Astérisque

DENIS-CHARLES CISINSKI

Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie

Astérisque, tome 308 (2006)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2006__308__R1_0>

© Société mathématique de France, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ASTÉRISQUE 308

LES PRÉFAISCEAUX COMME MODÈLES DES TYPES D'HOMOTOPIE

Denis-Charles Cisinski

Société Mathématique de France 2006
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Denis-Charles Cisinski
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, CNRS (UMR 7539),
Institut Galilée, Université Paris 13, Avenue Jean-Baptiste Clément,
93430 Villetaneuse, France.
E-mail : cisinski@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~cisinski/

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 55-02, 18F20, 18G50, 18G55, 18G30, 54B30, 54B40, 55P57, 55P60, 55P92, 55U35, 55U40.

Mots clefs. — homotopie, catégorie de modèles, préfaisceau, catégorie test locale, extension de Kan homotopique, théorie de l'homotopie équivariante.

LES PRÉFAISCEAUX COMME MODÈLES DES TYPES D'HOMOTOPIE

Denis-Charles Cisinski

Résumé. — Grothendieck a introduit dans *À la poursuite des champs* la notion de *catégorie test*, petite catégorie ayant par définition la propriété que les préfaisceaux sur celle-ci sont naturellement des modèles pour les types d'homotopie des CW-complexes. Un exemple bien connu est celui de la catégorie des simplexes (les préfaisceaux correspondant étant alors les ensembles simpliciaux). Grothendieck a de plus dégagé la notion de *localisateur fondamental*, ce qui donne une description axiomatique de la théorie de l'homotopie des petites catégories, et permet d'étendre la notion de catégorie test relativement à des localisations de la catégorie homotopique des CW-complexes. Ce texte peut être vu comme une prolongation de la théorie de l'homotopie de Grothendieck. On démontre en particulier deux conjectures de Grothendieck : toute catégorie de préfaisceaux sur une catégorie test admet canoniquement une structure de catégorie de modèles fermée au sens de Quillen, et le localisateur fondamental minimal définit la théorie de l'homotopie des CW-complexes. On montre par ailleurs comment une version locale de la théorie permet d'englober dans un même schéma la théorie de l'homotopie équivariante. La mise en œuvre de ce programme passe par la construction et l'étude systématiques de structures de catégorie de modèles sur des catégories de préfaisceaux quelconques, ainsi que par l'étude de la théorie de l'homotopie des petites catégories en suivant et en complétant les différentes contributions de Quillen, Thomason et Grothendieck.

© Astérisque 308, SMF 2006

***Abstract* (Presheaves as models for homotopy types). —** Grothendieck introduced in *Pursuing Stacks* the notion of *test category*. These are by definition small categories on which presheaves of sets are models for homotopy types of CW-complexes. A well known example is the category of simplices (the corresponding presheaves are then simplicial sets). Moreover, Grothendieck defined the notion of *basic localizer* which gives an axiomatic approach to the homotopy theory of small categories, and gives a natural setting to extend the notion of test category with respect some localizations of the homotopy category of CW-complexes. This text can be seen as a sequel of Grothendieck's homotopy theory. We prove in particular two conjectures made by Grothendieck: any category of presheaves on a test category is canonically endowed with a Quillen closed model category structure, and the smallest basic localizer defines the homotopy theory of CW-complexes. Moreover, we show how a local version of the theory allows to consider in a unified setting the equivariant homotopy theory as well. The realization of this program goes through the construction and the study of model category structures on any category of presheaves on an abstract small category, as well as the study of the homotopy theory of small categories following and completing the contributions of Quillen, Thomason and Grothendieck.

TABLE DES MATIÈRES

Préambule ix

Introduction xi
Le principe de contractibilité locale xi
Vers les catégories test xiii
Fil d'Ariane xvii
Notations génériques xxiv

Partie I. Algèbre homotopique des préfaisceaux 1

1. Constructions de catégories de modèles 3
1.1. Propriétés de stabilité de classes de flèches ou d'objets 3
1.2. Accessibilité 11
1.3. Extensions anodines 23
1.4. A-localisateurs 52
1.5. Propreté 65
1.6. Cofibrations exotiques 74

2. Yoga simplicial 83
2.1. Ensembles simpliciaux 83
2.2. Caractérisation locale de la classe des ∞-équivalences 100
2.3. Réalisations simpliciales 107

3. Densité homotopique 123
3.1. Propriétés locales des extensions de Kan homotopiques 123
3.2. Préfaisceaux réalisés en catégories 137
3.3. Localisateurs fondamentaux et fibrations de Grothendieck 143
3.4. Régularité 151

Partie II. À la poursuite des modèles 173

4. Correspondances fondamentales 175
4.1. Catégories test locales 175
4.2. Modélisateurs élémentaires 183
4.3. Ubiquité de la propreté 190
4.4. Types d'homotopie localement constants 199

5. Factorisations de foncteurs 213
5.1. Cofibrations formelles 213
5.2. Structures de catégorie de modèles de Thomason 221
5.3. Approximations propres et lisses 227

6. Changements de base homotopiques 233
6.1. Propreté et asphéricité 233
6.2. Critères locaux pour les carrés homotopiquement cartésiens 243
6.3. Transversalité homotopique 249
6.4. Foncteurs localement constants 267
6.5. Systèmes locaux 275

7. Représentations et structures fibrées 283
7.1. Représentations d'un préfaisceau de groupes 283
7.2. Descente et monodromie 289
7.3. Torseurs et fibrations faibles 295
7.4. Classification des torseurs 300
7.5. Fibrés et fibrations 305

Partie III. Zoologies 309

8. Exemples de catégories test locales 311
8.1. Catégories squelettiques 311
8.2. Catégories squelettiques régulières 324
8.3. Ensembles simpliciaux symétriques 332
8.4. Ensembles cubiques 335
8.5. Ensembles cycliques 351

9. Exemples de localisateurs fondamentaux 363
9.1. Troncations de Postnikov et cosquelettes 363
9.2. Types d'homotopie tronqués 364
9.3. Localisateurs fondamentaux triviaux 371
9.4. Homologies, torsions et impropretés 373

Bibliographie 377

Index 387

Index des notations 391

Préambule

Le point de départ de ce travail est *À la Poursuite des Champs* [**67**], manuscrit non publié d'Alexandre Grothendieck dans lequel il déploie sa vision de la théorie de l'homotopie. C'est suite au profond effort de mise en forme de la théorie d'Alexandre Grothendieck fait par Georges Maltsiniotis [**96**] que ce livre prend sa place.

Ce texte est issu de ma thèse de doctorat, effectuée sous la direction de Georges Maltsiniotis. Il correspond cependant à une version largement réécrite, complétée et approfondie du texte original. Georges Maltsiniotis m'a aidé et soutenu à bien des égards lors de la préparation de ma thèse, ainsi que durant la rédaction de ce livre. De plus, il a bien voulu me laisser inclure dans le premier chapitre ses notes sur les « Propriétés de stabilité de classes de flèches ou d'objets », et ses nombreuses propositions de rédaction ont contribué sensiblement à la clarté d'un certain nombre de passages. En particulier, il a amélioré la définition d'extension anodine en dégageant une axiomatique simple, et sa notion d'équivalence faible absolue a permis une approche conceptuelle de points *a priori* délicats. Pour tout le temps qu'il a consacré à suivre ce travail, et pour m'avoir initié à la théorie de l'homotopie, je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je veux par ailleurs remercier le comité de rédaction d'Astérisque pour sa patience et sa confiance, et en particulier, Pierre Colmez, Yves André et Raphaël Rouquier pour leur soutien et leur attention.

Denis-Charles Cisinski

Paris, le 10 août 2006

INTRODUCTION

Bats le tambour, n'aie pas peur
Et embrasse la cantinière
Voilà toute la science
Voilà des livres le sens le plus profond.
Heinrich Heine, *Doctrine*

Ce livre a pour sujet l'étude de la catégorie homotopique **Hot**, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les CW-complexes, et les morphismes, les classes d'homotopie d'applications continues entre iceux. Néanmoins, en dehors de quelques appels à l'intuition dans le cadre de cette introduction, il ne sera jamais fait usage des espaces topologiques. Il sera question de développer la théorie de l'homotopie d'un point de vue entièrement catégorique. Non pas que cela puisse être une fin en soi, mais plutôt pour fonder la notion même d'homotopie.

Le principe de contractibilité locale

Du point de vue formel, Grothendieck [**67**] voit comme modèles fondamentaux des types d'homotopie non pas les espaces topologiques, mais les petites catégories. Il considère donc $\mathcal{C}at$, la catégorie des petites catégories, et définit la notion de localisateur fondamental : il s'agit d'une classe $\mathcal{W}$ de foncteurs entre petites catégories vérifiant un certain nombre d'axiomes. Les éléments de $\mathcal{W}$ sont alors appelés des équivalences faibles : on veut les voir comme des flèches inversibles. Il définit alors $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$, la catégorie homotopique associée à $\mathcal{W}$, comme la localisation de $\mathcal{C}at$ par $\mathcal{W}$. Par exemple, lorsque $\mathcal{W}$ est la classe des foncteurs dont le nerf est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie homotopique des CW-complexes **Hot**.

Les axiomes de Grothendieck définissant la notion de localisateur fondamental reposent sur le principe suivant. Si A est une petite catégorie, et si a est un objet de A, on définit la catégorie A/a des objets de A au-dessus de a : les objets de A/a sont les

couples (a', α), où a' est un objet de A, et α une flèche de A de a' vers a. On dispose alors d'un foncteur d'oubli canonique

$$A/a \longrightarrow A \quad , \qquad (a', \alpha) \longmapsto a' \ . \tag{0.0.0.1}$$

Pour une petite catégorie A donnée, *le type d'homotopie de A est obtenu en recollant les catégories A/a*, où a parcourt les objets de A. Autrement dit, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{a \in A} A/a \longrightarrow \varinjlim_{a \in A} A/a = A \tag{0.0.0.2}$$

doit être un isomorphisme dans la catégorie homotopique $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$. En outre, cela doit rester vrai après tout changement de base. Autrement dit, pour tout foncteur $u : A' \longrightarrow A$, si on note $A'/a = A' \times_A A/a$ pour chaque objet a de A, alors le morphisme canonique

$$\varinjlim_{a \in A} A'/a \longrightarrow \varinjlim_{a \in A} A'/a = A' \tag{0.0.0.3}$$

doit être un isomorphisme dans la catégorie homotopique $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$. C'est ainsi que l'axiome fondamental des localisateurs fondamentaux apparaît naturellement. Considérons un triangle commutatif de petites catégories

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ u\ } & B \\ & {\scriptstyle v}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle w} & \\ & C & \end{array} \ .$$

Pour chaque objet c de C, on peut alors former les carrés cartésiens ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} A/c & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C/c & \longrightarrow & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B/c & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C/c & \longrightarrow & C \end{array}$$

On obtient donc en particulier un foncteur canonique

$$u/c : A/c \longrightarrow B/c \ .$$

Si le morphisme u est un isomorphisme dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ localement au-dessus de C (*i.e.* si pour tout objet c de C, le foncteur u/c est un isomorphisme dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$), alors il en est de même de u : cela provient d'une double application de l'isomorphisme (0.0.0.3). Il est remarquable que lorsque $B = C$ et $w = 1_B$, on retrouve de la sorte le théorème A de Quillen [**112**].

