvent dans [Se98] (voir aussi [IMP03]).

COROLLAIRE 5.5. — *Supposons $p > 2h(G) - 2$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(cr) Γ est G -cr.

(ad) *L'algèbre de Lie $\mathrm{Lie} G$ de G est un Γ -module semi-simple.*

Cela résulte du th. 5.4 et de la formule (5.2.6).

Remarque 5.6. — La condition $p > 2h(G) - 2$ est presque optimale pour l'implication (cr) \Rightarrow (ad). En effet, supposons que cette condition ne soit pas satisfaite, et que G soit simple; on peut alors construire (à deux exceptions près, cf. ci-après) un sous-groupe Γ de G , isomorphe à \mathbf{SL}_2 ou à \mathbf{PGL}_2 , qui satisfait à (cr) mais pas à (ad). (Les deux exceptions sont : $p = 3$, G de type B_2 , et $p = 5$, G de type G_2 .)

Par contre, l'implication (ad) \Rightarrow (cr) est en général valable sous des conditions bien moins restrictives que $p > 2h(G) - 2$. Par exemple, si G est de type E_8 , le cor. 3.9 montre que la condition $p > 2h(G) - 2 = 58$ peut être remplacée par $p > 5$.

5.3. Applications

Le th. 5.4 peut être utilisé pour prouver des énoncés où la notion de « G -cr » n'intervient pas explicitement. Par exemple :

PROPOSITION 5.7. — *Soit $\Gamma \subset G(k)$, où G est de type E_8 . Soient V_1, \dots, V_8 les huit représentations irréductibles fondamentales de G . Supposons que l'un des Γ -modules V_i soit semi-simple. Alors tous les autres le sont pourvu que $p > 270$.*

(J'ignore si la minoration $p > 270$ est optimale.)

Soit (α_i) une base du système de racines et soit $\sum c_i \alpha_i^*$ la somme des duales des racines positives. Il résulte de (5.2.2) que l'on a $n(V_i) = c_i$ pour tout i . Dans le cas de E_8 , cela donne :

$$n(V_i) = 92, 136, 182, 270, 220, 168, 114, 58 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 8.$$

D'où le résultat, d'après le th. 5.4.

Voici deux autres applications. La première est l'analogie en caractéristique p du théorème de Chevalley cité au n° 1.1 :

PROPOSITION 5.8 ([Se94]). — *Soient V_i des représentations linéaires semi-simples d'un groupe Γ . Si $p > \Sigma(\dim(V_i) - 1)$, la représentation $\otimes V_i$ est Γ -semi-simple.*

On applique le th. 5.4 avec $G = \prod \mathbf{GL}(V_i)$. L'hypothèse que les V_i sont semi-simples signifie que l'image de Γ dans G est G -cr. D'autre part, il résulte de (5.2.5) que l'invariant $n(V)$ de la G -représentation $\otimes V_i$ est égal à $\Sigma(\dim(V_i) - 1)$. D'où le résultat.

Autre énoncé du même goût :

PROPOSITION 5.9 ([Se98] et [Mc00]). — *Si V est une représentation linéaire semi-simple d'un groupe Γ , il en est de même de $\wedge^i V$, pourvu que $p > i(\dim(V) - i)$.*

On applique le th. 5.4 avec $G = \mathbf{GL}(V)$. On peut supposer que $0 \leq i \leq \dim(V)$. On a alors $n(\wedge^i V) = i(\dim(V) - i)$. D'où le résultat.

Remarque. — Dans les deux cas ci-dessus, on peut se proposer de prouver des réciproques. Par exemple, si $\wedge^i V$ est semi-simple, est-il vrai (si $0 < i < \dim(V)$ et si p est assez grand) que V est semi-simple ? Le th. 5.4 dit que « oui » si $p > i(n - i)$ où $n = \dim(V)$. En fait, un argument tannakien élémentaire ([Se97a]) donne un résultat nettement meilleur : il suffit que p ne divise aucun des entiers $n - 2, n - 3, \dots, n - i$.

RÉFÉRENCES

- [AS86] M. ASCHBACHER – « Chevalley groups of type G_2 as the group of a trilinear form », *J. Algebra* **109** (1986), p. 193–259.
- [BMR04] M. BATE, B.M.S. MARTIN & G. RÖHRLE – « A geometric approach to complete reducibility », preprint, Univ. Birmingham 2004 ; à paraître dans *Invent. math.*
- [BT65] A. BOREL & J. TITS – « Groupes réductifs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), p. 55–150.
- [BT71] ———, « Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs I », *Invent. math.* **12** (1971), p. 95–104.
- [Br89] K. BROWN – *Buildings*, Springer-Verlag, 1989.

- [Ch55] C. CHEVALLEY – *Théorie des Groupes de Lie*, vol. III, Hermann, Paris, 1955.
- [DG70] M. DEMAZURE & A. GROTHENDIECK – *Structure des schémas en groupes réductifs (SGA 3 III)*, Lect. Notes in Math., vol. 153, Springer-Verlag, 1970.
- [Dy52] E.B. DYNKIN – « Sous-groupes maximaux des groupes classiques », *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **1** (1952), p. 39–116 (en russe), trad. anglaise : *Selected Papers*, American Mathematical Society, 2000, p. 37–170.
- [Gu99] R.M. GURALNICK – « Small representations are completely reducible », *J. Algebra* **220** (1999), p. 531–541.
- [IMP03] S. ILANGOVAN, V.B. MEHTA & A.J. PARAMESWARAN – « Semistability and semisimplicity in representations of low height in positive characteristic », in *A Tribute to C.S. Seshadri* (V. Lakshmibai et al., éd.), Hindustani Book Ag., New Delhi, 2003.
- [JLPW95] C. JANSEN, K. LUX, R. PARKER & R. WILSON – *An atlas of Brauer characters*, LMS Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [Ja97] J.C. JANTZEN – « Low dimensional representations of reductive groups are semisimple », in *Algebraic Groups and Lie Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 255–266.
- [Ke78] G.R. KEMPF – « Instability in invariant theory », *Ann. of Math.* **108** (1978), p. 299–316.
- [LS96] M.W. LIEBECK & G.M. SEITZ – *Reductive Subgroups of Exceptional Algebraic Groups*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 580, American Mathematical Society, 1996.
- [Ma03a] B.M.S. MARTIN – « Reductive subgroups of reductive groups in nonzero characteristic », *J. Algebra* **262** (2003), p. 265–286.
- [Ma03b] ———, « A normal subgroup of a strongly reductive subgroup is strongly reductive », *J. Algebra* **265** (2003), p. 669–674.
- [Mc98] G.J. MCNINCH – « Dimensional criteria for semisimplicity of representations », *Proc. London Math. Soc.* (3) **76** (1998), p. 95–149.
- [Mc00] ———, « Semisimplicity of exterior powers of semisimple representations of groups », *J. Algebra* **225** (2000), p. 646–666.
- [Mo56] G.D. MOSTOW – « Fully reducible subgroups of algebraic groups », *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 200–221.
- [Mu65] D. MUMFORD – *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, 1965 ; third enlarged edit. (D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan), 1994.
- [Mue97] B. MÜHLHERR – « Complete reducibility in projective spaces and polar spaces », preprint, Dortmund, 1997.
- [No87] M.V. NORI – « On subgroups of $\mathbf{GL}(n, \mathbf{F}_p)$ », *Invent. math.* **88** (1987), p. 257–275.
- [Ri88] R.W. RICHARDSON – « Conjugacy classes of n -tuples in Lie algebras and algebraic groups », *Duke Math. J.* **57** (1988), p. 1–35.
- [Ron89] M. RONAN – *Lectures on Buildings*, Acad. Press, San Diego, 1989.

- [Rou78] G. ROUSSEAU – « Immeubles sphériques et théorie des invariants », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **286** (1978), p. 247–250.
- [Sei00] G.M. SEITZ – « Unipotent elements, tilting modules, and saturation », *Invent. math.* **141** (2000), p. 467–502.
- [Se94] J.-P. SERRE – « Sur la semi-simplicité des produits tensoriels de représentations de groupes », *Invent. math.* **116** (1994), p. 513–530, volume dédié à Armand Borel.
- [Se97a] ———, « Semisimplicity and tensor products of group representations : converse theorems », *J. Algebra* **194** (1997), p. 496–520, with an Appendix by Walter Feit.
- [Se97b] ———, « La notion de complète réductibilité dans les immeubles sphériques et les groupes réductifs », Séminaire au Collège de France, 1997, résumé dans [Ti97], p. 93–98.
- [Se98] ———, « The notion of complete reducibility in group theory », in *Mour-
sund Lectures Part II (Eugene, 1998)*, Notes by W.E. Duckworth, <http://darkwing.uoregon.edu/~math/serre/index.html>.
- [So69] L. SOLOMON – « The Steinberg character of a finite group with BN-pair », in *Theory of Finite Groups*, Benjamin, 1969, p. 213–221.
- [Te95] D.M. TESTERMAN – « A_1 -type overgroups of elements of order p in semi-simple algebraic groups and the associated finite groups », *J. Algebra* **177** (1995), p. 34–76.
- [Ti74] J. TITS – *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lect. Notes in Math., vol. 386, Springer-Verlag, 1974.
- [Ti97] ———, « Résumé des cours de 1996-1997 », in *Annuaire du Collège de France*, vol. 97, 1997, p. 89–102.
- [TW02] J. TITS & R.M. WEISS – *Moufang Polygons*, Springer-Verlag, 2002.

[Texte révisé en juin 2004]

Jean-Pierre SERRE
Collège de France
11 place M. Berthelot
F-75231 Paris Cedex 05
E-mail : serre@dma.ens.fr

ON THE LONG TIME BEHAVIOR OF KDV TYPE EQUATIONS
[after Martel-Merle]

by Nikolay TZVETKOV

1. INTRODUCTION

A central problem in the theory of dispersive PDE's is to understand the interplay between nonlinearity and dispersion. In the context of the water waves problem (see *e.g.* [1]) the Korteweg-de Vries (KdV) equation

$$(1) \quad u_t + u_{xxx} + \partial_x(u^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

appears to be the simplest (asymptotic) model where both dispersive and nonlinear effects are taken into account. If we neglect the nonlinear interaction $\partial_x(u^2)$ we deal with the Airy equation

$$(2) \quad u_t + u_{xxx} = 0.$$

The solutions of (2) are known to “disperse” in the sense that every solution u of (2) issued from $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ initial data $u(0, \cdot)$, has its L^2 mass conserved but

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

If we neglect the dispersive term u_{xxx} , we deal with the Burgers equation which is known to develop singularities in finite time, even for smooth initial data. The KdV equation (1) displays a balance between dispersion and nonlinearity since the dynamics of (1) is well defined, globally in time, for a very large class of initial data and moreover the solutions of (1) enjoy a rich dynamics as $t \rightarrow \infty$. A very special role among the solutions of (1) is played by the so-called solitary wave solution

$$(3) \quad u_c(t, x) = Q_c(x - ct) = \frac{3c}{2} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) \right), \quad c > 0.$$

The solution (3) *does not disperse* and represents the displacement of the profile Q_c with speed c from left to right as the time t increases. Using the inverse scattering method (see [16, 29, 58]), it turns out that for sufficiently large t , any solution of (1) issued from well localized smooth initial data decomposes as a sum of solitary

waves of type (3) plus a radiation term moving in the opposite direction. A natural generalization of (1), with stronger nonlinear effects, is the equation

$$(4) \quad u_t + u_{xxx} + \partial_x(u^p) = 0,$$

where p is a positive integer. The case $p = 3$ (modified KdV) is a very special case since, as in the case of (1), it can be treated with the inverse scattering method. Unfortunately, the integrability machinery does not seem to apply anymore for the equation (4) when $p \neq 2, 3$. Therefore the qualitative study of (4) in these cases is much less understood.

The equation (4) is a Hamiltonian PDE and its solutions enjoy, at least formally, the conservation laws

$$(5) \quad \|u(t, \cdot)\|_{L^2} = \|u(0, \cdot)\|_{L^2}$$

and

$$(6) \quad \frac{1}{2} \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1}(t, x) dx = \frac{1}{2} \|u_x(0, \cdot)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1}(0, x) dx.$$

Using the Gagliardo-Nirenberg inequalities

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}^{p+1} \leq C \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{(p+3)/2} \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{(p-1)/2},$$

we deduce from (5) and (6) that, for $p < 5$, the H^1 norm of $u(t, \cdot)$ is bounded independently of t as $u(0, \cdot) \in H^1(\mathbb{R})$. Consequently, the H^1 local well-posedness result of Kenig-Ponce-Vega [27] implies the existence of well-defined global dynamics of (4), for $p < 5$, in the energy space $H^1(\mathbb{R})$.

If $p \geq 5$, the H^1 local well-posedness result of Kenig-Ponce-Vega still applies (see Theorem 2.1 below) but the conservation laws (5), (6) provide no longer an H^1 control and hence solutions developing singularities in finite time may appear. The existence of such solutions has been a long standing open problem. In the case $p = 5$, this problem has been solved by Martel-Merle in a series of recent papers. The goal of this exposé is to discuss the main ideas developed by Martel-Merle, together with a presentation of previously known closely related results. One can extract from the results of Martel-Merle the following statement.

THEOREM 1.1 (Martel-Merle [35, 44, 36, 37]). — *Let $p = 5$. There exists $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ such that the local solution of (4) with initial data u_0 blows up in finite time. More precisely there exists $T > 0$ such that $\lim_{t \rightarrow T} \|u(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} = \infty$.*

We refer to section 8 below for a more precise statement. Let us make a comment on the choice of the initial data u_0 . Equation (4) still has solutions of type (3). Namely, the solitary waves of (4) have the form $u_c(t, x) = Q_c(x - ct)$, $c > 0$ with $Q_c(x) = c^{1/(p-1)} Q(\sqrt{c}x)$ and

$$Q(x) = \left[\frac{p+1}{2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{p-1}{2}x\right)} \right]^{1/(p-1)}.$$

The crux of the Martel-Merle analysis is the deep understanding of the flow of (4) *close to a solitary wave*. It turns out that the solutions developing singularities in finite time constructed by Martel-Merle are issued from initial data close to $Q(x)$ and are essentially of the form $Q_{c(t)}(x + x(t))$ with $c(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$.

The study of solutions of PDE's developing singularities in finite time is an active research field. Let us briefly recall a few of the existing results and compare them with the analysis in the context of (4). In the case of semi-linear wave equations, due to the "finite propagation speed", the blow-up dynamics can be approximated by an ODE developing singularities in finite time (see [2] and the references therein). In the case of quasi-linear wave equations, a Burgers type behavior is behind the blow up dynamics (see [15] and the references therein). The equation (4) does not enjoy similar finite propagation speed properties and the qualitative study of (4) offers new features. Probably the closest models to (4) are the nonlinear Schrödinger equations (NLS). In the case of NLS, we have a functional (viriel functional) giving a simple obstruction for the existence of global dynamics (see [59] and the references therein). A similar functional is not known to exist in the context of (4). Due to a conformal invariance⁽¹⁾ of some Nonlinear Schrödinger equations, one can construct explicit blow-up solutions (see [41, 43, 60]). Similar invariance is not known in the context of (4).

The rest of this text is organized as follows. In the next section we recall some basic facts on the Cauchy problem for (4). Next, we recall results on the stability of the solitary waves for (4). Starting from section 4, we concentrate on the case $p = 5$. In section 4, we present a characterization of the solitary waves among the solutions with data close to the profile Q . Then, in sections 5 and 6, we present two applications of that characterization result. Section 5 is devoted to an asymptotic stability result while in section 6 we present a result showing the existence of solutions blowing up in finite or infinite time. The last two sections are devoted to the existence of solutions blowing up in finite time. In section 7, we present a result on the blow-up profile which is essential to prove the blow-up in finite time. Section 8 is devoted to the argument providing finite-time blow-up solutions. Finally, in section 9 we present some remarks and open problems.

Acknowledgments. — It is a pleasure to thank Anne de Bouard, Khaled El Dika and Jean-Claude Saut for many valuable discussions on the subject. I am also indebted to Anne de Bouard, Laurent Clozel, Yvan Martel and Frank Merle for their remarks on previous versions of this text.

⁽¹⁾The viriel functional is a consequence of that invariance too.

2. THE CAUCHY PROBLEM

In this section, we collect some preliminary results on the Cauchy problem

$$(7) \quad \begin{cases} u_t + u_{xxx} + \partial_x(u^p) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

where $p \geq 1$ is an integer. The following theorem⁽²⁾, which can be extracted from the work of Kenig-Ponce-Vega [27], is the starting point for the study of (7) in H^1 .

THEOREM 2.1 ([27]). — *For every $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, there exist $T \in]0, +\infty[$, bounded from below by a positive constant which only depends on $\|u_0\|_{H^1}$, and a functional space X_T continuously embedded in $C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ such that the Cauchy problem (7) has a unique maximal solution $u \in X_T$. Moreover, if $T < +\infty$ then $\lim_{t \rightarrow T} \|u(t, \cdot)\|_{H^1} = \infty$.*

Of course, a similar statement holds for negative times t . One can also prove the local well-posedness of (7) in H^s for suitable $s < 1$. This fact plays an important role in the Martel-Merle work. For example, it is used to prove that the flow enjoys a continuity property with respect to the weak H^1 topology.

Let us give some indications on the proof of Theorem 2.1 in the case $p = 5$. The proof of the other cases follows similar lines. In the case $p = 5$, one can prove that (7) is well-posed for data in H^s , $s > 0$. The proof is based on applying the contraction mapping principle to the integral formulation (Duhamel principle) of (7)

$$(8) \quad u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t - \tau) \partial_x(u^p(\tau)) d\tau.$$

In (8), $S(t) = \exp(-t\partial_x^3)$ is the generator of the free evolution. This is the operator of convolution with respect to x with $(3t)^{-1/3} \text{Ai}(x(3t)^{-1/3})$, where Ai is the Airy function. Let us recall that the Airy function is exponentially decaying on the right and it decays as $|x|^{-1/4}$ on the left (see *e.g.* [24]). Using the smoothing properties of $S(t)$ one can prove (see [27, Corollary 2.11]) that for $u_0 \in H^1$, the right-hand side of (8) is a contraction in a suitable ball of the space X_T of functions defined on $[0, T] \times \mathbb{R}$, equipped with the norm

$$\|u\|_{X_T} = \|u\|_{L_T^\infty H_x^s} + \|D_x^s u\|_{L_x^5 L_T^{10}} + \|D_t^{s/3} u\|_{L_x^5 L_T^{10}} + \|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|D_t^{s/3} u_x\|_{L_x^\infty L_T^2}.$$

The argument relies on some methods from harmonic analysis (restriction phenomena, maximal function estimates, etc.). In the case $s = 0$ the argument breaks down. However, in that case we are able to insure the contraction property, if $\|u_0\|_{L^2}$ is small enough. Therefore, if $p = 5$, the equation (4) is L^2 -critical.

⁽²⁾We refer to [56, 7, 25, 21] for earlier results on the well-posedness theory of (7).

Another very important aspect in the study of (7) is the Kato smoothing effect (see [25]). Let $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$ be bounded with all its derivatives. If u is a solution of (4) then, multiplying (4) with φu and integrating by parts, we obtain the formal⁽³⁾ identity

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) \varphi = -3 \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t) \varphi' + \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) \varphi^{(3)} + \frac{2p}{p+1} \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1}(t) \varphi'.$$

Note that, if φ is increasing then the first term in the right-hand side of (9) is negative. This fact was used by Kato [25] to show a remarkable local smoothing effect for (7), if $p < 5$. Namely the solution turns out to be one derivative smoother than the data, locally in space. In [25] well-posedness results in weighted Sobolev spaces are also obtained. The article of Kato was a great source of inspiration for many further works on the subject. It is also the case in the papers by Martel-Merle. For example, the crucial monotonicity properties (see section 5 below) are strongly related to identity (9).

3. STABILITY AND INSTABILITY OF THE SOLITARY WAVES

The initial data giving rise to blow-up solutions in the work of Martel-Merle belong to a small neighborhood of the function $Q(x)$ which is the initial data for a solitary wave. Thus the question of long time stability (or instability) of the solution $Q(x-t)$ of (4) is closely related to Martel-Merle analysis. This question has a long history starting from the pioneering work of Benjamin [4]. The aim of this section is to briefly summarize the state of the art on the stability of $Q(x-t)$. Similar discussion is valid for the solitary wave $Q_c(x-ct)$ (recall that $Q = Q_1$).

Let us first notice that there exist data for (4) arbitrary close to $Q(x)$ such that the corresponding solution does not stay close to $Q(x-t)$ for long times. This is clearly the case of $Q_c(x)$ with c close but different from 1. Indeed, if c is close to 1 then $Q(x)$ is close to $Q_c(x)$, but, because of the different propagation speed, $Q(x-t)$ and $Q_c(x-ct)$ separate from each other for $t \gg 1$.

Notice however that in the previous example the solution issued from Q_c remains close to spatial translates of Q . Hence this example does not exclude orbital stability of Q (up to the action of the group of spatial translations). Indeed, it turns out that for $p < 5$ the solution $Q(x-t)$ is orbitally stable under small H^1 perturbations. Here is the precise statement.

THEOREM 3.1. — *Let $p < 5$. For every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if the initial data of (7) satisfies $\|u_0 - Q\|_{H^1} < \delta$ then there exists a C^1 function $x(t)$ such*

⁽³⁾The rigorous justification for sufficiently “nice solutions” u can be obtained by approximation arguments thanks to a propagation of regularity property of the local flow of (7).

that, for every $t \in \mathbb{R}$, the corresponding solution⁽⁴⁾ of (7) satisfies

$$\|u(t, \cdot + x(t)) - Q(\cdot - t)\|_{H^1} < \varepsilon.$$

The proof of Theorem 3.1 can be found in [8] as an application of the general theory developed in [23]. See also [4, 6, 60, 61, 62] for earlier closely related results. Let us also mention the work of Cazenave-Lions [14] for an apparently different approach based on global variational arguments. In the case $p = 2$, we have L^2 solutions of (4) (see [12]) and it is a natural question whether the space H^1 in Theorem 3.1 could be replaced with L^2 . The answer to that question is positive, as shown in the work by Merle-Vega [50].

Let us give the main idea of the proof of Theorem 3.1. Denote by $E(u)$ and $N(u)$ the functionals

$$(10) \quad E(u) := \frac{1}{2}\|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{p+1} \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1}(x) dx, \quad N(u) := \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Recall that if u is a H^1 solution of (4) then the quantities $E(u(t))$ and $N(u(t))$ are time independent. Hence the functional $H(u) := E(u) + N(u)$ defines another conservation law. Since Q solves $(-\partial_x^2 + 1)Q = Q^p$, we infer that Q is a critical point of H . Using the implicit function theorem, we can find a C^1 function $x(t)$, defined a priori at least for small t such that $u(t, x + x(t)) = Q(x) + \mathcal{E}(t, x)$ and $\langle \mathcal{E}(t), Q' \rangle = 0$. Here and in the sequel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stands for the $L^2(\mathbb{R})$ inner product. Then clearly,

$$H(u(0)) = H(u(t)) = H(u(t, \cdot + x(t))) = H(Q + \mathcal{E}(t)),$$

and since Q is a critical point of H , by Taylor expansion, we deduce

$$(11) \quad H(u(0)) - H(Q) = H(Q + \mathcal{E}(t)) - H(Q) = \frac{1}{2}\langle L\mathcal{E}(t), \mathcal{E}(t) \rangle + o(\|\mathcal{E}(t)\|_{H^1}^2),$$

where $L = -\partial_x^2 - pQ^{p-1} + 1$. The next lemma is crucial.

LEMMA 3.2. — *Let $p < 5$. Then there exists $C > 0$ such that for every $v \in H^1$ satisfying $\langle v, Q' \rangle = \langle v, Q' \rangle = 0$, one has $\langle Lv, v \rangle \geq C\|v\|_{H^1}^2$.*

The proof of Lemma 3.2 uses the explicit form of Q . Actually we have a complete understanding of the spectrum of L , namely one simple negative eigenvalue associated to a positive eigenfunction, the simple eigenvalue zero associated to Q_x and all the rest of the spectrum is included in $[\gamma, \infty]$, for some $\gamma > 0$. The relevant fact related to the assumption $p < 5$ is that $d''(1) > 0$ where $d(c) = E(Q_c) + cN(Q_c)$. Unfortunately, the function $\mathcal{E}(t)$ involved in the decomposition of $u(t, x + x(t))$ is not orthogonal to Q and Lemma 3.2 alone does not suffice to complete the proof. However, by writing

⁽⁴⁾The existence is ensured from Theorem 2.1 and the Gagliardo-Nirenberg inequality as shown in the introduction.

$\mathcal{E}(t) = \alpha Q + \mathcal{E}_1(t)$ with \mathcal{E}_1 satisfying the assumptions of Lemma 3.2, we can apply the lemma to \mathcal{E}_1 , the L^2 conservation law to evaluate α and to conclude that

$$\langle L\mathcal{E}(t), \mathcal{E}(t) \rangle \geq C\|\mathcal{E}(t)\|_{H^1}^2 + o(\|\mathcal{E}(t)\|_{H^1}^2),$$

provided $\|u\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$. Hence Q is a local minimizer of the energy E on the sphere of L^2 centered at the origin and of radius $\|Q\|_{L^2}$. Finally using the continuity of E and N on H^1 allows one to complete the stability proof.

It turns out that the restriction $p < 5$ in Theorem 3.1 is sharp.

THEOREM 3.3. — *Let $p \geq 5$. Then the solitary wave $Q(x - t)$ is not stable in the sense of Theorem 3.1.*

The proof of Theorem 3.3 for $p > 5$ can be found in [8] while the more involved analysis in the critical case $p = 5$ is performed in [33]. The argument is based on the construction of a suitable Lyapunov functional. If we set $\psi_c(x) := c^{1/(p-1)}Q(c^{2/(p-1)}x)$ then $\|\psi_c\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$, and for $p > 5$, $\psi_1 = Q$ is a local maximum of $E(\psi_c)$ for c near 1. Thus, in contrast with the case $p < 5$, if $p > 5$ then Q is a saddle point of $E(u)$ subject to the constraint $\|u\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$. Define a function y as

$$y(x) := \frac{1}{p-1}Q(x) + \frac{2x}{p-1}Q'(x).$$

The relevant fact about y is that $y = \frac{\partial \psi_c}{\partial c}|_{c=1}$. As in the stability proof, we “modulate” the solution of (4) with data close to Q as $u(t, x + x(t)) = Q(x) + \mathcal{E}(t, x)$ with $\langle \mathcal{E}(t), Q' \rangle = 0$. Such a decomposition of the solution is possible as far as it stays in a small H^1 neighborhood of the spatial translates of Q . For $p > 5$, the Lyapunov functional is

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x - x(t))u(t, x)dx,$$

where $Y(x) = \int_{-\infty}^x y(z)dz$. We refer to [23] for the general construction of Lyapunov functionals in the context of solitary waves for PDE's in the presence of symmetry. The discussion of [23] greatly clarifies the nature of the functional $J(t)$.

For $p > 5$, we have that $J'(t) \geq \kappa > 0$, if the initial data is ψ_c with c close but different from one, due to the property of the curve $\{\psi_c, c \sim 1\}$ described above. On the other hand, using some properties of the Airy function, by arguments in the spirit of the Cauchy problem analysis, we can obtain that $J(t) \leq C(t^{-2/3} + t^{2/3})$, $t > 0$, which in view of the lower bound for $J'(t)$ shows that instability holds.

In the critical case $p = 5$, the Lyapunov functional used in [33] is a suitable combination of $J(t)$ and the viriel functional

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x(t))u^2(t, x)dx.$$

The quantities $J(t)$ and $I(t)$ play a central role in Martel-Merle work. They are both measures for the loss of some mass during the time evolution. Notice that a priori

these quantities do not make sense for H^1 solutions. The rigorous justification of the existence of $J(t)$ and $I(t)$ is one of the important analytic aspects in the analysis of (7) in a small neighborhood of the solitary waves.

Actually, the critical nature of the exponent $p = 5$ can be “predicted” from the spectral analysis of Pego-Weinstein [53]. Let us linearize (4) around the solution $Q(x - t)$. We set $u(t, x) = Q(x - t) + v(t, x - t)$. If we take $(t, x - t)$ as new variables that we note again with (t, x) , we obtain that v solves the equation

$$v_t - \partial_x L v + R(v) = 0,$$

where $L = -\partial_x^2 - pQ^{p-1} + 1$ and the remainder $R(v)$ contains terms which are at least quadratic in v . Note that L is the same operator as in the expansion of the functional $H(u)$ (see (11) above). As usual, the spectral properties⁽⁵⁾ of $\partial_x L$ are an indicator for the nonlinear stability of $Q(x - t)$ as a solution of (4). In [53], it is shown that $\partial_x L$, considered as an operator on L^2 with domain H^3 , has the following spectrum :

- If $p \leq 5$ then the spectrum coincides with the imaginary axis.
- If $p > 5$ then the spectrum consists in the imaginary axis together with two simple, real eigenvalues, $-\lambda(p) < 0 < \lambda(p)$.

Therefore, if $p \neq 5$, the spectral analysis of [53] agrees with (and further clarifies) the stability theory presented above. The eigenvalue $\lambda(p)$ seems to be responsible for the instability in the case $p > 5$. This assertion *could* become rigorous by combining [53] with the ideas of [20].

Let us now turn to the concept of *asymptotic stability* which is at the heart of the work of Martel-Merle. The result of Theorem 3.1 says that the shape of the solitary wave is stable under small H^1 perturbations. But it is not clear whether $u(t, x + x(t))$ converges, in an appropriate sense, to a limit solitary wave. If it is indeed the case, we say that the family of solitary waves is asymptotically stable. Of course, the choice of the functional setting where one measures the convergence is crucial in that discussion. There are many results on asymptotic stability in the context of dissipative PDE's since in that case one can directly split the dynamics into noninteracting parts due to a spectrum of the linearized operator which does not quite meet the imaginary axis. It seems that the first results on asymptotic stability for Hamiltonian PDE's are those of M. Weinstein and collaborators. In the context of (4), Pego-Weinstein obtained asymptotic stability with convergence in the weighted Sobolev spaces H_a^1 , where $a > 0$ and H_a^1 is equipped with the norm $\|u\|_{H_a^1} = \|e^{ax}u(x)\|_{H^1}$. One can similarly define L_a^2 . The following result is due to Pego-Weinstein.

THEOREM 3.4 ([54]). — *Let $p = 2, 3$ and let a, b be two positive numbers such that $a^3 < 1/3$ and $b < a - a^3$. Then there exist $C > 0$ and $\varepsilon > 0$ such that if $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$*

⁽⁵⁾This leads to the notion of *spectral stability*.

satisfies

$$\|u_0 - Q\|_{H^1} + \|u_0 - Q\|_{H_a^1} \leq \varepsilon$$

then there exist $x(t)$ and c_∞ such that, for all $t \geq 0$, the solution of (7) satisfies

$$\|u(t, \cdot + x(t)) - Q_{c_\infty}\|_{H^1} \leq C\varepsilon$$

and

$$\|u(t, \cdot + x(t)) - Q_{c_\infty}\|_{H_a^1} \leq C\varepsilon e^{-bt}.$$

The approach of Pego-Weinstein also works for some other $p < 5$ which are not integers (see [54] for a precise statement). The proof of Theorem 3.4 uses heavily the spectral analysis of $\partial_x L$ that we already discussed. In the case $p < 5$, the eigenvalue $\lambda(p)$ “becomes” a resonance (resolvent pole) and the corresponding mode plays an important role in the dynamics. If we consider $\partial_x L$ as an operator on L_a^2 then the spectrum shifts from the imaginary axis and the situation becomes very similar to the case of a dissipative PDE. The number b involved in the statement of Theorem 3.4 is essentially the distance between the resonance and the imaginary axis. Let us also mention that the modulation parameter $x(t)$ in Theorem 3.4 is an *affine* function of t .

In [34], Martel-Merle prove an asymptotic stability result where the weighted norm H_a^1 is replaced by a weak H^1 convergence. Here is the precise statement.

THEOREM 3.5 ([34]). — *Consider (7) with $p = 2, 3, 4$. There exists $\varepsilon > 0$ such that if $\|u_0 - Q\|_{H^1} \leq \varepsilon$ then there exist $x(t)$ and c_∞ such that $u(t, \cdot + x(t)) - Q_{c_\infty}$ converges to zero, weakly in H^1 , as $t \rightarrow \infty$.*

Note that in contrast with Theorem 3.4, the result of Theorem 3.5 does not give an estimate for the rate of convergence. On the other hand the assumptions on the data u_0 in Theorem 3.5 are less restrictive than in Theorem 3.4. Notice also that in Theorem 3.5 one can replace the weak H^1 convergence with strong L_{loc}^2 convergence. In the proof of Theorem 3.5, we modulate the solution u as

$$(12) \quad \lambda^{2/(p-1)}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t)) = Q(x) + \mathcal{E}(t, x),$$

where $\lambda(t)$ and $x(t)$ are chosen so that the remainder \mathcal{E} satisfies the orthogonality conditions

$$(13) \quad \langle \mathcal{E}(t), Q \rangle = \langle \mathcal{E}(t), Q' \rangle = 0.$$

We note that, comparing to the stability analysis above, a new modulation parameter⁽⁶⁾ $\lambda(t)$ appears in (12). That parameter is closely related to the *scaling* invariance of (4) which means that if $u(t, x)$ solves (4) then so does $\lambda^{2/(p-1)}u(\lambda^3 t, \lambda x)$. In that context, the modulation parameter $x(t)$ is related to the translation invariance of (4) which means that if $u(t, x)$ solves (4) then, for every $x_0 \in \mathbb{R}$, the equation (4) is also solved by $u(t, x + x_0)$. The orthogonality conditions (13) are clearly linked with

⁽⁶⁾The introduction of this parameter is in fact the main new point in the instability proof for $p = 5$.

Lemma 3.2 and can be achieved thanks to the implicit function theorem due to the following non degeneracy properties of Q ,

$$(14) \quad \frac{d}{d\lambda} \langle Q_\lambda, Q \rangle \Big|_{\lambda=1} = \frac{5-p}{4(p-1)} \|Q\|_{L^2}^2, \quad \frac{d}{dx_0} \langle Q(\cdot + x_0), Q'(\cdot) \rangle \Big|_{x_0=0} = \|Q'\|_{L^2}^2.$$

Recall from the introduction that Q_λ is the initial data of a solitary wave of (4) propagating with speed λ . In view of (14), in the critical case $p = 5$, we are not able to modulate u so that $\langle \mathcal{E}(t), Q \rangle = 0$ which makes the analysis in that case quite different. To prove Theorem 3.5, one needs to show the convergence of $\lambda(t)$ as $t \rightarrow \infty$ and the convergence of $\mathcal{E}(t)$ to zero in H^1 weak. The proof of these two facts follows lines similar to the analysis of the critical case $p = 5$ to which the next two sections are devoted. In particular it heavily relies on a classification of L^2 compact solutions with data close to Q . It is important to mention that, in contrast with previous works on the subject, in the proof of Theorem 3.5 the bounds on \mathcal{E} rely much less on solving the equation for \mathcal{E} by an iteration scheme in a suitable functional setting.

In a very recent paper of Martel-Merle [39], a different proof of Theorem 3.5 is presented. It is based on the use of a localized viriel type functional which provides a control on \mathcal{E} . Moreover, in [39] a strong H^1 convergence on the right of the solitary wave is obtained. In the proof of Theorem 3.5 it appears that the derivative of the modulation parameter $x(t)$ converges to c_∞ . A natural question is whether, similarly to the result of Pego-Weinstein, in Theorem 3.5 one may take $x(t)$ an affine function of t . The answer to that question is negative, at least in the case $p = 2$, due to an example constructed in [39].

The approach of Theorem 3.5 is further extended in [40, 32] where the asymptotic stability in H^1 of suitable sums of N solitary waves is obtained (see [31] for earlier results). In the case $p = 2$, the result applies to the exact N -soliton solution of the KdV equation (see *e.g.* [52]). The N -solitons of KdV can be used to show that, for $p = 2$, in Theorem 3.5 strong L^2 convergence is impossible. The existence of such solutions also “explains” the use of weighted norms in the work of Pego-Weinstein.

4. CLASSIFICATION OF L^2 -COMPACT GLOBAL SOLUTIONS WITH DATA CLOSE TO Q

From now on we only consider (4) in the case $p = 5$, *i.e.* we analyze the Cauchy problem

$$(15) \quad \begin{cases} u_t + u_{xxx} + \partial_x(u^5) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Let us notice that for $p = 5$, we have $E(Q_c) = 0$ and $\|Q_c\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ for all c . Hence in that case the conservation laws (5) and (6) do not present an obstruction for the existence of blow-up solutions of the form $Q_{c(t)}(x + x(t))$ with $c(t) \rightarrow \infty$.

The following rigidity result, called by the authors “Liouville property”, is the main tool in the proof of existence of simple asymptotic objects for the dynamics close to $Q(x-t)$.

THEOREM 4.1 ([35]). — *Suppose that :*

(1) *The function $u(t, x)$ is a solution global in time of (15) such that*

$$c_1 \leq \|u_x(t)\|_{L^2} \leq c_2,$$

for some positive constants c_1 and c_2 .

(2) *The solution $u(t, x)$ is L^2 compact which means that there exists a function $y(t)$ such that for every $\varepsilon > 0$ there exists $R > 0$ such that for every t ,*

$$\|u(t, x)\|_{L^2(|x-y(t)|>R)} \leq \varepsilon.$$

Then there exists $\alpha > 0$ such that if $\|u_0 - Q\|_{H^1} \leq \alpha$ then there exist λ and x_0 such that

$$u(t, x) = \lambda^{1/2} Q(\lambda(x - x_0) - \lambda^3 t).$$

Remark 4.2. — It seems that Theorem 4.1 is the first result of this type for a Hamiltonian PDE. On the other hand, results in the spirit of Theorem 4.1 were previously known in the context of parabolic PDE’s (see [51, 19] and the references therein).

Let us give the main lines of the proof of Theorem 4.1. We modulate the solutions $u(t, x)$ of (15) with data close to Q in H^1 as

$$(16) \quad \lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t)) = Q(x) + \mathcal{E}(t, x),$$

where the geometric parameters $\lambda(t) > 0$ and $x(t)$ are defined so that \mathcal{E} satisfies the orthogonality conditions

$$(17) \quad \langle \mathcal{E}(t), Q^3 \rangle = \langle \mathcal{E}(t), Q' \rangle = 0.$$

The reason to chose (17) as orthogonality conditions is that if \mathcal{E} satisfies (17) then $\langle L\mathcal{E}(t), \mathcal{E}(t) \rangle \geq C\|\mathcal{E}(t)\|_{H^1}^2$, where $L = -\partial_x^2 - 5Q^4 + 1$ is the operator arising in the linearization of the energy functional around Q . It seems however that (17) is not the only possible choice of orthogonality conditions on \mathcal{E} which makes the proof of Theorem 4.1 work. The assumption (1) and the conservation laws imply the smallness of $\mathcal{E}(t)$ in H^1 , if u_0 is close to Q in H^1 . If we change the time variable as

$$(18) \quad s = s(t) := \int_0^t \lambda^{-3}(\tau) d\tau$$

then we obtain that $\mathcal{E}(s, x)$ solves the following equation

$$(19) \quad \mathcal{E}_s - (L\mathcal{E})_x - \frac{\lambda_s}{\lambda} \left(\frac{Q}{2} + xQ' \right) - \left(\frac{x_s}{\lambda} - 1 \right) Q' \\ = \frac{\lambda_s}{\lambda} \left(\frac{\mathcal{E}}{2} + x\mathcal{E}_x \right) + \left(\frac{x_s}{\lambda} - 1 \right) \mathcal{E}_x - (10Q^3\mathcal{E}^2 + 10Q^2\mathcal{E}^3 + 5Q\mathcal{E}^4 + \mathcal{E}^5)_x.$$

The new time variable s is clearly related to the scaling of the equation. An advantage of introducing it is that even if t ranges in a finite interval (blow-up regime) the variable s ranges in the whole real line. Indeed, from the H^1 well-posedness and a scaling argument one easily obtains that if a solution $u(t)$ of (15) blows up in finite time T , then

$$\|u_x(t, \cdot)\|_{L^2} \geq C|T - t|^{-1/3},$$

for $t \sim T$. In the context of the decomposition (16), $\lambda(t) \sim \|u_x(t, \cdot)\|_{L^2}^{-1}$ and therefore, in view of (18) the variable s takes all real values. Notice also that the blow-up of $u(t)$ can be simply expressed as $\lambda(t) \rightarrow 0$, while the assumption (1) of Theorem 4.1 can be seen as $\tilde{c}_1 \leq \lambda(t) \leq \tilde{c}_2$.

The parameter $x(t)$ involved in the decomposition (16) is different from $y(t)$ in the assumption (2) of the theorem. But one easily obtains that $|x(t) - y(t)| \leq C$ and that $\mathcal{E}(s, x)$ is L^2 -compact, *i.e.* for every $\varepsilon > 0$ there exists $R > 0$ such that for every s one has $\|\mathcal{E}(s, x)\|_{L^2(|x| > R)} \leq \varepsilon$. It turns out that the L^2 -compactness together with the properties of the equation (19) give much stronger estimates on $\mathcal{E}(s, x)$.

LEMMA 4.3. — *Let a and b be defined as*

$$(20) \quad a := \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{E}(s, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad b := \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{E}(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Then there exist $a_0 > 0$, $C > 0$ and $\theta > 0$ such that if $a < a_0$, then $|\mathcal{E}(s, x)| \leq C\sqrt{ab}e^{-\theta|x|}$.

Remark 4.4. — The exponential decay displayed in Lemma 4.3 is related to a general property of L^2 -compact solutions of (4) and is not restricted only to data close to Q (see [30] for more details).

To prove Lemma 4.3 one needs to observe that equation (19) is essentially a critical generalized KdV equation with exponentially decaying source term. Thus to prove Lemma 4.3, in addition to the L^2 -compactness property one also has to use the L^2 small data scattering theory for (15) developed by Kenig-Ponce-Vega in [27] and the persistence of the decay by the linear KdV flow, a fact already observed in the work of Kato [25].

The next step is to use Lemma 4.3 to get the equivalence between the H^1 and L^2 norms of $\mathcal{E}(s)$.

LEMMA 4.5. — *Let a and b be defined as in (20). Then there exist $a_1 > 0$ and $C > 0$ such that if $a < a_1$ then $a \leq Cb$.*

The exponential decay obtained in Lemma 4.3 allows us to use viriel type identities. Indeed, if we set

$$I(s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{E}^2(s, x) dx$$

we can obtain the estimate

$$\frac{d}{ds}(\lambda(s)I(s)) \leq C_1 b^2 - C_2 \|\mathcal{E}(s)\|_{H^1}^2$$

which easily provides the bound $a \leq Cb$.

With Lemma 4.3 and Lemma 4.5 in hand we can turn to the proof of Theorem 4.1. Let us first notice that if $\mathcal{E} = 0$ in (16) and u is a solution of (15) then, in view of the equation solved by \mathcal{E} , we deduce that there exist two constants α and β such that $\lambda(t) = \alpha$ and $x(t) = \alpha^{-2}t + \beta$ which in turn implies that $u(t, x)$ can be represented as claimed in the statement of Theorem 4.1.

The proof of Theorem 4.1 is indirect. Consider a sequence (u_n) of solutions of (15) with $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0) - Q\|_{H^1} = 0$ such that u_n satisfies assumptions (1) and (2) of Theorem 4.1. We can thus represent u_n , for $n \gg 1$ as in (16) with corresponding modulation parameters $\lambda_n(t)$, $x_n(t)$ and remainder \mathcal{E}_n . We suppose that for every n the function \mathcal{E}_n is not identically zero and we look for a contradiction.

It turns out that a suitably renormalized subsequence of \mathcal{E}_n converges to a solution of a linear problem.

LEMMA 4.6. — *Let $b_n := \sup_s \|\mathcal{E}_n(s)\|_{L^2}$. Then there exist a sequence (s_n) of real numbers and a subsequence $(\mathcal{E}_{n'})$ such that $b_{n'}^{-1} \mathcal{E}_{n'}(s_{n'} + s)$ converges in $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))$ to $w(s)$ which is not identically zero and satisfies $w \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$. Moreover w solves the equation*

$$(21) \quad w_s - (Lw)_x = \alpha(s) \left(\frac{Q}{2} + xQ' \right) + \beta(s)Q'$$

for some continuous functions α and β . In addition w satisfies the orthogonality conditions

$$(22) \quad \langle w(s), Q^3 \rangle = \langle w(s), Q' \rangle = 0$$

and the exponential decay

$$(23) \quad |w(s, x)| \leq C e^{-\theta|x|}$$

with a suitable choice of the positive constants C and θ .

At a formal level one easily verifies that the linear equation (21) appears as a limit model for the nonlinear equation (19). We have the estimate

$$(24) \quad \left| \frac{\lambda_s}{\lambda} \right| + \left| \frac{x_s}{\lambda} - 1 \right| \leq C \sup_s \|\mathcal{E}(s, \cdot)\|_{L^2}$$

as a very basic property of the decomposition (16). Indeed, it suffices to multiply (19) with Q^3 and Q' and to integrate on x . Since \mathcal{E}_n solves (19), in view of the bound (24), we obtain that at the limit $b_n \rightarrow 0$ the limit equation for $b_n^{-1} \mathcal{E}_n$ is (21). Indeed, all terms in the right-hand side of (19) disappear either because of (24) or because \mathcal{E} appears in higher powers.

In order to make the previous formal reasoning rigorous one heavily relies on the L^2 small data global existence theory of Kenig-Ponce-Vega [27]. The fact that $\|\mathcal{E}_n\|_{L^2}$ controls $\|\mathcal{E}_n\|_{H^1}$ is of great importance in the limit process.

The last step in the proof of Theorem 4.1 is the analysis of the linear equation (21). Theorem 4.1 follows from the following rigidity property of (21).

LEMMA 4.7. — *Let $w \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$ be a solution of (21) satisfying the orthogonality conditions (22) and the decay estimate (23). Then w is identically zero.*

Lemma 4.7 could be seen as a result of unique continuation *at infinity* for the equation (21) (the decay of w is essential for the proof). Let us give an outline of the proof of Lemma 4.7. It turns out that $w(s)$ satisfies an additional orthogonality condition. One can directly show that $\langle w(s), Q \rangle$ is a quantity independent of s . In order to show that it is zero, one appeals to the functional⁽⁷⁾

$$J(s) = \int_{-\infty}^{\infty} w(s, x) \left(\int_0^x \left(\frac{Q(y)}{2} + yQ'(y) \right) dy \right) dx.$$

A direct computation shows that $J'(s) = 2\langle w(0), Q \rangle$. Due to the exponential decay of $w(s)$, $|J(s)|$ is uniformly bounded and therefore $\langle w(s), Q \rangle = 0$. Thus, for all s , $w(s)$ is orthogonal to Q .

We next consider the viriel functional

$$I(s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x w^2(s, x) dx.$$

A direct computation shows that

$$(25) \quad I'(s) = H(w(s), w(s)) + \alpha(s) \left\langle x \left(\frac{Q}{2} + xQ' \right), w(s) \right\rangle + \beta(s) \langle xQ', w(s) \rangle,$$

where $H(w, w) = \langle (Lw)_x, xw \rangle$. In view of (25), we slightly modify $w(s)$ by setting

$$(26) \quad \tilde{w}(s) = w(s) + \gamma(s) \left(\frac{Q}{2} + xQ' \right) + \delta(s)Q'.$$

It turns out that with a suitable choice of $\gamma(s)$ and $\delta(s)$, \tilde{w} solves an equation of type

$$\tilde{w}_s - (L\tilde{w})_x = \tilde{\alpha}(s) \left(\frac{Q}{2} + xQ' \right) + \tilde{\beta}(s)Q',$$

satisfies the orthogonality conditions

$$(27) \quad \left\langle \tilde{w}(s), \left(\frac{xQ}{2} + x^2Q' \right) \right\rangle = \langle \tilde{w}(s), xQ' \rangle = \langle \tilde{w}(s), Q \rangle = 0,$$

and, if we set $I_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x\tilde{w}^2(s, x) dx$, then $I_1'(s) = H(\tilde{w}(s), \tilde{w}(s))$.

⁽⁷⁾Recall that a *similar* functional is involved in the instability analysis of the previous section.

The next step is to use that due to the orthogonality conditions satisfied by \tilde{w} , one has

$$(28) \quad -H(\tilde{w}(s), \tilde{w}(s)) \geq \frac{1}{10} \langle L\tilde{w}(s), \tilde{w}(s) \rangle.$$

Once again, in order to prove (28), one needs to make explicit calculations based on the very particular form of Q . Using the equation solved by $\tilde{w}(s)$, one can easily check that $\langle L\tilde{w}(s), \tilde{w}(s) \rangle = \langle L\tilde{w}(0), \tilde{w}(0) \rangle$ and therefore $I_1'(s) \leq -\frac{1}{10} \langle L\tilde{w}(0), \tilde{w}(0) \rangle \leq 0$. Since $\tilde{w}(s)$ is exponentially decaying we obtain that $\langle L\tilde{w}(s), \tilde{w}(s) \rangle = 0$.

But as a matter of fact, if $u \in H^1(\mathbb{R})$ is orthogonal to Q and satisfies $\langle Lu, u \rangle = 0$, then u is necessarily a linear combination of Q' and $\frac{Q}{2} + xQ'$. In view of (27), we directly conclude that \tilde{w} is identically zero. Finally, we obtain that w is identically zero thanks to (26) and the orthogonality conditions (22).

5. ASYMPTOTIC STABILITY IN THE REGULAR REGIME

A first consequence of Theorem 4.1 is an asymptotic stability result under the assumption that the solution with data close to Q is globally defined and uniformly bounded in $H^1(\mathbb{R})$.

THEOREM 5.1 ([35]). — *Suppose that $u(t)$ is a solution global in time of (15) such that $c_1 \leq \|u_x(t)\|_{L^2} \leq c_2$, for some positive constants c_1 and c_2 . Then there exists $\alpha > 0$ such that if $\|u_0 - Q\|_{H^1} \leq \alpha$ then there exist $\lambda(t)$ and $x(t)$ such that $\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t))$ converges to $Q(x)$, weakly in $H^1(\mathbb{R})$, as $t \rightarrow \infty$.*

Notice that the result of Theorem 5.1 displays a weaker form of asymptotic stability compared with the case $p < 5$. Indeed, in contrast with the situation for $p < 5$, it is not clear whether the modulation parameter $\lambda(t)$, involved in the statement of Theorem 5.1, converges to some limit as $t \rightarrow \infty$.

