

**PREUVE DE LA CONJECTURE DE POINCARÉ EN DÉFORMANT
LA MÉTRIQUE PAR LA COURBURE DE RICCI**

[d'après G. Perel'man]

par Gérard BESSON

INTRODUCTION

Dans un article célèbre de 1904 ([48]), H. Poincaré pose la question qu'en termes actuels nous énonçons sous la forme de la conjecture suivante :

CONJECTURE 0.1. — *Si M est une variété compacte sans bord simplement connexe de dimension 3, alors M est homéomorphe à la sphère.*

En dimension 3, la conclusion équivalente est que M est difféomorphe à la sphère. De nombreux outils topologiques ont été élaborés afin de résoudre ce problème ; un historique de ces développements est décrit dans l'article [42]. Une preuve de la conjecture qui suit permettrait de compléter la compréhension des variétés de dimension 3, compactes, connexes de groupe fondamental fini :

CONJECTURE 0.2. — *Un groupe fini de difféomorphismes qui agit librement sur S^3 est conjugué à un sous-groupe du groupe d'isométries de la sphère canonique.*

En 1982, W. Thurston a replacé ces questions dans un cadre plus général, inspiré par la classification des surfaces. Reprenons l'énoncé de la conjecture dite de géométrisation tel qu'il est formulé dans [57].

CONJECTURE 0.3. — *L'intérieur de toute variété compacte de dimension 3 admet une décomposition canonique en pièces qui portent une structure géométrique.*

Je tiens à remercier chaleureusement L. Bessières pour le travail que nous avons fait en commun sur cette théorie durant deux ans et les nombreuses corrections apportées à ce texte, ainsi que B. Kleiner pour avoir répondu avec gentillesse à toutes nos questions et J.-P. Bourguignon, J. Lott et S. Maillot pour leurs suggestions. Mes remerciements vont également à V. Bayle, M. Boileau, H.-D. Cao, B. Chow, É. Ghys, L. Guillou, J.-M. Iniotakis, B. Leeb (et tout le groupe de Munich), Ph. LeFloch, J. Porti, L. Rozoy, R. Souam et P. Topping pour des échanges fructueux.

Dans cet énoncé la variété peut avoir un bord. Dans la suite de ce rapport nous appellerons compacte une variété compacte sans bord (le terme fermée serait plus usuel en topologie) et toutes les variétés seront supposées orientées. La décomposition à laquelle il est fait allusion procède en deux étapes :

1) celle qui provient du théorème de Kneser dans lequel la variété est décomposée en une somme connexe d'un nombre fini de variétés premières. On rappelle qu'une variété M est dite première si $M = P \# Q$ implique $P = S^3$ ou $Q = S^3$.

2) Celle qui provient des travaux de K. Johannson et de W. Jaco et P. Shalen et qui consiste à découper le long de tores incompressibles. La conjecture affirme que ceci peut être fait en sorte que les variétés à bords qui en résultent possèdent une géométrie, c'est-à-dire une métrique riemannienne complète localement homogène. Celles-ci sont classifiées, il y a huit possibilités (en dimension 3). Le lecteur trouvera une intéressante discussion de cette conjecture ainsi que des références précises dans [57] et [1].

Un des avantages de la conjecture 0.3 est qu'elle fait référence à l'existence de métriques riemanniennes privilégiées, sur certaines régions de la variété étudiée, et fournit ainsi des outils supplémentaires, au-delà de la topologie. En 1982, R. Hamilton a introduit une méthode, que nous pouvons qualifier d'analytique, dans le but d'aborder ces questions. Il s'agit d'étudier une équation différentielle sur l'espace des métriques riemanniennes, nous dirons un flot, dont les solutions sont une déformation d'une métrique quelconque qui tend à la rendre de courbure constante. L'équation met en jeu la courbure de Ricci, qui est une notion de courbure de même nature que la métrique, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique sur chaque espace tangent. L'équation est :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)},$$

où $g(t)$ désigne la métrique riemannienne qui évolue et $\operatorname{Ric}_{g(t)}$ sa courbure de Ricci. L'équation ci-dessus est inspirée par la tentative de minimiser l'intégrale de la courbure scalaire dont ce n'est toutefois pas le flot de l'opposé du gradient ; elle est également liée à l'équation d'évolution associée aux applications harmoniques. Le signe négatif montre que la courbure positive est contractée et la courbure négative est dilatée, comme on peut s'en convaincre sur les exemples de courbure constante. Remarquons que, si la donnée initiale admet des isométries, c'est le cas pour la solution, pour tout temps de son intervalle de vie. En d'autres termes, le groupe d'isométries ne peut que croître.

Dans une série d'articles ([24], [25], [31], [29], [19], [26], [27], [28] et [30]), R. Hamilton développe les outils d'analyse nécessaires à l'utilisation de sa méthode et obtient de remarquables résultats géométriques, dont certains sont des réponses aux questions posées ci-dessus, dans des cas particuliers. De nombreuses difficultés persistent toutefois, en particulier celles liées à l'étude des singularités qui peuvent apparaître lors de l'évolution.

Récemment, G. Perel'man a déposé sur la Toile trois articles, [44], [46] et [45] dans lesquels une solution complète de la conjecture 0.3 est proposée. Ils apportent des idées novatrices et puissantes à la méthode du flot de la courbure de Ricci, et surtout à la description des régions qui deviennent singulières, c'est-à-dire où la courbure explose. Ceci permet de pratiquer une chirurgie, déjà en grande partie décrite dans [25], de manière efficace. On construit ainsi un flot défini pour tout temps mais pas de classe C^∞ , les singularités correspondant à des temps de chirurgies. Il se peut même que la variété disparaisse à un moment de l'évolution, on dit alors qu'elle s'éteint en temps fini. Les articles ne sont pas très détaillés, il s'agit plutôt d'esquisses de preuve, néanmoins assez claires. Ils font l'objet d'un intense travail de mise en place et de vérifications des détails (et d'exégèse). L'expertise n'étant pas complètement terminée, il est difficile de se prononcer pour l'instant (au moment où ces lignes sont écrites) sur la question de savoir si la conjecture 0.3 est prouvée. Toutefois, le cas de la conjecture de Poincaré est plus « simple » dans le schéma de G. Perel'man ; il montre, en effet, que, pour n'importe quelle métrique sur une variété compacte simplement connexe, le flot s'éteint en temps fini ([45]). Une conséquence est qu'on ne pratique qu'un nombre fini de chirurgies. L'auteur du présent texte est convaincu que les conjectures 0.1 et 0.2 sont prouvées.

Le but de ce rapport est de décrire les outils d'analyse et de géométrie nécessaires ainsi que le schéma de la preuve des conjectures 0.1 et 0.2. Il est conçu comme intermédiaire entre les survols [1], [39], [42] et [43] et les notes détaillées [36], [51] et [61]. L'auteur espère qu'il peut être un guide de lecture de ces documents. Les premières notes détaillées produites ont été celles de B. Kleiner et J. Lott, nous les conseillons vivement à tous ceux qui souhaitent comprendre les travaux de G. Perel'man ; de même les documents [51] et [61] sont d'une grande précision sur de nombreux points de [44]. Ce texte est écrit alors que l'auteur travaille encore à améliorer sa compréhension de cet ensemble de travaux ; il contient certainement des erreurs qui seront expurgées dans des versions ultérieures, déposées sur le site de l'Institut Fourier⁽¹⁾. Signalons enfin les articles [47] et [2] qui s'adressent à un large public et sont d'une grande utilité.

1. DES MODÈLES JOUETS

Il existe deux modèles qui permettent de mieux se familiariser avec les rudiments concernant les équations d'évolution géométriques. Il s'agit du raccourcissement des courbes et du flot de la courbure sur les surfaces. Ce sont des jouets déjà assez sophistiqués que nous décrivons très brièvement.

⁽¹⁾<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/GT/perelman/index.html>

1.1. Le raccourcissement des courbes

Soit \mathcal{C} une courbe plane fermée simple paramétrée par une fonction de classe C^∞ , $F_0 : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$; on la suppose orientée positivement. Pour $T > 0$, on cherche une famille $F : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^∞ en ses deux variables vérifiant l'équation d'évolution suivante :

$$(*_c) \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = k(x, t)\vec{N}(x, t) \\ F(\cdot, 0) = F_0 \end{cases}$$

où $\vec{N}(x, t)$ (resp. $k(x, t)$) est le vecteur normal intérieur (resp. la courbure) de la courbe $F_t(\cdot) = F(\cdot, t)$ au point $F(x, t)$.

Cette équation est non linéaire car k et N dépendent de F (voir la section 3). Il est facile de vérifier qu'il s'agit ici du flot de l'opposé du gradient de la fonctionnelle longueur; un calcul immédiat montre que l'aire $A(t)$ enclose par la courbe F_t (l'aire de la composante connexe bornée) vérifie $A'(t) = -2\pi$. Le théorème principal est dû à M. Gage et R. Hamilton [19] pour le cas où \mathcal{C} est convexe et à M. Grayson [21] pour le cas général. Afin d'énoncer ces résultats (en un seul théorème) définissons les quantités $k_{\max}(t) = \max\{k(x, t); x \in S^1\}$ et, de même, $k_{\min}(t)$ comme minimum de la courbure au temps t , ainsi que $r_{\max}(t) =$ rayon du cercle circonscrit à F_t et, de même, $r_{\min}(t)$ comme le rayon du cercle inscrit dans F_t .

THÉORÈME 1.1 ([19] et [21]). — *Pour toute courbe C^∞ fermée simple il existe une unique solution de l'équation $(*_c)$ définie sur un intervalle de temps $[0, T)$ où $T = A(0)/2\pi$. La famille de courbe F_t converge, lorsque $t \rightarrow T$, vers un point et devient circulaire aux sens suivants :*

- i) le quotient k_{\max}/k_{\min} tend vers 1 lorsque t tend vers T ,
- ii) le quotient r_{\max}/r_{\min} tend vers 1 lorsque t tend vers T .

De plus, pour tout $n \geq 1$, la dérivée spatiale n -ième de k converge uniformément vers 0 lorsque t tend vers T . Enfin, si la courbe \mathcal{C} est convexe elle le reste tout au long du processus ([19]) et si \mathcal{C} n'est pas convexe la courbe F_t le devient en un temps $t < T$ ([21]).

Ce théorème affirme en fait que, quitte à renormaliser afin que l'aire intérieure soit constante, la famille F_t converge dans la topologie C^k , pour tout k , vers un cercle.

Questions :

1) Si la courbe de départ est convexe, alors F_t reste dans son intérieur pour tout t . En particulier le point limite est dans l'enveloppe convexe de \mathcal{C} . Il serait intéressant de déterminer sa position.

2) Ce théorème nécessite une courbe initiale régulière. Que se passe-t-il si \mathcal{C} possède des coins? Dans [19] il est fait allusion à une solution possible.

3) Une extension aux corps convexes de \mathbf{R}^n est décrite dans [33].

1.2. Le flot de la courbure sur les surfaces

On munit une surface abstraite compacte et orientable Σ d'une métrique riemannienne notée g_0 . Dans la classe conforme de g_0 il existe une métrique de courbure constante (unique à isométrie près). On souhaite, comme précédemment, obtenir cette « forme » idéale comme limite d'un flot géométrique. Si $g(t)$ est une famille C^∞ de métriques riemanniennes sur Σ , dépendant de manière C^∞ du paramètre t , on note $R(x, t)$ la courbure scalaire de $g(t)$ au point $x \in \Sigma$; avec les conventions habituelles, la courbure scalaire est le double de la courbure de Gauß. La mesure riemannienne, notée $v_{g(t)}$ (ou $dvol$), permet de définir le volume de $(\Sigma, g(t))$ et la quantité $r(t) = \frac{1}{\text{vol}(\Sigma, g(t))} \int_{\Sigma} R(x, t) dv_{g(t)}$. On considère l'équation suivante :

$$(*_s) \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = (r - R)g \\ g(0) = g_0. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que le volume est constant en temps pour toute solution; c'est donc une version normalisée du flot de la courbure que nous considérons. On peut également s'assurer immédiatement que toute solution $g(t)$ est conforme à g_0 , pour tout $t \geq 0$. Le résultat ci-dessous est prouvé en combinant [26] et [11].

THÉORÈME 1.2 ([26] et [11]). — *Soit (Σ, g_0) une surface riemannienne de classe C^∞ ; le problème $(*_s)$ admet une solution unique définie pour $t \in [0, +\infty)$. La famille de métriques $g(t)$ converge dans la topologie C^k , pour tout k , lorsque t tend vers $+\infty$, vers une métrique de courbure constante conforme à g_0 .*

Ce théorème peut être vu comme une nouvelle preuve de l'uniformisation des surfaces compactes. C'est le cas pour toutes les surfaces de caractéristique d'Euler négative ou nulle. Pour la sphère une étape de la preuve utilisait la structure complexe et ce n'est que récemment que ce problème fut résolu, dans [9], conduisant ainsi à une nouvelle preuve complète de l'uniformisation en dimension 2.

Dans le cas où la courbure est strictement négative, la preuve de la convergence est immédiate. Il serait alors intéressant d'avoir un procédé ou un algorithme simple permettant de munir une surface de caractéristique d'Euler négative (strictement) d'une métrique de courbure négative. Le flot donnerait, alors, une métrique de courbure constante de manière rapide (cette question a été posée à l'auteur par É. Ghys).

Le cas des orbifolds de dimension 2 est particulièrement instructif. Il est traité dans les articles [15], [60] et [10]. Les orbifolds compactes en dimension 2 sont classées en deux catégories (voir [50] ou [56]) : les « bonnes » (good) orbifolds qui admettent une métrique de courbure constante et les « mauvaises » (bad) orbifolds qui n'en admettent pas. Pour ces dernières, on montre que le flot $(*_s)$ converge vers un soliton de Ricci (voir [59]). La preuve du théorème 1.2 contient une étape dans laquelle on montre que les seuls solitons sur S^2 sont constants (en temps) égaux à une métrique de courbure constante (voir [13], théorème 5.21).

1.3. Conclusion

Ces exemples ont la vertu de mettre en œuvre l'utilisation des outils de base, présentés dans les sections suivantes, sous une forme élémentaire; en cela ils constituent une bonne introduction aux travaux qui suivent. Ils ne sont toutefois pas complets en ce sens où, dans toutes ces situations, la courbure de l'objet considéré explose (c'est-à-dire tend vers $+\infty$) au même moment en tous les points. La situation étudiée par R. Hamilton, en dimension 4, et G. Perelman, en dimension 3, est radicalement différente car la courbure scalaire peut exploser dans certaines régions de la variété alors qu'elle reste bornée ailleurs. Il est alors nécessaire de décrire ces régions avec précision.

