Séminaire BOURBAKI Juin 2005
57^{e} année, 2004-2005, n^{o} 950, p. 415 à 468

GÉOMÉTRIE CONFORME EN DIMENSION 4 : CE QUE L'ANALYSE NOUS APPREND

par **Christophe MARGERIN**

INTRODUCTION

Si toute variété différentielle admet une structure riemannienne – les métriques sur une variété forment un cône de dimension infinie –, on sait que certaines propriétés algébriques de la courbure de la connexion riemannienne se traduisent dans la topologie sous-jacente : restrictions sur le type homologique (théorèmes d'annulation), homotopique, topologique, voire différentiel. Toute variété riemannienne complète de courbure sectionnelle négative ou nulle est ainsi revêtue par $\mathbb{R}^n$ (théorème de Cartan-Hadamard) et toute variété orientable de dimension paire compacte et de courbure sectionnelle strictement positive est aussi simplement connexe (théorème de Synge). Dans une logique de classification topologique par « géométrisation », on cherche à affaiblir la caractérisation métrique obtenue : s'il est facile de se convaincre qu'une variété – que l'on supposera simplement connexe en dimension impaire – de courbure sectionnelle constante et strictement positive est une sphère, le fait qu'il en aille de même en dimension 3 de toute variété de courbure de Ricci strictement positive – un résultat aujourd'hui classique, dû à R. Hamilton – doit être considéré comme un « vrai » résultat de géométrisation.

Une autre façon d'affaiblir une hypothèse de courbure consiste, au lieu de prendre une trace « algébrique » de l'invariant, comme dans l'exemple précédent où l'on passe de la courbure de Riemann à la courbure de Ricci, à considérer l'hypothèse « en moyenne » sur la variété : grâce à la formule de Gauss-Bonnet on peut en dimension 2 remplacer dans la caractérisation précédente de la sphère le signe de la courbure (de Gauss dans ce cas) par celui de son intégrale (pour la mesure canoniquement associée à la métrique).

Le formalisme de Chern-Weil généralise à la dimension supérieure cette belle formule en donnant des expressions des nombres caractéristiques en termes d'intégrales de traces de polynômes en la courbure, mais les caractérisations de types topologiques ou différentiels en termes de propriétés « en moyenne » de la courbure sont rares. D'où l'intérêt de l'énoncé suivant, particulièrement satisfaisant.

Théorème 1 ([CGY3]). — *Toute variété différentiable de dimension* 4, *compacte et sans bord, admettant une métrique de courbure scalaire strictement positive et dont la norme* L^2 *de la courbure de Weyl et la caractéristique d'Euler sont reliées par la relation*

$$\int_M |W|^2 d\mathrm{vol} < 16\pi^2\chi(M)$$

est difféomorphe à S^4 *ou à* $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$.

Comme nous l'expliquons dans le préliminaire, cet énoncé est une version L^2 de la caractérisation de la sphère standard en terme du pincement faible – un invariant suffisamment « faible » pour autoriser en tout point des courbures sectionnelles négatives – établie dans [M].

La preuve de Chang S.-Y. A., M. Gursky et Yang P. consiste d'ailleurs à réduire leur énoncé à celle-ci en construisant dans la classe conforme d'une métrique vérifiant les hypothèses du théorème 1 une métrique 1/6 - faiblement pincée, l'hypothèse de [M].

La caractérisation donnée dans [M] est optimale, et on y établit la classification des géométries limites. Ce théorème de rigidité admet lui aussi une version L^2.

Théorème 2 ([CGY3]). — *Toute variété différentiable de dimension* 4, *compacte et sans bord, admettant une métrique de courbure scalaire strictement positive et dont la norme* L^2 *de la courbure de Weyl et la caractéristique d'Euler sont reliées par la relation*

$$\int |W|^2 d\mathrm{vol} \leqslant 16\pi^2\chi(M)$$

est soit difféomorphe à S^4 *ou à* $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$*, soit conformément équivalente au plan projectif complexe* $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\ F\text{-}S)$ *ou à un quotient du produit* $\mathbb{R} \times (S^3,\ \mathrm{can})$ *par un sous-groupe d'isométries.*

Dans cet exposé nous ne reviendrons pas sur la preuve de l'énoncé « géométrique », [M], obtenue par l'étude de l'invariant « pincement faible » le long des courbes intégrales de la courbure de Ricci considérée comme champ de vecteurs sur l'espace des métriques. Ces idées ont été remises au goût du jour par le travail de G. Perelman en dimension 3 ; elles joueront d'ailleurs un rôle en un point crucial de l'argument, mais sous le mode mineur de flot de Yamabe.

Nous allons plutôt présenter l'ensemble des résultats de géométrie conforme de la dimension 4 qui ont permis aux auteurs de réduire leurs énoncés à ceux établis dans [M] : un travail technique de longue haleine, des premiers papiers sur les métriques extrémales pour les déterminants régularisés – en particulier [CY] – à ceux, plus récents, où ils étudient un analogue du problème de Yamabe pour un invariant scalaire *quadratique* en la courbure de Ricci ([CGY1], [CGY2]), en passant par une étude systématique des « paires conformes » – et en particulier de « l'opérateur de Paneitz » et de sa « Q-courbure ».

1. PRÉLIMINAIRE : UNE PREMIÈRE RÉDUCTION

La courbure riemannienne est un 4-tenseur présentant un certain nombre de symétries qui font qu'elle peut être considérée comme une section du fibré des endomorphismes symétriques de la puissance extérieure seconde du cotangent. Elle vérifie de plus la première identité de Bianchi, qui exprime son orthogonalité à la puissance extérieure quatrième du cotangent. Aux deux (seules) traces de la courbure de Riemann, la courbure de Ricci, $\mathrm{ric} = \mathrm{tr}_{24}R$, et la courbure scalaire, $\mathrm{scal} = \mathrm{tr}\,\mathrm{ric}$, correspondent deux composantes irréductibles de l'algèbre de courbure sous l'action du groupe orthogonal, de dimensions respectives $(n^2+n-2)/2$ ($= \dim S^2T^*M - 1$) et 1 ; la projection sur la première est donnée par $\sigma = 1/2n(n-1)\,\mathrm{scal}\, g \circledast g$, et l'autre par $\rho_0 = 1/(n-2)\,\mathrm{ric}_0 \circledast g$ où $\mathrm{ric}_0 = \mathrm{ric} - 1/n\,\mathrm{scal}\, g$ représente la partie sans trace de la courbure de Ricci et $\circledast$ une suspension algébrique de S^2T^*M dans $S^2\Lambda^2T^*M$ parfois appelée produit de Kulkarni. Ce qui reste, $W := R - \frac{\mathrm{scal}}{2n(n-1)} g \circledast g - \frac{\mathrm{ric}_0 \circledast g}{n-2}$ est appelé courbure de Weyl et représente la projection de la courbure de Riemann, R, sur la dernière composante irréductible, celle des tenseurs de courbure dont toutes les traces s'annulent. Réduite à 0 en dimension 2 et 3, c'est la plus grande composante (en terme de dimension) dès la dimension 4.

Cette composante admet une décomposition exceptionnelle sous l'action de $\mathrm{SO}(n)$ en dimension $n = 4$, associée à l'action de l'opérateur de Hodge et correspondant à la décomposition $\underline{so}(4) = \underline{so}(3) \oplus \underline{so}(3)$. Ce raffinement joue un rôle crucial dans [M], et interviendra ici dans la discussion de la classification des métriques plates au sens de Bach, (cf. le paragraphe 4.2.2, en particulier l'identité (4.27) du Lemme 4.3), par laquelle passe la démonstration du résultat de rigidité énoncé dans le théorème 2.

On vérifie facilement que la courbure de Weyl est un covariant conforme : $W(e^{2f}g) = e^{2f}W(g)$. L'intégrale $\int_M |W|^2 d\mathrm{vol}$ est en particulier un invariant, et le théorème 1 donne donc une caractérisation *conforme* et *intégrale* de la sphère standard.

Rappelons que la généralisation due à Chern S.S. de la formule de Gauss-Bonnet s'énonçant, en dimension 4,

$$32\pi^2\,\chi(M) = \int_M \left(|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 + |W|^2\right) d\mathrm{vol}\ , \tag{1.1}$$

les hypothèses des théorèmes 1 (2) se lisent donc, respectivement,

$$\int_M \left(|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2\right) d\mathrm{vol} > (\geqslant)\ 0. \tag{1.2}$$

Le pincement faible étant défini par (cf. [M])

$$PF = \sup_M \frac{|R-\sigma|^2}{\mathrm{scal}^2} \ ,$$

et la décomposition de la courbure rappelée ci-dessus étant orthogonale, l'hypothèse de [M], PF $< (\leqslant)\ 1/6$ s'écrit donc

$$|R-\sigma|^2 = |\rho_0|^2 + |W|^2 < (\leqslant) \frac{\mathrm{scal}^2}{6} = |\sigma|^2 \ ,$$

ce qui revient à la positivité de l'intégrand dans l'intégrale (1.2) : les théorèmes 1 et 2 sont bien une version « L^2 » de [M], et il suffira pour les établir de démontrer l'existence d'une métrique dont le polynôme de courbure $|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2 = \frac{\mathrm{scal}^2}{6} - 2|\mathrm{ric}_0|^2 - |W|^2$ est partout (strictement) positif dans la classe conforme de toute métrique de courbure scalaire strictement positive satisfaisant l'hypothèse intégrale (1.2).

Il existe une combinaison de la courbure de Ricci et de la courbure scalaire particulièrement pertinente en dimension 4, $A := \mathrm{ric} - \frac{\mathrm{scal}}{6} g = \mathrm{ric}_0 + \frac{\mathrm{scal}}{12} g$, appelée *courbure de Schouten*, et en terme de laquelle la décomposition précédente du tenseur de Riemann s'écrit $R = \frac{1}{2} A \circledast g + W$. Exprimé avec la courbure de Schouten, la positivité du polynôme $|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2$ est encore équivalente à celle du polynôme $4\,\sigma_2(A) - |W|^2$, où $\sigma_2(A)$ représente la seconde fonction symétrique élémentaire de l'endomorphisme symétrique A. Notons qu'en terme de cette fonction la formule de Chern-Gauss-Bonnet (1.1) admet la forme simple suivante

$$32\pi^2\,\chi(M) = \int_M (4\sigma_2(A) + |W|^2)\,d\mathrm{vol}\ , \tag{1.3}$$

qui nous permet de déduire de l'invariance conforme de $\int_M |W|^2\,d\mathrm{vol}$ celle de l'intégrale $\int_M \sigma_2(A)\,d\mathrm{vol}$, bien que $\sigma_2(A)$ ne soit pas lui-même un covariant conforme. Cette remarque élémentaire est essentielle à la compréhension de la stratégie adoptée.

Dans une première partie, (le chapitre 2), nous établissons la réduction annoncée dans le cas où la norme L^2 de la courbure de Weyl est *strictement* majorée par $4\pi\sqrt{\chi(M)}$ – et donc le théorème 1. Nous commençons par une preuve dans l'esprit de celle proposée par les auteurs, qui a le mérite de préciser comment des préoccupations essentiellement analytiques, comme l'étude de courbures du *quatrième* degré, objets insolites de la géométrie « classique », les y ont conduits.

Dans une seconde partie, (le chapitre 3), nous en donnons une preuve inédite, plus naturelle, plus simple et nettement plus rapide qui s'affranchit du recours à des opérateurs différentiels du quatrième degré ; elle s'inspire très largement des travaux de M. Gursky et J. Viaclovsky (en particulier de [GV]) sur la seconde fonction symétrique du tenseur de Schouten, $\sigma_2(A)$. À l'issue nous discutons un corollaire intéressant de ces travaux qui donne un critère très général d'existence de métriques de Q-courbure *constante*, et explicitons quelques familles d'exemples.

Dans une dernière partie, (le chapitre 4), nous abordons l'étude du cas limite où la norme L^2 de la courbure conforme est égale à $4\pi\sqrt{X(M)}$ et où les deux preuves précédentes de la réduction proposée s'effondrent par dégénérescence de l'ellipticité des équations considérées. En suivant [CGY0] nous commençons par résoudre un « problème du type Yamabe » pour les invariants quadratiques $|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - \alpha|W|^2 = 4\sigma_2(A) - \alpha|W|^2,\ \alpha < 1$, avant de construire la solution de l'équation $|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2 \equiv 0$ comme limite en $\alpha = 1$ – un argument délicat qui passe par la classification des variétés plates, au sens de Bach, dont la norme L^2 de la courbure de Weyl est égale à $4\pi\sqrt{X(M)}$.

2. LE CAS $\int(4\sigma_2(A) - |W|^2)\, d\mathrm{vol} > 0$: DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

2.1. Déterminants régularisés et paires conformes

Le point de départ est une étude variationnelle plus ou moins systématique du déterminant régularisé d'opérateurs différentiels intrinsèques *conformément covariants* de poids (a,b) , $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire tels que $L_{e^{2f}g} = e^{-bf} L\, e^{af}$ pour toute fonction infiniment différentiable f. Si L est un opérateur différentiel intrinsèque de degré d sur une variété compacte sans bord de dimension n, qui est formellement auto-adjoint et de symbole principal défini positif, le spectre de cet opérateur L est réel, discret, minoré et tend vers l'infini comme $\lambda_i \underset{i\to+\infty}{\sim} Ci^{d/n},\ i \in \mathbb{N}$. On introduit alors classiquement la fonction ζ spectrale de L, $\zeta_L(s) = \sum\limits_{\lambda_j \neq 0} |\lambda_j|^{-s}$, définie pour les points s de $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est assez grande, et son extension méromorphe, à pôles simples isolés, que l'on obtient par prolongement analytique. On appelle *déterminant régularisé*, et l'on note $\det L$, la valeur $e^{-\zeta_L'(0)}$.

En supposant de plus l'opérateur L conformément covariant et homogène – i.e. satisfaisant $L_{e^{2c}g} = e^{-dc}L_g$ pour tout réel c –, et en s'appuyant sur l'asymptotique en temps petit de la trace du noyau de la chaleur, T. Branson et B. Ørsted, ([BØ], § 2, en particulier (2.7)), explicitent l'expression de la variation conforme du déterminant régularisé d'un tel opérateur sur une variété compacte sans bord de dimension 4 en termes de la géométrie et d'opérateurs « classiques », obtenant ainsi une généralisation de la formule dérivée par Polyakov dans le cas particulier du laplacien sur une surface de Riemann. En posant $F(f) := \log(\det L_{e^{2f}g} / \det L_g)$ – au sens régularisé précédent – ils établissent que F se décompose en une combinaison linéaire de trois fonctionnelles universelles $(I_i)_{i=1}^3$, la dépendance en l'opérateur L n'affectant que les coefficients $(\gamma_i)_{i=1}^3$ de la décomposition $F = \sum\limits_{i=1}^{3} \gamma_i I_i$.

Dans cette décomposition $I_1(f)$ représente une moyenne normalisée de f, relative à la densité $|W|^2$:

$$I_1(f) = 4\int_M |W|^2 f\, d\mathrm{vol} - \int_M |W|^2 d\mathrm{vol}\ \ \log \fint e^{4f} d\mathrm{vol}\ .$$

L'expression de la fonctionnelle I_2 implique l'opérateur introduit par Paneitz pour étudier l'interaction entre le groupe conforme et le groupe de jauge des équations de Maxwell, que nous représenterons par la lettre P, et la « Q-courbure » qui lui est associée : en posant

$$Q := \frac{1}{4}\left(\frac{(n-2)(n+2)}{4(n-1)^2 n}\mathrm{scal}^{\,2} - 4\frac{|ric_0|^2}{(n-2)^2}\right) + \frac{\Delta\,\mathrm{scal}}{4(n-1)}\ ,$$

où d représente la différentielle extérieure, d^* son adjoint formel L^2, et $\Delta = d^* d\,(+dd^*)$ le laplacien riemannien (agissant ici sur les fonctions), P est l'opérateur différentiel *d'ordre 4* d'expression

$$P := \Delta^2 + d^*\left(-\frac{4\mathrm{ric}_0}{n-2} + \frac{(n^2-2n-4)}{2n(n-1)}\mathrm{scal}\, g\right) d + (n-4)\, Q\,.$$

Il vérifie la relation de covariance conforme

$$P(e^{2f}g) = e^{-\frac{(n+4)}{2}f} P(g)\, e^{\frac{(n-4)}{2}f}\ .$$

En faisant opérer les deux membres de cette identité sur la fonction constante égale à 1, un élément du noyau de $P_0 := P - (n-4)\,Q$, nous trouvons

$$(n-4)\,Q(e^{2f}g) = e^{-\frac{(n+4)}{2}f} P_0(g)\left(e^{\frac{(n-4)}{2}f}\ -1\right) + (n-4)\,e^{-4f}Q(g)\ ;$$

en nous autorisant à prolonger formellement cette expression à $n \in \mathbb{R}$, à la dériver par rapport à la variable n et à spécialiser en $n = 4$, c'est-à-dire en considérant la limite en $n = 4$ du quotient par $(n-4)$ de cette expression, nous dérivons l'importante relation suivante (de la dimension 4, donc)

$$Q(e^{2f}g) = e^{-4f}\big(Q(g) + \frac{1}{2}P(g)f\big)\ . \tag{2.1}$$

Cette identité peut évidemment être vérifiée de façon conventionnelle au prix d'un calcul plus laborieux. Un tel couple (P, Q) est appelé *« paire conforme »*, et Q, la *« Q-courbure »* associée à l'opérateur covariant conforme P. Un exemple plus élémentaire de telle paire est fourni en dimension 2 par le couple (Δ, κ), où κ représente la courbure de Gauss : la variation de la courbure dans une classe conforme est en effet régie par l'équation $\kappa(e^{2f}g) = e^{-2f}\,(\kappa(g) + \Delta f)$, qui joue le rôle de (2.1) dans ce cas.

La construction systématique de telles paires en toute dimension, leur calcul explicite, et l'étude de leurs propriétés est un sujet en pleine expansion (voir par exemple [F-G1], [F-G2], [F-H], [G-J-M-S], [Be], [G-P], [G-Z]..., et la dernière partie du chapitre 3 où nous présentons une construction systématique de métriques de Q-courbure constante).

En dimension 4, les expressions précédentes se spécialisent en

$$P = \Delta^2 + d^*(-2\mathrm{ric} + \frac{2}{3}\,\mathrm{scal}\, g)\, d\,, \tag{2.2}$$

et

$$Q = \frac{1}{12}\left(\Delta\,\mathrm{scal}\, - 3\,|\mathrm{ric}|^2 + \mathrm{scal}^{\,2}\right) = \frac{1}{12}\left(\Delta\,\mathrm{scal}\, - 3\,|\mathrm{ric}_0|^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{scal}^{\,2}\right)\,, \tag{2.3}$$

en termes desquelles nous pouvons maintenant exprimer le second générateur de [B-Ø] :

$$I_2(f) := \int_M f P f\, d\mathrm{vol} + 4\int_M Q\, f\, d\mathrm{vol} - \int_M Q\, d\mathrm{vol}\ \ \log \fint e^{4f}\, d\mathrm{vol}. \tag{2.4}$$

Le gradient de I_2 étant alors clairement donné par la formule

$$\nabla I_2(f) = 2\,Pf + 4\,Q - 4\,e^{4f}\,\int_M Q\, d\mathrm{vol} \Big/ \int_M e^{4f}\, d\mathrm{vol}\,, \tag{2.5}$$

et l'équation (2.1) exprimant la Q-courbure dans une classe conforme s'écrivant en un point critique f

$$Q(e^{2f} g) = e^{-4f}\left(Q + \frac{1}{2} P f\right) = \int_M Q\, d\mathrm{vol} \Big/ \int_M e^{4f}\, d\mathrm{vol}\,, \tag{2.6}$$

les points critiques de la fonctionnelle I_2 sont donc les métriques de *Q-courbure constante.*

Le dernier générateur, I_3, est une variante quadratique de la fonctionnelle de Yamabe :

$$I_3(f) := 12\,Y(f) + 4\int f\,\Delta\,\mathrm{scal}\, d\mathrm{vol}\,,$$

où

$$Y(f) := \int_M (\Delta f - |df|^2)^2\, d\mathrm{vol} - \frac{1}{3}\int_M \mathrm{scal}\ |df|^2\, d\mathrm{vol}\ .$$

En invoquant la formule régissant l'expression de la courbure scalaire dans une classe conforme

$$\mathrm{scal}\,(e^{2f} g) = e^{-2f}\big(\mathrm{scal}\, + 6\,(\Delta f - |df|^2)\big)\ , \tag{2.7}$$

on obtient pour I_3 l'expression plus transparente

$$I_3(f) = \frac{1}{3}\int_{(M,\, e^{2f} g)} \mathrm{scal}^{\,2}\, d\mathrm{vol} - \frac{1}{3}\int_{(M,\, g)} \mathrm{scal}^{\,2}\, d\mathrm{vol}\,,$$

qui justifie l'appellation « fonctionnelle de *Yamabe quadratique* ». On peut se convaincre que les points critiques de I_3 sont les métriques de *courbure scalaire constante* en en calculant le gradient, égal en f à : $4\,e^{4f}(\Delta\,\mathrm{scal}\,)\,(e^{2f} g)$.

Le travail initial de Chang S.-Y. A. et Yang P. consiste en une extension à la dimension 4 du théorème de compacité de B. Osgood, R. Philipps et P. Sarnak (cf. [OPS2], et [OPS1]) qui établit, en s'appuyant sur l'inégalité de Moser-Trudinger, que le maximum du logarithme du déterminant régularisé du laplacien sur une surface de Riemann est atteint en « la » métrique de courbure constante. Dans [CY], Chang S.-Y. A. et Yang P. démontrent que sur une variété compacte sans bord de dimension 4 la fonctionnelle $F = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i I_i$ atteint son minimum dès que γ_2 et γ_3 sont strictement positifs et que $\kappa := \gamma_1 \int_M |W|^2\, d\mathrm{vol} + \gamma_2 \int_M Q\, d\mathrm{vol}$ est strictement majoré par $8\gamma_2\,\pi^2$. (On notera que κ est un invariant conforme puisque, d'après (2.3), $\int_M Q\, d\mathrm{vol} = \frac{1}{2}\int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol}$.)

Reportons pour l'instant la discussion de la preuve de cet énoncé, de toute façon encore insuffisant pour notre objectif, et notons qu'en regroupant les expressions des gradients, ∇I_i, calculés précédemment nous obtenons pour celui de la fonctionnelle F évalué en une fonction f

$$4\, e^{4\,f}\Big(\gamma_1\, |W|^2 + \gamma_2\, Q + \gamma_3\, \Delta\, \mathrm{scal} \;\; - \frac{\kappa}{\mathrm{vol}(e^{2\,f} g)}\Big)\ .$$

Il reste à choisir les poids γ_i de façon à annuler κ, soit $\gamma_2 = 1$, et

$$\gamma_1 = -\int_M Q\, d\mathrm{vol} \Big/ \int_M |W|^2\, d\mathrm{vol} = -\frac{1}{2}\int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} \Big/ \int_M |W|^2\, d\mathrm{vol}\ \ , \tag{2.8}$$

et à introduire $\delta := 8\gamma_3 + 2/3$, pour que l'équation d'Euler de la fonctionnelle F devienne

$$0 = \gamma_1 |W|^2 + Q + \frac{1}{24}(3\delta - 2)\, \Delta\mathrm{scal} \; = \gamma_1\, |W|^2 + \frac{1}{2}\,\sigma_2(A) + \frac{1}{8}\,\delta\, \Delta\, \mathrm{scal}\ \ .$$

Nous tenons ici la clé de l'approche de Chang S.-Y. A. et Yang P. ; imaginons que nous souhaitions, sous l'hypothèse $\int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} > 0$, établir l'existence d'une métrique satisfaisant $\sigma_2(A) > 0$ (ce qui est l'objet de l'article [CGY2]) : tout minimum de la fonctionnelle F est une solution de l'équation d'Euler,

$$\sigma_2(A) = -\delta/4\, \Delta\, \mathrm{scal} \; - 2\gamma_1\, |W|^2\ , \tag{2.9}$$

qui pourra être utilisée comme *régularisation* de l'opérateur géométrique pertinent, $\sigma_2(A)$.

2.2. Un premier résultat d'existence

2.2.1. L'énoncé. — Trois problèmes se posent ici :

1) le théorème d'existence de [CY] requiert la positivité de γ_3 et ne s'applique donc que dans le cas où $\delta > 2/3$;

2) en supposant que l'on réussisse à résoudre l'équation régularisée $(2.9)_\delta$ pour toutes les valeurs strictement positives de δ et à passer à la limite en zéro, l'hypothèse $\gamma_1 = -\frac{1}{2}\int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} \Big/ \int_M |W|^2\, d\mathrm{vol} < 0$ entraînerait $\sigma_2(A) = -2\gamma_1\, |W|^2 \geqslant 0$, mais pas nécessairement la positivité *stricte* de $\sigma_2(A)$;

3) c'est la positivité de $\sigma_2(A) - |W|^2/4 = 1/4\, (|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2)$ – et non celle de $\sigma_2(A)$, objet de [CGY3] – qui correspond à la propriété $PF(g) < 1/6$ que nous prétendons établir (cf. la discussion du préliminaire).