Let us give the main ideas of the proof of Theorem 5.1. The two main ingredients are :

- Continuity of the flow of (15) with respect to the weak H^1 topology.
- An almost monotonicity property of the L^2 mass for solutions of (15) with data close to Q in H^1 .

The continuity property of the flow with respect to the weak H^1 topology is a consequence of the well-posedness of the Cauchy problem below H^1 and of a viriel identity argument. This type of results seems to appear first in a paper by Glangetas-Merle [22]. The monotonicity property of the mass is closely related to the Kato identity discussed in section 2. This monotonicity property separates the dynamics into two noninteracting parts and it is related to the dispersion relation (the symbol) of the *linear part* of the equation. It is worth noticing that similar monotonicity properties hold for a fairly large class of equations such as the Benjamin-Bona-Mahony equation

(see [17]), the Kadomtsev-Petviashvili II equation (see [57, 10]) but, it does not seem to hold for other models as the Kadomtsev-Petviashvili I equation or the nonlinear Schrödinger equation. We refer to [54, page 308] for a very clear explanation whether an equation in hand may enjoy the crucial separation of the dynamics property.

The proof of Theorem 5.1 is again indirect. We modulate $u(t, x)$ as in (16)

$$(29) \quad \lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t)) = Q(x) + \mathcal{E}(t, x).$$

Let us take a sequence $t_n \rightarrow \infty$ such that $\lambda^{1/2}(t_n)u(t_n, \lambda(t_n)x + x(t_n))$ converges, weakly in H^1 , to \tilde{u}_0 and $\lambda(t_n)$ converges to $\tilde{\lambda}_0$. We suppose $\tilde{u}_0 \neq Q$ and we seek for a contradiction by means of Theorem 4.1. Let \tilde{u} be the local solution of the critical generalized KdV equation with data \tilde{u}_0 . Since \tilde{u}_0 is close to Q in H^1 , we can modulate \tilde{u} , at least for small times, with modulation parameters $\tilde{\lambda}(t)$, $\tilde{x}(t)$ and remainder $\tilde{\mathcal{E}}(t, x)$ satisfying the same orthogonality conditions as \mathcal{E} . The continuity property of the flow with respect to the weak H^1 topology implies the following statement.

LEMMA 5.2. — *The solution $\tilde{u}(t)$ is defined for all $t \in \mathbb{R}$, and the sequence $\mathcal{E}(t_n + t)$ converges, weakly in $H^1(\mathbb{R})$, to $\tilde{\mathcal{E}}(t)$. Moreover, for every $T > 0$, $\lambda(t_n + t) - \tilde{\lambda}(t)$ and $x(t_n + t) - \tilde{x}(t)$ converge to zero in $C([-T, T]; \mathbb{R})$.*

Notice that one first proves the lemma for small times which implies a H^1 bound on $\tilde{u}(t)$ thanks to the H^1 boundedness assumption on u . Then we extend $\tilde{u}(t)$ for all times due to the H^1 local well-posedness of (15).

The asymptotic solution \tilde{u} being constructed, the aim is to show that it satisfies the assumptions of Theorem 4.1, *i.e.* we need to check that \tilde{u} is L^2 -compact. Let us notice that the leading idea at this point is that the solution \tilde{u} enjoys more properties than the original solution u itself.

5.1. L^2 -compactness of \tilde{u} on the right of the solitary wave

There are different ways to prove the L^2 -compactness of \tilde{u} on the right. In this subsection, we discuss an argument which is based on a direct analysis of the limit solution \tilde{u} . In the next subsection, we present a more involved method, using Lemma 5.2, providing compactness on both sides.

To get the L^2 -compactness of \tilde{u} on the right, it is sufficient to show that small solutions of (15) can not travel too fast to the right. Such a result would imply the needed compactness since the main part of the solution is moving to the right with speed uniformly bounded from below. Let us state precisely a lemma giving the L^2 -compactness on the right. We introduce a function $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ by setting

$$\psi(x) = c_0 \int_{-\infty}^x Q\left(\frac{x}{K}\right) dy,$$

where c_0 is chosen so that $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 1$. Consider the functional

$$\mathcal{I}_\sigma(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - \sigma t) u^2(t, x) dx$$

which measures the distribution of the L^2 -mass on the right with respect to a frame moving with speed σ . Since the quantity on the right of the solitary wave is essentially a “small solution” of (15), the next statement is the crucial point in the proof of the L^2 -compactness of \tilde{u} on the right.

LEMMA 5.3. — *Let $\sigma > 0$ and $K > \sqrt{2/\sigma}$. There exists a positive constant C_σ such that, if $\|u_0\|_{L^2} \leq C_\sigma$, then $\mathcal{I}_\sigma(t)$ is a non-increasing function on the trajectories of (15).*

The proof of Lemma 5.3 is an application of the Kato identity (9).

5.2. L^2 -compactness of \tilde{u} on the left of the solitary wave

The analysis in that case is more delicate. The main point is to show that the loss of mass at the left is “irreversible”. Notice that Lemma 5.3 does not hold for large solutions since there are solitary waves moving with arbitrary large speed. It turns out however that a weaker form of Lemma 5.3 survives for large data. Let $u(t)$ be a solution of (15) which is decomposed as in (16). For $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ and $t_0 \geq t$, we introduce the functional

$$\mathcal{I}_{x_0, t_0}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - x(t) - x_0 - \frac{3}{4}(x(t_0) - x(t))) u^2(t, x) dx,$$

where the function ψ is defined in the previous subsection. The following statement is now the substitute of Lemma 5.3.

LEMMA 5.4. — *Suppose that there exist two positive numbers c_1 and c_2 such that $c_1 \leq \lambda(t) \leq c_2$. Then there exist $\delta > 0$, $K > 0$ and $C > 0$ such that, if $\sup_t \|\mathcal{E}(t)\|_{H^1} < \delta$, then for every $x_0 \geq 0$, and $0 \leq t \leq t_0$,*

$$I_{x_0, t_0}(t_0) - I_{x_0, t_0}(t) \leq C e^{-x_0/K}.$$

Remark 5.5. — The very particular structure of the functional $\mathcal{I}_{x_0, t_0}(t)$ is important for the proof. The term $\frac{3}{4}(x(t) - x(t_0))$ is strongly needed. The number $\frac{3}{4}$ can be replaced by any number between $\frac{1}{2}$ and 1.

We now explain how the L^2 -compactness of \tilde{u} can be obtained by combining Lemma 5.4 and Lemma 5.2. Define the functional

$$m_r(u(t)) := \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - x(t) - x_0) u^2(t, x) dx$$

which measures the L^2 -mass on the right of the solitary wave. It is easy to see that Lemma 5.4 implies that $m_r(t)$ is an “almost decreasing quantity”. More precisely,

$$(30) \quad m_r(u(t)) - m_r(u(t')) \leq C e^{-x_0/K}, \quad t \geq t'.$$

Indeed, we have that $m_r(u(t)) = \mathcal{I}_{x_0,t}(t)$ and due to the monotonicity of ψ and $x(t)$, $m_r(u(t')) \geq \mathcal{I}_{x_0,t}(t')$. Similarly, since if $u(t, x)$ solves (15) then so does $u(-t, -x)$, we deduce that the quantity

$$m_l(u(t)) := \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \psi(x - (x(t) - x_0))) u^2(t, x) dx,$$

measuring the L^2 -mass on the left of the solitary wave is “almost increasing”. More precisely,

$$(31) \quad m_l(u(t)) - m_l(u(t')) \geq -Ce^{-x_0/K}, \quad t \geq t'.$$

Assume that \tilde{u} is not L^2 -compact. It means that there exists $\delta > 0$ such that for every bounded interval $I \subset \mathbb{R}$, there exists t_0 such that

$$\int_I \tilde{u}^2(t_0, x) dx \leq \|\tilde{u}(0)\|_{L^2}^2 - \delta.$$

For a solution $u(t)$ of (15), we define the quantity $m_{\text{loc}}(u(t))$, measuring the L^2 -mass in a moving frame, via the identity

$$(32) \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 = m_l(u(t)) + m_{\text{loc}}(u(t)) + m_r(u(t)).$$

Taking $x_0 \gg 1$, we can assume

$$(33) \quad m_{\text{loc}}(\tilde{u}(0)) > \|\tilde{u}(0)\|_{L^2}^2 - \frac{\delta}{4}.$$

The assumption of lack of L^2 -compactness of \tilde{u} implies the existence of $t_0 \in \mathbb{R}$ such that

$$(34) \quad m_{\text{loc}}(\tilde{u}(t_0)) < \|\tilde{u}(0)\|_{L^2}^2 - \frac{\delta}{2},$$

if $x_0 \gg 1$. We suppose that $t_0 > 0$, the case $t_0 < 0$ being similar. From (33) and (34), we get the estimate

$$m_{\text{loc}}(\tilde{u}(0)) - m_{\text{loc}}(\tilde{u}(t_0)) > \frac{\delta}{4}.$$

Since the weak H^1 -convergence implies the strong L^2_{loc} -convergence, using Lemma 5.2, we deduce that, if $x_0 \gg 1$ (independently of t_0) then there exists N such that for $n \geq N$,

$$(35) \quad m_{\text{loc}}(u(t_n)) - m_{\text{loc}}(u(t_n + t_0)) > \frac{\delta}{8}.$$

The L^2 -conservation law for u can now be written as

$$m_l(u(t_n + t_0)) - m_l(u(t_n)) = m_r(u(t_n)) - m_r(u(t_n + t_0)) + m_{\text{loc}}(u(t_n)) - m_{\text{loc}}(u(t_n + t_0))$$

which, using (30) and (35), yields

$$(36) \quad m_l(u(t_n + t_0)) - m_l(u(t_n)) > \frac{\delta}{8} - Ce^{-x_0/K}.$$

We can clearly suppose that $t_{n+1} > t_n + t_0$. Therefore using (31) and (36), we get

$$\begin{aligned} m_l(u(t_{n+1})) - m_l(u(t_n)) &= m_l(u(t_{n+1})) - m_l(u(t_n + t_0)) + m_l(u(t_n + t_0)) - m_l(u(t_n)) \\ &> \frac{\delta}{8} - 2Ce^{-x_0/K}. \end{aligned}$$

Hence, if $x_0 \gg 1$, it follows that $m_l(u(t_n)) \rightarrow \infty$ which is clearly impossible in view of the L^2 -conservation law. We obtain a contradiction coming from the assumption of lack of L^2 -compactness of \tilde{u} . Therefore \tilde{u} is L^2 -compact.

Remark 5.6. — Notice that Theorem 5.1 gives an important information about negative energy solutions with data close to Q . Namely, such solutions cannot be uniformly bounded in $H^1(\mathbb{R})$. Indeed, let u be a negative energy solution of (15) with data close to Q which is uniformly bounded in $H^1(\mathbb{R})$. Then similarly to above, we can construct an asymptotic solution \tilde{u} which satisfies the assumptions of Theorem 4.1. Thus \tilde{u} is necessarily a rescaled and translated version of Q . In particular, $E(\tilde{u}) = 0$ since in the critical case $p = 5$, $E(Q_c) = 0$ for all c . On the other hand \tilde{u} is obtained as a weak H^1 limit from solutions close to $Q(x - t)$ with negative energies which implies that $E(\tilde{u}) < 0$. We thus get a contradiction with the assumption of uniform H^1 -boundedness of u .

Let us finally remark that since $E(Q) = 0$ and $\nabla E(Q) = -Q$, we obtain that there exists a large set of negative energy initial data for (15) which is close to Q . An example of such data is clearly $u_0(x) = \pm(1 + \varepsilon)Q$, where $0 < \varepsilon \ll 1$.

6. BLOW-UP IN FINITE OR INFINITE TIME

In this section, we present a second consequence of Theorem 4.1 which is the existence of solutions of (15) blowing up in finite or infinite time.

THEOREM 6.1 ([44]). — *There exists $\alpha > 0$ such that if $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ satisfies*

$$(37) \quad \|u_0\|_{L^2} \leq \|Q\|_{L^2} + \alpha$$

and $E(u_0) < 0$ (negative energy) then the solution of (15) blows up in finite or infinite time which means that there exists $T \in]0, \infty]$ such that $\lim_{t \rightarrow T} \|u(t, \cdot)\|_{H^1} = \infty$.

Remark 6.2. — Under the assumptions of Theorem 6.1, the initial data $u_0(x)$ is close in $H^1(\mathbb{R})$ to $\pm\lambda^{1/2}Q(\lambda(x + x_0))$ for some constants λ_0 and x_0 (see [41, 42, 60]).

Notice that if u_0 satisfies the assumptions of Theorem 6.1, then so does $-u_0$. We also remark that the new point in Theorem 6.1 with respect to Theorem 5.1 is that we have the existence of the limit as t goes to T of $\|u(t, \cdot)\|_{H^1}$ and not only the existence of a sequence (t_n) such that $\|u(t_n, \cdot)\|_{H^1}$ goes to infinity.

The approach of Theorem 6.1 is similar to that of Theorem 5.1. The new ingredients are :

– Extension of the L^2 -compactness of the limit solution to the case when there is no lower bound on the scaling modulation parameter $\lambda(t)$.

– The use of a third conservation law of (15) which provides a control on the size of $\lambda(t)$.

The starting point in Theorem 6.1 is to modulate a negative energy solution of (15), with data satisfying (37) for α small, as

$$(38) \quad \lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t)) = \pm Q(x) + \mathcal{E}(t, x)$$

with $\mathcal{E}(t, x)$ satisfying the orthogonality conditions (17). Without loss of generality, we may assume that the sign in front Q is plus. The decomposition (38) is the same as in (16) but the proof of the control on the modulation parameters $\lambda(t)$, $x(t)$ and the remainder $\mathcal{E}(t, x)$ is different under the assumptions of Theorem 6.1. Using the variational nature of Q one can show that the decomposition (38) holds with smallness estimates⁽⁸⁾ on $\mathcal{E}(t, x)$ and bounds on $\lambda(t)$ and $x(t)$, as far as the solution u exists. Here, “the variational nature of Q ” means that if $u \in H^1(\mathbb{R})$ is such that $E(u) = 0$, $\|u\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ and $\|u'\|_{L^2} = \|Q'\|_{L^2}$ then $u(x) = \pm Q(x + x_0)$ for some constant $x_0 \in \mathbb{R}$ (see [41, 42, 60]).

The proof is by contradiction. Take a sequence (u_n) of negative energy global solutions of (15) such that $\|u_n(0)\|_{L^2}$ tends to $\|Q\|_{L^2}$ as $n \rightarrow \infty$. We suppose that for each n there exist a sequence $(t_{n,m})$ and a constant c_n so that $\|\partial_x u_n(t_{n,m})\|_{L^2} \leq c_n$, uniformly in m . We seek for a contradiction under this assumption. Similarly to the previous section, we define a limit object $\widetilde{u}_n(0)$ from the sequence $(t_{n,m})$ and the decomposition (38) applied to u_n . We denote by $\widetilde{u}_n(t)$ the local solution of (15) with initial data $\widetilde{u}_n(0)$, defined on a time interval $(-T_1(n), T_2(n))$. The closeness to $Q(x - t)$ and the weak H^1 -convergence yield

$$(39) \quad E(\widetilde{u}_n) < 0.$$

Similarly to the considerations on the L^2 -compactness of \widetilde{u} in the previous section, one can show that \widetilde{u}_n is L^2 -compact and satisfies a crucial exponential decay property. This allows one to use a third conservation law of (15) applied to \widetilde{u}_n . Namely,

$$(40) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_n(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_n(0, x) dx,$$

if $t \in (-T_1(n), T_2(n))$. The conservation law (40) shows that the scaling modulation parameter $\widetilde{\lambda}_n(t)$, involved in the decomposition of $\widetilde{u}_n(t)$, is uniformly bounded from below. Using that $\widetilde{\lambda}_n(t) \sim \|\partial_x \widetilde{u}_n(t, \cdot)\|_{L^2}^{-1}$, we obtain a uniform bound on $\|\widetilde{u}_n(t, \cdot)\|_{H^1}$ which, thanks to the H^1 well-posedness of (15) implies that $\widetilde{u}_n(t)$ is globally defined. Since \widetilde{u}_n is L^2 -compact, using Theorem 4.1, we conclude that \widetilde{u}_n is a rescaled and translated Q . In particular, $E(\widetilde{u}_n) = 0$ which is in contradiction with (39).

⁽⁸⁾Depending on the smallness of $(\|u_0\|_{L^2} - \|Q\|_{L^2})$.

7. BLOW-UP PROFILE

In this section, we present an extension of the asymptotic stability result of Theorem 5.1 to the singular regime of Theorem 6.1. It turns out that the blow-up solutions with data close to Q converge in H^1 weak, after a suitable *singular renormalization* to the profile Q . Thus the concept of asymptotic stability naturally extends to the singular regime as shows the next statement.

THEOREM 7.1 ([36]). — *There exists $\alpha > 0$ such that if $\|u_0\|_{L^2} \leq \|Q\|_{L^2} + \alpha$ and if the solution $u(t)$ of (15) blows up in finite or infinite time $T \in]0, \infty]$ then there exist $\lambda(t) > 0$ and $x(t)$ such that $\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t))$ converges as $t \rightarrow T$, weakly in $H^1(\mathbb{R})$, either to $Q(x)$ or to $-Q(x)$.*

Notice that, if $E(u_0) < 0$ then the result of Theorem 7.1 applies to the blow-up solutions considered in the previous section. It is also worth noticing that the energy conservation and the weak H^1 convergence imply the strong convergence in the homogeneous Sobolev space $\dot{H}^1(\mathbb{R})$.

The proof of Theorem 7.1 follows a similar strategy to that of Theorem 5.1. However, the classification result of Theorem 4.1 alone is not sufficient to conclude because the asymptotic solution may be singular ($\lambda(t) \rightarrow 0$). For that purpose a new rigidity result adapted to the singular regime has to be established. Again, the viriel functional $I(t)$ and the functional $J(t)$, appeared already several times in our discussion, are the key for the argument.

In the proof of Theorem 7.1, we write once again

$$(41) \quad \lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t)) = \pm Q(x) + \mathcal{E}(t, x),$$

for t near the blow-up time T and α small enough. The difference is that now the modulation parameters $\lambda(t)$ and $x(t)$ are chosen so that \mathcal{E} satisfies the orthogonality conditions

$$(42) \quad \left\langle \mathcal{E}(t), \left(\frac{xQ}{2} + x^2Q' \right) \right\rangle = \langle \mathcal{E}(t), xQ' \rangle = 0.$$

Notice that we already considered orthogonality conditions of type (42) in the linear analysis of section 4 (see (27)). The orthogonality conditions (42) are used to cancel some second order terms in variation of the viriel functional $I(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{E}^2(t, x) dx$. More precisely, at least formally,

$$\begin{aligned} \lambda^3(t)\dot{I}(t) &= \lambda^2(t)\dot{\lambda}(t) \left\langle \mathcal{E}(t), \left(\frac{xQ}{2} + x^2Q' \right) \right\rangle + (\lambda^2(t)\dot{x}(t) - 1) \langle \mathcal{E}(t), xQ' \rangle \\ &\quad + H(\mathcal{E}(t), \mathcal{E}(t)) + R(\mathcal{E}(t)), \end{aligned}$$

where $R(\mathcal{E}(t))$ contains only higher order terms in $\mathcal{E}(t)$ and $H(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \langle (L\mathcal{E})_x, x\mathcal{E} \rangle$ is the bilinear form which already appeared in the proof of Lemma 4.7. The choice of (42) as orthogonality conditions is possible thanks to the implicit function theorem,

in view of another non degeneracy property of Q . Despite the “loss of sign” of $\langle L\mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle$ with the new orthogonality conditions, one is still able to get smallness bounds on \mathcal{E} and a control on the modulation parameters λ and x of type (24). The variational nature of Q is again used in the smallness estimates on \mathcal{E} .

In order to prove Theorem 7.1, one has to show that $\mathcal{E}(t)$ converges to zero in H^1 weak, as $t \rightarrow T$. One first proves that $\mathcal{E}(t_n)$ converges to zero in H^1 weak, as $n \rightarrow \infty$, for a specific choice of the sequence (t_n) . Namely, t_n is so that $\lambda(t_n) = (1.1)^{-n}$ and $\lambda(t) \leq \lambda(t_n)$ for $t \in [t_n, T[$. The case of an arbitrary sequence (t_n) then can be treated by using the monotonicity of the L^2 -mass.

Let us describe the argument for the specific sequence (t_n) . The proof is by contradiction. We suppose that there exists a subsequence of (t_n) still denoted by (t_n) such that $\mathcal{E}(t_n)$ converges weakly in H^1 to $\tilde{\mathcal{E}}(0)$ which is not zero and we look for a contradiction. Let $\tilde{u}(0) := \pm Q + \tilde{\mathcal{E}}(0)$. We denote by $\tilde{u}(t)$ the local solution of (15) subject to initial data $\tilde{u}(0)$. Let $\tilde{\lambda}(t)$, $\tilde{x}(t)$ and $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ be the modulation parameters and the remainder in a decomposition of type (41) applied to $\tilde{u}(t)$. The solution $\tilde{u}(t)$ may develop singularities in finite time and this is the new feature in the analysis.

Notice that $\tilde{\lambda}(0) = 1$. Thanks to the special choice of (t_n) one has $\tilde{\lambda}(t) \leq 1$ and we can define a maximal $\tau \in]0, \infty]$ such that $(1.1)^{-1} < \tilde{\lambda}(t) \leq 1$ for every $t \in [0, \tau)$. Two possibilities appear, either $\tau = \infty$ or $\tau < \infty$. In the case $\tau = \infty$, the solution \tilde{u} is global, uniformly bounded in H^1 , and one can show similarly to before that \tilde{u} is L^2 -compact. Thus Theorem 4.1 applies and gives a contradiction as in Theorem 5.1. In the case $\tau < \infty$ a fairly new argument is needed. Introduce the new time variable s as in (18) with $\tilde{\lambda}(t)$ instead of $\lambda(t)$. Set $\tau_1 := s(\tau)$. The contradiction arises from a lower and upper bound on the quantity Λ , defined as

$$\Lambda := \int_0^{\tau_1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}^2(s, x) e^{-|x|/2} dx ds.$$

One can prove an exponential decay of $\tilde{\mathcal{E}}$ to the left by the monotonicity properties considered in section 5. This allows to consider the functional

$$(43) \quad J(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}(s, x) \left(\int_x^{\infty} \left(\frac{Q(y)}{2} + yQ'(y) \right) dy \right) dx - \frac{1}{4} \|Q\|_{L^2}^2.$$

The second term in (43) is of course not essential. Using direct computations and the basic properties of the decomposition (41), one can show the bound

$$(44) \quad \left| J'(s) + \frac{\lambda_s}{2\lambda} J(s) + 2\langle \tilde{\mathcal{E}}(s), Q \rangle \right| \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}^2(s, x) e^{-|x|/2} dx.$$

Estimate (44) is now the key for the proof of the lower bound

$$(45) \quad \Lambda \geq C\Lambda_1,$$

where $C > 0$ is independent of α ,

$$\Lambda_1 := 1 + \int_0^{\tau_1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}_x^2(s, x) dx ds + |E| \int_0^{\tau_1} (\tilde{\lambda}(s))^2 ds$$

and E is the energy of \tilde{u} .

For the upper bound on Λ , a localized⁽⁹⁾ viriel type functional is used. For $A > 0$, we consider the function $\psi_A(x) = A\psi(A^{-1}x)$, where $\psi(x)$ is a smooth odd function such that $\psi(x) = x$ for $|x| < 1$, $\psi'(x) = e^{-x}$ for $x > 2$, and for $x \in [1, 2]$, ψ is increasing and concave. We consider the following localized viriel functional

$$I_A(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \psi_A(x) \tilde{\mathcal{E}}^2(s, x) dx.$$

Thanks to the new orthogonality conditions one obtains that there exist $A > 2$, $\gamma > 0$ such that

$$(46) \quad I'_A(s) \leq -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/A} (\tilde{\mathcal{E}}^2(s, x) + \tilde{\mathcal{E}}_x^2(s, x)) dx + \frac{1}{\gamma} \langle \tilde{\mathcal{E}}(s), Q \rangle^2,$$

provided u_0 is close enough to Q . The bilinear form H is naturally involved in the proof of (46). More precisely, it turns out that

$$-H(\mathcal{E}(s), \mathcal{E}(s)) \geq C \|\mathcal{E}(s)\|_{H^1}^2,$$

if $\langle \mathcal{E}(s), Q \rangle = \langle \mathcal{E}(s), (\frac{xQ}{2} + x^2Q') \rangle = 0$. We have the second term in the right-hand side in (46) because the orthogonality with respect to Q is “forbidden” for $\tilde{\mathcal{E}}$ (see (14)).

Using (46) one can get the upper bound

$$(47) \quad \Lambda \leq C_{u_0} \Lambda_1$$

where the constant C_{u_0} is tending to zero, if $\|u_0\|_{L^2}$ is tending to $\|Q\|_{L^2}$. In view of (45) and (47), we get a contradiction for $\|u_0\|_{L^2}$ close enough to $\|Q\|_{L^2}$.

Remark 7.2. — A corollary of Theorem 7.1 is a lower bound on the blow-up rate which excludes the existence of self-similar blow-up solutions for data in H^1 . However, in [9], Bona-Weissler construct solutions of (7) with self-similar blow-up which are missing the space H^1 .

8. BLOW-UP IN FINITE TIME

In this section, we present a result showing that under an additional assumption on the initial data, the blow-up solutions of Theorem 6.1 develop their singularities in *finite time*.

THEOREM 8.1 ([37]). — *There exists $\alpha > 0$ such that, if $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ satisfies*

$$\|u_0\|_{L^2} \leq \|Q\|_{L^2} + \alpha, \quad E(u_0) < 0, \quad \forall x_0 > 0, \quad \|u_0(x)\|_{L^2(x \geq x_0)} \leq C|x_0|^{-3},$$

then the solution of (15) blows up in finite time, i.e. there exists $T \in]0, \infty[$ such that $\lim_{t \rightarrow T} \|u(t, \cdot)\|_{H^1} = \infty$.

⁽⁹⁾This localization is needed because we do not have available a decay of $\tilde{\mathcal{E}}(s, x)$ for $x \rightarrow +\infty$.

A detailed presentation of all steps in the proof of Theorem 8.1, as written is [37], would be quite technical. For that reason, we will only give an informal presentation of the main idea.

Consider the usual decomposition

$$(48) \quad \lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t)) = \pm Q(x) + \mathcal{E}(t, x),$$

for a blow-up solution u with t near the blow-up time T . We suppose that the sign in front of Q in the right hand side of (48) is plus. In order to prove that T is finite, the *ideal situation* would be to have the bound

$$(49) \quad \dot{\lambda}(t) \leq -C < 0.$$

Estimate (49) is not known to hold in the context of (15) but one is able to prove a weaker version of (49) as we explain below.

Substituting (48) in (15), we obtain that the equation solved by $\mathcal{E}(t, x)$ is

$$(50) \quad \lambda^3(t)\mathcal{E}_t - (L\mathcal{E})_x - \lambda^2(t)\dot{\lambda}(t)\left(\frac{Q}{2} + xQ'\right) - (\lambda^2(t)\dot{x}(t) - 1)Q' \\ = \lambda^2(t)\dot{\lambda}(t)\left(\frac{\mathcal{E}}{2} + x\mathcal{E}_x\right) + (\lambda^2(t)\dot{x}(t) - 1)\mathcal{E}_x - (10Q^3\mathcal{E}^2 + 10Q^2\mathcal{E}^3 + 5Q\mathcal{E}^4 + \mathcal{E}^5)_x.$$

Let us impose that \mathcal{E} satisfies the orthogonality conditions

$$(51) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t, x)w(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t, x)xw'(x)dx = 0,$$

where

$$w(x) := \int_{-\infty}^x \left(\frac{Q(y)}{2} + yQ'(y)\right)dy.$$

The choice (51) is formally possible, again due to the implicit function theorem via an explicit calculation on Q . Let us notice that $w(x)$ does not tend to zero as $x \rightarrow \infty$. Hence one needs to ensure that $\mathcal{E}(t, x)$ decays sufficiently fast to the right and this is one of the major analytical problems in the proof of Theorem 8.1.

Imposing (51) as orthogonality conditions is natural, in view of the equation (50) and the identities satisfied by w

$$(52) \quad Lw' = -2Q, \quad \langle w', Q \rangle = 0.$$

The verification of (52) is straightforward. Under the orthogonality conditions (51), using (52) and integration by parts, we easily get the following (at least formal) identities

$$\langle \lambda^3(t)\mathcal{E}_t, w \rangle = 0, \quad \langle (L\mathcal{E})_x, w \rangle = 2\langle \mathcal{E}, Q \rangle, \quad \left\langle \frac{Q}{2} + xQ', w \right\rangle = c_0, \quad \langle Q', w \rangle = \langle x\mathcal{E}_x, w \rangle = 0,$$

where c_0 is a *positive* constant which can be easily written explicitly in terms of Q . Therefore, multiplying (50) with w , gives the identity

$$(53) \quad \lambda^2(t)\dot{\lambda}(t) = -c_1\langle \mathcal{E}(t), Q \rangle + R_1(\mathcal{E}(t)),$$

where $c_1 := 2/c_0$ and $R_1(\mathcal{E}(t))$ is an explicit expression containing terms of quadratic and higher order with respect to $\mathcal{E}(t)$.

On the other hand, if we denote by $E < 0$ the energy of u , then we get easily from (48), the identity

$$(54) \quad E = E(u(t)) = \lambda^{-2}(t)E(Q + \mathcal{E}(t)).$$

Substituting $Q + \mathcal{E}(t)$ in the energy functional yields

$$(55) \quad E(Q + \mathcal{E}(t)) = -\langle \mathcal{E}(t), Q \rangle + \frac{1}{2} \|\mathcal{E}_x(t)\|_{L^2}^2 + R_2(\mathcal{E}(t)),$$

where $R_2(\mathcal{E}(t))$ is another explicit expression of $\mathcal{E}(t)$ containing only quadratic and higher order terms.

Using (53), (54) and (55), we directly obtain

$$(56) \quad \lambda^2(t)E = -\langle \mathcal{E}(t), Q \rangle + \frac{1}{2} \|\mathcal{E}_x(t)\|_{L^2}^2 + R_2(\mathcal{E}(t)),$$

and

$$(57) \quad \dot{\lambda}(t) = -c_2 - \frac{c_1 \lambda^{-2}(t)}{2} \|\mathcal{E}_x(t)\|_{L^2}^2 + \lambda^{-2}(t) R(\mathcal{E}(t)),$$

where $c_2 := -c_1 E > 0$ and $R(\mathcal{E}(t)) = R_1(\mathcal{E}(t)) - c_1 R_2(\mathcal{E}(t))$.

Notice that if we neglect the third term in the right-hand side of (57), we get an estimate of type (49). Thus one needs to bound the third term in the right-hand side of (57). This can be achieved, with a viriel inequality of type (46). Recall that $ds = \lambda^{-3}(t)dt$. Thus an estimate of type (46) for $\mathcal{E}(t)$ together with (56) provides a bound for $\lambda^3(t) R(\mathcal{E}(t))$ in terms of $I'_A(t)$, *i.e.* it is realistic to expect that the singularity of $\lambda^{-2}(t)$ can be compensated by the smallness of $R(\mathcal{E}(t))$ (quadratic in $\mathcal{E}(t)$). Since the bound is in terms of $I'_A(t)$, the relevant estimates one can get are only for averages of $R(\mathcal{E}(t))$ on time intervals where $\lambda(t)$ does not vary much.

In [37], Martel-Merle are able to make the previous formal discussion rigorous. More precisely, let us define a sequence (t_n) such that $t_n \rightarrow T$ and such that

$$\|u_x(t_n, \cdot)\|_{L^2} = 2^n \|Q'\|_{L^2}$$

and, for $t \in]t_n, T[$, one has $\|u_x(t, \cdot)\|_{L^2} > 2^n \|Q'\|_{L^2}$. Notice that the existence of (t_n) follows from Theorem 6.1. It turns out that for $n \gg 1$,

$$(58) \quad t_{n+1} - t_n \leq C(\lambda(t_n) - \lambda(t_{n+1}))$$

which is an integrated form of an estimate of type (49). We can deduce directly from (58) that $T < \infty$.

The main point in the proof of (58) is of course the estimate of $\int_{t_n}^{t_{n+1}} |R(\mathcal{E}(t))| dt$. For that purpose, two modulations of the solutions with different orthogonality conditions are used. The first one is very similar to the one considered in the previous

section and enjoys the virial type estimates of Theorem 7.1. One uses the assumption

$$\int_{x_0}^{\infty} u_0^2(x) dx \leq C |x_0|^{-6}, \quad x_0 > 0$$

to get a decay to the right of the solution. This decay allows one to use a second decomposition with the orthogonality conditions (51). One then needs to compare the remainders of the two decompositions. It turns out that one gets cancellations up to second order which is the crucial point in the comparison between the two key quantities $\lambda^2(t)\dot{\lambda}(t)$ and $\langle \mathcal{E}(t), Q \rangle$ which in turn provides the key estimate (58).

Remark 8.2. — In Theorem 8.1 the L^2 -mass accumulated in the blow-up time is $\|Q\|_{L^2}^2$ (see also [28]). A natural question is whether one may construct blow-up solutions that do not disperse any mass⁽¹⁰⁾ at the blow-up time, *i.e.* such that $\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$. It turns out that, due to the result in [38], the answer of that question is negative. Therefore the blow-up solutions of Theorem 8.1 necessarily lose some mass on the left of the “main core” during the time evolution.

9. FINAL REMARKS

The work of Martel-Merle has already been quite influential. In a remarkable series of recent papers, using many of Martel-Merle ideas, Merle-Raphaël [48, 45, 46, 47, 49, 55] obtained a number of new results on the understanding of the blow-up phenomena for the L^2 -critical nonlinear Schrödinger equations (NLS). The literature on blow-up for NLS is enormous and we refer to the recent books [11, 13, 59] for an introduction to that domain. In [17, 18], the ideas of [34] are successfully used to get the asymptotic stability for the family of solitary waves for the BBM equation which is an alternative to the KdV model in the theory of water waves (see [5]).

Let us point out that the existence of blow-up solutions in the case $p > 5$ remains an open problem. It seems that the approach of Martel-Merle meets serious difficulties in this case. Notice that for $p = 5$, the solution $Q(x - t)$ is *spectrally stable*, *i.e.* there is no eigenvalue of $\partial_x L$ with positive real part. Therefore the dynamics for solutions with data close to Q can be successfully parameterized by the modulation parameters $\lambda(t)$ and $x(t)$. It seems that in the case $p > 5$, the eigenfunction of $\partial_x L$ with positive real part is also involved in the long time dynamics, even for data close to Q .

Let us finally notice that it would be interesting to extend the asymptotic stability analysis for (4) to the generalized Benjamin-Ono equation

$$(59) \quad u_t + \partial_x(-Hu_x + u^p) = 0$$

⁽¹⁰⁾Notice that such solutions exist in the case of the L^2 -critical NLS (see [59]). Moreover they are completely classified (see [41]).

which is another important model in the water waves theory (see [3]). In (59), H is the Hilbert transform and $p \geq 2$ is an integer. The equation (59) has a lower order dispersion compared with the KdV equation and $p = 3$ is the smallest value of p such that one may expect blow-up. In the context of (59), the natural energy space is $H^{1/2}(\mathbb{R})$ and therefore a first difficulty is that at the present moment the space $H^{1/2}(\mathbb{R})$ is not covered by the well-posedness theory for (59) (see [26] and the references therein). However, at least at a formal level, equation (59) shares many of the properties of (4) used in the work of Martel-Merle.

REFERENCES

- [1] M.J. ABLOWITZ & H. SEGUR – *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [2] S. ALINHAC – *Blow-up for nonlinear hyperbolic equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [3] T. BENJAMIN – Internal waves of permanent form in fluids of great depth, *J. Fluid Mech.* **29** (1967), p. 559–592.
- [4] ———, The stability of solitary waves, *Proc. London Math. Soc. (3)* **328** (1972), p. 153–183.
- [5] T. BENJAMIN, J. BONA & J. MAHONY – Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **272** (1972), p. 47–78.
- [6] J. BONA – The stability of solitary waves, *Proc. London Math. Soc. (3)* **344** (1975), p. 363–374.
- [7] J. BONA & R. SMITH – The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **278** (1975), p. 555–601.
- [8] J. BONA, P. SOUGANIDIS & W. STRAUSS – Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type, *Proc. London Math. Soc. (3)* **411** (1987), p. 395–412.
- [9] J. BONA & F. WEISSLER – Similarity solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **127** (1999), p. 323–351.
- [10] A. DE BOUARD & Y. MARTEL – Non existence of L^2 -compact solutions of the Kadomtsev-Petviashvili II equation, *Math. Ann.* **328** (2004), p. 525–544.
- [11] J. BOURGAIN – *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*, AMS Colloquium Publications, vol. 46, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1999.
- [12] ———, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations II. The KdV equation, *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), p. 209–262.
- [13] T. CAZENAVE – *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes, vol. 10, 2003.

- [14] T. CAZENAVE & P.-L. LIONS – Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), p. 549–561.
- [15] J.-Y. CHEMIN – Explosion géométrique pour certaines équations d’ondes non linéaires (d’après Serge Alinhac), in *Sém. Bourbaki (1998/99)*, Astérisque, vol. 266, Société Mathématique de France, 2000, Exp. 850, p. 7–20.
- [16] W. ECKHAUS & P. SCHUUR – The emergence of solitons of the Korteweg-de Vries equation from arbitrary initial conditions, *Math. Methods Appl. Sci.* **5** (1983), p. 97–116.
- [17] K. EL DIKA – Stabilité asymptotique des ondes solitaires de l’équation de Benjamin-Bona-Mahony, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **337** (2003), p. 649–652.
- [18] ———, Asymptotic stability of solitary waves for the Benjamin-Bona-Mahony equation, Preprint, 2003.
- [19] C. FERMANIAN, F. MERLE & H. ZAAG – Stability of the blow-up profile of non-linear heat equations from a dynamical system point of view, *Math. Ann.* **317** (2000), p. 347–387.
- [20] S. FRIEDLANDER, W. STRAUSS & M. VISHIK – Nonlinear instability in an ideal fluid, *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire* **14** (1997), p. 187–209.
- [21] J. GINIBRE & Y. TSUTSUMI – Uniqueness of solutions for the generalized Korteweg-de Vries equation, *SIAM J. Appl. Math.* **20** (1989), p. 1388–1425.
- [22] L. GLANGETAS & F. MERLE – A geometric approach of existence of blow-up solutions, Preprint, 1995.
- [23] M. GRILLAKIS, J. SHATAH & W. STRAUSS – Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, *J. Funct. Anal.* **74** (1987), p. 160–197.
- [24] L. HÖRMANDER – *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer-Verlag, 1983.
- [25] T. KATO – On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation, *Advances in Math. Suppl. Stud.*, vol. 8, 1983, p. 93–128.
- [26] C. KENIG & K. KOENIG – On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations, *Math. Res. Lett.* **10** (2003), p. 879–895.
- [27] C. KENIG, G. PONCE & L. VEGA – Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle, *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), p. 527–620.
- [28] ———, On the concentration of blow-up solutions for the generalized KdV equation critical in L^2 , *Contemp. Math.*, vol. 263, American Mathematical Society, 2000, p. 131–156.
- [29] G.L. LAMB JR. – *Elements of soliton theory*, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [30] C. LAURENT & Y. MARTEL – Smoothness and exponential decay of L^2 -compact solutions of the generalized KdV equation, *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003), p. 2093–2107.
- [31] J. MADDOCKS & R. SACHS. – On the stability of KdV multi-solitons, *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), p. 867–901.

- [32] Y. MARTEL – Multi-soliton-type solutions of the generalized KdV equations, *Amer. J. Math.*, to appear.
- [33] Y. MARTEL & F. MERLE – Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), p. 74–123.
- [34] ———, Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **157** (2001), p. 219–254.
- [35] ———, A Liouville Theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation, *J. Math. Pures Appl.* **79** (2000), p. 339–425.
- [36] ———, Stability of the blow-up profile and lower bounds on the blow-up rate for the critical generalized Korteweg-de Vries equation, *Ann. of Math.* **155** (2002), p. 235–280.
- [37] ———, Blow-up in finite time and dynamics of blow-up solutions for the L^2 -critical generalized KdV equation, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 617–663.
- [38] ———, Nonexistence of blow-up solution with minimal L^2 -mass for the critical GKdV, *Duke Math. J.* **115** (2002), p. 385–408.
- [39] ———, Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations revisited, Preprint, 2004.
- [40] Y. MARTEL, F. MERLE & TAI-PENG TSAI – Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of N solitons for subcritical gKdV equations, *Comm. Math. Phys.* **231** (2002), p. 347–373.
- [41] F. MERLE – Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power, *Duke Math. J.* **69** (1993), p. 427–454.
- [42] ———, Asymptotics for L^2 -minimal blow-up solutions of critical nonlinear Schrödinger equation, *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire* **13** (1996), p. 553–565.
- [43] ———, Blow-up phenomena for critical nonlinear Schrödinger and Zakharov equations, in *Proceeding of the International congress of Mathematicians (Berlin 1998)*, Doc. Math. Extra volume ICM (1998 III), Deutsche Math. Vereinigung, 1998, p. 57–66.
- [44] ———, Existence of blow-up solutions in the energy space for critical generalized KdV equation, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 555–578.
- [45] F. MERLE & P. RAPHAËL – Sharp upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), p. 591–642.
- [46] ———, On universality of blow-up profile for L^2 -critical nonlinear Schrödinger equation, *Invent. Math.* **156** (2004), p. 565–672.
- [47] ———, Sharp lower bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, Preprint, 2004.
- [48] ———, Blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, *Ann. of Math.*, to appear.
- [49] ———, Profiles and quantization of the blow-up mass for the critical nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.*, to appear.
- [50] F. MERLE & L. VEGA – L^2 -stability of solitons for KdV equation, *Internat. Math. Res. Notices* (2003), p. 735–753.

- [51] F. MERLE & H. ZAAG – A Liouville theorem for a vector valued nonlinear heat equation and applications, *Math. Ann.* **316** (2000), p. 103–137.
- [52] R. MIURA – The Korteweg-de Vries equation : a survey of results, *SIAM Rev.* **18** (1976), p. 412–459.
- [53] R. PEGO & M. WEINSTEIN – Eigenvalues, and instability of solitary waves, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **340** (1992), p. 47–94.
- [54] ———, Asymptotic stability of solitary waves, *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), p. 305–349.
- [55] P. RAPHAËL – Stability of the log log bound for blow-up solutions to the critical nonlinear Schrödinger equation, *Math. Ann.*, to appear.
- [56] J.-C. SAUT – Sur quelques généralisations de l'équation de Korteweg-de Vries, *J. Math. Pures Appl.* **58** (1979), p. 21–61.
- [57] ———, Remarks on generalized Kadomtsev-Petviashvili equations, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), p. 1011–1026.
- [58] P. SCHUUR – *Asymptotic analysis of soliton problems*, Lect. Notes in Math., vol. 1232, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [59] S. SULEM & P.L. SULEM – *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*, Applied Mathematical Sciences, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [60] M. WEINSTEIN – Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, *Comm. Math. Phys.* **87** (1983), p. 567–576.
- [61] ———, Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations, *SIAM J. Appl. Math.* **16** (1985), p. 472–491.
- [62] ———, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), p. 51–68.
- [63] ———, On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive equations, *Comm. Partial Differential Equations* **11** (1986), p. 545–565.

Nikolay TZVETKOV

Université de Lille 1

Département de Mathématiques

F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

E-mail : nikolay.tzvetkov@math.univ-lille1.fr

**MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES DANS
L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN**
[d'après Christodoulou, Klainerman, Nicolò et Rodnianski]

par **Serge ALINHAC**

Dans cet exposé, nous présentons les outils développés dans les quinze dernières années par Christodoulou, Klainerman, Nicolò et Rodniansky, outils qui ont permis d'importants progrès dans l'étude des équations hyperboliques non-linéaires, notamment des équations d'Einstein. Il existe bien entendu beaucoup d'autres travaux sur ce sujet dont nous ne pourrions parler, et j'espère que leurs auteurs me pardonneront de m'être volontairement limité au choix retenu par Bourbaki. Pour ce qui est des aspects géométriques et physiques des équations d'Einstein, on consultera avec profit l'exposé de J.-P. Bourguignon [3] dans ce même séminaire. Notre propos est en quelque sorte complémentaire de celui de Bourguignon : il vise à rendre compte de façon un peu technique de méthodes qui se sont clarifiées au fil des ans, et dont le « cœur » apparaît dans de nombreux travaux.

1. LES PROBLÈMES

Nous ferons ici référence à trois groupes de travaux, très liés entre eux :

i) Les travaux de Klainerman [8] et Klainerman et Rodniansky [10] sur les équations d'ondes quasi-linéaires

$$\partial_t^2 \phi - g^{ij}(\phi) \partial_{ij}^2 \phi = N(\phi, \nabla \phi).$$

ii) Les travaux de Christodoulou et Klainerman [6], Klainerman et Nicolò [9] sur les équations d'Einstein $R_{\alpha\beta} = 0$.

iii) Les travaux de Klainerman et Rodniansky [11–16] sur les équations d'Einstein.

La discussion des travaux i), outre son intérêt intrinsèque, est utile pour mieux appréhender la démarche des travaux ii) et iii).

Dans tous les cas, il s'agit de problèmes qui s'écrivent dans des coordonnées bien choisies comme des systèmes hyperboliques non-linéaires, dont la partie principale est simplement $L_g \times \text{Id}$, L_g étant le d'Alembertien associé à une métrique lorentzienne g . Il n'y a donc qu'une seule géométrie associée à de tels systèmes. Deux types de problèmes se posent alors :

A) Le problème de l'existence *globale en temps* de solutions C^∞ associées à des données de Cauchy elles-mêmes C^∞ et suffisamment décroissantes lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

B) Le problème de l'existence *locale en temps* de solutions associées à des données de Cauchy peu régulières, par exemple dans un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$, avec s aussi petit que possible.

Dans le problème A, comme on peut le voir en consultant Hörmander [7] ou la première partie de l'exposé de Chemin [4], l'enjeu est de prouver la décroissance en temps, uniformément en espace, de la solution et de ses dérivées.

D'autre part, les problèmes A et B sont liés entre eux de deux façons :

i) Si l'on parvient à abaisser s jusqu'à un niveau contrôlé par une quantité « conservée » (comme l'énergie pour l'équation des ondes, par exemple), on obtient l'existence globale de solutions peu régulières.

ii) Une procédure d'attaque du problème B due à Bahouri et Chemin [1, 2], et reprise dans les références i), est la suivante : pour λ fixé grand, notons g_λ une régularisation de la métrique g ($g_\lambda \rightarrow g$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$); on établit alors l'équation (à coefficients régularisés) vérifiée par le « bloc » $\Delta_\lambda u$ (qui est, dans l'écriture de u à l'aide de sa transformée de Fourier $\hat{u}(\xi)$, la partie de u pour laquelle $|\xi|$ est de l'ordre de λ)

$$L_{g_\lambda}(\Delta_\lambda u) = R_\lambda.$$

Après un changement d'échelle convenable, le problème se réduit à étudier la décroissance, sur un intervalle $[0, T]$, $T \leq \lambda^a$, $a > 0$, de la solution v d'une équation d'onde

$$L_{h_\lambda} v = 0,$$

où h_λ est une nouvelle métrique déduite de g . On peut alors « recoller » les informations sur les $\Delta_\lambda u$ pour obtenir l'estimation voulue sur la norme H^s de u .

Ce qui est important est que l'étude du problème A, comme celle du problème B par l'approche ii), se réduit à prouver la décroissance des solutions d'une équation *linéaire* associée à une métrique h déduite de g , et jouissant de propriétés connues (P). Le caractère *non-linéaire* du problème consiste en ceci : la métrique h dépend en fait de la solution ϕ . Il faut donc supposer certaines propriétés (Q) de ϕ sur un intervalle de temps $[0, T[$, qui impliquent les propriétés correspondantes (P) de h sur le même intervalle, lesquelles permettent d'établir que (Q) a lieu en fait sur un intervalle plus grand $[0, T + \varepsilon]$. C'est le procédé *d'induction sur le temps*.

Nous consacrerons les sections 2 à 6 à décrire les outils d'étude des équations linéaires, ne retournant aux aspects non-linéaires spécifiques qu'au paragraphe 7. La section 8, enfin, évoquera un travail en cours sur la « conjecture H^2 » pour les équations d'Einstein.

Notons que, dans un article récent [17], Lindblad et Rodniansky ont démontré l'existence globale de solutions régulières des équations d'Einstein écrites en coordonnées harmoniques, sans utiliser les outils géométriques qui font l'objet de cet exposé ; la

contrepartie en est qu'ils ne semblent pas obtenir les propriétés asymptotiques fines des composantes de la courbure (« peeling properties ») telles qu'on peut les trouver dans [9], par exemple.

2. LE CŒUR DU DISPOSITIF : FEUILLETAGES, REPÈRES ET FONCTIONS OPTIQUES

Dans toute la suite de l'exposé, nous nous placerons dans \mathbb{R}^4 , où nous tâcherons d'utiliser le moins possible les coordonnées usuelles

$$x^0 = t, \quad x = (x^1, x^2, x^3).$$

Nous supposons donnée une métrique lorentzienne g , de signature $(-, +, +, +)$, le plus souvent proche de la métrique « plate » η de l'espace de Minkovski

$$\eta = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Les composantes de g en coordonnées locales seront $g_{\alpha\beta}$, et $g^{\alpha\beta}$ seront les éléments de la matrice inverse de $g_{\alpha\beta}$. Nous noterons $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, et D la connexion canonique associée à g . Le gradient et le hessien d'une fonction f seront définis par

$$\langle \nabla f, X \rangle = Xf, \quad \nabla^2 f(X, Y) = XYf - (D_X Y)f,$$

le d'Alembertien associé à g étant l'opérateur

$$L_g f = g^{\alpha\beta} \nabla^2 f_{\alpha\beta}.$$

Nous considérerons dans la suite deux situations géométriques distinctes :

(I) Celle des travaux i) sur les équations d'ondes pour une métrique scindée

$$-dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j,$$

dans laquelle le feuilletage par les surfaces $\Sigma_{t_0} = \{t = t_0\}$ joue un rôle essentiel.

(II) Celle des travaux de Klainerman et Nicolò et Klainerman et Rodniansky sur les équations d'Einstein, dans lesquels aucune coordonnée n'apparaît *a priori*.

Pour le lecteur désireux d'approfondir, signalons que nous avons adopté les notations de [10] pour décrire la situation I, tandis que nous adoptons celles de [9] pour décrire la situation II. Enfin, au paragraphe 8, nous gardons les notations de [14].