2. PREMIERS RÉSULTATS EN DIMENSION 3

C'est le point de départ de l'ensemble de travaux qui est l'objet de ce texte. C'est le premier résultat dû à R. Hamilton qui jette les bases de la méthode. On considère une variété compacte connexe et orientable de dimension 3, notée M , munie d'une métrique riemannienne lisse g_0 . On suppose le lecteur familier avec la notion de courbure de Ricci. Pour une métrique riemannienne g nous noterons Ric_g sa courbure de Ricci, qui est un 2-tenseur symétrique, dv_g (ou $d\text{vol}$) la mesure riemannienne et R sa courbure scalaire; lorsque nous considérons une famille $g(t)$, $R(x, t)$ désigne la courbure scalaire de $g(t)$ au point $x \in M$. Une bonne référence pour les bases de la géométrie riemannienne est l'ouvrage [20]. On cherche alors une famille $g(t)$ de métriques lisses, dépendant de manière C^∞ de t , et solution du problème de Cauchy suivant :

$$(*_3) \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric}_{g(t)} \\ g(0) = g_0. \end{cases}$$

Une version normalisée peut être écrite, pour laquelle le volume de la métrique qui évolue est fixé; il suffit, en effet, de remplacer la première ligne de $(*_3)$ par :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric}_{g(t)} + \left(\frac{2}{3} \frac{1}{\text{vol}(M, g(t))} \int_M R(x, t) dv_{g(t)}(x) \right) g(t).$$

Nous noterons $(*_3')$ cette version. On passe d'une solution de $(*_3)$ à une solution de $(*_3')$ par une homothétie et un changement de temps. Nous appellerons flot de Ricci un couple $(M, g(t))$ solution de $(*_3)$. Le théorème fondateur de la théorie est le suivant :

THÉORÈME 2.1 (R. Hamilton, [24]). — *Soit M une variété compacte de dimension 3 qui admet une métrique de courbure de Ricci strictement positive. Alors, M admet une métrique de courbure sectionnelle constante (strictement positive). En particulier, M est difféomorphe à un quotient fini de S^3 .*

La preuve consiste à résoudre l'équation $(*_3)$ et à montrer que la solution renormalisée correspondante, c'est-à-dire la solution de $(*_3')$, est définie pour $t \in [0, +\infty)$ et converge vers une métrique de courbure constante. En fait la solution de $(*_3)$ ne vit que pendant un temps fini T et sa courbure explose en T . C'est le phénomène déjà observé pour $(*_c)$. Comme dans les modèles jouets, pour les solutions de l'équation $(*_3)$, la courbure explose en tous les points lorsque le temps s'approche de T .

La correspondance $g \rightarrow -2 \operatorname{Ric}_g + \left(\frac{2}{3} \frac{1}{\operatorname{vol}(M,g)} \int_M R dv_g\right) g(t)$ peut être interprétée comme un champ de vecteurs sur l'espace des métriques riemanniennes sur M . Une trajectoire de celui-ci est alors une solution de $(*_3')$; on peut espérer qu'une telle trajectoire converge vers un point fixe de ce champ de vecteurs, c'est-à-dire une métrique d'Einstein, qui, en dimension 3, ne peut qu'être de courbure constante. Il s'agit bien entendu d'un point de vue heuristique. Toutefois, cette approche est développée dans [3].

Dans [25], R. Hamilton obtient des résultats concernant le cas où la courbure de Ricci est supposée positive ou nulle; dans ce cas il démontre que M est diffeomorphe à un quotient de S^3 , $S^2 \times S^1$ ou \mathbf{R}^3 par un groupe d'isométries sans point fixe dans leur métrique standard.

Pour les extensions en dimension 4 on peut se référer à [25], [30] et à l'article récent [8] qui reprend les méthodes utilisées par G. Perelman pour corriger et étendre [30]. Un résultat optimal sous hypothèse de pincement ponctuel est obtenu dans [40]. Enfin, en dimension n quelconque, G. Huisken montre dans [33] un théorème comparable à 2.1 avec une hypothèse plus forte sur la courbure.

3. LES OUTILS D'ANALYSE

À partir de maintenant, $(M, g(t))$ est une solution du flot de Ricci non normalisé (équation $(*_3)$), définie sur un intervalle de temps $[0, T)$ (T fini ou non) et M est une variété différentielle compacte, connexe, orientable et de dimension 3. Par abus de langage, nous dirons que $(M, g(t))$ est un flot de Ricci. La majorité des résultats qui suivent est valable en dimension $n \geq 2$ à l'exception notable du théorème 3.4. Notons que la quasi-totalité de ceux-ci est due à R. Hamilton.

3.1. Existence de solutions en temps petit

Une des premières difficultés que l'on rencontre en étudiant les équations précédentes est l'existence en temps petit des solutions du problème de Cauchy. En effet, ces équations ne sont que faiblement paraboliques, c'est-à-dire que le membre de gauche de chacune d'elles est donné par un opérateur qui n'est pas fortement elliptique; son symbole a un noyau qui provient de l'invariance par diffeomorphismes du problème. Montrer l'existence en temps petit des solutions devient alors une tâche

délicate que R. Hamilton mène à bien dans [24]. Dans [17], D. DeTurck décrit une élégante façon de transformer les équations ci-dessus afin qu'elles deviennent fortement paraboliques ; dans ce cas l'existence de solutions résultent de théorèmes classiques (voir [37]). Les solutions de l'équation transformée donnent des solutions de l'équation initiale par simple transport par un difféomorphisme dépendant du paramètre t . Une interprétation en terme d'applications harmoniques est donnée dans [29] et [13].

3.2. L'équation d'évolution des courbures

Un des outils de base est le principe du maximum. Il s'applique aux équations paraboliques qui régissent l'évolution des différents type de courbure. Pour simplifier, nous ne considérerons que la courbure scalaire et l'opérateur de courbure.

Rappelons que R désigne la courbure scalaire. On a alors,

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \Delta_{g(t)} R = 2|\operatorname{Ric}(g(t))|_{g(t)}^2$$

où $\Delta_{g(t)}$ désigne le laplacien, agissant sur les fonctions, défini par la métrique $g(t)$. La convention adoptée est celle dite des géomètres (en dimension 1, c'est $-d^2/dx^2$). La norme du tenseur de Ricci est prise pour la métrique $g(t)$ (pour la norme d'un tenseur, le lecteur peut se reporter à [20]).

Nous noterons Rm l'opérateur de courbure, c'est-à-dire l'endomorphisme symétrique de $\Lambda^2(T^*M)$ dans lui-même ; alors,

$$\frac{\partial \operatorname{Rm}}{\partial t} + \Delta \operatorname{Rm} = \operatorname{Rm}^2 + \operatorname{Rm}^\sharp.$$

Nous utilisons ici le laplacien brut, c'est-à-dire l'opposé de la trace de la dérivée covariante seconde du tenseur Rm . La notation Rm^2 désigne le carré de l'endomorphisme Rm et Rm^\sharp désigne une expression quadratique en Rm que nous décrirons plus loin.

3.3. Existence en grand temps

Il est difficile de préciser, a priori, l'intervalle de vie d'une solution. Des estimations existent toutefois. Les équations paraboliques ci-dessus permettent de montrer que si la solution n'est définie qu'en temps fini, c'est-à-dire sur un intervalle $[0, T)$ avec $T < +\infty$, alors la courbure explose en T . Plus précisément,

PROPOSITION 3.1 ([13], p. 201). — *Soit g_0 une métrique C^∞ sur M ; alors l'équation $(*_3)$ a une unique solution sur un intervalle maximal, $0 \leq t < T \leq +\infty$. De plus, si $T < +\infty$, alors,*

$$\lim_{t \nearrow T} \left(\sup_{x \in M} |\operatorname{Rm}(x, t)| \right) = +\infty.$$

La norme de $\operatorname{Rm}(x, t)$ est la norme d'endomorphisme, calculée à l'aide de la métrique. La preuve se fait en constatant qu'une borne sur la courbure correspond à une borne sur les dérivées secondes de la métrique. En conséquence, si la courbure est bornée au voisinage de T on peut trouver une limite à $g(t)$ lorsque t tend vers T ,

et poursuivre le flot à partir de celle-ci, ce qui contredit la définition de T . Pour les détails le lecteur est renvoyé au chapitre 6 de [13].

3.4. Principes du maximum

C'est l'outil indispensable pour l'étude des solutions de l'équation de la chaleur. Il faut en donner ici une version vectorielle, c'est-à-dire une version pour les systèmes paraboliques. C'est ce que fait R. Hamilton dans [24], [25] et [31]. Le lecteur intéressé peut également consulter [13] et [14].

Considérons une équation aux dérivées partielles du type $\partial s/\partial t + \Delta_t s = F(s)$ et l'équation différentielle ordinaire $ds/dt = F(s)$. Les E.D.P. ci-dessus sont dites de **réaction-diffusion**, le terme de diffusion est donné par le laplacien ; si $F = 0$, il s'agit d'une équation de la chaleur qui « étale » les solutions. Le terme non-linéaire $F(s)$ est le terme de réaction qui, en l'absence de laplacien, conduit (souvent) à l'explosion en temps fini des solutions (convergence de certaines normes vers $+\infty$). La question est de savoir qui de la réaction ou de la diffusion l'emportera, dans une situation donnée. Le principe du maximum résulte d'une comparaison entre le comportement des solutions de l'équation aux dérivées partielles et la situation extrême donnée par l'équation différentielle ordinaire.

L'équation satisfaite par la courbure scalaire peut s'écrire $\partial R/\partial t + \Delta R \geq 0$. Le principe du maximum scalaire le plus simple (voir [49]) conduit alors au théorème suivant :

THÉORÈME 3.2 (voir [13], lemme 6.8). — *Soit $(M, g(t))$ une solution de l'équation $(*_3)$; alors la fonction $R_{\min}(t) = \min\{R(x, t); x \in M\}$ est croissante.*

Nous décrivons maintenant une version vectorielle de ce principe. Soit M munie d'une famille C^∞ de métriques $g(t)$, pour $t \in [0, T]$, et soit $\pi : \mathcal{E} \rightarrow M$ un fibré vectoriel muni d'une métrique **fixe** et d'une famille C^∞ de connexions compatibles, ∇_t . Ces données permettent de définir un laplacien agissant sur les sections de \mathcal{E} , qui dépend de t et que nous noterons simplement Δ . Considérons une fonction $F : \mathcal{E} \times [0, T] \rightarrow \mathcal{E}$ de classe C^∞ (pour simplifier) telle que, pour t donné, $F(\cdot, t)$ préserve les fibres. Soit \mathcal{K} un fermé de \mathcal{E} que nous supposons invariant par le transport parallèle de ∇_t , pour tout $t \in [0, T]$, et tel que $\mathcal{K}_x = \mathcal{K} \cap \pi^{-1}(x)$ soit fermé et convexe. L'hypothèse clé est une relation entre \mathcal{K} et l'équation différentielle ordinaire $\frac{d}{dt}u = F(u)$, définie dans chaque fibre \mathcal{E}_x de \mathcal{E} ; nous supposons que toute solution de celle-ci telle que $u(0) \in \mathcal{K}_x$ reste dans \mathcal{K}_x pour tout $t \in [0, T]$.

THÉORÈME 3.3 ([25], [24], [29] ou [13], théorème 4.8). — *Avec les hypothèses ci-dessus, soit $s(t)$ une solution de l'E.D.P.*

$$\frac{\partial}{\partial t}s + \Delta s = F(s)$$

telle que $s(0) \in \mathcal{K}$, alors, pour tout $t \in [0, T]$, $s(t) \in \mathcal{K}$.

Pour appliquer ceci à l'opérateur de courbure il faut noter que, bien que la métrique du fibré $\Lambda^2(T^*M)$ dépende de t , une astuce, due à K. Uhlenbeck (voir [13], section 6.1), permet de se ramener à une métrique fixe sur un fibré fixe. En chaque point $x \in M$ et $t \in [0, T]$ l'endomorphisme Rm se diagonalise et possède trois valeurs propres notées $\lambda(x, t) \geq \mu(x, t) \geq \nu(x, t)$. Avec les normalisations standards (voir [13], chapitre 6) ces nombres sont égaux au double de la courbure sectionnelle du 2-plan correspondant et $R(x, t) = \lambda(x, t) + \mu(x, t) + \nu(x, t)$. On montre que les deux expressions Rm^2 et Rm^\sharp se diagonalisent dans la même base et ont pour valeurs propres respectives $(\lambda^2, \mu^2, \nu^2)$ et $(\mu\nu, \lambda\nu, \lambda\mu)$. L'équation différentielle ordinaire prend donc une forme très simple,

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \lambda^2 + \mu\nu \\ \frac{d\mu}{dt} = \mu^2 + \lambda\nu \\ \frac{d\nu}{dt} = \nu^2 + \lambda\mu. \end{cases}$$

Appelons ϕ la fonction réciproque de $x \rightarrow x \log x - x$. La fonction ϕ est croissante et va de $[-1, +\infty)$ dans $[1, +\infty)$. En appliquant 3.3 à l'ensemble adéquat évident, on obtient

THÉORÈME 3.4 ([24], [25], [29] [34]). — *Soit $(M, g(t))$ une solution de $(*_3)$ telle que, pour tout $x \in M$, $R(x, 0) \geq -1$ et $\nu(x, 0) \geq -\phi(R(x, 0))$; alors, pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $x \in M$, on a*

$$\nu(x, t) \geq -\phi(R(x, t)).$$

La courbure scalaire étant la somme des valeurs propres de Rm on en déduit immédiatement que

COROLLAIRE 3.5. — *Sous les mêmes hypothèses,*

$$R(x, t) + 2\phi(R(x, t)) \geq \lambda(x, t) \geq \nu(x, t) \geq -\phi(R(x, t)).$$

C'est-à-dire, la courbure scalaire contrôle le tenseur de courbure. L'hypothèse, qui est une normalisation, est toujours réalisée à homothétie sur la métrique près. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de pincement de Hamilton-Ivey. Insistons sur le fait qu'il n'est valable qu'en dimension 3 et est dû à la forme particulière du terme de réaction dans l'équation qui gouverne l'opérateur de courbure. En dimension supérieure, 4 par exemple, la situation est sensiblement plus compliquée (voir [25], [30] et [40]). Nous verrons plus loin une conséquence géométrique importante de cet élégant résultat d'analyse, qui repose sur le fait que $\phi(x)/x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. D'autres théorèmes de pincement peuvent être obtenus en utilisant une version où l'ensemble \mathcal{E} dépend de t (voir [31] et [14] pour un principe du maximum adapté à cette situation); ils utilisent d'autres fonctions ϕ . Nous dirons d'une variété riemannienne vérifiant la conclusion du théorème ci-dessus, pour une fonction ϕ , qu'elle est de **courbure ϕ -presque positive**.

3.5. Estimation des dérivées de la courbure

Le caractère régularisant des équations qui décrivent l'évolution de la courbure se traduit par le résultat suivant :

THÉORÈME 3.6 ([29]). — Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci, alors, pour tout $\alpha > 0$ et $k \geq 1$, il existe une constante C_k (qui dépend de k et α) telle que si

$$|\mathrm{Rm}(x, t)|_{g(t)} \leq K, \quad \text{pour tout } x \in M \text{ et } t \in [0, \frac{\alpha}{K}],$$

alors

$$|\nabla^k \mathrm{Rm}(x, t)|_{g(t)} \leq \frac{C_k K}{t^{k/2}}, \quad \text{pour tout } x \in M \text{ et } t \in (0, \frac{\alpha}{K}].$$

Les normes utilisées sont calculées à l'aide de la métrique $g(t)$ et ∇ désigne sa connexion de Levi-Civita. En d'autres termes, si le flot vit assez longtemps il régularise suffisamment de sorte à obtenir un contrôle C^k de la courbure, pour tout k . Ce résultat est valable en toute dimension. L'équation d'évolution satisfaite par la courbure scalaire R conduit alors à un contrôle de $\partial R / \partial t$. Ce type d'inégalités se prouve en montrant que la quantité à estimer vérifie une équation (ou une inéquation) d'évolution parabolique à laquelle on applique un principe du maximum.