Concernant le second point il suffit, pour garantir la positivité *stricte* de $\sigma_2(A)$, de translater l'équation d'Euler par le carré de la norme d'une 2-forme symétrique ne s'annulant nulle part et fixée une fois pour toute, η : pour cela nous modifions la fonctionnelle F en lui ajoutant un multiple de la fonctionnelle

$$I_0(f) := 4\int_M |\eta|^2 f\,d\mathrm{vol} - \Big(\int_M |\eta|^2\,d\mathrm{vol}\Big)\ \log \fint_M e^{4f}\,d\mathrm{vol}\ .$$

Le paramètre γ_0 que nous introduisons ainsi, poids du générateur I_0 dans l'expression de la nouvelle fonctionnelle, permet de plus de relâcher la contrainte (2.8) et de régler ainsi la troisième difficulté relevée ci-dessus : nous avons de fait la généralisation suivante du résultat de compacité de [CY].

THÉORÈME 2.1. — *Sur une variété riemannienne compacte sans bord de dimension* 4 *le minimum de la fonctionnelle* $H = \sum_{i=0}^{3} \gamma_i I_i(f)$ *est atteint par une fonction infiniment différentiable,* f*, dès que* γ_2 *et* γ_3 *sont strictement positifs et que* $\kappa' = \kappa + \gamma_0 \int_M |\eta|^2\,d\mathrm{vol}$ *est strictement majoré par* $8\pi^2\,\gamma_2$*. La métrique* $e^{2f}g$ *vérifie de plus l'identité*

$$\gamma_0\,|\eta|^2 + \gamma_1\,|W|^2 + \gamma_2\,Q + \gamma_3\,\Delta\,\mathrm{scal}\ = \frac{\kappa'}{\mathrm{vol}(e^{2\,f}g)}\ .$$

Cet énoncé regroupe un résultat de *compacité*, l'existence d'un minimum f dans $L^{2,2}(M)$ – l'espace de Sobolev des fonctions qui sont, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, de carré intégrables –, et un résultat de *régularité*, le fait que ce minimum soit effectivement infiniment différentiable.

2.2.2. Compacité. — Puisque $H(0) = 0$, le minimum $\lim_\ell H(f_\ell)$, où $(f_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ représente une suite minimisante de H, est majoré par 0. Pour dériver une borne a priori sur la norme $L^{2,2}$ d'une telle suite, nous commençons par minorer $H(f_\ell)$: l'outil déterminant est une version fine de l'inégalité de Moser-Trudinger due à D. Adams (cf. [A]) d'après laquelle

$$\log \fint e^{4(f-\overline{f})}\,d\mathrm{vol} \leqslant \frac{1}{8\pi^2}\int (\Delta f)^2\,d\mathrm{vol} + C\,; \tag{2.10}$$

cette majoration est uniforme sur $L^{2,2}(M)$, la constante C ne dépendant que de (M,g). En posant $\mathcal{E}(g) := \gamma_0\,|\eta|^2 + \gamma_1\,|W|^2 + \gamma_2\,Q + \gamma_3\,\Delta\,\mathrm{scal}$, nous pouvons écrire

$$H(f) = \int_M \big(4\,(f-\overline{f})\mathcal{E} + \gamma_2\ fPf\big)\ d\mathrm{vol} + 12\,\gamma_3\,Y(f) - \kappa'\log \fint_M e^{4(f-\overline{f})}\,d\mathrm{vol}\ ,$$

où $\kappa' = \int_M \mathcal{E}\ d\mathrm{vol}$. Par convexité de l'application exponentielle $\fint_M e^{4(f-\overline{f})}d\mathrm{vol} \geqslant 1$, et nous obtenons, dans le cas où $\kappa' \leqslant 0$, la minoration banale

$$H(f) \geqslant \int_M \big(4\,(f-\overline{f})\mathcal{E} + \gamma_2\,fPf\big)\ d\mathrm{vol} + 12\,\gamma_3\,Y(f)\ ,$$

tandis que, dans le cas où $\kappa' \geqslant 0$, nous invoquons l'inégalité d'Adams (2.10) pour obtenir alors :

$$H(f) \geqslant -C\kappa' - \frac{\kappa'}{8\pi^2}\int_M (\Delta f)^2\, d\mathrm{vol} + \int_M \big(4\,(f-\overline{f})\mathcal{E} + \gamma_2\, fPf\big)\; d\mathrm{vol} + 12\,\gamma_3\, Y(f).$$

Dans tous les cas, et en posant $\kappa'' = \max(0,\kappa')$, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout entier ℓ assez grand, $\ell \geqslant \ell(\varepsilon)$, nous avons établi la minoration

$$\begin{aligned}\varepsilon > H(f_\ell) \geqslant -C\kappa'' &+ \big(-\frac{\kappa''}{8\pi^2} + \gamma_2 + 12\,\gamma_3\big)\int_M |\Delta f_\ell|^2\, d\mathrm{vol}\\ &- 2\gamma_2\int_M \mathrm{ric}(df_\ell,\, df_\ell)\, d\mathrm{vol} + \big(\frac{2}{3}\,\gamma_2 - 4\,\gamma_3\big)\int_M |df_\ell|^2\, \mathrm{scal}\; d\mathrm{vol}\\ &+ 12\,\gamma_3\,\Big(\int_M |df_\ell|^4\, d\mathrm{vol} - 2\int_M \Delta f_\ell\, |df_\ell|^2\, d\mathrm{vol}\Big) + 4\int_M (f_\ell - \overline{f}_\ell)\mathcal{E}\; d\mathrm{vol}\,.\end{aligned}$$

Il reste à minorer $2\int_M \Delta f_\ell\, |df_\ell|^2\, d\mathrm{vol}$ par $x\int_M |\Delta f_\ell|^2\, d\mathrm{vol} + \frac{1}{x}\int_M |df_\ell|^4\, d\mathrm{vol}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, à invoquer l'inégalité de Poincaré pour majorer $\int_M (f_\ell - \overline{f_\ell})\mathcal{E}\, d\mathrm{vol}$ par $C(g)\sqrt{\int_M |\mathcal{E}|^2\, d\mathrm{vol}}\sqrt{\int_M |df_\ell|^2\, d\mathrm{vol}}$ et à conclure à l'existence d'un majorant uniforme des normes $\int((\Delta f_\ell)^2 + |df_\ell|^4)\, d\mathrm{vol}$ ne dépendant que de la variété riemannienne (M,g), et des paramètres γ_2 , γ_3 et κ' .

La fonctionnelle H étant clairement invariante par translation par une constante – c'est-à-dire par homothétie sur les métriques –, on supposera sans restriction la suite minimisante f_ℓ normalisée par la condition $⨍ e^{4f_\ell} d\mathrm{vol} = 1$, ce qui entraîne que la moyenne $\overline{f}_\ell$ est négative ou nulle. Un corollaire immédiat de l'inégalité d'Adams (2.10) et de la majoration uniforme de $\int(\Delta f_\ell)^2\, d\mathrm{vol}$ que nous venons d'établir est l'existence d'un majorant uniforme de la suite $-\overline{f}_\ell$; la compacité faible de $L^{2,2}$ fournit alors le minimum recherché.

2.2.3. Régularité. — L'étude de la régularité des minima des fonctionnelles F dont l'existence est établie par [CY] est précisément l'objet de [CGY0]. Le résultat, qui s'énonce comme suit, s'applique aussi aux minima de H.

THÉORÈME 2.2 ([CGY0]). — *Soient (M,g) une variété compacte sans bord de dimension 4, a' et a'' deux réels, φ une fonction (de la variable réelle) à croissance au plus exponentielle, $|\varphi(x)| \leqslant a_1 \exp a_2|x|, (a_2,a_2) \in \mathbb{R}^2$, ainsi que sa première dérivée, et b une forme bilinéaire symétrique bornée, $b \in S^2T^*M$, $|b(x,x)| \leqslant a_3|x|^2, a_3 \in \mathbb{R}$. Tout minimum d'une fonctionnelle du type $\mathcal{F}(f) := \int(\Delta f)^2 + (a'\,\Delta f + a''\,|df|^2)^2 + b(df,df) + \varphi(f-\overline{f})\, d\mathrm{vol}$ est nécessairement infiniment différentiable.*

L'originalité du résultat tient au caractère de la non-linéarité de l'équation d'Euler associée.

2.2.3.1. Régularité höldérienne. — La continuité höldérienne d'un minimum est établie en utilisant un critère de Morrey : sur une variété de dimension 4, une fonction est β-höldérienne dès que l'intégrale de son gradient sur toute boule de rayon r est majorée par un multiple uniforme de $r^{3+\beta}$; par l'inégalité de Hölder il suffit donc de majorer la norme L^4 du gradient sur toute boule de rayon r par un multiple uniforme de r^{β}, ce qu'on établit en démontrant que la fonction $d_{f,P}(r) := \int_{B(P,\,r)} \big(|\mathrm{Hess} f|^2 + |df|^4 + f^2 + |df|^2/d(P,\,.)^2\big)\, d\mathrm{vol}$ satisfait, pour r petit, l'inéquation différentielle

$$d - C_1 r d' \leqslant C_2 r^{\gamma}$$

où γ est un réel strictement positif et β et C_1 sont reliés par l'identité $\beta = \frac{1}{4C_1}$.

C'est ici qu'intervient l'*hypothèse de minimisation* : pour une suite minimisante (f_ℓ) de la fonctionnelle H, nous avons expliqué comment obtenir une borne uniforme sur $\int_M \big((\Delta f_\ell)^2 + |df_\ell|^4\big)\, d\mathrm{vol}$; en procédant de même avec le *prolongement biharmonique*, h, de f à l'intérieur de la boule $B(P,r)$ – défini par les identités $h \equiv f$ sur $M \smallsetminus B(P,r)$, $\Delta^2 h \equiv 0$ sur $B(P,\,r)$, $\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n}$ et $h = f$ sur $\partial B(P,\,r)$–, nous déduisons de la majoration $H(h) \geqslant H(f)$, (f est un minimum de H par hypothèse) :

$$\int_{B(P,\,r)} (|\Delta f|^2 + |df|^4)\, d\mathrm{vol} \leqslant C \int_{B(P,\,r)} (|\Delta h|^2 + |dh|^4)\, d\mathrm{vol} + C\, r^{\gamma}, \quad \gamma > 0\ .$$

Pour conclure, il reste à majorer le terme de droite par $C_1 r d' + C_2 r^{\gamma}$, où $d = d_{f,P}(r)$ est la fonction introduite ci-dessus : il s'agit de contrôler la norme $\int_{B(P,\,r)} (|\Delta h|^2 + |dh|^4)\, d\mathrm{vol}$ à partir de données au bord, sur lequel h coïncide avec f à l'ordre 1. C'est là une partie substantielle de [CGY0] (en particulier § 2, « Preliminary estimates for biharmonic functions ») qui utilise une représentation – établie dans [CQ] – des dérivées troisièmes le long du bord comme image par un opérateur pseudo-différentiel des seules données $h|_{\partial B(P,\,r)}$ et $\frac{\partial h}{\partial n}\big|_{\partial B(P,\,r)}$.

2.2.3.2. Infinie régularité. — Pour passer de la régularité höldérienne d'un minimum à sa différentiabilité à tous les ordres, les auteurs adaptent les arguments développés par R. Schoen ([S]), et K. Uhlenbeck ([SU]) dans le cadre des applications harmoniques :

PROPOSITION 2.3. — *Pour toute solution $L^{2,2}, f$, de l'équation d'Euler de $\mathcal{F}$ satisfaisant, pour tout r positif, la majoration $d_{f,P}(r) < K r^{4\beta}$, $0 < \beta < 8$, la fonction*

$$D_{f,P}(r) := \frac{1}{r^4} \int_{B(P,\,r)} \big(r^{2-\beta/4}\, (\Delta f)^2 + |df|^2 + 1\big)\, d\mathrm{vol}$$

vérifie la majoration

$$D_{f,P}(\frac{r}{2}) \leqslant \big(1 + C\, r^{\beta/8}\big)\ D_{f,P}(2^{\frac{8-\beta}{8+\beta}} r).$$

L'hypothèse est automatiquement satisfaite par un minimum de $\mathcal{F}$ d'après le paragraphe précédent. Par itération de la proposition 2.3 nous établissons alors facilement que la fonction $D_{f,P}$ est majorée, uniformément en r et en P. Le critère de Morrey établit ensuite que la norme sup de $|df|$ est bornée et un argument d'*amorçage* (« bootstrap » outremanche) relativement aisé permet d'en déduire une borne uniforme pour le hessien de f. L'équation d'Euler s'écrivant $\Delta^2 f = E(f, \nabla f, \mathrm{Hess} f)$, où les coefficients de E sont des fonctions infiniment différentiables, la théorie de la régularité elliptique « classique » nous enseigne finalement que la fonction f est infiniment différentiable, ce qui conclut la preuve du théorème 2.2.

2.3. Résolution de la régularisation

Reprenons la stratégie exposée avant l'énoncé du théorème 2.1 et l'ayant motivé. Si cet énoncé répond aux points 2) et 3), il n'établit cependant l'existence et la régularité d'une solution de la régularisation $(\gamma_0 |\eta|^2 + \gamma_1 |W|^2 + \gamma_2 Q + \gamma_3 \Delta \,\mathrm{scal}) \,\mathrm{vol}(e^{2f} g) = \kappa'$ que dans le cas où les paramètres γ_2 et γ_3 sont strictement positifs. En posant $\gamma_1 = -\alpha/8$, $\gamma_2 = 1$ et $\gamma_3 = \delta/8 - 1/12$, l'annulation de κ' nous dicte la valeur de γ_0 ,

$$\gamma_0 = -1/2 \int_M \left(\sigma_2(A) - \alpha/4 \,|W|^2\right) \,d\mathrm{vol} \Big/ \int_M |\eta|^2 \,d\mathrm{vol}\ , \tag{2.11}$$

le théorème 2.1 établissant alors, pour tout $\delta > 2/3$, l'existence d'une solution infiniment différentiable de l'équation δ-régularisée

$$\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4} |W|^2 + \frac{\delta}{4} \Delta \,\mathrm{scal} = -\frac{\alpha}{4} |W|^2 + 2\,Q + 2\,\gamma_3 \,\Delta \,\mathrm{scal} = -2\,\gamma_0 \,|\eta|^2\ . \tag{2.12}$$

Dans le but de considérer ensuite la limite en $\delta = 0$, nous commençons par discuter l'existence de solutions de cette équation pour des valeurs de δ arbitrairement petites. En suivant [CGY2], qui traite du cas particulier $\alpha = 0$, nous introduisons pour tout réel strictement positif δ_0, l'ensemble $S := S_{\delta_0} := \{\delta \in [\delta_0, 1]$, *tel que l'équation* $(2.12)_\delta$ *admet une solution de courbure scalaire strictement positive*.

2.3.1. S n'est pas vide. — Pour $\delta > 2/3$ nous disposons d'une solution de l'équation $(2.12)_\delta$: sous l'hypothèse que α et $\int_M (\sigma_2 - \frac{\alpha}{4} |W|^2) \,d\mathrm{vol}$ sont positifs, $\delta \,\Delta \,\mathrm{scal} + 1/6 \,\mathrm{scal}^2$ l'est aussi. On démontre facilement à l'aide du principe du maximum (voir par exemple [G1]), que cette inéquation différentielle entraîne, pour $\delta = 1$, que la courbure scalaire est strictement positive pourvu que l'invariant de Yamabe, $\mu(g)$, soit positif. Cette condition est ici assurée par l'existence d'une métrique de courbure scalaire strictement positive dans la classe conforme.

2.3.2. S est ouvert. — Pour démontrer l'ouverture de l'ensemble S sous l'hypothèse $\int_M (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4} |W|^2) \,d\mathrm{vol} > 0$, on s'appuie sur le théorème d'Agmon, Douglis et Nirenberg qui garantit l'existence d'une (essentiellement) unique solution infiniment différentiable de l'équation $(2.12)_\delta$ pour des valeurs de δ suffisamment proches d'un point δ_1 de S dès que le noyau de la linéarisation $\mathcal{L}_{\delta_1}$ de l'équation $(2.12)_{\delta_1}$ en la solution f_{δ_1} est réduit aux constantes. Cette propriété découle ici de la majoration

$$\int_M (\mathcal{L}_{\delta_1}\varphi, \varphi)\, d\mathrm{vol} \geqslant \frac{3}{13}\,\delta^2 \int_M |\Delta\varphi|^2\, d\mathrm{vol} + \frac{7}{64}\,\delta \int_M \mathrm{scal}\ |d\varphi|^2\, d\mathrm{vol}\,,$$

que l'on dérive assez facilement de l'explicitation de la linéarisation $\mathcal{L}_{\delta_1}$ sous l'hypothèse que l'intégrale $\int_M (\sigma^2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2)\, d\mathrm{vol}$ est strictement positive. On peut d'ailleurs interpréter cette minoration comme une généralisation d'estimations spectrales pour l'opérateur de Paneitz dérivées antérieurement par M. Gursky (cf. [G2], et, pour aller au-delà, la discussion de la partie 3.4).

2.3.3. S est fermé. — De l'équation $(2.12)_\delta$ on déduit sans trop de difficulté l'estimation a priori $\int_M (\delta\,|\Delta f_\delta|^2 + |df_\delta|^4)\, d\mathrm{vol} \leqslant C_0$, valable pour toute solution f_δ de $(2.12)_\delta$ sous la normalisation $\int_M f_\delta\, d\mathrm{vol} = 0$. C'est suffisant pour assurer la compacité faible d'une suite de solutions $f_{\delta_k}, \delta_k \in S$, $\delta_k \underset{k\to+\infty}{\to} \delta$, et donc l'existence d'une solution faible, f_δ, dans $L^{2,2}(M)$.

Pour ce qui est de la régularité de f_δ, nous pourrons répéter l'argument utilisé pour établir celle de f_δ, $\delta > 2/3$, dès que nous disposerons de la majoration

$$\int_{B(P,r)} \left(|\Delta f|^2 + |df|^4\right)\, d\mathrm{vol} \leqslant C_1 \int_{B(P,r)} \left(|\Delta h|^2 + |dh|^4\right)\, d\mathrm{vol} + C_2 r^2,$$

où h représente comme précédemment le prolongement biharmonique de f à la boule $B(P,\, r)$, et où les constantes $C_i, i \in \{1, 2\}$, ne dépendent que de (M, g).

Cette estimation peut être déduite de la contraction de l'équation $(2.12)_\delta$ contre la différence $f - h$, en procédant aux majorations idoines dans l'expression obtenue ; on trouvera les détails dans la quatrième partie de [CGY2], en particulier dans la preuve du *Lemma 4.4*.

Il reste, pour conclure, à établir que la courbure scalaire de $e^{2f_\delta} g$ est strictement positive. Puisque $\delta < 1$, on ne peut plus invoquer le principe du maximum de M. Gursky pour le laplacien conforme, utilisé en 2.3.1 pour le cas $\delta = 1$. On vérifie néanmoins facilement que $\mathrm{scal}\,(e^{2f_\delta} g)$ est positif ou nul : la fonction f_δ étant par construction une limite faible au sens $L^{2,2}$ de fonctions f_{δ_k}, $\delta_k \in S$, et la courbure scalaire dans une classe conforme étant donnée par l'identité (cf. (2.7))

$$-\Delta_g f_{\delta_k} + |df_{\delta_k}|_g^2 + \frac{1}{6}\,\mathrm{scal}\,(e^{2f_{\delta_k}} g)\, e^{2f_{\delta_k}} = \frac{1}{6}\,\mathrm{scal}\,(g), \tag{2.13}$$

la limite f_δ satisfait l'inéquation différentielle : $-\Delta f_\delta + |df_\delta|^2 \leqslant 1/6\ \mathrm{scal}\,(g)$; nous en déduisons la positivité annoncée : $\mathrm{scal}\,(e^{2f_\delta} g) = e^{-2f_\delta}\,(\mathrm{scal}\,(g) + 6\,\Delta f_\delta - 6\,|df_\delta|^2) \geqslant 0$. La limite f_δ satisfaisant par ailleurs l'équation $(2.12)_\delta$, notons la minoration $\delta\,\Delta\,\mathrm{scal} = -8\,\gamma_0\,|\eta|^2 + \alpha|W|^2 + 2\,|\mathrm{ric}_0|^2 - \mathrm{scal}^2/6 > -\mathrm{scal}^2/6$; le principe du maximum (ordinaire) appliqué à cette inéquation différentielle démontre alors que la courbure scalaire de la métrique limite, $e^{2f_\delta}g$, est partout strictement positive sur M.

2.4. L'équation : $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2 + \gamma_0\,|\eta|^2 = 0$

Sous l'hypothèse $\int_M (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2)\,d\mathrm{vol} > 0$, nous disposons à ce point de solutions infiniment différentiables de l'équation $(2.12)_\delta$ pour tout δ strictement positif. Nous cherchons dans cette partie à résoudre l'équation $(2.12)_{\delta=0}$ en établissant des estimations a priori *uniformes en* δ des solutions f_δ des équations $(2.12)_\delta$ dans une norme suffisamment forte pour pouvoir ensuite passer à la limite $\delta \to 0$ dans l'équation $(2.12)_\delta$. Nous verrons qu'il semble difficile de faire mieux que $L^{2,5}$, ce qui, au vu de la non-linéarité de l'équation considérée, est insuffisant. Nous ne pourrons conclure qu'au prix d'une ultime régularisation par un flot parabolique, discutée en (2.4.3).

2.4.1. Estimation a priori $L^{2,3}$. — Les arguments développés dans la preuve du *Theorem 5.1* de [CGY2] permettent de démontrer, sous l'hypothèse $\int_M (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2)\,d\mathrm{vol} > 0$, $\alpha \geqslant 0$, l'estimation a priori, uniforme en $\delta \in (0, \delta_0)$, δ_0 assez petit,

$$\int_M |\mathrm{Hess}\, f_\delta|_g^3\, d\mathrm{vol}(g) + \int_M |df_\delta|_g^{12}\, d\mathrm{vol}(g) < C\ . \tag{2.14}$$

Ceci peut sembler mesquin, mais si, pour cette majoration, le passage du cas particulier $\alpha = 0$, objet de [CGY2], au cas général est aisé dès que l'on a remarqué que, comme opérateur différentiel, $f \mapsto |W|^2(e^{2f}g)$ est du même type que $f \mapsto |\eta|^2(e^{2f}g)$, tous les deux étant des covariants conformes de même poids -4, la démonstration du cas particulier n'en requiert pas moins de trente pages d'estimations intégrales ingénieuses, et difficiles à résumer. On y retrouve des idées « classiques » conduisant aux estimations C^2 pour les équations de Monge-Ampère, bien que le passage à une équation du quatrième degré interdise dans notre cas le recours systématique au principe du maximum et force celui à des estimations *« en moyenne »*. Au cœur de cette discussion on trouve la minoration suivante, valable sous la même hypothèse dès que δ est assez petit :

$$\int_M \Big(\frac{\mathrm{scal}}{6}\Big)^3 d\mathrm{vol} \leqslant (1 + C_1\delta) \int_M |df_\delta|^6 d\mathrm{vol} + C_2 \int_M \mathrm{scal}^2 d\mathrm{vol} + C_3\ . \tag{2.15}$$

Pour comprendre cet énoncé, notons que le *tenseur gravitationnel* $G := -\mathrm{ric} + \frac{\mathrm{scal}}{2} g$ étant de divergence nulle – un corollaire immédiat et classique de la seconde identité de Bianchi – et M sans bord, pour toute fonction infiniment différentiable φ, $\int_M (G, \mathrm{Hess}\,\varphi)\,d\mathrm{vol} = 0$. Appliquée à la courbure scalaire, $\varphi = \mathrm{scal}$, cette identité s'écrit alors, en utilisant l'équation $(2.12)_\delta$ et sa dérivée

$$\int_M (6\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ric}_0^3 + 1/12\,\mathrm{scal}^3 + \text{ordres inférieurs})\,d\mathrm{vol} \leqslant \int_M (G, \mathrm{Hess}\,\mathrm{scal})\; d\mathrm{vol} \leqslant 0\ ;$$

en l'appliquant à $\varphi = |df_\delta|^2$, elle devient

$$-\frac{1}{12}\int_M (-6\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ric}_0^3 + \frac{1}{12}\,\mathrm{scal}^3 - 6\,\mathrm{scal}\,|df_\delta|^4 + \text{ordres inf.})\,d\mathrm{vol} \leqslant \int_M \left(G, \mathrm{Hess}\,|df_\delta|^2\right)\,d\mathrm{vol} \leqslant 0\ .$$

Une combinaison linéaire adéquate de ces deux inégalités donne la majoration

$$\int_M \left(\frac{\mathrm{scal}}{6}\right)^3 d\mathrm{vol} \leqslant \int_M \left(\frac{\mathrm{scal}}{6}\,|df_\delta|^4 + \text{ordres inférieurs}\right) d\mathrm{vol},$$

qui « ressemble » à la majoration annoncée (2.15), dont on peut démontrer qu'elle s'en déduit.