Dans les deux situations géométriques, on suppose donné un feuilletage par des variétés de dimension deux, chacune homéomorphe à une 2-sphère standard. Ce feuilletage est tel qu'en chaque point $p \in S$, la restriction de g à l'orthogonal $H = (T_p S)^\perp$ est de signature $(-, +)$, et l'on note (e_3, e_4) des vecteurs isotropes de H , pointant vers le futur, de directions respectivement « rentrantes » et « sortantes » (*cf.* section 2). Si l'on choisit un repère orthonormé (e_1, e_2) sur S , on dispose ainsi d'un *repère isotrope* (e_1, e_2, e_3, e_4) (« null frame »), qui jouera un rôle central dans la suite (tous les tenseurs seront décomposés sur ce repère).

Si la collection des 3-plans engendrés par (e_1, e_2, e_4) est intégrable, on peut voir que les variétés intégrales correspondantes, les « cônes sortants », sont les surfaces de niveaux d'une fonction u vérifiant l'équation eikonale

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u = 0.$$

Une telle fonction est dite « fonction optique ». On définit également une fonction r , constante sur chaque sphère du feuilletage, par $4\pi r^2 = \text{aire} S$.

Dans la situation I, on définit d'abord une fonction optique u en imposant de plus $u = t - r$ infiniment près de l'axe des temps. Le feuilletage en sphères est alors

$$S_{t_0, u_0} = \{t = t_0, u = u_0\}.$$

En notant

$$L' = -\nabla u, b^{-1} = \partial_t u, \quad N = -b\partial^i u \partial_i,$$

on pose

$$e_4 = L = bL' = \partial_t + N, \quad e_3 = \underline{L} = \partial_t - N,$$

et l'on a les propriétés

$$\langle L, L \rangle = 0, \langle \underline{L}, \underline{L} \rangle = 0, \quad \langle L, \underline{L} \rangle = -2.$$

On notera qu'en général le système des 3-plans (e_1, e_2, e_3) n'est pas intégrable. On complète le dispositif en posant néanmoins $\underline{u} = 2t - u$.

Dans la situation II au contraire, on définit d'abord des fonctions optiques « entrantes » et « sortantes » \underline{u} et u de la façon suivante :

i) On construit une fonction \underline{u}_0 sur $\Sigma_0 = \{t = 0\}$, dont les surfaces de niveaux jouissent de propriétés que nous expliquerons... à la section 7. On choisit alors pour \underline{u} la solution entrante de l'équation eikonale qui vaut \underline{u}_0 pour $t = 0$. On se limite ici à un domaine de Σ_0 délimité par les deux surfaces $\underline{u}_0 = \nu_0$ et $\underline{u}_0 = \underline{u}_*$.

ii) Sur le cône rentrant $\underline{C}_* = \{\underline{u} = \underline{u}_*\}$ (que les auteurs appellent « the last slice »), on choisit une fonction u_* dont les surfaces de niveaux jouissent aussi de propriétés expliquées à la section 7. On définit alors u comme la solution sortante de l'équation eikonale valant u_* sur \underline{C}_* .

Une fois définies u et \underline{u} , on pose

$$L = -\nabla u, \quad \underline{L} = -\nabla \underline{u}, \quad 2\Omega^2 = -\langle L, \underline{L} \rangle^{-1} = -(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta \underline{u})^{-1},$$

et finalement on choisit

$$e_3 = 2\Omega \underline{L}, \quad e_4 = 2\Omega L$$

en sorte que $\langle e_3, e_4 \rangle = -2$. Le feuilletage en sphères est finalement défini par

$$S_{\lambda, \nu} = \{u = \lambda, \underline{u} = \nu\}.$$

3. LES OBJETS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI

Dans l'espace-temps de Minkowski, la situation géométrique de la section 2 est très simple : on choisit

$$u = t - r, \quad \underline{u} = t + r, \quad r = |x|, x = r\omega,$$

et donc

$$e_4 = L = -\nabla u = \partial_t + \partial_r, \quad e_3 = \underline{L} = -\nabla \underline{u} = \partial_t - \partial_r, \quad r\partial_r = x^i \partial_i.$$

Le feuilletage en sphères est celui des sphères standard dans les plans horizontaux, et des champs tangents à ces sphères sont

$$R_i = (x \wedge \partial)_i.$$

Dans la théorie des équations hyperboliques, tous ces objets ont des fonctions multiples plus ou moins « évidentes », que nous allons détailler, car il sera nécessaire de les distinguer plus tard.

1. Nous pouvons définir au moins deux notions d'infini : ce qui se passe lorsque $r \rightarrow \infty$, et ce qui se passe lorsque $\underline{u} \rightarrow \infty$, pour u fixé (« null infinity »). La première notion est claire, et les puissances de r apparaissent partout comme « poids » dans les estimations de décroissance cherchées. Par ailleurs, observons qu'une solution ϕ de l'équation des ondes avec données de Cauchy C_0^∞ peut s'écrire (cf. [7])

$$\phi(x, t) = (1/r)F(r - t, \omega, 1/r).$$

Pour u fixé, $r\phi$ a une limite qui est $F(-u, \omega, 0)$ (que l'on peut calculer explicitement à l'aide des transformées de Radon des données [7]). Dans [9], les auteurs établissent toutes les limites de ce type, qui sont importantes pour l'interprétation physique des résultats.

2. Les cônes sortants et rentrants permettent de préciser les domaines de détermination de divers sous-ensembles, c'est-à-dire de préciser la structure causale de l'univers que l'on décrit.

3. Nous notons que

$$\partial_t = \frac{1}{2}(L + \underline{L}), \quad S = t\partial_t + x^i \partial_i = \frac{1}{2}(ue_3 + \underline{u}e_4),$$

$$K_0 = (t^2 + x^2)\partial_t + 2tx^i \partial_i = \frac{1}{2}(u^2 e_3 + \underline{u}^2 e_4).$$

Les champs ∂_t et K_0 sont utiles (entre autres choses) comme *multiplicateurs* permettant d'obtenir des inégalités d'énergie pour l'équation des ondes. Cela signifie que pour $X = \partial_t$ ou $X = K_0$, l'on calcule en intégrant par parties

$$\int_{[0, T] \times \mathbb{R}^3} L_\eta \phi X \phi dx dt,$$

obtenant ainsi un contrôle au temps T d'une énergie positive $E(\phi)(T)$ de ϕ . Pour $X = \partial_t$, on obtient simplement l'énergie standard $E(\phi)(T) = |\nabla\phi(\cdot, T)|_{L^2}^2$, tandis que pour $X = K_0$ (« inégalité conforme »), on obtient une énergie équivalente à

$$(3.1) \quad \|\phi\|^2 + \Sigma\|R_i\phi\|^2 + \|S\phi\|^2 + \Sigma\|H_i\phi\|^2,$$

la norme $\|\cdot\|$ étant la norme L^2 à T fixé, les $H_i = t\partial_i + x^i\partial_t$ étant les champs de rotations hyperboliques. Nous expliquerons à la section 4 la généralisation de ces procédures.

4. Les champs considérés en 3 ont aussi de bonnes propriétés de commutation avec L_η . En effet,

$$[L_\eta, R_i] = 0, \quad [L_\eta, H_i] = 0, \quad [L_\eta, S] = 2L_\eta.$$

Le point 5 sera consacré à ce problème de commutation dans le cas non plat.

5. Enfin, en revenant à l'écriture de 1 d'une solution régulière

$$\phi(x, t) = (1/r)F(r - t, \omega, 1/r),$$

on observe que les différentes composantes de $\nabla\phi$ ont des comportements différents. Plus précisément,

$$L\phi \sim 1/r^2, \quad (R_i/r)(\phi) \sim 1/r^2, \quad \underline{L}\phi \sim 1/r.$$

Plus tard, il sera essentiel d'étudier séparément les diverses composantes des tenseurs que nous voulons estimer dans des repères isotropes analogues à (e_1, e_2, e_3, e_4) .

4. LES INÉGALITÉS D'ÉNERGIE ET LE TENSEUR D'ÉNERGIE-MOMENT

Pour comprendre, dans le cas plat, le formalisme que nous allons expliquer, on pourra consulter [5].

4.1. Le cas des équations d'ondes

Le tenseur d'énergie-moment Q associé à une fonction ϕ est défini par

$$Q_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - (1/2)g_{\alpha\beta}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi).$$

Ses propriétés principales sont les suivantes :

i) Si $L_g\phi = F$, alors

$$D^\alpha Q_{\alpha\beta} = F\partial_\alpha\phi.$$

ii) Si X et Y sont de type temps et orientés vers l'avenir, $Q(X, Y) \geq 0$.

Dans la situation I, la structure des composantes de Q dans notre repère habituel est la suivante :

$$\begin{aligned} Q_{LL} &= |L\phi|^2, & Q_{\underline{L}\underline{L}} &= |\underline{L}\phi|^2, & Q_{L\underline{L}} &= \Sigma_{a=1,2} |e_a\phi|^2, \\ Q_{Le_a} &= (L\phi)(e_a\phi), & Q_{\underline{L}e_a} &= (\underline{L}\phi)(e_a\phi), \\ Q_{e_ae_b} &= (e_a\phi)(e_b\phi) - (1/2)\delta_{ab}[-(L\phi)(\underline{L}\phi) + \Sigma_{a=1,2}|e_a\phi|^2]. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant un champ X , et posons $P_\alpha = Q_{\alpha\beta}X^\beta$. Il vient

$$D^\alpha P_\alpha = (1/2)Q^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} + FX(\phi).$$

Autrement dit, on écrit le produit $(L_g\phi)(X\phi)$ sous la forme d'une divergence plus une forme quadratique en les dérivées premières de ϕ . Le tenseur π est le tenseur de déformation de X défini par

$$\pi_{\alpha\beta} = D_\alpha X_\beta + D_\beta X_\alpha.$$

On voit que c'est aussi la dérivée de Lie de g . Selon la formule ci-dessus, on a tout intérêt à choisir un champ X (de type temps) pour lequel π serait le plus petit possible. Le cas $\pi = 0$ est celui des champs de Killing (dont le flot laisse g invariante). Malheureusement, de tels champs n'existent pas en général. Les deux possibilités retenues par Klainerman sont d'une part $X = \frac{1}{2}(L + \underline{L}) = \partial_t$, généralisant ainsi l'inégalité d'énergie standard, d'autre part $X = \frac{1}{2}(u^2\underline{L} + \underline{u}^2L)$, généralisant l'inégalité conforme du cas plat.

Il semble que ces choix soient guidés par deux considérations, outre le fait que ce sont les « bons choix » dans le cas plat :

a) D'abord, ces champs s'expriment simplement en termes de $u, \underline{u}, L, \underline{L}$, ce qui permet de calculer leurs tenseurs π en fonction des « coefficients du repère » (que nous discuterons au point 6).

b) Mais la vraie raison est la suivante : si nous décomposons la forme quadratique $Q^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}$ dans notre repère, tous les termes font intervenir au moins une « bonne » dérivée de ϕ (c'est-à-dire $e_i\phi$, $i = 1, 2$ ou $i = 4$), à l'exception du terme $\pi_{LL}Q_{\underline{L}\underline{L}}$ qui contient $|\underline{L}\phi|^2$. Mais justement, on peut calculer que

$${}^{(T)}\pi_{LL} = 0, \quad {}^{(K_0)}\pi_{LL} = 0.$$

Avec le choix du multiplicateur K_0 , par exemple, on obtient le contrôle à l'instant t d'une énergie équivalant à

$$(4.1) \quad E(\phi)(t) = \int_{\Sigma_t} [|\phi|^2 + t^2|L\phi|^2 + t^2\Sigma_{a=1,2}|e_a\phi|^2 + u^2|\underline{L}\phi|^2] dv,$$

dv étant la mesure de volume induite par g sur Σ_t . Il est intéressant de comparer cette formule avec (3.1), sachant que, dans le cas plat, on a les relations

$$S + \Sigma\omega_i H_i = \underline{u}L, \quad S - \Sigma\omega_i H_i = u\underline{L}.$$

4.2. Le cas relativiste

Dans la situation II de l'étude des équations d'Einstein, les auteurs utilisent des estimations d'énergie du tenseur de courbure R . On sait que R satisfait la deuxième identité de Bianchi (« Bianchi equations »)

$$D_{[\varepsilon} R_{\gamma\delta]\alpha\beta} = 0,$$

où le crochet sur les indices signifie la somme alternée (comme pour la dérivée extérieure d'une 2-forme). En fait, puisque l'on étudie les équations d'Einstein dans le vide, qui s'écrivent $R_{\alpha\beta} = 0$, le tenseur de Weyl W est identique à R , satisfait les mêmes équations de Bianchi, les mêmes symétries, avec en plus $W^\alpha_{\beta\alpha\gamma} = 0$. On peut établir une analogie entre ces équations et les équations de Maxwell. Le fait est qu'il existe une « machinerie » d'inégalités d'énergie analogue à celle que nous avons expliquée pour l'équation des ondes. On définit un tenseur d'énergie-moment (dit « de Bel-Robinson ») par

$$Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = W_{\alpha\rho\gamma\sigma} W_{\beta\delta}^{\rho\sigma} + {}^*W_{\alpha\rho\gamma\sigma} {}^*W_{\beta\delta}^{\rho\sigma},$$

où ${}^*W_{\alpha\beta\gamma\delta} = (1/2)\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} W^{\mu\nu}_{\gamma\delta}$ est le dual de Hodge de W , défini à l'aide de la forme volume ε . Le tenseur Q jouit des propriétés suivantes :

- i) Q est symétrique et de trace nulle par rapport à tout couple d'indices.
- ii) $Q(X, Y, Z, U)$ est positif si les quatre champs X, Y, Z, U sont de type temps orientés vers le futur.
- iii) Si W est solution des équations de Bianchi,

$$D^\alpha Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

Comme en 4.1, on en déduit qu'en posant, pour trois « multiplicateurs » donnés X, Y, Z ,

$$P_\alpha = Q_{\alpha\beta\gamma\delta} X^\beta Y^\gamma Z^\delta,$$

on trouve, si W satisfait les équations de Bianchi,

$$D^\alpha P_\alpha = \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma\delta} [{}^{(X)}\pi^{\alpha\beta} Y^\gamma Z^\delta + {}^{(Y)}\pi^{\alpha\gamma} X^\beta Z^\delta + {}^{(Z)}\pi^{\alpha\delta} X^\beta Y^\gamma].$$

On voit donc que le choix des multiplicateurs X, Y, Z obéit exactement aux mêmes contraintes que pour l'équation des ondes : on prendra comme avant soit T , soit K_0 , ce qui, compte tenu des symétries, ne laisse que quatre possibilités. Dans [9], les auteurs ne retiennent en fait que les choix (K_0, K_0, K_0) ou (K_0, K_0, T) , ce qui correspond à l'inégalité conforme pour l'équation des ondes.

La nouveauté ici est qu'il n'y a pas de coordonnée t . On va donc intégrer $D^\alpha P_\alpha$ dans un domaine de détermination $K_{\lambda\nu}$ bordé par deux surfaces de niveau $u = \lambda$, $u = \nu$ et une portion de $\Sigma_0 = \{t = 0\}$: au lieu d'obtenir une énergie qui s'exprime comme une intégrale sur un plan horizontal, comme dans le cas des ondes, on obtient deux intégrales sur le bord latéral de $K_{\lambda\nu}$, qui sont en fait, de façon analogue à (4.1),

des intégrales des carrés de diverses composantes de R , agrémentées de divers poids qui sont des puissances de u et \underline{u} (voir [9]).

5. COMMUTATIONS

Il s'avère qu'en général, pour obtenir des estimations ponctuelles à poids (qui sont ici r et $\langle u \rangle = (1 + |u|^2)^{1/2}$) sur les solutions d'une équation hyperbolique, le contrôle de l'énergie de cette solution ne suffit pas. Dans l'esprit des inégalités de Sobolev, il faut aussi contrôler l'énergie d'un certain nombre de dérivées de la solution, résultat que l'on n'atteint qu'en établissant des équations vérifiées par ces dérivées, c'est-à-dire en les « commutant » à l'opérateur.

5.1. Le cas des ondes

Dans le cas plat (voir [7] ou l'exposé de Chemin [4]), on commute avec l'équation des produits Z^α , où les Z sont pris parmi les « champs de Klainerman »

$$\partial_\alpha, R_i, S, H_i.$$

Dans le cas général, on utilise la formule suivante (cf. [8]) :

$$[L_g, X]\phi = \pi^{\alpha\beta} \nabla^2 \phi_{\alpha\beta} + D_\alpha \pi^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi - (1/2) \partial^\beta (\text{tr } \pi) \partial_\beta \phi.$$

On notera que le commutateur ne dépend que du tenseur de déformation $\pi = {}^{(X)}\pi$ de X , le même qui intervenait déjà dans les inégalités d'énergie. On remarquera à ce propos que, contrairement aux apparences, π contient des dérivées $X(g^{\alpha\beta})$, comme il est normal pour un commutateur, car

$$\pi^{\alpha\beta} = \partial^\alpha (X^\beta) + \partial^\beta (X^\alpha) - X(g^{\alpha\beta}).$$

Il faut donc commuter avec L_g des champs pour lesquels π soit le plus petit possible, et qui apportent l'information souhaitée. Dans le cas de l'équation des ondes (situation I), pour gagner le contrôle des dérivées de ϕ d'ordre supérieur à un, le plus simple est de commuter le champ $T = (1/2)(L + \underline{L})$, dont le tenseur de déformation a de bonnes propriétés. Utilisant alors l'équation, on obtient un contrôle de $\Delta_g \phi$ qui, via la théorie elliptique, donne finalement le contrôle de toutes les dérivées.

Il est cependant des cas où un contrôle de l'analogue des « champs de Klainerman » appliqués à ϕ est souhaitable, pour les mêmes raisons que dans le cas plat (par exemple, pour pouvoir ensuite appliquer l'inégalité de Klainerman [7] [4]). Dans ce cas, on dispose déjà d'un analogue du champ de scaling S défini par

$$S = (1/2)(u\underline{L} + \underline{u}L).$$

Pour ce qui est des rotations analogues aux R_i , on note que les cônes sortants sont des surfaces caractéristiques pour L_g ; il est donc raisonnable de choisir des champs iO tangents aux sphères du feuilletage, c'est-à-dire ici aux sphères S_{t_0, u_0} . Le choix

des auteurs est de préserver autant que faire se peut les relations existantes dans le cas plat

$$[R_i, R_j] = \varepsilon_{ijk} R^k, \quad [R_i, \partial_r] = 0, \quad \langle e_i, R_j \rangle = 0, \quad i = 3, 4.$$

Pour ce faire (toujours dans la situation I), on considère, dans Σ_0 , le feuilletage en sphères $u = u_0$, et son champ unitaire normal (sortant) N . Le flot de N permet de ramener sur une sphère donnée les champs (standard!) R_i qui vivent sur la sphère à l'infini : cela est dû au fait que le feuilletage ressemble, à l'infini, au feuilletage standard, et que les champs R_i sont homogènes d'ordre zéro. Pour obtenir les champs tangents à la sphère S_{t_0, u_0} , on prend l'image des champs tangents à la sphère S_{0, u_0} par le flot de L , pendant le temps t_0 . On assure ainsi les relations

$$[{}^i O, {}^j O] = \varepsilon_{ijk} {}^k O, \quad [L, {}^i O] = 0.$$

Il y a un certain arbitraire dans cette définition, car on aurait par exemple obtenu d'autres champs en transportant les champs standard de l'infini directement dans le plan Σ_{t_0} .

Finalement, notons qu'il ne semble pas qu'on dispose d'analogues aux rotations hyperboliques H_i du cas plat, jouissant de bonnes propriétés de commutation.

5.2. Le cas relativiste

On a vu que, dans ce cas, les auteurs utilisent les équations de Bianchi pour contrôler la courbure à l'aide d'inégalités d'énergie. Les champs que l'on souhaite commuter aux équations de Bianchi sont les mêmes que plus haut : T , S , $({}^i)O$. Notons ici que les rotations $({}^i)O$ sont définies à partir des rotations sur la surface $\{\underline{u}_0 = \underline{u}_*\}$ de Σ_0 à l'aide des flots de deux champs « équivariants » (c'est-à-dire que leurs flots appliquent les sphères du feuilletage les unes dans les autres) : on pousse d'abord les champs le long de \underline{C}_* par le flot de $2\Omega^2 \underline{L}$, puis, de la sphère à laquelle on a abouti, le long du cône sortant par le flot de $2\Omega^2 L$ jusqu'à la sphère voulue.

La principale différence est qu'on dérive le tenseur de Weyl, et non pas une fonction, ce qui nécessite quelques précautions. Au lieu de considérer la dérivée de Lie usuelle $\mathcal{L}_X W$, on doit introduire, afin de préserver les symétries de W , la dérivée de Lie modifiée (par des termes linéaires)

$$\widehat{\mathcal{L}}_X W = \mathcal{L}_X W - (1/2)^{(X)}[W] + (3/8) \operatorname{tr}^{(X)} \pi W,$$

où l'on a posé (avec $({}^X)\pi = \pi$)

$$({}^X)[W]_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pi_\alpha^\mu W_{\mu\beta\gamma\delta} + \pi_\beta^\mu W_{\alpha\mu\gamma\delta} + \pi_\gamma^\mu W_{\alpha\beta\mu\delta} + \pi_\delta^\mu W_{\alpha\beta\gamma\mu}.$$

Nous renvoyons le lecteur à [3] pour des aperçus géométriques sur cette définition.

6. LES ÉQUATIONS DE STRUCTURE : PROPAGATION ET ELLIPTICITÉ

Nous avons vu plus haut la nécessité d'introduire les champs T , K_0 , S , ${}^{(i)}O$, et comment leurs tenseurs de déformation intervenaient, aussi bien dans les inégalités d'énergie que dans les formules de commutation. Il reste à expliquer comment l'on contrôle ces divers tenseurs de déformations.

Bien que les traitements des situations géométriques I (ondes) et II (relativité) soient assez nettement différents, ils ont en commun suffisamment de traits caractéristiques pour que nous puissions en donner une idée en exposant ici le seul cas I. Nous reviendrons sur le cas II à la section 7.

Nous définissons les coefficients de connexion (qui sont des tenseurs sur les sphères du feuilletage) par les équations

$$\begin{aligned} \chi_{ab} &= \langle D_a L, e_b \rangle, & \underline{\chi}_{ab} &= \langle D_a \underline{L}, e_b \rangle, \\ 2\xi_a &= \langle D_L L, e_a \rangle = 0, & 2\underline{\xi}_a &= \langle D_{\underline{L}} \underline{L}, e_a \rangle, \\ 2\eta_a &= \langle D_{\underline{L}} L, e_a \rangle, & 2\underline{\eta}_a &= \langle D_L \underline{L}, e_a \rangle. \end{aligned}$$

Il est clair que ces coefficients suffisent à exprimer les tenseurs de déformation des champs T , S , K_0 . Notons que χ et $\underline{\chi}$ sont les secondes formes pour le feuilletage en sphères, et à ce titre, symétriques. Définissons k comme la seconde forme pour les surfaces Σ_t ,

$$k_{ij} = -(1/2)\partial_t g_{ij}.$$

Les formules

$$\begin{aligned} \underline{\chi}_{ab} &= -\chi_{ab} - 2k_{ab}, & \underline{\xi}_a &= -\eta_a + k_{aN}, \\ \underline{\eta}_a &= -k_{aN}, & \eta_a &= b^{-1} \neq \nabla_a b + k_{aN} \end{aligned}$$

montrent, en supposant k suffisamment connue, qu'il suffit de contrôler χ, η, b .

Notons que ces coefficients sont à peu de chose près les composantes (non nulles) de $\nabla^2 u$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_{ab} &= \langle D_a \nabla u, e_b \rangle = -\langle D_a b^{-1} L, e_b \rangle = -b^{-1} \chi_{ab}, \\ \nabla^2 u_{a\underline{L}} &= -\langle D_{\underline{L}} b^{-1} L, e_a \rangle = -2b^{-1} \eta_a, \\ \nabla^2 u_{\underline{L}\underline{L}} &= -\langle D_{\underline{L}} b^{-1} L, \underline{L} \rangle = 2e_3(b)b^{-2} - 2b^{-1} k_{NN}. \end{aligned}$$

En dérivant deux fois l'équation eikonale, on obtient d'autre part

$$D_L \nabla^2 u_{\alpha\beta} + b \nabla^2 u_{\alpha}^{\mu} \nabla^2 u_{\mu\beta} = b^{-1} R_{\alpha L \beta L}.$$

Pour en déduire les équations de transport sur χ, η, b , nous introduisons la partie sans trace de χ définie par

$$\widehat{\chi} = \chi - (1/2)g(\text{tr } \chi).$$

Les équations de transport sont alors

$$\begin{aligned} L(b) &= -bk_{NN}, \\ L(\operatorname{tr} \chi) + (1/2)(\operatorname{tr} \chi)^2 &= -|\widehat{\chi}|^2 - k_{NN} \operatorname{tr} \chi - R_{44}, \\ \mathcal{D}_4 \widehat{\chi}_{ab} + (1/2)(\operatorname{tr} \chi) \widehat{\chi}_{ab} &= -k_{NN} \widehat{\chi}_{ab} - \widehat{\alpha}_{ab}, \\ \mathcal{D}_4 \eta_a + (1/2)(\operatorname{tr} \chi) \eta_a &= -(k_{Nb} + \eta_b) \widehat{\chi}_{ab} - (1/2)(\operatorname{tr} \chi) k_{aN} - (1/2) \beta_a, \end{aligned}$$

où α, β sont des composantes de R

$$\alpha_{ab} = R_{aLbL}, \quad \operatorname{tr} \alpha = R_{44}, \quad \beta_a = R_{La\underline{L}L},$$

et \mathcal{D}_4 est la projection sur l'espace tangent aux sphères de D_4 . En principe, ces équations suffisent à saisir χ, η, b et leurs dérivées. Cependant, cela conduit à de mauvaises estimations, à cause de pertes de dérivées. C'est pourquoi l'on introduit l'équation de Codazzi

$$\operatorname{div} \widehat{\chi}_a + \widehat{\chi}_{ab} k_{bN} = (1/2)(\nabla_a \operatorname{tr} \chi + k_{aN} \operatorname{tr} \chi) - R_{b4ab}.$$

La clé est de penser cette équation comme un *système elliptique* sur les sphères.

La stratégie est alors la suivante :

i) On remarque que l'équation de transport sur $\operatorname{tr} \chi$ ne fait intervenir que la composante R_{44} du tenseur de Ricci.

ii) Le point crucial est la structure particulière de $\operatorname{Ric}(L, L)$,

$$\operatorname{Ric}(L, L) = L(m) - (1/2)e_4^\mu e_4^\nu L_g(g_{\mu\nu}) + E.$$

Ici, m ne dépend que des dérivées premières de g , et E est une somme de termes quadratiques en les dérivées premières de g . Dans le contexte du problème non-linéaire de [10], on dispose sur $L_g(g_{\mu\nu})$ d'estimations meilleures que sur les composantes de R en général. En appliquant e_a à l'équation de transport, et en introduisant l'inconnue « normalisée » $y = \operatorname{tr} \chi - 2/(t - u)$, on trouve finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_4 \nabla_a(y + m) + (3/2) \nabla_a(y + m) \\ = -\widehat{\chi}_{ab} \nabla_b(y + m) + (y + m) \nabla_a(y + m) - (y + m) \nabla_a \operatorname{tr} \chi \widehat{\chi} - \operatorname{tr} \chi \nabla_a k_{NN} \\ - k_{NN} \nabla_a \operatorname{tr} \chi + \nabla_a((1/2)e_4^\mu e_4^\nu L_g g_{\mu\nu} - E). \end{aligned}$$

iii) En combinant cette équation à l'équation de Codazzi, on contrôle finalement les dérivées sur les sphères de $\operatorname{tr} \chi, \widehat{\chi}$ sans faire intervenir de dérivées de R . On a donc véritablement gagné une dérivée.

Pour contrôler $\nabla_a \eta$ ainsi que la dérivée manquante $\underline{L} \operatorname{tr} \chi$, on ne dérive pas l'équation de transport sur η , car cela introduirait une dérivée de β . On pose

$$\mu = 2 \operatorname{div} \eta + 2 \operatorname{tr} \chi k_{NN} + 2|\eta|^2 - \operatorname{tr}(\widehat{\chi} \cdot \widehat{\chi}) + \gamma,$$

où $\gamma = R_{431}^1 + R_{432}^2$. L'équation de transport sur μ s'écrit

$$L\mu + \mu \operatorname{tr} \chi = \dots + \underline{L}(R_{44}),$$

où les points désignent des termes qui ne contiennent pas de dérivées de R . Compte tenu de la structure remarquable de R_{44} , le terme $\underline{L}(R_{44})$ ne pose plus de problème. Une fois μ estimée, on obtient les dérivées de η par le *système elliptique*

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \eta &= (1/2)\mu - \operatorname{tr} \chi k_{NN} - |\eta|^2 + (1/2) \operatorname{tr}(\widehat{\chi}\widehat{\chi}) - (1/2)\gamma, \\ \operatorname{curl} \eta &= (1/2)(\widehat{\chi}_{1c}\widehat{\chi}_{2c} - \widehat{\chi}_{2c}\widehat{\chi}_{1c}) - (1/2)(R_{1432} - R_{2431}).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\underline{L} \operatorname{tr} \chi = \mu - k_{NN} \operatorname{tr} \chi + (1/2)(\operatorname{tr} \chi)^2$$

fournit l'information souhaitée.

7. COMPTAGE DES DÉRIVÉES ET ÉQUATIONS EIKONALES EN RELATIVITÉ

Nous n'avons jusqu'ici discuté que de la façon d'obtenir des estimations de solutions d'équations linéaires. Un problème fondamental dans le cas non-linéaire est la mise au point d'une hypothèse d'induction. Une telle hypothèse comporte en général l'indication des comportements d'un certain nombre n de dérivées de la solution. L'étude du problème linéaire dont les propriétés sont déduites de cette hypothèse doit permettre de retrouver (avec une amélioration) ces mêmes propriétés, en particulier de retrouver un contrôle du même nombre n de dérivées.

Nous allons brièvement expliquer ce « comptage des dérivées » dans le cas de la relativité. L'hypothèse d'induction consiste à supposer connues, dans une région \mathcal{K} bordée par une portion de Σ_0 , une portion de cône sortant $u = \nu_0$ et une portion de cône rentrant $\underline{u} = \underline{u}_*$, une métrique, ainsi que deux fonctions optiques u et \underline{u} réalisant un feuilletage dit « canonique », et vérifiant

$$\mathcal{O} \leq \varepsilon_0, \mathcal{R} \leq \varepsilon_0.$$

En simplifiant outrageusement, on peut dire que la quantité \mathcal{R} décrit les comportements de dérivées d'ordre (au plus) deux des composantes de R , tandis que \mathcal{O} décrit les comportements de dérivées d'ordre (au plus) trois des coefficients de connexion (notons que les dérivées d'ordre trois sont prises sur les sphères). Pour retrouver/améliorer l'hypothèse sur R , on utilise les équations de Bianchi que l'on dérive deux fois. Nous admettrons, ce qui est *très loin* d'être évident, que les informations sur \mathcal{O} suffisent pour maîtriser les commutations et les inégalités d'énergie correspondantes. Il faut ensuite retrouver l'hypothèse sur \mathcal{O} , et c'est ce point que nous allons un peu détailler, pour bien voir comment les fonctions optiques u et \underline{u} sont construites.

Dans la situation géométrique II, on définit des coefficients de connexion, tout à fait comme au point 6 :

$$\begin{aligned}\chi_{ab} &= \langle D_a e_4, e_b \rangle, & \underline{\chi}_{ab} &= \langle D_a e_3, e_b \rangle, & 2\zeta_a &= \langle D_a e_4, e_3 \rangle, \\ 2\xi_a &= \langle D_{e_4} e_4, e_a \rangle = 0, & \underline{\xi}_a &= \langle D_{e_3} e_3, e_a \rangle = 0, \\ \eta_a &= (1/2)\langle D_{e_3} e_4, e_a \rangle = \zeta_a + \nabla_a \log \Omega, \\ \underline{\eta}_a &= (1/2)\langle D_{e_4} e_3, e_a \rangle = -\zeta_a + \nabla_a \log \Omega, \\ 4\omega &= \langle D_{e_4} e_4, e_3 \rangle = -2D_4 \log \Omega, & 4\underline{\omega} &= \langle D_{e_3} e_3, e_4 \rangle = -2D_3 \log \Omega.\end{aligned}$$

La grande différence est que les composantes de *Ric* sont nulles. Les *équations de transport naturelles*, où l'on a scindé χ et $\underline{\chi}$, sont comme plus haut

$$(7.1) \quad \begin{aligned}D_4 \operatorname{tr} \chi + (1/2)(\operatorname{tr} \chi)^2 - (D_4 \log \Omega) \operatorname{tr} \chi + |\widehat{\chi}|^2 &= 0, \\ D_4 \widehat{\chi} + \operatorname{tr} \chi \widehat{\chi} - (D_4 \log \Omega) \widehat{\chi} &= -\alpha, \\ \mathcal{D}_4 \zeta + 2\chi \zeta + \mathcal{D}_4 \log \Omega &= -\beta, \\ D_3 \operatorname{tr} \underline{\chi} + (1/2)(\operatorname{tr} \underline{\chi})^2 - (D_3 \log \Omega) \operatorname{tr} \underline{\chi} + |\widehat{\underline{\chi}}|^2 &= 0, \\ D_3 \widehat{\underline{\chi}} + \operatorname{tr} \underline{\chi} \widehat{\underline{\chi}} - (D_3 \log \Omega) \widehat{\underline{\chi}} &= -\alpha.\end{aligned}$$

Les équations « anti-naturelles », qui expriment $D_3 \operatorname{tr} \chi$ ou $D_4 \operatorname{tr} \underline{\chi}$ en fonction de $\operatorname{div} \zeta$, servent en fait à calculer $\operatorname{div} \zeta$, comme on l'a vu plus haut.

Les *équations elliptiques* sont

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \widehat{\chi} + \widehat{\chi} \zeta &= (1/2)(\nabla \operatorname{tr} \chi + \zeta \operatorname{tr} \chi) - \beta, \\ \operatorname{div} \widehat{\underline{\chi}} - \widehat{\underline{\chi}} \zeta &= (1/2)(\nabla \operatorname{tr} \underline{\chi} - \zeta \operatorname{tr} \underline{\chi}) + \beta, \\ \operatorname{curl} \zeta &= -(1/2)\widehat{\chi} \wedge \widehat{\underline{\chi}} + \sigma, \\ \operatorname{div} \zeta &= \dots,\end{aligned}$$

où les points indiquent des quantités préalablement estimées.

C'est la nécessité de « boucler » l'hypothèse d'induction qui va conduire au concept fondamental de « feuilletage canonique ». Supposons en effet donnée sur Σ_0 une fonction w dont les surfaces de niveau forment un feuilletage en sphères raisonnable de Σ_0 , et qui servira de donnée initiale pour \underline{u} . Le contrôle de trois dérivées de $\underline{\chi}$ via (7.1) nécessite le contrôle de trois dérivées de θ , la seconde forme du feuilletage en sphères sur Σ_0 . En notant N le vecteur unitaire sortant et $a = |\nabla w|^{-1}$, on a

$$\nabla_N \operatorname{tr} \theta + (1/2)(\operatorname{tr} \theta)^2 = -(\Delta \log a + \rho) + [-|\nabla \log a|^2 + |\widehat{\theta}|^2 + g(k)],$$

où $g(k)$ est une somme de carrés de composantes de k . Comme on n'a besoin en fait que de trois dérivées ∇ , pour ne pas avoir à dériver ρ , on va demander, et c'est là la définition du feuilletage canonique sur Σ_0 ,

$$\Delta \log a + \rho = \overline{\rho}, \quad \overline{\log a} = 0,$$

où la barre supérieure dénote la moyenne sur la sphère.

Pour choisir la donnée \underline{u}_* de u sur \underline{C}_* , on introduit comme au point 6 la fonction μ

$$\mu = -\operatorname{div} \eta + (1/2)\widehat{\chi}\widehat{\chi} - \rho.$$

Le point important est que l'équation de transport sur μ est agréable. Pour contrôler les dérivées ∇ , on choisit d'imposer $\mu = \bar{\mu}$ sur \underline{C}_* . Sans entrer dans les détails, disons qu'il est possible de choisir u de cette façon, que les auteurs appellent « canonique ».

8. VERS LA CONJECTURE H^2 ?

Pour terminer ce court exposé, nous voudrions effleurer les travaux en cours iii) de Klainerman et Rodniansky [11–16]. Il ne nous est en aucune façon possible d'entrer ici dans les détails. Ce qui importe pour notre propos est d'illustrer l'*unité* des méthodes d'approche.

Il s'agit du problème de type B : résoudre les équations d'Einstein pour des données de Cauchy $g \in H^2, k \in H^1$. Dans le contexte que nous avons expliqué plus haut, un des points clé est de pouvoir contrôler les cônes sortants, surfaces de niveau de la fonction optique u . Rappelons (*cf.* [9]) que $\int_S \operatorname{tr} \chi$ mesure le taux de variation du volume de S dans la direction de e_4 : pour éviter l'apparition d'un phénomène de type « caustique », il est donc nécessaire (entre autres choses) de contrôler $\operatorname{tr} \chi$ dans L^∞ . En notant ici $L = -\nabla u$ et $\chi(X, Y) = \langle D_X L, Y \rangle$, on a l'équation de transport

$$L(\operatorname{tr} \chi) + (1/2)(\operatorname{tr} \chi)^2 = -|\widehat{\chi}|^2.$$

Il faut donc contrôler $\int_\Gamma |\widehat{\chi}|^2$ sur les géodésiques Γ qui tissent un cône sortant C .

On a vu (au paragraphe 7) que la bonne façon d'estimer $\widehat{\chi}$ est l'équation de Codazzi

$$\operatorname{div} \widehat{\chi} = -\beta + (1/2) \nabla \operatorname{tr} \chi + (1/2) \operatorname{tr} \chi \zeta - \zeta \cdot \widehat{\chi}.$$

En supposant que les deux derniers termes ne causent pas de problèmes, et en notant D^{-1} l'opérateur pseudo-différentiel (sur la sphère!) d'ordre -1 qui résout le système ci-dessus, il reste à considérer

$$I_1 = \int_\Gamma |D^{-1} \beta|^2, I_2 = \int_\Gamma |D^{-1} \nabla \operatorname{tr} \chi|^2.$$

Nous supposons estimée la quantité R_0 , qui est la somme des normes des « bonnes » composantes de R (dont β) dans $L^2(C)$. Notons que Γ est de codimension deux dans C (qui est de dimension trois), en sorte que le théorème de trace de $H^s(C)$ dans $H^{s-1}(\Gamma)$ qu'on aimerait utiliser... est faux, car ici $s = 1$ et non $s > 1$. De façon tout à fait analogue à la situation de [10] décrite en 6 où la structure particulière de R_{44} permettait de gagner une dérivée, c'est ici la *structure particulière de β* qui va nous

aider. Les équations de Bianchi, écrites dans le repère habituel, donnent en particulier (cf. [9])

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \beta &= D_4 \rho + (3/2) \rho \operatorname{tr} \chi + (1/2) \widehat{\chi} \cdot \alpha - \zeta \beta - 2\underline{\eta} \beta, \\ \operatorname{curl} \beta &= -D_4 \sigma - (3/2) \operatorname{tr} \chi \sigma + (1/2) \widehat{\chi}^* \alpha - \zeta^* \beta - 2\underline{\eta}^* \beta.\end{aligned}$$

En abrégé, nous écrivons $\beta = D^{-1}(L(\rho), L(\sigma))$, soit, en ignorant le commutateur

$$D^{-1} \beta = \nabla_L Q + \dots, \quad Q = D^{-2}(\rho, \sigma).$$

L'intégrale I_1 sera majorée par la norme de $Q|_{\Gamma}$ dans H^1 , qui est estimée par

$$|Q|_{H^2(C)} \leq C|(\rho, \sigma)|_{L^2(C)} \leq CR_0.$$

Si l'on a une chance de majorer $|\operatorname{tr} \chi|_{L^\infty}$ à l'aide de l'équation de transport, c'est en majorant I_2 à l'aide de cette même norme. Mais $D^{-1} \mathcal{N}$, opérateur (pseudo-différentiel) d'ordre zéro sur la sphère, n'opère pas dans L^∞ ... Nous arrêtons ici, en plein « suspens », le récit de cette passionnante aventure, en espérant avoir donné au lecteur quelques clés pour aborder la lecture des travaux de Klainerman et Rodniansky [14–16].

Remarque. — Nous nous sommes limités ci-dessous aux travaux ayant un rapport immédiat avec l'approche que nous avons choisie. Une bibliographie plus vaste concernant les équations hyperboliques non-linéaires se trouve dans [7], tandis que les lecteurs plus spécialement intéressés par la relativité consulteront [9].

RÉFÉRENCES

- [1] H. BAHOURI & J.-Y. CHEMIN – « Équations d'ondes quasi-linéaires et effet dispersif », *Internat. Math. Res. Notices* **21** (1999), p. 1141–1178.
- [2] H. BAHOURI & J.-Y. CHEMIN – « Équations d'ondes quasi-linéaires et estimations de Strichartz », *Amer. J. Math.* **121** (1999), p. 1337–1377.
- [3] J.-P. BOURGUIGNON – « Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski », in *Sém. Bourbaki 1990/91*, Astérisque, vol. 201-202-203, Société Mathématique de France, 1991, Exp. n° 740, p. 321–358.
- [4] J.-Y. CHEMIN – « Explosion géométrique pour certaines équations d'ondes non linéaires », in *Sém. Bourbaki, 1998/99*, Astérisque, vol. 266, Société Mathématique de France, 2000, Exp. n° 850, p. 7–20.
- [5] D. CHRISTODOULOU & S. KLAINERMAN – « Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space », *Comm. Pure Appl. Math.* **XLIII** (1990), p. 137–199.
- [6] ———, *The global nonlinear stability of the Minkowski space*, Princeton Math. Series, vol. 41, Princeton University Press, 1993.
- [7] L. HÖRMANDER – *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Equations*, Math. Appl., vol. 26, Springer-Verlag, 1987.

- [8] S. KLAINERMAN – « A commuting vector field approach to Strichartz type inequalities and applications to quasilinear wave equations », *Internat. Math. Res. Notices* **5** (2001), p. 221–274.
- [9] S. KLAINERMAN & F. NICOLÒ – *The evolution problem in general relativity*, Prog. Math. Physics, vol. 25, Birkhäuser, 2003.
- [10] S. KLAINERMAN & I. RODNIANSKY – « Improved local well posedness for quasilinear wave equations in dimension three », *Duke Math. J.* **117** (2003), p. 1–124.
- [11] _____, « Rough solutions of the Einstein vacuum equations », *Ann. of Math.* (to appear).
- [12] _____, « The causal structure of microlocalized, rough, Einstein metrics », *Ann. of Math.* (to appear).
- [13] _____, « Ricci defects of microlocalized Einstein metrics », *J Nonlinear Hyp. Eq.* (to appear).
- [14] _____, « Causal geometry of Einstein-vacuum spacetimes with finite curvature flux », *Invent. Math.* (to appear).
- [15] _____, « A geometric theory of Littlewood-Paley theory », preprint, 2003.
- [16] _____, « Sharp trace theorems for null hypersurfaces on Einstein metrics with finite curvature flux », preprint, 2003.
- [17] H. LINDBLAD & I. RODNIANSKY – « Global Existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates », preprint, 2003.

Serge ALINHAC

Université Paris XI

Département de Mathématiques

Bâtiment 425

F-91405 Orsay Cedex

E-mail : Serge.Alinhac@math.u-psud.fr

PARAMÉTRISATION DE STRUCTURES ALGÈBRIQUES
ET DENSITÉ DE DISCRIMINANTS
[d'après Bhargava]

par Karim BELABAS

Gauss publie ses *Disquisitiones Arithmeticae* en 1801. La moitié du traité est consacrée aux formes quadratiques binaires $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, notées (a, b, c) , de discriminant $D = b^2 - 4ac$ ⁽¹⁾. Intéressé par les valeurs représentées par ces formes, c'est-à-dire par $\{f(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$, Gauss constate que l'action du groupe linéaire $SL_2(\mathbb{Z})$ par changement de variables

$$(1) \quad (\gamma \cdot f)(x, y) = f((x, y)\gamma),$$

permet de ranger les formes en classes, les formes d'une orbite représentant les mêmes entiers. Le discriminant est constant sur une orbite et le nombre d'orbites de discriminant fixé est fini. Enfin,

« *sujet très important et dont personne ne s'est encore occupé* » [§ 234],

il munit les orbites primitives, telles que $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, d'une structure de groupe, compatible avec les valeurs représentées. L'idée est de généraliser l'identité de Brahmagupta

$$(x^2 + Dy^2)(z^2 + Dt^2) = X^2 + DY^2, \quad \text{pour } X = xz + Dyt, Y = xt - yz,$$

qu'on n'expliquait pas encore par la multiplicativité de la norme dans $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Gauss écrit en complète généralité

$$(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2)(a_2z^2 + b_2zt + c_2t^2) = AX^2 + BXY + CY^2$$

dans $\mathbb{Z}[x, y, z, t]$, où X et Y sont des fonctions linéaires de (xz, xt, yz, yt) données par une transformation primitive (les mineurs maximaux de la matrice 2×4 associée sont premiers entre eux) et où tous les coefficients sont indéterminés et entiers. Puis il résout tranquillement le système. Il découvre ainsi toutes les lois de composition possibles :

⁽¹⁾Gauss considère les formes dont la forme polaire bilinéaire est à *valeurs* entières, et le coefficient de xy est toujours pair. Il utilise donc le symbole (a, b, c) là où nous écrivons $(a, 2b, c)$ et définit son discriminant par $b^2 - ac$. Nous traduisons dans les notations modernes.

il n'y en a essentiellement qu'une⁽²⁾, qui s'exprime plus agréablement pour les formes primitives de même discriminant. Voici la formulation qu'en donne Dirichlet⁽³⁾ : pour deux formes primitives de discriminant $D \neq 0$, vérifiant $a_1 a_2 \neq 0$, on pose

$$(2) \quad (a_1, b_1, *) \times (a_2, b_2, *) = (A, B, *),$$

où $n = \text{pgcd}(a_1, a_2, (b_1 + b_2)/2)$, $A = a_1 a_2 / n^2$, B est solution du système de congruences

$$\begin{aligned} B &\equiv b_1 \pmod{2a_1/n} \\ B &\equiv b_2 \pmod{2a_2/n} \\ B^2 &\equiv D \pmod{4a_1 a_2 / n}, \end{aligned}$$

et le troisième coefficient, déterminé par les deux premiers et le discriminant, est omis. Conscientieux, Gauss vérifie que l'opération passe au quotient et qu'elle est associative. En langage moderne, il définit la multiplication des idéaux dans un anneau quadratique S et identifie le groupe des classes de S -idéaux projectifs (*i.e.* inversibles). Cette caractérisation est toujours algorithmiquement utile et permet d'autre part d'estimer de nombreuses densités liées à ces groupes de classes quand le discriminant varie.

Dans sa thèse, Bhargava entreprend une vaste recherche de « lois de composition » arithmétiques, guidé par une série d'heuristiques et la classification des espaces vectoriels préhomogènes (voir §3). Il considère un groupe algébrique G , une représentation naturelle V , choisit tels que l'action de $G_{\mathbb{Z}}$ sur $V_{\mathbb{Z}}$ n'ait qu'un seul invariant, baptisé discriminant, puis montre que les orbites $V_{\mathbb{Z}}/G_{\mathbb{Z}}$ paramètrent les paires $(R, *)$, où R est une classe d'isomorphisme d'anneaux de nombres de petit degré (voir §1.1) et $*$ désigne des structures supplémentaires, en général des R -modules. Ce sont les structures algébriques du titre de l'exposé. Le discriminant usuel de R coïncide avec celui de l'orbite de $V_{\mathbb{Z}}/G_{\mathbb{Z}}$ associée. Bhargava obtient une dizaine de tels exemples, très explicites, et d'autres encore conjecturaux.

D'une part, il munit un sous-ensemble « projectif » de $V_{\mathbb{Z}}/G_{\mathbb{Z}}$ d'une loi de groupe intrinsèque et élégante, qui se réinterprète en termes du groupe des classes $\text{Cl}(R)$. D'autre part, il peut énumérer les orbites par discriminant croissant, algorithmiquement ou asymptotiquement quand le discriminant tend vers l'infini. En particulier, en oubliant les structures $*$ et en se restreignant aux anneaux R intègres maximaux, Bhargava obtient de nouveaux résultats sur les densités de discriminants de corps de nombres quartiques et quintiques. Il convient toutefois de rester prudent pour cette dernière application : seul le cas des corps quartiques totalement réels est complètement rédigé à ce jour. Ces résultats restent mystérieux : la vision est unifiée et

⁽²⁾Gauss exclut les formes de discriminant nul et impose une transformation primitive, ainsi qu'un choix de signe (distinguant ainsi composition directe et indirecte).

⁽³⁾Pour l'essentiel. Dirichlet-Dedekind se restreint au cas $n = 1$ des formes « unifiées » [35, Supp. X].

élégante, mais chaque démonstration est unique quoique suivant un motif commun dans l'esprit de la théorie des invariants classique, et laisse une part décisive au calcul formel explicite. Tout comme la démonstration de Gauss.

Après quelques définitions, nous détaillons sur l'exemple de Gauss la technique de comptage employée par Bhargava en dimension supérieure. Nous décrivons ensuite les techniques alternatives utilisant les fonctions zêta de Sato-Shintani, plus générales mais aussi plus sophistiquées, qui fournissent de nombreux résultats de densités, en particulier pour les discriminants des corps quadratiques et cubiques sur une base arbitraire, et proposent un vaste programme susceptible d'aboutir à d'autres résultats de ce type, mais sans être pour l'instant en mesure de fournir les résultats annoncés par Bhargava sur \mathbb{Q} . Elles inspirent néanmoins ses paramétrisations et lois de composition que nous présentons ensuite. Nous énonçons finalement les résultats de densité obtenus ainsi que les conjectures qu'ils corroborent.

Je voudrais remercier A. Chambert-Loir, H. Cohen, O. Gabber, H. Gangl, J. Klüners, B. Perrin-Riou et J.-P. Serre pour leurs suggestions.