Dans [52] et [53] (voir aussi [29], paragraphe 13), W.-X. Shi prouve une version locale de 3.6, très importante, dans laquelle l'hypothèse et les conclusions sont vérifiées sur un voisinage d'un point de M . Une liste exhaustive de références peut être consultée dans [13] page 201.

3.6. Inégalités de Harnack

Ce sont des inégalités qui permettent de comparer la courbure en deux points de l'espace-temps $M \times [0, T)$. Dans [27], R. Hamilton prouve une inégalité de Harnack différentielle remarquable, dans l'esprit des résultats de P. Li et S. T. Yau ([38]). Il s'agit d'une inégalité, portant sur un tenseur, dont nous donnons ici la conséquence sur sa trace, dans un cas simple. Supposons que $(M, g(t))$ est à opérateur de courbure positif ou nul, alors, pour tout $t \in [0, T)$ et pour tout champ de vecteurs X sur M de classe C^∞ , on a :

$$H(X) = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R}{t} + 2 \langle X, \nabla R \rangle + 2 \mathrm{Ric}(X, X) \geq 0.$$

Nous dirons que $(M, g(t))$ est une **solution antique**, si elle est définie sur un intervalle du type $(-\infty, T)$ (elle a un passé infini). En appliquant l'inégalité ci-dessus à la solution translatée en temps, $\tilde{g}(t) = g(t + t_0)$, pour $t \in [0, T - t_0)$, et en faisant tendre t_0 vers $-\infty$, nous obtenons, pour une telle solution,

$$\frac{\partial R}{\partial t} + 2 \langle X, \nabla R \rangle + 2 \mathrm{Ric}(X, X) \geq 0.$$

En particulier, en prenant $X = 0$, on prouve que, sous ces hypothèses, $\frac{\partial R}{\partial t} \geq 0$, c'est-à-dire que la courbure scalaire est croissante en tout point d'une solution antique

d'opérateur de courbure positif ou nul. Si la solution n'est pas antique on peut vérifier que la quantité tR est croissante.

Une version intégrée s'énonce de la manière suivante (voir [33]) : si $(M, g(t))$ est à opérateur de courbure positif ou nul, alors, pour tout $t_1 < t_2$ et $x_1, x_2 \in M$,

$$R(x_2, t_2) \geq \exp\left(-\frac{d_{t_1}^2(x_1, x_2)}{2(t_2 - t_1)}\right)R(x_1, t_1),$$

où d_{t_1} désigne la distance associée à la métrique $g(t_1)$.

Signalons une interprétation géométrique de ces inégalités dans [12].

4. LES OUTILS GÉOMÉTRIQUES

Hormis les outils standards de la géométrie riemannienne, les démonstrations faites par R. Hamilton et G. Perelman font appel à la notion de convergence des variétés riemanniennes et nécessitent donc l'utilisation d'un théorème de compacité; celui-ci doit être adapté afin que les limites obtenues soient munies d'un flot de Ricci. Il est dû à R. Hamilton ([28]).

4.1. Le théorème de compacité

Décrivons d'abord la notion de convergence utilisée. Nous appellerons flot de Ricci marqué un quadruplet $\mathcal{M} = (M, g(t), O, F)$ où M est une variété connexe de dimension n , $g(t)$ un flot de Ricci sur M , défini pour $t \in (\alpha, \omega)$, O est un point de M et F est un repère orthonormé de $(M, g(0))$ en O . On suppose de plus que $-\infty \leq \alpha < 0 < \omega \leq +\infty$ et que $g(t)$ est complète pour chaque t ; nous dirons que le flot est complet.

DÉFINITION 4.1. — *On dit qu'une suite $\mathcal{M}_k = (M_k, g_k(t), O_k, F_k)$ converge vers $\mathcal{M}_\infty = (M_\infty, g_\infty(t), O_\infty, F_\infty)$ s'il existe*

- i) *une suite d'ouverts $U_k \subset M_\infty$, contenant O_∞ et telle que tout compact de M_∞ soit contenu dans U_k pour k assez grand,*
- ii) *une suite de difféomorphismes $\Phi_k : U_k \rightarrow V_k \subset M_k$ envoyant (O_∞, F_∞) sur (O_k, F_k) , tels que $\Phi_k^* g_k$ converge vers g_∞ uniformément sur tout compact de $M \times (\alpha, \omega)$, ainsi que toutes leurs dérivées spatiales et temporelles.*

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2 ([28]). — *Soit \mathcal{M}_k une suite flots de Ricci marqués complets telle que,*

- i) *pour tout $r > 0$ et tout $t \in (\alpha, \omega)$, il existe $C(r, t) < +\infty$ vérifiant, pour tout k , $\sup_{B_t(O_k, r)} \{|\text{Rm}(g_k(t))|\} \leq C(r, t)$, où $B_t(O_k, r)$ désigne la boule de centre O_k et de rayon r pour la métrique $g_k(t)$.*

ii) *Le rayon d'injectivité en O_k de la métrique $g_k(0)$ est borné inférieurement par une constante strictement positive indépendamment de k .*

Alors, il existe une sous-suite de \mathcal{M}_k qui converge vers un flot de Ricci marqué complet.

Notons que le choix des repères en O_k n'a pour but que de fixer les difféomorphismes locaux Φ_k . Par la suite nous ne mentionnerons plus cette donnée.

ESQUISSE DE PREUVE

L'hypothèse sur la courbure et celle sur le rayon d'injectivité de la métrique $g_k(0)$ permettent de faire converger, à une sous-suite près, la suite $(M_k, g_k(0))$ pour la convergence de Lipschitz pointée. La limite n'est, a priori, que $C^{1,s}$ pour $0 \leq s < 1$. Pour gagner de la régularité on utilise les estimés de W.-X. Shi (3.5) ; en effet, l'inégalité $\alpha < 0$ implique que les dérivées spatiales de $g_k(0)$ sont uniformément bornées, car en 0 le flot a déjà vécu pendant une durée au moins égale à $\alpha/2$. On construit alors une variété C^∞ limite, M_∞ , et les difféomorphismes locaux Φ_k . Les mêmes estimées permettent de montrer que la suite $g_k(t)$ est équicontinue et bornée (pour des normes canoniques) d'où leur convergence pour une sous-suite. Comme précédemment la convergence a lieu au sens C^p , pour tout $p \in \mathbf{N}$, et conduit à un flot de Ricci $g_\infty(t)$. ■

Dès lors, la principale difficulté est de borner inférieurement le rayon d'injectivité en O_k . Dans certaines circonstances R. Hamilton y parvient mais, comme nous le verrons plus loin, G. Perelman prouve un très joli théorème général dont c'est une conséquence.

4.2. Les dilatations paraboliques

Il s'agit d'une transformation de la solution de l'équation parabolique $(*_3)$ qui permet d'étudier à la « loupe » ce qui se passe au voisinage d'un point où la courbure scalaire est grande. C'est une technique classique pour étudier certaines E.D.P.

DÉFINITION 4.3. — *Soient $(M, g(t))$ un flot de Ricci défini sur $[0, T]$, $t_0 \in [0, T]$ et $Q > 0$. On appelle dilatation parabolique en t_0 de rapport Q la famille de métriques,*

$$\tilde{g}(t) = Qg\left(t_0 + \frac{t}{Q}\right).$$

*Elle vérifie l'équation $(*_3)$ sur l'intervalle $[-Qt_0, (T - t_0)Q]$.*

Il est immédiat de vérifier que la transformation ci-dessus produit un nouveau flot de Ricci et l'expression « dilatation parabolique » est justifiée par le fait que l'équation parabolique est préservée. Il s'agit d'une dilatation de la métrique combinée avec une contraction du temps (lorsque $Q > 1$) ainsi qu'un décalage de l'origine des temps.

Donnons un exemple d'utilisation. Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci défini sur un intervalle $[0, T]$ où $T < +\infty$ et soient deux suites $x_k \in M$ et $t_k \in [0, T]$ telles que $Q_k = R(x_k, t_k) \rightarrow +\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ (ceci ne peut se produire que si $t_k \rightarrow T$).

Nous considérons la solution $\tilde{g}_k(t) = Q_k g(t_k + \frac{t}{Q_k})$, définie sur $[-Q_k t_k, (T - t_k)Q_k]$. Si Q_k vérifie des hypothèses supplémentaires (voir la sous-section 5.2) et si nous pouvons prouver que le rayon d'injectivité en x_k de $\tilde{g}_k(0)$ est minoré, indépendamment de k , alors, par le théorème de compacité précédent, il existe une sous-suite de $(M, \tilde{g}_k(t), x_k)$ convergeant vers un flot de Ricci marqué $(M_\infty, g_\infty(t), x_\infty)$. Ce dernier flot est défini sur $(-\infty, T_\infty)$ (où $T_\infty \geq 0$), il s'agit donc d'une solution antique qui représente un modèle infinitésimal (et donc un modèle local approximatif) aux points où la courbure scalaire explose.

5. LES RÉSULTATS DE G. PEREL'MAN I

Les références pour cette section et les suivantes sont les articles de G. Perel'man [44], [46] et [45] ainsi que les notes écrites par J. Lott et B. Kleiner [36], par N. Sesum, G. Tian et X. Wang [51], par P. Topping [58] et par R. Ye [61].

5.1. Le flot comme gradient d'une fonctionnelle

Le flot de la courbure extrinsèque d'une courbe (équation $*_{\mathcal{C}}$) est donné par l'opposé du gradient de la longueur et celui de la courbure moyenne d'un corps convexe provient du volume. En revanche, le flot de la courbure de Ricci n'est *a priori* pas un flot de gradient. Une des premières originalités de [44] est de présenter le flot de Ricci de sorte à le faire apparaître comme un flot de gradient. Plus précisément, soient (M, g) une variété riemannienne et f une fonction C^∞ sur M à valeurs réelles ; on définit la fonctionnelle,

$$\mathcal{F}(g, f) = \int (R + |\nabla f|^2) e^{-f} \text{dvol}.$$

En se limitant à l'ensemble des g et f telles que la forme volume $e^{-f} \text{dvol}$ soit constante, le gradient de la fonctionnelle \mathcal{F} conduit aux équations,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\text{Ric} + \text{Hess}(f)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -R + \Delta f.$$

Toutes les expressions qui interviennent sont calculées pour la métrique $g(t)$. En transportant la famille $g(t)$ par une famille de difféomorphismes dépendant de t , on se ramène aisément aux deux équations :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -R + \Delta f + |\nabla f|^2.$$

Elles n'ont en général pas de solutions car, en effet, l'équation portant sur la fonction f est une équation de la chaleur rétrograde. L'astuce pour obtenir une solution de ce système consiste à considérer une solution du flot de Ricci sur un intervalle $[0, T]$, qui existe pour une donnée initiale C^∞ , et à résoudre l'équation sur f de manière rétrograde, en imposant une donnée finale $f(T)$. Le long d'une telle famille

$(g(t), f(t))$, la fonctionnelle \mathcal{F} est croissante et même strictement croissante, sauf si $\text{Ric} + \text{Hess}(f) \equiv 0$.

G. Perel'man introduit alors la fonctionnelle suivante, définie sur une variété M munie d'une métrique g ,

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int [\tau(R + |\nabla f|^2) + f - n](4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} \text{dvol},$$

où f est une fonction C^∞ et $\tau > 0$. Les variables de cette fonctionnelle sont contraintes par la relation $\int_M \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}} \text{dvol} = 1$. Dans les applications au flot de Ricci, le nombre réel τ vaut $T - t$ pour un choix judicieux de T . La fonctionnelle \mathcal{W} est interprétée comme une entropie par G. Perel'man (voir [44], section 5) et a un rapport étroit avec les inégalités de Sobolev logarithmiques. Le principe de monotonie affirme que, si g , f et τ vérifient

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -R + \Delta f + |\nabla f|^2 + \frac{n}{2\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -1,$$

alors \mathcal{W} est croissante et strictement croissante sauf si $\text{Ric} + \text{Hess}(f) - \frac{1}{2\tau}g = 0$. Ensuite G. Perel'man définit l'invariant $\mu(g, \tau) = \inf_f \mathcal{W}(g, f, \tau)$ et montre que la fonction μ est bornée inférieurement lorsque τ varie dans un intervalle fini $(0, \tau_0]$. De plus, la monotonie de \mathcal{W} montre que $\mu(g(t), \tau_0 - t)$ est croissante le long d'un flot de Ricci $g(t)$.

Les détails, principaux exemples et commentaires sont parfaitement rédigés dans les notes [36], [51] et [58] et dépassent le cadre limité du présent rapport. Insistons toutefois sur l'intéressante relation entre la fonctionnelle \mathcal{W} et les inégalités de Sobolev logarithmiques sur les variétés riemanniennes.

5.2. Le non-effondrement local

Nous présentons ici le premier résultat important, que l'on peut trouver dans la section 4 de [44].

DÉFINITION 5.1. — *Soient M une variété de dimension n et g une métrique sur M ; on dit que g est κ -non-effondrée à l'échelle ρ , si toute boule métrique B de rayon $0 < r < \rho$, qui vérifie $|\text{Rm}(x)| \leq r^{-2}$ pour tout $x \in B$, a un volume supérieur à κr^n .*

Notons que $\lambda^2 g$ est κ -non-effondrée à l'échelle $\lambda\rho$ dès que g l'est à l'échelle ρ . Il est aussi immédiat de vérifier qu'une limite (au sens fort décrit ci-dessus) de métriques κ -non-effondrées à l'échelle ρ possède également cette propriété. Le résultat clé est le théorème suivant, valable en dimension n ,

THÉORÈME 5.2 (G. Perel'man, [44] section 4). — *Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci sur une variété compacte M , défini sur un intervalle $[0, T)$ avec $T < +\infty$; alors, il existe $\kappa = \kappa(g(0), T)$ tel que, pour tout $t \in [0, T)$, $g(t)$ est κ -non-effondrée à l'échelle $T^{1/2}$.*

Le résultat 4.1 de [44] n'est pas exactement énoncé de cette manière, néanmoins le théorème ci-dessus en résume l'esprit. L'échelle $T^{1/2}$ pourrait être remplacée par une autre constante. Plus précisément, comme nous l'a suggéré J. Lott, le théorème ci-dessus pourrait être énoncé sous la forme suivante : pour toute échelle $\rho > 0$, il existe $\kappa(\rho, g(0), T)$ tel que $g(t)$ est κ -non-effondrée à l'échelle ρ , pour tout $t \in [0, T)$.