Les étapes suivantes s'écrivent

$$\int_M |\mathrm{Hess} f_\delta|^2 |df_\delta|^2\,d\mathrm{vol} \leqslant C\int_M \left(\delta\,|df_\delta| + \mathrm{scal}^2 + 1\right)\,d\mathrm{vol}\ ;$$

et

$$\int_M |df_\delta|^{12} d\mathrm{vol} \leqslant C\left(\int_M |df_\delta|^6 d\mathrm{vol} + 1\right)^4\ .$$

Un important corollaire de la majoration a priori $L^{2,3}$ (2.14) et de sa démonstration que nous venons seulement d'esquisser assure la majoration suivante

$$\delta\int_{(M,\,e^{2f_\delta}g)} \left(\frac{\Delta\mathrm{scal}}{\mathrm{scal}}\right)^2\,d\mathrm{vol} \leqslant C\ . \tag{2.16}$$

Pour l'établir, il est important de disposer d'un minorant uniforme en δ de la courbure scalaire des métriques $e^{2f_\delta}g$: par définition de l'ensemble S, $\mathrm{scal}\,(e^{2f_\delta}g) > 0$, et il suffit de minorer scal^2. En un minimum de la courbure scalaire, l'équation $(2.12)_\delta$ entraîne la minoration : $0 \geqslant \delta\,\Delta\,\mathrm{scal} \geqslant -8\,\gamma_0\,|\eta|^2 - 1/6\,\mathrm{scal}^2_{\min}$; on a alors

$$\mathrm{scal}^2_{\min}(e^{2f_\delta}g) \geqslant -48\,\gamma_0\,\min(\,e^{-4f_\delta}|\eta|^2_g\,) \geqslant C > 0, \tag{2.17}$$

puisque les fonctions f_δ sont bornées uniformément en norme $L^{2,3}$, et donc en norme C^β, $\beta < 2/3$, d'après les inclusions de Sobolev classiques.

2.4.2. Estimation a priori $L^{2,s}, s > 5$. — La dégénérescence de l'équation $(2.12)_\delta$ en $\delta = 0$ est forte : c'est le terme différentiel d'ordre principal $\Delta\,\mathrm{scal}$ qui disparaît. Ceci explique en partie le prix à payer pour dériver des bornes a priori sur les solutions qui soient uniformes au voisinage de $\delta = 0$. Dans ce paragraphe, nous expliquons comment passer de la borne $L^{2,3}$ discutée ci-dessus à une borne $L^{2,s}$, pour tout $s < 5$.

La démarche est proche de celle que nous venons de présenter et les détails techniques plus lourds encore (dix nouvelles pages d'estimations intégrales sauvages). On applique l'identité $\int_M (G, \operatorname{Hess}\varphi)\, d\mathrm{vol} = 0$ aux puissances $1+p$, $p>0$, de la courbure scalaire et pour cela on introduit

$$I_p := \int_M \big(G, \operatorname{Hess} \mathrm{scal}^{\,p+1}\big)\, d\mathrm{vol}\ .$$

Pour préciser l'estimation obtenue en l'appliquant à $|df_\delta|^2$ nous introduisons symétriquement

$$II_p := \frac{1}{2}\int_M \big(G, D(\mathrm{scal}^{\,p} d|df_\delta|^2)\big)\, d\mathrm{vol}\ ,$$

de telle sorte que, comme précédemment dans le cas $p=0$, nous avons $I_p = II_p = 0$. I_p se laisse alors décomposer en la somme $I'_p + I''_p$, où

$$I'_p \ := (p+1)\int_M \mathrm{scal}^{\,p}(G, \operatorname{Hess} \mathrm{scal}\,)\, d\mathrm{vol}\ ,$$

et

$$I''_p \ := p(p+1)\int_M \mathrm{scal}^{\,p-1} G(d\mathrm{scal}^{\,\sharp}, d\mathrm{scal}^{\,\sharp})\, d\mathrm{vol}\ ;$$

nous écrivons de même $II_p = II'_p + II''_p$, où

$$II'_p \ := \frac{p}{2}\int_M \mathrm{scal}^{\,p-1} G(d\mathrm{scal}^{\,\sharp}, (d|df_\delta|^2)^\sharp)\, d\mathrm{vol}\ ,$$

et

$$II''_p \ := \frac{1}{2}\int_M \mathrm{scal}^{\,p}\big(G,\ \operatorname{Hess}|df_\delta|^2\big)\, d\mathrm{vol}\ .$$

En reportant l'équation $(2.12)_\delta$ dans l'expression de I'_p, on vérifie alors facilement, dès que γ_0 et γ_1 sont négatifs, la minoration suivante

$$\begin{aligned} I'_p \geqslant I'_{p,\delta} + (p+1)\int_M &(6\,\mathrm{scal}^{\,p}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ric}_0^3 + \mathrm{scal}^{\,p+1}\,|\mathrm{ric}_0|^2)\, d\mathrm{vol} \\ &- C\int_M \mathrm{scal}^{\,p+2} d\mathrm{vol} - C\int_M \mathrm{scal}^{\,p}\,\big(|\,d|\eta|\,|^2 + |\,d|W|\,|^2\big)\ d\mathrm{vol}\ , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I'_{p,\delta} := \frac{3}{4}\,\delta\,(p+1)\int_M \Big(&\Delta\,\mathrm{scal}^{\,p}\,\Delta\,\mathrm{scal}\ +\ 2\,\mathrm{scal}^{\,p-1}\,(\Delta\,\mathrm{scal}\,)^2 \\ &- 2p\,\mathrm{scal}^{\,p-2}|d\mathrm{scal}\,|^2\Delta\,\mathrm{scal}\Big)\, d\mathrm{vol}\ . \end{aligned}$$

(Rappelons que $\gamma_1 = -\alpha/8$ est négatif ou nul par hypothèse et que l'identité (2.11) et l'hypothèse $\int_M (4\sigma_2(A) - |W|^2)\, d\mathrm{vol} > 0$ entraînent que γ_0 est lui aussi négatif.)

Une application directe de l'inégalité de Hölder donne alors

$$\int_M \mathrm{scal}^{\,p}|\,d|\eta|\,|^2 d\mathrm{vol} \leqslant \left(\int_M \mathrm{scal}^{\,p+2} d\mathrm{vol}\right)^{p/p+2}\left(\int_M |\,d|\eta|\,|^{p+2} d\mathrm{vol}\right)^{2/p+2}.$$

De l'identité $|\eta| = e^{-2f_\delta}|\eta|_g$ nous déduisons, les fonctions f_δ étant bornées dans $L^{2,3}(M) \subset L^{1,12}(M)$ uniformément en δ, que les intégrales $(\int |\, d|\eta|\, |_g^{p+2} d\mathrm{vol}_g)^{2/p+2}$ le sont aussi dès que $p \leqslant 10$. Le même argument vaut évidemment pour $|W|$ et $\int_M \mathrm{scal}^p(|\, d|\eta|\, |^2 + |d|W|\, |^2)\, d\mathrm{vol}$ est donc majoré par $C\, (\int_M \mathrm{scal}^{p+2} d\mathrm{vol} + 1)$ uniformément en δ. La minoration précédente de I'_p s'écrit maintenant :

$$I'_p \geqslant I'_{p,\delta} + (p+1)\int_M (6\,\mathrm{scal}^p\, \mathrm{tr}\ \mathrm{ric}_0^3 + \mathrm{scal}^{p+1}\, |\mathrm{ric}_0|^2)\, d\mathrm{vol} - C\int_M \mathrm{scal}^{p+2}\, d\mathrm{vol} - C\ .$$

Pour II'_p, nous utilisons l'équation $(2.12)_\delta$ pour minorer le tenseur gravitationnel : la courbure scalaire de $e^{2f_\delta}g$ étant strictement positive,

$$G \geqslant 3\frac{\sigma_2(A)}{\mathrm{scal}} = \frac{3}{\mathrm{scal}}\big(-\frac{\delta}{4}\Delta\,\mathrm{scal}\ - 2\,\gamma_0\,|\eta|^2 + \frac{\alpha}{4}\,|W|^2\big)\ . \tag{2.18}$$

On établit alors sans trop de mal, pour tout $\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, et tout $\eta,\ \eta > 0$, la minoration

$$\begin{aligned} II'_p \geqslant -\frac{p}{2}\varepsilon^2 &\int_M \mathrm{scal}^{p-1} G(d\mathrm{scal}^\sharp, d\mathrm{scal}^\sharp)\, d\mathrm{vol} \\ &- C\,\delta\,\varepsilon^2\,\eta\int_M \mathrm{scal}^{p-1}(\Delta\mathrm{scal})^2\, d\mathrm{vol} - C\delta\,\varepsilon^2\eta^{-1}\int_M \mathrm{scal}^{p-3}|d\mathrm{scal}|^4 d\mathrm{vol} \\ &\qquad - C\,\varepsilon^{-6}\eta^{-1}\Big(\int_M \mathrm{scal}^{p+3} d\mathrm{vol}\Big)^{\frac{p+1}{p+3}} - Cp\,\varepsilon^{-2}\Big(\int_M \mathrm{scal}^{p+3} d\mathrm{vol}\Big)^{\frac{p+2}{p+3}}\ . \end{aligned}$$

Concernant II''_p, il faut un peu de ténacité pour dériver la majoration suivante, valable pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} II''_p \geqslant &\int_M \frac{\mathrm{scal}^p}{4}\left(-\mathrm{tr}\ \mathrm{ric}_0^3 + \frac{\mathrm{scal}^3}{72}\right) d\mathrm{vol} \\ &- C\,\gamma\,\delta\int_M \mathrm{scal}^{p-1}(\Delta\,\mathrm{scal})^2\, d\mathrm{vol} - C\,\gamma\,\delta\int \mathrm{scal}^{p-3}\,|d\mathrm{scal}|^4\, d\mathrm{vol} \\ &\qquad - C\,\gamma^{-1}\,\delta\int_M \mathrm{scal}^{p+3}\, d\mathrm{vol} - C\int_M \mathrm{scal}^{p+2}\, d\mathrm{vol} - C\ . \end{aligned}$$

Comme dans le cas $p = 0$ du paragraphe précédent, nous considérons la combinaison $I_p + 24\,(p+1)\,II_p$, qui annule le coefficient du terme $\int_M \mathrm{scal}^p\, \mathrm{tr}\ \mathrm{ric}_0^3\, d\mathrm{vol}$, apparaissant dans l'expression de la minoration de I'_p avec le poids $6\,(p+1)$ et dans celle de II''_p avec le poids $-1/4$.

De l'identité riemannienne universelle

$$3p\int_M \mathrm{scal}^{\,p-2}|d\mathrm{scal}\,|^2\Delta\,\mathrm{scal}\;d\mathrm{vol} = -4\int_M \mathrm{scal}^{\,p-1}|\mathrm{Hess}_0\,\mathrm{scal}\,|^2\,d\mathrm{vol}$$
$$+\,3\int_M \mathrm{scal}^{\,p-1}(\Delta\,\mathrm{scal}\,)^2 d\mathrm{vol} + 2(p-2)\int_M \mathrm{scal}^{\,p-3}|d\mathrm{scal}\,|^4\,d\mathrm{vol}$$
$$-\,4(p-2)\int_M \mathrm{scal}^{\,p-2}\mathrm{Hess}_0(\mathrm{scal}\,)\left(d\mathrm{scal}^{\,\sharp}, d\mathrm{scal}^{\,\sharp}\right)\,d\mathrm{vol}$$
$$-\,4\int_M \mathrm{ric}\left(d\mathrm{scal}^{\,\sharp}, d\mathrm{scal}^{\,\sharp}\right)\,d\mathrm{vol}\;,$$

et de l'équation $(2.12)_\delta$, en rappelant de plus que γ_0 est négatif d'après l'identité (2.11) et l'hypothèse $\int_M(\sigma_2(A)-\frac{\alpha}{4}\,|W|^2)\,d\mathrm{vol}>0$, nous déduisons la majoration suivante, valable pour tout réel $p,\ p<2$:

$$3(p-\delta)\int_M \mathrm{scal}^{\,p-2}\,|d\mathrm{scal}\,|^2\,\Delta\,\mathrm{scal}\;d\mathrm{vol}$$
$$\leqslant 3\int_M \mathrm{scal}^{\,p-1}(\Delta\,\mathrm{scal}\,)^2\,d\mathrm{vol} - (2-p)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}p\right)\int_M \mathrm{scal}^{\,p-3}\,|d\mathrm{scal}\,|^4\,d\mathrm{vol}\;.$$

(C'est ici qu'apparaît de façon essentielle la restriction $p<2$, que l'on voit mal comment relâcher). En invoquant à nouveau la minoration de G par $-\frac{3\delta}{4}\frac{\Delta\,\mathrm{scal}}{\mathrm{scal}}$ (cf. (2.18)), nous démontrons par un choix adéquat des paramètres η et ε dans les relations précédentes la minoration suivante, valable pour tout δ assez petit,

$$I'_{p,\delta}+I''_p+24\,(p+1)\,II'_p$$
$$\geqslant C\,\delta\int_M \mathrm{scal}^{\,p-1}(\Delta\,\mathrm{scal}\,)^2\,d\mathrm{vol} + C\,\delta\int_M \mathrm{scal}^{\,p-3}|d\mathrm{scal}\,|^4\,d\mathrm{vol}$$
$$-\,C\left(\int_M \mathrm{scal}^{\,p+3}\,d\mathrm{vol}\right)^{\frac{p+2}{p+3}} - C\;.$$

Choisissant alors γ suffisamment petit dans l'expression précédente de la minoration de II''_p, nous établissons

$$I_p+24(p+1)II_p$$
$$\geqslant \left(\frac{p+1}{6}-C\delta\right)\int_M \mathrm{scal}^{\,p+3}d\mathrm{vol} - C\left(\int_M \mathrm{scal}^{\,p+3}d\mathrm{vol}\right)^{\frac{p+2}{p+3}} - C\int_M \mathrm{scal}^{\,p+2}d\mathrm{vol} - C\;,$$

et donc, en majorant $\int_M \mathrm{scal}^{\,p+2}d\mathrm{vol}$ par $C(g)\,(\int_M \mathrm{scal}^{\,p+3}d\mathrm{vol})^{\frac{p+2}{p+3}}$, la majoration recherchée de $\int \mathrm{scal}^{\,p+3}d\mathrm{vol}$, puisque nous obtenons :

$$\left(\int \mathrm{scal}^{\,p+3}d\mathrm{vol}\right)^{\frac{p+2}{p+3}} \geqslant C_1\int \mathrm{scal}^{\,p+3}d\mathrm{vol} - C_2\,.$$

En rappelant que les solutions f_δ de la régularisation sont uniformément bornées par l'estimation $L^{2,3}$ du paragraphe précédent, nous déduisons alors de l'expression (2.7) de la courbure scalaire dans une classe conforme une majoration uniforme de $\Delta_g f_\delta$ dans les normes L^{p+3}, pour tout réel p, $0 \leqslant p < 2$, et donc la proposition suivante :

Proposition 2.4. — *Pour tout $s \in [0,5)$, les fonctions f_δ, solutions de moyenne nulle des équations régularisées* $(2.12)_\delta$, $0 < \delta < \delta_0$, *sont uniformément bornées en norme $L^{2,s}$. Elles le sont donc aussi pour les normes höldériennes $C^{1,\beta}$, $\beta < 1/5$.*

2.4.3. Flot de Yamabe. — La restriction $p < 2$, i.e. $s < 5$, est intervenue crucialement dans les majorations a priori précédente, et la borne en norme $L^{2,\, s<5}$ à laquelle elle conduit est pourtant encore trop faible pour permettre de passer à la limite $\delta = 0$ dans les équations $(2.12)_\delta$. Il faut une idée...

C'est l'endroit où rappeler la majoration L^2 uniforme (2.16) que nous pouvons écrire, en invoquant $(2.12)_\delta$ et en posant $\xi(f_\delta) := (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2 + 2\gamma_0|\eta|^2)(e^{2f_\delta}g)/\mathrm{scal}\,(e^{2f_\delta}g)$,

$$\int_{(M,\, e^{2f_\delta} g)} \xi^2(f_\delta)\, d\mathrm{vol} = \frac{\delta^2}{16} \int_{(M,\, e^{2f_\delta} g)} \Big(\frac{\Delta\, \mathrm{scal}}{\mathrm{scal}}\Big)^2 d\mathrm{vol} \leqslant C\delta\ . \tag{2.19}$$

Il reste à invoquer l'outil régularisant universel – un *flot parabolique* – pour passer d'une métrique $e^{2f_\delta}g$ satisfaisant $\|\xi(e^{2f_\delta})\|^2_{L^2} < C\delta$ à une métrique $h_\delta = e^{2\widehat{f}_\delta}g$ satisfaisant partout sur la variété M la majoration $|\xi(e^{2\widehat{f}_\delta})| < C(\delta)$, pour une fonction $C(\delta)$ tendant vers zéro avec δ ; nous en déduirons que le polynôme $(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2)(e^{2\widehat{f}_\delta}g)$ est strictement positif partout sur M dès que le paramètre δ est assez petit. Nous détaillons ces arguments dans ce paragraphe.

Théorème 2.5. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension 4 de courbure scalaire strictement positive et telle que $\int_M (4\sigma_2(A) - |W|^2)\, d\mathrm{vol} > 0$. Pour tout δ suffisamment petit, il existe dans la classe conforme de toute solution $e^{2f_\delta}g$ de courbure scalaire positive de l'équation régularisée* $(2.12)_\delta$ *une métrique* (*infiniment différentiable*) *h_δ telle que le polynôme en la courbure de Ricci $\sigma_2(A(h)) - \alpha/4\,|W(h)|^2$ est partout strictement positif.*

L'intégrabilité local du champ de vecteurs

$$X(h) = -\frac{\mathrm{scal}}{3}\, h \tag{2.20}$$

est un résultat classique (« flot de Yamabe ») ; les propriétés régularisantes de ce flot qui nous seront utiles sont résumées dans l'énoncé suivant, dont nous n'utiliserons que la version de dimension 4.

Proposition 2.6 ([Y]). — *Soient M une variété compacte sans bord et $h(t), t \in [0,T]$, où T est un réel strictement positif, une famille de métriques sur M dont les constantes de Sobolev sont uniformément majorées i.e. telles que toute fonction infiniment différentiable φ sur M satisfait la majoration*

$$\|\varphi\|_{L^{2n/n-2}(M,\, h(t))} \leqslant C\, \|\varphi\|_{L^{1,2}(M,\, h(t))}, \tag{2.21}$$

où la constante C est indépendante de φ et de $t \in [0,T]$. Pour toute fonction positive ou nulle sur $M \times [0,T]$, ρ, satisfaisant l'inéquation différentielle $\frac{d}{dt} \log \mathrm{dvol}(h(t)) \leqslant \rho$, et pour tous réels $p_0, p, q,\ p_0 > 1,\ p \geqslant p_0,$ et $q > n$, toute solution de l'inéquation différentielle $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta\varphi \leqslant \rho\,\varphi$ vérifie les majorations a priori

1) $$\sup_M |\varphi(t,.)| \leqslant C_1 e^{c_1 t} t^{-n/2p_0} \,\|\varphi(0,.)\|_{L^{p_0}} \ ,$$

2) $$\forall\, t \in [0,T]\ ,\quad \frac{d}{dt}\int_M \varphi^p \mathrm{dvol} + \int_M |d\varphi^{\frac{p}{2}}|^2 \mathrm{dvol} \leqslant C_2 p^{\frac{2n}{q-n}} \int_M \varphi^p \mathrm{dvol}\ ,$$

où la constante C_2 dépend uniquement de n, q, p_0 et C, la constante C_1 dépendant de plus de la norme $\sup_{[0,T]} \|\rho\|_{L^{4/2}(M,\,h_t)}$.

Nous appliquerons cette proposition aux courbes intégrales du « flot de Yamabe » issues des métriques $e^{2f_\delta} g$; notons pour cela que le « flot de Yamabe » préserve – par définition – les classes conformes (cf. (2.21)) et que toutes les métriques que nous considérons sont donc conformes à la métrique de référence, g.

Par définition de l'invariant de Yamabe nous avons la relation suivante
$$\mu(g)\int_M \varphi^4 \mathrm{dvol}(h) \leqslant \int_M |d\varphi|^2\, \mathrm{dvol}(h) + \int_M \mathrm{scal}\,(h)\,\varphi^2\,\mathrm{dvol}(h)\ ;$$
en nous restreignant à un intervalle $[0, T_0\,(h_0 = e^{2f_\delta} g)]$ sur lequel $\int_M \mathrm{scal}^{\,s}(h_t)\mathrm{dvol}(h_t) \leqslant 2\int_M \mathrm{scal}^{\,s}(h_0)\,\mathrm{dvol}(h_0)$, en rappelant la borne uniforme sur les intégrales $\int_M \mathrm{scal}^{\,s}(h_0)\,\mathrm{dvol}(h_0)$, $h_0 = e^{2f_\delta} g$, établie à la proposition 2.4, et en supposant $s > 2$, nous en déduisons la majoration
$$\begin{aligned}\mu(g)\,&\left(\int_M \varphi^4 \mathrm{dvol}(h)\right)^{1/2}\\ &\leqslant C(g)\int_M \varphi^2 \mathrm{dvol}(h) + \frac{1}{2}\,\mu(g)\,\left(\int_M \varphi^4 \mathrm{dvol}(h)\right)^{1/2} + 6\int_M |d\varphi|^2 \mathrm{dvol}(h)\ ,\end{aligned}$$
c'est-à-dire la majoration uniforme des constantes de Sobolev (2.21), requise par l'énoncé de la proposition 2.6.

2.4.3.1. La courbure scalaire. — Une première application de la proposition 2.6 avec $\rho = \varphi = \mathrm{scal}\,, p = p_0 = s$ et $q = 2s > 4$ établit l'inéquation différentielle
$$\frac{d}{dt}\int_M \mathrm{scal}^{\,s}\,\mathrm{dvol} \leqslant C(g,s)\int_M \mathrm{scal}^{\,s}\,\mathrm{dvol}\ ,$$
et donc la majoration $\int_M \mathrm{scal}^{\,s}(h_t)\,\mathrm{dvol}(h_t) \leqslant e^{Ct}\int_M \mathrm{scal}^{\,s}(h_0)\,\mathrm{dvol}(h_0)$. D'après les estimations a priori du paragraphe 2.4.2 nous disposons, pour $s < 5$, d'une borne uniforme sur les intégrales $\int_{(M,\,e^{2f_\delta} g)} \mathrm{scal}^{\,s}\,\mathrm{dvol}$, et donc, par la majoration précédente, d'un minorant pour $T_0\,(e^{2f_\delta} g)$ ne dépendant que de s et de g – et uniforme, en particulier, en δ, $\delta \in (0,1]$ –, que nous noterons $T_1,\ T_1 > 0$.

L'autre conclusion de la proposition 2.6 nous enseigne alors que la courbure scalaire admet la majoration

$$\mathrm{scal} \leqslant C(s,g)\, t^{-2/s} \ , \quad t \in [0, T_1] \ , \tag{2.22}$$

tandis que le principe du maximum parabolique appliqué à l'équation régissant l'évolution de la courbure scalaire le long des courbes intégrales,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{scal} + \Delta\,\mathrm{scal} = \frac{1}{3}\mathrm{scal}^3 \ , \tag{2.23}$$

garantit que le minimum de la courbure scalaire le long du « flot de Yamabe » est une fonction monotone croissante. De la minoration uniforme (2.17) des courbures scalaires des métriques $e^{2f_\delta} g$ nous déduisons alors l'existence d'un minorant uniforme – ne dépendant que de g – des courbures scalaires des métriques h_t , $t \in [0, T_1]$, le long des courbes intégrales issues des métriques $e^{2f_\delta} g$, $\delta \in (0,1]$,

$$\mathrm{scal}\,(h_t) \geqslant C > 0 \ . \tag{2.24}$$

Remarquons finalement qu'en écrivant une courbe intégrale sous la forme $h(t) = e^{2x(t)} h(0)$ l'équation du flot devient

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\,\frac{1}{6}\,\mathrm{scal}\,(h_t)\,, \qquad x(0, \ .) = 0 \ . \tag{2.25}$$

De la borne uniforme (2.22) pour la courbure scalaire, nous déduisons immédiatement la borne uniforme suivante pour le facteur conforme $x(t)$:

$$\sup_M |x| \leqslant C(s,g)\ T_1(s,g)^{1-2/s} \leqslant C_1(s,g) \ . \tag{2.26}$$

2.4.3.2. La courbure de Ricci. — L'équation régissant la courbure de Ricci le long du « flot de Yamabe » s'écrit

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)\,\mathrm{ric} = -2\,\mathrm{ric}\circ\mathrm{ric} + \frac{1}{2}\,|\mathrm{ric}|^2 g + \frac{2}{3}\,\mathrm{scal}\,\mathrm{ric} - \frac{1}{6}\,\mathrm{scal}^2 g + 2\,W(\mathrm{ric}) + 2\,B \ , \tag{2.27}$$

où $B := -\,\mathrm{tr}_{13}\mathrm{tr}_{25}\, D^2 W - 1/2\, W(\mathrm{ric})$ représente le *tenseur de Bach*, un covariant conforme fondamental que nous retrouverons dans l'étude du cas limite comme gradient de la fonctionnelle $\|W\|^2_{L^2}$: notons simplement pour l'instant la relation $B(e^{2f} g) = e^{-2f} B(g)$. De l'inéquation différentielle immédiate

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)\,|\mathrm{ric}|^2 \leqslant -2\,|D\,\mathrm{ric}|^2 + C\,|\mathrm{ric}|^3 + 4\,|W|\,|\mathrm{ric}|^2 + 4\,|B|\,|\mathrm{ric}| \ ,$$

– où C représente une constante universelle –, de la covariance conforme des courbures de Weyl et de Bach, et de la borne uniforme sur les modules conformes (2.26) nous déduisons l'existence d'une constante $C_1 = C(g)$ telle que le long d'une courbe intégrale du « flot de Yamabe » issue d'une métrique $e^{2f_\delta} g$ solution de la régularisation $(2.12)_\delta$ nous avons la majoration différentielle uniforme

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)\,|\mathrm{ric}| \leqslant C_1 |\mathrm{ric}|^2 \ , \quad \forall\, t \in [0, T_1] \ .$$

Nous pouvons donc encore invoquer la proposition 2.6, avec cette fois $\varphi = \rho/C_1 = |\mathrm{ric}|$, $q = 2s > 4$, et $p = p_0 = s$, pour établir l'inéquation différentielle

$$\frac{d}{dt}\int_M |\mathrm{ric}|^s\, d\mathrm{vol} \leqslant C(s,g)\int_M |\mathrm{ric}|^s\, d\mathrm{vol}\ .$$

Elle s'intègre en la majoration $\int_M |\mathrm{ric}|^s\, d\mathrm{vol} \leqslant e^{ct}\int_M |\mathrm{ric}(h_0)|^s\, d\mathrm{vol}(h_0)$. Comme précédemment pour la courbure scalaire, nous en déduisons l'existence d'un minorant uniforme, $T_2 := T_2(s,g)$, $0 < T_2 \leqslant T_1$, de la longueur du plus grand intervalle sur lequel $\int_M |\mathrm{ric}|^s d\mathrm{vol} \leqslant 2\int_M |\mathrm{ric}(h_0)|^s d\mathrm{vol}(\mathrm{h}_0)$. Par ailleurs, la courbure de Ricci de la métrique $e^{2f_\delta}g$ étant donnée par l'identité

$$\mathrm{ric}(e^{2f}g) = \mathrm{ric}(g) - 2\,\mathrm{Hess}f - \Delta f\ g + 2\,df\otimes df - 2\,|df|^2 g\ , \tag{2.28}$$

nous déduisons de la borne uniforme $L^{2,s}$, $s < 5$, sur les solutions f_δ de l'équation régularisée l'existence d'un majorant uniforme des normes $\int_{(M,\, e^{2f_\delta}g)} |\mathrm{ric}|^s\, d\mathrm{vol}$; la majoration uniforme

$$\sup_M |\mathrm{ric}(h_t)| \leqslant C(g)\, t^{-2/s} \tag{2.29}$$

est alors un corollaire immédiat de celle-ci et du point 1) de la proposition 2.6.