L'isomorphisme (0.0.0.2) s'interprête en disant que la catégorie A est localement de la forme A/a où a est un objet de A. Les catégories A/a admettant un objet final, elles sont contractiles, et ont par suite le type d'homotopie du point. Une conséquence de l'isomorphisme (0.0.0.2) est donc que toute petite catégorie est localement contractile, ou encore que *toute petite catégorie a localement le type d'homotopie du point*. Dans la mesure où on admet que tout type d'homotopie est le type d'homotopie d'une petite catégorie, cela implique que tout type d'homotopie a localement le

type d'homotopie du point. Le constat de Grothendieck est simplement le suivant : ce qui précède caractérise totalement la théorie de l'homotopie des CW-complexes. De là découle l'universalité de cette théorie homotopique, ce que l'on peut formuler de bien des manières. L'une d'elle est que le plus petit localisateur fondamental est formé exactement des foncteurs dont le nerf est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux[1]. Cette affirmation, conjecturée par Grothendieck, est l'un des résultats importants démontrés dans ce livre.

Vers les catégories test

En considérant les espaces topologiques, on a l'analogie suivante avec le point de vue catégorique évoqué ci-dessus : tout espace topologique a le type d'homotopie d'un CW-complexe[2], et il est clair que tout CW-complexe est localement contractile (*i.e.* admet une base d'ouverts contractiles). Le lien avec la théorie de l'homotopie des petites catégories peut se faire concrètement de plusieurs manières. Si X est un espace topologique localement contractile, on peut considérer l'ensemble $O_c(X)$ des ouverts contractiles de X, ordonnés par l'inclusion. Si on voit $O_c(X)$ comme une catégorie, il est possible de démontrer que le type d'homotopie correspondant à $O_c(X)$ n'est autre que celui de X. Plus précisément, le morphisme canonique

$$\operatorname*{holim}_{U\in O_c(X)} U \longrightarrow \varinjlim_{U\in O_c(X)} U = X$$

est une équivalence d'homotopie faible dans $\mathcal{T}op$. Cette construction a l'avantage de rester très proche de la géométrie de X, mais pour inconvénient de n'avoir de sens raisonnable que lorsque X est localement contractile. Une autre manière de faire est la suivante. Soit A une catégorie, et

$$i : A \longrightarrow \mathcal{T}op$$

un foncteur de A vers la catégorie des espaces topologiques tel que pour tout objet a de A, l'espace $i(a)$ soit contractile. À tout espace topologique X, on peut associer la catégorie A/X, définie par le produit fibré ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} A/X & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \mathcal{T}op/X & \longrightarrow & \mathcal{T}op \end{array}$$

[1] Nous renvoyons le lecteur à [**71, 46, 32**] pour des formulations plus spectaculaires de la propriété universelle de **Hot**. Le lien entre cette propriété universelle et la notion de localisateur fondamental est explicite dans [**32**].

[2] Ici, on identifie **Hot** avec la localisation de la catégorie des espaces topologiques par les équivalences d'homotopie faibles. En particulier, tout espace topologique peut être vu comme un objet de **Hot**. Deux espaces topologiques ont le même type d'homotopie s'ils sont isomorphes en tant qu'objets de **Hot**.

Le lien entre le type d'homotopie de A/X et celui de X peut être explicité plus avant. Les objets de A/X sont par définition les couples (a, f), où a est un objet de A, et f une application continue de $i(a)$ vers X. On obtient de la sorte un morphisme canonique :

$$\varinjlim_{\substack{(a,f)\in A/X \\ f:i(a)\longrightarrow X}} i(a) \longrightarrow X \ . \tag{0.0.0.4}$$

Si le morphisme (0.0.0.4) induit un isomorphisme dans **Hot**, on dit que A/X et X ont canoniquement le même type d'homotopie : les espaces $i(a)$ étant tous contractiles, la source de la flèche (0.0.0.4) a le type d'homotopie de l'espace classifiant de A/X (cela prend tout son sens en regard de l'isomorphisme (0.0.0.2)). C'est ainsi que le point de vue simplicial apparaît : si $A = \Delta$ est la catégorie des simplexes, et si i est le foncteur associant à tout n-simplexe le n-simplexe topologique standard

$$\Delta_n^{\mathcal{T}op} = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in [0,1]^{n+1} \;\middle|\; \sum_{0\leqslant i\leqslant n} x_i = 1 \right\} ,$$

il est bien connu que pour tout espace topologique X, Δ/X et X ont canoniquement le même type d'homotopie (Δ/X n'est qu'une version déguisée du complexe singulier associé à X). Le point est que cette propriété n'est pas l'apanage de la catégorie des simplexes. Une version plus naturelle de cette construction serait de considérer la catégorie $A = \mathcal{T}op_c$, sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}op$ formée des espaces topologiques contractiles, et de prendre pour foncteur i l'inclusion. Mis à part des problèmes logiques que nous nous efforcerons de négliger ici, on retrouve la même propriété : pour tout espace topologique X, $\mathcal{T}op_c/X$ et X ont canoniquement le même type d'homotopie. Ainsi pour tout espace topologique X, on dispose de trois modèles catégoriques du type d'homotopie de X, à savoir $O_c(X)$, Δ/X, et $\mathcal{T}op_c/X$. Il est remarquable que les deux premières catégories de cette liste sont des sous-catégories de la troisième. Il est d'autre part évident que la catégorie $\mathcal{T}op_c/X$ ne fournit pas la construction la plus économique (elle est pour le moins énorme). Le principal intérêt de la construction $\mathcal{T}op_c/X$ est sa canonicité. Pour pallier ce problème de la taille de $\mathcal{T}op_c$, on remarque le fait suivant : certaines sous-catégories de $\mathcal{T}op_c/X$ ont toujours le type d'homotopie de X : par exemple $O_c(X)$ et Δ/X. Le constat de Grothendieck est qu'il existe un grand nombre de catégories A telles qu'il existe un foncteur i comme ci-dessus, de sorte que pour tout espace topologique X, A/X soit canoniquement un modèle du type d'homotopie de X. Il appelle de telles catégories A des catégories test faibles (modulo quelques propriétés techniques supplémentaires). À la recherche de conditions faciles à vérifier pour caractériser les catégories test faibles, Grothendieck remarque ensuite qu'une classe de catégories apparaît naturellement : ce sont les petites catégories A telles que A soit une catégorie test faible et telle que pour tout objet a de A, la catégorie A/a soit également une catégorie test faible. Il appelle de telles catégories des catégories test.

L'exemple bien connu de catégorie test est comme on l'attend la catégorie des simplexes Δ. Or cette dernière a une autre propriété bien connue : les préfaisceaux (d'ensembles) sur Δ, *i.e.* les ensembles simpliciaux, forment une catégorie de modèles

fermée (au sens de Quillen), et la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux est équivalente à celle des espaces topologiques : elle fournit un modèle de **Hot**. De là surgit une autre question : quelles sont les petites catégories A telles que les préfaisceaux sur A forment une catégorie de modèles fermée canoniquement équivalente à celle des espaces topologiques ? Ce que prédit Grothendieck dans la *Poursuite des Champs*, et ce que nous démontrons dans ce livre, est que ces catégories sont exactement les catégories test.

Plus généralement, la question de savoir si une petite catégorie A est une catégorie test consiste à définir un foncteur $i : A \longrightarrow \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles de **Hot** (la digression qui précède concerne le cas $\mathcal{M} = \mathcal{T}op$), et tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit un objet asphérique de $\mathcal{M}$ (ce qui signifie simplement que le morphisme de $i(a)$ vers l'objet final de $\mathcal{M}$ soit une équivalence faible), puis à étudier les catégories A/X pour X dans $\mathcal{M}$ (ou plus précisément, les morphismes de la forme (0.0.0.4)). Ce que Grothendieck remarque rapidement, c'est qu'il suffit de considérer le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{C}at$, avec les équivalences faibles usuelles (*i.e.* les morphismes dont le nerf est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux), et où i est le foncteur

$$A \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad a \longmapsto A/a \ ;$$

pour cela, il faut aussi bien sûr comprendre la théorie de l'homotopie dans $\mathcal{C}at$, ce qui est fait par Grothendieck (et développé dans [**96**]) de manière axiomatique. Cela permet en outre d'étudier la même problématique en remplaçant les équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$ par les éléments d'un localisateur fondamental quelconque $\mathcal{W}$. Cette généralisation permettra de définir des catégories de modèles de $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$, c'est-à-dire des catégories de modèles de localisations de la catégorie homotopique des CW-complexes (par exemple des modèles pour les n-types d'homotopie).

Une fois ceci posé, nous nous adressons en premier lieu la question suivante : étant donnée une petite catégorie A, quelles sont les structures de catégorie de modèles fermée définies sur la catégorie des préfaisceaux sur A ? Ensuite seulement, sous quelles conditions une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux sur A est-elle équivalente à la catégorie de modèles fermée des petites catégories (pour un localisateur fondamental donné) ? Puis nous étudierons des versions locales de ces questions. Cela nous conduira à un approfondissement de la théorie de l'homotopie des petites catégories, et à une théorie de l'homotopie équivariante à forte saveur galoisienne (dans l'esprit de Toën [**127, 126**]).

Pour cela, mis à part la théorie de Grothendieck proprement dite telle qu'elle est exposée dans [**96**], les seuls prérecquis que nous demanderons au lecteur sont une connaissance de la théorie des catégories en général, une bonne maîtrise des notions fondamentales concernant les catégories de modèles (par exemple les premiers chapitres de [**109**] ou de [**74**]), et des éléments de combinatoire simpliciale (voir par exemple [**60**]). En particulier, l'existence de la catégorie de modèles fermée des ensembles simpliciaux ne sera pas admise (mais sera redémontrée), et comme nous l'avons déjà dit, des espaces topologiques il ne sera essentiellement plus fait mention.