IDÉE DE LA PREUVE

On utilise l'invariant μ de la sous-section 5.1. On montre que, s'il existe une suite de boules $B_k = B_{g(t_k)}(x_k, r_k)$, pour $r_k^2 \leq T$ et $t_k \rightarrow T$, telles que $r_k^{-n} \text{vol}(B_k, g(t_k)) \rightarrow 0$, alors $\mu(g(t_k), r_k^2) \rightarrow -\infty$. Il suffit pour cela d'exhiber une fonction f_k qui minimise $\mathcal{W}(g(t_k), \cdot, r_k^2)$. La monotonie de μ le long des trajectoires du flot de Ricci implique que $\mu(g(0), t_k + r_k^2) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\infty$, ce qui contredit la propriété énoncée en 5.1 car la suite $t_k + r_k^2$ est bornée (T est fini). ■

Un théorème de J. Cheeger (voir [5]) affirme que, sur l'ensemble des variétés riemanniennes compactes (M, g) de dimension n telles que $|\text{Rm}(g)| = \sup\{|\text{Rm}(x)|; x \in M\} \leq 1$, $\text{vol}(M, g) \geq K$ et $\text{diam}(M, g) \leq 1$, le rayon d'injectivité (global) est minoré par un nombre strictement positif $\epsilon(n, K)$ ne dépendant que de n et K . On peut prouver une version locale dans laquelle la variété (M, g) est remplacée par une boule de rayon 1. Considérons alors un flot de Ricci défini sur un intervalle $[0, T)$, avec $T < +\infty$ et posons $r(t) = |\text{Rm}(g(t))|^{-1/2}$. Pour tout t la métrique $\tilde{g}(t) = \frac{1}{r(t)^2}g(t)$ vérifie

- i) $B_{g(t)}(x, r(t)) = B_{\tilde{g}(t)}(x, 1)$ pour $x \in M$,
- ii) $|\text{Rm}(\tilde{g}(t))| = r(t)^2 |\text{Rm}(g(t))| \leq 1$ sur $B_{\tilde{g}(t)}(x, 1)$,
- iii) $\text{vol}(B_{\tilde{g}(t)}(x, 1), \tilde{g}(t)) \geq \kappa$, d'après le théorème 5.2.

Le résultat de J. Cheeger énoncé ci-dessus montre que, si $\text{inj}(x, g)$ désigne le rayon d'injectivité en x d'une métrique g , alors $\text{inj}(x, g(t)) = r(t) \text{inj}(x, \tilde{g}(t)) \geq r(t)\epsilon(n, \kappa)$, c'est-à-dire,

$$\text{inj}(x, \tilde{g}(t)) = |\text{Rm}(g(t))| \text{inj}^2(x, g(t)) \geq \epsilon^2(n, \kappa),$$

pour tout $x \in M$ et $t \in [0, T)$. C'est une difficulté majeure dans l'étude du flot de la courbure de Ricci qui est levée par ce résultat sur le rayon d'injectivité.

Supposons maintenant que $T < +\infty$ est le temps maximal de vie de la solution ; alors $|\text{Rm}(g(t))| \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T$. Choisissons des suites $x_k \in M$ et $t_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} T$, telles que

$$Q_k = |\text{Rm}(x_k, t_k)| = \sup\{|\text{Rm}(g(t))|; t \in [0, t_k]\} \rightarrow +\infty,$$

et considérons la suite de métriques $g_k(t)$ obtenues par dilatation parabolique en t_k et de rapport Q_k . En pointant en x_k , elle admet une sous-suite convergente vers un flot de Ricci ; on peut, en effet appliquer le théorème 4.2. La limite est un flot de Ricci complet qui est une solution antique et κ -non-effondrée à toute échelle.

Donnons maintenant une autre version de ce phénomène, en dimension 3, en considérant une suite (x_k, t_k) telle que la courbure scalaire vérifie :

$$H_k = R(x_k, t_k) = \sup\{R(x, t); x \in M \text{ et } t \in [0, t_k]\} \rightarrow +\infty.$$

La suite $h_k(t)$ obtenue par dilatation parabolique en t_k et de rapport H_k admet une sous-suite convergente (pointée en x_k) vers un flot de Ricci $(M_\infty, h_\infty(t))$ (pointé en x_∞), défini sur $(-\infty, 0]$. En effet, la courbure scalaire de $g(t)$ est minorée pour tout t car son minimum croît ; de plus, pour $t \leq t_k$ son maximum est majoré par $R(x_k, t_k)$. On en déduit que, pour $t \leq 0$ fixé, la courbure scalaire de $h_k(t)$ est bornée. Le corollaire du théorème 3.4 montre alors que les courbures sectionnelles de $h_k(t)$ sont bornées pour $t \leq 0$. Le rayon d'injectivité étant contrôlé par l'argument ci-dessus, nous pouvons appliquer le théorème de compacité 4.2. La limite est de nouveau une solution antique et κ -non-effondrée. Elle vérifie de plus

PROPOSITION 5.3. — *Pour tout $t \leq 0$, la métrique $h_\infty(t)$ est non plate et d'opérateur de courbure positif ou nul.*

PREUVE

Soit $y_\infty \in M_\infty$, il est limite d'une suite $y_k \in M$ et $\text{Rm}_\infty(y_\infty, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Rm}_k(y_k, t)$, où Rm_k désigne l'opérateur de courbure de h_k . Or, pour $t \leq 0$,

$$\text{Rm}_k(y_k, t) = \frac{\text{Rm}(y_k, t_k + \frac{t}{H_k})}{H_k} \geq -\frac{\phi(R(y_k, t_k + \frac{t}{H_k}))}{H_k} \geq -\frac{\phi(H_k)}{H_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où la positivité de la courbure de $h_\infty(t)$. De plus, comme la courbure scalaire de $h_k(t_k)$ est égale à 1 en x_k , celle de $h_\infty(0)$ est aussi égale à 1 en x_∞ ; or si une des métriques $h_k(t)$ était plate, elles le seraient toutes. ■

Une version plus élaborée du théorème 5.2 est prouvée dans la section 8 de [44] ; elle repose sur l'importante section 7 dans laquelle la fonctionnelle suivante est considérée. Si $(M, g(t))$ est un flot de Ricci, γ une courbe C^1 sur M et $0 \leq \tau_1 \leq \tau = T - t \leq \tau_2$, on définit

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tau} (R(\gamma(\tau), \tau) + |\dot{\gamma}(\tau)|_{g(\tau)}^2) d\tau.$$

La théorie variationnelle de cette fonctionnelle est décrite en détail : formule de variation première, seconde, champs de Jacobi et une notion de volume associée, appelée volume réduit. La monotonie du volume réduit est prouvée et celui-ci est alors utilisé en lieu et place de la fonctionnelle μ . Les notions et inégalités introduites dans cette section 7 de [44] sont utilisées de manière essentielle dans [46].

5.3. Les κ -solutions

On rappelle que les variétés considérées sont de dimension 3 et orientables. Nous considérons maintenant une famille de solutions qui sont appelées à être les modèles locaux au voisinage des points où la courbure scalaire est grande. Elles sont déjà apparues dans la section précédente comme limites de flots renormalisés et le but de cette sous-section est d'en donner une classification.

DÉFINITION 5.4. — Soit $\kappa > 0$. Une κ -solution est une solution C^∞ du flot de Ricci, $(M, g(t))$, définie pour $-\infty < t \leq 0$, telle que

- i) M est une variété de dimension 3 qui peut être non compacte,
- ii) pour chaque t , la métrique $g(t)$ est complète, d'opérateur de courbure positif ou nul, de courbure sectionnelle bornée supérieurement et non plate,
- iii) pour chaque t , $g(t)$ est κ -non-effondrée à toute échelle.

Les premiers exemples de κ -solutions sont S^3 et $S^2 \times \mathbf{R}$ munies de leur flot standard, c'est-à-dire telles que la métrique au temps 0 est leur métrique canonique. En revanche, on vérifie que le flot standard sur $S^2 \times S^1$ n'est pas une κ -solution.

Nous pouvons utiliser les inégalités de Harnack différentielles et intégrées décrites dans la sous-section 3.6. L'inégalité intégrée prouve, en particulier, que la courbure scalaire d'une κ -solution est partout strictement positive; en effet, s'il existe (x_2, t_2) tel que $R(x_2, t_2) = 0$ alors, pour tout $x_1 \in M$ et tout $t_1 < t_2$, on a $R(x_1, t_1) = 0$ et $g(t_1)$ est plate, ce qui est exclu.

Nous allons associer à chaque κ -solution, une autre solution appelée soliton.

DÉFINITION 5.5. — On appelle soliton de Ricci, ou plus simplement soliton, un flot de Ricci $g(t)$ tel qu'il existe une famille de difféomorphismes ψ_t , dépendant de manière C^∞ de t , et une fonction $\alpha(t)$, C^∞ et strictement positive, vérifiant :

$$g(t) = \alpha(t)\psi_t^*g(0).$$

On dit que le soliton est contractant (resp. dilatant) si α est strictement décroissante (resp. strictement croissante). Enfin, le soliton est dit de type gradient si $\frac{d\psi_{t+s}}{ds}\Big|_{s=0}(x) = \nabla_{g(t)}f_t(\psi_t(x))$, où f_t est une famille de fonctions dépendant de manière C^∞ des deux variables x et t .

Les solitons sont des points fixes du flot vu sur l'espace des métriques riemanniennes modulo l'action des difféomorphismes. Ils généralisent la notion de métrique d'Einstein et sont des solutions auto-similaires. Un calcul immédiat montre qu'un soliton de type gradient vérifie l'équation (voir [58]) :

$$\text{Ric}_{g(t)} + \text{Hess}_{g(t)} f_t + \frac{\alpha'(t)}{2\alpha(t)}g(t) = 0.$$

Soit alors une κ -solution $(M, g(t))$; G. Perelman prouve la proposition suivante :

PROPOSITION 5.6 ([44], 11.2). — Il existe une suite (x_k, t_k) telle que la famille de métriques obtenue à partir de $g(t)$ par dilatation parabolique en t_k et de rapport $-1/t_k$, pointée en x_k converge, lorsque t_k tend vers $-\infty$, vers un soliton contractant de type gradient et non-plat. Nous l'appellerons soliton asymptotique de la κ -solution et le noterons $M_{-\infty}$.

Un tel soliton n'est, a priori, pas unique, mais, par abus de langage, nous parlerons du soliton asymptotique. La preuve met en œuvre toute la théorie développée dans le chapitre 7 de [44] et, en particulier, l'outil important qu'est le volume réduit. Les nombreux détails ne peuvent être décrits dans ce rapport, le lecteur intéressé peut se reporter à [36], [51] et [61]. L'idée est maintenant de classifier les κ -solutions en classifiant leur soliton asymptotique. On montre qu'un soliton asymptotique est lui-même une κ -solution (voir [36], 40.3).

Considérons un tel soliton asymptotique.

1) Dans le cas où $M_{-\infty}$ **est non compact**, il ne peut avoir sa courbure sectionnelle constamment strictement positive d'après le théorème suivant prouvé dans [46], section 1 :

THÉORÈME 5.7. — *Il n'existe pas de soliton contractant de type gradient non compact de dimension 3, orienté, complet et de courbure sectionnelle strictement positive et bornée.*

Par ailleurs, si son tenseur de courbure a un noyau, pour une valeur de t , un théorème de R. Hamilton ([25]) montre que celui-ci est invariant par transport parallèle et en temps ; c'est un principe du maximum fort pour les équations paraboliques vectorielles. On prouve alors que le revêtement universel de la variété se scinde en un produit métrique $N \times \mathbf{R}$, où N est une κ -solution de dimension 2. G. Perelman prouve dans [44], 11.3, que la seule κ -solution orientée de dimension 2 est la sphère munie de son flot de courbure constante (nous dirons la sphère ronde). Notons qu'il invoque un résultat de R. Hamilton dans [26], qui n'est malheureusement valable que pour le cas compact ; il faut donc se reporter à [36] ou bien [61] pour compléter la preuve. Le soliton est donc un quotient non-compact et orientable de $S^2 \times \mathbf{R}$, c'est-à-dire, $S^2 \times \mathbf{R}$ lui-même, muni de son flot canonique (que nous appellerons cylindrique), ou $S^2 \times_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{R}$, où l'action de \mathbf{Z}_2 est donnée par la relation $(x, s) \sim (-x, -s)$, la variété est alors difféomorphe à $\mathbf{R}P^3 \setminus \bar{B}^3$ (où B^3 est difféomorphe à une boule euclidienne ouverte de dimension 3 et \bar{B}^3 est son adhérence).

2) Si $M_{-\infty}$ **est compact** et s'il se scinde localement, ce doit être un quotient de $S^2 \times S^1$ muni de son flot canonique (par l'argument précédent), or ce dernier n'est pas une κ -solution. Il ne reste donc que le cas où l'opérateur de courbure est strictement positif pour tous les temps. Le théorème 2.1 montre que le soliton doit tendre à être de courbure constante et, comme il est auto-similaire, il est de courbure constante. La variété $M_{-\infty}$ est un quotient de S^3 munie de sa métrique canonique.

En résumé, si $M_{-\infty}$ est compact c'est un quotient de la sphère canonique, et s'il est non compact c'est $S^2 \times_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{R}$ ou $S^2 \times \mathbf{R}$. Pour classer les κ -solutions nous aurons recours au théorème de R. Hamilton, prouvé dans [25], qui montre qu'un flot de Ricci compact en dimension 3 et qui est de courbure sectionnelle positive ou nulle est de l'un des trois types suivants :

i) la métrique $g(t)$ est plate pour tout t ,

ii) le flot se scinde localement en un produit $N \times \mathbf{R}$, où N est une surface de courbure strictement positive,

iii) pour tout t , $g(t)$ est de courbure sectionnelle strictement positive.

1) Si $(M, g(t))$ est une κ -solution compacte, elle ne peut ni être plate (par hypothèse) ni être recouverte par $N \times S^1$ (qui n'est pas une κ -solution), elle est donc de courbure strictement positive et, par le théorème 2.1, est difféomorphe à un quotient fini de S^3 . On peut encore subdiviser ce cas en deux sous-cas :

i) le soliton asymptotique est compact. Celui-ci est alors, d'après la discussion précédente, le flot canonique sur un quotient de S^3 munie de sa métrique canonique. La κ -solution ressemble lorsque le temps se rapproche de $-\infty$ à ce soliton. Or, le théorème 2.1 montre que le flot tend à rendre la variété de courbure constante ; si elle l'est en $-\infty$, elle le sera pour tout temps. Il est aisé de formaliser cette observation. Dans ce cas donc, la κ -solution est le flot canonique, de courbure constante pour chaque t , sur un quotient de S^3 . Notons que ce quotient peut être arbitrairement petit, au sens où il peut être un espace lenticulaire.

ii) Le soliton asymptotique est non-compact. Nous traitons ce cas ci-dessous car il réclame une autre construction.

2) Si la κ -solution est non-compacte elle peut être localement scindée ou de courbure sectionnelle strictement positive.

i) Si elle est localement scindée, comme précédemment, elle est isométrique au flot canonique sur $S^2 \times \mathbf{R}$ ou bien $S^2 \times_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{R}$. Topologiquement c'est un cylindre ou bien $\mathbf{R}P^3 \setminus \bar{B}^3$.

ii) Si elle est de courbure sectionnelle strictement positive, elle est difféomorphe à une boule B^3 (ou, ce qui revient au même, à \mathbf{R}^3) ; c'est, en effet, une conséquence d'un théorème dû à D. Gromoll et W. Meyer (voir [5], chapitre 8 et [23], pour un survol). C'est un cas que l'on précise également ci-dessous. En résumé seuls restent à décrire un peu plus précisément les cas de courbure strictement positive, les autres tombant sous le coup du scindement. Si $(M, g(t))$ est une κ -solution et $(x_0, t_0) \in M \times (-\infty, 0]$, on définit la κ -solution normalisée en (x_0, t_0) par :

$$g_0(t) = R(x_0, t_0)g\left(t_0 + \frac{t}{R(x_0, t_0)}\right).$$

C'est une dilatation parabolique de sorte que $R_{g_0}(x_0, 0) = 1$. On a alors,

THÉORÈME 5.8 ([44], 11.7). — *Pour tout $\kappa > 0$, l'ensemble des κ -solutions normalisées est compact pour la topologie de la convergence pointée.*

La topologie est celle suggérée dans l'énoncé du théorème de compacité 4.2.