2.4.3.3. Conclusion. — À ce point, et pour les raisons évoquées au début de cette partie 2.4, il est naturel d'essayer d'appliquer la proposition 2.6 à l'invariant ξ,

$$\xi(f) = \mathrm{scal}^{-1}\Big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2 + 2\,\gamma_0\,|\eta|^2\Big)\,(e^{2f}g). \tag{2.30}$$

Puisque c'est la positivité de ξ que nous cherchons à établir, il sera plus simple de travailler avec $\widehat{\xi} = \max\{-\xi, 0\}$. Nous devons alors vérifier les hypothèses de la proposition 2.6, et en particulier établir pour $\widehat{\xi}$ une inéquation différentielle de la forme $(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta)\,\widehat{\xi} < \rho\,\widehat{\xi}$, pour une solution ρ de l'inéquation différentielle $(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta)\log d\mathrm{vol} \leqslant \rho$.

Proposition 2.7. — *Pour tout $s \in (2,5)$, la fonction $\widehat{\xi}$ vérifie sur l'intervalle $[0, T_2(s,g)]$ l'inéquation différentielle $(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta)\,\widehat{\xi} \leqslant C(s,g)\,|\mathrm{ric}|\,(1+\widehat{\xi})$, où la constante $C(s,g)$ est en particulier indépendante de la condition initiale $e^{2f_\delta}g$, $\delta > 0$, du « flot de Yamabe ».*

Des équations d'évolution de la courbure scalaire (2.23), de la courbure de Ricci (2.27) et du facteur conforme (2.25) nous déduisons celle du produit $\xi\,\mathrm{scal}$:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)\,(\xi\,\mathrm{scal}\,) = \frac{2}{3}\,\xi\,\mathrm{scal}\, + |D\,\mathrm{ric}_0|^2 - \frac{1}{12}\,|d\mathrm{scal}\,|^2 + 2\,\mathrm{tr}\ \mathrm{ric}_0^3 + \frac{1}{3}\,|\mathrm{ric}_0|^2\,\mathrm{scal}\\ - 2\,W(\mathrm{ric}_0,\mathrm{ric}_0) + 2\,(B,\mathrm{ric}_0) + 2\,\gamma_0\,\Delta\,|\eta\,|^2 - \frac{\alpha}{4}\,\Delta\,|W|^2\ .\end{aligned}$$

On vérifie alors les quatre majorations élémentaires suivantes

$$\begin{aligned}(1)\qquad & |D\mathrm{ric}_0|^2 - \frac{1}{12}|d\mathrm{scal}\,|^2 \\ & \geqslant -\frac{2}{\mathrm{scal}}\,(d(\xi\,\mathrm{scal}\,),\, d\mathrm{scal}\,) + 2\xi\,\mathrm{scal}\left|\frac{d\mathrm{scal}}{\mathrm{scal}}\right|^2 + 4\gamma_0\big|d|\eta|\big|^2 - \frac{\alpha}{4}\,|d|W||^2\ ;\end{aligned}$$

$$(2)\qquad 2\gamma_0\Delta|\eta|^2 - \frac{\alpha}{4}\Delta|W|^2 + 4\gamma_0\,\big|d|\eta|\big|^2 - \frac{\alpha}{2}\big|d|W|^2\big|^2 \geqslant -C(g)\ ;$$

$$(3)\qquad \mathrm{scal}^{\,-1}\mathrm{tr}\,\mathrm{ric}_0^3 + \frac{1}{3}|\mathrm{ric}_0|^2 \geqslant \frac{8\,|\mathrm{ric}_0|^2\,\xi}{2\sqrt{3}\,|\mathrm{ric}_0| + \mathrm{scal}}\ ;$$

et, en invoquant la covariance conforme de W et de B, et la borne uniforme (2.26) sur la norme sup du facteur conforme,

$$(4)\qquad -2\,\mathrm{scal}^{\,-1}\,W(\mathrm{ric}_0,\mathrm{ric}_0) - 2\,\mathrm{scal}^{\,-1}\,(B,\mathrm{ric}_0) \geqslant C_1(g)\,\xi - C_2(g) - C_3(g)\,\mathrm{scal}\ .$$

Ces majorations sont uniformes en $\delta \in (0,\delta_0]$ et valables sur $[0, T_2(s,g)]$. Elles nous permettent de dériver de l'équation d'évolution de ξ l'inéquation différentielle suivante

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)\,\xi &\geqslant \frac{2}{\mathrm{scal}}\ \mathrm{tr}\ \mathrm{ric}_0^3 + \frac{1}{3}\,|\mathrm{ric}_0|^2 + \frac{1}{3}\,\xi\,\mathrm{scal}\, - 2\,W(\mathrm{ric}_0,\mathrm{ric}_0)\,\mathrm{scal}^{\,-1} \\ &\qquad\qquad - 2\,(B,\mathrm{ric}_0)\,\mathrm{scal}^{\,-1} - C(g) \\ &\geqslant \frac{8\,|\mathrm{ric}_0|^2}{2\sqrt{3}\,|\mathrm{ric}_0| + \mathrm{scal}}\,\xi + \Big(\frac{\mathrm{scal}}{3} + C_1(g)\Big)\,\xi - C_2(g) - C_3(g)\,\mathrm{scal}\ .\end{aligned}$$

En utilisant une fois encore la minoration uniforme de la courbure scalaire (2.24) : $|\mathrm{ric}| \geqslant \frac{\mathrm{scal}}{2} \geqslant C(g) > 0$, nous en déduisons que $\widehat{\xi} = \max(-\xi, 0)$ satisfait l'inéquation différentielle suivante

$$(2.31)\qquad \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)\,\widehat{\xi} \leqslant c_1(g)\,\Big((|\mathrm{ric}_0| + \mathrm{scal}\, + 1)\ \widehat{\xi} + 1\Big) \leqslant c_2(g)\,|\mathrm{ric}|\ \Big(\widehat{\xi} + 1\Big).$$

Pour nous débarrasser du terme constant de l'inéquation différentielle (2.31), il suffit de soustraire de $\widehat{\xi}$ une fonction adaptée de la variable réelle t, $\widehat{\xi}_0$: la fonction $\widehat{\xi}_0$ est par définition constante sur M et la différence $\tau = \widehat{\xi} - \widehat{\xi}_0$ vérifie l'inéquation

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)\,\tau \leqslant C(g)\,|\mathrm{ric}|\,\tau + C(g)\,|\mathrm{ric}|\,(1 + \widehat{\xi}_0) - \frac{d\widehat{\xi}_0}{dt}\ ,$$

où, d'après (2.29), $\sup_M |\mathrm{ric}| \leqslant C_1(g)\,t^{-2/s}$. Si l'on pose $\widehat{\xi}_0(t) = e^{C(s)t^{\frac{s-2}{s}}} - 1$, avec $C(s) = CC_1\,s/(s-2)$, la fonction τ satisfait l'inéquation différentielle $(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)\,\tau \leqslant C(g)\,|\,\mathrm{ric}\,|\,\tau$; on peut alors invoquer la proposition 2.6, en posant $\varphi = \tau$, $\rho = C(g)\,|\mathrm{ric}|$, $p_0 = 2$ et $q = 2s$, et conclure :

$$\sup_M |\tau| \leqslant \frac{C}{t}\,\|\,\tau(0,\,.)\,\|_{L^2} = \frac{C}{t}\|\,\widehat{\xi}(0,\,.)\,\|_{L^2} \leqslant \frac{C}{t}\|\,\xi\,\|_{L^2}\ .$$

De la majoration fondamentale (2.19) nous déduisons ensuite $\xi \geqslant -\widehat{\xi}_0(t) - \frac{C}{t}\sqrt{\delta}$, et donc, en rappelant la majoration (2.22) de la courbure scalaire,

$$\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2 \geqslant -2\,\gamma_0\,|\,\eta\,|^2 - C(s,g)\,(t^{1-4/s} + \sqrt{\delta}\,t^{-(1+2/s)})\,.$$

Ces deux dernières minorations sont valables pour tout t de l'intervalle $[0, T_2(s,g)]$. Remarquons encore, en rappelant la majoration (2.26) du facteur conforme, et la définition (2.10) de γ_0, la minoration

$$\begin{aligned}-\,2\,\gamma_0\,|\,\eta\,|^2 &\geqslant -2\,C_1(s,\,g)\,\gamma_0\,|\,\eta\,|_g^2\\ &\geqslant C_2(s,\,g)\int_{(M,\,g)}\Big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|\,W\,|^2\Big)\,\mathrm{dvol} = C_3(s,\,g,\,\alpha) > 0\,,\end{aligned}$$

de telle sorte que, finalement,

$$\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2 \geqslant c_1(s,g,\alpha) - c_2(s,g)\,t^{1-4/s} - c_3(s,g)\,\sqrt{\delta}\,t^{-(1+2/s)}\,,$$

où $c_1(s,g,\alpha)$ est strictement positif. Pour tout point s de l'intervalle ouvert $(4,\,5)$, il reste à considérer un point t_1 de $[0, T_2(s,g)]$ tel que $c_1 - c_2 t_1^{1-4/s}$ est minoré par $c_1/2$ pour conclure aisément à l'existence d'un réel strictement positif δ_0 tel que pour tout point δ de $(0, \delta_0]$ la courbe intégrale du flot de Yamabe issue de $e^{2f_\delta}g$ contient des métriques – par exemple $h(t_1)$ – pour lesquelles le polynôme $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2$ est, partout sur M, strictement positif. Ceci conclut la preuve du théorème 2.5 et donc celle du théorème 1.

3. UNE PREUVE PLUS SATISFAISANTE DU THÉORÈME 1

Oubliant les motivations initiales de Chang S.-Y. A., M. Gursky et Yang P. et la stratégie de preuve qui en découle, largement discutées dans le chapitre 2, nous proposons ici une preuve beaucoup plus courte du théorème 1. Dans des travaux contemporains de [CGY3] et [CGY2], Guan P. et Wang G. dérivent les estimations C^2 a priori des solutions des équations $\sigma_k(A(e^{2f}g)) = \varphi$, $k \in \{1, \cdots, n\}$, (cf. [GW]). Même si celles-ci s'avèrent insuffisantes pour notre propos, elles ouvrent la voie à une preuve directe du théorème 1, qui s'affranchit de la régularisation par le terme du quatrième ordre différentiel, $\delta\,\Delta\,\mathrm{scal}\,(e^{2f}g)$, et des délicates estimations a priori que requiert le passage à la limite $\delta = 0$. Dans la démonstration que nous donnons ici nous suivons l'approche qui a permis à M. Gursky et J. Viaclovsky de donner une preuve « simple » de [CGY2] (l'existence de métriques avec $\sigma_2(A) > 0$) et la généralisons à l'invariant $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2$, $\alpha \geqslant 0$.

3.1. Une nouvelle déformation de l'opérateur $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2$, $\alpha \geqslant 0$

Commençons par utiliser la métrique de référence, g – par opposition à $e^{2f}g$ – pour identifier formes quadratiques et endomorphismes symétriques partout dans la classe conforme de g, quelque chose comme la « jauge de Piola-Kirchoff » des mécaniciens, un outil souvent efficace pour simplifier l'apparence des équations, mais rarement déterminant : l'équation $(\sigma_2(A) - \alpha/4\,|W|^2)\,(e^{2f}g) = \varphi$ devient ainsi, en utilisant la covariance conforme de la courbure de Weyl, $\sigma_2(g^{-1}A(e^{2f}g)) - \alpha/4\,|W(g)|_g^2 = \varphi\, e^{4f}$. Pour des raisons techniques (cf. la discussion de l'ellipticité par exemple) on cherchera plutôt à résoudre l'équation

$$\sigma_2(g^{-1}A) - \frac{\alpha}{4}\,|W(g)|^2 = \psi\, e^{-4f},\ \psi > 0\ , \tag{3.1}$$

ce qui, dans la « jauge » initiale, reviendrait à résoudre l'équation $(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2)(e^{2f}g) = \psi\, e^{-8f}$, $\psi > 0$, tout aussi naturelle, dans notre perspective, que l'équation initiale $(\sigma_2(A) - \alpha/4\,|W|^2)\,(e^{2f}g) = \varphi$.

En suivant la démarche de M. Gursky et J. Viaclovsky dans leur étude du cas $\alpha = 0$ (voir [GV], et, pour une variante, [LL]), nous introduisons la déformation

$$A_x = \mathrm{ric} - \frac{x}{6}\,\mathrm{scal}\, g\,, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

De l'hypothèse $\mathrm{scal}(g) > 0$ nous déduisons que la forme bilinéaire symétrique A_x est définie positive et strictement minorée par $\sqrt{6\,\alpha}/12\ |W(g)|_g^2\ g$ pour x suffisamment petit (et négatif si nécessaire), de telle sorte que la fonction

$$\psi_g := \sigma_2(g^{-1}A_{x_0}) - \frac{\alpha}{4}\,|W(g)|_g^2$$

est strictement positive pour un tel choix du réel x_0. La fonction identiquement nulle fournit alors pour $x = x_0$ une solution de courbure scalaire strictement positive de l'équation

$$\sigma_2(g^{-1}A_x) - \frac{\alpha}{4}\,|W(g)|_g^2 = \psi_g\, e^{-4f},\ \alpha \geqslant 0\,. \tag{3.3}$$

Par un argument de connexité dans l'esprit de celui développé en 2.3 pour la résolution des régularisations considérées dans [CGY2] et connu en analyse sous l'appellation « *méthode de la continuité* », nous allons établir l'existence d'une solution de l'équation $(3.3)_x$ dans la classe conforme de la métrique g pour tout x, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \leqslant 1$, dès que l'invariant conforme

$$\mathcal{C}(g, x_1) := \int_M \Big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2\Big)\, d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,(1 - x_1)(2 - x_1)\,\mu^2(g) \tag{3.4}$$

est strictement positif. (Nous rappelons que nous représentons par

$$\mu(g) := \inf_{h \in [g]} \int_M \mathrm{scal}(h)\, d\mathrm{vol}(h)\ \Big/ \sqrt{\mathrm{vol}(h)} \tag{3.5}$$

l'invariant de Yamabe de la classe conforme de la métrique g.)

Posons pour cela $\mathcal{S} = \{x \in [x_0, x_1]$ *tel que l'équation* $(3.3)_x$ *admet une solution* f_x *de régularité* $C^{2,\beta}$, $\beta > 0$, *pour laquelle la courbure scalaire de la métrique* $e^{2f_x} g$ *est strictement positive*$\}$.

$\mathcal{S}$ n'est pas vide : nous avons déjà observé que $x_0 \in \mathcal{S}$.

3.2. Ellipticité et ouverture

L'ouverture de l'ensemble $\mathcal{S}$ ainsi défini résultera du théorème d'inversion locale appliqué à l'opérateur

$$\begin{pmatrix} C^{2,\beta} & \longrightarrow C^{\beta} \\ f & \longmapsto \sigma_2(g^{-1}A_x(e^{2f}g)) - \frac{\alpha}{4}\,|W_g|_g^2 - \psi_g\, e^{-4f} \end{pmatrix},$$

où $\beta \in (0, 1)$, dès que nous aurons vérifié que sa linéarisation en toute solution f_x, $x \in \mathcal{S}$, est inversible.

De l'expression des courbures scalaire (2.13) et de Ricci (2.28) dans une classe conforme nous déduisons sans mal l'identité

$$A_x(e^{2f}g) = A_x(g) + 2\Big(- \operatorname{Hess} f + \frac{(1-x)}{2}\Delta f\, g - df \otimes df + \frac{(2-x)}{2}\,|df|^2\, g\Big). \tag{3.6}$$

En remarquant que le gradient de la fonction $g \to \sigma_2(g^{-1}A(g))$ est donné par le tenseur

$$T(g^{-1}A_x) = \operatorname{tr}(g^{-1}A_x)1\mathrm{d} - g^{-1}A_x\ , \tag{3.7}$$

(une généralisation du tenseur gravitationnel, le cas $x = 1$, exprimée dans la jauge de Piola-Kirchoff), nous dérivons alors l'expression suivante pour la linéarisation $\mathcal{L}_{x,f}$ en une solution f de l'opérateur $\sigma_2(g^{-1}A_x(e^{2f}g)) - \frac{\alpha}{4}\,|W(g)|_g^2 - \psi(x)\, e^{-4f}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{x,f}(u) = &\Big(T(g^{-1}A(e^{2f}g)), -\operatorname{Hess} u + \Big(\frac{1-x}{2}\Big)\,\Delta u\, g + (2-x)\,(df, du)\, g - 2\, df \otimes du\Big)_g \\ &+ 4\,\psi\, e^{-4f} u\ .\end{aligned}$$

En introduisant la combinaison linéaire suivante de $T(a)$ et de sa trace,

$$T_x(a) := T(a) + \frac{1-x}{2}\operatorname{tr}(T(a))\, 1\mathrm{d}\ , \tag{3.8}$$

nous obtenons pour $\mathcal{L}_{x,f}(u)$ l'expression

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{x,f}(u) = \operatorname{tr}\big(T_x(g^{-1}A(e^{2f}g)) \circ (g^{-1}\operatorname{Hess} u)\big) - (2-x)\,(df, du)_g\, \operatorname{tr} T(g^{-1}A(e^{2f}g)) \\ + 2\, T(g^{-1}A(e^{2f}g))\,(df^{\sharp_g})\,(du) - 4\,\psi_g\, e^{-4f} u\ ,\end{aligned}$$

soit encore, en posant pour une métrique $h = e^{2f} g$

$$T(A(h)) = \operatorname{tr}_h A(h)\, h - A(h)\,, \quad \text{et} \quad T_x(A(h)) = T(A(h)) + \frac{1-x}{2}\operatorname{tr}_h T(A(h))\, h\ ,$$

l'expression équivalente

$$(3.9)\qquad -\mathcal{L}_{x,f}(u) = (T_x(A(e^{2f}g)), \mathrm{Hess}\, u)_g - (2-x)\,(df, du)_g\ \mathrm{tr}_g T(A(e^{2f}g)) \\ + 2\left(T(A(e^{2f}g)),\ df \otimes du\right)_g - 4\,\psi_g\, e^{-4f} u\ .$$

L'endomorphisme symétrique $T(g^{-1}A(e^{2f}g))$– et donc l'endomorphisme $T_x(g^{-1}A(e^{2f}g))$ pour $x \leqslant 1$ – est défini positif dès que $\sigma_2(g^{-1}A_x(e^{2f}g))$ et $\mathrm{tr}\, g^{-1}A_x(e^{2f}g) = (1 - 3/2\ \ x)\, e^{2f}\,\mathrm{scal}(e^{2f}g)$ sont strictement positifs. Ces deux conditions étant satisfaites pour une solution f_x, $x \in \mathcal{S}$, puisque

$$(3.10)\qquad \sigma_2(e^{2f_x}g) = \frac{\alpha}{4}\,|W(g)|_g^2 + \psi_g\, e^{-4f_x}\ ,$$

où $\alpha \geqslant 0$ par hypothèse, $-\mathcal{L}_{x,f}$ est elliptique ; le terme d'ordre différentiel zéro $-4\,\psi\, e^{-4f}$ étant strictement négatif, $\mathcal{L}_{x,f}$ est même inversible en toute solution f_x de régularité C^β : l'ensemble $\mathcal{S}$ est donc ouvert.

3.3. Estimations C^2 a priori à la Guan-Wang-Li-Li et fermeture

3.3.1. Minoration. — De l'inégalité $3\,(\mathrm{tr}\, a)^2 - 8\,\sigma_2(a) \geqslant 0$ valable pour tout endomorphisme symétrique positif ou nul, nous déduisons la majoration

$$8\,\psi\, e^{-4f_x} \leqslant 3\left(\mathrm{tr}_g\, A_x(e^{2f_x}g)\right)^2 = 3\left(\mathrm{tr}_g\, A_x(g) + (3-2x)\,\Delta f_x\right)^2\ ;$$

puisque $x \leqslant 1 < \frac{3}{2}$, en un minimum P de f_x, nous concluons : $8\,\psi\, e^{-4f_x} \leqslant 3\left(\mathrm{tr}\, A_x(g)\right)^2$, c'est-à-dire à une minoration de f_x ne dépendant que de g (et indépendante, en particulier, de x, $x \geqslant x_0$, puisque $\mathrm{tr}_g\, A_x(g) = \mathrm{scal}(g)\,(1 - \frac{2x}{3})$ par définition, et que la courbure scalaire $\mathrm{scal}(g)$ est strictement positive par hypothèse).

Comme souvent, l'inégalité de Harnack passe par une estimation a priori du gradient.

3.3.2. Gradient. — Dans ce paragraphe nous établissons que toute solution C^3 de l'équation $(3.3)_x$ vérifie l'estimation a priori

$$(3.11)\qquad \sup_M |df_x| < C\ ,$$

où la constante ne dépend que de la métrique g et d'un minorant uniforme de f_x, dont nous venons d'établir l'existence.