Pour conclure, il reste à évoquer ce dont ce livre ne parle pas : la géométrie. En effet, les modèles pour les types d'homotopie qui apparaissent naturellement avec la théorie des catégories test sont de nature plutôt combinatoire (ensembles simpliciaux

ou cubiques, catégories, *et cætera*). Dans *À la poursuite des champs*, Grothendieck envisage une notion de « topos test ». L'idée consiste à remplacer la catégorie ***Cat*** par la catégorie des topos. Pour un topos $\mathcal{E}$ donné on a un foncteur canonique de $\mathcal{E}$ vers la catégorie des topos qui associe à un faisceau X sur $\mathcal{E}$ le topos $\mathcal{E}/X$. Or grâce à la théorie d'Artin et Mazur [**3**], on a une notion d'équivalence faible de topos définie par la cohomologie (éventuellement non abélienne) à coefficients localement constants, ce qui permet de définir une notion d'équivalence faible de faisceaux sur $\mathcal{E}$: ce sont les morphismes $X \longrightarrow Y$ tels que le morphisme de topos correspondant $\mathcal{E}/X \longrightarrow \mathcal{E}/Y$ soit une équivalence faible. On peut alors se demander si cela définit une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie $\mathcal{E}$ (dont les cofibrations sont les monomorphismes). Lorsque $\mathcal{E}$ est une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie A, cette propriété équivaut à dire que A est une catégorie test locale (*i.e.* que pour tout objet a de A, la catégorie A/a est une catégorie test). Un topos test est un topos $\mathcal{E}$ qui est asphérique (*i.e.* qui a le (pro-)type d'homotopie du point), est localement asphérique (cela signifie qu'il existe une famille génératrice[(3)] de $\mathcal{E}$ formée d'objets X tels que le topos $\mathcal{E}/X$ soit asphérique), et tel que les équivalences faibles de faisceaux définissent une structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{E}$. On obtient qu'une petite catégorie A est une catégorie test si et seulement si le topos des préfaisceaux sur A est un topos test (il s'agit ici d'une simple reformulation des résultats principaux du présent ouvrage). On peut étudier les catégories de modèles fermées sur les catégories de faisceaux de la même manière que sur les catégorie de préfaisceaux (voir [**33**]), et prouver que pour tout topos test $\mathcal{E}$, la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{E})$ est canoniquement équivalente à **Hot** (voir [**30**]). Par exemple, le topos des faisceaux sur le site des variétés différentielles (resp. des variétés topologiques, resp. des CW-complexes finis) est un topos test (les catégories de modèles correspondant à ces exemples peuvent par ailleurs être obtenues par la théorie des sites avec intervalle de Morel et Voevodsky [**107**]). L'ingrédient fondamental permettant l'étude des catégories test est le théorème A de Quillen. De même, un analogue « toposique » du théorème A permet l'étude des topos test. Une application est alors que tout topos test est obtenu comme une catégorie de faisceaux sur une catégorie test munie d'une topologie de Grothendeck adéquate. Par exemple, si $\mathcal{E}$ désigne le topos des faisceaux sur le site des variétés différentielles, on peut le voir comme la catégorie des faisceaux sur la catégorie A dont les objets sont les espaces affines $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 0$, et les morphismes, les applications différentiables. Or A est une catégorie test, et c'est cette propriété qui permet de construire une équivalence $\mathbf{Hot} \simeq \mathbf{Ho}(\mathcal{E})$. Cela peut être vu comme un retour aux sources, dans la mesure où Quillen lui-même appelle dans l'introduction de son article fondateur sur la K-théorie algébrique supérieure à une généralisation de ses théorèmes A et B dans le cadre des topos.

(3) Lorsqu'on travaille avec une petite catégorie A, on considère en fait le topos des préfaisceaux sur A, et on privilégie la famille génératrice formée des préfaisceaux représentables.

Fil d'Ariane

Chapitre 1. — Le premier chapitre est essentiellement consacré à l'étude des structures de catégorie de modèles fermée sur les catégories de préfaisceaux dont les cofibrations sont les monomorphismes. Pour cela, on introduit dans la première section les notions fondamentales de classes de flèches ou d'objets saturées par monomorphismes (1.1.12), classes qui ont par définition la propriété d'être stables par les opérations intervenant dans toute construction par l'argument du petit objet.

Dans la deuxième section, on rappelle et on étudie la notion d'accessibilité, notion de petitesse qui a son importance pour utiliser l'argument du petit objet.

Dans la troisième section, on entre enfin dans le vif du sujet : on définit la notion de *donnée homotopique élémentaire* sur une catégorie de préfaisceaux. Cette structure permet de donner un sens à la notion d'*homotopie* entre deux morphismes, et à celle plus abstraite d'*extension anodine*. On définit ensuite la notion de *structure homotopique* sur une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie A donnée ; cela consiste essentiellement en une donnée homotopique élémentaire $\mathfrak{I}$, et en un *ensemble* S (par opposition à une classe) de monomorphisme de préfaisceaux sur A. On construit alors une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux sur A dont les cofibrations sont les monomorphismes (théorème 1.3.22). Les équivalences faibles sont déterminées par le fait que toute équivalence d'homotopie (dans le sens défini par $\mathfrak{I}$) est une équivalence faible, et tout élément de S est une équivalence faible. Si les objets fibrants peuvent être caractérisés par des conditions explicites, les fibrations sont en général plus difficiles à décrire. On donne plusieurs conditions équivalentes pour que les fibrations de la structure de catégorie de modèles fermée associée à une structure homotopique admettent une caractérisation raisonnable (propositions 1.3.47 et 1.3.61).

Dans la quatrième section, pour une petite catégorie A donnée, on introduit la notion fondamentale de *A-localisateur*, classe de morphismes W de préfaisceaux sur A vérifiant certaines conditions de stabilité. Par exemple, pour toute structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux sur A dont les cofibrations sont exactement les monomorphismes, la classe des équivalences faibles forme un A-localisateur. On dit qu'un A-localisateur est *accessible* s'il est le plus petit A-localisateur contenant un *ensemble* de morphismes de préfaisceaux. On démontre alors l'un des résultats fondamentaux de ce livre (théorème 1.4.3) : la donnée d'un A-localisateur accessible W est équivalente à celle d'une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant (*i.e.* construite en utilisant l'argument du petit objet) sur la catégorie des préfaisceaux sur A dont les équivalences faibles sont les éléments de W, et les cofibrations, les monomorphismes. En outre, toutes les structures de catégorie de modèles fermée de ce type peuvent être construites avec les méthodes décrites dans la troisième section. On donne ensuite des méthodes de construction de A-localisateurs accessibles, et on étudie la stabilité des A-localisateurs par produits finis ou par certaines limites inductives. Dans le scholie 1.4.6, on explique très succinctement en quoi la question de l'accessibilité des A-localisateurs est liée à des axiomes de grands cardinaux : en acceptant le principe de Vopěnka, on peut en effet montrer que tout A-localisateur est accessible.

Dans la cinquième section, on se pose la question de la propreté des structures de catégorie de modèles fermée en présence. On appelle A-localisateur *propre* tout A-localisateur accessible tel que la structure de catégorie de modèles fermée correspondante soit propre. Comme pour ces structures de catégorie de modèles fermée, tous les objets sont cofibrants, la propreté à gauche est systématique. La propreté des A-localisateurs porte donc uniquement sur la propreté à droite. On donne une condition nécessaire et suffisante sur un ensemble de morphismes de préfaisceaux pour que le A-localisateur correspondant soit propre (théorème 1.5.4), et on en tire les conséquences. On rappelle de plus quelques résultats abstraits sur la propreté dans les catégorie de modèles. On rappelle en particulier que la notion de propreté d'une catégorie de modèles fermée, contrairement à ce que l'on pourrait attendre de sa définition, ne dépend que de la classe des équivalences faibles (corollaire 1.5.21).

La sixième et dernière section de ce chapitre consiste à caractériser les structures de catégorie de modèles fermées donnant lieu à des A-localisateurs mais dont les cofibrations ne sont pas nécessairement tous les monomorphismes (1.6.2 et 1.6.3). On rappelle de plus quelques sorites, certes abstraits, mais parfois bien utiles, sur les localisations de Bousfield (1.6.5).

Chapitre 2. — Ce chapitre est une application du précédent : on veut retrouver par ces méthodes la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux.

Dans la première section, on définit la structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des ensembles simpliciaux (proposition 2.1.5). La construction est immédiate en vertu des résultats du premier chapitre, mis à part un fait non trivial : même s'il est essentiellement évident que les objets fibrants pour cette structure sont les complexes de Kan, il est beaucoup moins clair *a priori* que les fibrations sont exactements les fibrations de Kan. Nous redémontrons ce fait avec une nouvelle méthode qui ne fait intervenir ni les espaces topologiques ni les fibrations minimales (on donne même une variante de cette preuve dans la troisième section de ce chapitre ; cf. 2.3.21).

Dans la deuxième section, on s'intéresse à une variante simpliciale du théorème B de Quillen [**112**]. Autrement dit, on donne des conditions suffisantes pour produire des carrés homotopiquement cartésiens (2.2.6 et 2.2.7). On en déduit une caractérisation axiomatique de la classe des équivalences faibles simpliciales usuelles (théorème 2.2.10). On redémontre de manière élémentaire que les groupes d'homotopie supérieurs caractérisent les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux.

La troisième section renoue avec une problématique plus abstraite. Étant donnée une petite catégorie A, on étudie comment relier les structures de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux sur A avec les structures de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur A. Pour cela, on associe à tout A-localisateur sa *complétion simpliciale*, laquelle est par définition un $A\times\Delta$-localisateur (où Δ est la catégorie des simplexes). Cette notion, certes technique, nous sera utile dans le chapitre suivant. On démontre des sorites de circonstance : un A-localisateur est accessible (resp. propre) si et seulement si sa complétion simpliciale l'est. En outre, les structures de catégorie de modèles fermée associées à un A-localisateur et à sa complétion simpliciales sont canoniquement équivalentes.

Chapitre 3. — Dans ce chapitre, on veut étudier la notion de « génération par colimites homotopiques ».