1. DÉFINITIONS

1.1. Anneaux de nombres

On appelle *anneau de nombres de degré n* un anneau R (commutatif, associatif, unitaire) qui est un \mathbb{Z} -module libre de rang n . On dit que R est un *ordre* s'il est intègre, auquel cas son corps des fractions est un corps de nombres. Dans cet exposé, $2 \leq n \leq 5$; conformément à une respectable tradition, nous parlerons d'anneaux quadratiques, cubiques, quartiques et quintiques pour $n = 2, 3, 4, 5$ respectivement. La trace $\text{Tr} : R \rightarrow \mathbb{Z}$ assigne à $\alpha \in R$ la trace de la multiplication par α . Elle permet de définir le *discriminant* $\text{Disc}(R)$ comme $\det(\text{Tr}(\alpha_i \alpha_j))$, où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une \mathbb{Z} -base arbitraire de R . C'est un entier relatif congru à 0 ou 1 modulo 4.

Un anneau de nombres est dit maximal s'il n'est pas strictement inclus dans un anneau de même degré. En particulier un ordre maximal est l'anneau des entiers de son corps des fractions, *i.e.* il est intégralement clos. La maximalité est une propriété locale qui se voit sur les $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$.

1.2. Anneaux quadratiques

Soit $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ un entier relatif. À isomorphisme près, il existe un unique anneau quadratique de discriminant D , à savoir $S(D) := \mathbb{Z}[X]/(X^2 - DX + (D^2 - D)/4)$. Une *orientation* sur $S = S(D)$ est un choix d'isomorphisme $\pi : S/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, ce qui revient à choisir une racine carrée de D , ou encore une \mathbb{Z} -base $\alpha \wedge \beta$ de $\Lambda^2 S \simeq \mathbb{Z}$. Une base $\langle x, y \rangle$ d'un sous-module de rang 2 de l'algèbre $K = S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est *orientée positivement* si et seulement si $x \wedge y = c \cdot \alpha \wedge \beta$, avec $c > 0$.

Un anneau quadratique orienté n'ayant pas d'automorphismes non triviaux, deux tels anneaux de même discriminant sont canoniquement isomorphes. Ainsi, l'ensemble des entiers $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ paramètre les classes d'isomorphismes d'anneaux quadratiques orientés. Un *idéal orienté* de S est un couple (I, ε) , où $I \subset K$ est un idéal fractionnaire de S et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. (Alternativement, on peut définir (I, ε) par une \mathbb{Z} -base de I d'orientation donnée par le signe de ε .) La norme d'un idéal orienté (I, ε) est $\varepsilon |L/S| / |L/I| \in \mathbb{Z}$, où L est un sous- \mathbb{Z} -module de rang 2 de K arbitraire contenant S et I .

Les idéaux orientés forment un monoïde pour la multiplication composante par composante et tout $\kappa \in K^*$ définit un idéal orienté principal $((\kappa), \text{sgn}(N_{K/\mathbb{Q}}\kappa))$. Les idéaux orientés inversibles forment un groupe, dont les idéaux principaux inversibles forment un sous-groupe. Le quotient, noté $\text{Cl}(D)^+$, est le *groupe des classes orientées*, de discriminant D . Si $D > 0$, c'est le groupe des classes au sens restreint. Si $D < 0$, $\text{Cl}^+(D) = \{\pm 1\} \times \text{Cl}(D)$, où $\text{Cl}(D)$ est le groupe des classes usuel.

1.3. Formes

Une forme k -ique n -aire est un polynôme homogène de degré k en n variables ou, par abus de langage, le polynôme nul. Par exemple, une forme quadratique binaire est un polynôme $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, pour certains coefficients a, b, c , éventuellement tous nuls. On notera (a_0, a_1, \dots, a_n) la forme binaire $\sum_i a_i x^{n-i} y^i$ de degré n , quand le contexte ne portera pas à confusion. On note $\text{Sym}^k \mathbb{Z}^n$ l'ensemble des formes $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaisant $f(x) = F(x, \dots, x)$ pour une forme polaire F k -linéaire symétrique de $(\mathbb{Z}^n)^k \rightarrow \mathbb{Z}$, et $(\text{Sym}^k \mathbb{Z}^n)^*$ l'ensemble des formes k -iques n -aires. Par exemple $(\text{Sym}^2 \mathbb{Z}^2)^*$ est l'ensemble des f comme ci-dessus, avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. On a $f \in \text{Sym}^2 \mathbb{Z}^2$ si et seulement si b est pair ; plus généralement, les monômes de $\text{Sym}^n \mathbb{Z}^k$ sont pondérés de coefficients multinomiaux. Finalement, soit $\Lambda^k \mathbb{Z}^n$ l'espace des fonctions multilinéaires $(\mathbb{Z}^n)^k \rightarrow \mathbb{Z}$ alternées.

2. DOMAINES FONDAMENTAUX : UN EXEMPLE CLASSIQUE

2.1. Paramétrisation

Le prototype des résultats que l'on veut obtenir remonte à Gauss, au langage près.

THÉORÈME 2.1. — *Il existe une bijection canonique entre les deux ensembles suivants :*

- les classes d'isomorphismes de paires (S, I) , où S est un anneau quadratique orienté de discriminant non nul, et I une classe d'idéaux orientés de S ,
- les classes de formes quadratiques binaires entières, modulo l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Cette bijection préserve le discriminant et associe une classe de formes quadratiques primitives à une classe de S -idéaux inversibles. Muni de la composition des formes quadratiques, l'ensemble des classes de formes primitives de discriminant $D \neq 0$ est un groupe, isomorphe au groupe des classes orientées $\text{Cl}^+(D)$.

Dans ce théorème, les formes quadratiques entières sont les $(a, b, c) \in (\text{Sym}^2 \mathbb{Z}^2)^* =: V_{\mathbb{Z}}$, une forme est primitive si le pgcd de ses coefficients est 1, et l'action (à droite) de SL_2 est donnée par le changement de variable $(g \cdot F)(x, y) = F((x, y)g)$. Le discriminant $\text{Disc}(F) = b^2 - 4ac$ est un invariant de cette action, et il engendre l'algèbre des invariants sur \mathbb{C} . Par abus de langage, on dira que l'action a un unique invariant.

2.2. Domaine fondamental

Les orbites sous $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ont donc une signification arithmétique et les représentants des classes sont les points entiers $V_{\mathbb{Z}}$ de l'espace affine $V = \mathbb{A}^3$, et non pas un ensemble « mince », comme une sous-variété de codimension ≥ 1 par exemple. Cette représentation s'utilise algorithmiquement pour calculer ou manipuler concrètement le groupe des classes d'idéaux de corps quadratiques, dans les méthodes développées par Shanks [48] après Gauss (voir [8, 10] pour les détails algorithmiques), mais elle permet aussi de démontrer des résultats de densité, par exemple

THÉORÈME 2.2 (Lipschitz [36], conjecturé par Gauss). — *Quand $X \rightarrow +\infty$, on a*

$$\sum_{0 < -D < X} |V_{\mathbb{Z}}/\Gamma| \sim \frac{\pi}{9} X^{3/2}.$$

(On peut être plus précis, voir [9].) Le principe est simple : on identifie les orbites de discriminant inférieur à X aux points à coordonnées entières du domaine fondamental de Gauss, dont l'adhérence est $C_X \cup (-C_X)$ où

$$C_X = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : |b| \leq a \leq c, 4ac - b^2 \leq X\},$$

et qui s'obtient en imposant qu'une racine de $ax^2 + bx + c = 0$ soit dans le domaine fondamental standard de l'action de Γ sur le demi-plan supérieur. Leur nombre est approché par le volume de C_X .

THÉORÈME 2.3 (« principe de Lipschitz », Davenport [20]). — *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble semi-algébrique compact, de volume $\text{Vol}(C)$, et soit $N(C) = |C \cap \mathbb{Z}^n|$. On note $R(C)$ le maximum des volumes des projections de C sur les variétés linéaires d'équations $\{x_i = 0, i \in I\}$, où I parcourt les sous-ensembles non-vides de $\{1, \dots, n\}$. Alors*

$$N(C) = \text{Vol}(C) + O(1 + R(C)).$$

La constante implicite est effective et ne dépend que de la dimension n , du nombre et du degré des équations définissant C .

Nous avons négligé deux points techniques : d'abord les stabilisateurs

$$\Gamma_x := \{\gamma \in \Gamma, \gamma x = x\}$$

ont pour cardinaux 1, 2, 4, ou 6. Comme dans toute formule de masse, il serait plus habile de compter une classe x avec poids $1/|\Gamma_x|$ plutôt que d'exclure arbitrairement certains points du bord du domaine fondamental. Ici ces derniers sont peu nombreux et absorbés dans le terme d'erreur. Ensuite, nous n'avons pas à séparer le bon grain de l'ivraie : il n'y a pas de points de discriminant nul dans l'intérieur de C_X et, dans le cas de discriminants négatifs, il n'y a pas non plus lieu d'isoler les anneaux isomorphes à \mathbb{Z}^2 , dont le discriminant est un carré parfait.

2.3. Densités locales et crible

Si on se restreint aux classes primitives, la formule d'inversion de Moebius donne :

COROLLAIRE 2.4. — *Quand $X \rightarrow +\infty$, on a*

$$\sum_{0 < -D < X} |\text{Cl}^+(D)| \sim \frac{\pi}{9\zeta(3)} X^{3/2}, \quad \text{soit} \quad \sum_{0 < -D < X} |\text{Cl}(D)| \sim \frac{\pi}{18\zeta(3)} X^{3/2}.$$

La condition imposée est de nature locale (une condition p -adique pour chaque premier p), se traduisant par l'apparition du facteur eulérien $\prod(1 - p^{-3}) = 1/\zeta(3)$, et admet un grand nombre de variantes naturelles. On peut par exemple se limiter aux D qui sont discriminants d'un corps quadratique, ou *discriminants fondamentaux*, ce qui permet d'obtenir une somme sur les corps quadratiques, en fait une somme sur leurs ordres maximaux. Ceci se traduit par l'élimination des points (a, b, c) satisfaisant l'une des congruences

$$(*_p) \quad \begin{cases} \text{Disc}(a, b, c) \equiv 0 \pmod{p^2} & \text{pour } p \text{ premier impair,} \\ \text{Disc}(a, b, c) \equiv 0, 4 \pmod{2^4} & \text{pour } p = 2. \end{cases}$$

(Cette condition ne dépend que de (a, b, c) modulo p^2 , y compris quand $p = 2$.) La formule de Moebius prend alors la forme du crible d'inclusion-exclusion et on retrouve un cas particulier d'un résultat de Goldfeld-Hoffstein [26], qu'ils obtenaient en utilisant des séries d'Eisenstein de poids demi-entier.

THÉORÈME 2.5. — *Si k parcourt les corps quadratiques, on a*

$$\sum_{0 < -\text{Disc } k < X} |\text{Cl}(\text{Disc } k)| \sim \prod_p (1 - p^{-2} - p^{-3} + p^{-4}) \cdot \frac{\pi}{18} X^{3/2}.$$

Démonstration. — Indiquons les deux ingrédients nécessaires pour résoudre l'exercice : pour un entier sans facteur carré q , soit $N_q(C_X)$ le nombre des points de C_X vérifiant $(*_p)$ pour tout $p \mid q$. Alors

$$(3) \quad N_q(C_X) = \nu(q)N(C_X) + R_q(C_X)$$

pour un reste R_q effectif venant du principe de Lipschitz et une fonction (de densité) multiplicative

$$\begin{aligned} \nu(q) &= \frac{1}{(q^2)^3} \# \{ (a, b, c) \in (\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z})^3 \text{ satisfait } (*_p) \text{ pour tout } p \mid q \} \\ &= \prod_{p \mid q} (p^{-2} + p^{-3} - p^{-4}) = O\left(q^{-2} \prod_{p \mid q} (1 + 1/p)\right) \end{aligned}$$

obtenue par un dénombrement élémentaire (voir par exemple [1, § 4]). Si q est grand, le reste $R_q(X)$ domine le terme principal et on remplace (3) par une majoration uniforme

$$(4) \quad N_q(C_X) = O\left(N(C_X)q^{-2} \prod_{p \mid q} (1 + 1/p)\right),$$

obtenue en majorant

$$|\text{Cl}(q^2 D)| / |\text{Cl}(D)| = O\left(q \prod_{p \mid q} (1 + 1/p)\right),$$

voir par exemple [16, § 7.D], avec une complication technique pour gérer les formes non primitives. Pour tout paramètre $Q > 0$, la somme restreinte aux D fondamentaux vaut

$$\begin{aligned} \sum_{q \geq 1} \mu(q) N_q(C_X) &= \sum_{q < Q} \mu(q) (\nu(q) N(C_X) + R_q) + \sum_{q \geq Q} O(N_q(C_X)) \\ &= N(C_X) \prod_p (1 - \nu(p)) + O\left(\sum_{q < Q} R_q(C) + \sum_{q \geq Q} \nu(q) N(C_X) + N_q(C_X)\right), \end{aligned}$$

où μ est la fonction de Moebius. Il ne reste plus qu'à optimiser Q en fonction de X pour minimiser les termes d'erreur. Les conditions locales $(*_p)$ ne raréfient pas trop l'ensemble des points, ce qui se traduit par la convergence de $\sum_q N_q(C_X)$, $\sum_q \nu(q)$ et $\prod_p (1 - \nu(p))$. \square

Remarque 2.6. — Par cette méthode du « domaine fondamental », on obtient naturellement des termes d'erreur, que nous avons omis ci-dessus. Sous la forme générale du principe de Lipschitz, ils sont en effet loin d'être optimaux. Pour s'en convaincre, considérons le problème des points entiers du disque : on obtient comme Gauss

$$\# \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a^2 + b^2 \leq X \} = \pi X^2 + O(X).$$

L'argument revient à considérer la formule de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n),$$

avec $f(n) = \sqrt{X^2 - n^2} \times \mathbf{1}_{|n| \leq X}$, pour ne retenir du membre de droite que le terme $\widehat{f}(0)$. Il est naturel qu'un lissage convenable et une analyse harmonique plus fine faisant

intervenir des majorations de sommes d'exponentielles permettent des progrès (reste en $O(X^{131/208})$ actuellement pour le problème du cercle, voir le survol de Huxley [28]).

Remarque 2.7. — Cet exemple est pédagogique. Tous ces résultats s'obtiennent en quelques lignes avec de meilleurs termes d'erreur par un argument de Siegel [51] fondé sur la formule du nombre de classes de Dirichlet.

$$(5) \quad L(1, \chi_D) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_D(n)}{n} = \frac{|\text{Cl}(D)|}{w(D)\sqrt{|D|}} \times \begin{cases} 2\pi & \text{si } D < 0 \\ 4 \log \varepsilon(D) & \text{si } D > 0 \text{ non carré,} \end{cases}$$

où χ_D est le caractère de Kronecker modulo $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$, où $\varepsilon(D) > 1$ est l'unité fondamentale de l'ordre quadratique de discriminant D et $w(D)$ le nombre de racines de l'unité, soit $w(D) = 2$ pour $D \neq -4, -6$. En sommant les $L(1, \chi_D)$ au lieu des $|\text{Cl}(D)|$, on introduit essentiellement un poids $|D|^{-1/2}$, que l'on supprime par intégration par partie. Il suffit d'invertir les sommations et de majorer non trivialement $\sum_{D < X} \chi_D(n)$ pour n non carré, par réciprocity quadratique et Pólya-Vinogradov par exemple. Comme au Corollaire 2.4, mais à l'envers, la formule de Moebius donne les formes non primitives.

Avantage supplémentaire, on obtient des estimations analogues pour les discriminants D positifs, non carrés parfaits. Suite à la modification de (5), on remplace $|\text{Cl}(D)|$ par $|\text{Cl}(D)| \log \varepsilon(D)$ dans la somme, et l'équivalent est multiplié par $\pi/2$ (on élimine les carrés dans le terme d'erreur). Siegel [51] en donne une interprétation en termes de domaine fondamental mais, suite à la présence d'un nombre infini d'unités, les stabilisateurs ne sont plus finis : il faut introduire une densité analogue aux $\mu(x)$ du §3.2, formule (9).

3. ESPACES VECTORIELS PRÉHOMOGÈNES

3.1. Motivation

Le Théorème 2.2 estime une formule de masse asymptotique de type

$$(6) \quad \sum_{\substack{x \in L/\Gamma \\ 0 < |P(x)| < X}} \mu(x)$$

où L est un réseau sur lequel agit un groupe linéaire discret Γ , dont les stabilisateurs Γ_x sont supposés finis, $\mu(x) = |\Gamma_x|^{-1}$, et P est un polynôme Γ -invariant. Nous avons évoqué la « méthode du domaine fondamental ». Une autre méthode classique étudie les propriétés analytiques (prolongement analytique, pôles et résidus, croissance dans les bandes verticales) de la série de Dirichlet associée

$$(7) \quad \sum_{x \in L'/\Gamma} \mu(x) |P(x)|^{-s}, \quad \text{où } L' = \{x \in L : P(x) \neq 0\}.$$

Les espaces vectoriels préhomogènes introduits par Sato [45, 44] systématisent cette étude.

DÉFINITION 3.1. — *Soit k un corps. Un espace vectoriel préhomogène sur k est une représentation (G, V) d'un groupe linéaire algébrique connexe G défini sur k sur un espace affine de dimension finie $V = \mathbb{A}_k^n$, possédant une G -orbite Zariski-dense.*

On notera S le fermé complémentaire de cette orbite dense. Un espace préhomogène est donc un espace « presque homogène », clôture de l'espace homogène Gx pour $x \notin S$.

DÉFINITION 3.2. — *On dit que (G, V) préhomogène est réductif régulier si G est réductif et S est une hypersurface irréductible de V . Un polynôme irréductible définissant S sera appelé invariant relatif de (G, V) .*

PROPOSITION 3.3 (Sato). — *Si (G, V) est préhomogène réductif régulier, un invariant relatif P est un polynôme homogène, unique modulo k^* . Il existe un caractère rationnel χ de G tel que $P(g \cdot x) = \chi(g)P(x)$ pour tout $g \in G$ et*

$$(8) \quad (\det \rho(g))^2 = \chi(g)^{2\kappa}, \quad \text{où } \kappa := \frac{\dim V}{\deg P} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

et $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ est la représentation de G sur V .

On verra au paragraphe suivant le lien entre ces définitions et la série (en fait, les séries) de Dirichlet associée à (6). Pour les applications, il est crucial que (G, V) soit défini sur \mathbb{R} , et utile qu'il soit régulier (sinon les fonctions obtenues ont une variable par composante irréductible de S , ce qui complique les choses).

On dispose d'une construction abstraite assez générale d'espaces préhomogènes : si G est un groupe réductif, $P = LU$ un sous-groupe parabolique maximal, la composante de Levi L agit par conjugaison sur le radical unipotent U , donc sur l'abélianisé $V = U/[U, U]$. Vinberg [52] démontre que (L, V) est préhomogène.

DÉFINITION 3.4. — *Un tel espace préhomogène est dit de type parabolique.*

Sur \mathbb{C} , les espaces préhomogènes irréductibles, modulo une relation d'équivalence naturelle (*roques* ou *castling transforms*), sont classifiés par Kimura et Sato [45] : il y a 29 types réguliers, dont 5 séries infinies : matrices $m \times n$, formes quadratiques en n variables, etc. Les formes réelles de ces espaces qui sont paraboliques sont classifiées par Rubenthaler [41] : presque tous les types de Kimura-Sato sont paraboliques, il y a 6 exceptions ne comportant aucune série infinie. Il existe aussi une classification sur un corps local ou un corps de nombres, due à Saito [42].

Inspiré par Wright et Yukié [56] (qui s'intéressent aux orbites rationnelles, cf. § 3.3), Bhargava [3, 4, 5, 6, 7] a recherché systématiquement comment paramétrer des situations liées aux anneaux de nombres par les orbites *entières* d'espaces préhomogènes. Il se trouve que tous les exemples obtenus sont de type parabolique (réductif) régulier, associés aux groupes de Lie simples $G = B_2, G_2, B_3, D_4, D_5, E_6$ (corps quadratiques),

G_2, F_4, E_6, E_7 (cubiques), F_4 (quartiques), E_8 (quintiques), pour un parabolique LU convenable. Guidé par la classification de Kimura-Sato et des considérations heuristiques sur les diagrammes de Dynkin et leurs symétries, Bhargava construit pour beaucoup d'entre eux des lois de composition que nous décrirons aux §§4 et 5. Les structures de groupe obtenues ont peu d'intérêt intrinsèque puisqu'on les obtient aussi via les groupes des classes des anneaux sous-jacents, du moins pour l'instant. Mais elles en donnent des descriptions explicites, et sont justiciables du même type de traitement qu'au §2.

3.2. La théorie de Sato-Shintani

Soit (G, V) réductif régulier associé à P, χ comme ci-dessus. On note H le noyau de χ . Soit $G_{\mathbb{R}}^+$ la composante connexe du neutre dans le groupe de Lie $G_{\mathbb{R}}$, $H_{\mathbb{R}}^+ = H_{\mathbb{R}} \cap G_{\mathbb{R}}^+$. On fixe des mesures de Haar dg sur $G_{\mathbb{R}}^+$, d^1h sur $H_{\mathbb{R}}^+$, $d\nu_x$ sur $(H_{\mathbb{R}}^+)_x$ pour $x \in (V - S)$ avec

$$\begin{aligned} \int_{G_{\mathbb{R}}^+} \phi(g) dg &= \int_{G_{\mathbb{R}}^+/H_{\mathbb{R}}^+} \frac{d\chi(g)}{|\chi(g)|} \int_{H_{\mathbb{R}}^+} \phi(gh) d^1h \\ &= \int_{G_{\mathbb{R}}^+/(H_{\mathbb{R}}^+)_x} |P(g \cdot x)|^{-\kappa} d(g \cdot x) \int_{(H_{\mathbb{R}}^+)_x} \phi(gh) d\nu_x(h), \quad \forall \phi \in L^1(G_{\mathbb{R}}^+). \end{aligned}$$

(D'après (8), $|P(y)|^{-\kappa} dy$ est une mesure $G_{\mathbb{R}}^+$ -invariante sur $V - S$.) Soit $\Gamma = G_{\mathbb{Z}} \cap H_{\mathbb{R}}^+$. On fixe un réseau Γ -stable L , et on pose $L' = L - (L \cap S)$. On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

(H1) (G, V) est *réductif régulier* défini sur \mathbb{Q} , tel que $G_{\mathbb{Z}} \cdot V_{\mathbb{Z}} \subset V_{\mathbb{Z}}$,

(H2) $S \cap V_{\mathbb{R}}$ se décompose en un nombre fini de $H_{\mathbb{R}}^+$ -orbites,

(H3) une hypothèse technique destinée à justifier la convergence des identités formelles, en particulier (11) : pour toute fonction ϕ dans la classe de Schwartz sur $V_{\mathbb{R}}$, l'intégrale

$$I(\phi) = \int_{H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}} \sum_{x \in L} \phi(h \cdot x) d^1h$$

converge absolument et définit une distribution tempérée sur $V_{\mathbb{R}}$.

La dernière hypothèse est restrictive, elle ne couvre pas le cas des formes quadratiques $\text{Sym}^2 \mathbb{A}^n$ si $n \leq 4$ ou des formes cubiques $\text{Sym}^3 \mathbb{A}^2$ par exemple. Shintani [49, 50] règle le problème pour ces deux exemples en renormalisant les fonctions zêta.

Soient V_1, \dots, V_l les composantes connexes de $(V - S)_{\mathbb{R}}$, qui sont des $G_{\mathbb{R}}^+$ -orbites. Pour tout $x \in (V - S)_{\mathbb{Q}}$, on définit la fonction Γ -invariante

$$(9) \quad \mu(x) = \int_{(H_{\mathbb{R}}^+)_x/\Gamma_x} d\nu_x < \infty.$$

L'hypothèse (H3) implique la finitude de $\mu(x)$, en fait une majoration polynomiale en X de la somme des $\mu(x)$ sur $\{x \in L'/\Gamma, |P(x)| < X\}$. On définit les séries de Dirichlet

$$(10) \quad \xi_i(s, L) = \sum_{x \in (L \cap V_i)/\Gamma} \mu(x) |P(x)|^{-s}, \text{ associées à } \sum_{\substack{x \in (L \cap V_i)/\Gamma \\ 0 < |P(x)| < X}} \mu(x) \quad (1 \leq i \leq l),$$

qui convergent donc pour $\Re(s) \gg 1$. (Ceci est démontré par Saito [43] sous des hypothèses bien moins restrictives que (H3).) Si Γ_x est fini pour tout $x \in V_i$, on obtient $\mu(x) = c_i |\Gamma_x|^{-1}$ pour une constante c_i indépendante de $x \in V_i$. Il s'agit donc bien d'un raffinement de (7), qu'on retrouve par sommation sur les composantes connexes.

On obtient des notions analogues pour la représentation contragrédiente sur le dual (G, V^*) qui est aussi préhomogène : S^* , P^* de même degré que P , $\chi^* = \chi^{-1}$, $V_1^* \cup \dots \cup V_l^*$ (pour le même l), $d\nu^*(x)$, $\xi_i^*(s, L^*)$, etc. Sous nos hypothèses, en considérant

$$(11) \quad Z(\phi, s) := \int_{G_{\mathbb{R}}^+/\Gamma} |\chi(g)|^s \sum_{x \in L'} \phi(g \cdot x) dg = \sum_{i=1}^l \xi_i(s) \int_{V_i} \phi(y) |P(y)|^{s-\kappa} dy$$

et la distribution duale Z^* , Sato et Shintani [46] démontrent que les séries $\xi_i(s, L)$, $\xi_i^*(s, L^*)$ admettent un prolongement analytique méromorphe sur \mathbb{C} et satisfont une équation fonctionnelle matricielle $l \times l$ reliant

$$(\xi_i(s, L) : 1 \leq i \leq l) \quad \text{et} \quad (\xi_i^*(\kappa - s, L^*) : 1 \leq i \leq l).$$

Le prolongement vient d'une intégration par parties qui fait intervenir des polynômes de Bernstein-Sato ou « fonctions b », définis par

$$P^*(\nabla_x)P(x)^s = b(s)P(x)^{s-1},$$

où $P^*(\nabla_x)$ est l'opérateur différentiel à coefficients constants sur $V_{\mathbb{R}}$ satisfaisant

$$P^*(\nabla_x) \exp(\langle x, y \rangle) = P^*(y) \exp(\langle x, y \rangle), \quad \forall y \in V_{\mathbb{R}}^*.$$

On a $\deg b = \deg P$ et, sous nos hypothèses, les zéros de $b(s - \kappa)$ sont les pôles (simples) des ξ_i et ξ_i^* . Les fonctions b sont connues explicitement pour les 29 types réguliers de Kimura-Sato, ainsi que leur comportement par roque (*cf.* Kimura [32]) et leurs zéros sont rationnels (voir aussi Kashiwara [31]). Dans les autres cas où les ξ_i , ξ_i^* sont connus, la multiplicité d'un zéro de $b(s - \kappa)$ borne celle du pôle, mais il arrive qu'on n'ait pas égalité. L'équation fonctionnelle suit de la formule sommatoire de Poisson appliquée à la série théta intervenant dans $Z(\phi, s)$, en isolant la partie polaire ($x \in L - L'$, $x^* \in L^* - L'^*$). Par transformée de Mellin et déplacement de contour, on en tire un développement asymptotique des sommes partielles (10) quand $X \rightarrow +\infty$.

Exemple 3.5. — Pour $(G, V) = (\mathrm{GL}_1, \mathbb{A}^1)$, le plus simple des espaces préhomogènes, on trouve $P(x) = x$, $\kappa = 1$, $b(s) = s$, $(V - S)_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2 = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$ et $G_x = \{1\}$ pour $x \in (V - S)_{\mathbb{R}}$, soit $\mu(x) = 1$ avec la normalisation naturelle. Ainsi $\xi_i(s) = \xi_i^*(s) = \zeta(s)$

pour $i = 1, 2$ et on retrouve les résultats de Riemann, essentiellement par la même méthode.

3.3. Adélisation et G_k -orbites

Si \mathbb{A} désigne les adèles du corps global k , on remplace le sous-groupe discret $G_{\mathbb{Z}} \subset G_{\mathbb{R}}$ par $G_k \subset G_{\mathbb{A}}$. Pour $\phi = \otimes_v \phi_v$ une fonction de Schwartz-Bruhat sur $V_{\mathbb{A}}$, on pose

$$(12) \quad Z(\phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}/G_k} |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^s \sum_{x \in L'} \phi(g \cdot x) dg,$$

et le formalisme est proche de celui du paragraphe précédent, en distinguant une place infinie de k . Les séries de Dirichlet associées se décomposent en somme sur les orbites L'/G_k de termes faisant apparaître des produits eulériens sur v de fonctions zêta locales

$$(13) \quad \int_{G_{k_v} \cdot x} \phi_v(y) |P(y)|_v^{s-\kappa} dy,$$

pondérés par $\mu(x)/o(x)$, où $o(x) = [(H_x)_k : (H_x^0)_k]$ et $\mu(x)$ est le volume de $(H_x^0)_{\mathbb{A}}/(H_x^0)_k$ pour une mesure convenable (voir [57]). Pour v infinie, les b -fonctions permettent comme précédemment le prolongement méromorphe de (13). Si v est finie et ϕ_v est la fonction caractéristique du disque unité \mathcal{O}_{k_v} , on obtient une fonction locale d'Igusa, d'expression élémentaire connue pour presque tous les types de Kimura-Sato (voir [29]). Hors d'un ensemble fini de places T , ϕ_v est de cette forme, et la fonction zêta pour T fixée est contrôlée. Par contre, pour énumérer les G_k -orbites, il faut un passage à la limite sur T , axiomatisé par Wright (cf [57, §0.5]), d'esprit analogue à celui du §2.3, mais bien plus contraignant. Ceci étant dit, que représentent les G_k -orbites ?

Exemple 3.6. — Reconsidérons les formes quadratiques binaires du §2; la $\mathrm{SL}_2(k)$ -orbite d'une forme quadratique irréductible x de $\mathrm{Sym}^2 k^2$ définit un *corps* quadratique K_x/k : l'orbite des racines de x . Les formes réductibles forment deux orbites, suivant qu'elles ont ou non une racine multiple. En étudiant la fonction zêta adélique associée, Datskovsky [19] obtient une version relative du Théorème 2.5 sur un corps de nombres k : dans ce cas, $\mu(x)$ est essentiellement $|\mathrm{Disc} K_x|^{1/2} \mathrm{Res}(\zeta_{K_x}, s=1)$.

Exemple 3.7. — Shintani [50, 49], dans les premières études sur les séries de Dirichlet provenant de la théorie du §3.2, obtient d'excellents termes d'erreur pour le nombre de classes de formes quadratiques ou cubiques binaires avec les méthodes du §3.2. À nouveau, l'ensemble naturel des orbites de formes cubiques est stratifié suivant le type de décomposition de l'équation associée. En traitant les formes quadratiques et cubiques générales, Shintani peut isoler les $G_{\mathbb{Z}}$ -orbites de formes cubiques irréductibles. Nous verrons au §5.1 que ce dernier exemple paramètre les anneaux cubiques. Datskovsky et Wright [54, 17, 18] adélisent le travail de Shintani sur un corps global k

de caractéristique différente de 2 ou 3. Comptant les G_k -orbites de formes cubiques irréductibles, ils obtiennent la densité des discriminants des corps cubiques sur k .

Remarque 3.8. — Dans ces deux cas, la fonction zêta pour T fixé admet un autre pôle réel à gauche de 1, mais le passage à la limite sur T empêche de tenir compte de ce pôle secondaire, et même d'obtenir un terme d'erreur. On conjecture que le passage à la limite formel donne le développement asymptotique correct (voir Roberts [40] pour le cas cubique).

Plus généralement, soit $n \geq 1$ et k un corps infini de caractéristique nulle ou strictement supérieure à n . On note $E(k, n)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions galoisiennes de k qui sont corps de décomposition d'un polynôme séparable de degré inférieur à n . Wright et Yukie [56] (voir aussi [30]) construisent pour six nouveaux types d'espaces préhomogènes paraboliques (G, V) une bijection naturelle entre G_k -orbites de $(V - S)_k$ et classes de conjugaison d'homomorphismes de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ dans le groupe symétrique à n éléments où $n = 2, 3, 4, 5$ suivant les cas. Ceci définit une application

$$\alpha_V : (V - S)_k / G_k \longrightarrow E(k, n),$$

où une orbite a pour image le noyau d'un des homomorphismes associés. En inspectant les classes de conjugaison de S_n , on voit que α_V est bijective pour les six exemples associés à $n = 2, 3$. Dans les deux cas restants, $n = 4, 5$ et les fibres sont réduites à un point, sauf dans des cas dégénérés (2 ou 4 points) correspondant à des extensions de petit degré, inférieur à 12. Quand k est un corps global, en supposant résolus les problèmes de convergence et la détermination des pôles et résidus, on espère pouvoir compter les extensions x de k de degré n munies du poids $\mu(x)/o(x)$, mais ce programme n'est pas achevé. La partie globale du cas quartique est traitée par Yukie [57].

3.4. Comparaison

Pour conclure cette présentation des méthodes en présence⁽⁴⁾, les calculs de densités de discriminants d'extensions de type Wright-Yukie reposent sur l'existence d'une représentation (G, V) préhomogène, telle que V_k/G_k paramètre les extensions du corps k . Ces constructions sont actuellement restreintes aux extensions de degré $n \leq 5$.

Bhargava démontre que dans ces mêmes cas, $V_{\mathbb{Z}}/G_{\mathbb{Z}}$ paramètre essentiellement des anneaux de nombres de degré n sur \mathbb{Z} (et non des corps). En principe, les méthodes élémentaires du §2 permettent de les énumérer, puis de les cribler pour ne retenir que les ordres maximaux, ce qui revient à compter leurs corps de fractions, *i.e.* les

⁽⁴⁾Pour être complet, il eût fallu inclure les séries génératrices issues de la théorie du corps de classes ou directement de la théorie de Kummer, pour les extensions abéliennes d'une base raisonnable. Elles sont disjointes des travaux de Bhargava que nous présentons et nous renvoyons au survol de Cohen [11].

$G_{\mathbb{Q}}$ -orbites de $V_{\mathbb{Q}}$. Ces méthodes fournissent des termes d'erreur qui survivent aux cribles, mais restent loin des valeurs conjecturées à la lecture des pôles des séries de Sato-Shintani.

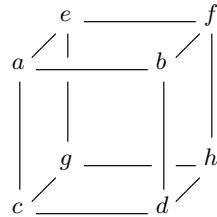
À l'inverse, ces dernières fournissent les termes d'erreur attendus sur les problèmes de comptage de $G_{\mathbb{Z}}$ -orbites et leur adélisation permet le passage aux G_k -orbites sur V_k , et donc aux extensions du corps global k par la théorie de Wright-Yukie, pour $n = 2, 3$. Par contre, elle ne fournit pour l'instant qu'un équivalent pour ces décomptes d'extensions de k , y compris quand $k = \mathbb{Q}$, et se heurte à de redoutables problèmes de convergence d'identités formelles (voir [57, Part IV]).

Ce sont les problèmes de comptage associés aux deux cas $n = 4, 5$ ci-dessus que Bhargava vient, semble-t-il, de résoudre sur \mathbb{Q} , en étudiant directement les domaines fondamentaux associés aux $G_{\mathbb{Z}}$ -orbites des espaces préhomogènes de Wright et Yukie. Nous décrirons une partie de ces travaux à partir du § 5.3, mais nous commençons par sa ré-interprétation des cas $n = 2, 3$.

4. PARAMÉTRISATIONS ET COMPOSITIONS QUADRATIQUES

4.1. Cubes

Soit $\mathcal{C}_2 = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$, dont on peut représenter les éléments par des octuplets $(a, b, c, d, e, f, g, h) \in \mathbb{Z}^8$ ou plus naturellement par un cube de sommets étiquetés par des entiers :



En notant (α, β) la base canonique de \mathbb{Z}^2 , ce cube remplace avantageusement l'élément

$$a(\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha) + b(\alpha \otimes \beta \otimes \alpha) + c(\beta \otimes \alpha \otimes \alpha) + d(\beta \otimes \beta \otimes \alpha) + e(\alpha \otimes \alpha \otimes \beta) + f(\alpha \otimes \beta \otimes \beta) + g(\beta \otimes \alpha \otimes \beta) + h(\beta \otimes \beta \otimes \beta).$$

On peut partitionner un tel cube $A \in \mathcal{C}_2$ en deux matrices 2×2 de trois façons différentes : $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, ou $M_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ e & g \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} b & d \\ f & h \end{pmatrix}$, ou encore $M_3 = \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} c & g \\ d & h \end{pmatrix}$. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ un élément générique de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. On définit une action de $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur \mathcal{C}_2 , en spécifiant que $(\gamma \times \text{Id} \times \text{Id})$ agit sur le cube A en remplaçant (M_1, N_1) par $(rM_1 + sN_1, tM_1 + uN_1)$, $(\text{Id} \times \gamma \times \text{Id})$ et $(\text{Id} \times \text{Id} \times \gamma)$ agissant de même sur (M_2, N_2) et (M_3, N_3) respectivement. Il s'agit bien d'une action (à gauche!), on vérifie que les actions des trois facteurs $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans Γ

commutent. C'est l'analogie de l'associativité de la multiplication matricielle : les opérations sur les lignes et colonnes d'une matrice rectangulaire commutent. Par exemple, la transformation de (M_1, N_1) indiquée se traduit par $(M_2, N_2) \rightarrow (\gamma M_2, \gamma N_2)$ et $(M_3, N_3) \rightarrow (M_3^t \gamma, N_3^t \gamma)$.

Alternativement, cette action est donnée par

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \cdot (x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = \gamma_3 x_1 \otimes \gamma_2 x_2 \otimes \gamma_1 x_3.$$

(Nous conservons les normalisations de Bhargava.)

Étant donné un cube $A \in \mathcal{C}_2$, on construit pour $1 \leq i \leq 3$ une forme quadratique binaire $Q_i = Q_i^A$ par la règle

$$Q_i(x, y) = -\det(xM_i - yN_i).$$

La forme Q_1 est invariante sous l'action de $\{\text{Id}\} \times \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \subset \Gamma$, puisque les deux autres facteurs agissent par multiplication à gauche ou à droite sur (M_1, N_1) . Le premier facteur agit de la façon habituelle $(\gamma \cdot Q_1)(x, y) = Q_1((x, y)\gamma)$, et cette action a un unique invariant, à savoir $\text{Disc } Q_1$. Il en est donc de même pour l'action de Γ sur \mathcal{C}_2 . Par symétrie, $\text{Disc } Q_2$ et $\text{Disc } Q_3$ sont aussi des invariants, et on vérifie que $\text{Disc } Q_1 = \text{Disc } Q_2 = \text{Disc } Q_3$. On baptise cette valeur commune $\text{Disc } A$. Explicitement,

$$\begin{aligned} Q_1 &= (bc - ad, -ah + bg + cf - de, fg - eh), \\ Q_2 &= (ce - ag, -ah - bg + cf + de, df - bh), \\ Q_3 &= (be - af, -ah + bg - cf + de, dg - ch), \\ \text{Disc } A &= a^2 h^2 + b^2 g^2 + c^2 f^2 + d^2 e^2 \\ &\quad - 2(abgh + acfh + adeh + bcfg + bdeg + cdef) + 4(adfg + bceh). \end{aligned}$$

Toute forme quadratique $(d, h, g) \in (\text{Sym}^2 \mathbb{Z}^2)^*$ provient d'un cube : prendre $a = -1$, $b = c = e = 0$, $f = 1$ par exemple.

4.2. Loi du cube et loi de Gauss

DÉFINITION 4.1. — *Un cube $A \in \mathcal{C}_2$ est dit projectif si les trois formes quadratiques associées (Q_1^A, Q_2^A, Q_3^A) sont primitives. On note $\text{Cl}(\mathcal{C}_2; D)$ l'ensemble des classes de cubes projectifs modulo Γ de discriminant D .*

Motivé par la loi de groupe sur une courbe elliptique, Bhargava considère le groupe libre engendré par les formes quadratiques *primitives* de discriminant D , modulo les relations

$$(14) \quad Q_1^A \oplus Q_2^A \oplus Q_3^A = 0,$$

où $A \in \mathcal{C}_2$. En particulier, deux formes $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -équivalentes sont identifiées puisque, si Q_1 est donnée, alors il existe un cube A comportant Q_1 parmi ses formes associées (Q_1, Q_2, Q_3) . En considérant $(\gamma \times \text{Id} \times \text{Id}) \cdot A$, on en déduit que

$$Q_1 \oplus Q_2 \oplus Q_3 = \gamma Q_1 \oplus Q_2 \oplus Q_3 = 0,$$

soit $Q_1 = \gamma Q_1$ dans le quotient de Bhargava, pour tout $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. De même, on voit facilement que $(a, b, c) \oplus (c, b, a) = 0$.

THÉORÈME 4.2. — *Soit $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ un entier. Fixons un cube projectif A_0 de discriminant D , dont les formes quadratiques associées sont égales ; soit Q^0 cette forme primitive. Il existe une unique loi de groupe additif sur l'ensemble des classes de formes quadratiques binaires $[Q]$ primitives modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, de discriminant D , telle que $[Q^0] = 0$, et $[Q_1^A] + [Q_2^A] + [Q_3^A] = 0$ pour tout cube projectif $A \in \mathcal{C}_2$. Réciproquement, pour tout triplet de classes de formes primitives de somme nulle dans ce groupe, il existe un cube projectif $A \in \mathcal{C}_2$, unique à Γ -équivalence près, dont ce sont les formes associées.*

On démontrera ce résultat en même temps que le Théorème 4.6. Les cubes A_0 satisfaisant la condition du théorème avec $Q^0 \neq (0, 0, 0)$ présentent une triple symétrie :

$$(15) \quad \begin{array}{ccccc} & & b & \text{---} & g \\ & \swarrow & | & & \swarrow \\ a & & \text{---} & b & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & & g & \text{---} & h \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ & & b & \text{---} & g \end{array}$$

Le choix le plus naturel est $Q^0 = (1, \varepsilon, (\varepsilon - D)/4)$ pour $D \equiv \varepsilon \pmod{4}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, associée au cube A_0 de discriminant D donné par

$$(16) \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & \text{---} & \varepsilon \\ & \swarrow & | & & \swarrow \\ 0 & & \text{---} & 1 & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & & \varepsilon & \text{---} & (D + 3\varepsilon)/4 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ & & 1 & \text{---} & \varepsilon \end{array}$$

THÉORÈME 4.3. — *Pour le choix de A_0 donné par (16), la loi de groupe du Théorème 4.2 est la composition de Gauss du Théorème 2.1.*

Démonstration. — $[Q^0]$ est bien la classe principale de Gauss. Si A est un cube projectif, le pgcd de ses coefficients est 1. À Γ -équivalence près, on peut donc supposer qu'un sommet est 1. Toujours à Γ -équivalence près, on utilise ce 1 pour annuler les trois sommets adjacents (pivot de Gauss tridimensionnel!). On suppose donc que A

est de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 & 0 & \xrightarrow{\quad} f \\
 1 & \swarrow \downarrow & \searrow \downarrow 0 \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & g & \xrightarrow{\quad} -h \\
 0 & \swarrow \downarrow & \searrow \downarrow d
 \end{array}$$

soit

$$Q_1 = (-d, h, fg), \quad Q_2 = (-g, h, df), \quad Q_3 = (-f, h, dg).$$

De $[Q_1] + [Q_2] = -[Q_3] = (dg, h, -f)$, on tire la composition de Dirichlet (2). \square

COROLLAIRE 4.4. — Soit $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ un entier, et soit A_0 le cube (16). Il existe une unique loi de groupe sur $\text{Cl}(\mathcal{C}_2; D)$, de neutre $\Gamma \cdot A_0$, telle que les projections

$$\begin{aligned}
 \phi_i : \text{Cl}(\mathcal{C}_2; D) &\longrightarrow \text{Cl}^+(D) \\
 A &\longmapsto [Q_i^A]
 \end{aligned}$$

soient des homomorphismes de groupe pour $1 \leq i \leq 3$.

Démonstration. — Si A et A' sont deux cubes projectifs, alors

$$\sum_{i=1}^3 ([Q_i^A] + [Q_i^{A'}]) = \sum_{i=1}^3 [Q_i^A] + \sum_{i=1}^3 [Q_i^{A'}] = 0 + 0 = 0.$$

D'après le dernier point du Théorème 4.2, il existe $A'' \in \mathcal{C}_2$ tel que $[Q_i^{A''}] = [Q_i^A] + [Q_i^{A'}]$ pour $i = 1, 2, 3$. Les $Q_i^{A''}$ étant primitives par définition de la loi de groupe, A'' est projectif. On pose $A'' = A' + A$. \square

4.3. Paramétrisations

Identifions maintenant ces lois de composition.

DÉFINITION 4.5. — Soit S l'anneau quadratique de discriminant D et $K = S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ l'algèbre quadratique associée. Un triplet (I_1, I_2, I_3) d'idéaux orientés de S est équilibré si $I_1 I_2 I_3 \subset S$ et $N(I_1)N(I_2)N(I_3) = 1$. Deux tels triplets (I_1, I_2, I_3) et (I'_1, I'_2, I'_3) sont équivalents s'il existe $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in K$ tel que $I_i = \kappa_i I'_i$ pour $1 \leq i \leq 3$.

Si S est un anneau de Dedekind, une classe d'équivalence de triplets équilibrés n'est rien d'autre qu'un triplet de classes d'idéaux restreintes de produit 1.

THÉORÈME 4.6. — Il existe une bijection canonique entre

- l'ensemble des Γ -orbites de discriminant $D \neq 0$ sur l'espace $\mathcal{C}_2 = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$,
- l'ensemble des classes d'isomorphismes de paires $(S, (I_1, I_2, I_3))$, où S est un anneau quadratique orienté de discriminant D , et (I_1, I_2, I_3) est une classe d'équivalence de triplets équilibrés d'idéaux orientés de S .

Sa restriction aux cubes projectifs induit un isomorphisme de groupes

$$\text{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2; D) \simeq \text{Cl}^+(D) \times \text{Cl}^+(D).$$

Démonstration. — Soit $D \equiv \varepsilon \pmod{4}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et soit $\langle 1, \tau \rangle$ une base positive de S , pour une orientation $\pi : S/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, où $\tau^2 - \varepsilon\tau + (\varepsilon - D)/4 = 0$. Soient $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ des bases de I_1, I_2, I_3 , de même orientation que I_1, I_2, I_3 respectivement. Comme $I_1 I_2 I_3 \subset S$, on a

$$(17) \quad \alpha_i \beta_j \gamma_k = c_{ijk} + a_{ijk} \tau,$$

pour des entiers a_{ijk} et c_{ijk} , $1 \leq i, j, k \leq 2$. Le cube associé est $A = (a_{ijk})$. De façon plus intrinsèque, $A \in \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ représente l'application trilinéaire $I_1 \times I_2 \times I_3 \rightarrow \mathbb{Z}$ donnée par la formule $(x, y, z) \mapsto \pi(xyz)$. On vérifie que A est bien défini à Γ -équivalence près.

Réciproquement, pour un cube $A = (a_{ijk})$ fixé, on considère le système (17), qui comporte essentiellement des indéterminées pour l'instant. On cherche $\tau, (\alpha_i), (\beta_j), (\gamma_k)$ le satisfaisant tels que les S, I_1, I_2, I_3 associés vérifient $I_1 I_2 I_3 \subset S$ et $N(I_1)N(I_2)N(I_3) = 1$. Ceci implique

$$\text{Disc } A = N(I_1)^2 N(I_2)^2 N(I_3)^2 \text{Disc } S,$$

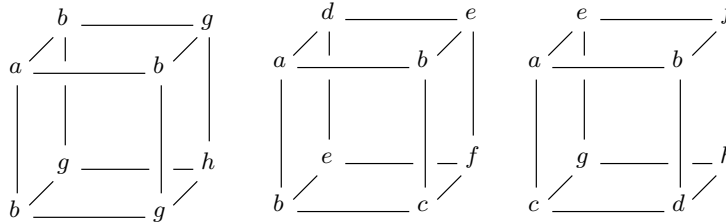
ainsi $\text{Disc } S = \text{Disc } A$ et donc S sont déterminés. Comme dans la preuve du Théorème 4.3, on peut supposer que les trois sommets adjacents à un sommet fixé (qui porte le pgcd des coefficients) sont nuls. Par associativité et commutativité de la multiplication dans S , un calcul explicite montre que les c_{ijk} sont déterminés, et entiers ! Grâce à la nullité de trois des a_{ijk} , on déduit de (17) que les $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ sont inversibles dans K , puis que les quotients $\alpha_1/\alpha_2, \beta_1/\beta_2$ et γ_1/γ_2 sont fixés. Un calcul explicite montre que les \mathbb{Z} -modules obtenus sont bien des idéaux.

Un triplet équilibré (I_1, I_2, I_3) est dit projectif si les I_i sont projectifs (c'est-à-dire inversibles) comme S -modules. Les formes normales associées aux I_i sont exactement les Q_i^A , donc les I_i sont projectifs si et seulement si A l'est. L'ensemble des classes d'équivalence de triplets équilibrés projectifs est muni de la loi de groupe naturelle $(I_1, I_2, I_3) \cdot (I'_1, I'_2, I'_3) = (I_1 I'_1, I_2 I'_2, I_3 I'_3)$, qui le rend isomorphe à $\text{Cl}^+(D) \times \text{Cl}^+(D)$ par la projection $(I_1, I_2, I_3) \mapsto (I_1, I_2)$. On conclut grâce aux Théorèmes 4.3 et 2.1. \square

Bhargava définit de même des flèches naturelles préservant le discriminant entre espaces de formes

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sym}^3 \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \otimes \text{Sym}^2 \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (\text{Sym}^2 \mathbb{Z}^2)^* & \longleftarrow & \mathbb{Z}^2 \otimes \Lambda^2 \mathbb{Z}^4 \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \Lambda^3 \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

munies d'actions de groupes linéaires. Par exemple, la première rangée correspond à l'inclusion des ensembles de cubes présentant une triple symétrie, une double symétrie ou pas de symétrie *a priori* :



À partir de la loi du cube, on obtient des lois de groupe sur les ensembles d'orbites projectives de discriminant D non nul :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{Cl}(\mathrm{Sym}^3 \mathbb{Z}^2; D) & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^2; D) & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2; D) \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow \\
 & & \mathrm{Cl}^+(D) \simeq \mathrm{Cl}((\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^2)^*; D) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \Lambda^2 \mathbb{Z}^4; D) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \mathrm{Cl}(\Lambda^3 \mathbb{Z}^2; D) = \{0\}
 \end{array}$$

Bhargava identifie ensuite les structures dont ils paramètrent les classes d'équivalence. Dans l'énumération suivante, toutes les formes et les anneaux sont de discriminant non nul, S désigne un anneau quadratique orienté, I (avec ou sans indice) un S -idéal orienté, et un « S -idéal de rang n » est un sous- S -module de $(S \otimes \mathbb{Q})^n$, de rang maximal $2n$ sur \mathbb{Z} . Voir [5] pour les définitions manquantes et les démonstrations.