Ces estimations reprennent celles dérivées dans [GW] (pour le cas $x = 1$) et [LL] (pour l'extension au cas $x \leqslant 1$). En un maximum P de la fonction $\gamma = |df_x|^2$,

$$(3.12)\qquad d\gamma(P) = 2(Ddf_x, df_x)\,(P) = 0\,,$$

et le hessien de γ est négatif ou nul : $\mathrm{Hess}\,\gamma\,(P) = 2\,\mathrm{tr}_{34}(D^2 df_x \otimes df_x)\,(P) + 2\,\mathrm{tr}_{24}(Ddf_x \otimes Ddf_x)\,(P) \leqslant 0$. Nous avons déjà observé que la positivité stricte de $\mathrm{tr}\, A_x$ et $\sigma_2(A_x)$ implique que les opérateurs $T_x(A_x)$ sont, pour $x \leqslant 1$, définis positifs ; nous en déduisons que la fonction

$$(3.13)\qquad (T_x(A_x), Dd\gamma)_g = 2\left(T_x(A_x)\ ,\ \mathrm{tr}_{34}\,(D^2 df_x \otimes df_x) + \mathrm{tr}_{24}\,(Ddf_x \otimes Ddf_x)\right)_g$$

est négative ou nulle en P. Pour évaluer le terme d'ordre différentiel 3, nous dérivons l'équation (3.3) pour obtenir, à partir de l'identité (3.6) et de l'expression (3.7) du gradient,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\,{}^g_{14}\mathrm{tr}\,{}^g_{25}\, T(A_x(e^{2f_x}g)) \otimes \Big(D^2 df_x - \frac{(1-x)}{2}\, d\Delta f_x \otimes g\Big) \\
&\quad = \mathrm{tr}\,{}^g_{14}\mathrm{tr}\,{}^g_{25}\, T_x(A_x(e^{2f_x}g)) \otimes D^2 df_x \\
&\quad = \mathrm{tr}\,{}^g_{14}\mathrm{tr}\,{}^g_{25}\, T(A_x(e^{2f_x}g)) \otimes \big(D(A_x(g)) + 2\,\mathrm{Hess} f_x \otimes df_x \\
&\qquad - (2-x)\,\mathrm{tr}_{23}\,(Ddf_x \otimes df_x) \otimes g)\big) - \frac{\alpha}{4}\, d|W|^2 - e^{-4f_x}\, d\psi + 4\,\psi\, e^{-4f_x}\, df_x\ .
\end{aligned}$$

En contractant cette identité contre df et en remarquant qu'au maximum P de γ (cf. (3.12)) $\mathrm{tr}\,{}^g_{23}\,(Ddf \otimes df)\,(P) = 0$ et que, $\mathrm{Hess} f$ étant un tenseur symétrique, $\mathrm{tr}\,{}^g_{13}\,(Ddf \otimes df)\,(P) = \mathrm{tr}\,{}^g_{23}\,(Ddf \otimes df)\,(P)$ s'annule aussi, nous obtenons finalement l'identité suivante

$$\begin{aligned}
\big(df \otimes T_x(A_x(e^{2f_x}g)), D^2 df_x\big)_g &= \big(T(A_x(e^{2f_x}g)),\, df_x \otimes DA_x(g)\big)_g \\
&\quad - \frac{\alpha}{4}\,(d|W|^2\ ,\ df_x)_g - e^{-4f_x}\,(d\psi,\, df_x)_g + 4\,\psi\, e^{-4f}\,|df_x|^2_g\ .
\end{aligned}$$

Elle permet, en rappelant que la fonction ψ est par hypothèse positive, d'écrire la majoration (3.13) sous la forme

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant \frac{1}{2}\,(T_x(A_x(e^{2f_x}g)),\, Dd\gamma)_g \\
&= \big(T(A_x(e^{2f_x}g)),\, df_x \otimes DA_x(g)\big)_g - \frac{\alpha}{4}\,(d|W|^2, df_x)_g - e^{-4f_x}\,(d\psi, df_x)_g \\
&\quad + \big(\,T_x(A_x(e^{2f_x}g)),\ \mathrm{tr}\,{}^g_{34}\,(D^2 df_x \otimes df_x) - \mathrm{tr}\,{}^g_{14}\,(D^2 df_x \otimes df_x) + \mathrm{tr}\,{}^g_{24}\,(Ddf_x \otimes Ddf_x)\,\big)\ .
\end{aligned}$$

Par définition de la courbure (de la métrique g) et par symétrie du hessien

$$D^2 df = \sigma_{23}\, D^2 df = \sigma_{12} \circ \sigma_{23}\, D^2 df - \sigma_{23}\, R^{(T^*M,\, g^{-1})}(df)\ ,$$

ce qui permet d'écrire la majoration précédente sous la forme

$$\begin{aligned}
(3.14)\quad 0 \geqslant\ & \big(T_x(A_x(e^{2f_x}g))\ ,\ R_g(.,df_x^{\sharp_g}, .df_x^{\sharp_g})\big)_g \\
&+ \Big(\frac{1-x}{2}\Big)\,\mathrm{ric}_g\,(df_x^{\sharp_g}, df_x^{\sharp_g})\ \ \mathrm{tr}_g T_x(A_x(e^{2f_x}g)) \\
&+ \big(T_x(A_x(e^{2f_x}g)),\ \mathrm{tr}_{24}\, Ddf_x \otimes Ddf_x\big)_g \\
&+ \big(T(A_x(e^{2f_x}g)),\, df_x \otimes DA_x(g)\big)_g \\
&- \frac{\alpha}{4}\,(d|W|^2,\, df_x)_g\ -\ e^{-4f_x}(d\psi, df_x)_g\ .
\end{aligned}$$

Notons la minoration suivante du facteur quadratique en le hessien :

LEMME 3.1. — *Il existe une constante strictement positive ne dépendant que de la métrique* g , $\varepsilon(g)$, *telle que pour tout* x, $x \in [x_0, 1]$, *on a*

$$\big(T_x(A_x(e^{2f_x}g)),\, \mathrm{tr}\,{}^{g}_{24}\, Ddf_x \otimes Ddf_x\big)_g \geqslant \varepsilon\ \mathrm{tr}\,_g T(A(e^{2f_x}g))\ |df_x|_g^4\ .$$

La *proposition 1.19* de [LL] établit la majoration de l'énoncé, uniformément en $x, x_0 \leqslant\ x \leqslant\ 1$, dès qu'elle est satisfaite pour $x = 1$, ce dernier cas correspondant au *Lemma 2.4* de [GW] (avec $k = 2$). Ce lemme de Guan-Wang-Li-Li permet de réécrire la majoration (3.14) sous la forme

$$\begin{aligned}(3.15)\quad 0 \geqslant \big(T_x(A_x(e^{2f_x}g)),\, R_g(.,\, df_x^{\sharp_g}, .,\, df_x^{\sharp_g})\big)_g \\ + \frac{1-x}{2}\,\mathrm{tr}\,_g T_x(A_x(e^{2f_x}g))\ \mathrm{ric}_g(df_x^{\sharp_g}, df_x^{\sharp_g}) + \big(T(A_x(e^{2f_x}g)), df_x \otimes DA_x(g)\big)_g \\ - \frac{\alpha}{4}\,(d|W|^2, df_x)_g - e^{-4f_x}(d\psi, df_x)_g + \varepsilon\,\mathrm{tr}\,_g T(A_x(e^{2f_x}g))\,|df_x|_g^4\ .\end{aligned}$$

Il nous reste à faire les remarques élémentaires suivantes :

1.— la trace de l'identité (3.8) s'écrivant

$$\mathrm{tr}\,_g T_x(A_x(e^{2f_x}g)) = (3-2x)\,\mathrm{tr}\,_g T(A_x(e^{2f_x}g))\ , \tag{3.16}$$

nous avons pour tout x, $x \leqslant 1$,

$$|T_x(A_x(e^{2f_x}g))| \leqslant |T(A_x(e^{2f_x}g)| + (1-x)\,\mathrm{tr}\,_g T(A_x(e^{2f_x}g))\ ,$$

où nous rappelons que $T(A)$ est donné par l'identité (3.7) ;

2.— l'identité de Newton appliquée à $\sigma_2(A)$ s'écrit

(3.17)

$$(\mathrm{tr}\,_g A_x(e^{2f_x}g))^2 - |A_x(e^{2f_x}g)|_g^2 = 2\,\sigma_2(g^{-1}A_x(e^{2f_x}g)) = \frac{\alpha}{2}\,|W(g)|_g^2 + 2\,e^{-4f_x}\,\psi_g > 0\ ;$$

sous l'hypothèse $\sigma_2(A_x) > 0$, nous en déduisons la relation

$$|T(A_x(e^{2f_x}g))|_g \leqslant 3\,\mathrm{tr}\,_g\, A_x(e^{2f_x}g) = \mathrm{tr}\,_g\, T(A_x(e^{2f_x}g))\ . \tag{3.18}$$

La majoration dérivée au point 1 s'écrit donc sous cette hypothèse :

$$|T_x(A_x(e^{2f_x}g))|_g \leqslant (2-x)\,\mathrm{tr}\,_g\, T(A_x(e^{2f_x}g)) \leqslant (2-x_0)\,\mathrm{tr}\,_g\, T(A_x(e^{2f_x}g))\ . \tag{3.19}$$

3.— en traçant la définition (3.2) de la courbure A_x nous obtenons la minoration

$$0 < \mathrm{scal}(e^{2f_x}g) = \frac{3}{3-2x}\ e^{-2f_x}\,\mathrm{tr}\,_g A_x(e^{2f_x}g)\,; \tag{3.20}$$

la minoration (3.17) entraînant la relation

$$\big(\operatorname{tr}_g A_x(e^{2f_x}g)\big)^2 \geqslant 2\,\psi_g\, e^{-4f_x} + \frac{\alpha}{2}\,|W(g)|_g^2\ ,$$

nous en déduisons alors

(3.21)

$$\operatorname{tr}_g T(A_x(e^{2f_x}g)) = 3\operatorname{tr}_g A_x(e^{2f_x}g) \geqslant 3\sqrt{2}\,\max\Big(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,|W(g)|_g\,,\ \sqrt{\psi_g}\ e^{-2f_x}\Big)\ ;$$

4.— il suffit de différencier l'identité (3.2) relativement à la connexion canonique D pour obtenir la majoration banale suivante

$$|DA_x(g)|_g \leqslant |D\mathrm{ric}(g)|_g + \frac{|x|}{3}\,|d\mathrm{scal}(g)|_g \leqslant C(x_0)\,|D\mathrm{ric}\,(g)|_g\ . \tag{3.22}$$

Les inégalités (3.18), (3.19) et (3.22) permettent ensuite de déduire de la relation (3.15) la majoration

$$\begin{aligned}\varepsilon(g)\ \operatorname{tr}_g T(A_x(e^{2f_x}g))\ |df_x|_g^4 \leqslant \operatorname{tr}_g T(A_x(e^{2f_x}g))\,\big(C(x,|R(g)|)\ |df_x|_g^2\\ + C(x,|DR(g)|)\ |df_x|_g\big) + \Big(\frac{\alpha}{2}\ |W|\,|DW|_g + |d\psi|_g\, e^{-4f_x}\Big)\,|df_x|_g\ .\end{aligned}$$

D'après la minoration (3.21) nous pouvons majorer le dernier facteur en terme de la trace $\operatorname{tr}_g T(A_x(e^{2f_x}g))$ pour établir l'inégalité suivante

$$\varepsilon(g)\,|df_x|_g^4 \leqslant C(g)\,\big(|df_x|_g^2 + |df_x|_g\big) + \frac{1}{3}\Big(\sqrt{\alpha}\,|DW|_g + \frac{|d\psi|}{\sqrt{\psi}_g}e^{-2f_x}\Big)\,|df_x|_g\ .$$

La majoration uniforme de e^{-2f_x} sur $M\times[x_0,1]$ établie au paragraphe précédent nous autorise finalement à conclure avec la majoration annoncée du $\sup_M |df_x|_g$, uniforme en $x\in[x_0,1]$:

$$|df_x|_g^4 \leqslant C(g)\,\big(|df_x|_g^2 + |df_x|_g\big) \leqslant C_1(g)\,\big(|df_x|_g^2 + 1\big) \leqslant \frac{1}{2}\,|df_x|_g^4 + C_2(g)\ .$$

3.3.3. Majoration, borne C^2 uniforme et conclusion.— De la minoration uniforme en $x, x_0 \leqslant x < 3/2$ des solutions f_x des équations $(3.3)_x$ et de la majoration uniforme en $x, x_0 \leqslant x \leqslant 1$, des différentielles df_x nous dérivons maintenant une estimation de Harnack uniforme pour les solutions $f_x, x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, sous l'hypothèse – qui intervient ici pour la première fois, et de façon essentielle – que l'invariant conforme $\mathcal{C}(g,x_1)$ (cf. (3.4)) est strictement positif.

L'identité élémentaire $\sigma_2(g^{-1}A_x) = \sigma_2(g^{-1}A) + \frac{3}{2}(1-x)(2-x)(\operatorname{tr}(g^{-1}A))^2$ permet, en invoquant l'équation $(3.3)_x$, d'écrire le terme $e^{-4f_x}\,\psi$ sous la forme

$$\begin{aligned}&\sigma_2(g^{-1}A_x(e^{2f_x}g)) - \frac{\alpha}{4}\,|W_{(g)}|_g^2\\ &\quad= \sigma_2(g^{-1}A(e^{2f_x}g)) + \frac{3}{2}(1-x)(2-x)\,\big(\operatorname{tr}\ (g^{-1}A(e^{2f_x}g))\big)^2 - \frac{\alpha}{4}\,|W(g)|_g^2\\ &\quad= e^{4f_x}\Big((\sigma_2(A(e^{2f_x}g)) + \frac{1}{6}(1-x)(2-x)\,\mathrm{scal}^2\,(e^{2f_x}g)\ - \frac{\alpha}{4}\,|W(e^{2f_x}g)|^2_{e^{2f_x}g}\Big)\ ;\end{aligned}$$

après intégration contre la forme volume de la métrique g, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}(3.23)\qquad \sup_M \psi \int_{(M,\,g)} e^{-4f_x}\, d\mathrm{vol} \\ \geqslant \int_{(M,\,e^{2f_x}g)} \Big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2 + \frac{(1-x)(2-x)}{6}\,\mathrm{scal}^2\Big)\, d\mathrm{vol}.\end{aligned}$$

En rappelant la définition (3.5) de l'invariant de Yamabe (g), nous pouvons observer l'inégalité

$$0 < \mu(g)\sqrt{\mathrm{vol}(e^{2f_x}g)} \leqslant \int_{(M,\,e^{2f_x}g)} \mathrm{scal}\, d\mathrm{vol} \leqslant \sqrt{\mathrm{vol}(e^{2f_x}g)}\sqrt{\int_{(M,\,e^{2f_x}g)} \mathrm{scal}^2\, d\mathrm{vol}}$$

que nous reformulons en la minoration suivante

$$(3.24)\qquad \int_{(M,\,e^{2f_x}g)} \mathrm{scal}^2\, d\mathrm{vol} \geqslant \mu(g)^2\ .$$

Celle-ci permet de déduire de la minoration (3.23) la majoration suivante du minimum de f_x :

$$e^{-4\inf f_x} \geqslant \frac{1}{\sup_M \psi_g\, \mathrm{vol}(g)} \Big(\int_M (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2)\, d\mathrm{vol} + \frac{(1-x)(2-x)}{6}\mu^2(g)\Big)\ ,$$

et donc, sous la condition que l'invariant conforme $\mathcal{C}$ introduit précédemment (voir (3.4)) est strictement positif et en rappelant la minoration (3.11) du paragraphe précédent, uniforme en $x, x \in [x_0, 1]$, de conclure à la *majoration* suivante des solutions f_x de $(3.3)_x$, *uniforme* elle aussi en $x, x \in [x_0, 1]$:

$$(3.25)\qquad \sup_M f_x \leqslant \inf_M f_x + \sup_M |df_x|\ \ \mathrm{diam}(g) \leqslant C(g,\,\alpha)\ .$$

Il reste à invoquer les estimations C^2 de [LL] (ou alternativement de [GV2]) pour déduire des estimations C^1 uniformes précédentes une majoration, uniforme en x, $x \in [x_0, x_1]$, $x_1 \leqslant 1$, du $\sup_M |\mathrm{Hess} f_x|$; ces estimations reposent – dans [LL] comme dans [GV2] – sur la *concavité* de la fonctionnelle $\sqrt{\sigma_2(g^{-1}A_x(e^{2f}g))}$ considérée comme fonction du hessien de f, que l'on déduit facilement de la concavité bien connue de la fonction $\sqrt{\sigma_2}$ opérant sur le cône des endomorphismes symétriques vérifiant $\mathrm{tr}\, a > 0$ et $\sigma_2(a) > 0$.

De l'équation $(3.3)_x$ et de la majoration uniforme (3.25) des solutions f_x des équations $(3.3)_x$ nous déduisons que $\sigma_2(g^{-1}A_x(e^{2f_x}g))$ est uniformément minoré (cf. (3.10)). De l'identité $2\,\sigma_2(g^{-1}A) = (\mathrm{tr}\,(g^{-1}A))^2 - |g^{-1}A|^2 = (\mathrm{tr}\,(g^{-1}A) - |g^{-1}A|)\,(\mathrm{tr}\,(g^{-1}A) + |g^{-1}A|)$, et de la majoration uniforme de $|A(e^{2f_x}g)|$, conséquence des estimations C^2 uniformes et de l'identité (3.6), nous déduisons que l'expression $\mathrm{tr}\,(g^{-1}A) - |g^{-1}A|$ admet un minorant strictement positif uniforme.

L'expression (3.7) définissant l'endomorphisme $T(A_x)$ assure qu'il est alors uniformément minoré par un multiple strictement positif de l'identité qui minore aussi, pour

$x \leqslant 1$, les endomorphismes $T_x(A_x)$ d'après l'identité (3.8) les définissant, puisque la trace

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_g T(A_x(e^{2tr} g)) &= e^{2f_x} \operatorname{tr}_{e^{2f_x} g} T(A_x(e^{2f_x} g)) \\ &= 3\, e^{2f_x} \operatorname{tr}_{e^{2f_x} g} A_x(e^{2f_x} g) = (3-2\,x)\, e^{2f_x} \operatorname{scal}(e^{2f_x} g)\end{aligned}$$

est positive ou nulle (et même strictement positive) par hypothèse.

Au vu de l'expression (3.9) de la linéarisation de l'équation $(3.3)_x$, ceci établit l'*uniforme ellipticité* de ces équations, pour $x \in [x_0, x_1]$. La théorie classique de N.V. Krylov et C. Evans pour les équations concaves uniformément elliptiques assure alors l'existence d'une borne uniforme $C^{2,\beta}$, pour tout $\beta \in [0,1)$.

La minoration uniforme de $\sigma_2(A_x(e^{2f_x} g))$ passe à la limite pour une convergence C^k, $k \geqslant 2$ et entraîne, par les identités banales $\operatorname{scal}(e^{2f_x} g) = \frac{3}{3-2x} \operatorname{tr}_{e^{2f_x} g} A_x(e^{2f_x} g)$, obtenue en traçant (3.2), et $\sigma_2(A_x(e^{2f_x} g)) = (tr_{e^{2f_x} g} A_x(e^{2f_x} g))^2 - |A_x(e^{2f_x} g)|^2_{e^{2f_x} g}$, l'existence d'un minorant strictement positif uniforme pour les courbures scalaires $\operatorname{scal}(e^{2f_x} g)$, $x \in [x_0, x_1]$, qui vaut encore à la limite pour une convergence C^k, $k \geqslant 2$, établissant ainsi la fermeture de $\mathcal{S}$.

L'ensemble $\mathcal{S}$, qui est ouvert, fermé et non vide dans l'intervalle $[x_0, x_1]$ lui est donc égal, ce qui établit l'énoncé suivant

THÉORÈME 3.2. — *Soit $(M,\, g)$ une variété riemannienne compacte sans bord de dimension 4 dont l'invariant de Yamabe $\mu(g)$ (cf. (3.5)) est strictement positif. Pour tous réels α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et x_1, $x_1 \in (-\infty, 1]$, pour lesquels l'invariant conforme*

$$\int_{(M,\,g)} \big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2\big)\, d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,(1-x_1)\,(2-x_1)\,\mu(g)^2$$

est strictement positif, et pour tout réel x, $x \in (-\infty, x_1]$, il existe dans la classe conforme de g une métrique de courbure scalaire strictement positive pour laquelle le polynôme $\sigma_2(A_x) - \frac{\alpha}{4}|W|^2$ est (partout) strictement positif.

Le cas $\alpha = 0$ de cet énoncé est le théorème principal de [GV].

Le cas $\alpha = 1$ et $x = x_1 = 1$ établit la réduction à [M] du théorème 1 proposée dans le préliminaire.

3.4. Une autre application du théorème 3.2 : construction de métriques de Q-courbure constante

Si le grand mérite de l'approche précédente consiste à s'affranchir du recours à la régularisation par le terme elliptique du quatrième ordre $\delta\Delta\,\mathrm{scal}$, elle n'en conduit pas moins à un intéressant résultat d'existence de métriques de Q-courbure constante sous des hypothèses suffisamment souples pour être satisfaites par de nombreux exemples. La Q-courbure dont il s'agit ici est celle de la paire conforme (P, Q) associée à l'opérateur de Paneitz, (cf. (2.2) et (2.3) pour les définitions), un opérateur du quatrième ordre donc, dont le contenu géométrique a été discuté dans la partie 2.1. Rappelons que la caractéristique principale de la fonctionnelle I_2 – essentiellement la forme quadratique associée à l'opérateur formellement auto-adjoint P translatée par le potentiel Q (cf. (2.4)) – est d'admettre pour *points critiques* les métriques de Q-*courbure constante* (cf. (2.5)) et (2.6)).

Dans [CY], Chang S.-Y. A. et Yang P. établissent pour la fonctionnelle I_2 l'analogue suivant du théorème 2.1 ; la démonstration de ce résultat est parallèle à celle du Théorème 2.1 exposée précédemment et repose, comme celle-ci, sur l'inégalité de Moser-Trudinger-Adams (2.10).

THÉORÈME 3.3 ([CY], Theorem 1.2). — *Sur une variété riemannienne compacte sans bord de dimension* 4*,* (M, g)*, le minimum de la fonctionnelle* I_2 *(cf.* (2.4)*) est atteint par une métrique de* Q*-courbure constante dès que l'opérateur de Paneitz* P *est positif ou nul et de noyau réduit aux fonctions constantes et que l'invariant conforme* $\int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} = 2\int_M Q\, d\mathrm{vol}$ *est strictement inférieur à celui de la sphère ronde* (S^4, can)*, égal à* $16\pi^2$*.*

Dans [G2] M. Gursky démontre ensuite que la seconde hypothèse est satisfaite pour toute variété riemannienne compacte et sans bord de dimension 4 de courbure scalaire strictement positive qui n'est pas conforme à la sphère standard, et que la première l'est dès que la courbure scalaire et l'invariant conforme $\int_M \sigma_2(A), d\mathrm{vol}$ sont positifs ou nuls, établissant ainsi, comme corollaire du théorème 3.3, l'existence de métriques de Q-courbure constante sous ces seules hypothèses.

Comme corollaire du cas particulier $\alpha = x_1 = 0$ du théorème 3.2, M. Gursky et J. Viaclovsky établissent l'extension substantielle suivante de ce résultat.

THÉORÈME 3.4 (cf. [GV], Theorem 1.4). — *Il existe une métrique de* Q*-courbure constante dans la classe conforme de toute variété riemannienne compacte sans bord de dimension* 4 *dont la courbure scalaire et l'invariant conforme* $\int_M Q\, d\mathrm{vol} + 1/6\, \mu(g)^2$ *sont strictement positifs.*

Comme l'indique la discussion précédente, ces métriques sont obtenues comme minima de la fonctionnelle I_2, l'existence de ces derniers étant garantie par le théorème 3.3 dès que l'opérateur de Paneitz est positif ou nul et de noyau réduit aux constantes. Puisque $2\int_M Q\, d\mathrm{vol} = \int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol}$, l'hypothèse correspond au cas particulier $\alpha = x_1 = 0$ du théorème 3.2 qui assure alors l'existence dans la classe conforme d'une métrique, h, pour laquelle la courbure scalaire et $\sigma_2(A_0)$ sont strictement positifs. Des identités $A_0 = \mathrm{ric}$ (cf. la définition (3.2) de A_x) et $\sigma_2(A_0) = 1/2\,(\mathrm{tr}\, A_0)^2 - 1/2\,|A_0|^2$, et de la stricte positivité de $\sigma_2(A_0)$ et de la courbure scalaire nous déduisons la majoration

$$\mathrm{ric}\,(h) < \mathrm{scal}\,(h)\; h\;. \tag{3.26}$$

(On peut aussi vérifier facilement la minoration $\mathrm{ric}\,(h) > -1/2\,\mathrm{scal}\,(h)\; h$, intéressante dans l'absolu, mais sans conséquence pour notre argument.) Il reste à observer que la minoration spectrale de l'opérateur de Paneitz à laquelle nous avons réduit la preuve du théorème 3.4 est automatique dans ce cas : de l'expression (2.2) de l'opérateur de Paneitz nous déduisons immédiatement

$$\int_M f\,Pf\,d\mathrm{vol} = \int_M \Big((\Delta f)^2 - 2\,\mathrm{ric}\,(df^\sharp, df^\sharp) + \frac{2}{3}\,\mathrm{scal}\;|df|^2\Big)\; d\mathrm{vol}\;. \tag{3.27}$$

En contractant contre la 1-forme df, et en intégrant sur M l'identité de Bochner appliquée à df, qui s'écrit

$$\Delta f = dd^*df = D^*Ddf + \mathrm{ric}\,(df^\sharp, .),$$

nous dérivons l'identité

$$\int_M \big((\Delta f)^2 - \mathrm{ric}\,(df^\sharp, df^\sharp) - |\mathrm{Hess} f|^2\big)\; d\mathrm{vol} = 0\;,$$

que nous reportons dans (3.27) pour obtenir finalement

$$\int_M f\,Pf\,d\mathrm{vol} = \frac{1}{3}\int_M \big(4\,|\mathrm{Hess}_0 f|^2 + 2\,(\mathrm{scal}\, g - \mathrm{ric}\,)(df^\sharp, df^\sharp)\big)\; d\mathrm{vol}, \tag{3.28}$$

où nous avons noté $\mathrm{Hess}_0 f := \mathrm{Hess} f + 1/4\,\Delta f\; g$ la composante de trace nulle du hessien.