Pour cela, dans le premier chapitre, on introduit la notion de colimite et de limite homotopique, et même d'« extension de Kan homotopique » (foncteurs dérivés des extensions de Kan). Pour que cela ait un sens, on introduit la notion de *catégorie de modèles fermée exponentielle* : ce sont des catégories de modèles fermées telles que la construction des extensions de Kan homotopiques est essentiellement évidente. Bien entendu, toutes les structures de catégorie de modèles fermée qui apparaîtront dans ce livre seront exponentielles (nous renvoyons le lecteur intéressé à [**29, 34, 48, 72**] pour des constructions de ce type dans un cadre plus général). On montre ensuite comment la notion de colimite homotopique garde tout son sens pour la théorie de l'homotopie définie par un A-localisateur non nécessairement accessible (auquel cas nous n'avons pas à disposition de structure de catégorie de modèles fermée, sauf invocation du principe de Vopěnka).

La deuxième section de ce chapitre, logiquement indépendante de la première est une étude légèrement exotique du plongement de Yoneda et du fait que tout préfaisceau d'ensembles est une limite inductive de préfaisceaux représentables. Bien que son intérêt soit essentiellement technique, elle sera cependant utilisée dans la majeure partie du livre, car elle fait intervenir des constructions qui sont fondamentales pour étudier la théorie de l'homotopie de Grothendieck.

Dans la troisième section, on rappelle la notion de *localisateur fondamental* (3.3.2). On énonce les résultats fondamentaux concernant cette notion. En particulier, on rappelle comment le foncteur d'intégration (*i.e.* la construction de Grothendieck) permet de définir explicitement les colimites homotopiques (et même, plus généralement, les extensions de Kan homotopiques à gauche) dans $\mathbb{C}at$ (3.3.18).

Dans la quatrième section de ce chapitre, on démontre comment on peut associer à tout A-localisateur un localisateur fondamental au sens de Grothendieck (définition 3.4.1 et proposition 3.4.3). On définit par ailleurs la notion cruciale de A-localisateur *régulier* : ce sont les A-localisateurs W tels que tout préfaisceau d'ensembles X est canoniquement une colimite homotopique de préfaisceaux représentables. À chaque A-localisateur W, on peut associer un A-localisateur régulier, appelé sa *complétion régulière* : c'est le plus petit A-localisateur régulier qui contient W. On démontre que si un A-localisateur est accessible (resp. propre, resp. stable par produits finis), alors il en est de même de sa complétion régulière. On caractérise de plus les A-localisateurs réguliers comme ceux dont la complétion simpliciale contient les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux argument par argument (théorème 3.4.36). Cela nous permet de donner des exemples non triviaux de A-localisateurs propres qui ne sont pas réguliers (3.4.57).

Chapitre 4. — Ce chapitre est consacré à la démonstration des conjectures de Grothendieck sur les catégories test et les localisateurs fondamentaux.

Dans la première section, on rappelle les notions fondamentales de catégorie test (locale) et de foncteur test (local), ainsi que leurs caractérisations essentielles (voir 4.1.12, 4.1.14 et 4.1.19 pour les catégories test locales, et 4.1.24 et 4.1.26 pour les foncteurs test locaux). On rappelle par ailleurs que pour un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ donné,

pour toute petite catégorie A, on peut définir une classe d'équivalences faibles de préfaisceaux sur A, notée $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ (4.1.3), dont on étudie les premières propriétés.

Dans la seconde, on commence par prouver que pour un localisateur fondamental $\mathcal{W}$, une petite catégorie A est une catégorie test locale si et seulement si la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est un A-localisateur (4.2.3). Ensuite, pour une petite catégorie A donnée, on établit une bijection entre les A-localisateurs *test* (*i.e.* réguliers et tels que pour tout préfaisceau représentable a sur A, la flèche de a vers le préfaisceau final soit une équivalence faible) et les localisateurs fondamentaux tels que A soit une catégorie test (théorème 4.2.15). On démontre que cette bijection conserve l'accessibilité (un localisateur fondamental est dit *accessible* s'il est le plus petit localisateur fondamental contenant un *ensemble* de morphismes de $\mathbf{Cat}$). On en déduit deux conjectures de Grothendieck : pour tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$, et toute catégorie test locale A, la catégorie des préfaisceaux sur A admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ (4.2.18) ; le localisateur fondamental minimal est formé exactement des foncteurs dont le nerf est une équivalence faible simpliciale au sens usuel (4.2.19). On donne enfin plusieurs exemples d'équivalences de Quillen entre catégories de modèles fermées associées à des catégories test.

Dans la troisième section, on s'intéresse à la notion de localisateur fondamental propre : ce sont les localisateurs fondamentaux $\mathcal{W}$ tels que pour toute catégorie test A, $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit un A-localisateur propre. On démontre que cette condition équivaut à demander qu'il existe une catégorie test A telle que le A-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit propre (4.3.24). On en déduit des conditions suffisantes pour qu'un localisateur fondamental soit propre (on verra plus loin qu'elles sont en fait nécessaires) : par exemple, si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental engendré par un foncteur de la forme $A \longrightarrow e$ (où e désigne la catégorie ponctuelle), alors $\mathcal{W}$ est propre.

Dans la quatrième section de ce chapitre, on s'intéresse à la théorie de l'homotopie sur $\mathbf{Cat}/A$ définie par une petite catégorie A et un localisateur fondamental $\mathcal{W}$. On démontre ensuite un résultat fondamental concernant les catégories test locales : si A est une catégorie test locale, la théorie homotopique définie par $\mathcal{W}$ sur la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur A est équivalente à celle définie sur $\mathbf{Cat}/A$ (4.4.20). On en déduit que si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental propre, alors pour toute catégorie test locale A, le A-localisateur associé $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre (4.4.30).

Chapitre 5. — Dans ce chapitre, on utilise les chapitres précédents pour construire des structures de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des petites catégories $\mathbf{Cat}$.

La première section consiste à étudier la notion de *cofibration formelle* dans $\mathbf{Cat}$: ce sont les morphismes qui se comportent formellement comme des cofibrations d'une structure de catégorie modèles sur $\mathbf{Cat}$ dont les équivalences faibles sont les éléments d'un localisateur fondamental.

La deuxième section associe à tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$ une structure de catégorie de modèles fermée à la Thomason. On vérifie que cette structure de catégorie de modèles fermée est propre si et seulement si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est propre. Lorsque $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental minimal, on retrouve de la

sorte la structure de catégorie de modèles fermée de Thomason originale. On définit ensuite des variantes de ces structures de catégorie de modèles fermée en forçant que le foncteur de passage à la catégorie oppposée soit une équivalence de Quillen.

Dans la troisième section, après avoir rappelé les notions de foncteur *propre* et de foncteur *lisse* (notions fondamentales dans la théorie de l'homotopie de Grothendieck), on démontre que pour tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$, la catégorie des petites catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$, et dont les fibrations ont le mérite d'être à la fois des foncteurs propres et des foncteurs lisses. Cela implique en particulier que la catégorie des petites catégories admet une structure de catégorie d'objets fibrants (au sens de Brown [**22**]) dont les équivalences faibles sont les éléments du localisateur fondamental minimal (*i.e.* les équivalences faibles usuelles), et les fibrations, les foncteurs à la fois propres et lisses (pour cela il faut aussi invoquer les corollaires 6.4.8 et 6.4.16).

Chapitre 6. — Ce chapitre est consacré à la notion de carré homotopiquement cartésien dans Cat relativement à un localisateur fondamental accessible (et même, le plus souvent, propre).

La première section consiste à caractériser les carrés homotopiquement cartésiens dans les catégories de préfaisceaux sur des catégories test locales. Cela permettra de trouver une nouvelle caractérisation des localisateurs fondamentaux propres (6.1.11). On montre aussi comment associer canoniquement à tout localisateur fondamental accessible un localisateur fondamental propre ayant les mêmes catégorie asphériques (6.1.8). On en déduira aussi une amélioration du théorème de minimalité : la classe des morphismes de Cat dont le nerf est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux est le localisateur fondamental *faible* minimal (6.1.18). En d'autres termes : la théorie de l'homotopie est totalement caractérisée par le fait que toute catégorie admettant un objet final a un type d'homotopie trivial et par le théorème A de Quillen.

La seconde section donne des critères dans l'esprit des théorèmes A et B de Quillen (mais pour un localisateur fondamental propre général) pour déterminer si un carré commutatif est homotopiquement cartésien dans Cat.

La troisième section complète et utilise la seconde pour définir la notion de foncteur *fortement localement constant*. Pour leur étude, on introduit la notion de *transversalité homotopique*. Les foncteurs fortement localement constants produisent des adjonctions (voire des équivalences) de Quillen entre catégories de préfaisceaux sur des catégories test locales (6.3.24 et 6.3.33). On introduit ensuite la notion de *foncteur excellent*. Ce sont des foncteurs fortement localement constants qui ont la propriété supplémentaire d'être compatibles aux carrés homotopiquement cartésiens en un sens adéquat (6.3.43).

La quatrième section est consacrée au théorème B de Quillen proprement dit, ainsi qu'à quelques reformulations équivalentes (6.4.14 et 6.4.15). On retrouve aussi de la même manière quelques versions abstraites du théorème de complétion en groupe (6.4.12). On montre par ailleurs que le théorème B de Quillen caractérise en quelque sorte le localisateur fondamental minimal (6.4.22). Ces résultats sont ensuite interprétés en termes de catégories test locales.

La dernière section de ce chapitre établit un lien entre la notion de foncteur (fortement) localement constant que nous avons déjà définie et une notion de « système local homotopique ». On donne pour conclure une reformulation du théorème B de Quillen en termes de limites homotopiques à coefficients dans une catégorie de modèles fermée abstraite : les équivalences faibles usuelles de Cat sont caractérisées par la « cohomologie à coefficients localement constants » (6.5.11).

Chapitre 7. — Ce chapitre est consacré à la théorie de l'homotopie équivariante : pour une petite catégorie A, un A-localisateur W, et un préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ sur A donnés, on étudie la théorie de l'homotopie des représentations de $\mathbb{G}$ associée à W (une représentation de $\mathbb{G}$ est simplement un préfaisceau sur A muni d'une action de $\mathbb{G}$).

La première section se place dans un cadre abstrait. On explicite une petite catégorie $\mathcal{B}\mathbb{G}$ telle que la catégorie des représentations de $\mathbb{G}$ soit canoniquement équivalente à la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{B}\mathbb{G}$. Ensuite, on montre comment associer au A-localisateur W un $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur, puis comment les propriétés fondamentales telles que l'accessibilité, la propreté ou la régularité de W peuvent y être reflétées. On exhibe en outre des structures de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des représentations de $\mathbb{G}$ qui ont la particularité que les objets cofibrants sont des $\mathbb{G}$-torseurs relatifs.