– $\mathrm{Sym}^3 \mathbb{Z}^2, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: formes cubiques binaires et triplets (S, I, δ) , où $\delta \in S \otimes \mathbb{Q}$ tel que $I^3 \subset \delta S$ et $N(I)^3 = N(\delta)$. Si on se restreint aux formes projectives, I est inversible et $N(I^3) = N(I)^3$, d'où $I^3 = (\delta)$. L'application $\mathrm{Cl}(\mathrm{Sym}^3 \mathbb{Z}^2; D) \rightarrow \mathrm{Cl}_3(D)$ donnée par $(S, I, \delta) \rightarrow I$ est un morphisme surjectif dont le noyau est de cardinal $\#(S^*/S^{*3})$. En particulier si S est un anneau de Dedekind, ce morphisme est un isomorphisme si $D < -3$, et a un noyau d'ordre 3 sinon (cette construction remonte à Eisenstein [23], voir aussi Hoffman-Morales [27]).

– $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^2, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: paires de formes quadratiques binaires et triplets $(S, I_1, I_2, I_3 = I_2)$ où (I_1, I_2, I_2) est un triplet équilibré. L'application naturelle $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^2 \rightarrow (\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^2)^*$ donnée par $A \mapsto Q_3^A$ devient un isomorphisme par passage aux quotients, si on la restreint aux classes projectives ($I_1 I_2 I_3$ étant principal, si $I_2 = I_3$ l'est, I_1 aussi).

– $(\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^2)^*, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: formes quadratiques binaires, c'est le cas considéré par Gauss.

– $\mathbb{Z}^2 \otimes \Lambda^2 \mathbb{Z}^4$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$: paires de 2-formes alternées de rang 4. Elles paramètrent les paires $(S, (I, M))$, où M est un « S -idéal de rang 2 » et (I, M) est équilibré.

– $\Lambda^3 \mathbb{Z}^6$, $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$: 3-formes alternées de rang 6. Elles paramètrent les paires (S, M) où M est un « S -idéal de rang 3 » équilibré.

5. PARAMÉTRISATIONS EN DEGRÉ SUPÉRIEUR

5.1. Anneaux cubiques

THÉORÈME 5.1 (Delone-Faddeev [22], Gan-Gross-Savin [25])

Il existe une bijection canonique entre les deux ensembles suivants :

- les classes d'isomorphismes d'anneaux cubiques,
- les formes cubiques binaires entières, soit $(\mathrm{Sym}^3 \mathbb{Z}^2)^*$, modulo l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Cette bijection préserve le discriminant. La classe contenant la forme de coefficients (a, b, c, d) est associée au \mathbb{Z} -module libre $R = \langle 1, \omega, \theta \rangle_{\mathbb{Z}}$, muni de la multiplication

$$\begin{aligned}\omega\theta &= -ad, \\ \omega^2 &= -ac + b\omega - a\theta, \\ \theta^2 &= -bd + d\omega - c\theta.\end{aligned}$$

Démonstration. — Vérification explicite, facilitée par le choix d'une base de R telle que $\omega\theta \in \mathbb{Z}$, toujours possible par translation de ω et θ . Une autre démonstration pour R intègre consiste à comparer deux applications classiques : la forme indice (qui, à un ordre de rang n , associe une forme de $(\mathrm{Sym}^{n(n-1)/2} \mathbb{Z}^{n-1})^*$, modulo $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})$) et l'ordre de Dedekind (qui, à une forme irréductible de $(\mathrm{Sym}^n \mathbb{Z}^2)^*$, associe un ordre de degré n). Elles sont compatibles si et seulement si $n = 3$, et inverses l'une de l'autre dans ce cas. \square

Par exemple

$$(18) \quad (0, 0, 0, 0) \longleftrightarrow \mathbb{Z}[\omega, \theta]/(\omega^2, \theta^2, \omega\theta),$$

$$(19) \quad (a, b, c, d) \longleftrightarrow \mathbb{Z}[a\omega, a\omega^2 + b\omega]/(a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega + d) \quad \text{si } a \neq 0.$$

Zagier [58] a donné une jolie interprétation de l'application réciproque, en associant à R l'application

$$\begin{aligned}\Phi_{3,2} : R/\mathbb{Z} &\longrightarrow \Lambda^3 R \cong \mathbb{Z} \\ \xi &\longmapsto 1 \wedge \xi \wedge \xi^2,\end{aligned}$$

que l'on identifie à une forme cubique en choisissant une base $\langle \alpha, \beta \rangle$ du \mathbb{Z} -module R/\mathbb{Z} de rang 2 et en posant $\xi = x\alpha + y\beta$. La construction est bien définie modulo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

5.2. Paramétrisations cubiques

L'espace $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^3$ peut se représenter comme l'ensemble des boîtes $2 \times 3 \times 3$ à sommets entiers, ou encore les paires (A, B) de matrices 3×3 . De façon analogue au §4.1, on le munit d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. On se restreint à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ puisque $(-\mathrm{Id}_2, \mathrm{Id}_3, -\mathrm{Id}_3)$ et $(-\mathrm{Id}_2, -\mathrm{Id}_3, \mathrm{Id}_3)$ agissent trivialement (cette action est fidèle). Soit $f(x, y)$ la forme cubique binaire $\det(xA - yB)$, on note

$$\mathrm{Disc}((A, B)) = \mathrm{Disc}(\det(xA - yB)) = \mathrm{Disc}(f),$$

qui est l'unique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ -invariant sur $V_{\mathbb{Z}}$. D'après le Théorème 5.1, on associe un ordre cubique R de discriminant $\mathrm{Disc}(f)$ à f .

THÉORÈME 5.2. — *Il y a une bijection canonique entre*

- l'ensemble des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ -orbites de discriminant $D \neq 0$ sur $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^3$,
- l'ensemble des classes d'isomorphismes de paires $(R, (I, I'))$, où R est un anneau cubique de discriminant $D \neq 0$, et (I, I') est une classe d'équivalence de paires équilibrées de R -idéaux fractionnaires de $R \otimes \mathbb{Q}$.

THÉORÈME 5.3. — *Il y a une bijection canonique entre*

- l'ensemble des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ -orbites de discriminant $D \neq 0$ sur $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^3$,
- l'ensemble des classes d'isomorphismes de triplets (R, I, δ) , où R est un anneau cubique de discriminant $D \neq 0$, et I est un R -idéal et δ est un élément inversible de $R \otimes \mathbb{Q}$, tels que $I^2 \subset (\delta)$, $N(\delta) = N(I)^2$.

Tout comme au §4, on obtient des applications naturelles

$$\mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \otimes \Lambda^2 \mathbb{Z}^6,$$

munies d'actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$, respectivement. Restreintes à des sous-espaces convenables et modulo ces actions, elles deviennent des morphismes de groupes. Par exemple, pour R fixé et I, I' projectifs comme R -modules (*i.e.* inversibles), la restriction de la bijection du Théorème 5.2 associe à $(A, B) \in \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^3$ la classe d'idéaux de I . C'est un isomorphisme sur le groupe des classes des R -idéaux inversibles $\mathrm{Cl}(R)$.

5.3. Les cas quartiques et quintiques

La paramétrisation des anneaux quartiques requiert de nouveaux préliminaires.

DÉFINITION 5.4. — *Pour un anneau R de degré n , soit I_R l'idéal de $R^{\otimes n}$ engendré par les éléments de la forme*

$$(x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) + (1 \otimes x \otimes \cdots \otimes 1) + \cdots + (1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes x) - \mathrm{Tr}(x) \times (1 \otimes \cdots \otimes 1).$$

La S_n -clôture \widehat{R} de R est l'anneau de degré $n!$ donné par $\widehat{R} = M/M_{tor}$, où $M := R^{\otimes n}/I_R$ et M_{tor} est le sous-groupe de torsion de M .

Si R est intègre de corps des fractions K , \widehat{R} est la \mathbb{Z} -algèbre engendrée par les conjugués des éléments de R et son corps des fractions $\text{Frac}(\widehat{R})$ est une clôture galoisienne de K/\mathbb{Q} . On fixe un plongement $x \mapsto (x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$ de R dans \widehat{R} . Les n conjugués de x sont les $(x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1), \dots, (1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes x)$. Il y a une action naturelle du groupe symétrique S_n sur \widehat{R} et $\widehat{R}^{S_n} = \mathbb{Z} \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

DÉFINITION 5.5. — Soit Q un anneau quartique de S_4 -clôture \widehat{Q} . Pour $x \in Q$, on note x, x', x'', x''' ses S_4 -conjugués et on définit $\Phi_{4,3} : Q \rightarrow \widehat{Q}$ par $\Phi_{4,3}(x) = xx' + x''x'''$. On note

$$R^{\text{inv}}(Q) = \mathbb{Z}[\{\Phi_{4,3}(x) : x \in Q\}] \subset \widehat{Q}.$$

On démontre que $R^{\text{inv}}(Q)$ est inclus dans un anneau cubique, le sous-anneau de \widehat{R} fixe par un sous-groupe $D_4 \subset S_4$ diédral d'ordre 8.

DÉFINITION 5.6. — Soit Q un anneau quartique. Une résolvante cubique de Q est un anneau cubique R tel que $\text{Disc}(R) = \text{Disc}(Q)$ et $R^{\text{inv}}(Q) \subset R$.

Bhargava a aussi donné une description plus fonctorielle des résolvantes cubiques qui n'utilise pas la notion de S_n -clôture. L'idée est de voir une résolvante cubique R d'un anneau quartique Q comme un anneau cubique muni d'une application quadratique $\Phi_{4,3} : Q \rightarrow R$ satisfaisant des propriétés formelles convenables.

THÉORÈME 5.7. — Tout anneau quartique admet au moins une résolvante cubique R , qui est unique si et seulement si Q est « de contenu 1 », c'est-à-dire si Q/\mathbb{Z} n'est pas de la forme $n(Q'/\mathbb{Z})$ pour un $n > 1$ et un anneau quartique Q' . Dans ce cas, $R = R^{\text{inv}}(Q)$.

Si R est une résolvante cubique de Q , $\Phi_{4,3}$ induit une application quadratique de Q/\mathbb{Z} dans R/\mathbb{Z} , c'est-à-dire de \mathbb{Z}^3 dans \mathbb{Z}^2 aux changements de base près. C'est donc une paire de formes quadratiques ternaires modulo $\Gamma = \text{GL}_3(\mathbb{Z}) \times \text{GL}_2(\mathbb{Z})$. Explicitement $(g_3, g_2) \in \Gamma$ opère sur $(A, B) \in \mathbb{Z}^2 \otimes (\text{Sym}^3 \mathbb{Z}^2)^*$, où A, B sont vues comme matrices symétriques 3×3 à coefficients demi-entiers en dehors de la diagonale, par

$$(g_3, g_2) \cdot (A, B) = (r \cdot g_3 A g_3^t + s \cdot g_3 B g_3^t, t \cdot g_3 A g_3^t + u \cdot g_3 B g_3^t),$$

avec $g_2 = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Soit f la forme cubique binaire $4 \det(xA - yB)$ — le facteur 4 assure l'intégralité. La forme f est invariante sous l'action du facteur $\text{GL}_3(\mathbb{Z})$ de Γ , et le facteur $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ agit via $\begin{pmatrix} r & -s \\ -t & u \end{pmatrix} \cdot f$. L'action de Γ a un unique invariant $\text{Disc}((A, B)) := \text{Disc}(f)$.

THÉORÈME 5.8. — Il existe une bijection entre les ensembles suivants :

– les paires de formes quadratiques ternaires (A, B) de discriminant $\text{Disc}((A, B)) = D$, soit $\mathbb{Z}^2 \otimes (\text{Sym}^2 \mathbb{Z}^3)^*$, modulo l'action de $\text{GL}_3(\mathbb{Z}) \times \text{GL}_2(\mathbb{Z})$,

– les classes d'isomorphismes de triplets (Q, R, Φ) , où Q, R sont des anneaux respectivement quartique et cubique, $\Phi : Q/\mathbb{Z} \rightarrow R/\mathbb{Z}$ est une application quadratique, R est une résolvante cubique de Q et $\text{Disc } Q = \text{Disc } R = D$. La classe d'isomorphisme de R est donnée par la $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ -orbite de la forme cubique binaire $f(x, y) = 4 \det(xA - yB)$.

On notera $Q(A, B)$ l'anneau quartique associé à la paire (A, B) . Ce théorème est un analogue du cas cubique, qui associe à un anneau cubique R de discriminant D , une résolvante quadratique $S(D)$ et une application cubique $\Phi_{3,2} : R/\mathbb{Z} \rightarrow S/\mathbb{Z}$. Ces deux données étant entièrement déterminées par R , elles n'apparaissent pas explicitement. Dans la paramétrisation ci-dessus, Φ est en fait déterminée par Q et R si leur discriminant commun est non-nul. De surcroît, comme nous l'avons vu au Théorème 5.7, Q de contenu 1 détermine R .

Ce théorème se démontre « explicitement » comme le Théorème 4.6, la grande difficulté venant du fait qu'il n'y a pas de choix naturel pour la résolvante cubique R . Pour un choix particulier d'un représentant (A, B) dans la classe modulo $\text{GL}_3(\mathbb{Z}) \times \text{GL}_2(\mathbb{Z})$, Bhargava montre que la structure multiplicative de Q et R est fixée, en écrivant explicitement des lois de multiplication génériques analogues à (17), et en résolvant les conditions de compatibilité, associativité, commutativité, au terme d'un processus où le mot « miracle » apparaît plusieurs fois [2]. On vérifie que R est bien une résolvante cubique de Q , et que (Q, R) a bien pour image (A, B) .

Bhargava [3, 4] annonce d'autres paramétrisations, dont le résultat suivant :

THÉORÈME 5.9. — *Il existe une bijection entre les ensembles suivants :*

- les quadruplets de 2-formes alternées de rang 5, soit $\mathbb{Z}^4 \otimes \Lambda^2 \mathbb{Z}^5$, modulo l'action de $\text{GL}_4(\mathbb{Z}) \times \text{SL}_5(\mathbb{Z})$,
- les paires (P, \mathcal{S}) , où P est une classe d'isomorphisme d'anneaux quintiques, et \mathcal{S} est une résolvante sextique de P .

Cette bijection préserve le discriminant.

6. COMPTAGES PAR DISCRIMINANT ET DENSITÉS

6.1. La conjecture de Malle

Soit k un corps de nombres dont on fixe une clôture algébrique \bar{k} , $G \subset S_n$ un groupe de permutations sur n lettres et K/k une extension finie de degré $[K : k] = n$. Par abus de notation, on écrit « $\text{Gal}(K/k) = G$ » si le groupe de Galois de la clôture galoisienne de K/k , vu comme groupe de permutation sur les n k -plongements de K dans \bar{k} , est isomorphe à G . Soit

$$\mathcal{F}_{n,k}(X, G) = \{K/k : K \subset \bar{k}, \text{Gal}(K/k) = G, N_{k/\mathbb{Q}}(d_{K/k}) \leq X\} / \text{Gal}(\bar{k}/k),$$

l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions de k de groupe de Galois G , au sens précédent, dont la norme du discriminant relatif $d_{K/k}$ est bornée par X . On note

$$N_{n,k}(X, G) := \sum_{K \in \mathcal{F}_{n,k}(X, G)} \frac{1}{\#\text{Aut}_k K}.$$

La pondération par le nombre d'automorphismes, qui ne dépend que de k et G , nous permettra de formuler plus naturellement certaines densités.

DÉFINITION 6.1. — Pour $\sigma \in S_n$, on définit l'indice de σ par

$$\text{ind}(\sigma) := n - \#\{\text{cycles de } \sigma\}$$

(il ne dépend que de la classe de conjugaison de σ). Si $G \neq \{\text{Id}\}$ est un sous-groupe de S_n , on note

$$\text{ind}(G) := \min_{\sigma \in G - \{\text{Id}\}} \text{ind}(\sigma), \quad a(G) = 1/\text{ind}(G) \in]0, 1].$$

On note $b(G, k) \geq 1$ le nombre de k -classes de conjugaison de G , c'est-à-dire de classes modulo l'action naturelle de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$, dont l'indice est $\text{ind}(G)$.

En particulier, $a(G) = 1$ si et seulement si G contient une transposition ; dans ce cas, $b(G, k) = 1$ pour tout corps de nombres k (Malle [38]). Malle [38, 39] conjecture⁽⁵⁾ une estimation relativement précise pour $N_{n,k}(X, G)$:

CONJECTURE 6.2. — Soit G un groupe de permutation transitif et k un corps de nombres. Il existe une constante $c(G, k) > 0$ telle que

$$N_{n,k}(X, G) \sim c(G, k) X^{a(G)} (\log X)^{b(G, k) - 1}.$$

On en déduit que le nombre $N_{n,k}(X) = \sum_{G \subset S_n} N_{n,k}(X, G)$ d'extensions de k de degré n dont on ne fixe plus le groupe de Galois vérifierait

$$N_{n,k}(X) \stackrel{?}{\sim} X \cdot \sum_{\substack{G \subset S_n \\ a(G)=1}} c(G, k).$$

Bien sûr, cette conjecture implique une solution positive au problème de Galois inverse. Malle conjecture qu'en fixant la structure de k_v -algèbre de $K \otimes k_v$ pour un nombre fini de places v de k , on garde les mêmes exposants (mais la constante change) pour peu qu'au moins une telle extension K existe. Les $c(G, k)$ ne sont pas précisés par la conjecture.

⁽⁵⁾(06/03/2005) : Klüners a depuis trouvé un contre-exemple à la conjecture de Malle (Note aux CRAS, à paraître).

Celle-ci est démontrée si G est abélien⁽⁶⁾ (Mäki [37], Wright [55]) ou de petit cardinal : $n = 3$ et $G = S_3$ (Davenport et Heilbronn [21], Datskovsky et Wright [18]), $n = 4$ et $G = D_4$ (Cohen, Diaz y Diaz, Olivier [12]; malgré le titre, le cas $k \neq \mathbb{Q}$ est traité). Voir [11] pour un survol plus détaillé.

Citons pour finir trois résultats récents. Pour un groupe G nilpotent en représentation régulière, Klüners et Malle [34] obtiennent la forme faible

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\log N_{|G|,k}(X, G)}{\log X} = a(G).$$

Klüners [33] a récemment annoncé que les groupes quaternioniens généralisés

$$Q_{4m} := \langle x, y \mid x^{2m} = 1, y^2 = x^m, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle, \quad m = 2^l, l \geq 1,$$

vérifient la conjecture sur $k = \mathbb{Q}$, fournissant les premiers exemples non abéliens d'ordre arbitrairement élevé; ici $G = Q_{4m} \subset S_{4m}$ est en représentation régulière, $a(G) = 2m$ et $b(G, \mathbb{Q}) = 1$. Le résultat le plus général à ce jour, dû à Ellenberg et Venkatesh [24] dit que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $n \geq 1$, et tout corps de nombres k , on a

$$\limsup_{X \rightarrow +\infty} \frac{\log N_{n,k}(X)}{\log X} \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \liminf_{X \rightarrow +\infty} \frac{\log N_{n,k}(X)}{\log X} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}$$

6.2. La conjecture de Bhargava

Pour v une place de k et $n \geq 1$, on définit

$$a_v(n) := \sum_{\substack{A \text{ étale}/k_v \\ [A:k_v]=n}} \frac{|d_{A/k_v}|_v}{\#\text{Aut}_{k_v} A}$$

où la somme porte sur les classes d'isomorphismes d'algèbres étales de degré n sur le complété k_v . Ici, d_{A/k_v} est le discriminant associé (1 pour v archimédienne), et $|\cdot|_v$ désigne la valeur absolue normalisée habituelle.

CONJECTURE 6.3 (Bhargava). — *Pour $n \geq 2$, on a $N_{n,k}(X, S_n) \sim c(S_n, k)X$ quand $X \rightarrow +\infty$, avec*

$$(20) \quad c(S_n, k) = \frac{1}{2} \text{Res}(\zeta_k, s=1) \prod_v a_v(n)(1 - 1/Nv)$$

où ζ_k est la fonction zêta de Dedekind de k , et où on omet le facteur $(1 - 1/Nv)$ pour v archimédienne.

(Il s'agit d'une reformulation d'une conjecture équivalente donnée par Bhargava [4].)

⁽⁶⁾Si G est abélien de cardinal n , $G \subset S_n$, p le plus petit diviseur premier de n , n_p le nombre d'éléments d'ordre p dans G , on montre que

$$1/a(G) = |G|(1 - 1/p) \quad \text{et} \quad b(G, k) = n_p/[k(e^{2i\pi/p}) : k].$$

Comme les algèbres étales sur k_v sont les produits finis de corps sur k_v et que leurs k_v -automorphismes et discriminants sont les produits de ceux de leurs composantes, on obtient l'expression de la série génératrice

$$(21) \quad \sum_n a_v(n)T^n = \exp \left(\sum_{K \text{ corps}/k_v} \frac{|d_{K/k_v}|_v}{\#\text{Aut}_{k_v} K} T^{[K:k_v]} \right).$$

THÉORÈME 6.4. — On a

$$\sum_n a_v(n)T^n = \begin{cases} \exp(T) & \text{si } v \text{ est complexe,} \\ \exp \left(T + \frac{1}{2}T^2 \right) & \text{si } v \text{ est réelle,} \\ \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - q^{k-1}T^k} & \text{si } v \text{ est finie, } q = (\mathbb{N}v)^{-1}. \end{cases}$$

Démonstration. — Les deux premiers cas sont clairs à partir de (21), le troisième résulte de la formule de masse de Serre [47], sous la forme

$$\sum_{\substack{K \text{ corps}/k_v \\ [K:k_v]=n}} \frac{|d_{K/k_v}|_v}{\#\text{Aut}_{k_v} K} = \sum_{d|n} \frac{q^{n-d}}{d}.$$

La formule donnée dans [47] énonce que la somme sur les extensions totalement ramifiées est q^{n-1} . Pour chaque $d \mid n$, on l'applique à l'unique extension non ramifiée de degré d de k_v , pour compter ses extensions totalement ramifiées de degré n/d . \square

COROLLAIRE 6.5. — Si v est finie, $q = (\mathbb{N}v)^{-1}$, alors $a_v(n) = P_n(q)$ où $P_n \in \mathbb{N}[X]$ ne dépend pas de v . On a $P_n(q) = 1 + q + O(q^2)$ quand $q \rightarrow 0$ et le produit infini (20) converge.

Exemple 6.6. — Pour v réelle,

$$a_v(2) = 1, \quad a_v(3) = 2/3, \quad a_v(4) = 5/12, \quad a_v(5) = 13/60.$$

Pour v finie, $q = (\mathbb{N}v)^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} (1-q)a_v(2) &= 1 - q^2, & (1-q)a_v(4) &= 1 + q^2 - q^3 - q^4, \\ (1-q)a_v(3) &= 1 - q^3, & (1-q)a_v(5) &= 1 + q^2 - q^4 - q^5. \end{aligned}$$

Exemple 6.7. — Si $n = 2$, la conjecture prédit

$$N_{\mathbb{Q},2}(X, S_2)/X \longrightarrow \frac{1}{2\zeta(2)},$$

ce qui est un résultat classique. On le démontre par exemple à partir de l'identité $\mu^2(q) = \sum_{d^2|q} \mu(d)$ d'où on déduit la densité des entiers sans facteur carré. (Ne pas oublier que chaque corps est pondéré par $1/\#\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) = 1/2$.)

La conjecture suit du principe heuristique suivant, analogue à celui de Cohen-Lenstra [14] et Cohen-Martinet [15] sur le comportement moyen des groupes de classes. On considère le nombre d'extensions K/k de degré n , avec $\text{Gal}(K/k) = S_n$ et $d_{K/k} = D$. En se demandant quelles collections de $A = K \otimes k_v$ peuvent intervenir et en supposant les comportements indépendants aux différentes places, on s'attend à ce qu'il soit égal à

$$\prod_v \sum_{\substack{A \text{ étale}/k_v \\ [A:k_v]=n \\ |d_{A/k_v}|_v = |D|_v}} \frac{1}{\#\text{Aut}_{k_v} A},$$

en moyenne sur D . La conjecture est vraie pour $n = 2$ (Wright [55], Cohen-Diaz y Diaz-Olivier [13]), $n = 3$ (Datskovsky-Wright [18]), et correspond aux valeurs annoncées par Bhargava sur \mathbb{Q} pour $n = 4, 5$. Une variation évidente fixe la structure de k_v -algèbre de $K \otimes k_v$ pour un nombre fini de places, par exemple la signature à l'infini : on remplace les $a_v(n)$ correspondants par la somme sur les algèbres de structure permise. Cette conjecture renforcée est vérifiée dans les mêmes cas que ci-dessus (voir [18, § 4] pour $n = 2, 3$).

6.3. S_3 sur \mathbb{Q}

Ce cas, réinterprété et étendu dans le langage du § 3.3 par Datskovsky et Wright [54, 17, 18], est originellement traité sur \mathbb{Q} par Davenport et Heilbronn [21] avec la méthode du domaine fondamental du § 2. À partir du Théorème 5.1, un équivalent de $N_{\mathbb{Q},3}(X, S_3)$ s'obtient assez simplement : on compte les classes de formes cubiques associées aux ordres maximaux, une condition locale qui prend la forme suivante.

THÉORÈME 6.8 (Davenport-Heilbronn). — *La classe d'une forme cubique irréductible F est associée à un ordre R maximal en p (c'est-à-dire tel que $R \otimes \mathbb{Z}_p$ est maximal) si et seulement si $p \nmid F$ et F n'est pas $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ -équivalente à une forme (a, b, pc, p^2d) , $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.*

Ce n'est pas la formulation de Davenport et Heilbronn [21], qui ne connaissaient pas le résultat de Delone et Faddeev et faisaient des calculs locaux désagréables, mais elle lui est équivalente.

Démonstration. — Si $p \mid F$, R est inclus dans l'ordre associé à F/p , donc non maximal en p . Si p ne divise pas le discriminant de F , égal à $\text{Disc } R$, il n'y a pas de problème. Sinon, en remplaçant au besoin F par une forme $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ -équivalente, on peut supposer que la racine double de F modulo p est en 0, et qu'il n'y a pas de racine à l'infini soit $F = (a, b, pc, pd)$, avec $p \nmid a$. Le résultat suit du critère de p -maximalité de Dedekind (cf. [10, § 6.1.4]).

Explicitement, si $p \mid d$, l'ordre associé à $(pa, b, c, d/p)$ contient R (voir (19)). \square

Posons $G = \mathrm{GL}_2$, $V = \mathrm{Sym}^3 \mathbb{A}^2$; il suffit de compter les points de $V_{\mathbb{Z}}/G_{\mathbb{Z}}$ de discriminant borné, satisfaisant les congruences ci-dessus. En effet, les points associés à des anneaux non intègres ou de corps des fractions cubiques cycliques sont absorbés dans un terme d'erreur. On trouve

$$\mathrm{Vol}(V_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}} \cap \{F : |\mathrm{Disc} F| < X\}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) \frac{\zeta(2)}{2} X = \frac{\zeta(2)}{3} X,$$

en séparant les deux composantes connexes de $(V - S)_{\mathbb{R}} = V^+ \cup V^-$ associées aux formes de discriminant respectivement positif ou négatif⁽⁷⁾. Le produit des densités p -adiques provenant du Théorème 6.8 est $1/(\zeta(2)\zeta(3))$, et l'on obtient

$$N_{\mathbb{Q},3}(X, S_3)/X \longrightarrow \frac{1}{3\zeta(3)} = \frac{1}{2} \mathrm{Res}(\zeta, s=1) a_{\infty}(3) \prod_p (1 - 1/p) a_p(3).$$

On peut bien sûr séparer les densités des corps totalement réels et totalement complexes, la première étant trois fois plus faible que la seconde, en se restreignant à V^+ ou V^- au lieu d'additionner leurs contributions.

6.4. S_4 et S_5 sur \mathbb{Q}

Pour ce qui concerne S_4 et S_5 sur \mathbb{Q} , seul le cas des corps S_4 totalement réels est publié [2] à ce jour. Bhargava [4] annonce une solution complète qui corrobore sa conjecture pour $n = 4, 5$.

DÉFINITION 6.9. — Une paire de formes quadratiques ternaires (A, B) est totalement réelle, resp. mixte, resp. totalement complexe si (A, B) a 4, resp. 2, resp. 0 zéros réels dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Elle est irréductible si A et B n'ont pas de zéro commun dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ et si la forme cubique binaire $\det(xA - yB)$ est irréductible sur \mathbb{Q} . Une paire (A, B) est maximale si l'anneau quartique $Q(A, B)$ est maximal.

Toutes ces définitions ne dépendent que de la classe de (A, B) modulo $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et on a une description locale, analogue au Théorème 6.8, des paires (A, B) maximales.

THÉORÈME 6.10. — Soit $Q(A, B)$ l'anneau quartique associé à une classe de paires de formes quadratiques (A, B) :

- (A, B) est irréductible si et seulement si $Q(A, B)$ est un ordre d'une extension quartique de \mathbb{Q} de clôture galoisienne A_4 ou S_4 .
- (A, B) est totalement réelle si et seulement si Q est totalement réel ($Q \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^4$).
- (A, B) est totalement réelle irréductible maximale si et seulement si $Q(A, B)$ est un ordre quartique maximal, dont le corps des fractions est totalement réel, de clôture galoisienne A_4 ou S_4 sur \mathbb{Q} .

⁽⁷⁾ V^+ (resp. V^-) correspond aux formes ayant trois racines réelles (resp. une seule racine réelle), dont le stabilisateur dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à S_3 (resp. à S_2). D'où les coefficients $1/6$ et $1/2$.

– Le produit des densités locales associées aux (A, B) maximales est

$$\frac{1}{\zeta(2)^2 \zeta(3)} \prod_p (1 + p^{-2} - p^{-3} - p^{-4}).$$

On trouve cette fois-ci

$$\text{Vol}(V_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}} \cap \{(A, B) : |\text{Disc}(A, B)| < X\}) = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \frac{\zeta(2)^2 \zeta(3)}{2} X,$$

où $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \otimes \text{Sym}^2 \mathbb{R}^3$, $G_{\mathbb{Z}} = \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \text{GL}_3(\mathbb{Z})$, et les coefficients $1/24$, $1/4$, $1/8$ proviennent respectivement des cas réels, mixtes et complexes (stabilisateurs S_4 , S_2^2 et S_2^3) qui sont les trois composantes connexes de $(V - S)_{\mathbb{R}}$.

THÉORÈME 6.11. — Conformément à la conjecture de Bhargava, le nombre de classes d'isomorphismes de corps quartiques totalement réels de discriminant inférieur à X est équivalent à CX , où

$$C = \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} \times \prod_p a_4(p)(1 - 1/p).$$

Démonstration. — Ce théorème suit formellement de ce qui précède, en montrant que sont négligeables

- le nombre d'extensions A_4 de discriminant inférieur à X ,
- les points associés aux (A, B) réductibles,
- le terme reste algébrique lié au passage à la limite dans le produit des facteurs locaux (analogue de (4)),
- le terme géométrique provenant du principe de Lipschitz (Théorème 2.2), lié aux volumes des projections d'un domaine fondamental.

Wong [53, Remark 9] démontre que $N_{\mathbb{Q},4}(X, A_4) = O(X^{7/8+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$, et les trois autres points sont démontrés par Bhargava. Le deuxième est de loin le plus délicat, faisant hélas appel à un domaine fondamental explicite et à de lourdes estimations directes (en dimension 12). Parmi les points entiers du domaine fondamental, les paires réductibles sont en fait largement majoritaires ; elles sont heureusement concentrées sur quelques sections hyperplanes qui peuvent être éliminées avant le décompte par principe de Lipschitz. \square

L'hypothèse « totalement réel » et le domaine fondamental explicite qu'elle permet sont utilisés pour traiter un cas dégénéré mais crucial. Je ne sais pas si Bhargava les supprime pour traiter les deux autres signatures possibles ou bien s'il doit refaire tous les calculs.

Si K est un corps de nombres et p un nombre premier, soit

$$r_p(K) = \dim_{\mathbb{F}_p} (\text{Cl}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$$

le p -rang du groupe des classes de K ; ainsi, $p^{r_p(K)}$ est le nombre d'éléments de p -torsion du groupe des classes, et $(p^{r_p(K)} - 1)/(p - 1)$ le nombre de sous-groupes

d'indice p . La méthode de Davenport et Heilbronn du § 6.3 permet la détermination de l'ordre moyen de $3^{r_3(K)}$ quand K parcourt les corps quadratiques, et la vérification de l'heuristique de Cohen-Lenstra dans ce cadre. Bhargava obtient l'analogie suivant :

THÉORÈME 6.12. — *Conformément aux heuristiques de Cohen-Martinet, on a*

$$\sum_K \left(2^{r_2(K)} - 1 \right) \sim \frac{1}{4} \sum_K 1, \quad \text{quand } X \longrightarrow \infty,$$

où K parcourt les corps cubiques totalement réels de discriminant inférieur à X .

Démonstration. — Soit K_4 un corps quartique de type A_4 ou S_4 , de clôture galoisienne L , $K_3 \subset L$ un corps cubique, et K_6 l'unique extension quadratique de K_3 dont la clôture galoisienne soit L . Alors K_6/K_3 est ramifiée en une place divisant p si et seulement si le type de ramification de p dans K_4 est (1^4) , (2^2) , ou $(1^2 2^2)$. Le corps K_4 est totalement réel si et seulement si L l'est, ce qui implique que K_3 et K_6 le sont aussi.

Réciproquement si K_3 est un corps cubique totalement réel et si K_6/K_3 est une extension quadratique non ramifiée, alors la clôture galoisienne L de K_6 est de type A_4 ou S_4 et contient un unique corps quartique K_4 à conjugaison près, et K_4 est totalement réel puisque K_6 et donc L le sont. Par théorie du corps de classes, $2^{r_2(K)} - 1$ est le nombre d'extensions quadratiques non ramifiées K_6 de K_3 . On vérifie par ailleurs que $\text{Disc } K_3 = \text{Disc } K_4$. Le membre de gauche compte donc les extensions K_4 totalement réelles de type A_4 ou S_4 et de ramification restreinte comme ci-dessus.

Bhargava démontre que, pour $Q(A, B)$ maximal, la structure de l'anneau quotient $Q(A, B)/(p)$ est donnée par les degrés résiduels aux points d'intersections des deux coniques définies par A et B sur \mathbb{F}_p . (Le résultat reste vrai pour $Q(A, B)$ non-maximal, s'il n'y a pas de point d'intersection quadruple.) En particulier le type de décomposition d'un premier p dans le corps des fractions K_4 de $Q(A, B)$ se voit par des congruences modulo p sur (A, B) . En renforçant la condition locale de p -maximalité de la démonstration précédente pour imposer l'absence de ramification de type (1^4) , (2^2) ou $(1^2 2^2)$, on obtient un équivalent du membre de gauche. Le théorème de Davenport-Heilbronn démontré au § 6.3 donne un équivalent du membre de droite. \square

RÉFÉRENCES

- [1] K. BELABAS – « Crible et 3-rang des corps quadratiques », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **46** (1996), p. 909–949.
- [2] M. BHARGAVA – « Higher composition laws », Thèse, Princeton University, 2001.
- [3] _____, « Gauss composition and generalizations », in *Ants V, Sydney*, Lecture Notes in Comput. Sci., no. 2369, Springer-Verlag, 2002, p. 1–9.
- [4] _____, « The parametrization of algebraic structures », *Explicit Methods in Number Theory* (Oberwolfach). Exposé, 2003.

- [5] ———, « Higher composition laws. I. A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations », *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), no. 1, p. 217–250.
- [6] ———, « Higher composition laws. II. On cubic analogues of Gauss composition », *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), no. 2, p. 865–886.
- [7] ———, « Higher composition laws. III. The parametrization of quartic rings », *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), no. 3, p. 1329–1360.
- [8] D.A. BUELL – *Binary quadratic forms*, Springer-Verlag, 1989.
- [9] F. CHAMIZO & H. IWANIEC – « On the Gauss mean-value formula for class number », *Nagoya Math. J.* **151** (1998), p. 199–208.
- [10] H. COHEN – *A course in computational algebraic number theory*, 3^e éd., Springer-Verlag, 1996.
- [11] ———, « Constructing and counting number fields », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, p. 129–138.
- [12] H. COHEN, F. DIAZ Y DIAZ & M. OLIVIER – « Enumerating quartic dihedral extensions of \mathbb{Q} », *Compositio Math.* **133** (2002), no. 1, p. 65–93.
- [13] ———, « On the density of discriminants of cyclic extensions of prime degree », *J. reine angew. Math.* **550** (2002), p. 169–209.
- [14] H. COHEN & H.W. LENSTRA, JR. – « Heuristics on class groups of number fields », in *Number theory, Noordwijkerhout 1983*, Lecture Notes in Math., vol. 1068, Springer, Berlin, 1984, p. 33–62.
- [15] H. COHEN & J. MARTINET – « Études heuristiques des groupes de classes des corps de nombres », *J. reine angew. Math.* **404** (1990), p. 39–76.
- [16] D. COX – *Primes of the form $x^2 + ny^2$* , Wiley-Interscience, 1989.
- [17] B. DATSKOVSKY & D.J. WRIGHT – « The adelic zeta function associated to the space of binary cubic forms. II. Local theory », *J. reine angew. Math.* **367** (1986), p. 27–75.
- [18] ———, « Density of discriminants of cubic extensions », *J. reine angew. Math.* **386** (1988), p. 116–138.
- [19] B.A. DATSKOVSKY – « On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary quadratic forms », *Nagoya Math. J.* **142** (1996), p. 95–132.
- [20] H. DAVENPORT – « On a principle of Lipschitz », *J. London Math. Soc.* **26** (1951), p. 179–183, corrigendum *ibid* **39** (1964), p. 580.
- [21] H. DAVENPORT & H. HEILBRONN – « On the density of discriminants of cubic fields (ii) », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **322** (1971), p. 405–420.
- [22] B.N. DELONE & D.K. FADDEEV – *The theory of irrationalities of the third degree*, Translations of Math. Monographs, vol. 10, American Mathematical Society, 1964.
- [23] G. EISENSTEIN – « Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variablen », *J. reine angew. Math.* **27** (1844), p. 89–104.
- [24] J. ELLENBERG & A. VENKATESH – « The number of extensions of a number field with fixed degree and bounded discriminant », *Ann. of Math.*, à paraître.
- [25] W.T. GAN, B. GROSS & G. SAVIN – « Fourier coefficients of modular forms on G_2 », *Duke Math. J.* **115** (2002), no. 1, p. 105–169.

- [26] D. GOLDFELD & J. HOFFSTEIN – « Eisenstein series of $\frac{1}{2}$ -integral weight and the mean value of real Dirichlet L -series », *Invent. Math.* **80** (1985), no. 2, p. 185–208.
- [27] J.W. HOFFMAN & J. MORALES – « Arithmetic of binary cubic forms », *Enseign. Math. (2)* **46** (2000), no. 1-2, p. 61–94.
- [28] M.N. HUXLEY – « Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function », in *Number theory for the millennium, II (Urbana, IL, 2000)*, AK Peters, Natick, MA, 2002, p. 275–290.
- [29] J.-I. IGUSA – *An introduction to the theory of local zeta functions*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [30] A.C. KABLE & A. YUKIE – « Prehomogeneous vector spaces and field extensions. II », *Invent. Math.* **130** (1997), no. 2, p. 315–344.
- [31] M. KASHIWARA – « B -functions and holonomic systems. Rationality of roots of B -functions », *Invent. Math.* **38** (1976/77), no. 1, p. 33–53.
- [32] T. KIMURA – « The b -functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces », *Nagoya Math. J.* **85** (1982), p. 1–80.
- [33] J. KLÜNERS – « On the asymptotics of number fields with given Galois group », 2003, *Explicit Methods in Number Theory* (Oberwolfach). Exposé.
- [34] J. KLÜNERS & G. MALLE – « Counting nilpotent Galois extensions », *J. reine angew. Math.*, à paraître.
- [35] P.G. LEJEUNE DIRICHLET – *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Vierte, umgearbeitete und vermehrte Auflage, Chelsea Publishing Co., New York, 1968.
- [36] R. LIPSCHITZ – « Über die asymptotischen Gesetze von gewissen Gattungen zahlentheoretischer Funktionen », *Monatsber. der Berl. Acad* (1865), § 174sqq.
- [37] S. MÄKI – *On the density of abelian number fields*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes, vol. 54, 1985.
- [38] G. MALLE – « On the distribution of Galois groups », *J. Number Theory* **92** (2002), no. 2, p. 315–329.
- [39] _____, « On the distribution of Galois groups, II », preprint, 2002.
- [40] D.P. ROBERTS – « Density of cubic field discriminants », *Math. Comp.* **70** (2001), no. 236, p. 1699–1705.
- [41] H. RUBENTHALER – « Formes réelles des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **36** (1986), no. 1, p. 1–38.
- [42] H. SAITO – « On a classification of prehomogeneous vector spaces over local and global fields », *J. Algebra* **187** (1997), no. 2, p. 510–536.
- [43] _____, « Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces », *Nagoya Math. J.* **170** (2003), p. 1–31.
- [44] M. SATO – « Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)–the English translation of Sato’s lecture from Shintani’s note », *Nagoya Math. J.* **120** (1990), p. 1–34, traduit du japonais par M. Muro.
- [45] M. SATO & T. KIMURA – « A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants », *Nagoya Math. J.* **65** (1977), p. 1–155.

- [46] M. SATO & T. SHINTANI – « On zeta functions associated with prehomogenous vector spaces », *Ann. of Math.* **100** (1974), p. 131–170.
- [47] J.-P. SERRE – « Une “formule de masse” pour les extensions totalement ramifiées de degré donné d’un corps local », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **286** (1978), no. 22, p. A1031–A1036.
- [48] D. SHANKS – « On Gauss and composition. I, II », in *Number theory and applications (Banff, AB, 1988)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 265, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, p. 163–178, 179–204.
- [49] T. SHINTANI – « On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms », *J. Math. Soc. Japan* **24** (1972), p. 132–188.
- [50] ———, « On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **22** (1975), p. 25–66.
- [51] C.L. SIEGEL – « The average measure of quadratic forms with given determinant and signature », *Ann. of Math. (2)* **45** (1944), p. 667–685.
- [52] È.B. VINBERG – « The classification of nilpotent elements of graded Lie algebras », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **225** (1975), no. 4, p. 745–748.
- [53] S. WONG – « Automorphic forms on $GL(2)$ and the rank of class groups », *J. reine angew. Math.* **515** (1999), p. 125–153.
- [54] D.J. WRIGHT – « The adelic zeta function associated to the space of binary cubic forms. I. Global theory », *Math. Ann.* **270** (1985), no. 4, p. 503–534.
- [55] ———, « Distribution of discriminants of abelian extensions », *Proc. London Math. Soc. (3)* **58** (1989), no. 1, p. 17–50.
- [56] D.J. WRIGHT & A. YUKIE – « Prehomogeneous vector spaces and field extensions », *Invent. Math.* **110** (1992), no. 2, p. 283–314.
- [57] A. YUKIE – *Shintani zeta functions*, LMS Lect. Notes Series, vol. 183, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [58] D. ZAGIER – « Cubic forms and cubic rings », 2001, *Explicit Methods in Number Theory* (Oberwolfach). Exposé.

Karim BELABAS

Université Paris-Sud
Département de Mathématiques (Bât. 425)
F-91405 Orsay Cedex
E-mail : Karim.Belabas@math.u-psud.fr

CAPACITÉ ANALYTIQUE ET LE PROBLÈME DE PAINLEVÉ

par Hervé PAJOT

1. INTRODUCTION

Nous dirons qu'un compact E du plan complexe est *effaçable* pour les fonctions holomorphes bornées si pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$ contenant E , toute fonction holomorphe bornée $f : U \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ admet une extension analytique dans U tout entier. Le *problème de Painlevé* consiste à donner une caractérisation métrique et/ou géométrique de ces ensembles effaçables. À ma connaissance, cette question est explicitement posée pour la première fois dans un article de Lars Ahlfors [1] en 1947. Dans ce papier, il introduit la capacité analytique $\gamma(E)$ définie par

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| \mid f : \mathbb{C} \setminus E \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est analytique et bornée avec } \|f\|_\infty \leq 1\}$$

(où $f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty))$) et il démontre que le compact E est effaçable si et seulement si $\gamma(E) = 0$. Cependant, comme l'écrit Ahlfors lui-même, cette réponse n'est pas satisfaisante, dans la mesure où l'étude de la capacité analytique n'est pas aisée. Avant la caractérisation des ensembles effaçables donnée par X. Tolsa [48] en 2003, les résultats connus étaient les suivants. Dans les faits 1, 2, 3 et 4, E est un compact du plan complexe.

Fait 1. — Si $H^1(E) = 0$ (où H^1 désigne la mesure de Hausdorff de dimension 1), alors E est effaçable.

Fait 2. — Si la dimension de Hausdorff de E (que nous noterons $\text{Hdiam}(E)$) est strictement plus grande que 1, alors E n'est pas effaçable.

Les faits 1 et 2 traduisent l'idée intuitive que la propriété d'être effaçable ou non devrait dépendre de la taille de l'ensemble. Ainsi, d'après un théorème de Riemann, un singleton est effaçable. D'un autre côté, grâce au théorème de représentation de Riemann, nous pouvons facilement nous convaincre qu'un continuum (c'est-à-dire un ensemble compact et connexe) du plan complexe qui n'est pas réduit à un point

ne l'est pas. Cependant, des exemples dus à Vitushkin, Ivanov et Garnett montrent que les seules considérations de taille ne suffisent pas à caractériser les ensembles effaçables. Les propriétés de rectifiabilité, c'est-à-dire d'approximation par des courbes lipschitziennes, doivent aussi jouer un rôle. Remarquons que les faits 1 et 2 impliquent que le cas « intéressant » est celui des compacts du plan de dimension de Hausdorff 1 qui satisfont à $H^1(E) > 0$.

Fait 3. — Supposons que E soit contenu dans une courbe lipschitzienne Γ . Alors, E est effaçable si et seulement si $H^1(E) = 0$.

Fait 4. — Si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si $H^1(E \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe lipschitzienne Γ .

Notons que le fait 1 implique le sens indirect du fait 3 et que celui-ci implique le sens direct du fait 4. Les démonstrations des faits 3 et 4 sont beaucoup plus difficiles que celles des faits 1 et 2. Alors que ces énoncés semblent plutôt liés à l'analyse complexe, leurs preuves requièrent des techniques fines d'analyse réelle (théorie des intégrales singulières de Calderón-Zygmund, en particulier dans les espaces non doublants) et de théorie de la mesure géométrique (problème du voyageur de commerce géométrique de Peter Jones, théorie de la rectifiabilité uniforme de David et Semmes). La condition de finitude de la mesure de Hausdorff dans l'énoncé du fait 4 est nécessaire. La solution proposée par Tolsa se passe de cette condition et donne donc une caractérisation complète des ensembles effaçables. Les progrès sur le problème de Painlevé ont été relativement lents. Il faut souligner que l'intérêt pour la capacité analytique a été relancé par les travaux de A.G. Vitushkin en théorie de l'approximation rationnelle [52] dans les années 1960. Le fait 1 est généralement attribué à Paul Painlevé lui-même [38]. Le fait 2 apparaît (sous une forme un peu différente) dans l'article de Lars Ahlfors [1]. Avant qu'une preuve complète en soit donnée, l'énoncé du fait 3 s'appelait « Conjecture de Denjoy ». En effet, A. Denjoy [14] l'avait démontré dans le cas où la courbe Γ est une droite et il pensait que sa démonstration s'étendait au cas des courbes lipschitziennes générales. Il n'en était rien, comme l'ont remarqué L. Ahlfors et A. Beurling [2]. En 1978, A.P. Calderón [3] démontrait la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens (à condition que la constante de Lipschitz soit suffisamment petite). Un corollaire de ce résultat (connu des experts, mais pas de Calderón) était le fait 3. Le fait 4 avait été conjecturé par A.G. Vitushkin (sans d'ailleurs l'hypothèse $H^1(E) < +\infty$ et sous une forme légèrement différente, voir section 2.1.2). À la suite d'une série de travaux de M. Christ, P. Jones, P. Mattila, M. Melnikov, J. Verdera entre autres, Guy David [9] donnera une preuve complète du fait 4 en 1998. Un outil d'apparence élémentaire joue un rôle important dans cette histoire. Il s'agit de la courbure de Menger. Étant donnés 3 points z_1, z_2, z_3 distincts

et non alignés du plan complexe \mathbb{C} , on définit leur courbure de Menger par

$$c(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{R(z_1, z_2, z_3)}$$

où $R(z_1, z_2, z_3)$ est le rayon du cercle circonscrit aux trois points. Si ces points ne sont pas distincts ou sont alignés, on pose $c(z_1, z_2, z_3) = 0$. Si μ est une mesure de Radon positive dans \mathbb{C} , on définit sa courbure de Menger par

$$c^2(\mu) = \iiint c(x, y, z)^2 d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de Tolsa.

THÉORÈME 1.1 (X. Tolsa). — *Soit E un compact du plan complexe. Alors, E n'est pas effaçable si et seulement si E supporte une mesure de Radon positive (non nulle) μ telle que*

(T1) *Il existe $C_0 > 0$ tel que $\mu(D(z, r)) \leq C_0 r$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout $r > 0$ ($D(z, r)$ est le disque ouvert de centre z et de rayon r).*

(T2) $c^2(\mu) < +\infty$.

Nous verrons dans la suite que (T1) est une condition sur la taille de l'ensemble, alors que (T2) est une condition de nature plus géométrique. Dans ce texte, une mesure satisfaisant (T1) sera dite à croissance linéaire (du volume).

Dans le paragraphe 2, nous introduirons les outils et les techniques d'analyse réelle et de théorie de la mesure géométrique dont nous aurons besoin pour expliquer la stratégie de démonstration de Tolsa. En particulier, nous verrons comment l'analyse harmonique s'est débarrassée de la condition de doublement du volume (travaux de Nazarov-Treil-Volberg et de Tolsa). Nous montrerons aussi comment déduire les faits 1, 2, 3 et 4 du théorème 1.1. Les démonstrations directes sont souvent plus simples, mais ceci permettra au lecteur de se convaincre que le résultat de Tolsa contient ce qui était connu avant et de se familiariser avec les diverses notions introduites au cours du texte. Dans le paragraphe 3, nous expliquerons comment la caractérisation de Tolsa permet de résoudre le problème de l'invariance par homéomorphismes bilipschitziens de la classe des ensembles effaçables. Nous discuterons dans le paragraphe 4 de problèmes ouverts autour de la capacité analytique et de la longueur de Favard, qui nous permettront de voir que la courbure de Menger n'est pas un objet aussi simple qu'il n'y paraît. Enfin, le paragraphe 5 sera consacré au cas (largement ouvert) de la dimension supérieure.