L'intégrale $\int_M f\,Pf\,d\mathrm{vol}$ est donc positive ou nulle dès que $\mathrm{ric}\,(h) \leqslant \mathrm{scal}\,(h)\; h$. Si, de plus, $\int_M fPf\,d\mathrm{vol} = 0$, nous déduisons de la même identité (3.28) que la composante de trace nulle du hessien, $\mathrm{Hess}_0 f$, est identiquement nulle. Un résultat classique de M. Obata assure alors que f est constante, ou que (M, h) est de courbure sectionnelle constante ; dans ce dernier cas l'identité (3.28) devient $\int_M f\,Pf\,d\mathrm{vol} = 1/3\,\int_M (4\,|d\mathrm{Hess}_0 f|^2 + 3/2\,\mathrm{scal}\,|df|^2)\,d\mathrm{vol}$, ce qui établit que, cette fois encore, f est nécessairement constante, et conclut la démonstration de cette *minoration spectrale* de l'opérateur de Paneitz sous l'hypothèse $\mathrm{ric}\,(h) \leqslant \mathrm{scal}\,(h)\; h$, et donc la preuve du théorème 3.4.

Toute métrique de courbure de Ricci positive ou nulle satisfaisant évidemment l'hypothèse de pincement de la courbure de Ricci (3.26), la minoration spectrale de l'opérateur de Paneitz que nous venons d'établir permet d'invoquer le théorème 3.3 pour construire des métriques de Q-courbure constante dans la classe conforme de toute telle métrique. Dans [SY], Sha J.-P. et Yang D. en démontraient l'existence sur toute variété de dimension 4 (à homéomorphisme près) admettant une métrique de courbure scalaire strictement positive – c'est-à-dire, concrètement, sur les sommes connexes $a\,(S^2 \times S^2)$ et $(a+b)\;\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \,\#\, b\,\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,,\;\; a, b$ entiers naturels.

En invoquant le théorème 3.4 nous allons élargir la classe des variétés dont on sait qu'elles admettent des métriques de Q-courbure constante, en nous affranchissant par exemple de l'hypothèse de simple-connexité requise dans les constructions de Sha J.P. et Yang D.

COROLLAIRE 3.5 (cf. [GV], Theorem 7.1). — *Soient a et b deux entiers naturels, $(M_i, g_i)_{i=1,2}$ deux variétés riemanniennes compactes sans bord de dimension 4, et $\mu(g_i)$ leurs invariants de Yamabe (cf. (3.5)). Les variétés $a\,(S^1 \times S^3)\,\#\,b\,\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, $M_1\,\#\,a\,(S^1 \times S^3)$, $M_1\,\#\,b\,\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ et $M_1\,\#\,M_2$ admettent des métriques de Q-courbure constante dès que, respectivement,*

1. $$2a + b \leqslant 9 \text{ , pour la première famille ;}$$

2. $\mu(g_1) - 4\sqrt{3a}\pi > 0$, $a \in \{0, \cdots, 7\}$ *et* $\displaystyle\int_{(M_1,g_1)} Q\,d\mathrm{vol} \geqslant 0$, *pour la seconde famille*;

3. $\mu(g_1) - 8\sqrt{3}\,\pi > 0$, $b \in \{0, \cdots, 8\}$ *et* $\displaystyle\int_{(M_1,g_1)} Q\,d\mathrm{vol} \geqslant 0$, *pour la troisième* ;

ou

4. $\mu(g_i) - 4\sqrt{3}\,\pi > 0$ *et* $\displaystyle\int_{(M_i,g_i)} Q\,d\mathrm{vol} \geqslant 0$, $i \in \{1, 2\}$, *dans le dernier cas.*

Les sommes connexes $S^2 \times S^2\,\#\,a\,(S^1 \times S^3)$, $a \leqslant 5$; $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,\#\,a\,(S^1 \times S^3)$, $a \leqslant 5$; $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,\#\,b\,\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, $b \leqslant 8$; et $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,\#\,c\,\overline{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}\,\#\,(S^1 \times S^3)$, $c \in \{3, \cdots, 7\}$, sont ainsi des exemples de variétés admettant des métriques de Q-courbure constante.

D'après le théorème 3.4, il suffit pour établir ce corollaire de construire sur les variétés de l'énoncé des métriques de courbure scalaire strictement positive satisfaisant de plus à l'hypothèse $\int_M Q\,d\mathrm{vol} = \frac{1}{2}\int_M \sigma_2(A)\,d\mathrm{vol} > 1/6\;\mu(g)^2$.

Rappelons pour cela les constructions élémentaires suivantes

LEMME 3.6 (cf. [K], Lemma 3.2, ou [ABKS], Proposition 4.1)

Pour tout $\varepsilon > 0$, toute variété riemannienne compacte et sans bord, (M, g), de dimension, n, supérieure ou égale à 3, et tout point P de M, il existe une métrique $\widetilde{g}$ telle que

1. *$\widetilde{g}$ est localement conformément plate (i.e. $W(\widetilde{g}) \equiv 0$ si $n \geqslant 4$) sur un voisinage de P ;*

2. $|\mu(\widetilde{g}) - \mu(g)| < \varepsilon$;

et

3. $\left| \displaystyle\int_{(M,g)} |W|^2\,d\mathrm{vol} - \int_{(M,\widetilde{g})} |W|^2\,d\mathrm{vol} \right| < \varepsilon.$

LEMME 3.7 (cf. [K] Theorem 2). — *Soient $\varepsilon > 0$ et $(M_i, g_i)_{i=1,2}$ deux variétés riemanniennes compactes sans bord de même dimension supérieure ou égale à 3, de courbure scalaire partout strictement positive, et localement conformément plates au* *voisinage d'un de leurs points $P_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Il existe alors sur la somme connexe $M_1 \# M_2$ une métrique g_ε telle que*

1. $$\mu(M_1 \# M_2, g_\varepsilon) \geqslant \min_{i \in \{1,2\}} \{\mu(g_i)\} - \varepsilon \ , \ \textit{et,}$$

2. $$\int_{(M_1 \# M_2,\, g_\varepsilon)} |W|^2 d\text{vol} = \int_{(M_1,\, g_1)} |W|^2 d\text{vol} + \int_{(M_2,\, g_2)} |W|^2 d\text{vol} \ .$$

En particulier, si $\mu(M_i) := \sup_{g \in \mathcal{M}(M_i)} \mu(g))$ est positif ou nul, $\mu(M_1 \# M_2) \geqslant \min_{i \in \{1,2\}} \mu(M_i)$.

Appliqué aux cylindres $S^{n-1} \times \ell I$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, recollés en deux points de la sphère standard, l'argument conduisant au lemme précédent démontre aussi

Corollaire 3.8. — *Pour tout entier naturel a,*

$$\mu(a\, (S^{n-1} \times S^1)) = \mu(S^{n-1} \times S^1) = \mu(S^n) \ .$$

La démonstration de ces résultats élémentaires est sans surprise et n'a rien à voir avec les idées discutées dans ce texte ; [K] étant rédigé avec beaucoup de soin, nous y renvoyons le lecteur que ces énoncés laisseraient perplexes.

Reprenons la démonstration du corollaire 3.5 : de la formule de Gauss-Bonnet-Chern (1.3) et de l'hypothèse $\int_M \sigma_2(A)\, d\text{vol} \geqslant 0$, nous déduisons la majoration $\int_{(M_i,\, g_i)} |W|^2 d\text{vol} \leqslant 32\, \pi^2\, \chi(M)$. Pour tout $\varepsilon, \varepsilon > 0$, le lemme 3.6 permet de modifier la métrique g_i au voisinage d'un point arbitraire P_i de M_i pour l'y rendre conformément plate sans modifier de plus de ε ni l'invariant de Yamabe $\mu(g_i)$, ni $\int_{M_i} |W|^2\, d\text{vol}$. Notons $\widetilde{g}_i$ les métriques ainsi obtenues .

Considérons pour commencer la seconde famille, $M \# a\, (S^1 \times S^3)$: d'après le corollaire 3.8, il existe sur $a(S^1 \times S^3)$ une métrique localement conformément plate, h_ε, telle que $\mu(h_\varepsilon) \geqslant \mu(a\, (S^1 \times S^3)) - \varepsilon = \mu(S^4) - \varepsilon$; le lemme 3.7 entraîne alors l'existence d'une métrique $\widetilde{\widetilde{g}}$ sur $M \# a\, (S' \times S^3)$ telle que, d'une part

1. $\mu(\widetilde{\widetilde{g}}) \geqslant \min\big(\mu(h_\varepsilon), \mu(\widetilde{g})\big) - \varepsilon \geqslant \mu(\widetilde{g}) - \varepsilon \geqslant \mu(g) - 2\varepsilon$,

où nous utilisons la majoration $\mu(g) \leqslant \mu(S^n, \text{can})$ due à T. Aubin et valable pour n'importe quelle métrique sur n'importe quelle variété compacte sans bord de dimension n, le cas d'égalité étant caractéristique – c'est le cœur de la solution du problème de Yamabe – de la sphère conforme standard. Cette majoration intervient d'ailleurs de façon implicite dans l'énoncé du corollaire 3.8. Et, de l'autre

2. $$\int_{(M \# a(S^1 \times S^3),\, \widetilde{\widetilde{g}})} |W|^2\, d\text{vol} = \int_{(M,\, \widetilde{g})} |W|^2\, d\text{vol} \leqslant \int_{(M,\, g)} |W|^2\, d\text{vol} + \varepsilon \ .$$

En posant $N_a = M \# a\,(S^1 \times S^3)$, nous déduisons des deux inégalités précédentes et de la formule de Gauss-Bonnet-Chern appliquée successivement à N_a et à M, la minoration

$$\begin{aligned}\int_{(N_a,\,\widetilde{\widetilde{g}})} Q\,d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,\mu(\widetilde{\widetilde{g}})^2 &\\ = 4\pi^2\,\chi(N_a) - \frac{1}{8}\int_{(N_a,\,\widetilde{\widetilde{g}})} |W|^2\,d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,\mu(\widetilde{\widetilde{g}})^2 &\\ \geqslant 4\pi^2\,\chi(N_a) - \frac{1}{8}\int_{(M,\,\widetilde{g})} |W|^2\,d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,\big(\mu(\widetilde{g}) - \varepsilon\big)^2 &\\ \geqslant 4\pi^2\big(\chi(N_a) - \chi(M)\big) + \frac{1}{6}\,\big(\mu(g) - 2\varepsilon\big)^2 - \frac{\varepsilon}{8}\,,&\end{aligned}$$

cette dernière expression étant strictement positive pour un choix convenable de ε dès que $\mu(g) > 4\sqrt{3a}\,\pi$. Ceci achève la discussion du second point du corollaire 3.5, la borne sur a provenant de la majoration de la constante de Yamabe $\mu(g) \leqslant \mu(S^n, \mathrm{can}) = 8\sqrt{6}\,\pi$ rappelée ci-dessus : elle entraîne clairement $a < 8$.

Pour la troisième famille on procède identiquement : $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ est, comme $S^1 \times S^3$, localement conformément plat. L'hypothèse $\mu(g) > 8\sqrt{3}\pi = \mu(\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}, \mathrm{can})$ entraîne ici que le minimum $\min\big(\mu(g),\, \mu(\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}, \mathrm{can})\big)$ est atteint par $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$; pour tout $\varepsilon > 0$, le lemme 4 garantit alors l'existence d'une métrique $\widetilde{\widetilde{g}}$ sur $N^a := M \# a\,\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ dont l'invariant de Yamabe est minoré par $8\sqrt{3}\,\pi - \varepsilon$ et telle que

$$\int_{(N^a,\,\widetilde{\widetilde{g}})} |W|^2\,d\mathrm{vol} = \int_{(M,\,\widetilde{g})} |W|^2\,d\mathrm{vol} \leqslant \int_{(M,\,g)} |W|^2\,d\mathrm{vol} + \varepsilon\ .$$

On conclut alors comme précédemment.

Pour la première famille $N_{ab} := a\,(S^1 \times S^3) \# b\,\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ de l'énoncé, on reprend l'argument précédent. La première étape est même dans ce cas inutile, puisque la construction du lemme 3.7 permet de choisir la métrique g_ε localement conformément plate dès que g_1 et g_2 le sont. D'après le corollaire 3.8 et la majoration de $\mu(g)$ par $\mu(S^4)$,

$$\mu(a\,(S^{n-1} \times S')) = \mu(S^n) \geqslant \mu(b\,\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}})\,;$$

le lemme 3.7 assure alors l'existence d'une métrique localement conformément plate, $\widetilde{\widetilde{g}}$, dont l'invariant de Yamabe $\mu(\widetilde{\widetilde{g}})$ est minoré par $\mu(b\,\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}) - \varepsilon \geqslant \mu(\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}) - \varepsilon$. Nous concluons dans ce cas par la minoration suivante

$$\begin{aligned}\int_{(N_{ab},\,\widetilde{\widetilde{g}})} Q\,d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,\mu(\widetilde{\widetilde{g}})^2 &\\ = 4\pi^2\,\chi(N_{ab}) - \frac{1}{8}\int_{(N_{ab},\,\widetilde{\widetilde{g}})} |W|^2\,d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,\mu(\widetilde{\widetilde{g}})^2 &\\ \geqslant 4\pi^2\,\big(\chi(a\,(S^1 \times S^3)) + \chi(b\,\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}) - 2\big) + \frac{1}{6}\,\mu(\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}) - \varepsilon &\\ = 4\pi^2(10 - 2a - b) - \varepsilon\ ,&\end{aligned}$$

le dernier terme de cette identité étant strictement positif pour un choix adéquat de ε dès que les entiers naturels a, b vérifient la relation $2a + b \leqslant 9$.

Pour le cas restant, on applique le lemme 3.6 aux deux points arbitraires P_1 (P_2) de M_1 (resp. M_2) pour obtenir des métriques $\widetilde{g}_i$, $i = 1, 2,$ égales aux métriques g_i loin des points P_i, et localement conformément plates au voisinage des points P_i, $i = 1, 2$, les invariants conformes $\mu(\widetilde{g}_i)$ et $\int_{(M_i,\widetilde{g}_i)} |W|^2\, d\mathrm{vol}$ coïncidant – à ε près – avec ceux des métriques g_i, $i = 1, 2$. Du lemme 3.7 nous déduisons alors l'existence d'une métrique $\widetilde{\widetilde{g}}$ sur $M_1 \# M_2$ telle que

1. $$\int_{M_1\#M_2} |W|^2 d\mathrm{vol} = \sum_{i=1,2} \int_{(M_i,\widetilde{g}_i)} |W|^2\, d\mathrm{vol} \leqslant \sum_{i\in\{1,2\}} \int_{(M_i,\, g_i)} |W|^2 d\mathrm{vol} + 2\varepsilon\ ,$$

et

2. $$\mu(M_1\#M_2, \widetilde{\widetilde{g}}) \geqslant \min_{i\in\{1,2\}} \{\mu(M_i,\, g_i)\} - \varepsilon\ .$$

Comme précédemment, on invoque la formule de Gauss-Bonnet-Chern pour conclure

$$\begin{aligned}
&\int_{(M_1\#M_2,\,\widetilde{\widetilde{g}})} Q\, d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,\mu(\widetilde{\widetilde{g}}) \\
&\qquad = 4\pi^2\, \chi(M_1\#M_2) - \frac{1}{8} \int_{(M_1\#M_2,\,\widetilde{\widetilde{g}})} |W|^2\, d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,\mu(\widetilde{\widetilde{g}})^2 \\
&\qquad \geqslant 4\pi^2 \big(\chi(M_1) + \chi(M_2) - 2\big) - \frac{1}{8} \int_{M_1} |W|^2\, d\mathrm{vol} \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{8} \int_{M_2} |W|^2\, d\mathrm{vol} + \frac{1}{6}\,(\min_{i\in\{1,2\}} \mu(g_i))^2 - C\varepsilon \\
&\qquad \geqslant -8\pi^2 + \frac{1}{6}(\min_{i\in\{1,2\}} \mu(g_i))^2 - C\varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\mu(g_i) > 4\sqrt{3}\,\pi$, cette dernière expression est strictement positive pour un choix pertinent de ε, ce qui conclut la preuve de l'énoncé principal du corollaire 3.5 .

Notons pour finir que les exemples proposés vérifient l'hypothèse de l'énoncé : c'est banal, sauf peut-être pour le dernier pour lequel nous rappelons que $\mathbb{P}^2 \# c\overline{\mathbb{P}}^2$, $c \in \{3, \cdots, 8\}$ admet une métrique de Kähler-Einstein g_c pour laquelle $\mu(g_c) = 4\pi\sqrt{18 - 2c}$, (cf. [G1]).

4. LE CAS LIMITE : $\int_M (\sigma_2(A) - |W|^2/4)\, d\mathrm{vol} = 0$

On se ramène sans douleur au cas où $\int_M |W|^2\, d\mathrm{vol}$ est strictement positif en rappelant le résultat de M. Gursky (cf. [G1]) d'après lequel toute variété de dimension 4 conformément plate de courbure scalaire strictement positive et de caractéristique d'Euler nulle (si $\int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} = \frac{1}{4}\int_M |W|^2 = 0$, la caractéristique d'Euler de M, $\chi(M)$, s'annule nécessairement d'après la formule de Chern (1.3)) est conforme à un quotient compact du produit riemannien $(S^3, \mathrm{can}) \otimes \mathbb{R}$ par un sous-groupe d'isométries. Pour tout $\alpha < 1$, $\int_M (\sigma_2(A) - \alpha/4\, |W|^2)\, d\mathrm{vol} = (1-\alpha)/4 \int_M |W|^2\, d\mathrm{vol}$ est alors strictement positif et il existe donc dans la classe conforme de g, une métrique g_α pour laquelle $\sigma_2(A) - \alpha/4\, |W|^2$ est strictement positif. Malheureusement les estimations a priori dérivées précédemment dépendent lourdement du paramètre $\int_M (\sigma_2(A) - \alpha/4\, |W|^2)\, d\mathrm{vol}$, qui tend ici vers 0 lorsque α approche 1 ; nous devons donc les reprendre avant d'espérer conclure à l'existence d'une métrique pour laquelle le polynôme $4\,\sigma_2(A) - |W|^2$ serait partout positif ou nul (et donc nul sous notre hypothèse) en prenant la limite d'une suite adéquate de métriques g_{α_k}, $\alpha_k \to 1$.

Pour ce faire, Chang S.-Y. A., M. Gursky et Yang P. commencent par associer à chaque $\alpha < 1$ une solution g_α « canonique » du problème précédent, telle que le polynôme $\sigma_2(A) - \alpha/4\, |W|^2$ est non seulement strictement positif, mais aussi *constant*, une sorte de *jauge*, associée à un problème de Yamabe pour l'invariant quadratique $\sigma_2(A) - \alpha/4\, |W|^2$. On démontre pour cela le résultat plus général suivant

4.1. Le problème de Yamabe pour un polynôme quadratique en la courbure de Ricci : l'équation $4\,\sigma_2(A) - \alpha\, |W|^2 = \varphi$

THÉORÈME 4.1. — *Soit α un réel positif ou nul. Sur une variété riemannienne compacte sans bord de dimension 4, (M, g), qui n'est pas conforme à la sphère standard et pour laquelle $\int_M (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\, |W|^2)\, d\mathrm{vol}$ et la courbure scalaire sont strictement positifs, il existe, pour toute fonction infiniment différentiable et strictement positive φ, une métrique dans la classe conforme de g pour laquelle*

$$\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\, |W|^2 = \varphi\ . \tag{4.1}$$

Les solutions $e^{2f_\alpha} g$ de (4.1) vérifient de plus l'estimation a priori uniforme

$$\sup(|df_\alpha| + e^{f_\alpha}) \leqslant C\ , \tag{4.2}$$

où la constante C ne dépend que de (M, g), et de la norme C^2 et du minimum de la fonction φ.

Le cas particulier $\alpha = 0$ de ce résultat est l'objet de l'article [CGY1] auquel le lecteur de [CGY3] est renvoyé en guise de preuve. L'énoncé de Chang S.-Y. A., M. Gursky et Yang P. est en fait plus fort que celui du théorème 6 en ce qu'il affirme une majoration indépendante du minimum de φ. Ceci présente l'insigne avantage de faciliter la discussion du cas limite, mais aussi l'inconvénient de conduire à la

Contradiction : Le couple (*Theorem 1.1, Proposition 1.7*) de [CGY3], tout comme son cas particulier (*Main Theorem, Corollary B*) objet de [CGY1], est *contradictoire* : soient α un réel positif, (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension 4 de courbure scalaire strictement positive qui n'est pas conformément équivalente à la sphère standard (S^4, can) et telle que $\int_M (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2)\,d\mathrm{vol} > 0$. Notons qu'il existe de telles variétés : $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, F\text{-}S)$, satisfait par exemple les hypothèses précédentes pour tout $\alpha\,, 0 \leqslant \alpha < 1$. D'après [CGY3] il existe une solution f à l'équation $\big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2\big)(e^{2f}g) \equiv 1$; l'homogénéité du polynôme $4\,\sigma_2(A) - \alpha\,|W|^2$ entraîne par ailleurs que les métriques $e^{2(f+a)}g$, $a \in \mathbb{R}$, satisfont alors les équations $4\,\sigma_2(A) - \alpha\,|W|^2 = e^{-4a}$. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, les normes C^2 des fonctions (constantes) e^{-4a} sont majorées par 1, et d'après la *proposition 1.7* de [CGY3] il existerait une constante majorant $\sup_M(e^{f+a} + |df|)$ uniformément en $a \geqslant 0$.

Cette petite remarque démontre de même que la *proposition 1.7* de [CGY3] et le *Theorem A* de [CGY2] sont contradictoires.

On s'en tiendra donc à l'énoncé proposé ici. Sa démonstration repose sur l'énoncé du théorème 1, d'après lequel il existe une métrique dont le polynôme de courbure $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2$ est strictement positif dans la classe conforme de toute métrique vérifiant les hypothèses de positivité énoncées. On procède en deux étapes, de natures très différentes.

4.1.1. Majoration C^2 a priori pour les solutions de l'équation $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2 = \varphi$

PROPOSITION 4.2. — *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension 4 de courbure scalaire strictement positive qui n'est pas conforme à la sphère standard (S^4, can), φ une fonction infiniment différentiable et strictement positive sur M, et (a, b, c) trois nombres réels positifs ou nuls. Toute solution f de $\big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2\big)\,(e^{2f}g) = \varphi$, telle que $|\varphi|_{C^2} \leqslant a$, $\inf\varphi \geqslant b$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant c$ vérifie les majorations a priori $\sup(|df_\alpha| + e^{f_\alpha}) \leqslant C(a, b, c, g)$ et $|f|_{C^2} \leqslant C(a, b, c, \alpha, g)$.*

Pour nous en convaincre commençons par l'estimation a priori *locale* d'après laquelle toute solution de courbure scalaire strictement positive de l'équation $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2 = \varphi$ sur une boule de rayon ρ, $e^{2f}g$, vérifie la majoration a priori $|\mathrm{Hess} f|_{B(P,\,\rho/2)} \leqslant C$, où la constante C ne dépend que du rayon ρ, des normes C^2 de la métrique et de φ, ainsi que des normes sup de $|f|$ et de $|df|$, toute ces normes étant prises sur la boule $B(P, \rho)$. Il s'agit là d'une version « localisée » d'estimations que nous avons discutées précédemment dans leur version globale (cf. la partie 2.4, en particulier les paragraphes 2.4.1 et 2.4.2). À partir de l'identité

$$
\begin{aligned}
(4.3)\quad \big(G,\, \mathrm{Hess}\,(\mathrm{scal}\,)\big) = \\
& -3\,\Delta\,\sigma_2(A) + 3\,\Big(\,|D\,\mathrm{ric}_0|^2 - \frac{1}{12}|d\mathrm{scal}\,|^2\,\Big) \\
& \qquad + 6\,\mathrm{tr}\ \mathrm{ric}_0^3 + \mathrm{scal}\ |\mathrm{ric}_0|^2 - 6\,W(\mathrm{ric}_0, \mathrm{ric}_0) - 6\,(\mathrm{ric}_0,\, B)\,,
\end{aligned}
$$

déjà implicitement utilisée pour dériver la majoration (2.16), et de son alter ego pour $\big(G,\,\mathrm{Hess}\,|df|^2\big)$, on établit facilement l'inéquation différentielle

$$\begin{aligned}&\big(G,\,\mathrm{Hess}\,(\mathrm{scal}\,+12\,|df|^2)\big)\\ &\qquad\geqslant \frac{1}{48}\big(\mathrm{scal}+12\,|df|^2\big)^3 - C(\rho\,,\,|\varphi|_{C^2(B(p,\rho))}\,,\,|g|_{C^2(B(P,\rho))}\,,\,|f|_{C^1(B(P,\rho))}\big).\end{aligned}$$

Par hypothèse $\sigma_2(A)$ est strictement positif et G, qui est minoré par $3\,\sigma_2(A)/\mathrm{scal}\,g$, est donc défini positif ; le principe du maximum appliqué à l'inéquation différentielle précédente conduit alors à une majoration de la courbure scalaire sur $B(P,\rho/2)$ en terme de la constante figurant dans l'inéquation, et donc des seuls paramètres dont celle-ci dépend. L'expression de la courbure scalaire dans une classe conforme (2.13) permet finalement de conclure que les dérivées secondes sont uniformément bornées :

$$\sup_M |\,\mathrm{Hess}\,f\,| \leqslant C(\rho, |\varphi|_{C^2(B(P,\rho))}, |g|_{C^2(B(P,\rho))}, |f|_{C^1B(P,\rho))}\big) \tag{4.4}$$