Dans la seconde section, on démontre que si $u : A \longrightarrow B$ est un foncteur lisse, et si B est une catégorie test locale, alors A est une catégorie test locale (7.2.1). En particulier, toute catégorie fibrée sur une catégorie test locale est donc une catégorie test locale. Il en résulte que si A est une catégorie test locale, il en est de même de la catégorie $\mathcal{B}\mathbb{G}$. On collecte ensuite les fruits du mariage de la première section et de la théorie des catégories test locales. Cela permet de démontrer un théorème de correspondance de Galois relativement à $\mathbb{G}$ (scholie 7.2.15).

La troisième section complète la seconde : elle consiste à produire des carrés homotopiquement cartésiens en termes de $\mathbb{G}$-torseurs. Lorsque par exemple $\mathbb{G}$ est un groupe simplicial, cela fournit des outils adéquats pour faire le lien entre la théorie de l'homotopie des représentations de $\mathbb{G}$ définie par le fait que $\mathcal{B}\mathbb{G}$ est une catégorie test locale, et des théories de l'homotopie des représentations de $\mathbb{G}$ plus classiques.

On démontre ensuite un théorème de classification des $\mathbb{G}$-torseurs pour un préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ sur une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale (7.4.14).

Dans la cinquième et dernière section du chapitre, on utilise pour la première fois la théorie des fibrations minimales d'ensembles simpliciaux. Cela permet de démontrer que pour toute catégorie test locale A, tout morphisme de préfaisceaux sur A se factorise en une cofibration triviale, suivie d'une fibration triviale, puis d'un fibré (7.5.5), résultat qui est déjà connu pour les ensembles simpliciaux justement grâce à la théorie des fibrations minimales.

Chapitre 8. — Ce chapitre est consacré à produire des exemples non triviaux de catégories test ayant de bonnes propriétés combinatoires, comparables à celles de la catégorie des simplexes.

Dans la première section, on étudie les catégories *squelettiques* ; ce sont des catégories ayant de bonnes propriétés combinatoires pour définir et calculer facilement les foncteurs squelette et cosquelette.

Dans la deuxième section, on définit les catégories squelettiques *régulières*. On démontre que si A est une catégorie squelettique régulière, alors tout A-localisateur est régulier (8.2.9). On en déduit une meilleure description de la structure de catégorie de modèles fermée sur une catégorie de préfaisceaux sur une catégorie test locale squelettique et régulière (8.2.18 et 8.2.19).

Les résultats précédents sont ensuite utilisés dans les deux sections suivantes du chapitre pour étudier la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux symétriques et la théorie de l'homotopie des ensembles cubiques. Les ensembles simpliciaux symétriques sont les préfaisceaux sur la catégorie Υ des ensembles finis non vides. La catégorie Υ est une catégorie test stricte. On construit une structure de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant sur la catégorie des ensembles simpliciaux symétriques dont les cofibrations ne sont pas tous les monomorphismes, mais sont par nature liées à la combinatoire de Υ (8.3.8). Cette catégorie de modèles fermée est équivalente à la catégorie de modèles fermée des ensembles simpliciaux. On développe ensuite la théorie de l'homotopie des ensembles cubiques : on obtient de la sorte une catégorie de modèles fermée canonique (8.4.38). On établit en outre une équivalence de Quillen des ensembles cubiques vers les ensembles simpliciaux (8.4.30).

Dans la dernière section, on étudie la théorie de l'homotopie des ensembles cycliques, c'est à dire des préfaisceaux sur la catégorie $\mathbf{\Lambda}$ de Connes [**38**]. On démontre que $\mathbf{\Lambda}$ est une catégorie test locale, ce qui nous permet de retrouver la structure de catégorie de modèles fermée de Dwyer, Hopkins et Kan [**49**] sur la catégorie des ensembles cycliques (8.5.13). On retrouve par ailleurs que le nerf de $\mathbf{\Lambda}$ est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 2)$. On définit en outre une équivalence de Quillen à gauche de la catégorie des ensembles cycliques vers la catégories des représentations du groupe simplicial $K(\mathbb{Z}, 1)$ (8.5.22).

Chapitre 9. — Dans ce chapitre, on s'intéresse à des localisateurs fondamentaux particuliers (le plus souvent d'un point de vue très simplicial).

La première section rappelle le lien entre les foncteurs cosquelettes et les foncteurs de troncation de Postnikov dans la catégorie des ensembles simpliciaux.

Dans la deuxième, on étudie les localisateurs fondamentaux des *n-équivalences* (formé des morphismes induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie en degrés $\leqslant n$) auxquels on associe des catégories test spécifiques (9.2.17).

Dans la troisième section, on démontre que les localisateurs fondamentaux non triviaux sont ceux qui testent la connexité.

Enfin, dans la dernière section, on associe des localisateurs fondamentaux accessibles aux théories (co)homologiques. Cela permet de produire des exemples de localisateurs fondamentaux (et donc aussi de A-localisateurs) accessibles qui ne sont pas propres. En effet, les résultats de Serre sur les groupes d'homotopie des sphères impliquent que le localisateur fondamental défini par l'homologie singulière à coefficients rationnels n'est pas propre. Un autre exemple éclairant : le localisateur fondamental défini par l'homologie singulière à coefficients entiers n'est pas propre, et le localisateur

fondamental propre qui lui est canoniquement associé est défini par la construction + de Quillen.

Notations génériques

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on notera $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ la classe de ses objets, et $\mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$ celle de ses flèches. On désignera par $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie opposée de $\mathcal{C}$. Pour deux objets X et Y de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ désignera l'ensemble des flèches de X vers Y dans $\mathcal{C}$. Si la catégorie $\mathcal{C}$ admet un objet final, on désignera souvent cet objet par le symbole $e_{\mathcal{C}}$.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories, on désignera par $\mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Pour une catégorie $\mathcal{C}$, une petite catégorie I, un foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$, et un objet i de I, on notera selon les cas $F(i)$ ou F_i l'évaluation de F en i. Si la limite inductive (resp. projective) de F est représentable dans $\mathcal{C}$, on la notera

$$\varinjlim F = \varinjlim_{I} F = \varinjlim_{i\in I} F_i \quad (\text{resp. } \varprojlim F = \varprojlim_{I} F = \varprojlim_{i\in I} F_i).$$

On note $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles, et $\mathcal{C}at$ celles des petites catégories (*i.e.* des catégories C telles que $\mathrm{Ob}\,C$ et $\mathrm{Fl}\,C$ soient des ensembles et non des classes). La catégorie ponctuelle, *i.e.* la catégorie ayant un seul objet et l'identité de celui-ci comme unique morphisme, sera notée e. Pour une petite catégorie A donnée, on notera par défaut $p_A : A \longrightarrow e$ l'unique foncteur de A vers la catégorie ponctuelle.

Si A est une petite catégorie, on désignera par $\widehat{A} = \mathcal{H}om(A^{op},\mathcal{E}ns)$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur A. On considèrera toujours le plongement de Yoneda

$$A \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad a \longmapsto \big(a' \longmapsto \mathrm{Hom}_A(a',a)\big)$$

comme une inclusion. Autrement dit, si a est un objet de A, on désignera encore par a le préfaisceau qu'il représente.

PARTIE I

ALGÈBRE HOMOTOPIQUE DES PRÉFAISCEAUX

CHAPITRE 1

CONSTRUCTIONS DE CATÉGORIES DE MODÈLES

1.1. Propriétés de stabilité de classes de flèches ou d'objets

Définition 1.1.1. — Soient C une catégorie, $f : X \longrightarrow Y$ et $f' : X' \longrightarrow Y'$ deux flèches de C. La flèche f' est un *rétracte* de f s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & X' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y' & \xrightarrow[j]{} & Y & \xrightarrow[s]{} & Y' \end{array}$$

tel que $ri = 1_{X'}$ et $sj = 1_{Y'}$.

On dira qu'une classe de flèches de C est *stable par rétractes* si tout rétracte d'un élément de cette classe est un élément de celle-ci.

Définition 1.1.2. — Soient C une catégorie admettant des limites inductives, et $\mathcal{F}$ une classe de flèches de C. On dira que $\mathcal{F}$ est *stable par images directes*, si pour tout carré cocartésien dans C

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xrightarrow[h]{} & Y' \end{array} \quad ,$$

si f est un élément de $\mathcal{F}$, alors il en est de même de f'. On dira que $\mathcal{F}$ est *stable par compositions transfinies* si pour tout ensemble bien ordonné I, d'élément initial 0, et tout foncteur $X : I \longrightarrow C$ tel que pour tout $i \in I$, $i > 0$, le morphisme $\varinjlim_{j<i} X(j) \longrightarrow X(i)$ soit un élément de $\mathcal{F}$, alors le morphisme composé transfini $X(0) \longrightarrow \varinjlim X$ est un élément de $\mathcal{F}$.

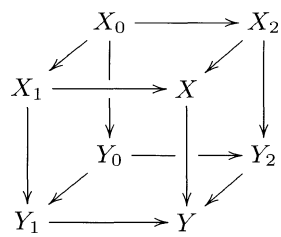
Remarque 1.1.3. — On vérifie facilement que la classe $\mathcal{F}$ est stable par compositions transfinies si et seulement si pour tout ensemble bien ordonné I, d'élément initial 0, et tout foncteur $X : I \longrightarrow C$ tel que pour tout $i \in I$ admettant un successeur $i+1$ dans I, le morphisme $X(i) \longrightarrow X(i+1)$ soit dans $\mathcal{F}$, et tel que pour tout $i \in I$ distinct de 0, et n'admettant pas de prédécesseur dans I, le morphisme $\varinjlim_{j<i} X(j) \longrightarrow X(i)$ soit un isomorphisme, alors le morphisme composé transfini $X(0) \longrightarrow \varinjlim X$ est un élément de $\mathcal{F}$.

Remarque 1.1.4. — Dans une catégorie admettant des limites inductives, toute somme s'écrit comme un composé transfini d'images directes. On en déduit que toute classe de flèches stable par compositions transfinies et par images directes est aussi stable par sommes. De même, une telle classe est stable par composition de deux flèches composables et contient les isomorphismes.