Je remercie L. Chevalier, G. David, J. Garnett, Y. Meyer, X. Tolsa, J. Verdera et A. Volberg pour leurs remarques sur des versions préliminaires de ce texte. L'auteur est partiellement supporté par le réseau européen TMR « Harmonic Analysis and Related Problems (HARP) ».

Je dédie avec beaucoup d'amour ces quelques lignes à mon fils, Hervé-Maurice, né et décédé le même jour. Un sombre jour de mai 2004.

2. DE L'ANALYSE COMPLEXE VERS L'ANALYSE RÉELLE

Nous allons dans un premier temps voir comment les propriétés de rectifiabilité peuvent être contrôlées par des quantités géométriques (comme les nombres β de Peter Jones et la courbure de Menger). Cela nous permettra de relier ces propriétés de rectifiabilité à la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy (voir par exemple le théorème 2.13). Nous pourrons alors donner quelques idées de démonstration du fait 4 (voir le début de la section 2.2.2) et du théorème 1.1.

2.1. Nombres géométriques et rectifiabilité

2.1.1. *Mesures et dimension de Hausdorff.* — Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et soit $d \in \mathbb{R}^+$. Nous définissons la d -mesure de Hausdorff de E par

$$H^d(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf \left\{ \sum_i (\text{diam } U_i)^d \mid E \subset \cup_i U_i, \text{diam } U_i < \delta \right\} \right).$$

Notons qu'ici les recouvrements considérés sont (au plus) dénombrables. Alors, H^d est une mesure de Borel régulière. Elle n'est pas de Radon (sauf si $d = n$) car elle n'est pas localement finie. Si $d = 0$, nous retrouvons la mesure de comptage. Pour une courbe de Jordan rectifiable Γ de \mathbb{R}^n , $H^1(\Gamma)$ est sa longueur. Enfin, H^n est égale (à une constante multiplicative près) à la mesure de Lebesgue \mathcal{L}^n de \mathbb{R}^n . Par un argument élémentaire, nous pouvons démontrer que $\inf\{s \mid H^s(E) = 0\} = \sup\{t \mid H^t(E) = +\infty\}$. Cette valeur commune est appelée la dimension de Hausdorff de E . Nous la noterons $\text{Hdiam}(E)$. Par exemple, la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est $\log(2)/\log(3)$, celle d'une courbe de longueur finie est 1. Enfin, $\text{Hdiam}(\mathbb{R}^n) = n$. Un point-clé pour nous est le lemme de Frostman (voir [27] pour une démonstration, ainsi que pour plus de détails sur la théorie de la mesure géométrique) que voici :

THÉORÈME 2.1. — *Soit E un borélien de \mathbb{R}^n et soit $d \geq 0$. Alors, $H^d(E) > 0$ si et seulement si E supporte une mesure de Radon positive μ (à support compact) telle que*

- (i) $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ (μ est une mesure de probabilité).
- (ii) Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $\mu(B(x, R)) \leq C_0 R^d$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $R > 0$. Ici, et dans la suite, $B(x, R)$ désigne la boule euclidienne de centre x et de rayon R .

Nous pouvons maintenant voir que le théorème de Tolsa implique le fait 1. En effet, soit E un compact du plan complexe tel que $H^1(E) = 0$. Alors, d'après le lemme de Frostman, E ne peut supporter une mesure μ à croissance linéaire (condition (T1) du théorème 1.1). Donc, E est effaçable. Signalons que le fait 1 peut se démontrer directement (et facilement) grâce à la formule de Cauchy (voir le théorème 64 dans [40]).

2.1.2. Rectifiabilité. — Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit d -rectifiable (au sens de la théorie géométrique de la mesure) s'il existe une famille dénombrable d'applications lipschitziennes $f_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $H^d(E \setminus \cup_j f_j(\mathbb{R}^d)) = 0$. Une courbe rectifiable Γ de \mathbb{R}^n est 1-rectifiable. D'un autre côté, un ensemble E est dit purement non d -rectifiable si et seulement si $H^d(E \cap F) = 0$ pour tout ensemble d -rectifiable F de \mathbb{R}^n . Dans le cas particulier où $d = 1$, cette condition est équivalente à $H^1(E \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe rectifiable Γ de \mathbb{R}^n . Donc, le fait 4 dit que si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si E est purement non 1-rectifiable. Un exemple d'un tel ensemble est l'ensemble de Cantor 4-coins que nous allons maintenant construire. Soit $E_0 = [0, 1]^2$ le carré unité dans \mathbb{C} . Découpons E_0 en 16 carrés égaux de longueur de côté $\frac{1}{4}$. L'ensemble E_1 est l'union des 4 carrés situés dans les coins de E_0 . Puis, on découpe chacun des 4 carrés en 16 carrés identiques et l'ensemble E_2 est l'union des 16 carrés qui sont situés dans les coins des 4 carrés de E_1 . En itérant cette construction, nous pouvons exhiber une suite de sous-ensembles $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{C} , chacun des E_j étant formé de 4^j carrés de longueur de côté 4^{-j} qui sont situés dans les coins des carrés de E_{j-1} . Soit $\mathcal{C} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j$. Alors, $\text{Hdiam}(\mathcal{C}) = 1$ et $H^1(\mathcal{C}) = \sqrt{2}$. Le fait que \mathcal{C} est purement non rectifiable découle de la remarque suivante. Si Γ est une courbe lipschitzienne du plan complexe, sa projection dans toute direction sauf peut-être une (penser au cas où Γ est une droite) est de mesure de Lebesgue (dans \mathbb{R}) non nulle. Il en est de même de tout sous-ensemble de Γ de mesure strictement positive. Donc, s'il existait une courbe lipschitzienne Γ telle que $H^1(\mathcal{C} \cap \Gamma) > 0$ alors \mathcal{C} ne pourrait pas avoir des projections de mesure de Lebesgue nulle dans deux directions distinctes. Ce qui est pourtant le cas! Donc, \mathcal{C} est purement non rectifiable. L'ensemble de Cantor 4-coins est un exemple d'ensemble de 1-mesure de Hausdorff non nulle mais qui est effaçable (voir [16]).

Tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $H^d(E) < +\infty$ se décompose en une bonne et une mauvaise partie :

$$E = E_{\text{rect}} \cup E_{\text{nonrect}}$$

où E_{rect} (respectivement E_{nonrect}) est d -rectifiable (respectivement purement non d -rectifiable). Il est important de noter qu'il existe diverses caractérisations des ensembles rectifiables/purement non rectifiables (en termes de densité, d'existence de tangentes, de taille des projections, voir [27]) dans le cas des ensembles de mesure de Hausdorff finie. Cependant, les propriétés de rectifiabilité pour des ensembles qui ne sont pas de mesure de Hausdorff σ -finie sont très mal connues. Donnons maintenant un critère de non rectifiabilité pour les sous-ensembles du plan complexe. Commençons par une définition. Soit $E \subset \mathbb{C}$. Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, notons $\Pi_\theta(E)$ la projection orthogonale de E sur la direction θ et $|\Pi_\theta(E)|$ la mesure de Lebesgue (dans \mathbb{R}) de cette projection. Nous définissons la longueur de Favard de E par

$$\text{Fav}(E) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\Pi_\theta(E)| d\theta.$$

Le théorème des projections de Besicovitch s'énonce ainsi :

THÉORÈME 2.2. — *Soit $E \subset \mathbb{C}$ tel que $H^1(E) < +\infty$. Alors, E est purement non rectifiable si et seulement si $\text{Fav}(E) = 0$.*

Donc, d'après le fait 4, si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si $\text{Fav}(E) = 0$. Vituskhin avait conjecturé ce résultat sans l'hypothèse $H^1(E) < +\infty$. Nous discuterons de ce cas dans le paragraphe 4.

2.1.3. Le problème géométrique du voyageur de commerce. — Nous allons, dans ce paragraphe, donner des conditions quantitatives de rectifiabilité. Le point de départ est un article de P. Jones [18] qui a eu l'idée d'introduire les nombres β qui mesurent en tout point et à toutes les échelles la qualité de l'approximation d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ par des droites. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t > 0$, nous définissons

$$\beta_\infty^E(x, t) = \inf_L \sup_{y \in E \cap B(x, t)} \frac{d(y, L)}{t}$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les droites L de \mathbb{R}^n .

Posons $\beta(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \beta_\infty^E(x, t)^2 d\mathcal{L}^n(x) \frac{dt}{t^n}$, où \mathcal{L}^n est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . Si E est, par exemple, le graphe d'une fonction lipschitzienne, alors en presque tout $x \in E$, il existe une tangente au graphe et donc $\beta_\infty^E(x, t)$ tend vers 0 avec t . En fait, nous allons voir que les propriétés de rectifiabilité sont liées à des estimations L^2 des nombres β .

THÉORÈME 2.3 ([18] [37]). — *Soit E un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^n . L'ensemble E est contenu dans une courbe de longueur finie Γ si et seulement si $\beta(E) < +\infty$. De plus, si c'est le cas,*

$$C^{-1}(\beta(E) + \text{diam } E) \leq \inf_{\Gamma \supset E} l(\Gamma) \leq C(\beta(E) + \text{diam } E)$$

où $C \geq 1$ est une constante ne dépendant que de n .⁽¹⁾

Ce résultat apparaît comme une version géométrique du problème classique du voyageur de commerce, dans la mesure où l'ensemble E des villes que le voyageur doit visiter peut être infini. Le théorème donne alors une condition nécessaire et suffisante pour que le voyageur puisse remplir sa tâche en un « temps fini ». Nous allons maintenant donner une version du théorème 2.3 qui a un analogue pour des ensembles de dimension strictement plus grande que 1. Commençons par une définition. Nous dirons qu'un ensemble (non réduit à un point) $E \subset \mathbb{R}^n$ est Ahlfors-régulier (de dimension 1) s'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$C_0^{-1}R \leq H^1(E \cap B(x, R)) \leq C_0R$$

⁽¹⁾Très récemment, R. Schul a démontré dans [44] que la constante C peut être choisie indépendante de la dimension ambiante n .

pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$. Notons qu'un tel ensemble est alors de dimension de Hausdorff égale à 1. Cette condition d'Ahlfors-régularité impose peu de restriction sur la géométrie de l'ensemble. Par exemple, sont Ahlfors-réguliers des ensembles rectifiables comme les graphes lipschitziens et des ensembles purement non rectifiables comme l'ensemble de Cantor 4 coins. Une courbe Ahlfors-régulière Γ est une courbe localement rectifiable telle qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $H^1(\Gamma \cap B(x, r)) \leq C_0 r$ pour tout $x \in \Gamma$, tout $r > 0$. Notons que, par connexité, nous avons aussi $H^1(\Gamma \cap B(x, r)) \geq C_0^{-1} r$ si $x \in \Gamma$ et r est assez petit. Suivant David et Semmes [11] [12], nous dirons qu'un ensemble Ahlfors-régulier E est uniformément rectifiable s'il existe une courbe Ahlfors-régulière Γ telle que $E \subset \Gamma$.

THÉORÈME 2.4. — *Supposons que $E \subset \mathbb{C}$ soit compact et Ahlfors-régulier (de dimension 1).*

(i) *L'ensemble E est uniformément rectifiable si et seulement si il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$,*

$$\int_{y \in E \cap B(x, R)} \int_0^R \beta_\infty^E(y, t)^2 dH^1(y) \frac{dt}{t} \leq CR.$$

(ii) *L'ensemble E est rectifiable si et seulement si $\int_0^{\text{diam } E} \beta_\infty^E(x, t)^2 \frac{dt}{t} < \infty$ pour H^1 -presque tout $x \in E$.*

Le (i) s'obtient en adaptant les arguments de la démonstration du théorème 2.3. Il existe bien d'autres caractérisations des ensembles uniformément rectifiables (voir [11] et [12]). Le (ii) découle en partie de (i) (voir [39]).

2.1.4. *La courbure de Menger.* — Nous avons rencontré dans l'introduction un autre « nombre géométrique », à savoir la courbure de Menger. Son côté magique repose dans la formule élémentaire suivante.

$$(1) \quad \left(\frac{4S(z_1, z_2, z_3)}{|z_1 - z_2||z_2 - z_3||z_3 - z_1|} \right)^2 = c(z_1, z_2, z_3)^2 = \sum_{\sigma} \frac{1}{(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(2)})(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)})}$$

où $S(z_1, z_2, z_3)$ est l'aire du triangle de sommets z_1, z_2 et z_3 , et la somme se fait sur les permutations σ sur $\{1, 2, 3\}$. Le membre de gauche mesure la « platitude » du triplet z_1, z_2, z_3 , alors que nous verrons un peu plus tard que le membre de droite est relié à l'intégrale de Cauchy. Ainsi, la courbure de Menger va nous permettre de faire le lien entre propriétés géométriques (rectifiabilité) et propriétés analytiques (continuité de l'opérateur de Cauchy). Commençons par le premier aspect.

THÉORÈME 2.5 ([21]). — *Soit E un sous-ensemble compact de \mathbb{C} tel que $H^1(E) < +\infty$. Si $c^2(E) < +\infty$, alors E est 1-rectifiable.*

Ici, $c^2(E)$ désigne la courbure de Menger de la restriction de H^1 à E . Dans le cas Ahlfors-régulier, la courbure de Menger permet de caractériser la rectifiabilité uniforme.

THÉORÈME 2.6. — Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Alors, E est uniformément rectifiable si et seulement si il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout disque D de \mathbb{C} ,

$$(2) \quad \iiint_{(E \cap D)^3} c(x, y, z)^2 dH^1(x) dH^1(y) dH^1(z) \leq C_0 \operatorname{diam} D.$$

La condition (2) s'appelle la condition de courbure locale. Ce résultat est énoncé et démontré dans [30]. Nous pouvons aussi le voir comme une conséquence du théorème 2.4(i) et des deux résultats suivants qui font le lien entre courbure de Menger et nombres β (voir [40]).

Attention, les « exposants » dans les nombres β précisent à quel ensemble les β réfèrent.

THÉORÈME 2.7. — Soit Γ une courbe rectifiable de \mathbb{C} et soit μ une mesure de Radon positive telle que $\operatorname{supp} \mu$ soit un sous-ensemble compact de Γ . Supposons que μ est à croissance linéaire du volume (c'est-à-dire vérifie (T1)) avec une constante $1/2$:

$$\mu(D) \leq \operatorname{diam} D \text{ pour tout disque } D \subset \mathbb{C}.$$

Alors, $c^2(\mu) \leq C \int_{\mathbb{C}} \int_0^{+\infty} \beta_{\infty}^{\Gamma}(x, t)^2 d\mu(x) \frac{dt}{t}$, où $C > 0$ est une constante absolue. Si de plus, Γ est Ahlfors-régulière, alors $c^2(\mu) \leq C\mu(\mathbb{C})$ où $C > 0$ ne dépend que de la constante de régularité de Γ .

THÉORÈME 2.8. — Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Alors, pour tout disque D de \mathbb{C} ,

$$\int_{E \cap D} \int_0^{\operatorname{diam} D} \beta_{\infty}^E(x, t)^2 dH^1(x) \frac{dt}{t} \leq C \iiint_{(E \cap C \cdot D)^3} c(x, y, z)^2 dH^1(x) dH^1(y) dH^1(z)$$

où $C > 0$ ne dépend que de la constante de régularité de E .

Dans la seconde intégrale, $C \cdot D$ désigne le disque de même centre que D mais de diamètre $C \cdot \operatorname{diam} D$. Il est important de noter que les nombres β sont plus faciles à manipuler en pratique que la courbure de Menger, d'où l'intérêt d'avoir des estimations qui permettent de passer de l'un à l'autre. Nous allons maintenant voir comment le théorème de Tolsa implique les faits 3 et 4. Tout d'abord, soit $E \subset \Gamma$, où Γ est une courbe rectifiable, tel que $H^1(E) > 0$. Alors, d'après le lemme de Frostman, il existe une mesure de probabilité μ supportée sur E à croissance linéaire. Donc, d'après les théorèmes 2.3 et 2.7, $c^2(\mu) < +\infty$. D'où, E n'est pas effaçable. Passons maintenant au fait 4 et supposons que $E \subset \mathbb{C}$ ne soit pas effaçable. Alors, il existe une mesure μ supportée sur E qui est à croissance linéaire et de courbure finie. Donc, d'après le théorème 2.5 (et avec un peu de travail), le support de μ est rectifiable. D'où, il existe une courbe lipschitzienne Γ telle que $H^1(E \cap \Gamma) > 0$.

Il est amusant de noter que la courbure de Menger d'une mesure supportée sur un ensemble de dimension plus grande que 1 peut être finie, sans que la géométrie de cet ensemble n'entre en compte. En effet, nous avons le

THÉORÈME 2.9 ([28]). — Soit $h : [0, +\infty] \rightarrow [0, \infty]$ une fonction strictement croissante telle que $\int_0^{+\infty} r^{-3}h^2(r)dr < \infty$ et soit μ une mesure de Borel finie dans \mathbb{C} telle que, pour tout disque D de rayon $r > 0$, $\mu(D) \leq Ch(r)$. Alors,

$$c^2(\mu) \leq C\mu(\mathbb{C}) \int_0^{+\infty} r^{-3}h^2(r)dr,$$

où $C > 0$ est une constante absolue.

En particulier, si E est de dimension de Hausdorff strictement plus grande que 1, alors il existe $d > 1$ tel que $H^d(E) > 0$. Donc, d'après le lemme de Frostman, il existe une mesure de probabilité μ supportée par E telle que $\mu(D) \leq CR^d$ pour tout disque D de \mathbb{C} de rayon $R > 0$. Or, d'après le théorème 2.9 (prendre $h(t) = t^d$), $c^2(\mu) < +\infty$. Donc, E n'est pas effaçable. Le théorème de Tolsa implique donc le fait 2. Pour une preuve directe, voir [40], théorème 64.

2.2. Analyse harmonique sans doublement du volume

2.2.1. *La théorie classique.* — Un espace de type homogène au sens de Coifman-Weiss est un triplet (X, δ, μ) où X est un ensemble (pour nous, un sous-ensemble de \mathbb{C}), δ est une distance (ou une quasi-distance) sur X et μ est une mesure (de Radon positive), supportée sur X , qui satisfait la condition de doublement du volume, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C_{dv} \geq 1$ telle que

$$(DV) \quad \mu(B(x, 2R)) \leq C_{dv}\mu(B(x, R))$$

pour toute boule $B(x, R)$ relativement à δ de centre $x \in X$ et de rayon $R > 0$. Beaucoup de faits classiques d'analyse dans les espaces euclidiens restent vrais dans ces espaces homogènes. Le point-clé est que la condition (DV) permet d'utiliser des théorèmes de recouvrement de type Vitali (voir par exemple le premier chapitre de [45]). Le fait que ces espaces soient un cadre assez général pour faire de l'analyse harmonique apparaît après les travaux de Coifman et Weiss [7] au début des années 1970. Il est clair que \mathbb{C} muni de sa structure euclidienne et de sa mesure de Lebesgue est un espace de type homogène. Il en est de même si X est un sous-ensemble de \mathbb{C} qui est Ahlfors-régulier (de dimension quelconque d). Dans ce cas, on munit X de la distance euclidienne induite et de la restriction de la mesure de Hausdorff H^d sur X (et c'est ce que nous ferons systématiquement dans la suite). En particulier, peuvent être équipés d'une structure d'espace homogène toute droite (vue comme sous-ensemble de \mathbb{C}), tout graphe lipschitzien de \mathbb{C} (c'est-à-dire le graphe, à une rotation près d'une fonction lipschitzienne $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), ou l'ensemble de Cantor 4-coins. Décrivons maintenant quelques éléments de la théorie des intégrales singulières dans les espaces homogènes

(voir par exemple [5] pour plus de détails), en nous restreignant au cas des espaces homogènes contenus dans \mathbb{C} .

Un noyau standard antisymétrique pour la dimension 1 est une fonction $K(x, y) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{x = y\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe des constantes $s \in]0, 1]$ et $C > 0$ vérifiant, pour tout $x \neq y$,

- (i) $K(x, y) = -K(y, x)$;
- (ii) $|K(x, y)| \leq C \frac{1}{|x-y|}$;
- (iii) $|K(x, y) - K(x', y)| \leq C \frac{|x-x'|^s}{|x-y|^{1+s}}$ si $|x-x'| < \frac{1}{2}|x-y|$.

Ainsi, le comportement de $K(x, y)$ est comparable à celui de $1/(x-y)$. Considérons maintenant une mesure de Radon positive μ sur \mathbb{C} . Dans ce cas, si μ vérifie (DV), l'espace homogène considéré est le support de la mesure muni de la distance euclidienne induite et de la mesure μ . Nous définissons l'opérateur tronqué T_μ^ε associé au noyau standard K par

$$T_\mu^\varepsilon(f)(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x, y)f(y)d\mu(y)$$

pour $f \in L^1(\mu)$ et $x \in \mathbb{C}$.

Nous dirons que l'opérateur T_μ associé au noyau K est continu sur $L^p(\mu)$ s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, toute fonction $f \in L^p(\mu)$,

$$\int |T_\mu^\varepsilon(f)(x)|^p d\mu(x) \leq C \int |f(x)|^p d\mu(x).$$

En d'autres termes, T_μ^ε est borné sur $L^p(\mu)$ indépendamment de ε . Cette définition de la continuité L^p est équivalente à la plupart des définitions disponibles dans la littérature et permet d'éviter d'avoir à définir proprement $T_\mu(f)$. Un premier fait important est que si μ satisfait la condition de doublement du volume (et donc son support est un espace homogène) et est à croissance linéaire, alors le théorème de Calderón-Zygmund nous dit que, si un opérateur T_μ est continu sur $L^2(\mu)$, alors il est continu sur $L^p(\mu)$ pour $1 < p < \infty$ et il est de type faible $(1, 1)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que, pour tout $M > 0$,

$$\mu(\{x \in \mathbb{C} \mid |T_\mu^\varepsilon(f)(x)| > M\}) \leq \frac{C}{M} \int |f| d\mu$$

pour toute fonction f dans $L^1(\mu)$. Ainsi, compte tenu de ce résultat, la continuité L^2 qui peut être obtenue par des méthodes d'analyse de Fourier joue un rôle crucial dans cette théorie. Considérons par exemple le cas du noyau de Cauchy $K(x, y) = 1/(x-y)$. Dans ce cas, nous noterons \mathcal{C}_μ l'opérateur associé. Si la mesure μ est la restriction de H^1 à \mathbb{R} , l'opérateur s'appelle l'opérateur de Hilbert et sa continuité L^2 s'obtient facilement en passant en transformée de Fourier et en appliquant le théorème de Plancherel. Dans le cas où μ est la restriction de H^1 à un graphe lipschitzien, le problème est plus ardu. Cette continuité a été conjecturée par Calderón et Zygmund dans les années 1950, puis démontrée par Calderón [3] dans le cas où la constante de

Lipschitz du graphe est assez petite. Le cas général a été résolu par Coifman, Mc Intosh et Meyer [6]. Il est amusant de noter que de nombreuses preuves très différentes ont été proposées depuis. Un problème important dans les années 1980 est alors d'établir des critères de continuité L^2 pour les opérateurs d'intégrales singulières, en s'inspirant du cas de l'opérateur de Cauchy. Le premier de ces critères a été obtenu par G. David et J.-L. Journé et porte le nom de théorème $T(1)$.

THÉORÈME 2.10. — *Soit μ une mesure doublante et à croissance linéaire, et soit K un noyau antisymétrique dans \mathbb{C} . Alors, T_μ est continu sur $L^2(\mu)$ si et seulement si, pour tout disque D de \mathbb{C} , tout $\varepsilon > 0$,*

$$(3) \quad \int_D |T_\mu^\varepsilon(\chi_D)(x)|^2 d\mu(x) \leq C\mu(D)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε et de D .

La condition (3) est équivalente au fait que $T_\mu(1)$ (quand on donne un sens convenable à l'image de la fonction 1 par l'opérateur T_μ) est dans l'espace $BMO(\mu)$ de John et Nirenberg, d'où le nom du théorème. Il existe un critère plus flexible (appelé théorème $T(b)$) pour lequel nous testons l'opérateur sur une fonction raisonnable b que nous pouvons choisir. Au lieu de le donner, nous allons en énoncer une version locale due à M. Christ [4], en ne considérant que le cas Ahlfors-régulier. Commençons par équiper un ensemble Ahlfors-régulier (de dimension 1) d'une famille de partitions qui joue le rôle des intervalles dyadiques de \mathbb{R} .

THÉORÈME 2.11. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Il existe une famille de partitions Δ_j , $j \in \mathbb{Z}$ tel que $2^j \leq \text{diam } E$, de E en « intervalles dyadiques » $Q \subset E$ avec :*

- (i) *Si $j \geq k$, $Q \in \Delta_j$, $Q' \in \Delta_k$, alors soit $Q \cap Q' = \emptyset$, soit $Q' \subset Q$.*
- (ii) *Si $Q \in \Delta_j$, alors*

$$C^{-1}2^j \leq \text{diam } Q \leq C2^j$$

$$C^{-1}2^j \leq H^1(Q) \leq C2^j,$$

(où $C > 0$ ne dépend que de E). De plus, les « intervalles dyadiques » ont une petite frontière, au sens où

- (iii) *Pour tout $Q \in \cup_j \Delta_j$, tout $\tau \in]0, 1[$,*

$$H^1(\{z \in Q \mid d(z, E \setminus Q) \leq \tau \text{diam } Q\}) \leq C\tau^{1/C} H^1(Q).$$

Notons que le nombre de fils d'un intervalle dyadique $Q \in \Delta_j$ (c'est-à-dire d'intervalles dyadiques de la génération suivante Δ_{j-1} contenus dans Q) est borné indépendamment de j . Le lecteur pourra vérifier aisément que, si $E = \mathbb{R}$, les intervalles dyadiques usuels, c'est-à-dire ceux de la forme $[k2^j, (k+1)2^j]$, satisfont les propriétés précédentes. Voir [8] pour une démonstration de 2.11, ainsi que [4] pour une construction dans le cas d'une mesure qui n'est que doublante. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un

ensemble Ahlfors-régulier (de dimension 1) et soit $\Delta = \bigcup_j \Delta_j$ une famille d'intervalles dyadiques comme donnés par le théorème précédent. Un système de fonctions $\{b_Q, Q \in \Delta\}$ est dit *pseudo-accréatif* s'il existe des constantes $C > 0$, $\varepsilon > 0$ telles que, pour tout $Q \in \Delta$, $\|b_Q\|_\infty \leq C$ et $\left| \int_Q b_Q dH^1 \right| \geq \varepsilon H^1(Q)$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème $T(b)$ local.

THÉORÈME 2.12. — *Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1 et soit T_μ un opérateur d'intégrale singulière associé à un noyau standard anti-symétrique et défini par rapport à la mesure $\mu = H_E^1$ (restriction de H^1 sur E). Supposons qu'il existe un système pseudo-accréatif (b_Q) tel que $\|T_\mu^\varepsilon b_Q\| \leq C$ pour tout $Q \in \Delta$ et tout $\varepsilon > 0$. Alors, T_μ est borné sur $L^2(\mu)$.*

Le côté local vient du fait qu'ici, nous devons construire une fonction b_Q sur chaque intervalle dyadique Q alors que, dans le théorème $T(b)$ classique, la fonction test b est choisie une fois pour toutes et définie sur E tout entier. Celle-ci doit vérifier une condition de moyenne sur les intervalles dyadiques qui est identique à celle des b_Q , mais la condition L^∞ est remplacée par une condition du type BMO (du style de celles du théorème $T(1)$ en remplaçant la fonction caractéristique par son produit par b), qui est plus faible. Signalons que l'on passe de la version classique à la version locale du théorème $T(b)$ en posant $b_Q = b \cdot \chi_Q$ et que, réciproquement, en « recollant » les b_Q , on peut construire une fonction b qui satisfait les hypothèses du théorème $T(b)$. Revenons à l'opérateur de Cauchy. Nous avons vu qu'il définit un opérateur borné (au sens L^2) sur les graphes lipschitziens. Mais, dans quelle mesure les propriétés de rectifiabilité du support de la mesure jouent-elles un rôle? À la suite de travaux de G. David et S. Semmes [11], [12], P. Mattila, M. Melnikov et J. Verdera [30] ont démontré le résultat étonnant suivant.

THÉORÈME 2.13. — *Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Notons μ la restriction de H^1 sur E . Alors, l'opérateur de Cauchy \mathcal{C}_μ est borné sur $L^2(\mu)$ si et seulement si E est uniformément rectifiable.*

Donnons une idée de la démonstration, car cela nous permettra de voir comment les ingrédients précédents peuvent être associés. Formellement, en oubliant les ε (voir [40] pour les détails techniques), la continuité L^2 de l'opérateur est équivalente, d'après le théorème $T(1)$, à

$$\int_D |\mathcal{C}_E(\chi_D)|^2 d\mu \leq C \operatorname{diam} D$$

pour tout disque D de \mathbb{C} . Ici, nous avons utilisé le fait qu'un ensemble Ahlfors-régulier muni de sa mesure de Hausdorff est un espace de type homogène afin de pouvoir utiliser

le théorème $T(1)$. Or, d'après la formule magique (1) sur la courbure,

$$\begin{aligned} \int_D |\mathcal{C}_\mu(\chi_D)(x)|^2 d\mu(x) &= \int_D \mathcal{C}_\mu(\chi_D)(x) \overline{\mathcal{C}_\mu(\chi_D)(x)} d\mu(x) \\ &= \int_D \int_D \int_D \frac{1}{(y-x)(z-x)} d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z) \\ &= 6 \int_D \int_D \int_D c(x, y, z)^2 d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z). \end{aligned}$$

Il en résulte que la continuité L^2 de C_μ est équivalente à la condition de courbure locale, qui est elle-même équivalente à la rectifiabilité uniforme (voir le théorème 2.6)! Signalons que l'idée d'utiliser la courbure de Menger pour étudier l'opérateur de Cauchy apparaît pour la première fois dans [33].

2.2.2. Les théorèmes $T(1)$ et $T(b)$ sans doublement. — Essayons d'expliquer l'intérêt pour nous d'avoir des analogues dans le cas non homogène des théorèmes du style $T(1)$ en expliquant le plan de preuve d'un des sens du fait 4. Pour cela, considérons $E \subset \mathbb{C}$ tel que $H^1(E) < +\infty$ et $\gamma(E) > 0$. Commençons par le cas où E est Ahlfors-régulier (ce cas a été traité dans [30]).

Étape 1. — Puisque $\gamma(E) > 0$, il existe une fonction non constante, holomorphe, bornée $f : \mathbb{C} \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$ et (quitte à multiplier f par une constante de module 1) $f'(\infty) = \gamma(E)$. Un argument standard [27] montre qu'il existe une fonction borélienne $h : E \rightarrow \mathbb{C}$ bornée telle que $f(z) = \int_E \frac{h(\xi)}{z-\xi} dH^1(\xi)$ pour tout $z \notin E$.

Étape 2. — L'idée (due à M. Christ dans [4]) est maintenant de construire à partir de h , en utilisant un argument de temps d'arrêt, un ensemble Ahlfors-régulier F et une fonction $b : F \rightarrow \mathbb{C}$ tels que $H^1(E \cap F) > 0$ et tels que les hypothèses du théorème $T(b)$ soient vérifiées pour l'opérateur de Cauchy sur F muni de H_F^1 (restriction de H^1 sur F). Comme cet espace est de type homogène, on en déduit que l'opérateur de Cauchy est borné sur $L^2(F)$.

Étape 3. — D'après le théorème 2.13, F est uniformément rectifiable et donc il existe une courbe rectifiable Γ telle que $H^1(E \cap \Gamma) > 0$.

Le cas général a été résolu par G. David [9] (voir aussi [35]), après un premier pas important avec P. Mattila dans [10]. Expliquons rapidement comment modifier la preuve précédente. L'étape 1 est inchangée. Un des problèmes pour l'étape 2 était le manque d'un théorème de type $T(b)$ dans le cadre des espaces qui ne sont pas de type homogène. Guy David comblera cette lacune (voir plus bas) mais c'est en partie ce problème qui a motivé le développement de l'analyse harmonique dans ces espaces. Concernant l'étape 3, le même genre d'argument que pour démontrer le théorème 2.13 permet de passer d'estimations sur l'opérateur de Cauchy à des estimations sur

la courbure de Menger puis nous pouvons appliquer le théorème 2.5 (pour obtenir une partie rectifiable dans E).

Une des premières versions du théorème $T(1)$ dans le cas non doublant concerne l'opérateur de Cauchy; elle est due indépendamment à Nazarov-Treil-Volberg [34] et Tolsa [46]. Ce résultat s'énonce ainsi.

THÉORÈME 2.14. — *Soit μ une mesure de Borel positive qui est à croissance linéaire. Alors, l'opérateur de Cauchy C_μ est borné sur $L^2(\mu)$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_D |C_\mu^\varepsilon(\chi_D)|^2 d\mu \leq C\mu(D),$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout disque D de \mathbb{C} .

Notons que la condition de croissance linéaire est nécessaire. Le lecteur attentif aura noté que l'énoncé du théorème 2.14 est le même que celui du théorème $T(1)$ dans le cas doublant. Ce qui est tout à fait incroyable! La démonstration de Tolsa repose sur la courbure de Menger et ne permet pas de traiter le cas de noyaux plus généraux. La stratégie (qui s'inspire de celle utilisée dans le cas doublant) de Nazarov-Treil-Volberg leur permettra de considérer tous les noyaux standards (voir [36] par exemple). Expliquons le schéma (maintenant classique) de démonstration d'un théorème de type $T(1)$ ou $T(b)$ dans le cas d'un ensemble Ahlfors-régulier $E \subset \mathbb{C}$ de dimension 1. Rappelons que, dans ce cas, la mesure μ considérée est la restriction de H^1 à E . Tout d'abord, équipons E d'une famille d'intervalles dyadiques comme dans le théorème 2.11. Une idée naïve pour construire une telle famille est de tout simplement considérer la famille des intersections de tous les carrés dyadiques usuels de \mathbb{C} avec E . Ceci ne marche pas aussi simplement, mais cela donne une bonne idée de ce à quoi doit ressembler un « intervalle dyadique » de E . Considérons la base de Haar $(b_Q)_{Q \in \Delta}$ associée. Le but est alors d'estimer les coefficients de T_μ^ε dans cette base, c'est-à-dire les $\langle T_\mu^\varepsilon(b_Q), b_R \rangle$ pour Q, R dans Δ . Pour cela, nous devons distinguer suivant les positions relatives de R et Q . Ici, vont jouer un rôle important le fait que $\mu(Q)$ est comparable à $\text{diam } Q$ et la propriété de « petite frontière » des « intervalles » de Δ . Pour voir l'importance de la dernière propriété, considérons le cas où Q et R sont très proches. Alors, dans la mesure où le noyau $K(x, y)$ se comporte comme $1/(x - y)$, ses singularités sont proches de la diagonale $x = y$. La propriété de « petite frontière », qui dit que la mesure de l'ensemble des points $x \in Q$ et des points $y \in R$ qui sont très proches est petite, permet de compenser l'effet des singularités du noyau. Sous de bonnes hypothèses, la décroissance des coefficients de T_μ^ε dans la base de Haar au voisinage de la diagonale permet de démontrer la continuité L^2 de T_μ , en appliquant un argument classique du style lemme de Schur (voir [8]). Si notre ensemble E est seulement doublant, ces arguments s'adaptent (voir [4]). Dans le cas où l'espace E n'est plus homogène mais la restriction de H^1 à E est à croissance linéaire, il est possible

de construire une famille d'intervalles dyadiques (voir [10]), puis d'adapter les idées précédentes pour obtenir un théorème du style $T(b)$ (voir [9]). Mais, tout ceci est long et très technique. L'idée de Nazarov-Treil-Volberg est de ne pas essayer de construire une bonne famille d'intervalles dyadiques, mais de considérer pour tout vecteur \vec{u} , la famille de carrés dyadiques obtenus en translatant de \vec{u} la famille usuelle de carrés dyadiques de \mathbb{C} . En intersectant ces carrés avec E , ils obtiennent une collection indexée par \vec{u} , et notée $\Delta_{\vec{u}}$, d'intervalles dyadiques. Il est clair que pour des choix aléatoires de \vec{u} , la famille $\Delta_{\vec{u}}$ ne satisfait pas les conclusions du théorème 2.11 et que, si nous estimons la matrice de T dans la base de Haar associée à $\Delta_{\vec{u}}$, nous n'obtenons pas la bonne décroissance près de la diagonale. Mais, ce que montrent Nazarov-Treil-Volberg, c'est qu'en moyenne, tout se passe comme dans le cas homogène, et que l'on peut ainsi conclure. Leurs démonstrations utilisent toute une panoplie d'astuces techniques étonnantes, comme par exemple les fonctions de Bellman. Ils obtiennent ainsi des théorèmes de type $T(1)$ ou $T(b)$ et des versions locales de $T(b)$ au sens de M. Christ pour des mesures non doublantes. Nous renvoyons à [53] et à sa liste de références pour plus de détails sur les travaux de Nazarov-Treil-Volberg. Pour un survol sur le développement de l'analyse harmonique non homogène, voir [51].

2.3. La stratégie de Tolsa

La démonstration de Tolsa se fait en deux temps et s'inspire de celle donnée dans [24] dans le cas des ensembles de Cantor de type 4-coins. Elle repose sur une comparaison avec une capacité plus facile à étudier. Celle-ci, notée γ_+ , est définie pour tout compact $E \subset \mathbb{C}$ par $\gamma_+(E) = \sup \mu(\mathbb{C})$ où la borne supérieure est prise sur toutes les mesures de Radon positives et supportées sur E telles que $(1/z) * \mu$ soit borné uniformément par 1. En fait, $\gamma_+(E) = \sup |f'(\infty)|$ où la borne supérieure est maintenant prise sur les fonctions f qui sont holomorphes et bornées par 1 en dehors de E et qui sont de la forme $(1/z) * \mu$, où μ est une mesure positive sur E .

Étape 1 [47]. — *Il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour tout compact $E \subset \mathbb{C}$,*

$$C^{-1} \sup_{\mu} \frac{\mu(\mathbb{C})^{3/2}}{(\mu(\mathbb{C}) + c^2(\mu))^{1/2}} \leq \gamma_+(E) \leq C \sup_{\mu} \frac{\mu(\mathbb{C})^{3/2}}{(\mu(\mathbb{C}) + c^2(\mu))^{1/2}},$$

où la borne supérieure est prise pour toutes les mesures de Radon positives μ supportées sur E à croissance linéaire (de constante 1) et de courbure finie.

L'inégalité de droite avait été démontrée par M. Melnikov [32] pour la capacité analytique, et c'est ce papier qui avait laissé espérer une solution possible au problème de Painlevé. La démonstration de l'étape 1 repose en particulier sur les liens entre courbure de Menger et continuité de l'opérateur de Cauchy. Notons aussi que ces estimations permettent de démontrer facilement que la capacité γ_+ est semi-additive, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que $\gamma_+(E \cup F) \leq C(\gamma_+(E) + \gamma_+(F))$ pour tous compacts E et F de \mathbb{C} .

Étape 2 [48]. — Il existe une constante $C \geq 1$ telle que, pour tout compact E de \mathbb{C} ,

$$\gamma_+(E) \leq \gamma(E) \leq C\gamma_+(E).$$

L'inégalité de gauche est évidente par définition des capacités. Nous avons vu, au tout début de la section 2.2.2, que (sous l'hypothèse $H^1(E) < +\infty$) toute fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{C} \setminus E$ est de la forme $\mu * (1/z)$ où μ est une mesure complexe supportée sur E . Le résultat de Tolsa est étonnant, dans la mesure où il nous dit que l'on peut se restreindre dans la définition de la capacité analytique aux seules fonctions holomorphes qui sont obtenues comme convolutions de $1/z$ avec des mesures positives ! Il est clair que les résultats des étapes 1 et 2 impliquent le théorème 1.1. Notons aussi que l'étape 2 et la semi-additivité de la capacité γ_+ (qui découle de l'étape 1, voir plus haut) impliquent la semi-additivité de la capacité analytique, à savoir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\gamma(E \cup F) \leq C(\gamma(E) + \gamma(F))$$

pour tous compacts E et F de \mathbb{C} . Ceci avait été conjecturé par A.G. Vitushkin dans les années 1960, en particulier à cause des applications potentielles en théorie de l'approximation rationnelle (voir [52]). Nous allons expliquer les idées de la démonstration de Tolsa de l'étape 2 dans le cas où le compact E est la N -ième génération du Cantor 4-coins de Garnett, noté E_N . Rappelons que $E_N = \cup_{j=1}^{4^N} Q_N^j$ où les Q_N^j sont des carrés dont la longueur de côté est 4^{-N} et sont situés dans les coins des carrés de E_{N-1} (voir la section 2.1.2). Nous allons en particulier constater qu'un des ingrédients principaux est le théorème $T(b)$ local de M. Christ. Dans un premier temps, nous devons rappeler que, d'après les travaux d'Eidermann et Tolsa (voir par exemple [46]), il existe une constante $C \geq 1$, telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{C^{-1}}{\sqrt{N}} \leq \gamma_+(E_N) \leq \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

Cette estimation découle de l'étape 1 et de calculs de courbure de Menger. En fait, ceci implique qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$(*) \quad \begin{aligned} \gamma_+(E_{N/2}) &\leq C_1 \gamma_+(E_N) \quad \text{pour tout } N \text{ pair,} \\ \gamma_+(E_{(N+1)/2}) &\leq C_1 \gamma_+(E_N) \quad \text{pour tout } N \text{ impair.} \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la proposition suivante est vraie.

PROPOSITION 2.15. — Soit N un entier pair (respectivement impair) et supposons qu'il existe une constante $C_0 > 1$ telle $\gamma(E_{N/2}) \leq C_0 \gamma(E_N)$ (respectivement $\gamma(E_{(N+1)/2}) \leq C_0 \gamma(E_N)$). Alors, il existe une constante absolue $A > 0$ telle que $\gamma(E_N) \leq C_0 A \gamma_+(E_{N/2})$ (respectivement $\gamma(E_N) \leq C_0 A \gamma_+(E_{(N+1)/2})$).

Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier pair (le cas impair est identique). Nous allons utiliser la proposition précédente pour démontrer que $\gamma(E_N) \leq C_2 \gamma_+(E_N)$ pour une certaine constante C_2 . Pour cela, raisonnons par récurrence et supposons que $\gamma(E_m) \leq AC_1^2 \gamma_+(E_m)$ pour tout $m < N$ (où C_1 est la constante de (*)).

Cas 1. $\gamma(E_N) \leq \frac{1}{C_1} \gamma(E_{N/2})$. — Alors,

$$\begin{aligned} \gamma(E_N) &\leq \frac{1}{C_1} \gamma(E_{N/2}) \\ &\leq AC_1 \gamma_+(E_{N/2}) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\leq AC_1^2 \gamma_+(E_N) \quad \text{d'après (*).} \end{aligned}$$

Cas 2. $\gamma(E_{N/2}) \leq C_1 \gamma(E_N)$. — D'après la proposition 2.15, il vient

$$\begin{aligned} \gamma(E_N) &\leq AC_1 \gamma_+(E_{N/2}) \\ &\leq AC_1^2 \gamma_+(E_N) \quad \text{d'après (*).} \end{aligned}$$

Il nous reste donc à esquisser une démonstration de la proposition 2.15, en supposant par exemple que N est pair. Considérons la mesure $\lambda = \frac{1}{4} \gamma(E_N) \mu$ où μ est la mesure de longueur sur le bord de $E_{N/2}$. Alors, la mesure λ est portée par le bord de $E_{N/2}$ et satisfait :

- (i) λ est doublante (avec une constante ne dépendant pas de N);
- (ii) $\lambda(\mathbb{C}) = \gamma(E_N)$;
- (iii) l'opérateur de Cauchy \mathcal{C}_λ est borné sur $L^2(\lambda)$ et sa norme $\|\mathcal{C}_\lambda\|_{2,2}$ est bornée par $C C_0$ (où $C > 0$ est une constante absolue).

Les points (i) et (ii) sont clairs. Pour le point (iii), nous voulons appliquer le théorème $T(b)$ local de Christ, dans sa version « homogène » d'après le point (i). Ainsi, pour tout Q_n^j , $0 \leq n \leq \frac{N}{2}$, $1 \leq j \leq 4^n$, nous devons construire une fonction b_n^j à support sur Q_n^j (qui sont les « intervalles dyadiques » considérés) et telle que

- (a) $\|b_n^j\|_\infty \leq C C_0$;
- (b) $\|\mathcal{C}_\lambda^\varepsilon(b_n^j)\|_\infty \leq C$ (uniformément en ε);
- (c) $\left| \int_{Q_n^j} b_n^j d\lambda \right| \geq \delta \lambda(Q_n^j)$

où C et δ sont des constantes absolues. Rappelons que la démonstration du théorème de Christ donne aussi que $\|\mathcal{C}_\lambda\|_{2,2} \leq C C_0$ pour une constante absolue $C > 0$, c'est-à-dire l'estimation annoncée dans le point (iii). L'idée pour construire cette famille pseudo-accrétime est la suivante. Tout d'abord, il existe une fonction f , appelée fonction d'Ahlfors, pour laquelle la capacité analytique $\gamma(E_N)$ est atteinte (c'est-à-dire $f'(\infty) = \gamma(E_N)$). Alors, pour tout $z \notin E_N$,

$$f(z) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial E_N} \frac{f(s)t(s)}{s-z} ds$$

où $t(s)$ est le vecteur tangent unitaire. Posons $\nu = \frac{-1}{2i\pi} f(s)t(s) ds|_{\partial E_N}$. Alors, ν est supportée sur le bord de E_N et sa transformée de Cauchy est majorée par 1 en

dehors de ∂E_N . Commençons par construire b_0^1 . Si nous avons $\nu = bd\lambda$, alors $b = b_0^1$ conviendrait. Mais, ν n'est pas absolument continue par rapport à λ (d'ailleurs, ces deux mesures ont des supports différents). L'idée est d'adapter et de considérer

$$b_0^1 = \sum_{j=1}^{4^{N/2}} \frac{\nu(Q_{N/2}^j)}{\lambda(Q_{N/2}^j)} \chi_{Q_{N/2}^j}.$$

L'estimation cruciale pour obtenir (a) est

$$|\nu(Q_{N/2}^j)| \leq CC_0 \lambda(Q_{N/2}^j)$$

pour tout $1 \leq j \leq 4^{N/2}$. Celle-ci découle d'arguments standards et de notre hypothèse (à savoir $\gamma(E_{N/2}) \leq C_0 \gamma(E_N)$). L'idée pour obtenir (b) est de comparer $\mathcal{C}_\lambda^\varepsilon(b_0^1)$ avec la transformée de Cauchy de ν qui est bornée. Le point (c) est facile, il découle de l'égalité

$$\int_{Q_0^1} b_0^1 d\lambda = \sum_{j=1}^{4^{N/2}} \nu(Q_{N/2}^j) = \nu(\mathbb{C}) = f'(\infty) = \gamma(E_N) = \lambda(Q_0^1).$$

Pour les autres carrés, la construction précédente s'adapte assez facilement. Voir [40] (pages 108–112) pour une preuve complète. Nous avons maintenant à notre disposition une mesure λ qui satisfait les points (i), (ii) et (iii). Alors, d'après le théorème de Calderón-Zygmund dans le cas homogène (voir section 2.2.1), \mathcal{C}_λ est de type faible $(1, 1)$ avec une constante bornée par CC_0 et donc, par un argument de dualité utilisant Hahn-Banach (voir [40] théorème 71), il existe une fonction h à support sur $\partial E_{N/2}$ telle que $0 \leq h \leq 1$, $\lambda(\partial E_{N/2}) \leq 2 \int_{\mathbb{C}} h d\lambda$ et $|\mathcal{C}(hd\lambda)(z)| \leq CC_0$ pour tout $z \notin \partial E_{N/2}$. Ainsi, par définition de γ_+ , il existe une constante $A > 0$ telle que $\gamma(E_N) = \lambda(\mathbb{C}) \leq AC_0 \gamma_+(E_{N/2})$ et donc la proposition 2.15 est démontrée.

Pour la démonstration de l'étape 2 dans le cas d'un compact quelconque du plan complexe, les difficultés pour adapter l'argument précédent ne manquent pas! En particulier, les espaces considérés ne sont plus homogènes. Donc, nous ne pouvons plus utiliser le théorème de Christ. De plus, la version du théorème $T(b)$ établie par G. David dans [9] pour résoudre la conjecture de Vitushkin s'est avérée insuffisante. La démonstration de X. Tolsa repose sur les versions données dans [36]. En fait, Nazarov-Treil-Volberg ont démontré ces résultats avec l'idée de les utiliser justement pour démontrer l'équivalence entre capacité analytique γ et capacité γ_+ . Il semble utile d'insister sur le fait que l'analyse harmonique non homogène a été développée non pas pour elle-même, mais afin de résoudre les problèmes liés à la capacité analytique.

3. CAPACITÉ ANALYTIQUE ET HOMÉOMORPHISMES BILIPSCHITZIENS

Dans [40] (pages 112–14), nous proposons deux tests afin de déterminer si la solution de Tolsa est une solution satisfaisante ou non au problème de Painlevé. En fait, nous énonçons deux problèmes de nature géométrique autour de la capacité analytique et nous demandons si la réponse de Tolsa permettait de les résoudre. Nous allons dans ce paragraphe expliquer comment Xavier Tolsa a répondu positivement à la question 1 de [40] (page 113). Le second problème est toujours ouvert et sera discuté dans la prochaine section. Commençons par rappeler qu'un homéomorphisme $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est bilipschitzien s'il existe une constante $K \geq 1$ telle que

$$K^{-1}|x - y| \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x - y|,$$

pour tout $x \in \mathbb{C}$, tout $y \in \mathbb{C}$. Le problème qui nous intéresse est de déterminer si les ensembles effaçables sont invariants par le groupe des homéomorphismes bilipschitziens. Dans [50], il est démontré le

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un homéomorphisme bilipschitzien. Alors, il existe une constante $C_0 \geq 1$ ne dépendant que de ϕ telle que*

$$C_0^{-1}\gamma(E) \leq \gamma(\phi(E)) \leq C_0\gamma(E)$$

pour tout compact E dans \mathbb{C} .