DÉFINITION 5.9. — *Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension 3 et $\epsilon > 0$. Une partie $T \subset M$ est appelée une ϵ -gorge (« neck » chez Hamilton et Perelman) centrée en $x \in T$ s'il existe un difféomorphisme $\Psi : T \rightarrow S^2 \times (-1/\epsilon, 1/\epsilon)$, tel que*

$\Psi(x) \in S^2 \times \{0\}$ et tel que l'image par Ψ de la métrique normalisée $R(x)g$ (où R désigne la courbure scalaire de g) est à distance ϵ , dans la topologie C^N , du produit de la métrique de courbure scalaire constante égale à 1 sur S^2 par la métrique usuelle de l'intervalle.

Nous dirons que $R(x)g$ est ϵ -proche du cylindre. L'expression « ϵ -gorge » est un raccourci pratique pour « gorge de taille $2/\epsilon$ ». Le nombre N est grand et de l'ordre de $[1/\epsilon]$.

Revenons à la κ -solution $(M, g(t))$. Pour $\epsilon > 0$ et pour un temps t , on note $M_\epsilon(t)$ l'ensemble des points qui ne sont pas centres d'une ϵ -gorge. L'étude des κ -solutions se fait en contrôlant la géométrie des ensembles $M_\epsilon(t)$. On procède *grosso modo* toujours de la même manière ; si ces parties ne vérifient pas les propriétés souhaitées, on trouve une suite de points et de temps tels que les métriques correspondantes convergent, par le théorème de compacité ci-dessus, vers une κ -solution qui possède une droite (i.e. une géodésique paramétrée par \mathbf{R} et minimisante sur toute sa longueur) ; on en déduit que la limite obtenue se scinde en un cylindre et, par conséquent, juste avant la limite, les points choisis pour marquer la suite sont dans des ϵ -gorges, contredisant ainsi le fait qu'ils ont été choisis dans $M_\epsilon(t)$. On différencie deux cas :

i) M_ϵ est contenu dans deux boules disjointes séparées par un tube ; c'est le cas lorsque la κ -solution est compacte. Elle est alors difféomorphe à S^3 ou $\mathbf{R}P^3$. On pourrait s'attendre à ce qu'apparaissent également $\mathbf{R}P^3 \# \mathbf{R}P^3$; ceci n'est pas possible car nous sommes dans une situation où la variété est difféomorphe à un quotient de S^3 et a donc un groupe fondamental fini.

ii) M_ϵ est compact et inclus dans une boule en dehors de laquelle la variété est un tube ; on sait déjà que la κ -solution est difféomorphe à une boule B^3 , elle est munie de métriques telles, qu'en dehors d'un compact, tout point est le centre d'une ϵ -gorge.

DÉFINITION 5.10. — *On appelle capuchon de taille $2/\epsilon$, ou, plus simplement, ϵ -capuchon (« cap » chez Perelman), une métrique sur une boule euclidienne de dimension 3, B^3 , ou sur $\mathbf{R}P^3 \setminus \bar{B}^3$, telle que tout point en dehors d'un compact est le centre d'une ϵ -gorge et telle que la courbure scalaire soit bornée.*

Résumons ce que produit cette étude (voir [44], [36] et [51] pour les nombreux détails). Pour un flot de Ricci, un point x et un temps t , nous noterons $B(x, t, r)$ la boule de centre x et de rayon r pour la métrique $g(t)$.

THÉORÈME 5.11 ([46] section 1.5 et [36] section 53). — *Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, il existe une constante $C_1 = C_1(\epsilon) > 0$ telle que, pour toute κ -solution $(M, g(t))$ et tout (x, t) , il existe un rayon $r \in [\frac{1}{C_1 R(x, t)^{1/2}}, \frac{C_1}{R(x, t)^{1/2}}]$ et un voisinage U , $B(x, t, r) \subset U \subset B(x, t, 2r)$, qui vérifie une des assertions suivantes :*

- a) U est une ϵ -gorge,
- b) U est un ϵ -capuchon,

- c) U est une variété compacte difféomorphe à S^3 ou \mathbf{RP}^3 et de courbure strictement positive,
 d) U est une variété compacte de courbure sectionnelle constante strictement positive.

On peut même contrôler la courbure scalaire et minorer le volume dans les cas a), b) et c), par des quantités de l'ordre de $R(x, t)$, de même que la courbure sectionnelle dans le cas c). De plus, en utilisant le soliton asymptotique et le théorème de compacité on prouve aussi qu'il existe $\kappa_0 > 0$ et une constante universelle $\eta > 0$ tels que toute κ -solution soit ou bien un quotient de la sphère canonique, ou bien une κ_0 -solution, et qu'en chacun de ses points on ait

$$(5.3.1) \quad |\nabla R| \leq \eta R^{3/2}, \quad \left| \frac{\partial R}{\partial t} \right| \leq \eta R^2.$$

On a exclu les quotients de la sphère canonique de la possibilité d'être une κ_0 -solution, car ils peuvent être très petits, des espaces lenticulaires par exemple pour lesquels la constante κ n'est pas minorée. Ces dernières inégalités permettent de contrôler la courbure dans un voisinage en espace-temps d'un point donné.

5.4. Le théorème des voisinages canoniques

C'est le point culminant de [44], le résultat qui permet de pratiquer la chirurgie autorisant la poursuite du flot malgré les singularités. Utilisons, pour simplifier, une définition donnée dans [44]

DÉFINITION 5.12. — *On appelle voisinage parabolique, noté $P(x, t, r, \Delta t)$, l'ensemble des points (x', t') avec $x' \in B(x, t, r)$ et $t' \in [t, t + \Delta t]$ ou $t' \in [t + \Delta t, t]$ suivant le signe de Δt .*

On a montré dans la sous-section 5.2 que, si l'on regarde une solution du flot de Ricci au voisinage d'un maximum (en temps et en espace) de la courbure scalaire, alors la métrique ressemble à (converge vers) une κ -solution. On prouve alors un résultat plus précis qui permet de décrire les régions de grande courbure scalaire qui ne correspondent pas nécessairement à des maxima

THÉORÈME 5.13 ([44], 12.1). — *Soit $\epsilon > 0$, $\kappa > 0$; il existe $r_0 > 0$ tels que, si $(M, g(t))$ est un flot de Ricci défini pour $t \in [0, T]$, de courbure ϕ -presque positive, sur une variété compacte de dimension 3, κ -non-effondrée à l'échelle r_0 , alors, pour tout (x_0, t_0) , $t_0 \geq 1$ et $Q = R(x_0, t_0) \geq r_0^{-2}$, le voisinage parabolique $P(x_0, t_0, \frac{1}{\sqrt{\epsilon Q}}, -\frac{1}{\epsilon Q})$ est, après dilatation parabolique en t_0 de rapport Q , ϵ -proche du voisinage correspondant d'une κ -solution.*

La proximité de deux métriques est celle utilisée dans la définition d'une gorge. On dit qu'un voisinage parabolique est proche d'une solution si le flot sur l'intervalle considéré est proche du flot sur la solution pour un intervalle de temps identique.

L'hypothèse $t_0 \geq 1$ est présente car il est nécessaire que le flot ait vécu assez longtemps (disons 1 seconde) afin de régulariser les voisinages des points de grande courbure. On peut toujours se ramener à cette hypothèse par dilatation parabolique qui rend la courbure petite au temps 0 ; les estimés de W.-X. Shi montrent alors que l'explosion ne survient pas avant 1 seconde.

Nous avons simplifié l'énoncé en omettant un paramètre qui est la fonction ϕ de l'inégalité de Hamilton-Ivey ; le nombre r_0 dépend du choix de cette fonction (dont nous avons donné un exemple dans le théorème 3.4). Ceci, combiné avec le théorème de structure des κ -solutions, donne une description, comme dans 5.11, des voisinages des points de grande courbure.

Insistons sur le fait que ce théorème affirme que l'explosion a toujours lieu le long de sous-variétés difféomorphes à S^2 .

IDÉE DE LA PREUVE

La principale difficulté vient du fait que nous ne travaillons pas en un maximum de la courbure scalaire. La preuve est faite par contradiction. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$, $\kappa > 0$, une suite de flots de Ricci (de dimension 3), notés $(M_k, g_k(t))$, de courbure ϕ -presque positive, définis sur un intervalle $[0, T_k]$, $\hat{x}_k \in M_k$, $\hat{t}_k \geq 1$, $r_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, tels que M_k est κ -non-effondrée aux échelles inférieures à r_k , $Q_k = R(\hat{x}_k, \hat{t}_k) \geq r_k^{-2}$ et le voisinage parabolique correspondant n'est pas ϵ -proche d'une κ -solution (après changement d'échelle de rapport Q_k). Si un tel point de l'espace temps (\hat{x}_k, \hat{t}_k) est appelé un mauvais point, on cherche parmi les mauvais points ceux qui ont (presque) la plus grande courbure scalaire. On trouve une suite (x_k, t_k) de mauvais points tels que tout point (y, t) , $t \leq t_k$, vérifiant $R(y, t) \geq 2R(x_k, t_k)$ est bon. Les estimés du gradient de la courbure scalaire en espace montrent que, dans un voisinage de ces points de taille contrôlée, la courbure scalaire est comparable à $R(x_k, t_k)$. On peut alors prendre une limite sur ces voisinages en renormalisant les métriques comme dans la sous-section 5.2. Il faut ensuite montrer que la limite de la suite renormalisée existe au sens de la convergence pointée, c'est-à-dire sur toute boule. Par ailleurs, l'estimé sur la dérivée de la courbure de la sous-section précédente montre que cette limite possède un « bout » de flot vers les temps négatifs et il faut là encore montrer qu'elle est munie d'un flot de Ricci qui est une solution antique. En conclusion on prouve que c'est une κ -solution, ce qui contredit le choix des points (x_k, t_k) . Le théorème de compacité 4.2, dans des formes plus générales, est utilisé plusieurs fois à chaque étape. ■

6. LES TRAVAUX DE PEREL'MAN : LE FLOT AVEC CHIRURGIES

L'article [46] représente un travail techniquement difficile et qui utilise toutes les notions déjà introduites dans [44]. Dans ce rapport nous ne retiendrons que la

construction du flot avec chirurgies, qui permet de franchir les singularités. C'est une idée inventée par R. Hamilton – pour la dimension 4 dans [30] (voir aussi [29]) – qui a fait une grande partie du travail dont une brève description suit. La seule faiblesse de l'argument développé dans [30] est que la chirurgie ne se pratique qu'aux points de courbure (presque) maximale. Quelques arguments sont incomplets, en particulier la preuve de la non-accumulation des chirurgies. Pour ce qui concerne la dimension 4, ceci est traité dans la récente prépublication [8], dans laquelle la méthode développée par G. Perelman, dans [46], est adaptée au contexte.

6.1. Premier temps singulier

Considérons un flot de Ricci $(M, g(t))$ défini sur un intervalle maximal $[0, T)$, où T est fini et M est une variété compacte, connexe, sans bord, orientée et de dimension 3. Nous supposons $g(0)$ normalisée pour satisfaire les hypothèses de 3.4. La courbure de $g(t)$ explose au voisinage de T (c'est-à-dire, son supremum tend vers $+\infty$). Par le théorème des voisinages canoniques, pour ϵ assez petit, il existe $r = r(\epsilon) > 0$ tel que tout point (x, t) vérifiant $R(x, t) \geq r^{-2}$ a un voisinage qui est soit une ϵ -gorge, soit un ϵ -capuchon, soit une variété compacte de courbure sectionnelle strictement positive. Dans ce dernier cas, par connexité, M est entièrement contenue dans ce voisinage et est une variété de courbure strictement positive; par le théorème 2.1, M peut être munie d'une métrique de courbure constante et est donc un quotient de la sphère S^3 par un groupe d'isométries de la métrique canonique.

Dans les autres cas, les voisinages canoniques sont des gorges ou bien des capuchons. On appelle Ω l'ensemble des points où la courbure de $g(t)$ reste bornée lorsque t tend vers T . Notons que Ω n'est pas nécessairement connexe mais, grâce à (5.3.1), on montre qu'il est ouvert dans M . Au premier temps singulier, l'ensemble Ω ne peut pas avoir de composante compacte; en effet, cette composante serait ouverte et fermée, et M étant connexe, elle serait égale à M en entier; mais alors la courbure sur M serait bornée, ce qui est incompatible avec la définition de T . Donc $M \setminus \Omega$ est l'ensemble des points où la courbure tend vers l'infini lorsque t tend vers T et est non vide. L'ensemble, $M \setminus \Omega$ peut être très compliqué; en effet, le théorème des voisinages canoniques affirme que l'explosion a lieu dans des gorges, le long de sphères et celles-ci pourraient très bien s'accumuler.

L'ensemble Ω peut être vide. Si c'est le cas, en prenant un temps t très proche de T , on constate que la variété M est entièrement recouverte par des ϵ -gorges et des ϵ -capuchons de courbure bornée. Lorsque deux ϵ -gorges s'intersectent, leur réunion est difféomorphe à $S^2 \times \mathbf{R}$, si ϵ est choisi assez petit. De même, si une ϵ -gorge intersecte un ϵ -capuchon, leur réunion est difféomorphe à B^3 ou $\mathbf{R}P^3 \setminus \bar{B}^3$. Par ailleurs les gorges et les capuchons sont de diamètre minoré, donc, pour $t < T$, on peut choisir un recouvrement fini par de tels ensembles. Cela montre que, dans ce cas, M est difféomorphe à S^3 , $\mathbf{R}P^3$, $S^2 \times S^1$ ou bien $\mathbf{R}P^3 \# \mathbf{R}P^3$. C'est un cas où la variété disparaît en un temps fini.

Si Ω est non vide, la métrique $g(t)$ converge sur Ω vers une métrique de classe C^∞ notée $g(T)$ (pour prouver ce fait il faut utiliser les estimés de W.-X. Shi). Le théorème des voisinages canoniques s'applique, par continuité, à $(\Omega, g(T))$, en changeant éventuellement la constante ϵ . Pour un nombre $\rho < r$, considérons l'ensemble $\Omega(\rho) = \{(x, t); R(x, T) \leq \rho^{-2}\}$. Si $\Omega(\rho)$ est vide, on conclut comme dans le cas où Ω est vide; on suppose donc $\Omega(\rho)$ non vide. Le nombre ρ est de la forme δr , où $\delta > 0$ est un paramètre à choisir, qui permet d'avoir de la marge pour les opérations qui suivent. Les inégalités 5.3.1 montrent que Ω_ρ est compact. Nous allons décrire $\Omega \setminus \Omega_\rho$. La définition qui suit s'applique à des chirurgies ultérieures, c'est pourquoi ii) mentionne une composante compacte qui n'existe pas au premier temps singulier.