Exemple 1.1.5. — Pour toute petite catégorie A, la classe des monomorphismes de la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A est stable par images directes, compositions transfinies et rétractes.

Lemme 1.1.6. — *Soient C une catégorie admettant des limites inductives, et $\mathcal{F}$ une classe de flèches de C.*

(a) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par images directes, pour tout diagramme commutatif*

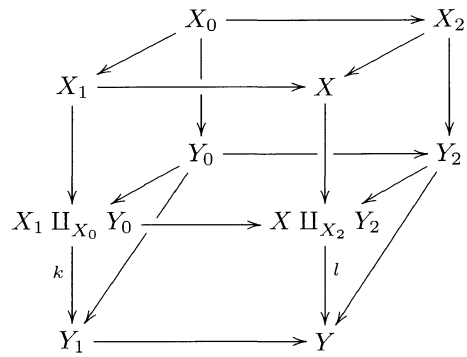


dont les faces horizontales sont cocartésiennes, si la flèche $k : X_1 \amalg_{X_0} Y_0 \longrightarrow Y_1$ est dans $\mathcal{F}$, il en est de même de $l : X \amalg_{X_2} Y_2 \longrightarrow Y$.

(b) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par images directes, et compositions transfinies, pour tout ensemble bien ordonné I, de plus petit élément 0, tout couple de foncteurs $X, Y : I \longrightarrow C$, et tout morphisme de foncteurs $X \longrightarrow Y$, si pour tout i dans I, $i > 0$, la flèche $(\varinjlim_{j<i} Y_j) \amalg_{(\varinjlim_{j<i} X_j)} X_i \longrightarrow Y_i$ est dans $\mathcal{F}$, il en est de même du morphisme $Y_0 \amalg_{X_0} \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$.*

Démonstration

(*a*) On commence par former le diagramme commutatif suivant.



Le carré horizontal supérieur, ainsi que les deux carrés latéraux du cube étant cocartésiens, il en est de même du carré horizontal inférieur. Le carré oblique étant aussi cocartésien, il en est de même de la face avant du prisme. La stabilité de $\mathcal{F}$ par images directes implique alors que si k est dans $\mathcal{F}$, il en est de même de l.

(b) Posons, $X'_i = \varinjlim_{j<i} X_j$, $Y'_i = \varinjlim_{j<i} Y_j$, $i \in I$, $i > 0$, $X' = \varinjlim X$, $Y' = \varinjlim Y$, et considérons le foncteur $Y \amalg_X X' : I \longrightarrow \mathcal{C}$.

$$i \longmapsto Y_i \amalg_{X_i} X' \ , \qquad j \leqslant i \quad \longmapsto \quad Y_j \amalg_{X_j} X' \longrightarrow Y_i \amalg_{X_i} X'$$

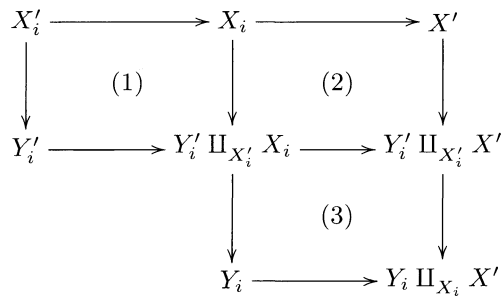
On va montrer que pour tout i dans I, $i > 0$, la flèche

$$Y'_i \amalg_{X'_i} X' \simeq \varinjlim_{j<i} (Y_j \amalg_{X_j} X') \longrightarrow Y_i \amalg_{X_i} X'$$

est dans $\mathcal{F}$, ce qui en vertu de la stabilité de $\mathcal{F}$ par compositions transfinies impliquera que

$$Y_0 \amalg_{X_0} X' \longrightarrow \varinjlim_{I} (Y \amalg_X X') \simeq Y' \amalg_{X'} X' \simeq Y'$$

est dans $\mathcal{F}$. On commence par former, pour i dans I, $i > 0$, le diagramme commutatif suivant.



Comme les carrés (1) et (2) $\circ$ (1) sont cocartésiens, il en est de même du carré (2). Le carré (3) $\circ$ (2) étant cocartésien, on en déduit qu'il en est de même du carré (3). Vu que $Y'_i \amalg_{X'_i} X_i \longrightarrow Y_i$ est par hypothèse dans $\mathcal{F}$, la stabilité de $\mathcal{F}$ par images

directes implique que $Y_i' \amalg_{X_i'} X' \longrightarrow Y_i \amalg_{X_i} X'$ est aussi dans $\mathcal{F}$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 1.1.7. — *Soient C une catégorie admettant des limites inductives, et $\mathcal{F}$ une classe de flèches de C. Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ la classe des flèches de la catégorie $\mathcal{H}(C)$ des flèches de C formée des*

$$\begin{array}{ccc} X & & X_0 \xrightarrow{x} X_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & = & {\scriptstyle f_0}\downarrow \quad\quad \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ Y & & Y_0 \xrightarrow[y]{} Y_1 \end{array}$$

tels que $\tilde{f} : Y_0 \amalg_{X_0} X_1 \longrightarrow Y_1$ soit dans $\mathcal{F}$.

(a) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par images directes, il en est de même de $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

(b) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par images directes et compositions transfinies, il en est de même de $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

(c) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par rétractes, il en est de même de $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. — Les assertions (a) et (b) résultent aussitôt du lemme 1.1.6. L'assertion (c) résulte du fait que $f \mapsto \tilde{f}$ définit un endofoncteur de la catégorie des flèches de C. □

Corollaire 1.1.8. — *Soient C, C' deux catégories admettant des petites limites inductives, $F, G : C' \longrightarrow C$ deux foncteurs commutant aux petites limites inductives, $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs, $\mathcal{F}$ une classe de flèches de C, et $\mathcal{F}'$ la classe des flèches $f : X \longrightarrow Y$ de C' telles que le morphisme $GX \amalg_{FX} FY \longrightarrow GY$ déduit du carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(f)} & FY \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ GX & \xrightarrow[G(f)]{} & GY \end{array}$$

soit dans $\mathcal{F}$.

(a) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par images directes, il en est de même de $\mathcal{F}'$.*

(b) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par images directes et compositions transfinies, il en est de même de $\mathcal{F}'$.*

(c) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par rétractes, il en est de même de $\mathcal{F}'$.*

Démonstration. — Le morphisme de foncteurs α définit un foncteur H de C vers $\mathcal{H}(C)$ commutant aux limites inductives. En gardant les notations de la proposition précédente, on a $\mathcal{F}' = H^{-1}(\widetilde{\mathcal{F}})$, et le corollaire résulte du fait que l'image réciproque d'une classe de flèches stable par images directes, compositions transfinies, ou rétractes par un foncteur commutant aux limites inductives satisfait aussi à la même propriété de stabilité. □

Remarque 1.1.9. — La proposition 1.1.7 est le cas particulier du corollaire 1.1.8 appliqué à $C' = \mathcal{H}(C)$, F, G les foncteurs source, but, et α le morphisme naturel du foncteur source vers le foncteur but.

Lemme 1.1.10. — *Soient C une catégorie admettant des limites inductives, et $\mathcal{F}$ une classe de flèches de C.*

(a) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par composition et images directes, pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longleftarrow & X_0 & \longrightarrow & X_2 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_0} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ Y_1 & \longleftarrow & Y_0 & \longrightarrow & Y_2 \end{array} ,$$

si les morphismes i_2 et $k : X_1 \amalg_{X_0} Y_0 \longrightarrow Y_1$ sont dans $\mathcal{F}$, alors il en est de même pour le morphisme canonique $X_1 \amalg_{X_0} X_2 \longrightarrow Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2$.

(b) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par images directes et compositions transfinies, pour tout ensemble bien ordonné I, tout couple de foncteurs $X, Y : I \longrightarrow C$, et tout morphisme de foncteurs $\alpha : X \longrightarrow Y$, si pour tout i dans I, la flèche $(\varinjlim_{j<i} Y_j) \amalg_{(\varinjlim_{j<i} X_j)} X_i \longrightarrow Y_i$ est dans $\mathcal{F}$, il en est de même de la flèche $\varinjlim \alpha : \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$.*

Démonstration

(*a*) Considérons le carré cocartésien

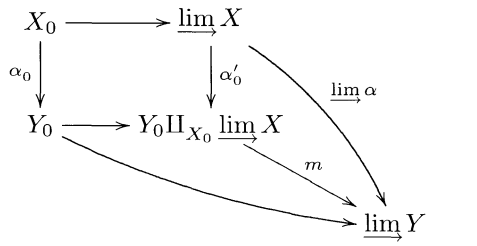
$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\quad i_2 \quad} & Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 \amalg_{X_0} X_2 & \xrightarrow[i'_2]{} & X_1 \amalg_{X_0} X_2 \amalg_{X_2} Y_2 \end{array} .$$

Comme i_2 est dans $\mathcal{F}$, la stabilité de $\mathcal{F}$ par images directes implique que i'_2 est dans $\mathcal{F}$. Or la flèche canonique $X_1 \amalg_{X_0} X_2 \longrightarrow Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2$ est le composé

$$X_1 \amalg_{X_0} X_2 \xrightarrow{i'_2} X_1 \amalg_{X_0} X_2 \amalg_{X_2} Y_2 \xrightarrow{l} Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2 .$$

Comme k est dans $\mathcal{F}$, il résulte du lemme 1.1.6 que l est dans $\mathcal{F}$, et l'assertion résulte de la stabilité de $\mathcal{F}$ par composition.

(b) Notons 0 le plus petit élément de I, et considérons le diagramme commutatif



.

En vertu du lemme 1.1.6, le morphisme m est dans $\mathcal{F}$, et par hypothèse, le morphisme α_0 (qui s'identifie à la flèche $(\varinjlim_{j<0} Y_j) \amalg_{(\varinjlim_{j<0} X_j)} X_0 \longrightarrow Y_0$) est aussi dans $\mathcal{F}$. La stabilité par images directes implique que α'_0 est dans $\mathcal{F}$, et il en est donc de même de $\varinjlim \alpha$. □

Lemme 1.1.11. — *Soient C une catégorie admettant des limites inductives, et $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux classes de flèches de C satisfaisant à la propriété ci-dessous.*

(P) *Pour tout couple de morphismes composables $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ dans C, si f et gf sont dans $\mathcal{F}$, et g dans $\mathcal{E}$, alors g est dans $\mathcal{F}$.*

Alors on a les assertions suivantes.