4.1.1.1. L'éclatement. — Reprenons la preuve de la proposition 4.2 et démontrons, sous les hypothèses de l'énoncé, que l'expression $e^f + |df|^2$ est uniformément majorée : nous aurions sinon une suite de réels positifs ou nuls α_k, une suite φ_k de fonctions uniformément minorées, $\varphi_k \geqslant a > 0$, et de normes C^2 uniformément majorées, $|\varphi_k|_{C^2} \leqslant b$, une suite, f_k, de solutions du système $\big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha_k}{4}\,|W|^2\big)\,(e^{2f_k}g) = \varphi_k$ et $\mathrm{scal}\,(e^{2f_k}g) > 0$, et une suite de points, P_k, de M, tels que la suite

$$(|df_k| + e^{f_k})(P_k) = \sup_M(|df_k| + e^{f_k}) := \varepsilon_k^{-1}$$

diverge lorsque k tend vers l'infini. Choisissons un réel positif, r_0, inférieur au rayon d'injectivité de (M,g) et identifions les boules $B(P_k, r_0)$ avec « la » boule euclidienne $B(r_0)$ via l'exponentielle de la métrique g. En notant, pour tout ε strictement positif, h_ε l'homothétie de rapport ε, introduisons pour toute fonction, f, sur la boule $B(r_0)$ son ε-*renormalisation*, définie sur la boule $B(r_0/\varepsilon)$ par l'identité $f_\varepsilon = f\circ h_\varepsilon + \log\varepsilon$; pour tout entier positif k, la fonction f_{k,ε_k} est alors définie sur la boule $B(r_0/\varepsilon_k)$ et vérifie sur cette boule la majoration

$$|df_{k,\varepsilon_k}| + e^{f_{k,\varepsilon_k}} \leqslant 1\ . \tag{4.5}$$

Par construction nous avons aussi l'identité

$$(|df_{k,\varepsilon_k}| + e^{f_{k,\varepsilon_k}})(0) = 1\ . \tag{4.6}$$

Introduisons encore les métriques $\widehat{g}_k = e^{2f_{k,\varepsilon_k}}g\circ h_{\varepsilon_k}$ et $\widehat{\widehat{g}}_k = g\circ h_{\varepsilon_k}$, définies sur la boule $B(r_0/\varepsilon_k)$; la suite $(\widehat{\widehat{g}}_k)$ converge clairement vers la métrique euclidienne (en norme C^ℓ, ℓ entier arbitraire, et uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^4$), tandis que l'équation $\widehat{g} = h^*_{\varepsilon_k}(e^{2f_k}g)$ entraîne par « naturalité » et homogénéité du polynôme $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2$ l'identité

$$\sigma_2(A(\widehat{g}_k)) - \frac{\alpha_k}{4}\,|W(\widehat{g}_k)|^2 = \big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha_k}{4}|W|^2\big)\,(e^{2f_k}g)\circ h_{\varepsilon_k} = \varphi_k\circ h_{\varepsilon_k}\ . \tag{4.7}$$

Si $\lim_{k\to+\infty} e^{f_{k,\varepsilon_k}(0)} = 0$, nous introduisons la suite de métriques $\breve{g}_k$, définies sur $B(r_0/\varepsilon_k)$ par $\breve{g}_k := e^{2(f_{k,\varepsilon_k}-f_{k,\varepsilon_k}(0))}\widehat{\widehat{g}}_k$. En invoquant à nouveau l'homogénéité du polynôme $\sigma_2(A) - \frac{\alpha_k}{4}\,|W|^2$, l'équation $\breve{g}_k = e^{-2f_{k,\varepsilon_k}(0)}\widehat{g}_k$ permet d'écrire l'identité (4.7) sous la forme

$$\sigma_2(A(\breve{g}_k)) - \frac{\alpha_k}{4}\,|W(\breve{g}_k)|^2 = e^{4f_{k,\varepsilon_k}(0)}\varphi_k \circ h_{\varepsilon_k}\ . \tag{4.8}$$

Pour tout R positif, et tout k assez grand pour que $\varepsilon_k < r_0/R$, nous avons encore par construction

$$|d(f_{k,\varepsilon_k} - f_{k,\varepsilon_k}(0))| \leqslant 1\ , \tag{4.9}$$

$$(f_{k,\varepsilon_k} - f_{k,\varepsilon_k}(0))(0) = 0\ , \tag{4.10}$$

et donc la majoration $\sup\limits_{B(R)} |f_{k,\varepsilon_k} - f_{k,\varepsilon}(0)| \leqslant R$: sur tout compact de $\mathbb{R}^4$, la suite $(f_{k,\varepsilon_k} - f_{k,\varepsilon_k}(0))$ est uniformément bornée dans la topologie C^1. Nous avons aussi, toujours par construction

$$\lim_{k\to+\infty} |d(f_{k,\varepsilon_k} - f_{k,\varepsilon_k}(0))|(0) = \lim_{k\to+\infty} |df_{k,\varepsilon_k}|(0) = 1\ . \tag{4.11}$$

Dans ce cas, l'estimation locale a priori (4.4) conduit à une borne uniforme sur les hessiens des fonctions $(f_{k,\varepsilon_k} - f_{k,\varepsilon_k}(0))$: en passant à la limite en k sur cette suite de fonctions nous obtenons une métrique $C^{1,1}$, $\breve{g} = e^{2\breve{f}}(\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2)$ et, pour tout β, $\beta < 1$, une sous-suite des fonctions $(f_{k,\varepsilon_k} - f_{k,\varepsilon_k}(0))$ convergeant uniformément sur tout compact vers $\breve{f}$ dans la topologie $C^{1,\beta}$. De plus la métrique $\breve{g}$ vérifie les équations limites (cf. 4.8)

$$\sigma_2(A(\breve{g})) = 0\,,\ \mathrm{scal}\,(\breve{g}) \geqslant 0\,,\ \text{et } |d\breve{f}|(0) = \lim_{k\to+\infty} |df_{k,\varepsilon_k}|(0) = 1\ . \tag{4.12}$$

Sinon $\limsup_k e^{f_{k,\varepsilon_k}(0)} = \ell\ ,\ 0 < \ell \leqslant 1$, et une sous-suite, que nous noterons encore – abusivement – f_{k,ε_k}, vérifie alors que $f_{k,\varepsilon_k}(0)$ est minoré uniformément en $k : -c \leqslant f_{k,\varepsilon_k}(0) \leqslant 0$, $c \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque par construction $|df_{k,\varepsilon_k}| \leqslant 1$, la suite f_{k,ε_k} est uniformément bornée en norme C^1 sur tout compact de $\mathbb{R}^4$ (nous ne considérons évidemment que les entiers $k \geqslant k_0$, où k_0 est suffisamment grand pour que $\varepsilon_{k_0} < r_0/R$, R étant lui-même choisi tel que la boule $B(R)$ contient le compact considéré). Les fonctions φ_k étant uniformément minorées par hypothèse et α étant positif ou nul, les équations (4.7) satisfaites par les fonctions f_{k,ε_k} sont uniformément elliptiques : nous avons déjà discuté à plusieurs reprises la façon dont la concavité de l'opérateur $\sqrt{\sigma_2(A)}$ permet de passer des bornes C^2 provenant de ce qui précède et de l'estimation locale (4.4) à une borne en norme $C^{2,\beta}$, $\beta > 0$; nous savons aussi comment utiliser la théorie elliptique ordinaire pour passer de la borne $C^{2,\beta}$ à une borne uniforme dans toutes les normes $C^p, p \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où $\limsup e^{f_{k,\varepsilon_k}(0)} = \ell > 0$, une sous-suite des fonctions f_{k,ε_k} converge donc, dans les normes C^m, $m \in \mathbb{N}$, et de façon uniforme sur tout compact, vers une fonction infiniment différentiable f satisfaisant de plus l'équation limite

$$\sigma_2(A(e^{2f}\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2)) = b > 0\,, \quad (\text{et donc, } \operatorname{scal}(e^{2f}\,\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2) > 0)\ ; \tag{4.13}$$

on notera en effet que dans l'identité (4.7) les coefficients α_k sont uniformément majorés par c par hypothèse et que le terme $|W(\widehat{g}_k)|^2$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, puisque la covariance conforme de la courbure de Weyl et la relation $\widehat{g}_k = e^{2f_{k,\varepsilon_k}}\widehat{\widehat{g}}_k$ entraînent l'identité $|W(\widehat{g}_k)|^2 = e^{-4f_{k,\varepsilon_k}}\,|W(\widehat{\widehat{g}}_k)|^2$, où la suite f_{k,ε_k} est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbb{R}^4$, et où les métriques $(\widehat{\widehat{g}}_k)$ convergent par construction vers la métrique euclidienne, plate, et donc conformément plate.

4.1.1.2. Classification des éclatements. — Commençons par démontrer que le système (4.12) satisfait par la métrique $\breve{g}$ de $\mathbb{R}^4$ obtenue par l'éclatement précédent dans le cas où $\lim_k e^{f_{k,\varepsilon_k}(0)} = 0$ n'admet aucune solution : pour toute métrique conforme à la métrique euclidienne, $g = e^{2f}\,\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2$, pour toute fonction de troncature $\eta := \eta_R$, de support la boule $B(2R)$, $R > 0$, égale à 1 sur $B(R)$, de gradient et de hessien majorés par C/R et C/R^2 respectivement, où C, $C \in \mathbb{R}_+^*$, est une constante universelle, on vérifie la majoration générale (et élémentaire) suivante

$$\begin{aligned}
&\int_{B(2R)} \Big(\frac{\operatorname{scal}}{2}\, e^{2f}\,|df|^2 + |df|^4\Big)\,\eta^4\,\mathrm{dvol} \\
&\quad\leqslant \int_{B(2R)} (f - \overline{f}^{\,R})\,\sigma_2(A)\,e^{4f}\,\eta^4\,\mathrm{dvol} + C\,R^{-2}\int_{B(2R)\smallsetminus B(R)} (f - \overline{f}^{\,R})\,|df|^2\,\eta^2\,\mathrm{dvol} \\
&\qquad\qquad + C\,R\int_{B(2R)\smallsetminus B(R)} (f - \overline{f}^{\,R})\,|df|^3\,\eta^3\,\mathrm{dvol} \\
&\quad\leqslant \int_{B(2R)} (f - \overline{f}^{\,R})\,\sigma_2(A)\,e^{4f}\,\eta^4\,\mathrm{dvol} + C\,\Big(\int_{B(2R)\smallsetminus B(R)} \eta^4\,|df|^4\,\mathrm{dvol}\Big)^{1/2}\,,
\end{aligned}$$

où par $\overline{f}^{\,R}$ on représente la moyenne de f sur la boule $B(2R)$. La métrique $\breve{g}$, satisfaisant les équations $\sigma_2(A(\breve{g})) = 0$ et $\operatorname{scal}(\breve{g}) \geqslant 0$ (cf. (4.12)), la majoration précédente s'écrit dans ce cas particulier $\int_{B(2R)} \eta^4\,|df|^4\,\mathrm{dvol} \leqslant C\sqrt{\int_{B(2R)\smallsetminus B(R)} \eta^4\,|df|^4\,\mathrm{dvol}}$, et implique clairement que la fonction $\breve{f}$ est nécessairement constante, ce qui contredit l'identité $|d\breve{f}(0)| = 1$ (cf. 4.12)). De ceci nous déduisons que $\limsup e^{f_{k,\varepsilon_k}(0)}$ est nécessairement strictement positive et que la métrique obtenue sur $\mathbb{R}^4$ par éclatement satisfait donc toujours l'identité de courbure (4.13).

Nous démontrons maintenant qu'une telle métrique est nécessairement de courbure sectionnelle constante, et donc l'image de la métrique d'une sphère ronde – ou d'une de ses images par le groupe conforme – par la projection stéréographique. Cette preuve peut être considérée comme une généralisation (pas tout à fait immédiate) de l'énoncé (facile, lui) de M. Obata d'après lequel toute métrique de courbure scalaire constante dans la classe conforme de la sphère ronde est en fait de courbure sectionnelle constante, le tenseur

$$L := \frac{1}{4}\,|\mathrm{ric}_0|^2 g + \frac{1}{6}\,\mathrm{scal}\;\mathrm{ric}_0 - \mathrm{ric}_0^2$$

jouant ici le rôle tenu par ric_0 dans l'argument de M. Obata. Notons pour commencer que le tenseur L est non seulement clairement de *trace nulle*, mais aussi de *divergence nulle*, d'après la seconde identité de Bianchi : ce sont là les deux propriétés clés du tenseur ric_0 dans l'argument de M. Obata. Une petite discussion algébrique démontre ensuite, sous les hypothèses $\sigma_2(A) > 0$ et $\mathrm{scal} > 0$, que la trace (L, ric_0) est partout positive ou nulle – le tenseur ric_0 s'annulant de plus identiquement là où $(L, \mathrm{ric}_0) = 0$ –, ainsi que la majoration $|L|^2 \leqslant 1/3\,\mathrm{scal}\,(L, \mathrm{ric}_0)$.

En utilisant la fonction de troncature η_R introduite précédemment, ces propriétés conduisent facilement à la majoration

$$\begin{aligned}\int_{B(2R)} \big(L, \mathrm{ric}_0\big)\, e^f\, \eta_R^2\, d\mathrm{vol} \\ \leqslant C \sqrt{\int_{B(2R)\smallsetminus B(R)} \big(L, \mathrm{ric}_0\big)\, e^f\, \eta_R^2\, d\mathrm{vol}} \sqrt{\int_{B(2R)} \mathrm{scal}\; |df|^2\, e^f\, |d\eta_R|^2\, d\mathrm{vol}}\;;\end{aligned}$$

pour conclure à l'annulation de ric_0 – et donc à la platitude projective de $e^{2f}\,\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2$ – il reste à majorer $\int_{B(2R)} \mathrm{scal}\; |df|^2\, e^f\, |d\eta_R|^2\, d\mathrm{vol}$ indépendamment de R, c'est-à-dire à majorer l'expression $R^{-2} \int_{B(2R)\smallsetminus B(R)} \mathrm{scal}\; e^f\, |df|_0^2\, d\mathrm{vol}_0$ uniformément en R (où l'indice 0 renvoie à la métrique euclidienne). Ceci s'avère moins banal qu'attendu, la clé en étant une minoration (asymptotique) du facteur conforme e^{2f} de toute métrique conforme à la métrique euclidienne et de courbure scalaire positivement minorée, qui découle de [KMPS] : dès que $\inf_M \mathrm{scal} > 0$, et pour $|x|$ assez grand, $e^{2f(x)} \geqslant C\, |x|^{-4}$, où la constante $C = C(\inf_M \mathrm{scal})$ tend vers zero avec le minimum de la courbure scalaire, $\inf_M \mathrm{scal}$.

4.1.1.3. Conclusion. — Si la majoration uniforme de $|df|^2 + e^f$ n'a pas lieu, nous disposons d'après la discussion précédente d'une suite de fonctions f_{k,ε_k} convergeant vers une fonction infiniment différentiable f telle que $e^{2f}\,\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2$ est une métrique de courbure constante sur $\mathbb{R}^4$. Cette métrique $e^{2f}\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2$ est la limite $C^k, k \geqslant 2$, uniforme sur tout compact, des métriques $e^{2f_{k,\varepsilon_k}}\,\widehat{\widehat{g}}_k = \widehat{g}_k = h_{\varepsilon_k}^*(e^{2f_k} g)$; pour tout $R > 0$ nous avons donc

$$\begin{aligned}\int_{(B(R),\, e^{2f}\,\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2)} \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} &= \lim_{k\to+\infty} \int_{B(R)} \sigma_2(A(e^{2f_k} g)) \circ h_\varepsilon\;\; h_\varepsilon^*(d\mathrm{vol}(e^{2f_k} g)) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_{(B(P_k,\, \varepsilon_k R),\, e^{2f_k} g)} \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} \leqslant \lim_{k\to+\infty} \int_{(M,\, e^{2f_k} g)} \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol}\,,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la « naturalité » de la courbure – i.e. l'identité tautologique $R(F^*g) = F^*R(g)$, valable pour tout difféomorphisme F – (pour la première identité), et l'hypothèse $\sigma_2(A(e^{2f_k}g)) = \varphi_k + \frac{\alpha}{4}\,|W(e^{2f_k}g)|^2 > 0$ (pour la dernière majoration). En passant alors à la limite sur $R, R \to +\infty$, et en rappelant l'invariance conforme de l'intégrale $\int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol}$, nous en déduisons la minoration

$$16\,\pi^2 = \int_{(S^4,\,\mathrm{can})} \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} = \int_{(\mathbb{R}^4,\, e^{2f}\,\Sigma_{i=1}^4 dx_i^2)} \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol} \leqslant \int_{(M,\,g)} \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol}\ .$$

Mais on sait que l'inégalité opposée est vraie pour toute variété compacte sans bord de dimension 4 et de courbure scalaire strictement positive (il suffit en fait que l'invariant de Yamabe soit positif ou nul), et que le cas d'égalité caractérise la classe conforme de la sphère standard (cf. [G2], Theorem B), ce qui conclut la preuve de la majoration uniforme de $|df|^2 + e^{2f}$ annoncée :

$$\sup_M\, (\,|df|^2 + e^{2f}\,) \leqslant C(\,|\varphi|_{C^2},\, \inf_M \varphi\,,\, g)\ . \tag{4.14}$$

En intégrant alors l'équation $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2 = \varphi$ en une solution f, et en rappelant que par hypothèse α est positif ou nul, nous obtenons la minoration

$$0 < \int_{(M,\,g)} (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2)\, d\mathrm{vol} = \int_{(M,\,e^{2f}g)} (\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2)\, d\mathrm{vol} = \int_{(M,\,e^{2f}g)} \varphi\, d\mathrm{vol}$$
$$= \int_{(M,\,g)} \varphi\, e^{4f}\ d\mathrm{vol} \leqslant \sup_M\ \varphi\ \mathrm{vol}(g)\ e^{4\sup_M f}\ .$$

Ceci garantit l'existence d'un minorant du maximum, $\sup_M f$, ne dépendant que de g, d'un minorant strictement positif de $\int_M \sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2)\, d\mathrm{vol}$ et de $\sup_M |\varphi|$ (notons que $\int_{(M,\,g)} \varphi\, d\mathrm{vol}$ suffirait par l'argument précédent, puisque par hypothèse $\varphi \geqslant 0$) ; d'après la majoration uniforme (4.14) de f et de $|df|$, $|f|$ – et donc $|\mathrm{Hess} f|$ par l'estimation a priori locale (4.4) – sont alors uniformément majorés par une constante ne dépendant que de g, de α, de la norme C^2 de φ, et d'un minorant de φ, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.2.

4.1.2. Invariance homotopique du degré de Leray-Schauder-Li. — Nous supposerons dans ce paragraphe que (M^4, g) n'est pas conformément équivalente à la sphère standard. Pour résoudre l'équation $4\,\sigma_2(A) - \alpha\,|W|^2 = \varphi$ nous invoquons la théorie du degré de Leray-Schauder : Li Y.Y. introduit dans [L] un tel degré pour tout opérateur elliptique du second ordre, F, sur une variété riemannienne compacte. La stratégie est classique (cf. [FP]) : on remarque, l'opérateur $(\Delta + 1\mathrm{d})$ étant inversible, que F, et sa composition avec $(\Delta + 1\mathrm{d})$, $(\Delta + 1\mathrm{d}) \circ F$, ont les mêmes solutions, l'opérateur du quatrième degré $(\Delta + 1\mathrm{d}) \circ F$ présentant l'avantage de pouvoir s'écrire $\Big(a(x, f, df, D^2 f) \otimes g\,,\, D^4 f\Big) + C(x, f, \cdots, D^3 f)$, où a représente le symbole principal de l'opérateur elliptique F, un 2-tenseur symétrique défini positif. En introduisant l'opérateur linéaire $L_f \varphi = \Big(a_f \otimes g,\, D^4\varphi\Big) + C_f$, nous pouvons encore écrire $(\Delta + 1\mathrm{d}) \circ F(f)$ sous la forme $L_f(f)$. Il reste à vérifier que, pour tout entier k assez grand, l'opérateur $M_{f,k} := L_f - C_f + k\,(\Delta + 1\mathrm{d})$ est un isomorphisme et à observer que l'opérateur $C_f - k\,(\Delta + 1\mathrm{d})$ est compact (de $C^{4,\,\alpha}$ vers C^{α}), ce qui permet alors de considérer le degré – au sens de Leray et Schauder – de la perturbation compacte de l'identité $1\mathrm{d} + M_{f,k}^{-1}\big(C_f - k\,(\Delta + 1\mathrm{d})\big)$. En invoquant l'invariance homotopique du degré de Leray-Schauder on démontre que ce degré ne dépend pas de k ; par ailleurs, il « compte » bien les solutions de notre problème puisque, $(\Delta{+}1\mathrm{d})$ et $M_{f,k}$ étant des isomorphismes, $F(f) = 0$, $(\Delta + 1\mathrm{d})F(f) = 0$, $L_f(f) = (M_{f,k} + C_f - k\,(\Delta + 1\mathrm{d}))f = 0$, et $\big(1\mathrm{d} + M_{f,k}^{-1}\big(C_f - k\,(\Delta + 1\mathrm{d})\big)\big)\,f = 0$ sont des énoncés équivalents. Comme on l'aura deviné, Li Y.Y. établit l'*invariance homotopique* de ce degré – au moins pour une déformation *uniformément elliptique* et sous l'existence d'une borne a priori $C^{4,\,\beta}$ uniforme sur les solutions. Il vérifie de plus que le degré de l'opérateur elliptique du second ordre F coïncide, en une solution f où la linéarisation de F est inversible, avec le degré en 0 du linéarisé, et que ce dernier est donné par la formule

$$\sum_{\lambda_i < 0} (-1)^{\beta_i}\ , \tag{4.15}$$

où par $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on représente le spectre du linéarisé en f et par β_i la multiplicité de la i-ième valeur propre λ_i. Bien qu'élémentaire et aujourd'hui classique, cette théorie n'en reste pas moins élégante et bien utile.

Sous l'hypothèse de positivité du théorème 4.1 nous avons établi (et de deux façons très différentes) l'existence d'une solution $f_\alpha^{\diamondsuit}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, à l'équation $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2 > 0$. Posons $\varphi_\alpha = \big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2\big)\,(e^{2f_\alpha^{\diamondsuit}}g)$ et introduisons la déformation

$$\sigma_2 - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2 = (1-t)\,\varphi + t\,\varphi_\alpha\ . \tag{4.16}$$

La minoration uniforme

$$\inf_M((1-t)\,\varphi + t\,\varphi_\alpha) \geqslant \min\,(\inf\varphi, \inf\varphi_\alpha) > 0 \tag{4.17}$$

permet d'invoquer la proposition 4.2 pour majorer uniformément les solutions de (4.16) en termes de g, des normes C^2 de φ et φ_α, et de $\min\,(\inf\,\varphi,\, \inf\,\varphi_\alpha)$ uniquement. La minoration (4.17) garantit par ailleurs que les symboles principaux sont uniformément minorés, puisqu'égaux au tenseur gravitationnel $G = -\mathrm{ric} + 1/2\,\mathrm{scal}\,g$, minoré par $3\,\frac{\sigma_2(A)}{\mathrm{scal}}\,g$, la borne C^2 donnée par la proposition 4.2 permettant par ailleurs de majorer uniformément la courbure scalaire.

Pour établir l'existence d'une solution de l'équation $(4.16)_{t=0}$, il suffit, d'après la théorie du degré de Li rappelée ci-dessus, de démontrer que le degré de l'équation $(4.16)_{t=1}$ en sa solution f_α n'est pas nul. Pour cela il peut être utile d'écrire l'équation $(4.16)_{t=1}$ sous la forme d'une *divergence*

$$d^*(M(f)\,df) - \varphi_\alpha\,(e^{4f} - 1) = 0\,, \tag{4.18}$$

où le 2-tenseur symétrique $M(f) := G(e^{2f}g) + G(g) + |df|_g^2\, g$ est défini positif dès que $G(e^{2f}g)$ et $G(g)$ le sont, en particulier lorsque $\sigma_2(A(e^{2f}g))$, $\sigma_2(A(g))$, $\mathrm{scal}\,(e^{2f}g)$ et $\mathrm{scal}\,(g)$ sont strictement positifs.

Pour calculer le degré de (4.18) en sa solution $f = 0$, nous invoquons à nouveau l'invariance homotopique du degré que nous appliquons à la déformation suivante de l'équation (4.18)

$$d^*(M(f)\,df) + \varphi_\alpha = (1-t)\,\varphi_\alpha\, e^{4f} + t\,\varphi_\alpha \int_{(M,\, e^{2f}g)} e^{4f}\, d\mathrm{vol} \;; \tag{4.19}$$

nous nous ramenons ainsi à calculer le degré de l'équation $(4.19)_{t=1}$ en 0 (remarquez, en supposant sans restriction que $\mathrm{vol}(g) = 1$, que $f = 0$ est solution de (4.19) pour tout t).

Les estimations a priori $C^{4,\alpha}$ requises par la théorie de Li Y.Y. sont établies, pour t assez loin de 1, en raisonnant comme pour la démonstration de la proposition 4.2 ; pour t proche de 1 (et loin de zéro, donc) les auteurs s'appuient directement sur une inégalité « classique » de J. Moser et N. Trudinger d'après laquelle, pour une constante universelle c_1, $c_1 > 0$, l'intégrale

$$\int_M \exp\Big(\frac{c_1\,|\,\varphi - \overline{\varphi}\,|}{(\int_M |\,d\varphi|^4\, d\mathrm{vol})^{1/4}}\Big)^{4/3} d\mathrm{vol}$$

est uniformément majorée sur $L^{1,4}((M^4, g))$.