DÉFINITION 6.1. — Dans l'ensemble Ω , on appelle

- i) ϵ -tube, une sous-variété difféomorphe à $S^2 \times I$ (I est un intervalle) dont chaque point est le centre d'une ϵ -gorge dans Ω ,
- ii) ϵ -tore, une composante de Ω qui est une variété fermée dont chaque point est le centre d'une ϵ -gorge. Un ϵ -tore est difféomorphe à $S^2 \times S^1$,
- iii) ϵ -pointe (« horn » chez G. Perelman), un sous-ensemble de Ω difféomorphe à $S^2 \times [0, 1)$ dont le bord est contenu dans $\Omega(\rho)$ et dont chaque point est le centre d'une ϵ -gorge. La courbure scalaire de $g(T)$ tend vers $+\infty$ à l'autre bout,
- iv) double ϵ -pointe, une composante connexe de Ω difféomorphe à $S^2 \times (0, 1)$ dont chaque point est le centre d'une ϵ -gorge. La courbure scalaire de $g(T)$ tend vers l'infini aux deux bouts,
- v) ϵ -pointe encapuchonnée, une composante de Ω difféomorphe à une boule ou à $\mathbf{R}P^3 \setminus \bar{B}^3$ dont chaque point est soit dans une ϵ -gorge, soit dans un ϵ -capuchon. La courbure scalaire tend vers l'infini au bout.

Dans la suite nous pourrions omettre la mention à ϵ pour alléger le discours. Nous travaillons au temps T . Partons d'une gorge ou d'un capuchon dans $\Omega \setminus \Omega(\rho)$, un point de son bord est contenu dans $\Omega(\rho)$, dans une gorge ou bien un capuchon adjacent à la première gorge. Si c'est une gorge, en poursuivant ce procédé on ne peut s'arrêter que lorsque l'on rencontre un capuchon ou bien $\Omega(\rho)$; s'il se poursuit indéfiniment on obtient une pointe; notons qu'on ne sait rien du diamètre des pointes qui peut être fini ou infini. On peut résumer ceci par l'assertion suivante :

FAIT 6.2. — Tout ϵ -gorge ou ϵ -capuchon de $\Omega \setminus \Omega(\rho)$ est contenu dans l'un des ensembles suivants :

- a) un tube dont les bords sont dans $\Omega(\rho)$,
- b) un capuchon dont le bord est dans $\Omega(\rho)$,
- c) une pointe dont le bord est dans $\Omega(\rho)$,
- d) une pointe encapuchonnée,
- e) une double pointe.

Rappelons que nous avons exclu les composantes compactes de Ω pour ce premier temps singulier. On remarque qu'un point x du bord de $\Omega(\rho)$ est contenu dans une ϵ -gorge, c'est-à-dire un ensemble presque isométrique à $S^2 \times (-\frac{1}{\epsilon\sqrt{\rho}}, \frac{1}{\epsilon\sqrt{\rho}})$, dont les sphères sont de courbure presque égale à ρ . Dans ce cylindre la courbure peut osciller autour de ρ^{-2} , il se pourrait donc qu'il se décompose en une infinité de petits cylindres de courbure scalaire supérieure à ρ^{-2} séparés par d'autres de courbure scalaire inférieure à cette valeur. Ceci montre que l'affirmation, figurant dans [46] page 7, selon laquelle les ϵ -tubes dont les bords rencontrent $\Omega(\rho)$ ont un volume minoré n'est pas correcte, mais cela est sans importance pour la suite. Les ensembles de type b) ont un volume minoré en fonction de ρ d'après 5.11 et ceux de type c), dont la courbure tend vers l'infini au bout, contiennent une gorge de courbure de l'ordre de $2\rho^{-2}$; leur volume est donc également minoré par une fonction de ρ . Par ailleurs le volume de $(M, g(t))$ est majoré indépendamment de t sur l'intervalle $[0, T)$ car la courbure scalaire est minorée (le minimum est croissant) et,

$$\frac{d \operatorname{vol}(M, g(t))}{dt} = - \int_M R(x, t) dv_{g(t)}.$$

On en déduit que le volume de $(\Omega, g(T))$ est fini et, par conséquent, qu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes de Ω contenant des points de $\Omega(\rho)$ et chacune d'elles a un nombre fini de bouts, tous de type c) (un capuchon n'est pas un bout et un tube relie deux parties de $\Omega(\rho)$). Les autres composantes de Ω sont de types d) et e).

Lorsque t se rapproche de T on peut voir apparaître un chapelet de doubles pointes avec d'un côté une pointe reliée à $\Omega(\rho)$ et de l'autre une pointe encapuchonnée ou bien se terminant des deux côtés par une pointe reliée à $\Omega(\rho)$. Le nombre de doubles pointes peut être infini. Pour un temps fixé juste avant l'explosion en T , la variété est de diamètre fini et les gorges de diamètre contrôlé par la courbure; on peut donc recouvrir $\Omega \setminus \Omega_\rho$ par un nombre fini de gorges et de capuchons. Les chapelets précédents proviennent donc de tubes bouchés soit par des boules ou des ensembles difféomorphes à $\mathbf{R}P^3 \setminus \bar{B}^3$, dans le premier cas, soit par des tubes reliant deux parties de l'ensemble qui converge vers $\Omega(\rho)$, dans le second cas (figures 1 et 2 ci-dessous).

La topologie de M peut être reconstituée comme suit : on considère la liste Ω_j , $1 \leq j \leq i$, des composantes connexes de Ω qui contiennent des points de $\Omega(\rho)$, on tronque les pointes et on colle sur les bords obtenus des tubes $S^2 \times I$ (I est un intervalle), ou des boules B^3 ou bien des ensembles difféomorphes à $\mathbf{R}P^3 \setminus \bar{B}^3$. En conséquence, si $\bar{\Omega}_j$ désigne la compactification de Ω_j qui consiste à « fermer » chaque pointe par un point, alors M est difféomorphe à la somme connexe des $\bar{\Omega}_j$ (ce qui correspond au recollement d'un tube entre deux Ω_j différents) avec un nombre fini de $S^2 \times S^1$ (qui correspondent au recollement de tubes entre deux bords différents du même Ω_j), un nombre fini de $\mathbf{R}P^3$ et un nombre fini de sphères (qui n'ont aucune influence sur la topologie). Au passage nous avons fait disparaître $M \setminus \Omega$; le théorème des voisinages canoniques montre que si la courbure scalaire tend vers l'infini en un point qui est

dans une gorge, elle le fait sur toute la sphère de dimension deux correspondante; la structure des parties du complémentaire de Ω provenant des capuchons est moins claire.

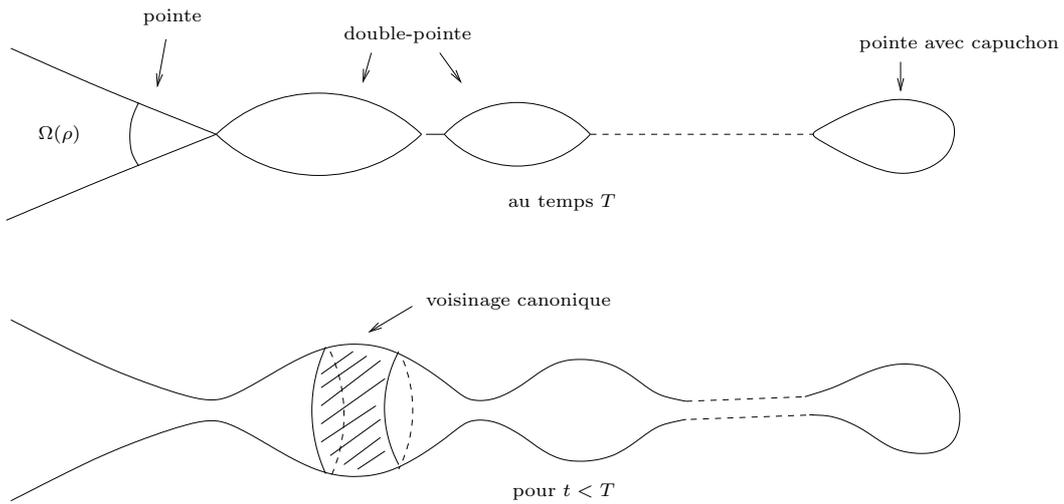


Fig. 1

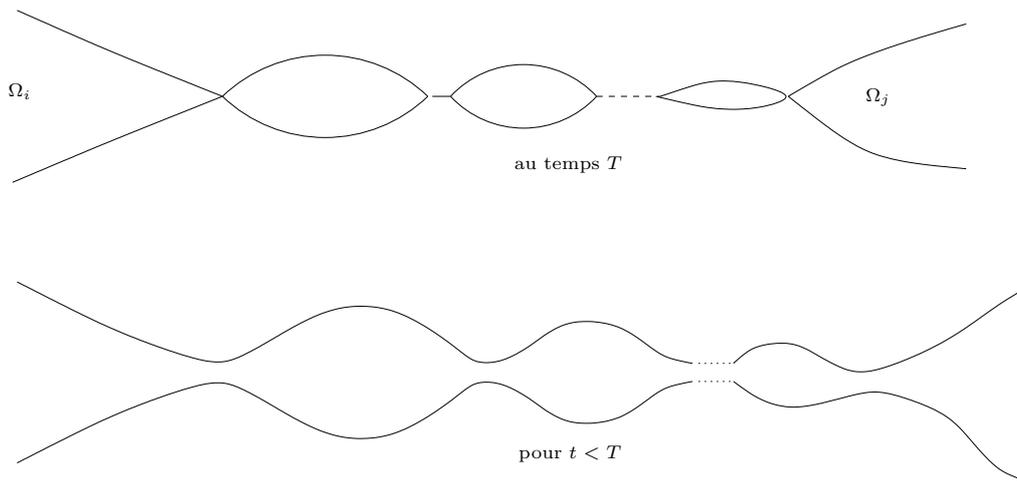
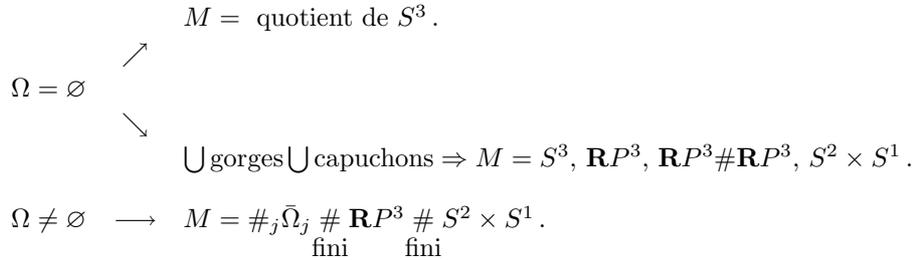


Fig. 2

Nous pouvons résumer cette section dans le diagramme suivant :



6.2. La solution standard

La condition initiale de la solution standard est une métrique complète sur \mathbf{R}^3 , d'opérateur de courbure positif ou nul et de courbure scalaire strictement positive qui est asymptote à un cylindre canonique et invariante par rotation. Il s'agit donc de recoller un hémisphère de courbure scalaire constante égale à 1 à un demi-cylindre $S^2 \times [0, +\infty)$ muni de la métrique produit (S^2 est de courbure scalaire constante égale à 1); le pôle de l'hémisphère est l'origine de \mathbf{R}^3 et est appelé le centre. Il faut utiliser une partition de l'unité afin de réaliser une métrique de classe C^∞ et la métrique de l'hémisphère est alors presque ronde. Il n'y a pas unicité et l'utilisation de l'article défini est abusive; toutefois, nous faisons un choix que nous appellerons « la » condition initiale de la solution standard. La variété n'étant pas compacte il n'est pas immédiat qu'il existe une solution ayant cette métrique pour donnée initiale en temps petit; la courbure étant bornée à l'infini ce résultat est dû à W.-X. Shi ([52]). De même, l'unicité est à prouver ([46], section 2 ou [8], appendice A). On démontre également que la solution est définie pour $t \in [0, 1)$, qu'elle est complète et invariante par rotation pour tout t (voir [46] et [8]). Enfin, la solution standard vérifie les conclusions du théorème 5.11 et on peut montrer que sa courbure scalaire vérifie, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$ et $t \in [0, 1)$, $R(x, t) \geq \frac{\text{const.}}{1-t}$.

6.3. La première chirurgie

C'est l'idée inventée par R. Hamilton pour la dimension 4, dans [30], qui est reprise par G. Perelman et adaptée à la dimension 3. Elle consiste à opérer une chirurgie métrique pour éliminer les parties de la variété qui sont susceptibles de devenir des singularités. La chirurgie se pratique sur des composantes de Ω qui contiennent des points de $\Omega(\rho)$; ce faisant, nous sommes dans l'obligation d'éliminer des parties de Ω dont nous devons contrôler la topologie. La description donnée dans la section précédente joue alors un rôle essentiel. Insistons sur le fait que la chirurgie se pratique toujours le long de sphères et ce n'est donc pas elle qui produira la décomposition de Jaco-Shalen-Johannson mais plutôt celle de Kneser.

La chirurgie est faite à une échelle différente de ρ . En fait, il existe un nombre $0 < h < \delta\rho$ tel que, si (x, T) est un point qui est dans une pointe

dont le bord rencontre $\Omega(\rho)$, vérifiant $R(x, T) \geq h^{-2}$, le voisinage parabolique $P(x, T, \delta^{-1}R(x, T)^{-\frac{1}{2}}, -R(x, T)^{-1})$ est contenu dans une δ -gorge (en un sens plus fort que nous omettons de préciser). Nous dirons que h est le paramètre de chirurgie ; il dépend des données du problème que sont la fonction ϕ du théorème 3.4, celle du nombre r_0 apparaissant dans 5.13, de ϵ et δ . Tant que δ est minoré on peut choisir h minoré ; le travail de la prochaine sous-section est justement l'existence d'un tel δ . Le nombre δ est choisi beaucoup plus petit que ϵ .

On procède alors de la manière suivante :

a) on élimine les composantes de Ω qui ne rencontrent pas $\Omega(\rho)$. On connaît leur impact sur la topologie de M ,

b) dans les pointes qui rencontrent $\Omega(\rho)$ on choisit un point x tel que $R(x, T) = h^{-2}$; il est le centre d'une δ -gorge (par définition de h). On coupe le long de la sphère de dimension 2 qui le contient, c'est-à-dire la sphère centrale,

c) sur le bord libre, difféomorphe à S^2 , on colle un homothétique de rapport h^2 d'un voisinage de taille fixe du centre de la condition initiale de la solution standard. Le recollement est décrit ci-dessous.

d) À partir de cette nouvelle variété on relance le flot en prenant T comme origine des temps.

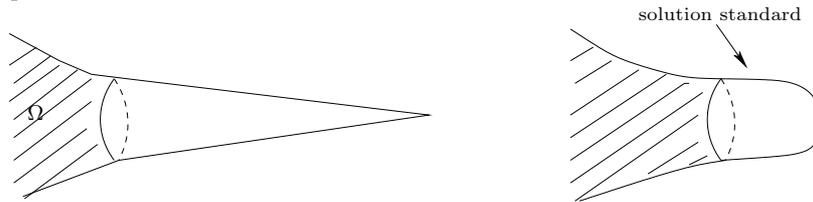


Fig. 3

Dans [30], R. Hamilton montre que la nouvelle variété vérifie le pincement de Hamilton-Ivey avec la même fonction ϕ , quitte à choisir correctement le recollement. Nous précisons ce dernier point.