(a) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par composition et images directes, pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longleftarrow & X_0 & \longrightarrow & X_2 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_0} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ Y_1 & \longleftarrow & Y_0 & \longrightarrow & Y_2 \end{array} \quad ,$$

si les morphismes i_0, i_1, i_2 sont dans $\mathcal{F}$ et $k : X_1 \amalg_{X_0} Y_0 \longrightarrow Y_1$ dans $\mathcal{E}$, alors le morphisme canonique $X_1 \amalg_{X_0} X_2 \longrightarrow Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2$ est dans $\mathcal{F}$.

(b) *Si la classe $\mathcal{F}$ est stable par images directes et compositions transfinies, pour tout ensemble bien ordonné I, de plus petit élément 0, tout couple de foncteurs X, $Y : I \longrightarrow C$, et tout morphisme de foncteurs $\alpha : X \longrightarrow Y$, si pour tout i dans I, la flèche α_i est dans $\mathcal{F}$, et si pour tout $i > 0$, la flèche*

$$(\varinjlim_{j<i} Y_j) \amalg_{(\varinjlim_{j<i} X_j)} X_i \longrightarrow Y_i$$

est dans $\mathcal{E}$, alors la flèche $\varinjlim \alpha : \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$ est dans $\mathcal{F}$.

Démonstration

(a) Considérons le carré cocartésien

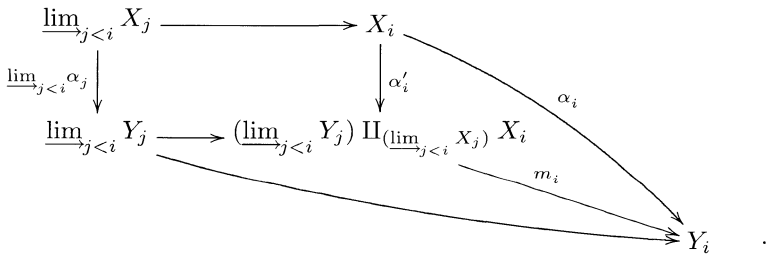
$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_0} & Y_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow[i'_0]{} & X_1 \amalg_{X_0} Y_0 \end{array} \quad .$$

Comme i_0 est dans $\mathcal{F}$, la flèche i'_0 aussi. Or le morphisme i_1 se décompose en

$$X_1 \xrightarrow{i'_0} X_1 \amalg_{X_0} Y_0 \xrightarrow{k} S_1 \quad .$$

Vu que i_1 est dans $\mathcal{F}$ et k dans $\mathcal{E}$, il résulte de la propriété (P) que k est dans $\mathcal{F}$. Le morphisme i_2 étant dans $\mathcal{F}$, l'assertion résulte du lemme 1.1.10.

(b) En vertu du lemme 1.1.10, il suffit de montrer que pour tout $i \in I$, le morphisme $m_i : (\varinjlim_{j<i} Y_j) \amalg_{(\varinjlim_{j<i} X_j)} X_i \longrightarrow Y_i$ est dans $\mathcal{F}$. On raisonne par récurrence transfinie. Pour $i = 0$, le morphisme m_0 s'identifie à la flèche $\alpha_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$, qui est par hypothèse dans $\mathcal{F}$. Soit donc $i \in I$, $i > 0$, et supposons que pour tout $j < i$, le morphisme m_j soit dans $\mathcal{F}$. Le lemme 1.1.10 implique alors que la flèche $\varinjlim_{j<i} \alpha_j : \varinjlim_{j<i} X_j \longrightarrow \varinjlim_{j<i} Y_j$ est dans $\mathcal{F}$. Considérons le diagramme commutatif



La stabilité de $\mathcal{F}$ par images directes implique que α'_i est dans $\mathcal{F}$, et comme par hypothèse α_i est dans $\mathcal{F}$ et m_i dans $\mathcal{E}$, la propriété (P) implique que m_i est dans $\mathcal{F}$, ce qui achève la démonstration. □

Définition 1.1.12. — Soient A une petite catégorie, et D une classe d'objets de $\widehat{A}$. On dit que D est *saturée par monomorphismes* si elle satisfait aux propriétés suivantes.

(a) Pour tout carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

tel que i soit un monomorphisme, si X, Y, et X' sont dans D, il en est de même de Y'.

(b) Pour tout ensemble bien ordonné I, et tout foncteur $X : I \longrightarrow \widehat{A}$ tel que pour tous $i, j \in I$, $i \leqslant j$, $X_i \longrightarrow X_j$ soit un monomorphisme, si pour tout $i \in I$, X_i est dans D, il en est de même de $\varinjlim_I X_i$.

(c) Pour tout monomorphisme $X' \longrightarrow X$ admettant une rétraction, si X est dans D, il en est de même de X'.

On remarque que la condition (b), appliquée à l'ensemble ordonné vide, implique que l'objet initial $\varnothing$ de $\widehat{A}$ est dans D, et que les conditions (a) et (b) impliquent la stabilité de D par sommes.

Remarque 1.1.13. — Soient A, B deux petites catégories, et $F : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ un foncteur commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes. Alors si D est une classe d'objets de $\widehat{B}$ saturée par monomorphismes, la classe $F^{-1}(\mathsf{D})$ est également saturée par monomorphismes.

1.1.14. — Soit A une petite catégorie. La catégorie $\mathcal{F}\widehat{A}$ des flèches de $\widehat{A}$ s'identifie à la catégorie des foncteurs $\mathcal{H}om(\Delta_1, \widehat{A})$, où Δ_1 désigne la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$, ou encore à la catégorie $\widehat{\Delta_1^{op} \times A}$ des préfaisceaux sur $\Delta_1^{op} \times A$. On dit qu'une classe C de flèches de $\widehat{A}$ est *saturée par monomorphismes* si la classe C, vue comme classe d'objets de la catégorie $\mathcal{F}\widehat{A} \simeq \widehat{\Delta_1^{op} \times A}$, est saturée par monomorphismes. Concrètement cela signifie que la classe C satisfait aux conditions suivantes.

(a) Pour tout diagramme commutatif dans $\widehat{A}$

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{x_1} & X_0 & \xrightarrow{x_2} & X_2 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ Y_1 & \xleftarrow[y_1]{} & Y_0 & \xrightarrow[y_2]{} & Y_2 \end{array} ,$$

dans lequel x_1 et y_1 sont des monomorphismes, si f_0, f_1, f_2 sont dans C, alors la flèche canonique $X_1 \amalg_{X_0} X_2 \longrightarrow Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2$ est aussi dans C.

(b) Pour tout ensemble bien ordonné I, tout couple de foncteurs $X, Y : I \longrightarrow \widehat{A}$, et tout morphisme de foncteurs $\alpha : X \longrightarrow Y$, si les flèches $X_i \longrightarrow X_j$, $Y_i \longrightarrow Y_j$, $i \leqslant j$, $i, j \in I$, sont des monomorphismes, et si les flèches $\alpha_i : X_i \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, sont dans C, alors $\varinjlim \varphi : \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$ est dans C.

(c) La classe C est stable par rétractes.

Lemme 1.1.15. — *Soient A, B deux petites catégories, $F, G : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs, et C une classe de flèches de $\widehat{B}$ saturée par monomorphismes. Alors la classe D des objets X de $\widehat{A}$ tels que α_X soit dans C est saturée par monomorphismes.*

Démonstration. — Le lemme résulte aussitôt de la remarque 1.1.13, et de l'observation que le morphisme de foncteurs $\alpha : F \longrightarrow G$ définit un foncteur $H : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{H}\,\widehat{B}$, commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, tel que $\mathsf{D} = H^{-1}(\mathsf{C})$. □

Proposition 1.1.16. — *Soient A, B deux petites catégories, F, $G : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs tel que pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme $\alpha_X : FX \longrightarrow GX$ soit un monomorphisme de $\widehat{B}$, et tel que pour tout monomorphisme $i : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$, le carré*

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Fi} & FY \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ GX & \xrightarrow[Gi]{} & GY \end{array} \qquad (1.1.16.1)$$

soit cartésien, et C *une classe de flèches de $\widehat{B}$ stable par images directes, compositions transfinies et rétractes, et satisfaisant à la propriété suivante.*

(P) *Pour tout couple de morphismes composables $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ de $\widehat{B}$, si f et gf sont dans* C *et si g est un monomorphisme, alors g est dans* C.

Alors la classe D *des objets X de $\widehat{A}$ tels que α_X soit dans* C *est saturée par monomorphismes.*

Démonstration. — Pour tout monomorphisme $i : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$, le carré 1.1.16.1 étant un carré cartésien de $\widehat{B}$ formé de monomorphismes, la flèche

$$GX \amalg_{FX} FY \longrightarrow GY$$

est un monomorphisme, et les conditions (a) et (b) de la saturation de D par monomorphismes résultent respectivement des assertions (a) et (b) du lemme 1.1.11, appliqué à la classe $\mathcal{F} = \mathsf{C}$, et à la classe $\mathcal{E}$ formée des monomorphismes de $\widehat{B}$. La condition (c) résulte aussitôt de la stabilité de C par rétractes. □

1.2. Accessibilité

1.2.1. — Ce paragraphe a pour but de rappeler les techniques élémentaires qui permettront d'utiliser l'argument du petit objet assez librement dans les catégories de préfaisceaux. Les notions d'accessibilité telles que nous les envisageons ici sont celles de SGA 4 (voir [**70**, exposé I, § 9]).

Lorsque E est un ensemble, on note $|E|$ son cardinal.

Définition 1.2.2. — Soit α un cardinal. Un ensemble ordonné I est dit *α-filtrant*, s'il est filtrant, et si tout sous-ensemble de I de cardinal inférieur ou égal à α admet un majorant.

Remarque 1.2.3. — Dans SGA 4, un ensemble ordonné α-filtrant est appelé un ensemble ordonné grand devant α. Il est immédiat que si $\beta \leqslant \alpha$ sont deux cardinaux, tout ensemble ordonné α-filtrant est β-filtrant. Si α est un cardinal fini, un ensemble ordonné est α-filtrant si et seulement s'il est filtrant.

Exemple 1.2.4. — Soit α un cardinal. Alors le cardinal successeur de α, vu comme un ordinal (et donc comme un ensemble bien ordonné), est α-filtrant.

Définition 1.2.5. — Soit α un cardinal. Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est *α-accessible* si pour tout ensemble ordonné α-filtrant I, $\mathcal{A}$ admet des limites inductives de type I, et F y commute. On dira qu'un foncteur est *accessible* s'il est α-accessible pour un certain cardinal α.