La minoration

$$\begin{aligned}(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2)\,(e^{2f}g) &= e^{-4f}\, d^*(M(f)\,df)\\ &= e^{-4f}\, t\,\varphi_\alpha \int_{(M,\, e^{2f}g)} e^{4f}\, d\mathrm{vol} + (1-t)\;\varphi_\alpha\\ &\geqslant \min\,(e^{-12\,\sup_M |f|},\, 1)\,\inf \varphi_\alpha\end{aligned}$$

permet alors de minorer uniformément le symbole principal, G, comme précédemment.

Il reste à évaluer le degré en $t = 1$. En intégrant sur M la spécialisation en $t = 1$ de l'équation (4.19) nous dérivons la condition nécessaire

$$\int_{(M,\, e^{2f}g)} e^{4f}\, d\mathrm{vol} = 1\,, \tag{4.20}$$

en vertu de laquelle l'équation $(4.19)_{t=1}$ se simplifie pour donner l'identité $d^*(M(f)\,df) = 0$.

En intégrant cette dernière contre df, on établit – la forme bilinéaire symétrique $M(f)$ étant définie positive – que f est nécessairement constante, et donc nulle d'après l'identité (4.20) sous la normalisation, toujours possible : $\mathrm{vol}(g) = 1$. Considérons alors la linéarisation de l'équation $(4.19)_{t=1}$ en la fonction identiquement nulle, son unique solution :

$$L_0(u) = -2\,\big(G(g),\,\mathrm{Hess}\,u\big) - 4\,\varphi_\alpha \int_{(M,\,g)} u\,d\mathrm{vol}\ .$$

Puisque la fonction φ_α est strictement positive, en intégrant sur M cette équation on démontre que tout élément du noyau de L_0 est d'intégrale nulle. Le tenseur gravitationnel G étant défini positif, le principe du maximum (ou, de façon équivalente, le tenseur gravitationnel étant de divergence nulle, l'identité $-\int_M \big(G,\,\mathrm{Hess}\,u\big)\,d\mathrm{vol} = \int_M G\big(du^\sharp\,,\,du^\sharp\big)\,d\mathrm{vol}$ entraîne alors que la fonction u est identiquement nulle. Puisque le noyau de L_0 est réduit à $\{0\}$, nous pouvons invoquer la formule (4.15) pour calculer le degré de L_0 : si λ est valeur propre de L_0, l'équation $L_0(u_\lambda) = \lambda\,u_\lambda$ s'intègre en l'identité

$$\Big(\lambda + 4\int_M \varphi_\alpha\,d\mathrm{vol}\Big)\int_M u_\lambda\,d\mathrm{vol} = 0\ ; \tag{4.21}$$

$-4\int_M \varphi_\alpha\,d\mathrm{vol}$ est effectivement valeur propre, les constantes appartenant à l'espace propre associé. Pour les autres valeurs propres, nous déduisons de l'identité (4.21) la condition nécessaire $\int_M u_\lambda\,d\mathrm{vol} = 0$, et donc, en rappelant que le tenseur gravitationnel est de divergence nulle, l'identité $\lambda\,u_\lambda^2 = (L_0\,u_\lambda, u_\lambda) = 2\,u_\lambda\,d^*\big(G(du_\lambda^\sharp)\big)$: ces valeurs propres, qui satisfont alors l'identité $\lambda = \int_M G(du_\lambda^\sharp,\,du_\lambda^\sharp)\,d\mathrm{vol}\,/\,\int_M |\,du_\lambda\,|^2\,d\mathrm{vol}$, sont toutes (strictement) positives. L'opérateur L_0 admet ainsi une unique valeur propre négative, de multiplicité nécessairement égale à un en tant que « plus petite valeur propre » de L_0 – un corollaire classique du principe du maximum. Le degré de L_0 à l'origine, calculé à l'aide de la formule (4.15), vaut donc -1. Par les arguments qui précèdent, c'est encore le degré de l'équation $\sigma_2 - \alpha/4\,|W|^2 = \varphi$, dont nous démontrons ainsi qu'elle admet (au moins) une solution. Ceci conclut la preuve du théorème 4.1.

4.2. Démonstration du théorème 2

4.2.1. Construction d'une solution $C^{1,\,1}$. — Dans les premières lignes de ce dernier chapitre nous avons expliqué comment ramener le problème au cas où $\int_M |W|^2\,d\mathrm{vol}$ est strictement positif : nous supposerons donc désormais que la variété (M, g) n'appartient pas à la classe conforme de la sphère standard. Pour tout α, $\alpha \in [0, 1)$, $\int_M (\sigma_2(A) - \alpha/4\,|W|^2)\,d\mathrm{vol} = (1-\alpha)/4\,\int_M |W|^2\,d\mathrm{vol}$ étant strictement positif, le théorème 4.1 appliqué à la fonction $\varphi \equiv 1$ assure l'existence d'une solution f_α de l'équation

$$\Big(\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}\,|W|^2\Big)\,(e^{2f_\alpha} g) = 1\ , \tag{4.22}$$

ainsi qu'une majoration du $\sup_M(e^{f_\alpha}+|df_\alpha|\,)$ uniforme en α , $\alpha\in[0,1)$. En intégrant l'équation (4.22) nous dérivons cependant la majoration banale suivante du minimum de f_α :

$$\begin{aligned}(4.23)\quad \frac{1-\alpha}{4}\int_M |W|^2\,d\mathrm{vol} &= \int_M \Big(\sigma_2(A)-\frac{\alpha}{4}\,|W|^2\Big)\,d\mathrm{vol}\\ &= \int_{(M,\,e^{2f_\alpha}g)}\Big(\sigma_2(A)-\frac{\alpha}{4}\,|W|^2\Big)\,d\mathrm{vol} = \int_{(M,\,e^{2f_\alpha}g)} d\mathrm{vol} = \int_{(M,\,g)} e^{4f_\alpha}\,d\mathrm{vol}\\ &\geqslant e^{4\inf_M f_\alpha}\int_{(M,\,g)} d\mathrm{vol}\,,\end{aligned}$$

et concluons que nécessairement $\lim_{\alpha\to 1}\inf_M f_\alpha=-\infty$: les solutions f_α ne sauraient satisfaire les conclusions de la proposition 4.2 (cf. les commentaires faisant suite à l'énoncé du théorème 4.1). Par contre, en définissant pour tout α, $\alpha\in[0,1)$, a_α et $\widetilde{f}_\alpha$ par les formules

$$(4.24)\qquad e^{4a_\alpha} := \frac{1-\alpha}{4}\fint_M |W|^2\,d\mathrm{vol}\,,\quad \text{et}\quad \widetilde{f}_\alpha := f_\alpha - a_\alpha\,,$$

les identités précédentes démontrent que $\int_{(M,\,g)} e^{4\widetilde{f}_\alpha}\,d\mathrm{vol} = 1$; nous en déduisons une minoration de $\sup_M \widetilde{f}_\alpha$, et une majoration de $\inf_M \widetilde{f}_\alpha$, cette fois toutes les deux uniformes en α . Puisque les normes des différentielles $|d\widetilde{f}_\alpha| = |df_\alpha|$ sont aussi uniformément majorées, nous concluons que les fonctions $\widetilde{f}_\alpha$ sont uniformément bornées : il existe une constante C, indépendante de α, $\alpha\in[0,1)$, telle que

$$(4.25)\qquad \sup_M |\widetilde{f}_\alpha| < C\ .$$

Les fonctions $\widetilde{f}_\alpha$ satisfaisant les équations

$$(4.26)\qquad \Big(\sigma_2(A)-\frac{\alpha}{4}\,|W|^2\Big)\,(e^{2\widetilde{f}_\alpha}g) = e^{4a_\alpha}\Big(\sigma_2(A)-\frac{\alpha}{4}\,|W|^2\Big)\,(e^{2f}g) = e^{4a_\alpha}\,,$$

et les normes C^2 des fonctions (constantes) e^{4a_α}, $\alpha\in[0,1)$, étant uniformément bornées d'après l'identité 4.24, la proposition 4.2 (en particulier l'estimation a priori (4.4)), garantit alors que les fonctions $(\widetilde{f}_\alpha)_{0\leqslant\alpha<1}$ sont uniformément bornées en norme C^2. Il existe donc une métrique $C^{1,1}$, $e^{2\widetilde{f}}g$, telle que, pour tout $\beta\in[0,1)$, il existe une suite α_k , $\alpha_k\to 1$, pour laquelle les métriques $e^{2\widetilde{f}_{\alpha_k}}g$ convergent dans la topologie $C^{1,\beta}$ vers $e^{2\widetilde{f}}g$. De l'équation 4.26 nous déduisons de plus que la limite $e^{2\widetilde{f}}g$ vérifie, au sens faible, l'équation $4\,\sigma_2(A)-|W|^2=0$. On ne peut cependant pas espérer utiliser cette équation pour améliorer les estimations C^2 précédentes, puisqu'elle cesse d'être elliptique là où $\sigma_2(A)$ s'annule – c'est-à-dire là où la métrique initiale g est conformément plate.

Par contre, au voisinage d'un point, P, où la courbure de Weyl de la métrique g ne s'annule pas, nous disposons de la minoration

$$\sigma_2\big(A(e^{2\,\widetilde{f}_\alpha}g)\big) = \frac{\alpha}{4}\,|W(e^{2\widetilde{f}_\alpha}g)|^2 + e^{4a_\alpha} \geqslant \frac{\alpha}{4}\,e^{-4\widetilde{f}_\alpha}\,|W(g)|^2\,,$$

la borne uniforme (4.25) entraînant alors une minoration uniforme de $\sigma_2\big(A(e^{2\widetilde{f}_\alpha}g)\big)$ sur un voisinage de P. En écrivant l'équation sous la forme $\sqrt{\sigma_2(A)} - \sqrt{\frac{\alpha}{4}\,|W|^2 + e^{4a_\alpha}}$, nous pouvons invoquer une dernière fois la théorie d'Evans et Krylov pour les équations concaves strictement elliptiques qui établit alors l'existence de bornes $C^{2,\beta}$ uniformes, $\beta > 0$, sur un voisinage un peu plus petit ; pour tout entier naturel l, $l \in \mathbb{N}$, la théorie elliptique standard garantit ensuite la convergence dans la norme C^l d'une sous-suite $e^{2\widetilde{f}_{\alpha_k}}g$ vers la métrique $e^{2\widetilde{f}}g$, démontrant ainsi que la métrique $e^{2\widetilde{f}}g$ est infiniment différentiable en dehors des zéros de la courbure conforme de g. Pour conclure la preuve du théorème 2, il me reste à vous convaincre que cet ensemble $|W|^{-1}(0)$, le lieu des zéros de la courbure de Weyl, est nécessairement *vide* dans les cas pertinents.

4.2.2. Rigidité des métriques plates au sens de Bach. — S'il existe sur M une métrique telle que $\int_M (\sigma_2(A) - |W|^2/4)\, d\mathrm{vol} > 0$, c'est-à-dire telle que $\int_M |W|^2\, d\mathrm{vol} < 16\,\pi^2\, \chi(M)$, le théorème 1 affirme que M est difféomorphe à S^4 ou à $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$: pour établir le théorème 2 nous pouvons donc supposer sans restriction que la métrique pour laquelle $\int_M (\sigma_2(A) - |W|^2/4)\, d\mathrm{vol} = 0$ minimise la fonctionnelle $\|W\|_{L^2}$ et qu'elle satisfait à ce titre l'équation d'Euler associée, à savoir l'annulation du tenseur de Bach, $B := -\mathrm{tr}_{13}\mathrm{tr}_{25}\, D^2W - 1/2\ W(\mathrm{ric})$, introduit précédemment pour sa propriété de covariance conforme (cf. (2.27)). Une première propriété intéressante des métriques plates au sens de Bach est l'identité intégrale suivante, inspirée par une formule équivalente de A. Derdzinski pour les métriques de courbure de Weyl harmonique.

Lemme 4.3. — *Toute métrique plate au sens de Bach sur une variété compacte sans bord de dimension* 4 *satisfait l'identité intégrale suivante :*

$$\begin{aligned}(4.27)\qquad \int_M |DW|^2 d\mathrm{vol} \\ = \int_M \Big(72\ \det W^+ + 72\ \det W^- - \frac{1}{2}\,\mathrm{scal}\ |W|^2 + 2\, W(\mathrm{ric}_0, \mathrm{ric}_0)\Big)\, d\mathrm{vol}\, .\end{aligned}$$

Pour la première fois dans ce texte intervient la décomposition de la courbure en composantes auto-duale, $*W^+ = W^+$, et anti-autoduale, $*W^- = -W^-$, sous l'action de l'opérateur $*$ de Hodge. Si la preuve du lemme 4.3 n'est pas immédiate, elle n'en reste pas moins élémentaire, reposant essentiellement sur les deux identités de Bianchi.

Une autre propriété utile découle de l'identité (4.3), valable pour toute métrique en dimension 4, et qui, spécialisée à une métrique plate au sens de Bach, s'intègre en l'identité intégrale suivante

$$(4.28)\qquad \int_M \big(3\,|D\mathrm{ric}_0|^2 - 1/4\,|d\mathrm{scal}\,|^2 + 6\,\mathrm{tr}\ \mathrm{ric}_0^3 + \mathrm{scal}\ |\mathrm{ric}_0|^2 - 6\, W(\mathrm{ric}_0, \mathrm{ric}_0)\big)\ d\mathrm{vol} = 0\, .$$

Pour les métriques $e^{2\widetilde{f}_\alpha}g$ construites au paragraphe précédent, $\sigma_2(A) - \alpha/4|W|^2 = e^{4a_\alpha} \geqslant 0$; nous en déduisons facilement la minoration $3\,\alpha/2\,|DW|^2 + 3\,|D\mathrm{ric}_0|^2 - 1/4\,|d\mathrm{scal}\,|^2 \geqslant 0$, qui donne après intégration, et en invoquant la combinaison linéaire adéquate des identités (4.27) et (4.28), la majoration fondamentale suivante, valable pour tout α, $\alpha \in [0,1)$, et toute métrique $e^{2\widetilde{f}_\alpha}g$ solution de l'équation $\sigma_2(A) - \alpha/4\,|W|^2 = e^{4a_\alpha}$, où le nombre réel a_α est défini par l'identité (4.24) :

$$(4.29)\quad \int_M \Big(6\,\mathrm{tr}\;\mathrm{ric}_0^3 + \mathrm{scal}\;|\mathrm{ric}_0|^2 - 3(\alpha+2)\,W(\mathrm{ric}_0,\mathrm{ric}_0) - 108\,\alpha\,(\det W^+ + \det W^-) + 3\,\alpha/4\;\mathrm{scal}\;|W|^2\Big)\,d\mathrm{vol} \leqslant 0\,.$$

L'intégrand se réduit à $6\,\mathrm{tr}\;\mathrm{ric}_0^3 + \mathrm{scal}\;|\mathrm{ric}_0|^2$ sur le lieu des zéros de $|W|$, $|W|^{-1}(0)$. Ce polynôme en la courbure est positif ou nul dès que $\sigma_2(A)$ l'est ; les métriques $e^{2\widetilde{f}_\alpha}g$ satisfaisant l'équation $\sigma_2(A) - \frac{\alpha}{4}|W|^2 = e^{4a_\alpha} > 0$ (cf. (4.24)), la majoration (4.29) reste donc valable si l'on restreint l'intégrale à $M^4 \smallsetminus |W|^{-1}(0)$.

La convergence C^l, $l \geqslant 2$, des métriques $e^{2\widetilde{f}_\alpha}g$ sur $M \smallsetminus |W|^{-1}(0)$ discutée au paragraphe précédent permet de passer à la limite $\alpha \to 1$ dans l'intégrale précédente sur $M \smallsetminus |W|^{-1}(0)$ pour établir que la limite $e^{2\widetilde{f}}g$ satisfait la majoration suivante

$$(4.30)\quad \int_{M\smallsetminus|W|^{-1}(0)} \Big(6\,\mathrm{tr}\;\mathrm{ric}_0^3 + \mathrm{scal}\;|\mathrm{ric}_0|^2 - 9\,W(\mathrm{ric}_0,\mathrm{ric}_0) - 108\,(\det W^+ + \det W^-) + 3/4\;\mathrm{scal}\;|W|^2\Big)\,d\mathrm{vol} \leqslant 0\;.$$

Nous sommes ici au cœur de la preuve du théorème de rigidité : une discussion algébrique fine, s'appuyant sur des arguments proches de ceux développés dans [M], établit que l'intégrand qui figure dans (4.30) est un polynôme en la courbure *universellement positif ou nul* en dimension 4 et que son annulation en un point correspond à l'annulation, en ce même point, soit de la partie sans trace de la courbure de Ricci, ric_0, soit de la courbure conforme, W .

Puisque nous avons supposé $\|W\|_{L^2} > 0$, l'image inverse de 0 par $|W|$ est un fermé strict de M. Considérons une composante connexe (non vide) de son complémentaire, un ouvert O de M, sur lequel la partie sans trace de la courbure de Ricci, $\mathrm{ric}_0(e^{2\widetilde{f}}g)$ est, d'après ce qui précède, identiquement nulle. La restriction de la métrique $e^{2\widetilde{f}}g$ à l'ouvert O est donc, par définition, d'Einstein et la seconde identité de Bianchi démontre que sa courbure scalaire est en particulier constante. De l'équation $4\,\sigma_2(A) - |W|^2 = 0$ satisfaite par $e^{2\widetilde{f}}g$ nous déduisons alors que la norme de la courbure conforme est, elle aussi, constante sur O : $|W(e^{2\widetilde{f}}g)|^2_{|O} \equiv C$. M étant connexe par hypothèse, si O était un ouvert strict de M il existerait une suite de points P_i dans O convergeant vers un point P de $|W|^{-1}(0)$. Pour cette suite, nous aurions par construction :

$$0 < C = |W(e^{2\widetilde{f}}g)|^2(P_i) = e^{-4\widetilde{f}(P_i)}|W(g)|^2(P_i)\;.$$

La métrique g étant infiniment différentiable, sa courbure conforme l'est aussi, qui satisferait en particulier la propriété de continuité : $\lim_{i\to+\infty} |W(g)|_g^2\,(P_i) = |W(g)|_g^2\,(P) = 0$; mais ceci contredirait la continuité de la limite $\widetilde{f}$, $\widetilde{f} \in C^{1,1}$, construite au paragraphe précédent.

Donc l'ouvert O coïncide avec la variété M, la courbure conforme W ne s'annule nulle part, et la métrique infiniment différentiable $e^{2\widetilde{f}}g$ est une solution de l'équation $4\,\sigma_2(A) - |W|^2 \equiv 0$; l'argument précédent démontre de plus que sa courbure scalaire est (constante et) partout strictement positive. On déduit alors le théorème 2 (d'un cas particulier facile) du résultat de rigidité ([M], Theorem 2) d'après lequel toute variété riemannienne de dimension 4 compacte, sans bord 1/6-faiblement pincée est, sinon difféomorphe à S^4 ou $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, un plan projectif standard ou un quotient d'un produit $(S^3, \lambda\,\mathrm{can}) \times \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$, par un sous-groupe cocompact d'isométries.

RÉFÉRENCES

[A] D. R. ADAMS – « A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives », *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 2, p. 385–398.

[CGY0] S.-Y. A. CHANG, M. J. GURSKY & P. C. YANG – « Regularity of a fourth order nonlinear PDE with critical exponent », *Amer. J. Math.* **121** (1999), no. 2, p. 215–257.

[CGY1] ———, « An a priori estimate for a fully nonlinear equation on four-manifolds », *J. Anal. Math.* **87** (2002), p. 151–186.

[CGY2] ———, « An equation of Monge-Ampère type in conformal geometry, and four-manifolds of positive Ricci curvature », *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), no. 3, p. 709–787.

[CGY3] ———, « A conformally invariant sphere theorem in four dimensions », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2003), no. 98, p. 105–143.

[CQ] S.-Y. A. CHANG & J. QING – « The zeta functional determinants on manifolds with boundary. II. Extremal metrics and compactness of isospectral set », *J. Funct. Anal.* **147** (1997), no. 2, p. 363–399.

[CY] S.-Y. A. CHANG & P. C. YANG – « Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds », *Ann. of Math. (2)* **142** (1995), no. 1, p. 171–212.

[G1] M. J. GURSKY – « The Weyl functional, de Rham cohomology, and Kähler-Einstein metrics », *Ann. of Math. (2)* **148** (1998), no. 1, p. 315–337.

[G2] ———, « The principal eigenvalue of a conformally invariant differential operator, with an application to semilinear elliptic PDE », *Comm. Math. Phys.* **207** (1999), no. 1, p. 131–143.

[GV] M. J. GURSKY & J. A. VIACLOVSKY – « A fully nonlinear equation on four-manifolds with positive scalar curvature », *J. Differential Geom.* **63** (2003), no. 1, p. 131–154.

[GW] P. Guan & G. Wang – « Local estimates for a class of fully nonlinear equations arising from conformal geometry », *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 26, p. 1413–1432.

[K] O. Kobayashi – « Scalar curvature of a metric with unit volume », *Math. Ann.* **279** (1987), no. 2, p. 253–265.

[KMPS] N. Korevaar, R. Mazzeo, F. Pacard & R. Schoen – « Refined asymptotics for constant scalar curvature metrics with isolated singularities », *Invent. Math.* **135** (1999), no. 2, p. 233–272.

[L] Y. Y. Li – « Degree theory for second order nonlinear elliptic operators and its applications », *Comm. Partial Differential Equations* **14** (1989), no. 11, p. 1541–1578.

[LL] A. Li & Y. Li – « On some conformally invariant fully nonlinear equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **56** (2003), no. 10, p. 1416–1464.

[M] C. Margerin – « A sharp characterization of the smooth 4-sphere in curvature terms », *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), no. 1, p. 21–65.

[S] R. M. Schoen – « Analytic aspects of the harmonic map problem », in *Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 2, Springer, New York, 1984, p. 321–358.

[SU] R. Schoen & K. Uhlenbeck – « A regularity theory for harmonic maps », *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 2, p. 307–335.

[SY] J.-P. Sha & D. Yang – « Positive Ricci curvature on compact simply connected 4-manifolds », in *Differential geometry : Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 529–538.

[Y] D. Yang – « L^p pinching and compactness theorems for compact Riemannian manifolds », *Forum Math.* **4** (1992), no. 3, p. 323–333.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES COMPLÉMENTAIRES

[ABKS] K. Akutagawa, B. Botvinnik, O. Kobayashi & H. Seshadri – « The Weyl functional near the Yamabe invariant », *J. Geom. Anal.* **13** (2003), no. 1, p. 1–20.

[Be] W. Beckner – « Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality », *Ann. of Math. (2)* **138** (1993), no. 1, p. 213–242.

[BØ] T. P. Branson & B. Ørsted – « Explicit functional determinants in four dimensions », *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), no. 3, p. 669–682.

[CY2] S.-Y. A. Chang & P. C. Yang – « Non-linear partial differential equations in conformal geometry », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, p. 189–207.

[FG1] C. Fefferman & C. R. Graham – « Conformal invariants », *Astérisque* (1985), Numéro Hors Série, p. 95–116.

[FG2] ______, « Q-curvature and Poincaré metrics », *Math. Res. Lett.* **9** (2002), no. 2-3, p. 139–151.

[FH] C. Fefferman & K. Hirachi – « Ambient metric construction of Q-curvature in conformal and CR geometries », *Math. Res. Lett.* **10** (2003), no. 5-6, p. 819–831.

[FP] P. M. Fitzpatrick & J. Pejsachowicz – « An extension of the Leray-Schauder degree for fully nonlinear elliptic problems », in *Nonlinear functional analysis and its applications, Part 1 (Berkeley, Calif., 1983)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 425–438.

[GJMS] C. R. Graham, R. Jenne, L. J. Mason & G. A. J. Sparling – « Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence », *J. London Math. Soc. (2)* **46** (1992), no. 3, p. 557–565.

[GP] A. R. Gover & L. J. Peterson – « Conformally invariant powers of the Laplacian, Q-curvature, and tractor calculus », *Comm. Math. Phys.* **235** (2003), no. 2, p. 339–378.

[GV2] M. J. Gursky & J. A. Viaclovsky – « Fully nonlinear equations on Riemannian manifolds with negative curvature », *Indiana Univ. Math. J.* **52** (2003), no. 2, p. 399–419.

[GZ] C. R. Graham & M. Zworski – « Scattering matrix in conformal geometry », *Invent. Math.* **152** (2003), no. 1, p. 89–118.

[OPS1] B. Osgood, R. Phillips, & P. Sarnak – « Compact isospectral sets of surfaces », *J. Funct. Anal.* **80** (1988), no. 1, p. 212–234.

[OPS2] ______, « Extremals of determinants of Laplacians », *J. Funct. Anal.* **80** (1988), no. 1, p. 148–211.

Christophe MARGERIN

École Polytechnique
UMR 7640 du CNRS
Centre de mathématiques Laurent Schwartz
F–91128 PALAISEAU Cédex
E-mail : margerin@math.polytechnique.fr