La demi-gorge sur laquelle la chirurgie est opérée est identifiée à $S^2 \times [0, \frac{h}{8})$. Soit λ un nombre à choisir.

1) On munit $S^2 \times [0, \lambda]$ de la métrique g de la gorge,

2) On munit $S^2 \times [\lambda, 2\lambda]$ de la métrique $e^{-2f}g$, où f est une fonction de la coordonnée longitudinale seulement qui vaut 0 au voisinage de λ , qui est partout très proche de 0 et qui est choisie pour que la courbure sectionnelle soit positive à partir de 2λ . On peut également la choisir en sorte que les courbures sectionnelles de $e^{-2f}g$ soient supérieures à celles de g sur l'intervalle $[\lambda, 2\lambda]$ (voir [18] pour les détails). Par monotonie de la fonction ϕ , la condition de Hamilton-Ivey est alors vérifiée sur cet intervalle. Ensuite,

3) sur $S^2 \times [2\lambda, 3\lambda]$ la métrique est de la forme $e^{-2f}(\psi g + (1 - \psi)h^2\bar{g})$, où ψ est une fonction plateau de la coordonnée longitudinale qui vaut 1 au voisinage de 2λ et 0 au voisinage de 3λ , et \bar{g} est la métrique de la condition initiale de la solution standard. La fonction f étant fixée on peut choisir δ assez petit pour que la courbure

sectionnelle de cette métrique soit positive. La condition de Hamilton-Yvey est alors trivialement vérifiée. Enfin,

4) sur $S^2 \times [3\lambda, c]$, pour $3\lambda \leq c \leq 4\lambda$, la métrique est $e^{-2f}h^2\bar{g}$ et le centre de la solution standard correspond à la valeur c du paramètre longitudinal. Sa courbure sectionnelle est strictement positive.

On peut décrire plus précisément \bar{g} comme un produit tordu sur le cylindre. Le nombre λ est de l'ordre de h/ϵ . On choisit donc les paramètres pour que la courbure soit supérieure à celle de g (c'est le cas pour $e^{-2f}g$) ou bien que la courbure sectionnelle soit positive; dans les deux cas le pincement de Hamilton-Ivey est vérifié. On note également que la distance du centre du capuchon ajouté à la sphère de chirurgie est de l'ordre de h/ϵ . En éliminant la demi-gorge on a perdu un volume de l'ordre de h^3/δ et, en collant le capuchon standard, on l'a augmenté de l'ordre de h^3/ϵ ; si δ est assez petit devant le paramètre ϵ fixe, alors la chirurgie fait perdre une quantité de volume de l'ordre de h^3 . Ce volume pourrait être récupéré très rapidement par l'évolution ultérieure du flot; il n'en est rien. En effet, cette chirurgie n'affecte pas le minimum de la courbure scalaire, puisqu'elle se pratique en des régions où celle-ci est grande, et ce minimum reste donc croissant. La formule déjà utilisée montre alors que la dérivée logarithmique du volume de la nouvelle variété est majorée; l'accroissement de volume dans un intervalle de temps fini donné est donc contrôlé. Cet argument montre que ce type de chirurgies ne peut intervenir qu'un nombre fini de fois dans un intervalle de temps fini, tant que δ est fixé; le nombre de chirurgies dépend de la condition initiale et des divers choix de paramètres.

Remarque 6.3. — On peut dire que r_0 est l'échelle à laquelle on contrôle la géométrie d'un voisinage (théorème des voisinages canoniques), h est l'échelle à laquelle on effectue la chirurgie. On pourrait effectuer la chirurgie à l'échelle ρ mais l'argument précédent montre qu'il faut se laisser un peu de marge. Le paramètre ϵ est un paramètre de contrôle qui décrit la proximité utilisée dans le théorème des voisinages canoniques. Il doit en particulier être assez petit pour que la réunion de deux gorges dont l'une est centrée sur le bord de l'autre soit difféomorphe à $S^2 \times I$; c'est une condition indépendante de la variété. Le paramètre δ est un paramètre de contrôle bien plus fin, nécessaire dans la chirurgie et, en particulier, dans l'argument précédent.

L'étape suivante consiste à montrer l'existence de ce flot modifié pour tout temps.

6.4. Existence pour tout temps du flot avec chirurgies

C'est la partie où l'on choisit les paramètres r_0 et δ afin de faire fonctionner le processus. Dans [46] il est appelé « Ricci flow with δ -cutoff »; nous garderons toutefois l'expression « flot avec chirurgies » sachant que cela implique l'utilisation du paramètre δ et du paramètre r_0 . Une variété riemannienne M , compacte orientable de dimension 3 est dite *normalisée* si $|\text{Rm}(x)| \leq 1$, pour tout $x \in M$, et le volume de toute boule de rayon 1 est au moins la moitié du volume de la boule unité de \mathbf{R}^3 .

Dans [31], R. Hamilton montre que, pour des données initiales normalisées, la plus petite valeur propre de l'opérateur de courbure vérifie

$$(1+t)R(x,t) \leq (1+t)(-\nu(x,t))(\ln((1+t)(-\nu(x,t)) - 3)),$$

dès que $-\nu > 0$. Ceci montre l'existence d'une fonction décroissante $\phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, telle que $\phi(x) \sim \frac{1}{\ln(x)}$, pour x grand, avec la propriété que

$$(1+t)\nu(\cdot, t) \geq -(1+t)R(\cdot, t)\phi((1+t)R(\cdot, t)).$$

Ce choix généralise celui fait pour le théorème 3.4. Il est surtout utile pour les grands temps (et donc, comme nous le verrons plus loin, pour la géométrisation); il produit les mêmes résultats que ceux prouvés dans le théorème 3.4. La chirurgie n'affecte pas cette propriété comme nous l'avons déjà signalé.

Après la première chirurgie la nouvelle donnée initiale n'est plus normalisée, la variété considérée n'est plus connexe et les paramètres utilisés pour la chirurgie suivante doivent être modifiés, par exemple en les faisant dépendre du temps. Ils pourraient se dégrader à tel point que le processus s'arrête. La condition de courbure ϕ -presque positive étant préservée, la seule raison qui empêche la poursuite du flot est que le théorème des voisinages canoniques ne soit plus vérifié pour la valeur de r_0 choisie, il faut donc la modifier (essentiellement diminuer r_0) mais alors le risque est que ce nombre tende vers 0 en un temps fini.

Nous appellerons flot de Ricci avec chirurgies sur un intervalle $[0, T)$ le résultat de l'itération de la procédure décrite ci-dessus. Après la première chirurgie, la variété a un nombre fini de composantes connexes car on ne garde de Ω que les composantes qui intersectent $\Omega(\rho)$; on étudie le flot de Ricci sur chacune d'elles simultanément. On atteint éventuellement un nouveau temps singulier et apparaît un nouvel ensemble Ω . On pratique une nouvelle chirurgie et on recommence, espérant poursuivre ce processus pour tout temps. Notons que maintenant Ω peut contenir des composantes compactes. On dira que la solution (ou une de ses composantes) est éteinte si $\Omega(\rho)$ (ou la composante correspondante) est vide. Par commodité on considérera, dans le cas d'une extinction totale, que le flot se poursuit pour tous les temps supérieurs en un flot sur une variété vide. La notion de flot avec chirurgies est formalisée de manière générale dans [36], 61.1, et peut donc être appliquée à d'autres types de chirurgies que celles décrites ci-dessus. Le résultat principal est la proposition suivante

PROPOSITION 6.4 ([46], 5.1). — *Il existe des suites décroissantes $0 < r_j < \epsilon^2$, $0 < \kappa_j$, et $\bar{\delta}_j < \epsilon^2$, pour $j = 1, 2, \dots$, telles que, pour toute condition initiale normalisée et toute fonction $\delta(t)$, satisfaisant $0 < \delta(t) < \bar{\delta}_j$ pour $t \in [2^{j-1}\epsilon, 2^j\epsilon]$, le flot de Ricci avec chirurgies correspondant est défini pour $t \in [0, +\infty)$. De plus, il est κ_j -non-effondré et vérifie les conclusions du théorème des voisinages canoniques à l'échelle r_j sur l'intervalle de temps $t \in [2^{j-1}\epsilon, 2^j\epsilon]$.*

REMARQUE SUR LA PREUVE

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la seule chose à faire est de montrer que le théorème des voisinages canoniques est vrai avec un paramètre ne se dégradant pas trop vite. En cela la preuve n'est qu'une nouvelle version du théorème 5.13 tenant compte des chirurgies. Elle est techniquement plus difficile, mais ne contient pas d'idée fondamentalement nouvelle. On constate au passage que la constante κ doit aussi être modifiée, ce qui est indispensable comme on peut s'en convaincre en étudiant l'exemple du produit d'une surface hyperbolique avec S^1 (exemple suggéré dans [39]). ■

En conclusion, si la variété obtenue après k chirurgies est appelée M_k , M s'obtient en faisant la somme connexe des composantes de M_k , d'un nombre fini de quotients de S^3 (par des sous-groupes finis du groupe d'isométries de la métrique ronde) et d'un nombre fini de copies de $S^2 \times S^1$.

7. TRAVAUX DE PEREL'MAN III

7.1. Extinction en temps fini

Il y a un cas où l'on peut connaître complètement la topologie de la variété M , c'est celui où le flot s'éteint totalement en un temps fini. En effet, sous cette hypothèse, il n'y a qu'un nombre fini de chirurgies et la discussion précédente montre que M est obtenue comme somme connexe d'un nombre fini de copies de quotients de S^3 (par des sous-groupes du groupe d'isométries canonique) et de $S^2 \times S^1$. Il est donc intéressant de chercher des hypothèses impliquant cette extension. C'est ce qui est fait dans [45]. Nous présentons ici la variante due à T. Colding et W. Minicozzi (voir [16]) qui nous semble plus simple.

Soit M une variété de dimension 3, compacte, connexe, orientée, de classe C^∞ et $g(t)$ un flot de Ricci **sans chirurgies** sur M . On suppose que M est première pour la décomposition de Kneser en somme connexe, c'est-à-dire que, si $M = P_1 \# P_2$, alors P_1 ou P_2 est homéomorphe à S^3 (voir [32], théorème 1.5); on suppose également que M a un groupe fondamental fini. On dit que M est irréductible si toute sphère $S^2 \subset M$ borde une boule. Si M est compacte, connexe, orientable, première et de groupe fondamental fini elle est irréductible ([32], proposition 1.4) et son revêtement universel est une sphère d'homotopie. En particulier, $\pi_3(M) \neq \{0\}$.

Considérons une situation générale où (N, g) est une variété riemannienne compacte, connexe et orientable; on peut définir l'espace $H = L^2_1(S^2, N)$ des applications de S^2 dans N dont la différentielle est de carré intégrable; il suffit pour cela de plonger N isométriquement dans \mathbf{R}^n (voir [41]). On peut également considérer des applications à différentielles Hölder afin d'avoir plus de régularité. Appelons i la fonction qui associe à un point $x \in N$ l'application $i(x) : S^2 \rightarrow N$ qui envoie tout S^2 sur x .

Dans [41], les auteurs montrent que si $\pi_3(N) \neq \{0\}$, alors $\pi_1(H, i(N)) \neq \{0\}$, c'est-à-dire : l'espace des applications de S^2 dans N modulo les applications constantes n'est pas simplement connexe. Soit alors un chemin continu $\beta : [0, 1] \rightarrow C^0 \cap L_1^2(S^2, N)$, tel que $\beta(0)$ et $\beta(1)$ soient des applications constantes et que la classe d'homotopie $[\beta]$ de β soit non triviale. On définit l'énergie

$$W(g) = \min_{\gamma \in [\beta]} \max_{s \in [0, 1]} E(\gamma(s)),$$

où $E(\gamma(s))$ désigne l'énergie de l'application $\gamma(s)$ de S^2 dans N .

On montre que les propriétés topologiques de H impliquent que $W(g) > 0$, pour toute métrique g (voir [35]). T. Colding et W. Minicozzi prouvent le résultat suivant, pour un flot de Ricci $(M, g(t))$,

THÉORÈME 7.1 ([16]). — *Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci (sans chirurgies) où M est une variété de dimension 3, compacte, connexe, orientable, première et non asphérique (i.e. il existe $k > 1$ tel que $\pi_k(M) \neq \{0\}$). Alors,*

$$\frac{dW}{dt}(g(t)) \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)}W(g(t)),$$

pour $C = -\frac{3}{2R_{\min}(0)}$ si $R_{\min}(0) < 0$, et $C = +\infty$ sinon (c'est-à-dire, le terme correspondant disparaît). En particulier, le flot s'éteint en temps fini.

Notons que, bien que la fonction W ne soit pas nécessairement dérivable, on peut donner un sens à l'expression ci-dessus. La méthode de preuve utilise des résultats standards de la théorie des applications harmoniques et des calculs d'aires assez faciles. G. Perelman considère, dans [45], des classes d'homotopie d'applications de S^1 dans M . Il remplit ces applications par des disques minimaux ; toutefois, comme le problème de Plateau est difficile à résoudre si la courbe bordante n'a pas une forme agréable, il la « régularise » en lui appliquant le flot de la courbure extrinsèque décrit par M. Grayson ([22]). On peut comparer cette idée à un argument similaire utilisé dans [31].

Le théorème 7.1 s'applique au cas où M est de groupe fondamental fini et irréductible.

Question : Peut-il s'étendre à un flot avec chirurgies ?

Admettons que ce soit le cas, cela montrerait qu'une variété irréductible de groupe fondamental fini est un quotient fini de S^3 par un groupe d'isométries canoniques. En effet, d'après la discussion précédente, la variété est le résultat de la somme connexe d'un nombre fini de quotients de S^3 (par des sous-groupes finis du groupe d'isométrie de la sphère canonique) et de $S^2 \times S^1$; l'indécomposabilité implique qu'il n'y a qu'un terme non égal à S^3 dans cette suite d'opérations et la finitude du groupe fondamental ne laisse que la possibilité d'un quotient de S^3 . Si la variété n'est pas première mais de groupe fondamental fini, ses composantes dans la décomposition de Kneser sont premières et de groupe fondamental fini, donc des quotients de S^3 ; une au maximum

est non simplement connexe (sinon le groupe fondamental de M est infini). En appliquant la discussion précédente à chaque composante on montre que M est aussi un quotient de S^3 (voir aussi la discussion du cas non irréductible dans [45] et [16]). Ceci prouverait les conjectures 0.1 et 0.2.