Il s'en déduit immédiatement le

COROLLAIRE 3.2. — *Soit $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un homéomorphisme bilipschitzien et soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble compact et effaçable. Alors, $\phi(E)$ est effaçable.*

Notons que le cas des ensembles de Cantor de type 4-coins est traité dans [17]. La démonstration du théorème 3.1 repose sur le résultat suivant et des estimations contenues dans [48]. Nous pouvons tout de suite voir que le corollaire 3.2 découle du théorème de Tolsa et du théorème 3.3. Nous noterons μ_ϕ la mesure-image d'une mesure μ par un homéomorphisme ϕ .

THÉORÈME 3.3. — *Soit $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un homéomorphisme bilipschitzien. Alors, il existe une constante $C_0 > 0$ ne dépendant que de ϕ telle que*

$$c^2(\mu_\phi) \leq C_0(c^2(\mu) + \mu(E)),$$

pour tout compact E de \mathbb{C} et toute mesure de Radon positive μ supportée sur E , à croissance linéaire (avec une constante 1) et de courbure de Menger finie.

Notons que ce résultat a un analogue pour l'opérateur de Cauchy. En effet, si μ est une mesure de Radon positive (sans atome) sur \mathbb{C} telle que l'opérateur de Cauchy associé \mathcal{C}_μ soit borné sur $L^2(\mu)$, il en est de même pour la mesure image de μ par tout homéomorphisme bilipschitzien du plan complexe (voir [50], théorème 1.3). Observons qu'une majoration du type $c^2(\mu_\phi) \leq C_0 c^2(\mu)$ dans le théorème 3.3 est impossible. En effet, prenons pour E un segment de \mathbb{C} . Alors, toute mesure supportée par E est de courbure de Menger nulle. Ce qui n'est pas obligatoirement le cas de la mesure image. Celle-ci est alors supportée par une courbe corde-arc et il découle du théorème 11 de [41] que $c^2(\mu_\phi) \leq C\mu(\mathbb{C})$ (voir aussi le théorème 2.7 ci-dessus). Donc, la majoration du théorème 3.3 est en quelque sorte optimale. Le point-clé de la démonstration du théorème 3.3 est une décomposition de la couronne de type géométrique inspirée des travaux de G. David et S. Semmes [11] [12]. L'idée est de regrouper les carrés dyadiques usuels de \mathbb{C} en régions de temps d'arrêt, dont le nombre est contrôlé. Sur chacune de ces régions, le support de μ est bien approximé par une courbe Ahlfors-régulière. Nous allons dans un premier temps donner les principes généraux de construction de la décomposition de la couronne de Tolsa, avant de donner un énoncé plus précis. Partons d'une mesure μ comme dans le théorème 3.3 et supposons que μ est supportée dans le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$. Notons Δ la famille des carrés dyadiques usuels de \mathbb{C} et rappelons que Δ est la réunion des familles Δ_j , $j \in \mathbb{Z}$, de carrés dyadiques de génération j : chaque carré $Q \in \Delta_j$ est de la forme $[k \cdot 2^j, (k+1) \cdot 2^j] \times [l \cdot 2^j, (l+1) \cdot 2^j]$. Tout carré $Q \in \Delta_j$ a un unique père, c'est-à-dire un carré $Q' \in \Delta_{j+1}$ tel que $Q \subset Q'$, et a exactement 4 fils, c'est-à-dire des carrés $\tilde{Q} \in \Delta_{j-1}$ tels que $\tilde{Q} \subset Q$. Pour tout $Q \in \Delta$, posons $D_\mu(Q) = \mu(Q)/\text{diam } Q$. Une région de temps d'arrêt S est une famille de carrés dans Δ telle qu'il existe un carré dyadique (dit maximal) $Q(S) \in S$ tel que

- (1) Pour tout $Q \in S$, $Q \subset Q(S)$.
- (2) Si $Q \in S$ et si $Q' \in \Delta$ vérifie $Q \subset Q' \subset Q(S)$, alors $Q' \in S$.

En suivant les idées de Tolsa, pour construire une région de temps d'arrêt en dessous d'un carré « raisonnable » Q_0 , nous considérons ses fils, puis ses petits-fils et nous stoppons quand nous rencontrons un carré R_0 pour lequel $D_\mu(Q_0) \gg D_\mu(R_0)$, ou $D_\mu(Q_0) \ll D_\mu(R_0)$ (c'est-à-dire quand la densité de μ dans R_0 est devenue trop « grande » ou trop « petite » par rapport à celle de Q_0) ou la courbure de Menger de μ dans R_0 est devenue trop « grande ». Les hypothèses sur la mesure, à savoir qu'elle est à croissance linéaire et de courbure de Menger finie, nous permettent d'espérer que nous ne stoppons pas trop souvent en effectuant cette procédure. Ceci est primordial car, dans le cas contraire, nous aurions presque autant de cubes dyadiques que de régions de temps d'arrêt ! Pour nous, un cube « raisonnable » est un cube (a, b) -doublant, c'est-à-dire tel que $\mu(aQ) \leq b\mu(Q)$ avec a et b bien choisis. Cette notion est importante car, dans un tel cube, la mesure se comporte presque comme une mesure doublante. Pour des raisons techniques, les carrés maximaux de Tolsa ne sont pas dyadiques, mais des carrés 4-dyadiques, c'est-à-dire de la forme $[k \cdot 2^{-j}, (k+4) \cdot 2^{-j}] \times [l \cdot 2^{-j}, (l+4) \cdot 2^{-j}]$.

En utilisant toutes ces idées, X. Tolsa construit une famille, notée $\text{TOP}(\mu)$, de carrés 4-dyadiques qui sont (16, 5000)-doublants tels que

$$(P1) \sum_{Q \in \text{TOP}(\mu)} D_\mu(Q)^2 \mu(Q) \leq C(\mu(\mathbb{C}) + c^2(\mu)).$$

Ces carrés de $\text{TOP}(\mu)$ sont les carrés maximaux décrits précédemment. Ainsi, (P1) est la formulation mathématique du fait que nous ne stoppons pas souvent. De plus, $\text{supp}(\mu)$ est bien approximé dans $Q \in \text{TOP}(\mu)$ par une courbe Ahlfors-régulière, en un sens que nous allons maintenant expliciter. Soit $Q \in \text{TOP}(\mu)$; notons $\text{Stop}(Q)$ l'ensemble des carrés $R \in \text{TOP}(\mu)$ tels que

- (i) $R \cap 3Q \neq \emptyset$.
- (ii) $\text{diam}(R) \leq (1/8) \text{diam} Q$.
- (iii) Il n'existe pas de $R' \in \text{TOP}(\mu)$ qui satisfait (i) et (ii) et qui contient R .

Les carrés de $\text{Stop}(Q)$ sont les carrés en dessous de Q pour lesquels nous avons stoppé dans la procédure décrite précédemment. De plus, notons $B_Q = (3Q \cap \text{supp} \mu) \setminus (Z \cup \bigcup_{R \in \text{Stop}(Q)} R)$ (où Z est un ensemble de points qui ne sont pas contenus dans beaucoup de carrés doublants; il satisfait en fait à $\mu(Z) = 0$). Les points de B_Q sont ceux pour lesquels nous n'avons jamais stoppé. Le point-clé est que, par construction, nous contrôlons la densité ainsi que la courbure de Menger de μ dans la région de temps d'arrêt en dessous de Q (à toutes les échelles pour un point de B_Q et à l'échelle de R pour un point de $R \in \text{Stop}(Q)$). Nous pouvons alors utiliser les résultats du paragraphe 2.1.3. Ainsi, il existe une courbe Ahlfors-régulière $\Gamma(Q)$ de constante uniforme (c'est-à-dire ne dépendant que des données de μ) telle que

$$(P2) B_Q \subset \Gamma(Q).$$

(P3) Pour tout $R \in \text{Stop}(Q)$, il existe un carré \tilde{R} contenant R tel que $\delta(R, \tilde{R}) \leq CD_\mu(R)$ et $\tilde{R} \cap \Gamma_Q \neq \emptyset$.

Ici, $\delta(R, S) = \int_{S_R \setminus R} \frac{1}{|y - c_R|} d\mu(y)$ où c_R est le centre de R et S_R est le plus petit carré concentrique avec R et contenant S . Dans certains cas, (P3) dit que $d(R, \Gamma(Q)) \leq C \cdot \text{diam} R$, c'est-à-dire que les points de R sont proches de $\Gamma(Q)$, à l'échelle de R . Enfin, les carrés de $\text{TOP}(\mu)$ vérifient une condition technique sur la densité d'un carré R par rapport à celle de son cube maximal Q , à savoir

(P4) Soit R un carré tel que $\text{diam} R \leq \text{diam} Q$. Supposons que $R \cap B_Q \neq \emptyset$, ou bien qu'il existe un carré $\tilde{R} \in \text{Stop}(Q)$ tel que $R \cap \tilde{R} \neq \emptyset$ et $\text{diam} \tilde{R} \leq \text{diam} R$. Alors $\mu(R) \leq CD_\mu(Q)l(R)$.

La décomposition de la couronne associée à μ est la donnée d'une famille de carrés $\text{TOP}(\mu)$ qui satisfait (P1), (P2), (P3) et (P4). Il est important de noter que ces conditions sont stables par homéomorphismes bilipschitziens. Notons aussi que cette décomposition de la couronne a permis à Tolsa [49] de démontrer que la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy implique la continuité L^2 de tous les opérateurs de Calderón-Zygmund (associés à des noyaux antisymétriques que nous devons supposer en plus suffisamment réguliers), tous ces opérateurs étant définis par respect à une mesure qui n'est pas supposée doublante.

4. CAPACITÉ ANALYTIQUE ET LONGUEUR DE FAVARD

D'après le fait 4 et le théorème 2.2, tout ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est effaçable si et seulement si $\text{Fav}(E) = 0$ sous la condition que $H^1(E) < +\infty$. Si nous supprimons cette dernière hypothèse, le résultat devient faux comme l'avait démontré P. Mattila dans [25]. En fait, il prouvait que la condition d'être effaçable est invariante par représentations conformes, ce qui n'est pas le cas pour la condition d'être de longueur de Favard nulle (pour les ensembles de 1-mesure de Hausdorff infinie). Ainsi, son argument ne permettait pas de déterminer quelle implication était fautive. Plus tard, P. Jones et T. Murai [19] construisent un ensemble du plan complexe qui est de longueur de Favard nulle, mais qui n'est pas effaçable. Un exemple plus simple a été donné par H. Joyce et P. Mörters récemment [20]. Ceci nous amène donc au

Problème 1. — Soit $E \subset \mathbb{C}$ compact. Supposons que $\text{Fav}(E) > 0$. L'ensemble est-il ou non effaçable ?

D'après le théorème de Tolsa, il suffit de construire une mesure supportée sur E qui soit à croissance linéaire et de courbure de Menger finie. Un exemple typique d'ensemble qui a de « grosses projections » est un continuum non réduit à un point. Dans ce cas-là, une telle mesure est construite dans [40], mais il n'est pas clair que cet argument puisse être adapté au cas général. En fait, il faudrait dans un premier temps comprendre le lien entre la longueur de Favard et la courbure de Menger. Nous allons dans la suite de ce paragraphe discuter de quelques problèmes dans cette direction.

Nous avons vu que le théorème de Besicovitch (théorème 2.2) permet de caractériser les ensembles purement non rectifiables en termes de longueur de Favard (toujours sous l'hypothèse de finitude de la mesure de Hausdorff). Il serait intéressant d'avoir une version plus quantitative de ce résultat.

Problème 2. — Soit $\delta > 0$. Existe-t-il une constante $C = C(\delta) > 0$ telle que, pour tout compact $E \subset \mathbb{C}$ vérifiant $H^1(E) < +\infty$ et $\text{Fav}(E) \geq \delta$, il existe une courbe rectifiable Γ satisfaisant $H^1(E \cap \Gamma) \geq C$?

Dans le même ordre d'idée, nous aimerions comprendre le lien entre longueur de Favard et rectifiabilité uniforme. N'oublions pas que celle-ci est équivalente à la condition de courbure locale (théorème 2.6).

Problème 3. — Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Supposons qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$,

$$\text{Fav}(E \cap B(x, R)) \geq \eta R.$$

Alors, E est-il uniformément rectifiable ?

Cette question est abordée (sous une forme légèrement différente) dans [13] où il est démontré que la réponse est positive sous une hypothèse de platitude en termes des nombres β de Peter Jones. Cependant, les arguments de G. David et S. Semmes ne permettent pas de conclure dans le cas général. Notons que, d'après le théorème 2.2, un ensemble vérifiant les hypothèses du problème 3 est rectifiable. Considérons maintenant l'ensemble de Cantor 4-coins que nous noterons E . Nous avons vu au paragraphe 2.1.2 que $E = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} E_N$ où E_N est formé de 4^N carrés de longueur de côtés 4^{-N} , qui sont situés dans les coins des carrés de E_{N-1} . Nous avons aussi vu que $\text{Fav}(E) = 0$, mais il serait intéressant de voir à quelle vitesse $\text{Fav}(E_N)$ tend vers 0.

Problème 4. — Existe-t-il une constante $C \geq 1$ telle que $\text{Fav}(E_N) \leq C/N$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$?

Il découle du théorème 1.4 de [26] qu'il existe une constante $c \leq 1$ telle que $\text{Fav}(E_N) \geq c/N$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Une réponse positive au problème 4 impliquerait que $\text{Fav}(E_N)$ et $1/c^2(E_N)$ (où $c^2(E_N)$ est la courbure de la restriction de H^1 au bord de E_N) doivent être comparables, puisque $c^2(E_N)$ est comparable à N (voir [40]). Ceci est à première vue assez surprenant ! Dans [42], il est donné un majorant dans lequel le N est remplacé par un logarithme itéré. Y. Peres et B. Solomyak proposent à la fin de leur article une approche plus générale, en relation avec la théorie quantitative de la rectifiabilité. Ainsi, si E est un sous-ensemble compact de \mathbb{C} , posons pour tout $\varepsilon > 0$,

$$l(E, \varepsilon) = \sup H_\infty^1(\Gamma(\varepsilon) \cap E)$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les courbes rectifiables de \mathbb{C} de longueur 1 et où $\Gamma(\varepsilon)$ désigne le ε -voisinage de Γ . Le contenu de Hausdorff H_∞^1 est défini par

$$H_\infty^1(F) = \inf \left\{ \sum_i (\text{diam } U_i) \mid F \subset \cup_i U_i \right\}.$$

En particulier, si F est compact, $H_\infty^1(F) \leq \text{diam } F$. Peres et Solomyak demandent si $\text{Fav}(E(\varepsilon)) = O(l(E, \varepsilon))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (où $E(\varepsilon)$ désigne toujours le ε -voisinage de E). Nous laissons le soin au lecteur de vérifier qu'une réponse positive à la question précédente implique une réponse positive au problème 4.

Soit $\lambda = (\lambda_j)$ une suite de réels telle que

- (i) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $1/4 \leq \lambda_j \leq 1/3$.
- (ii) La suite λ tend vers $1/4$ en décroissant.

Nous allons associer à cette suite λ un ensemble de Cantor de type 4-coins, noté $E(\lambda)$, de la façon suivante. Posons $\sigma_j = \prod_{k=1}^j \lambda_k$; soit E_0 le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbb{C} . L'ensemble E_1 est l'union des quatre carrés situés dans les coins de E_0 et de longueur de côté σ_1 . L'ensemble E_2 est l'union des 16 carrés de longueur de côté σ_2 situés dans les coins des carrés de E_1 . De manière générale, E_j est l'union de 4^j carrés de longueur de côté σ_j , chacun de ces carrés étant dans le coin d'un carré de E_{j-1} . Alors, $E(\lambda) = \bigcap_j E_j$. L'ensemble de Cantor 4-coins de Garnett correspond à la suite

constante égale à $1/4$. Notons que $H^1(E(\lambda)) < +\infty$ si et seulement si $\sup_j 4^j \sigma_j < +\infty$. Nous savons grâce à [24] que $E(\lambda)$ est effaçable si et seulement si $\sum_j 4^{-2j} \sigma_j^{-2} = \infty$ (car dans ce cas, la courbure de Menger associée à la mesure naturelle sur $E(\lambda)$ est infinie, voir le théorème 44 de [40]). Cependant, les projections de $E(\lambda)$ sont mal comprises.

Problème 5. — Pour quelles suites λ , a-t-on $\text{Fav}(E(\lambda)) = 0$?

Il est important de noter que la résolution d'un des problèmes précédents passe par une meilleure compréhension des rapports entre les nombres géométriques que sont les nombres β , la courbure de Menger et la longueur de Favard, et donc que résoudre un de ces problèmes devrait permettre d'avoir des éléments de réponse concernant les autres. Nous renvoyons à [29] pour d'autres problèmes concernant les projections et la rectifiabilité (et des commentaires sur les problèmes décrits plus haut).

5. ET EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES ?

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est effaçable pour les fonctions harmoniques lipschitziennes si pour tout ouvert U contenant E , toute fonction localement lipschitzienne $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ qui est harmonique dans $U \setminus E$ est harmonique dans U tout entier. Notre problème est alors de caractériser géométriquement ces ensembles effaçables. Ceci est un analogue naturel dans \mathbb{R}^n du problème de Painlevé, dans la mesure où nous pouvons aussi lui associer une capacité et des intégrales singulières comme nous allons le voir maintenant. Notons aussi que, si $n = 2$, l'effaçabilité pour les fonctions holomorphes bornées implique l'effaçabilité pour les fonctions harmoniques lipschitziennes, puisque si f est harmonique lipschitzienne, alors $\partial f / \partial z$ est holomorphe bornée. En fait, si nous nous restreignons aux ensembles de 1-mesure de Hausdorff finie, ces deux notions d'effaçabilité coïncident d'après le fait 4 et le résultat principal de [10]. Introduisons maintenant une famille de capacités. Soit α avec $0 < \alpha < n$. Pour tout compact $E \subset \mathbb{R}^n$, sa capacité associée aux potentiels de Riesz signés $R_{i,\alpha} = x_i/|x|^{1+\alpha}$ ($1 \leq i \leq n$), que nous noterons $\gamma_\alpha(E)$, est définie par

$$\gamma_\alpha(E) = \sup |\langle T, 1 \rangle|$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les distributions réelles T supportées sur E telles que pour tout $1 \leq i \leq n$, $T * (x_i/|x|^{1+\alpha})$ soit une fonction bornée sur \mathbb{R}^n par 1. Ici, $\langle T, 1 \rangle$ est l'action de la distribution T sur la fonction constante 1. Le lien avec la capacité analytique γ est clair en notant que, pour tout ensemble compact $E \subset \mathbb{C}$, $\gamma(E) = \sup |\langle T, 1 \rangle|$, où la borne supérieure est prise sur toutes les distributions complexes T supportées sur E telles que $T * (1/z)$ soit une fonction bornée sur \mathbb{R}^2 par 1. Le cas $\alpha = n - 1$ est particulier et, dans ce cas-là, la capacité γ_{n-1} s'appelle la capacité harmonique lipschitzienne. Alors, $E \subset \mathbb{R}^n$ est effaçable (pour

les fonctions harmoniques lipschitziennes) si et seulement si $\gamma_{n-1}(E) = 0$. Voir [31] où il est aussi démontré des analogues des faits 1, 2 et 3. Ainsi, si $H^{n-1}(E) = 0$, alors E est effaçable alors que, si $\text{Hdiam}(E) > n - 1$, il n'est pas effaçable. De plus, si E est contenu dans une hypersurface régulière (par exemple, une image lipschitzienne ou bilipschitzienne de \mathbb{R}^{n-1}), $H^{n-1}(E)$ et $\gamma_{n-1}(E)$ sont comparables. Qu'en est-il du fait 4 ? Nous avons vu que l'ingrédient miraculeux dans \mathbb{R}^2 est la courbure de Menger qui permet de faire le lien entre les propriétés de rectifiabilité et la continuité de l'opérateur de Cauchy. Dans le cas de l'effaçabilité pour les fonctions harmoniques lipschitziennes dans \mathbb{R}^n , les intégrales singulières qui interviennent naturellement sont les transformées de Riesz R_i ($1 \leq i \leq n$) qui sont associées aux noyaux $x_i/|x|^n$. Nous ne savons pas si une courbure adaptée aux transformées de Riesz existe si $n > 2$ (et il est peut-être même impossible d'en trouver une, voir [15]). Dans ces conditions, c'est un véritable tour de force qu'a réalisé A. Volberg dans [53] où il démontre que la capacité harmonique lipschitzienne est semi-additive (en suivant plus ou moins le plan de la preuve de X. Tolsa dans le cas de la capacité analytique). Le manque de courbure est suppléé par les techniques d'analyse harmonique sans doublement du volume qu'ont développées Nazarov-Treil-Volberg. Notons aussi que des estimations précises de la capacité harmonique lipschitzienne d'analogues n -dimensionnels des ensembles de Cantor 4-coins sont données dans [23]. Dans ce cas, le fait que ces ensembles sont décrits de façon explicite permet de pallier l'absence de courbure.

Signalons enfin qu'une étude systématique des capacités γ_α est initiée dans [22] et [43]. En particulier, L. Prat démontre que $\gamma_\alpha(E) = 0$ si $0 < \alpha < 1$ et E est un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^n tel que $H^\alpha(E) < \infty$ ou si α n'est pas entier ($0 < \alpha < n$) et E est un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^n qui est de plus Ahlfors-régulier de dimension α .

En paraphrasant un (très) récent premier ministre français, concluons en disant que la route menant à la résolution de tous ces problèmes dans \mathbb{R}^n paraît bien longue et plutôt sinieuse...

RÉFÉRENCES

- [1] L. AHLFORS – « Bounded analytic functions », *Duke Math. J.* **14** (1947), p. 1–11.
- [2] L. AHLFORS & A. BEURLING – « Conformal invariants and function theoretic null-sets », *Acta Math.* **83** (1950), p. 101–129.
- [3] A.P. CALDERÓN – « Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), p. 1324–1327.
- [4] M. CHRIST – « A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral », *Colloq. Math.* **60-61** (1990), p. 601–628.
- [5] ———, *Lectures on singular integral operators*, Regional Conference Series in Mathematics, vol. 77, American Mathematical Society, 1990.

- [6] R. COIFMAN, A. MCINTOSH & Y. MEYER – « L'opérateur de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 sur les courbes lipschitziennes », *Ann. of Math.* **116** (1982), p. 361–388.
- [7] R. COIFMAN & G. WEISS – *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lect. Notes in Math., vol. 242, Springer-Verlag, 1971.
- [8] G. DAVID – *Wavelets and singular integral operators on curves and surfaces*, Lect. Notes in Math., vol. 1465, Springer-Verlag, 1991.
- [9] ———, « Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity », *Rev. Mat. Iberoamericana* **14** (1998), p. 369–479.
- [10] G. DAVID & P. MATTILA – « Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane », *Rev. Mat. Iberoamericana* **16** (2000), p. 137–215.
- [11] G. DAVID & S. SEMMES – *Singular integrals and rectifiable sets in \mathbb{R}^n : Au-delà des graphes lipschitziens*, Astérisque, vol. 193, Société Mathématique de France, 1991.
- [12] ———, *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 38, American Mathematical Society, 1993.
- [13] ———, « Quantitative rectifiability and Lipschitz mappings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), p. 855–889.
- [14] A. DENJOY – « Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues », *C. R. Acad. Sci. Paris* **149** (1909), p. 258–260.
- [15] H. FARAG – « The Riesz kernels do not give rise to higher dimensional analogues to the Menger-Melnikov curvature », *Publ. Mat.* **43** (1999), p. 251–260.
- [16] J.B. GARNETT – « Positive length but zero analytic capacity », *Proc. Amer. Math. Soc.* **24** (1970), p. 696–699.
- [17] J.B. GARNETT & J. VERDERA – « Analytic capacity, bilipschitz maps and Cantor sets », *Math. Res. Lett.* **10** (2003), p. 515–522.
- [18] P. JONES – « Rectifiable sets and the traveling salesman problem », *Invent. Math.* **102** (1990), p. 1–15.
- [19] P. JONES & T. MURAI – « Positive analytic capacity, but zero Buffon needle probability », *Pacific J. Math.* **133** (1988), p. 99–114.
- [20] H. JOYCE & P. MÖRTERS – « A set with finite curvature and projections of zero length », *J. Math. Anal. Appl.* **247** (2000), p. 126–135.
- [21] J.-C. LÉGER – « Rectifiability and Menger curvature », *Ann. of Math.* **149** (1999), p. 831–869.
- [22] J. MATEU, L. PRAT & J. VERDERA – « The capacity associated to signed Riesz kernels and Wolff potentials », *J. reine angew. Math.* **578** (2005), p. 201–223.
- [23] J. MATEU & X. TOLSA – « Riesz transforms and harmonic Lip_1 -capacity of Cantor sets », *Proc. London Math. Soc.* (3) **89** (2004), p. 676–696.
- [24] J. MATEU, X. TOLSA & J. VERDERA – « The planar Cantor sets of zero analytic capacity and the local $T(b)$ theorem », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 19–28.
- [25] P. MATTILA – « Smooth maps, null-sets for integral geometric measures and analytic capacity », *Ann. of Math.* **123** (1986), p. 303–309.
- [26] ———, « Orthogonal projections, Riesz capacities, and Minkowski content », *Indiana Univ. Math. J.* **39** (1990), p. 185–198.

- [27] ———, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, 1995.
- [28] ———, « On the analytic capacity and curvature of some Cantor sets with non- σ -finite length », *Publ. Mat.* **40** (1996), p. 195–204.
- [29] ———, « Hausdorff dimension, projections, and the Fourier transform », *Publ. Mat.* **48** (2004), p. 3–48.
- [30] P. MATTLA, M. MELNIKOV & J. VERDERA – « The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability », *Ann. of Math.* **144** (1996), p. 127–136.
- [31] P. MATTLA & P.V. PARAMONOV – « On geometric properties of harmonic Lip_1 -capacity », *Pacific J. Math.* **171** (1995), p. 469–491.
- [32] M. MELNIKOV – « Analytic capacity : discrete approach and curvature of measure », *Sb. Math.* **186** (1995), p. 827–846.
- [33] M. MELNIKOV & J. VERDERA – « A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz curves », *Internat. Math. Res. Notices* **7** (1995), p. 325–331.
- [34] F. NAZAROV, S. TREIL & A. VOLBERG – « Cauchy integral and Calderón-Zygmund operators on nonhomogeneous spaces », *Internat. Math. Res. Notices* **15** (1997), p. 703–726.
- [35] ———, « Nonhomogeneous Tb theorem which proves Vitushkin’s conjecture », Preprint n° 519, CRM Barcelona, 2002.
- [36] ———, « Tb theorems on nonhomogeneous spaces », *Acta Math.* **190** (2003), p. 151–239.
- [37] K. OKIKIOLU – « Characterizations of subsets of rectifiable curves in \mathbb{R}^n », *J. London Math. Soc. (2)* **46** (1992), p. 336–348.
- [38] P. PAINLEVÉ – *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm*, Hermann, 1897.
- [39] H. PAJOT – « Conditions quantitatives de rectifiabilité », *Bull. Soc. math. France* **125** (1997), p. 15–53.
- [40] ———, *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*, Lect. Notes in Math., vol. 1799, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [41] ———, « Le problème géométrique du voyageur de commerce, et ses applications à l’analyse complexe et harmonique », in *Autour du centenaire Lebesgue*, Panoramas & Synthèses, vol. 18, Société Mathématique de France, 2004, p. 123–156.
- [42] Y. PERES & B. SOLOMYAK – « How likely is Buffon’s needle to fall near a planar Cantor set? », *Pacific J. Math.* **204** (2002), p. 473–496.
- [43] L. PRAT – « Potential theory of signed Riesz kernels : Capacity and Hausdorff measures », *Internat. Math. Res. Notices* **19** (2004), p. 937–981.
- [44] R. SCHUL – « Subset of rectifiable curves in Hilbert space and the Analyst’s TSP », Thèse, Yale University, 2005.
- [45] E.M. STEIN – *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, 1993.
- [46] X. TOLSA – « L^2 -boundedness of the Cauchy integral for continuous measures », *Duke Math. J.* **98** (1999), p. 269–304.

- [47] ———, « On the analytic capacity γ_+ », *Indiana Univ. Math. J.* **51** (2002), p. 317–343.
- [48] ———, « Painlevé’s problem and the semiadditivity of analytic capacity », *Acta Math.* **190** (2003), p. 105–149.
- [49] ———, « The L^2 boundedness of the Cauchy transform implies L^2 boundedness of all antisymmetric Calderón-Zygmund operators », *Publ. Mat.* **48** (2004), p. 445–479.
- [50] ———, « Bilipschitz maps, analytic capacity, and the Cauchy integral », *Ann. of Math. (2)* (à paraître).
- [51] J. VERDERA – « The Fall of the doubling condition in Calderón-Zygmund theory », in *Proceedings of the 6th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (El Escorial 2000)*, Publ. Mat., 2002, numéro spécial, p. 275–292.
- [52] A.G. VITUSHKIN – « The analytic capacity of sets in approximation theory », *Uspekhi Mat. Nauk* **22** (1967), p. 141–199, en russe; traduction en anglais dans *Russian Math. Surveys* **22** (1967), p. 139–200.
- [53] A. VOLBERG – *Calderón-Zygmund capacities and operators on nonhomogeneous spaces*, Regional Conference Series in Mathematics, vol. 100, American Mathematical Society, 2003.

Hervé PAJOT
Institut Fourier
Université de Grenoble I
UMR 5582 CNRS
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin d’Hères Cedex
E-mail : herve.pajot@ujf-grenoble.fr

ÉTATS QUASI-LIBRES LIBRES ET FACTEURS DE TYPE III
[d'après D. Shlyakhtenko]

par **Stefaan VAES**

Le but de cet exposé est de présenter une famille d'algèbres de von Neumann introduite par Shlyakhtenko et de donner un aperçu des résultats de classification des algèbres de cette famille. Ces algèbres de von Neumann sont construites dans le cadre des probabilités libres de Voiculescu.

Murray et von Neumann ont initié la classification des algèbres de von Neumann. Ils ont démontré que chaque algèbre de von Neumann s'écrit comme intégrale directe de facteurs (algèbres de von Neumann de centre trivial) et ils ont classifié les facteurs en différents types : I, II et III. Dans sa thèse [5], Connes a raffiné cette classification en introduisant les sous-types III_λ ($0 \leq \lambda \leq 1$). La construction de Shlyakhtenko donne tout un monde d'exemples de facteurs de type III_1 , c'est-à-dire le plus haut dans la « hiérarchie » des facteurs.

L'idée de Shlyakhtenko est de donner dans le cadre des probabilités libres de Voiculescu une version du foncteur CAR (relations d'anticommutation canoniques) et des états quasi-libres associés. Le foncteur CAR associe à chaque espace de Hilbert H la C^* -algèbre unifère universelle $\text{CAR}(H)$ engendrée par la famille $\{a(\xi) \mid \xi \in H\}$ telle que

- (1) $\xi \mapsto a(\xi)$ est linéaire,
- (2) les relations d'anticommutation canoniques sont vérifiées

$$\begin{aligned}a(\eta)a(\xi)^* + a(\xi)^*a(\eta) &= \langle \eta, \xi \rangle 1, \\ a(\xi)a(\eta) + a(\eta)a(\xi) &= 0.\end{aligned}$$

Les relations d'anticommutation canoniques peuvent être réalisées par les opérateurs de création sur *l'espace de Fock antisymétrique*. Tout opérateur S agissant sur H tel que $0 \leq S \leq 1$ donne lieu à un état ω_S de la C^* -algèbre $\text{CAR}(H)$, qu'on appelle *état quasi-libre de covariance* S . Les représentations GNS [8] associées aux états quasi-libres ont été beaucoup étudiées [18, 14, 1]. Dans une telle représentation, le bicommutant $\text{CAR}(H)''$ est une algèbre de von Neumann. Chaque état quasi-libre sur $\text{CAR}(H)$ donne donc une algèbre de von Neumann qui s'avère être un facteur.

Les travaux d'Araki & Woods [2] et de Powers & Størmer [14] permettent de déterminer le type de ces *facteurs d'Araki-Woods*⁽¹⁾. Plus précisément, si $0 < \lambda \leq 1$, il existe exactement une classe d'isomorphisme de facteurs d'Araki-Woods de type III_λ et il existe une famille non-dénombrable de facteurs d'Araki-Woods de type III_0 et mutuellement non-isomorphes.

Remarquons que les facteurs d'Araki-Woods sont des *facteurs moyennables*. Dans [7] Connes a réussi à donner une classification complète des facteurs moyennables. C'est un des résultats les plus profonds de la théorie des algèbres de von Neumann. Pour chacun des types II_1 , II_∞ , III_λ ($0 < \lambda \leq 1$) il existe un unique facteur moyennable. Les facteurs moyennables de type III_0 sont classifiés par un invariant en théorie ergodique qu'on appelle *flot des poids*. L'unicité du facteur moyennable de type III_1 est dû à Haagerup [10]. Dans le cadre des probabilités libres, nous allons obtenir des facteurs non-moyennables. En particulier Shlyakhtenko construit une famille non-dénombrable de facteurs de type III_1 , non-moyennables et mutuellement non-isomorphes.

L'analogue en probabilités libres du foncteur CAR associé à un espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$, la C^* -algèbre universelle $\Gamma(H_{\mathbb{R}})$ engendrée par la famille $\{s(\xi) \mid \xi \in H_{\mathbb{R}}\}$ telle que

- $s(\xi)$ soit auto-adjoint pour tout $\xi \in H_{\mathbb{R}}$,
- $\xi \mapsto s(\xi)$ soit \mathbb{R} -linéaire,
- $\|s(\xi)\| \leq \|\xi\|$ pour tout $\xi \in H_{\mathbb{R}}$.

Pour chaque plongement isométrique $H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow H$ de $H_{\mathbb{R}}$ dans un espace de Hilbert H , on obtient une représentation de $\Gamma(H_{\mathbb{R}})$ sur *l'espace de Fock plein*

$$\mathcal{F}(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} H^{\otimes n},$$

en posant $s(\xi) = (\ell(\xi) + \ell(\xi)^*)/2$ où $\ell(\xi)$ est l'opérateur de création.

La construction des facteurs d'Araki-Woods libres suppose la donnée d'un groupe à un paramètre (U_t) de transformations orthogonales d'un espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$ qui induit un plongement isométrique $H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow H$ de $H_{\mathbb{R}}$ dans le complexifié H . On obtient une représentation de $\Gamma(H_{\mathbb{R}})$ dont l'image est notée $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)$. Le facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)$. La restriction de l'état du vide au facteur $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est *l'état quasi-libre libre* noté φ_U . Alors, $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est un facteur de type III, sauf si $U_t = \text{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Nous commençons cet exposé par rappeler la classification des facteurs de Connes et les probabilités libres de Voiculescu et par une présentation de plusieurs points de vue sur nos données essentielles, les représentations orthogonales de \mathbb{R} . Au §2 nous

⁽¹⁾Il découle des travaux de Powers & Størmer que les facteurs associés aux états quasi-libres sont des produits tensoriels infinis de matrices 2 fois 2 (des facteurs ITPFI₂). Plus généralement, Araki & Woods étudient et déterminent le type des produits tensoriels infinis de facteurs de type I (les ITPFI) et il y a des ITPFI qui ne sont pas ITPFI₂.

définissons l'algèbre de von Neumann $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ avec l'état quasi-libre libre φ_U . Nous étudions en détail le cas $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ muni de la représentation de \mathbb{R} par rotations. Au §3 nous présentons les principaux résultats de classification et de non-isomorphisme des facteurs d'Araki-Woods libres obtenus par Shlyakhtenko :

- Classification complète des facteurs d'Araki-Woods libres associés à une représentation (U_t) *presque-périodique*.
- Construction d'une famille non-dénombrable de facteurs d'Araki-Woods libres non-presque-périodiques et mutuellement non-isomorphes. Ces facteurs sont distingués par leur invariant τ de Connes.
- Construction de deux facteurs d'Araki-Woods libres non-isomorphes et ayant le même invariant τ de Connes. Ceci est une application de la notion de *dimension entropique libre* introduite par Voiculescu [29, 28].
- Démonstration que la classe d'isomorphisme d'un facteur Araki-Woods libre peut dépendre de la multiplicité de la représentation (U_t) . Ce résultat est démontré à l'aide de la notion d'*algèbre de von Neumann solide* due à Ozawa [12].

La classification complète des facteurs d'Araki-Woods libres reste un problème ouvert. Les résultats de non-isomorphisme présentés au §3 montrent qu'un facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ dépend fortement de la classe de la mesure spectrale de la représentation (U_t) . Ce problème de classification est beaucoup plus difficile que la classification des facteurs d'Araki-Woods, pour la raison suivante. Powers et Størmer [14] démontrent essentiellement que deux facteurs d'Araki-Woods associés à des états quasi-libres sont isomorphes si leurs opérateurs de covariance diffèrent d'un opérateur d'Hilbert-Schmidt. En particulier, d'après un résultat de von Neumann, il suffit de considérer le cas d'un opérateur de covariance diagonalisable. Ceci n'est plus le cas pour les facteurs d'Araki-Woods libres. Une grande partie des facteurs d'Araki-Woods libres ne peut être obtenue par des représentations orthogonales presque-périodiques.

Dans le dernier §4 nous présentons un nouveau résultat sur les produits libres, ce qui permet au §2.3 de démontrer un résultat un peu plus général que dans l'article [22].

Il y a un certain nombre de résultats et d'applications dans la théorie des facteurs d'Araki-Woods libres dont on ne parlera pas en détail dans cet exposé. Notons que Shlyakhtenko a démontré dans [23] que les facteurs d'Araki-Woods libres T_λ de type III_λ ($0 < \lambda < 1$) sont des *facteurs premiers* : ils ne peuvent être écrits comme produit tensoriel de deux facteurs diffus (sans projecteurs minimaux). Dans [13] Pisier et Shlyakhtenko utilisent des facteurs d'Araki-Woods libres comme modèles pour démontrer une *inégalité de Grothendieck* pour les espaces d'opérateurs. Dans [27] les facteurs d'Araki-Woods libres sont utilisés pour construire des *actions extérieures* de groupes quantiques localement compacts.

Je remercie S. Baaj, E. Germain, D. Shlyakhtenko et G. Skandalis pour leur aide pendant la préparation de cet exposé.

1. RAPPELS

1.1. Algèbres de von Neumann. Type des facteurs

On rappelle que pour un ensemble X d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H , $X \subset B(H)$, on appelle *commutant* de X et on note X' l'ensemble de tous les opérateurs $T \in B(H)$ qui commutent à X . Si $A \subset B(H)$ est une sous-algèbre involutive qui agit d'une façon non-dégénérée sur H , le *bicommutant* A'' coïncide avec l'adhérence de A dans $B(H)$ pour la topologie faible, c'est-à-dire la topologie donnée par les semi-normes $T \mapsto |\langle T\xi, \eta \rangle|$, où $\xi, \eta \in H$.

On appelle *algèbre de von Neumann* toute sous-algèbre involutive $M \subset B(H)$ qui est égale à son bicommutant : $M = M''$, ce qui équivaut à dire que M est faiblement fermé et $1 \in M$. Un *facteur* est une algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires. Si G est un groupe localement compact, l'algèbre de von Neumann du groupe G notée $L(G)$ est le bicommutant $\{\lambda_g \mid g \in G\}''$ où (λ_g) est la représentation régulière du groupe G sur l'espace de Hilbert $L^2(G)$.

Murray et von Neumann ont classifié les facteurs en types I, II et III. Les *facteurs de type I* sont ceux qui possèdent des projecteurs minimaux. Ils sont isomorphes à $M_n(\mathbb{C})$ (type I_n) ou $B(\ell^2)$ (type I_∞). Les *facteurs de type II_1* sont ceux qui admettent une trace finie et qui sont de dimension infinie (pour exclure le cas I_n). L'exemple type d'un facteur II_1 est donné par l'algèbre de von Neumann $L(G)$ d'un groupe discret G dont $\{e\}$ est la seule classe de conjugaison finie (on dit que G est CCI). Les groupes libres \mathbb{F}_n à n générateurs sont des exemples de groupes CCI (n peut être ∞). Les *facteurs de type II_∞* sont ceux qui sont de la forme $N \otimes B(\ell^2)$ avec N un facteur II_1 . Ce sont exactement les facteurs qui admettent une trace infinie semi-finie et qui ne sont pas de type I. Un facteur de type I ou II est dit *semi-finie*. Il admet toujours une trace semi-finie. Finalement les *facteurs de type III* sont ceux qui n'admettent pas de trace non-nulle.

Remarque 1.1. — Dans tout l'exposé les espaces de Hilbert sont supposés *séparables* et les algèbres de von Neumann à *préduale séparable*, i.e. admettant une représentation fidèle sur un espace de Hilbert séparable.

1.2. Classification des facteurs de type III d'après Connes

Un *état normal* d'une algèbre de von Neumann M est une forme linéaire faiblement continue $\omega : M \rightarrow \mathbb{C}$ positive ($\omega(x) \geq 0$ quand $x \geq 0$) qui satisfait $\omega(1) = 1$. Un état est dit *fidèle* si $\omega(x) = 0$ dès que $x = 0$ et $x \geq 0$. Toute algèbre de von Neumann à préduale séparable admet un état fidèle.

La théorie de Tomita-Takesaki associe à tout état fidèle ω un groupe à un paramètre (σ_t^ω) d'automorphismes de M appelé *groupe modulaire* et caractérisé par

$$- \omega \sigma_t^\omega = \omega \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

– ω satisfait la condition KMS par rapport à (σ_t^ω) : pour tout $x, y \in M$, il existe une fonction continue $f : \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Im } z \leq 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est analytique à l'intérieur de la bande et qui satisfait

$$f(t) = \omega(x\sigma_t^\omega(y)) \quad \text{et} \quad f(t+i) = \omega(\sigma_t^\omega(y)x) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Une bonne introduction à la *théorie modulaire de Tomita-Takesaki* se trouve dans [26].

Le *théorème de Radon-Nikodym* de Connes [5] permet de comparer les groupes modulaires de deux états fidèles ω, μ sur M . En effet, il existe une application faiblement continue $t \mapsto u_t$ de \mathbb{R} dans le groupe unitaire de M telle que

$$\begin{aligned} - u_{t+s} &= u_t \sigma_t^\omega(u_s), \\ - \sigma_t^\mu(x) &= u_t \sigma_t^\omega(x) u_t^*. \end{aligned}$$

Les groupes modulaires de deux états fidèles diffèrent donc par une perturbation intérieure. Il s'en suit qu'une algèbre de von Neumann a une dynamique intrinsèque donnée par les groupes modulaires des états fidèles et déterminée à perturbation intérieure près.

Définissons le groupe polonais $\text{Aut } M$ des automorphismes de M muni de la topologie induite par les distances $d(\alpha, \beta) = \|\omega\alpha - \omega\beta\|$ et $d(\alpha, \beta) = \|\omega\alpha^{-1} - \omega\beta^{-1}\|$, où ω parcourt les états de M . À chaque unitaire $u \in M$, on associe l'*automorphisme intérieur* $\text{Ad } u$ défini par $(\text{Ad } u)(x) = uxu^*$. Les automorphismes intérieurs forment un sous-groupe distingué $\text{Int } M$ de $\text{Aut } M$. Le groupe quotient est noté $\text{Out } M$. Le théorème de Radon-Nikodym permet de définir un homomorphisme $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Out } M$ qui envoie t à la classe de σ_t^ω et qui ne dépend pas du choix de ω .

Invariant T. — Soit ω un état fidèle sur un facteur M avec groupe modulaire (σ_t) . Dans [5] Connes a introduit le sous-groupe $T(M)$ de \mathbb{R} :

$$T(M) = \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma_t^\omega \in \text{Int } M\}.$$

D'après le théorème de Radon-Nikodym, l'invariant $T(M)$ ne dépend pas du choix de l'état ω . C'est donc un invariant de l'algèbre de von Neumann M .

Flot des poids. — À chaque facteur M est associée une algèbre de von Neumann semi-finie : c'est le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ de M par le groupe modulaire (σ_t) d'un état fidèle sur M . Sur le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$, il existe une trace semi-finie canonique. Le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ admet une *action duale* (θ_s) de \mathbb{R}_+^* par automorphismes. La restriction de l'action (θ_s) au centre du produit croisé s'appelle le *flot des poids* de M . Grâce au théorème de Radon-Nikodym, le flot des poids ne dépend pas du choix de l'état fidèle.

Facteurs de type III $_{\lambda}$. — Notons que le flot des poids est une action ergodique de \mathbb{R}_+^* sur un espace mesuré. Or une telle action est ou bien transitive ou bien proprement ergodique, d'où la classification suivante :

- M est semi-fini si c'est l'action de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* ,
- M est de type III $_{\lambda}$ avec $0 < \lambda < 1$ si c'est l'action de \mathbb{R}_+^* sur $\mathbb{R}_+^*/\lambda^{\mathbb{Z}}$,
- M est de type III $_1$ si c'est l'action de \mathbb{R}_+^* sur un point,
- M est de type III $_0$ si c'est une action proprement ergodique.

Combes a donné un aperçu des résultats de classification de Connes dans [4].

Murray et von Neumann ont construit deux facteurs de type II $_1$ non-isomorphes : le facteur hyperfini \mathcal{R} et le facteur $L(\mathbb{F}_2)$ du groupe libre à 2 générateurs. Ils sont non-isomorphes car $\text{Int } L(\mathbb{F}_2)$ est fermé dans $\text{Aut } L(\mathbb{F}_2)$ tandis que $\text{Int } \mathcal{R}$ est un sous-groupe dense non-trivial de $\text{Aut } \mathcal{R}$.

Facteurs pleins et invariant τ . — Un facteur M est dit *plein* si $\text{Int } M$ est un sous-groupe fermé de $\text{Aut } M$. Pour un facteur plein, le groupe quotient $\text{Out } M$ est un groupe polonais. Pour un tel facteur plein Connes [6] introduit un nouvel invariant : $\tau(M)$ = la topologie la plus faible sur \mathbb{R} qui rend continue l'application $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Out } M$. Les facteurs d'Araki-Woods libres sont des facteurs pleins. Nous remarquons qu'un facteur plein ne peut être de type III $_0$.

1.3. Probabilités libres d'après Voiculescu

Une introduction plus complète aux probabilités libres de Voiculescu se trouve dans le livre [30] ou dans [25].

Un *espace de probabilités non-commutatif* est une paire (A, φ) où A est une algèbre unifière et φ est une forme linéaire vérifiant $\varphi(1) = 1$. Dans cet exposé on s'intéresse surtout aux algèbres de von Neumann : A est une algèbre de von Neumann et φ un état normal. Les éléments de A s'appellent toujours variables aléatoires. La *distribution* d'un élément $x \in A$ est l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ associe $\varphi(P(x))$. Si A est une algèbre de von Neumann et x un élément auto-adjoint, la distribution de x est une mesure de probabilités dont le support est contenu dans $[-\|x\|, \|x\|]$.

NOTATION 1.2. — Si (M, φ) et (N, μ) sont des algèbres de von Neumann munies d'états φ et μ , la notation $(M, \varphi) \cong (N, \mu)$ signifie qu'il existe un *-isomorphisme $\alpha : M \rightarrow N$ tel que $\mu\alpha = \varphi$.

DÉFINITION 1.3. — Soit (A, φ) un espace de probabilités non-commutatif. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-algèbres est dite *libre* si pour tout k et toute suite d'éléments $a_j \in A_{i_j}$ ($j = 1, \dots, k$) satisfaisant $\varphi(a_j) = 0$ et $i_j \neq i_{j+1}$, on a $\varphi(a_1 \cdots a_k) = 0$.

Une famille d'éléments $(x_i)_{i \in I}$ est dite *libre* (resp. *-libre) si les algèbres (resp. *-algèbres) A_i engendrées par x_i forment une famille libre de sous-algèbres de A .

Les produits libres fournissent des exemples de familles libres.

PROPOSITION 1.4. — Soit (M_i, φ_i) une famille d'algèbres de von Neumann munies d'un état fidèle. Alors, il existe, à isomorphisme près, une unique paire (M, φ) d'une algèbre von Neumann munie d'un état fidèle, telle que

- (M_i, φ_i) se plonge dans (M, φ) en préservant l'état,
- M est engendrée par la famille de sous-algèbres (M_i) qui est une famille libre dans (M, φ) .

On appelle (M, φ) le produit libre des (M_i, φ_i) et on note $(M, \varphi) = \bigast_{i \in I} (M_i, \varphi_i)$.

1.4. Représentations orthogonales de \mathbb{R}

La donnée de la construction des états quasi-libres libres et des facteurs d'Araki-Woods libres associés est une représentation de \mathbb{R} par transformations orthogonales.

TERMINOLOGIE 1.5. — On appelle représentation orthogonale de \mathbb{R} tout groupe à un paramètre de transformations orthogonales d'un espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$.

Soit (U_t) une représentation orthogonale de \mathbb{R} sur l'espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$. Le complexifié $H = H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ admet une involution anti-unitaire J (l'opérateur de conjugaison complexe) et les transformations orthogonales (U_t) s'étendent en un groupe à un paramètre d'unitaires sur H , qu'on notera toujours (U_t) .

Il existe alors un unique opérateur auto-adjoint strictement positif A sur H tel que $U_t = A^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a $JAJ = A^{-1}$. L'opérateur A permet de définir un nouveau plongement isométrique

$$H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow H : \xi \mapsto \left(\frac{2}{A^{-1} + 1} \right)^{1/2} \xi.$$

En effet, si $\xi \in H_{\mathbb{R}}$, on a $J\xi = \xi$ et donc

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{2}{A^{-1} + 1} \right)^{1/2} \xi \right\|^2 &= \left\langle \frac{1}{A^{-1} + 1} \xi, \xi \right\rangle + \left\langle \frac{1}{A^{-1} + 1} J\xi, J\xi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{A}{A + 1} \xi, \xi \right\rangle + \left\langle J \frac{1}{A + 1} \xi, J\xi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{A + 1}{A + 1} \xi, \xi \right\rangle = \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

On notera $K_{\mathbb{R}}$ l'image de $H_{\mathbb{R}}$ par ce plongement. Alors, $K_{\mathbb{R}}$ est un espace de Hilbert réel, isométriquement plongé dans un espace de Hilbert complexe H vérifiant la propriété suivante :

$$(\star) \quad K_{\mathbb{R}} \cap iK_{\mathbb{R}} = \{0\} \text{ et } K_{\mathbb{R}} + iK_{\mathbb{R}} \text{ est dense dans } H.$$

Dans [17] on démontre que chaque plongement isométrique $K_{\mathbb{R}} \subset H$ satisfaisant la condition (\star) provient d'une représentation orthogonale de \mathbb{R} sur un espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$ par la construction présentée ci-dessus.