Revenons à la variété compacte M irréductible et de groupe fondamental fini, munie d'un flot de Ricci avec chirurgies non trivial (il y a au moins une chirurgie). Après la première chirurgie, une, au plus, des composantes connexes n'est pas une sphère, nous l'appellerons M_1 et la métrique riemannienne post-chirurgie sera désignée par $g_1(T)$; la composante connexe de Ω qui lui correspond est notée Ω_1 et T désigne le premier temps singulier. La proposition suivante permet d'adapter l'argument de T. Colding et W. Minicozzi,

PROPOSITION 7.2. — *Il existe une équivalence d'homotopie qui contracte les distances entre $(\bar{\Omega}_1, g(T))$ et $(M_1, g_1(T))$.*

ESQUISSE DE PREUVE

Pour simplifier, supposons qu'il n'y a qu'une pointe dans Ω_1 contenant des points de $\Omega(\rho)$. On tronque la pointe comme indiqué et on remplace le demi-cylindre noté \mathcal{H} par un voisinage du centre de la condition initiale de la solution standard pour obtenir M_1 . En utilisant les notations de la sous-section 6.3, l'application considérée est l'identité sur $(\Omega \setminus \mathcal{H}) \cup S^2 \times [0, c)$ et elle envoie $\mathcal{H} \setminus S^2 \times [0, c)$ sur le centre de la solution standard. Comme précédemment, la fonction f étant fixée, si δ est assez petit, l'application ci-dessus contracte les distances. On peut également déformer celle-ci en un homéomorphisme de $\bar{\Omega}_1$ sur M_1 .

Cet énoncé n'est pas parfaitement correct car la structure différentiable sur $\bar{\Omega}_1$ n'a pas été définie et donc $g(T)$ n'est pas définie au bout de la pointe. On peut contourner ce problème en considérant $(M, g(t))$ pour t proche de T . M est homéomorphe à $\bar{\Omega}_1$ et à M_1 et si on effectue l'opération ci-dessus avec $(M, g(t))$, on construit une application lipschitzienne de rapport $1 + \chi(t)$ avec $\chi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow T$. Les arguments qui suivent s'adaptent sans difficultés. Pour simplifier l'expression nous conservons la formulation ci-dessus. ■

Maintenant, si $[\beta]$ est une classe non triviale de $\pi_1(H, i(M))$, elle persiste en une classe non triviale dans $\pi_1(H, i(M_1))$. De plus, grâce à la proposition ci-dessus, on voit que son énergie vérifie

$$W(M_1, g_1(T)) \leq W(\bar{\Omega}_1, g(T)) \quad (\text{ou bien } \leq \liminf_{t \rightarrow T} (1 + \chi(t))W(M, g(t))).$$

Le théorème 7.1 s'applique alors pour le flot sur M_1 dont la donnée initiale est $g_1(T)$. La constante C peut éventuellement changer, mais le minimum de la courbure scalaire étant croissant le long d'un flot de Ricci sans chirurgies et non affecté par une chirurgie (à moins que toute la variété disparaisse), elle est croissante également le long d'un flot avec chirurgies; en conséquence, l'inégalité du théorème 7.1 est valable pour le

flot avec chirurgies et montre l'extinction en temps fini (par itération de l'argument précédent).

Ceci termine la preuve des conjectures 0.1 et 0.2.

Remarque 7.3. — Les arguments ci-dessus ont été vérifiés grâce à plusieurs échanges avec B. Kleiner et J. Lott. Je tiens à les remercier pour leur aide.

7.2. Conclusion : vers la géométrisation des variétés de dimension 3

S'il n'y a pas extinction en temps fini la situation est beaucoup plus complexe. Il peut, en effet, être nécessaire de pratiquer une infinité de chirurgies. Encore une fois le premier pas a été franchi par R. Hamilton, pour un flot de Ricci sans chirurgies, dans [31]. Nous reprenons l'énoncé tel qu'il est donné dans [43]; le lecteur est renvoyé à [31] pour les détails et des énoncés précis.

THÉORÈME 7.4. — *Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci sur une variété M de dimension 3, compacte, connexe et orientée. On suppose qu'il existe pour tout $t \in [0, +\infty)$ et que la courbure normalisée $t \operatorname{Rm}(x, t)$ est bornée lorsque t tend vers l'infini. Alors, il existe un nombre fini de variétés hyperboliques complètes H_i de volume fini, et, pour tout t assez grand, un plongement $\phi_t : \bigsqcup H_i \rightarrow M$ vérifiant les propriétés suivantes. L'image réciproque de la métrique (normalisée) $t^{-1}g(t)$ par ϕ_t converge, uniformément sur tout compact de $\bigsqcup H_i$, vers une métrique de courbure constante négative. Les tores des H_i , sections des cusps, sont envoyés, par ϕ_t , sur des tores incompressibles dans M . La métrique $t^{-1}g(t)$ sur le complémentaire de l'image de ϕ_t s'effondre à courbure sectionnelle bornée en valeur absolue.*

On rappelle qu'un tore est dit incompressible si son groupe fondamental s'injecte dans celui de M . Les parties de M qui s'effondrent sont classifiées par les résultats de J. Cheeger et M. Gromov ([6] et [7]). On ne sait pas montrer que le flot de Ricci uniformise les variétés qui s'effondrent et la conclusion doit venir d'un ingrédient extérieur à la théorie.

G. Perelman annonce essentiellement le même résultat dans la situation plus compliquée du flot avec chirurgies et où la courbure normalisée n'est plus nécessairement bornée à l'infini. Une des difficultés supplémentaires est que le complémentaire des variétés hyperboliques s'effondre à courbure sectionnelle minorée et leur classification ne relève plus des travaux de J. Cheeger et M. Gromov. G. Perelman affirme qu'en étudiant les espaces limites de ces effondrements, qui sont des espaces d'Alexandrov de courbure minorée (voir [4] pour une définition), il arrive à conclure. Une autre étude des effondrements à courbure sectionnelle minorée est faite dans [55] et [54]. Insistons sur le fait que les chirurgies ne réalisent pas la décomposition le long des tores incompressibles; de plus, s'il y en a un nombre infini, elles ont lieu dans les

régions qui s'effondrent (car leur complémentaire converge). Il manque à cette théorie, outre la vérification des énoncés, une meilleure compréhension de l'évolution des effondrements.

L'état actuel de l'expertise ne permet pas de se prononcer sur ces développements. Toutefois, la démarche est cohérente et compatible avec les résultats espérés. Pour terminer, il faut insister sur l'apport de G. Perelman dans le premier article ([44]) : le non-effondrement local, l'étude des solitons contractants et des κ -solutions et la description des régions où la courbure est grande sans être maximale. Bon nombre de ces résultats sont valables en dimension quelconque et donc utilisables dans d'autres contextes (voir [8], par exemple). Il est aussi important de saluer la contribution de R. Hamilton à cet édifice dont il a posé les fondations.

RÉFÉRENCES

- [1] M. ANDERSON – « Geometrization of three-manifolds via the Ricci flow », *Notices Amer. Math. Soc.* **51** (2004), no. 2, p. 184–193.
- [2] L. BESSIÈRES – « Conjecture de Poincaré : la preuve de R. Hamilton et G. Perelman », *La gazette des mathématiciens* **106** (2005).
- [3] J.-P. BOURGUIGNON – « L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci », in *Séminaire Bourbaki 1985-86*, Exp. n° 653, Astérisque 145-146, Société Mathématique de France, 1987, p. 45–61.
- [4] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, Amer. Math. Soc. Providence R.I., 2001.
- [5] J. CHEEGER & D. EBIN – *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford, 1975.
- [6] J. CHEEGER & M. GROMOV – « Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I », *J. Differential Geometry* **23** (1986), p. 309–346.
- [7] ———, « Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded II », *J. Differential Geometry* **32** (1990), p. 269–298.
- [8] B.-L. CHEN & X.-P. ZHU – « Ricci flow with surgery on four-manifolds with positive isotropic curvature », ArXiv : [math.DG/0504478v1](https://arxiv.org/abs/math/0504478v1), avril 2005.
- [9] X. CHEN, P. LU & G. TIAN – « A note on uniformization of Riemann surface by Ricci flow », ArXiv : [math.DG/0505163](https://arxiv.org/abs/math/0505163), may, 10 2005.
- [10] B. CHOW – « On the entropy estimate for the Ricci flow on compact 2-orbifolds », *J. Differential Geometry* **33** (1991), p. 597–600.
- [11] ———, « The Ricci flow on the 2-sphere », *J. Differential Geometry* **33** (1991), p. 325–334.
- [12] B. CHOW & S.-C. CHU – « A geometric interpretation of Hamilton's Harnack inequality for the Ricci flow », ArXiv : [math.DG/0211349](https://arxiv.org/abs/math/0211349), November, 22 2002.
- [13] B. CHOW & D. KNOPF – *The Ricci flow : an introduction*, Mathematical surveys and monographs, vol. 110, A.M.S., 2004.

- [14] B. CHOW & P. LU – « The time-dependent maximum principle for systems of parabolic equations subject to an avoidance set », ArXiv : [math.DG/0211209](https://arxiv.org/abs/math/0211209), november 2002, To appear in *Pacific J. Math.*
- [15] B. CHOW & L.-F. WU – « The Ricci flow on compact 2-orbifolds with curvature negative somewhere », *Comm. on Pure and Appl. Math.* **44** (1991), p. 275–286.
- [16] T. COLDING & W. MINICOZZI – « Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain three-manifolds and a question of Perelman », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 3, p. 561–569.
- [17] D. DETURCK – « Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors », *J. Differential Geometry* **18** (1983), p. 157–162.
- [18] Y. DING – « Notes on Perelman’s second paper », <http://www.math.uci.edu/~yding/perelman.pdf>.
- [19] M. GAGE & R. HAMILTON – « The heat equation shrinking convex plane curves », *J. Differential Geometry* **23** (1986), p. 69–96.
- [20] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2004.
- [21] M. GRAYSON – « The heat equation shrinks embedded plane curves to round points », *J. Differential Geometry* **26** (1987), p. 285–314.
- [22] ———, « Shortening embedded curves », *Ann. of Math.* **129** (1989), p. 71–111.
- [23] R. GREENE – « A genealogy of noncompact manifolds of nonnegative curvature : history and logic », in *Comparison geometry*, M.S.R.I. publications, vol. 30, M.S.R.I., 1997, p. 99–134.
- [24] R. HAMILTON – « Three-manifolds with positive Ricci curvature », *J. Differential Geometry* **17** (1982), p. 255–306.
- [25] ———, « Four-manifolds with positive curvature operator », *J. Differential Geometry* **24** (1986), p. 153–179.
- [26] ———, « The Ricci flow on surfaces », in *Mathematics and general relativity (Santa Cruz 1986)*, Contemp. Math., vol. 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, p. 237–262.
- [27] ———, « The Harnack estimate for the Ricci flow », *J. Differential Geometry* **37** (1993), no. 1, p. 225–243.
- [28] ———, « A compactness property for solutions of the Ricci flow », *Amer. J. Math.* **117** (1995), no. 3, p. 545–572.
- [29] ———, « The formation of singularities in the Ricci flow », in *Surveys in differential geometry*, vol. II, International Press, Cambridge MA, 1995, p. 7–136.
- [30] ———, « Four-manifolds with positive isotropic curvature », *Comm. Anal. Geom.* **1** (1997), p. 1–92.
- [31] ———, « Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds », *Comm. Anal. Geom.* **7** (1999), no. 4, p. 625–729.
- [32] A. HATCHER – « Notes on basic 3-manifold topology », <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>, 1997.
- [33] G. HUISKEN – « Ricci deformation of the metric on a Riemannian manifold », *J. Differential Geometry* **21** (1984), no. 1, p. 47–62.

- [34] T. IVEY – « Ricci solitons on compact three-manifolds », *Diff. Geom. Appl.* (1993), p. 301–307.
- [35] J. JOST – *Two-dimensional geometric variational problems*, J. Wiley-Intersciences, Chichester N.Y., 1991.
- [36] B. KLEINER & J. LOTT – « Notes on Perelman’s papers », <http://www.math.lsa.umich.edu/research/Ricciflow/perelman.html>, december 30 2004.
- [37] O. LADYSENSKAJA, V. SOLONNIKOV & N. URALCEVA – *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Amer. Math. Soc., vol. 23, Amer. Math. Soc., 1968.
- [38] P. LI & S. T. YAU – « On the parabolic kernel of the Schrödinger operator », *Acta Math.* **156** (1986), no. 3-4, p. 153–201.
- [39] S. MAILLOT – « Flot de Ricci et géométrisation des variétés de dimension 3. », Notes informelles, juin 2004.
- [40] C. MARGERIN – « Pointwise pinched manifolds are space forms », in *Geometric measure theory and the calculus of variations (Arcata, Calif., 1984)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 307–328.
- [41] M. MICALEF & J. MOORE – « Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes », *Ann. of Math.* **127** (1988), p. 199–227.
- [42] J. MILNOR – « Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds », *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003), p. 1226–1233.
- [43] J. MORGAN – « Recent progress on the Poincaré conjecture », *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (2005), no. 1, p. 57–78.
- [44] G. PERELMAN – « The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications », ArXiv : [math.DG/0211159](https://arxiv.org/abs/math/0211159), november 2002.
- [45] ———, « Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds », ArXiv : [math.DG/0307245](https://arxiv.org/abs/math/0307245), july 2003.
- [46] ———, « Ricci flow with surgery on three-manifolds », ArXiv : [math.DG/0303109](https://arxiv.org/abs/math/0303109), march 2003.
- [47] V. POENARU – « Poincaré et l’hypersphère », *Pour la Science Dossier hors-série n° 41* (2003), p. 52–57.
- [48] H. POINCARÉ – « Cinquième complément à l’analysis situs », *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), p. 45–110.
- [49] M. PROTTER & H. WEINBERGER – *Maximum principles in differential equations*, Mathematical surveys and monographs, vol. 110, A.M.S., 2004.
- [50] P. SCOTT – « The geometries of 3-manifolds », *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), p. 401–487.
- [51] N. SESUM, G. TIAN & X. WANG – « Notes on Perelman’s paper on the entropy formula for the Ricci flow and its applications », Notes, september 24 2003.
- [52] W.-X. SHI – « Deforming the metric on complete Riemannian manifolds », *J. Differential Geometry* **30** (1989), no. 1, p. 223–301.
- [53] ———, « Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds », *J. Differential Geometry* **30** (1989), no. 2, p. 303–394.

- [54] T. SHIOYA & T. YAMAGUCHI – « Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound », *J. Differential Geometry* **56** (2000), p. 1–66.
- [55] ———, « Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound », ArXiv : math.DG/0304472, April, 15 2003.
- [56] W. P. THURSTON – *The geometry and topology of 3-manifolds*, Lecture Notes, Princeton University, 1979.
- [57] ———, « Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry », *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), no. 3, p. 357–381.
- [58] P. TOPPING – « Lectures on the Ricci flow », Communication privée, 9 mai 2005.
- [59] L.-F. WU – « The Ricci flow on 2-orbifolds with curvature », *J. Differential Geometry* **33** (1991), p. 575–596.
- [60] ———, « The Ricci flow on 2-orbifolds with positive curvature », *J. Differential Geometry* **33** (1991), p. 575–596.
- [61] R. YE – « Notes on the reduced volume and asymptotic Ricci solitons of κ -solutions », <http://www.math.ucsb.edu/~yer/ricciflow.html>, december 20.

G erard BESSON

Institut Fourier de Math ematiques

UMR 5582 du CNRS

B.P. 74

F-38402 SAINT-MARTIN-D'H ERES C EDEx

E-mail : G.Besson@ujf-grenoble.fr