Écrivons $T = JA^{-1/2}$. Alors T est un opérateur anti-linéaire fermé et inversible sur H qui satisfait $T = T^{-1}$. Un tel opérateur s'appelle une *involution sur H* . Réciproquement une telle involution T admet une décomposition polaire $T = JA^{-1/2}$ dans laquelle J est une involution anti-unitaire sur H et A est un opérateur auto-adjoint strictement positif satisfaisant $JAJ = A^{-1}$. Posons $H_{\mathbb{R}} = \{\xi \in H \mid J\xi = \xi\}$ et $U_t = A^{it}$. On obtient ainsi une représentation orthogonale de \mathbb{R} . On remarquera que l'espace $K_{\mathbb{R}}$ correspondant consiste en les vecteurs ξ dans le domaine de T qui satisfont $T\xi = \xi$.

On a alors obtenu plusieurs points de vue différents sur les représentations orthogonales de \mathbb{R} .

- (1) Un groupe à un paramètre de transformations orthogonales d'un espace de Hilbert réel.
- (2) Un plongement isométrique d'un espace de Hilbert réel dans un espace de Hilbert complexe vérifiant (\star) .
- (3) Une involution T sur un espace de Hilbert.

Finalement on peut considérer la décomposition spectrale de l'opérateur $\log A$. Comme $J(\log A)J = -\log A$, la classe de la mesure spectrale de $\log A$ est symétrique. Les représentations orthogonales de \mathbb{R} sont donc classifiées par une classe de mesure symétrique sur \mathbb{R} et une fonction de multiplicité symétrique.

2. FACTEURS D'ARAKI-WOODS LIBRES

Le foncteur CAR associe à tout espace de Hilbert H la C^* -algèbre $\text{CAR}(H)$ (voir introduction). Oubliant la structure complexe de H on peut écrire $\text{CAR}(H)$ comme une algèbre de Clifford. Soit $H_{\mathbb{R}}$ un espace de Hilbert réel. On note $\text{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$ et on appelle *algèbre de Clifford* la C^* -algèbre universelle engendrée par la famille $\{s(\xi) \mid \xi \in H_{\mathbb{R}}\}$ telle que $s(\xi)$ est auto-adjoint pour tout $\xi \in H_{\mathbb{R}}$, $\xi \mapsto s(\xi)$ est \mathbb{R} -linéaire et

$$s(\xi)s(\eta) + s(\eta)s(\xi) = 2\langle \xi, \eta \rangle 1.$$

Cette dernière condition étant équivalente à $s(\xi)^2 = \|\xi\|^2 1$ pour tout $\xi \in H_{\mathbb{R}}$, on voit comment le foncteur $H_{\mathbb{R}} \mapsto \Gamma(H_{\mathbb{R}})$ est une version libre du foncteur Cliff .

À chaque plongement isométrique $H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow H$ de $H_{\mathbb{R}}$ dans un espace de Hilbert complexe H est associée une représentation de $\text{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$ sur l'espace de Fock anti-symétrique (ou fermionique) :

$$\mathcal{F}_{\text{as}}(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} H^{\wedge n}$$

posant $s(\xi) = a(\xi)^* + a(\xi)$ où $a(\xi)$ est l'opérateur de création à gauche. Remarquons que cette représentation de $\text{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$ est en fait la représentation GNS d'un état

quasi-libre. L'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $s(\xi)$, $\xi \in H_{\mathbb{R}}$ est un *facteur d'Araki-Woods*.

Shlyakhtenko donne une version libre de la construction précédente et appelle le facteur engendré *facteur d'Araki-Woods libre*.

2.1. États quasi-libres libres

Donnons-nous une représentation orthogonale (U_t) de \mathbb{R} sur l'espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$. Comme au §1.4, nous regardons le complexifié H de $H_{\mathbb{R}}$ avec l'involution anti-unitaire J et l'opérateur auto-adjoint strictement positif A tel que $U_t = A^{it}$. Introduisons l'espace de Fock plein de H :

$$\mathcal{F}(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} H^{\otimes n}.$$

Le vecteur unité Ω s'appelle *vecteur du vide*. Pour chaque vecteur $\xi \in H$, nous disposons de l'opérateur de création à gauche

$$\ell(\xi) : \mathcal{F}(H) \longrightarrow \mathcal{F}(H) : \begin{cases} \ell(\xi)\Omega = \xi, \\ \ell(\xi)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = \xi \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n. \end{cases}$$

L'adjoint $\ell(\xi)^*$ s'appelle *opérateur d'annihilation*.

Pour chaque vecteur $\xi \in H$, notons $s(\xi)$ la partie réelle de $\ell(\xi)$ donnée par

$$s(\xi) = \frac{\ell(\xi) + \ell(\xi)^*}{2}.$$

Un résultat crucial de Voiculescu [30] dit que la distribution de l'opérateur $s(\xi)$ par rapport à l'état vectoriel du vide donné par $\varphi(x) = \langle x\Omega, \Omega \rangle$ est la loi semi-circulaire de Wigner supportée par l'intervalle $[-\|\xi\|, \|\xi\|]$.

Rappelons que l'opérateur A permet de définir un plongement de $H_{\mathbb{R}}$ dans H dont l'image est notée $K_{\mathbb{R}}$. On peut alors formuler la définition centrale de cet exposé [20].

DÉFINITION 2.1. — Soit (U_t) une représentation orthogonale de \mathbb{R} sur l'espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$. Le facteur d'Araki-Woods libre⁽²⁾ noté $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est défini par

$$\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'' = \{s(\xi) \mid \xi \in K_{\mathbb{R}}\}''.$$

L'état vectoriel $\varphi_U(x) = \langle x\Omega, \Omega \rangle$ est appelé état quasi-libre libre.

Rappelons que $T = JA^{-1/2}$ est l'involution sur H associée à (U_t) . Pour $\xi, \eta \in K_{\mathbb{R}}$, on vérifie que

$$2s(\xi) + 2is(\eta) = \ell(\zeta) + \ell(T\zeta)^*$$

où $\zeta = \xi + i\eta$. On conclut que $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est également l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\ell(\zeta) + \ell(T\zeta)^*$ où ζ appartient au domaine de T .

Le résultat suivant est facile à démontrer.

⁽²⁾Nous verrons que $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est effectivement un facteur dès que $\dim H_{\mathbb{R}} \geq 2$.

PROPOSITION 2.2. — *L'état quasi-libre libre φ_U sur $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est fidèle. Le groupe modulaire (σ_t) de l'état φ_U est donné par*

$$\sigma_t(s(\xi)) = s(U_t \xi) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \xi \in K_{\mathbb{R}}.$$

La construction des facteurs d'Araki-Woods libres est fonctorielle dans un sens précis. En effet on considère la catégorie dont les objets sont les paires $(H_{\mathbb{R}}, U_t)$ et les morphismes sont les contractions entre espaces de Hilbert qui entrelacent les représentations. À chaque morphisme $(H_{\mathbb{R}}^{(1)}, U_t^{(1)}) \rightarrow (H_{\mathbb{R}}^{(2)}, U_t^{(2)})$ correspond une application complètement positive $\Gamma(H_{\mathbb{R}}^{(1)}, U_t^{(1)})'' \rightarrow \Gamma(H_{\mathbb{R}}^{(2)}, U_t^{(2)})''$ normale et unifère, préservant les états quasi-libres libres. On notera Γ'' ce foncteur.

La catégorie des paires $(H_{\mathbb{R}}, U_t)$ admet une structure additive : la somme directe. Shlyakhtenko démontre que le foncteur Γ'' entrelace les opérations somme directe et produit libre.

PROPOSITION 2.3. — *Soit $(H_{\mathbb{R}}^{(i)}, U_t^{(i)})_{i \in I}$ une représentation orthogonale de \mathbb{R} . Posons $(H_{\mathbb{R}}, U_t) = \oplus_i (H_{\mathbb{R}}^{(i)}, U_t^{(i)})$. Alors,*

$$(\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'', \varphi_U) \cong \underset{i \in I}{*} (\Gamma(H_{\mathbb{R}}^{(i)}, U_t^{(i)})'', \varphi_{U^{(i)}}).$$

2.2. Variables circulaires généralisées

Pour comprendre la structure des algèbres de von Neumann $(\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'', \varphi_U)$ il est naturel de considérer d'abord les représentations orthogonales irréductibles de \mathbb{R} . Le cas $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $U_t = \text{id}$ est facile : l'algèbre est engendré par un seul opérateur dont la distribution par rapport à φ_U est la loi semi-circulaire, d'après le résultat de Voiculescu. On trouve donc

$$(\Gamma(\mathbb{R}, \text{id})'', \varphi_U) \cong (L^\infty[-1, 1], \mu)$$

où μ est la mesure semi-circulaire sur $[-1, 1]$. Si on combine ce résultat avec la proposition 2.3, on obtient

$$(1) \quad (\Gamma(H_{\mathbb{R}}, \text{id})'', \varphi_U) \cong (L(\mathbb{F}_n), \text{tr})$$

où $L(\mathbb{F}_n)$ est l'algèbre de von Neumann du groupe libre à $n = \dim H_{\mathbb{R}}$ générateurs.

Prenons maintenant $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ et $0 < \lambda < 1$. Posons

$$(2) \quad U_t = \begin{pmatrix} \cos(t \log \lambda) & -\sin(t \log \lambda) \\ \sin(t \log \lambda) & \cos(t \log \lambda) \end{pmatrix}.$$

En prenant la base orthonormale $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$, $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$ du complexifié $H = \mathbb{C}^2$, on voit que l'algèbre de von Neumann $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est engendrée par l'opérateur $\ell(\xi_2) + \sqrt{\lambda} \ell(\xi_1)^*$ sur l'espace de Fock plein $\mathcal{F}(\mathbb{C}^2)$.

NOTATION 2.4. — *On notera $(T_\lambda, \varphi_\lambda) := \Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ où $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ et U_t est donné par l'égalité (2).*

Pour comprendre l'algèbre T_λ , il faut étudier la *-distribution de l'élément $\ell(\xi_2) + \sqrt{\lambda}\ell(\xi_1)^*$ par rapport à l'état vectoriel du vide. Un tel élément s'appelle *élément circulaire généralisé*. Dans le cas $\lambda = 1$, on retrouve l'élément circulaire y de Voiculescu [30]. Voiculescu a démontré que la décomposition polaire $y = ub$ d'un élément circulaire donne un *unitaire de Haar* u et un opérateur b *quart-circulaire*. Ceci veut dire que la distribution de u est la distribution uniforme sur le cercle et que la distribution de b suit la loi quart-circulaire supportée par l'intervalle $[0, 1]$. Shlyakhtenko a démontré dans [20] un résultat analogue pour les éléments circulaires généralisés. Ce résultat permet de donner une description alternative de $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$.

THÉORÈME 2.5. — *Soit $0 < \lambda < 1$ et soit $y = \ell(\xi_1) + \sqrt{\lambda}\ell(\xi_2)^*$ l'élément circulaire généralisé associé dans $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$. Notons $y = vb$ la décomposition polaire de y . Alors v est une isométrie non-unitaire qui satisfait $\varphi_\lambda(v^k(v^*)^l) = \delta_{kl}\lambda^k$. La distribution de l'opérateur b est sans atomes. Les éléments u et b sont *-libres.*

Un corollaire immédiat de ce résultat est que

$$(3) \quad (T_\lambda, \varphi_\lambda) \cong (\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{N})), \omega_\lambda) * (L^\infty[-1, 1], \mu)$$

où $\omega_\lambda(e_{ij}) = \delta_{ij}\lambda^j(1 - \lambda)$ et μ est la loi semi-circulaire sur $[-1, 1]$. Bien évidemment, au lieu de μ pourrait prendre n'importe quelle autre mesure de probabilités sans atomes.

L'isomorphisme (3) est crucial. Il permet de réaliser $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$ en représentant d'une manière libre $(\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{N})), \omega_\lambda)$ et $(L^\infty[-1, 1], \mu)$ dans un espace de probabilité non-commutatif. Shlyakhtenko trouve dans [20] de telles représentations qui permettent de comprendre la réduction de l'algèbre T_λ par un projecteur minimal de $\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. On les appelle *modèles matriciels*. C'est un outil puissant qui permet de démontrer des résultats *d'absorption libre*.

THÉORÈME 2.6. — *On a*

$$(T_\lambda, \varphi_\lambda) \cong (T_\lambda, \varphi_\lambda) * (L^\infty[-1, 1], \mu) \cong (T_\lambda, \varphi_\lambda) * (L(\mathbb{F}_\infty), \text{tr}),$$

où μ est la mesure semi-circulaire et tr est la trace sur le facteur $L(\mathbb{F}_\infty)$ du groupe libre à une infinité de générateurs.

2.3. Type des facteurs d'Araki-Woods libres

À l'aide du théorème 2.6, on peut finalement démontrer que $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est toujours un facteur quand la dimension de $H_{\mathbb{R}}$ est au moins 2. On peut en même temps déterminer le type de ce facteur et son invariant τ .

THÉORÈME 2.7. — *Soit (U_t) une représentation orthogonale de \mathbb{R} sur l'espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$ de dimension au moins 2. Notons $M = \Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$.*

- (1) *M est un facteur plein.*
- (2) *M est de type II_1 ssi $U_t = id$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

- (3) M est de type III_λ ($0 < \lambda < 1$) ssi (U_t) est périodique de période $\frac{2\pi}{|\log \lambda|}$.
- (4) M est de type III_1 dans les autres cas.
- (5) L'invariant $\tau(M)$ est la topologie la plus faible sur \mathbb{R} qui rend continue l'application $t \mapsto U_t$ de \mathbb{R} dans le groupe orthogonal de $H_{\mathbb{R}}$ muni de la topologie faible.
- (6) Le facteur M admet des états presque-périodiques ssi (U_t) est presque-périodique.

Nous donnons ici plus de détails pour la démonstration de ce théorème. Shlyakhtenko détermine l'invariant $\tau(M)$ dans [22], mais en supposant que la représentation orthogonale (U_t) contient ou bien une représentation périodique ou bien une représentation triviale de dimension 2. Nous suivons la même méthode que Shlyakhtenko, mais utilisons le nouveau lemme 4.1 qui est plus fort que le lemme des 14ε de Barnett [3] utilisé par Shlyakhtenko. Shlyakhtenko démontre (1)–(4) dans [20] pour les représentations presque-périodiques et dans [21] pour le cas général, mais par d'autres méthodes que nous.

Preuve du théorème 2.7. — Il suffit de démontrer (1) et (5). En effet, un facteur plein est semi-fini (c'est-à-dire, de type I ou II) ssi $\tau(M)$ est la topologie grossière. Dans ce cas-là, on conclut de (5) que $U_t = \text{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et d'après l'isomorphisme (1), M est un facteur II_1 . Ceci démontre (2). Un facteur plein n'est jamais de type III_0 . Comme $\tau(M)$ est la topologie la plus faible qui rend continue l'application $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Out}(M)$, on conclut de (5) que $\delta(t) = 1$ ssi $U_t = \text{id}$. Ceci démontre (3) et (4). Finalement, démontrons (6). Si M admet un état presque-périodique, le groupe \mathbb{R} muni de la topologie $\tau(M)$ peut être complété en un groupe compact. Il existe donc un groupe compact G , un plongement $\mathbb{R} \subset G$ et une extension de $t \mapsto U_t$ en un homomorphisme continu $G \rightarrow O(H_{\mathbb{R}})$. Ceci veut dire que (U_t) est presque-périodique [8]. Réciproquement, si (U_t) est presque-périodique, l'état quasi-libre est un état presque-périodique.

Il nous reste à démontrer (1) et (5). Ceci est évident quand $U_t = \text{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le deuxième cas qu'on considère est celui où (U_t) contient la représentation donnée par l'égalité (2) avec $0 < \lambda < 1$. Notons son complément par (U'_t) agissant sur $H'_{\mathbb{R}}$. D'après le théorème 2.6 on a

$$\begin{aligned} (M, \varphi) &\cong (T_\lambda, \varphi_\lambda) * (\Gamma(H'_{\mathbb{R}}, U'_t)'', \varphi_{U'}) \\ &\cong ((T_\lambda, \varphi_\lambda) * (L^\infty[-1, 1], \mu)) * (L^\infty([-1, 1], \mu) * (\Gamma(H'_{\mathbb{R}}, U'_t)'', \varphi_{U'})). \end{aligned}$$

Comme $(L^\infty[-1, 1], \mu)$ contient un unitaire de Haar, on peut appliquer la proposition 4.2. On conclut que M est un facteur plein et que l'invariant $\tau(M)$ est la topologie la plus faible sur \mathbb{R} qui rend continues les deux applications $t \mapsto \sigma_t^{\varphi_\lambda}$ et $t \mapsto \sigma_t^{\varphi_{U'}}$. Par la proposition 2.2 ceci est exactement la topologie la plus faible sur \mathbb{R} qui rend continue l'application $t \mapsto U_t$.

Finalement, nous considérons le cas où la représentation (U_t) ne contient pas de représentation périodique et n'est pas triviale. Il est alors clair qu'on peut décomposer

U_t en trois composantes non-triviales $U_t = U_t^{(1)} \oplus U_t^{(2)} \oplus U_t^{(3)}$. Les énoncés (1) et (5) découlent des propositions 2.3 et 4.2 ainsi que du lemme 4.3. \square

Pour chaque représentation orthogonale non-périodique (U_t) de \mathbb{R} , le facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est donc un facteur de type III_1 dont l'invariant τ est la topologie la plus faible qui rend continue l'application $t \mapsto U_t$.

Remarque 2.8. — Dans [6] Connes part d'une mesure finie μ sur \mathbb{R}_+^* telle que $\int \lambda d\mu(\lambda) < \infty$. On y associe la représentation unitaire (U_t) de \mathbb{R} sur $L^2(\mathbb{R}_+^*, \mu)$, défini par $(U_t \xi)(\lambda) = \lambda^{it} \xi(\lambda)$. On suppose que (U_t) est non-périodique.

Connes définit $P = M_2(L^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mu))$ muni de l'état φ proportionnel à la forme positive

$$\omega \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \int f_{11}(\lambda) d\mu(\lambda) + \int \lambda f_{22}(\lambda) d\mu(\lambda).$$

Prenons un groupe discret infini G et définissons le produit tensoriel infini

$$P_\infty = \bigotimes_{g \in G} (P, \varphi).$$

Alors G agit sur P_∞ par automorphismes de décalage des facteurs tensoriels et on considère le produit croisé $M = P_\infty \rtimes G$. De cette manière M est un facteur de type III_1 . Connes démontre que pour $G = \mathbb{F}_n$ ($n = 2, \dots, +\infty$), M est un facteur plein et l'invariant $\tau(M)$ est la topologie la plus faible qui rend continue l'application $t \mapsto U_t$. Les facteurs de type III_1 de Connes et ceux de Shlyakhtenko peuvent-ils être isomorphes ?

3. CLASSIFICATION DES FACTEURS D'ARAKI-WOODS LIBRES

3.1. Le cas presque-périodique

Supposons d'abord que (U_t) est une représentation orthogonale *presque-périodique*. Ceci veut dire que l'opérateur A , qui était défini sur le complexifié H de $H_{\mathbb{R}}$ par $U_t = A^{it}$, a un spectre purement ponctuel. Soit $G \subset \mathbb{R}_+^*$ le sous-groupe engendré par le spectre ponctuel de A . Shlyakhtenko [20] démontre que ce sous-groupe *classifie les facteurs d'Araki-Woods libres presque-périodiques*.

THÉORÈME 3.1. — *Soit (U_t) une représentation orthogonale presque-périodique et non-triviale. Soit G le sous-groupe de \mathbb{R}_+^* engendré par le spectre ponctuel de A . Alors, $(\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'', \varphi_U)$ ne dépend que de G à des isomorphismes qui préservent l'état quasi-libre libre près.*

Réciproquement, le groupe G coïncide avec l'invariant S_{discret} du facteur $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ [6], qui classifie donc les facteurs d'Araki-Woods libres presque-périodiques et non-triviales.

En particulier, il découle de ce théorème et du théorème 2.7 que $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$ est le seul facteur d'Araki-Woods libre de type III_λ ($0 < \lambda < 1$).

Remarquons que le cas où $U_t = \text{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ reste ouvert. En effet, d'après l'isomorphisme (1), on sait qu'on obtient le facteur du groupe libre à n générateurs : décider si ces facteurs dépendent de n est un des problèmes ouverts en algèbres d'opérateurs.

3.2. Le facteur de type II_∞ associé

Au §1 nous avons vu qu'on associe, à chaque algèbre de von Neumann M , une algèbre de von Neumann semi-finie $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ où (σ_t) est le groupe modulaire d'un état fidèle sur M . On sait que M est un facteur de type III_1 ssi le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ est un facteur de type II_∞ . On l'appelle le facteur II_∞ associé au facteur M de type III_1 .

Si M est un facteur de type III_λ ($0 < \lambda < 1$), on peut prendre un état fidèle sur M tel que le groupe modulaire correspondant (σ_t) admette $2\pi/|\log \lambda|$ comme période. Le groupe modulaire donne donc une action du cercle \mathbb{T} sur M . Le produit croisé $M \rtimes \mathbb{T}$ est un facteur de type II_∞ et on a un isomorphisme canonique

$$M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R} \cong (M \rtimes \mathbb{T}) \otimes L^\infty(\mathbb{T}).$$

Le facteur $M \rtimes \mathbb{T}$ de type II_∞ s'appelle également le facteur II_∞ associé à M .

Les facteurs II_∞ associés aux facteurs de type III_λ ($0 < \lambda \leq 1$) retiennent une certaine partie de la structure de M . Dans ce paragraphe on s'en sert pour démontrer certains résultats de *non-isomorphisme* entre les facteurs d'Araki-Woods libre.

Dans [20] Shlyakhtenko calcule le facteur II_∞ associé au facteur d'Araki-Woods libre $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$ de type III_λ . Il identifie, grâce aux modèles matriciels, le facteur T_λ au facteur suivant étudié par Rădulescu [16].

$$D_\lambda := (M_2(\mathbb{C}), \omega_\lambda) * (L^\infty[-1, 1], \mu),$$

où $\omega_\lambda(e_{ij}) = \delta_{ij}\lambda^j/(1+\lambda)$ pour $i, j = 0, 1$, et μ est la mesure semi-circulaire. Dans [16] Rădulescu démontre que le facteur II_∞ associé à D_λ est isomorphe à $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathbb{B}(\ell^2)$. On obtient donc le résultat suivant.

PROPOSITION 3.2. — *Le facteur II_∞ associé au facteur d'Araki-Woods libre $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$ est isomorphe à $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathbb{B}(\ell^2)$.*

Dans [22, 21] une description plus systématique des facteurs II_∞ associés aux facteurs d'Araki-Woods libres est donnée. L'idée est la suivante : dans l'isomorphisme (1) nous avons vu que le facteur d'un groupe libre est engendré par une famille libre d'opérateurs semi-circulaires. Une telle famille peut être obtenue par des opérateurs de création sur un espace de Fock plein.

Shlyakhtenko généralise ceci et considère dans [22] une famille libre d'opérateurs semi-circulaires à coefficients dans une algèbre de von Neumann A . On retrouve le

cas précédent quand $A = \mathbb{C}$. On peut construire une telle famille à coefficients dans A en remplaçant, dans la construction de l'espace de Fock plein, les espaces de Hilbert par des A -modules hilbertiens. Ceci permet d'engendrer le facteur Π_∞ associé à un facteur d'Araki-Woods libre par une famille libre à coefficients dans $A = L^\infty(\mathbb{R})$.

De cette manière Shlyakhtenko démontre dans [24, 21] le résultat suivant.

THÉORÈME 3.3. — *Soit $(H_\mathbb{R}, U_t)$ un multiple fini ou infini de la représentation régulière de \mathbb{R} donnée par $(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda_t)$. Alors, le facteur Π_∞ associé à $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est isomorphe à $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes B(\ell^2)$.*

Dans [21] Shlyakhtenko identifie l'action duale sur le facteur $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes B(\ell^2)$ de type Π_∞ associé à $\Gamma(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda_t)''$ avec l'action construite par Rădulescu dans [15].

3.3. Des résultats de non-isomorphisme

Comme on a vu au §1.4, on peut associer à chaque mesure symétrique μ sur \mathbb{R} , une représentation orthogonale (U_t) de \mathbb{R} sur l'espace de Hilbert réel $H_\mathbb{R}$ défini par

$$H_\mathbb{R} = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mu) \mid \xi(-x) = \overline{\xi(x)}\} \quad \text{et} \quad (U_t \xi)(x) = e^{itx} \xi(x).$$

On notera $\tau(\mu)$ la topologie la plus faible sur \mathbb{R} qui rend continue l'application $t \rightarrow U_t$ de \mathbb{R} dans $O(H_\mathbb{R})$ muni de la topologie faible. D'après le théorème 2.7, $\tau(\mu)$ est exactement l'invariant τ du facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$. Dans [24] Shlyakhtenko démontre qu'il existe une famille non-dénombrable de mesures μ sans atomes telles que les topologies $\tau(\mu)$ soient distinctes. On obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 3.4. — *Il existe une famille non-dénombrable de facteurs d'Araki-Woods libres mutuellement non-isomorphes et sans états presque-périodiques.*

Les algèbres de cette famille peuvent être distinguées par l'invariant τ . Néanmoins, on verra plus tard que l'invariant τ ne suffit pas pour distinguer tous les facteurs d'Araki-Woods libres.

Voiculescu a introduit [28] la notion d'entropie libre $\chi(x_1, \dots, x_n)$ pour des éléments auto-adjoints x_1, \dots, x_n dans une algèbre de von Neumann finie M munie d'une trace. Ceci est utilisé pour définir la dimension entropique libre $\delta(x_1, \dots, x_n)$. Une application spectaculaire de l'entropie libre a été donnée par Voiculescu dans [29] où il démontre que les facteurs des groupes libres n'admettent pas de sous-algèbre de Cartan.

Dans [24, 22] Shlyakhtenko utilise la dimension entropique libre pour démontrer que, dans certains cas, le facteur Π_∞ associé à un facteur d'Araki-Woods libre ne peut être isomorphe à $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes B(\ell^2)$.

THÉORÈME 3.5. — Soit (U_t) une représentation orthogonale non-périodique de \mathbb{R} sur un espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$. Supposons que la mesure spectrale de $\bigoplus_{n \geq 1} U_t^{\otimes n}$ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors, le facteur II_{∞} associé à $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ n'est pas isomorphe à $L(\mathbb{F}_{\infty}) \otimes B(\ell^2)$.

En particulier, $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ n'est pas isomorphe à $\Gamma(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda_t)''$, où (λ_t) est la représentation régulière de \mathbb{R} .

La condition du théorème précédent est satisfaite si la topologie la plus faible qui rend continue l'application $t \mapsto U_t$ est strictement plus faible que la topologie usuelle de \mathbb{R} .

Dans [24] Shlyakhtenko construit une mesure μ sur \mathbb{R} telle que toutes les mesures $\mu * \dots * \mu$ sont singulières par rapport à la mesure de Lebesgue, mais néanmoins $\tau(\mu)$ est la topologie usuelle de \mathbb{R} . Le théorème précédent admet donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.6. — Il existe des facteurs d'Araki-Woods libres non-isomorphes ayant le même invariant τ .

Comme l'invariant τ ne distingue pas tous les facteurs d'Araki-Woods libres, Shlyakhtenko propose dans [24] un *nouvel invariant* \mathcal{S} pour les facteurs pleins de type III. Introduisons quelques notations. Si μ est une mesure sur \mathbb{R} , notons \mathcal{C}_{μ} l'ensemble de toutes les mesures qui sont absolument continues par rapport à la mesure μ . Dans le cas où μ est la mesure spectrale d'un opérateur auto-adjoint et strictement positif A , on pose $\mathcal{C}_A := \mathcal{C}_{\mu}$. Ceci permet de définir

$$\mathcal{S}(M) := \bigcap_{\varphi \text{ état fidèle sur } M} \mathcal{C}_{\bigoplus_n \Delta_{\varphi}^{\otimes n}},$$

où Δ_{φ} est l'opérateur modulaire de l'état φ . On remarque que les mesures dans $\mathcal{S}(M)$ sont supportées par \mathbb{R}_{+}^{*} et que la mesure de Dirac δ_1 est toujours dans $\mathcal{S}(M)$.

Shlyakhtenko démontre dans [24] que cet invariant \mathcal{S} distingue certains facteurs d'Araki-Woods libres (non-isomorphes) qui ont le même invariant τ .

3.4. Le facteur d'Araki-Woods libre dépend-il de la multiplicité ?

À chaque mesure symétrique μ sur \mathbb{R} est associée une représentation orthogonale (voir §3.3). Notons $\Gamma(\mu, n)$, où $n \in \{1, \dots, +\infty\}$, le facteur d'Araki-Woods libre associé à la somme directe de n copies de cette représentation.

Il découle du théorème de classification 3.1 que, dans le cas où μ est une mesure atomique non-concentrée en $\{0\}$, le facteur $\Gamma(\mu, n)$ ne dépend pas de n . D'après le théorème 2.7, l'invariant τ d'un facteur $\Gamma(\mu, n)$ quelconque ne dépend pas de n . Néanmoins, Shlyakhtenko démontre dans [19] un résultat très surprenant.

THÉORÈME 3.7. — Soient λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et δ_0 la mesure de Dirac en 0. Alors, $\Gamma(\lambda + \delta_0, 1)$ et $\Gamma(\lambda + \delta_0, 2)$ ne sont pas isomorphes.

Dans sa preuve Shlyakhtenko utilise la notion *d'algèbre de von Neumann solide* due à Ozawa [12] : une algèbre de von Neumann est dite solide si le commutant relatif de n'importe quelle sous-algèbre diffuse et unifère est injectif. Rappelons qu'une algèbre de von Neumann est dite diffuse si elle n'admet pas de projecteurs minimaux. Une algèbre de von Neumann solide est nécessairement finie.

Ozawa démontre dans [12] que l'algèbre de von Neumann $L(G)$ d'un groupe discret hyperbolique G (voir [9]) est solide. En particulier, les facteurs des groupes libres sont solides.

Notons N_n le facteur II_∞ associé à $\Gamma(\lambda + \delta_0, n)$. Shlyakhtenko démontre que $N_1 \cong L(\mathbb{F}_\infty) \otimes B(\ell^2)$. Ceci implique que pN_1p est une algèbre de von Neumann solide pour tout projecteur fini $p \in N_1$. Par contre, il construit également un projecteur fini $q \in N_2$ tel que qN_2q ne soit pas solide.

Remarquons qu'il découle des résultats de [24] que l'invariant \mathcal{S} ne distingue pas $\Gamma(\lambda + \delta_0, 1)$ et $\Gamma(\lambda + \delta_0, 2)$.

Soit (U_t) une représentation orthogonale qui contient une représentation périodique non-triviale. D'après le théorème 2.6 (et la proposition 2.3), on sait que le facteur d'Araki-Woods libre associé absorbe $(L(\mathbb{F}_\infty), \text{tr})$:

$$(\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'', \varphi_U) \cong (\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'', \varphi_U) * (L(\mathbb{F}_\infty), \text{tr}).$$

Le deuxième résultat surprenant de [19] est qu'il existe des facteurs d'Araki-Woods libres qui n'absorbent pas $(L(\mathbb{F}_\infty), \text{tr})$.

THÉORÈME 3.8. — *Soit λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Alors,*

$$\Gamma(\lambda, 1) \not\cong (\Gamma(\lambda, 1), \varphi_{\lambda,1}) * (L(\mathbb{F}_\infty), \text{tr}).$$

4. APPENDICE : SUR LE LEMME DES 14ε

Dans 4.1 nous démontrons une généralisation du lemme technique 4.1 de [27], qui était à son tour une généralisation du lemme des 14ε dû à Murray & von Neumann [11] (voir [3] pour une version adaptée aux produits libres de type III). On exploite le fait que le produit libre $G_1 * G_2$ de deux groupes non-triviaux G_1, G_2 est très non-moyennable⁽³⁾, sauf si $G_1 \cong G_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ceci explique le lemme 4.1 : il nous faut un élément non-trivial dans N_1 et deux éléments non-triviaux dans N_2 .

Le lemme 4.1 permet de calculer l'invariant τ d'un certain nombre de produits libres, voir proposition 4.2.

⁽³⁾Plus précisément $G_1 * G_2$ n'est pas intérieurement moyennable. On construit également une décomposition paradoxale explicite de G .

LEMME 4.1. — Soit N_i une algèbre de von Neumann munie d'un état fidèle ω_i , ($i = 1, 2$). Posons $(N, \omega) = (N_1, \omega_1) * (N_2, \omega_2)$. Soient $a \in N_1$ et $b, c \in N_2$. Supposons que les éléments a, b et c appartiennent au domaine de $\sigma_{i/2}^\omega$, où (σ_t^ω) est le groupe modulaire de l'état ω . Soit α_i un automorphisme de N_i qui satisfait $\omega_i \alpha_i = \omega_i$, ($i = 1, 2$). Notons $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$. Alors, pour tout $x \in N$,

$$\|x - \omega(x)1\|_2 \leq \mathcal{E}(a, b, c) \max\{\|xa - \alpha(a)x\|_2, \|xb - \alpha(b)x\|_2, \|xc - \alpha(c)x\|_2\} + \mathcal{F}(a, b, c) \|x\|_2$$

$$\text{où } \mathcal{E}(a, b, c) = 6\|a\|^3 + 4\|b\|^3 + 4\|c\|^3,$$

$$\mathcal{F}(a, b, c) = 3\mathcal{C}(a) + 2\mathcal{C}(b) + 2\mathcal{C}(c) + 12|\omega(cb^*)| \|cb^*\|,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(a) &= 2\|a\|^3 \|\sigma_{i/2}^\omega(a) - a\| + 2\|a\|^2 \|a^*a - 1\| \\ &\quad + 3(1 + \|a\|^2) \|aa^* - 1\| + 6|\omega(a)| \|a\|. \end{aligned}$$

Démonstration. — Représentons N_i sur l'espace de Hilbert H_i de la représentation GNS de ω_i et soit ξ_i le vecteur cyclique associé. Posons $(H, \xi) = (H_1, \xi_1) * (H_2, \xi_2)$. On rappelle [30] que

$$H = \mathbb{C}\xi \oplus (\overset{\circ}{H}_1 \otimes H(2, l)) \oplus (\overset{\circ}{H}_2 \otimes H(1, l)),$$

où $\overset{\circ}{H}_i = H_i \ominus \mathbb{C}\xi_i$,

$$H(2, l) = \mathbb{C}\xi \oplus \overset{\circ}{H}_2 \oplus (\overset{\circ}{H}_2 \otimes \overset{\circ}{H}_1) \oplus (\overset{\circ}{H}_2 \otimes \overset{\circ}{H}_1 \otimes \overset{\circ}{H}_2) \oplus \dots,$$

$$H(1, l) = \mathbb{C}\xi \oplus \overset{\circ}{H}_1 \oplus (\overset{\circ}{H}_1 \otimes \overset{\circ}{H}_2) \oplus (\overset{\circ}{H}_1 \otimes \overset{\circ}{H}_2 \otimes \overset{\circ}{H}_1) \oplus \dots.$$

Pour $\zeta \in H$ et $y \in N$, on définit l'action à droite de y sur ζ par $\zeta \cdot y := Jy^*J\zeta$ où J est la conjugaison modulaire de l'état ω .

Choisissons $x \in N$ et définissons $\eta = x\xi$. On écrit $\eta = \omega(x)\xi + \mu + \gamma$ avec $\mu \in \overset{\circ}{H}_1 \otimes H(2, l)$ et $\gamma \in \overset{\circ}{H}_2 \otimes H(1, l)$. Posons alors $\overset{\circ}{x} = x - \omega(x)1$, $\eta_0 = \mu + \gamma$, $\tilde{\eta} = \alpha(a^*) \cdot \eta \cdot a$, $\tilde{\gamma} = \alpha(a^*) \cdot \gamma \cdot a$ et $\tilde{\zeta} = \eta_0 - \gamma - \tilde{\gamma}$. Bien évidemment

$$\begin{aligned} \|\mu\|^2 + \|\gamma\|^2 &= \|\tilde{\zeta} + \gamma + \tilde{\gamma}\|^2 \geq \|\tilde{\zeta}\|^2 + \|\gamma\|^2 + \|\tilde{\gamma}\|^2 - 2|\langle \tilde{\zeta}, \gamma \rangle| - 2|\langle \tilde{\zeta}, \tilde{\gamma} \rangle| - 2|\langle \gamma, \tilde{\gamma} \rangle| \\ &\geq 2\|\gamma\|^2 - \|\gamma\|^2 - \|\tilde{\gamma}\|^2 - 2|\langle \tilde{\zeta}, \gamma \rangle| - 2|\langle \tilde{\zeta}, \tilde{\gamma} \rangle| - 2|\langle \gamma, \tilde{\gamma} \rangle|. \end{aligned}$$

Exactement de la même manière que dans la démonstration du lemme 4.1 de [27], on sait estimer tous les termes négatifs. On conclut que

$$(4) \quad \|\gamma\|^2 \leq \|\mu\|^2 + 2\|a\|^3 \|xa - \alpha(a)x\|_2 \|\overset{\circ}{x}\|_2 + \mathcal{C}(a) \|x\|_2 \|\overset{\circ}{x}\|_2.$$

On obtient une estimation analogue à l'aide des éléments b et c . En effet on pose $\eta' = \alpha(b^*) \cdot \eta \cdot b$, $\eta'' = \alpha(c^*) \cdot \eta \cdot c$, $\mu' = \alpha(b^*) \cdot \mu \cdot b$ et $\mu'' = \alpha(c^*) \cdot \mu \cdot c$. On définit

$\zeta' = \eta_0 - \mu - \mu' - \mu''$. On trouve que

$$\begin{aligned} \|\mu\|^2 + \|\gamma\|^2 \geq 3\|\mu\|^2 - \|\mu\|^2 - \|\mu'\|^2 - \|\mu''\|^2 - 2|\langle \zeta', \mu \rangle| - 2|\langle \zeta', \mu' \rangle| \\ - 2|\langle \zeta', \mu'' \rangle| - 2|\langle \mu, \mu' \rangle| - 2|\langle \mu, \mu'' \rangle| - 2|\langle \mu', \mu'' \rangle|. \end{aligned}$$

On estime de nouveau tous les termes négatifs et on obtient

$$(5) \quad \begin{aligned} 2\|\mu\|^2 \leq \|\gamma\|^2 + 2\|b\|^3 \|xb - \alpha(b)x\|_2 \|\overset{\circ}{x}\|_2 + 2\|c\|^3 \|xc - \alpha(c)x\|_2 \|\overset{\circ}{x}\|_2 \\ + (\mathcal{C}(b) + \mathcal{C}(c) + 6\|cb^*\| |\omega(cb^*)|) \|x\|_2 \|\overset{\circ}{x}\|_2. \end{aligned}$$

Comme $\|\mu\|^2 + \|\gamma\|^2 = \|\overset{\circ}{x}\|_2^2$, une combinaison des inégalités (4) et (5) donne l'inégalité du lemme. \square

A priori l'invariant τ d'un facteur plein est difficile à calculer car on munit \mathbb{R} de la topologie induite d'une topologie quotient. L'intérêt de la proposition suivante est de donner une formule pour l'invariant τ en termes du groupe modulaire d'un seul état fidèle, sans qu'il faille connaître $\text{Out } N$. De la même manière que Shlyakhtenko déduit du lemme des 14ε de Barnett son corollaire 8.4 dans [22], nous déduisons du lemme 4.1 le résultat suivant, utilisé dans le §2.2.

PROPOSITION 4.2. — *Soit N_i des algèbres de von Neumann munies d'un état fidèle ω_i , ($i = 1, 2$). Soit $(N, \omega) = (N_1, \omega_1) * (N_2, \omega_2)$. On suppose que N_1 contient une suite (a_n) d'éléments qui sont analytiques par rapport à l'état ω et satisfont*

$$(6) \quad \|\sigma_{i/2}^\omega(a_n) - a_n\| \longrightarrow 0, \quad \|a_n^* a_n - 1\|, \|a_n a_n^* - 1\| \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \omega(a_n) \longrightarrow 0.$$

On suppose que N_2 contient des suites $(b_n), (c_n)$ qui satisfont les mêmes conditions que (a_n) ainsi que la condition $\omega(c_n b_n^) \rightarrow 0$. Alors,*

a) N est un facteur plein.

b) Notons $\text{Aut}(N_i, \omega_i)$ le groupe d'automorphismes de N_i préservant l'état ω_i et $\pi : \text{Aut}(N) \rightarrow \text{Out}(N)$ l'application quotient. Alors, l'homomorphisme

$$(7) \quad \text{Aut}(N_1, \omega_1) \times \text{Aut}(N_2, \omega_2) \longrightarrow \text{Out}(N) : (\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto \pi(\alpha_1 * \alpha_2)$$

est un homéomorphisme à image fermé.

c) L'invariant $\tau(N)$ est la topologie la plus faible qui rend continues les applications $t \mapsto \sigma_t^{\omega_i}$ de \mathbb{R} dans $\text{Aut } N_i$ ($i = 1, 2$).

Démonstration. — Soient (x_k) une suite d'unitaires dans N et $\alpha_k \in \text{Aut}(N_1, \omega_1)$, $\beta_k \in \text{Aut}(N_2, \omega_2)$ des suites d'automorphismes. Supposons que $\text{Ad}(x_k^*) \circ (\alpha_k * \beta_k) \rightarrow \text{id}$ dans $\text{Aut}(N)$. Il suffit de démontrer que $\|x_k - \omega(x_k)1\|_2 \rightarrow 0$. En effet, prenant $\alpha_k = \text{id}$ et $\beta_k = \text{id}$ pour tout k , on aura démontré que N est un facteur plein. On aura également démontré que l'homomorphisme (7) est un homéomorphisme. Finalement c) résulte de b).

Choisissons $\varepsilon > 0$. Prenons n tel que $\mathcal{F}(a_n, b_n, c_n) < \varepsilon/2$. Si $k \rightarrow \infty$, on a

$$\|x_k a_n - (\alpha_k * \beta_k)(a_n)x_k\|_2 = \|(\text{id} - \text{Ad}(x_k^*) \circ (\alpha_k * \beta_k))(a_n)\|_2 \longrightarrow 0$$

et on a le même résultat en remplaçant (a_n) par (b_n) ou (c_n) . Il découle du lemme 4.1 qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\|x_n - \omega(x_n)1\|_2 < \varepsilon$. \square

On peut appliquer la proposition 4.2 à un produit libre $(N_1, \omega_1) * ((N_2, \omega_2) * (N_3, \omega_3))$ si chacune des algèbres (N_i, ω_i) contient une suite (a_n) qui satisfait les conditions (6). En effet, comme b_n et c_n sont *-libres dans ce cas-là, on a automatiquement que $\omega(c_n b_n^*) \rightarrow 0$. En particulier, il découle de la proposition 2.3 qu'on peut appliquer la proposition 4.2 à un facteur d'Araki-Woods libre associé à une représentation orthogonale de \mathbb{R} qui est une somme directe de trois représentations, pourvu qu'on démontre que chaque facteur d'Araki-Woods libre contient une suite (a_n) qui satisfait les conditions (6).

LEMME 4.3. — Soit (U_t) une représentation orthogonale de \mathbb{R} sur l'espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$. Soit $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ l'algèbre de von Neumann associée à l'état quasi-libre libre φ_U . Soit (σ_t) le groupe modulaire de l'état φ_U . Alors il existe une suite d'unitaires (u_n) dans $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ qui sont analytiques par rapport à (σ_t) et satisfont

$$\|\sigma_z(u_n) - u_n\| \rightarrow 0 \text{ uniformément sur des compacts de } \mathbb{C}, \text{ et } \varphi_U(u_n) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — Si $U_t = \text{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, le lemme est trivial. On suppose donc que (U_t) est non-trivial. Soit A l'opérateur auto-adjoint strictement positif sur le complexifié H de $H_{\mathbb{R}}$ tel que $U_t = A^{it}$. Soit J l'anti-unitaire canonique de H et $T = JA^{-1/2}$ l'involution sur H associée à (U_t) . Comme $A \neq 1$ et $JAJ = A^{-1}$, on peut prendre $\lambda > 1$ dans le spectre de A . Notons χ_n la fonction indicatrice de l'intervalle $[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]$ et prenons des vecteurs unité ξ_n dans l'image de $\chi_n(A)$. Comme $JAJ = A^{-1}$, les vecteurs ξ_n et $J\xi_n$ seront orthonormaux pour n suffisamment grand. On définit les éléments $x_n \in \Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ par $x_n = \ell(\xi_n) + \ell(T\xi_n)^*$. Il est clair que x_n est analytique par rapport à (σ_t) et que $\|\sigma_z^\omega(x_n) - \lambda^{iz}x_n\| \rightarrow 0$ uniformément sur des compacts de \mathbb{C} .

Définissons l'opérateur $y_n = \ell(\xi_n) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ell(J\xi_n)^*$ dans $B(\mathcal{F}(H))$. Alors $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ et d'après le théorème 2.5, l'opérateur $y_n^*y_n$ a une distribution sans atomes par rapport à l'état vectoriel du vide qui ne dépend pas de n . Il existe donc une fonction continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\langle \exp(ig(y_n^*y_n))\Omega, \Omega \rangle = 0$ pour tout n .

Choisissons $\varepsilon > 0$ et $K \subset \mathbb{C}$ compact. Comme g peut être approximée par des polynômes uniformément sur le spectre de $y_n^*y_n$, on peut prendre un polynôme P avec des coefficients réels tel que $|\langle \exp(ip(y_n^*y_n))\Omega, \Omega \rangle| < \varepsilon/2$ pour tout n . On sait que $\|\sigma_z^\omega(x_n^*x_n) - x_n^*x_n\| \rightarrow 0$ uniformément sur des compacts de \mathbb{C} et que $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. Pour n suffisamment grand $u := \exp(iP(x_n^*x_n))$ est alors un unitaire dans $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ qui satisfait $\|\sigma_z^\omega(u) - u\| < \varepsilon$ pour tout $z \in K$ et $|\varphi_U(u)| < \varepsilon$. \square

RÉFÉRENCES

- [1] H. ARAKI – « On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphisms », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **6** (1970), p. 385–442.
- [2] H. ARAKI & E.J. WOODS – « A classification of factors », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **4** (1968), p. 51–130.
- [3] L. BARNETT – « Free product von Neumann algebras of type III », *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), no. 2, p. 543–553.
- [4] F. COMBES – « Les facteurs de von Neumann de type III (d’après A. Connes) », in *Sém. Bourbaki, Lect. Notes in Math.*, vol. 514, Springer, Berlin, 1976, Exp. n° 461, p. 124–137.
- [5] A. CONNES – « Une classification des facteurs de type III », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série **6** (1973), p. 133–252.
- [6] ———, « Almost periodic states and factors of type III₁ », *J. Funct. Anal.* **16** (1974), p. 415–445.
- [7] ———, « Classification of injective factors », *Ann. of Math.* **104** (1976), p. 73–115.
- [8] J. DIXMIER – *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [9] É. GHYS & P. DE LA HARPE – *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, Progress in Math., vol. 83, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [10] U. HAAGERUP – « Connes’ bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III₁ », *Acta Math.* **158** (1987), p. 95–148.
- [11] F.J. MURRAY & J. VON NEUMANN – « On rings of operators. IV », *Ann. of Math. (2)* **44** (1943), p. 716–808.
- [12] N. OZAWA – « Solid von Neumann algebras », *Acta Math.* **192** (2004), p. 111–117.
- [13] G. PISIER & D. SHLYAKHTENKO – « Grothendieck’s theorem for operator spaces », *Invent. Math.* **150** (2002), p. 185–217.
- [14] R.T. POWERS & E. STØRMER – « Free states of the canonical anticommutation relations », *Comm. Math. Phys.* **16** (1970), p. 1–33.
- [15] F. RĂDULESCU – « A one-parameter group of automorphisms of $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes B(H)$ scaling the trace », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **314** (1992), p. 1027–1032.
- [16] ———, « A type III_λ factor with core isomorphic to the von Neumann algebra of a free group, tensor $B(H)$ », in *Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992)*, Astérisque, vol. 232, Société Mathématique de France, 1995, p. 203–209.
- [17] M.A. RIEFFEL & A. VAN DAELE – « A bounded operator approach to Tomita-Takesaki theory », *Pacific J. Math.* **69** (1977), p. 187–221.
- [18] D. SHALE & W.F. STINESPRING – « States of the Clifford algebra », *Ann. of Math.* **80** (1964), p. 365–381.
- [19] D. SHLYAKHTENKO – « On multiplicity and free absorption for free Araki-Woods factors », Prépublication.
- [20] ———, « Free quasi-free states », *Pacific J. Math.* **177** (1997), p. 329–368.
- [21] ———, « Some applications of freeness with amalgamation », *J. reine angew. Math.* **500** (1998), p. 191–212.

- [22] ———, « A -valued semicircular systems », *J. Funct. Anal.* **166** (1999), p. 1–47.
- [23] ———, « Prime type III factors », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **97** (2000), p. 12439–12441.
- [24] ———, « On the Classification of Full Factors of Type III », *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), p. 4143–4159.
- [25] G. SKANDALIS – « Algèbres de von Neumann de groupes libres et probabilités non commutatives (d’après Voiculescu, etc.) », in *Sém. Bourbaki, 1992/93*, Astérisque, vol. 216, Société Mathématique de France, 1993, p. 87–102.
- [26] Ș. STRĂTILĂ & L. ZSIDÓ – *Lectures on von Neumann algebras*, Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979.
- [27] S. VAES – « Strictly outer actions of groups and quantum groups », *J. reine angew. Math.* **578** (2005), p. 147–184.
- [28] D.V. VOICULESCU – « The analogues of entropy and of Fisher’s information measure in free probability theory. II », *Invent. Math.* **118** (1994), p. 411–440.
- [29] ———, « The analogues of entropy and of Fisher’s information measure in free probability theory. III », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), p. 172–199.
- [30] D.V. VOICULESCU, K.J. DYKEMA & A. NICA – *Free random variables*, CRM Monograph Series, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

Stefaan VAES

CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu
 Algèbres d’Opérateurs, Plateau 7E
 175 rue du Chevaleret
 F-75013 Paris

et

Département de Mathématiques
 K. U. Leuven
 Celestijnenlaan 200 B
 B-3001 Leuven
 Belgique
E-mail : vaes@math.jussieu.fr