Soit C une catégorie. Un objet X de C est *accessible* (resp. *α-accessible*, pour un cardinal α), si le foncteur $C \longrightarrow \mathcal{E}ns$, $Y \longmapsto \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ l'est. On dit que X est de *présentation finie* s'il est α-accessible pour un cardinal *fini* α, autrement dit, si le foncteur $Y \longmapsto \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ commute aux limites inductives filtrantes.

Remarque 1.2.6. — Si $\beta \leqslant \alpha$, tout foncteur β-accessible est α-accessible.

Exemple 1.2.7. — Tout foncteur qui commute aux petites limites inductives est α-accessible pour tout cardinal α. Le composé de deux foncteurs α-accessibles l'est. Une limite inductive de foncteurs α-accessibles est α-accessible.

Remarque 1.2.8. — Soit A une petite catégorie. Dans la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux d'ensembles sur A, les objets représentables sont α-accessibles pour tout cardinal α. En effet, les limites inductives se calculent terme à terme dans $\widehat{A}$, ce qui peut se reformuler en disant que si a est un objet de A, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(a, \ .\ ) : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ commute aux petites limites inductives.

Proposition 1.2.9. — *Soient A une petite catégorie, et $\alpha = |\mathrm{Fl}\, A|$. Le foncteur $\varprojlim : \mathcal{H}om(A, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathcal{E}ns$ est α-accessible.* (Voir [**70**, exposé I, corollaire 9.8].)

Démonstration. — Il est bien connu que dans la catégorie des ensembles, les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies. On se ramène ainsi facilement au cas où A est une catégorie discrète, *i.e.* un ensemble de cardinal α. En effet, si F est un foncteur de A vers $\mathcal{E}ns$, la limite projective de F se calcule comme le noyau d'une double flèche dont le but est un produit des $F(a)$ indexé par l'ensemble des flèches de A, et la source un produit des $F(a)$ indexé par l'ensemble des objets de A.

Soient I un ensemble ordonné α-filtrant, et $(F_a)_{a \in A}$ une famille de foncteurs de I vers $\mathcal{E}ns$. Il faut montrer que l'application naturelle

$$\phi : \varinjlim_I \prod_a F_a \longrightarrow \prod_a \varinjlim_I F_a$$

est bijective.

Soient x et y deux éléments de $\varinjlim \prod_a F_a$. On peut supposer que x et y sont des éléments de $\prod_a F_a(i_0)$ pour un $i_0 \in I$ convenable, car I est filtrant. Si $\phi(x) = \phi(y)$, alors pour tout $a \in A$, il existe $i_a \in I$ tel que $x_a = y_a$ dans $F_a(i)$ pour i plus grand que i_a. Comme I est α-filtrant, il existe un $i_1 \in I$ majorant tous les i_a. On a donc $x = y$ dans $\prod_a F_a(i_1)$, ce qui montre l'injectivité.

Si $z \in \prod_a \varinjlim F_a$, pour chaque élément a de A, il existe un $i_a \in I$ tel que z_a provienne de l'ensemble $F_a(i_a)$. Encore une fois, vu que I est α-filtrant, il existe un majorant i des i_a, et donc les images des z_a dans $F_a(i)$ définissent un antécédent de z. □

Proposition 1.2.10. — *Soit C une catégorie admettant des limites inductives. On considère un cardinal α, une petite catégorie A, et un foncteur $F : A \longrightarrow C$, tels que pour tout $a \in A$, l'objet $F(a)$ soit α-accessible, et on note $\lambda = \max(\alpha, |\operatorname{Fl} A|)$. Alors $\varinjlim F$ est λ-accessible.* Voir [**70**, exposé I, corollaire 9.9].)

Démonstration. — Soit I un ensemble ordonné λ-filtrant, et soit $G : I \longrightarrow C$ un foncteur. Alors en vertu de la proposition 1.2.9, on a des bijections canoniques

$$\begin{aligned}
\varinjlim_I \operatorname{Hom}_C(\varinjlim_A F, G) &\simeq \varinjlim_I \varprojlim_{A^{op}} \operatorname{Hom}_C(F, G) \\
&\simeq \varprojlim_{A^{op}} \varinjlim_I \operatorname{Hom}_C(F, G) \\
&\simeq \varprojlim_{A^{op}} \operatorname{Hom}_C(F, \varinjlim_I G) \\
&\simeq \operatorname{Hom}_C(\varinjlim_A F, \varinjlim_I G) \ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre la proposition. □

Corollaire 1.2.11. — *Si A est une petite catégorie, tout préfaisceau X sur A est $|\operatorname{Fl}(A/X)|$-accessible.*

Démonstration. — D'après la remarque 1.2.8, cela résulte trivialement de la proposition ci-dessus et du fait que X est la limite inductive dans $\widehat{A}$ du foncteur $A/X \longrightarrow \widehat{A}$, $(a, u) \longmapsto a$. □

Remarque 1.2.12. — Ce corollaire implique que pour toutes petites catégories A et B, tout foncteur $\widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ admettant un adjoint à gauche est accessible (ce qui est une spécialisation de [**70**, exposé I, proposition 9.5]). En effet, si $D : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ est un tel foncteur, et si G en désigne un adjoint à gauche, alors D est défini par la formule

$$D(X)_b = \operatorname{Hom}_{\widehat{A}}(G(b), X) \quad , \quad X \in \operatorname{Ob} \widehat{A} \quad , \quad b \in \operatorname{Ob} B \ .$$

Définition 1.2.13. — Soit A une petite catégorie, et soit α un cardinal. On dira qu'un préfaisceau X sur A est *de taille* $\leqslant \alpha$ si pour tout objet a de A, le cardinal de l'ensemble $X(a)$ est $\leqslant \alpha$.

1.2.14. — Pour chaque cardinal α, on note $Acc_\alpha(A)$ (resp. $T_\alpha(A)$) la sous-catégorie pleine de $\widehat{A}$ formée des objets α-accessibles (resp. des objets de taille $\leqslant \alpha$).

Proposition 1.2.15. — *Soient A une petite catégorie, et α un cardinal infini qui majore $|\operatorname{Fl} A|$. Alors tout objet de $\widehat{A}$ est la réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles. En outre, on a l'égalité :*

$$T_\alpha(A) = Acc_\alpha(A) \ .$$

En particulier, la catégorie $Acc_\alpha(A)$ est essentiellement petite.

Démonstration. — Soit X un objet de $\widehat{A}$. On note I l'ensemble des sous-objets de X de taille $\leqslant \alpha$, ordonné par l'inclusion. On vérifie aisément qu'il est α-filtrant, et on a un foncteur évident $F : I \longrightarrow \widehat{A}$. En outre, on a une flèche canonique $\varinjlim F \longrightarrow X$, laquelle est un monomorphisme, puisque c'est une limite inductive filtrante de monomorphismes. C'est en fait un isomorphisme puisque tous les objets représentables sont de taille $\leqslant \alpha$, ainsi que leurs quotients. Si X est α-accessible, l'identité de X se factorise donc en $X \longrightarrow F(i) \longrightarrow X$ pour un $i \in I$. Il est clair qu'alors l'inclusion $F(i) \longrightarrow X$ est un épimorphisme, et donc un isomorphisme, ce qui montre que X est de taille $\leqslant \alpha$. Réciproquement, si X est de taille $\leqslant \alpha$, on a $|\operatorname{Fl}(A/X)| \leqslant \alpha$, et en vertu du corollaire 1.2.11, X est α-accessible, ce qui achève la démonstration, car il est évident que la catégorie $T_\alpha(A)$ est essentiellement petite. □

Proposition 1.2.16. — *Soient A une petite catégorie, et α un cardinal infini majorant $|\operatorname{Fl} A|$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(a) *Toute limite projective finie d'objets α-accessibles de $\widehat{A}$ est α-accessible.*
(b) *Tout sous-objet d'un objet α-accessible de $\widehat{A}$ est α-accessible.*

Démonstration. — La proposition 1.2.15 permet de se ramener dans la situation où $\widehat{A}$ est la catégorie des ensembles, auquel cas cette proposition est triviale. □

Proposition 1.2.17. — *Soient A et B deux petites catégories, $G : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ un foncteur accessible. Alors il existe un cardinal α tel que pour tout cardinal $\beta \geqslant \alpha$, on ait :*

$$G(Acc_\beta(A)) \subset Acc_{\beta^\alpha}(B) \ .$$

En particulier, si $\beta_0 \geqslant \alpha$, et si $\beta = 2^{\beta_0}$, alors

$$G(Acc_\beta(A)) \subset Acc_\beta(B) \ .$$

(Voir [**70**, exposé I, proposition 9.14].)

Démonstration. — On considère un cardinal infini γ majorant $|\operatorname{Fl} A|$, tel que G soit γ-accessible. Comme en vertu de la proposition 1.2.15 la catégorie $Acc_\gamma(A)$ est essentiellement petite, il résulte du corollaire 1.2.11 qu'il existe un cardinal $\alpha \geqslant \gamma$, tel que tout préfaisceau γ-accessible sur A soit envoyé par le foncteur G sur un préfaisceau α-accessible sur B. On considère à présent un cardinal $\beta \geqslant \alpha$. Si X est un préfaisceau β-accessible sur A, on note I l'ensemble des sous-objets γ-accessibles de X,

ordonné par l'inclusion. En vertu de la proposition 1.2.15, I est un ensemble ordonné γ-filtrant, et le foncteur d'inclusion $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ a pour limite inductive le préfaisceau X. Le foncteur G étant γ-accessible par hypothèse, on a un isomorphisme canonique $\varinjlim GF \simeq GX$. Comme en vertu de 1.2.15, X est de taille $\leqslant \beta$, et les préfaisceaux appartenant à I de taille $\leqslant \gamma$, on en déduit facilement que $|I| \leqslant \beta^\gamma$. La proposition 1.2.10 implique donc que GX est β^α-accessible, puisque β^α majore à la fois α et β^γ. Pour achever la démonstration, il suffit de constater que si $\beta_0 \geqslant \alpha$, et si $\beta = 2^{\beta_0}$, alors on a les égalités $\beta^\alpha = (2^{\beta_0})^\alpha = 2^{\beta_0 \alpha} = 2^{\beta_0} = \beta$. □

Définition 1.2.18. — On rappelle que si $i : K \longrightarrow L$ et $p : X \longrightarrow Y$ sont deux flèches d'une catégorie C, on dit que i (resp. p) *vérifie la propriété de relèvement à gauche* (resp. *à droite*) *relativement à* p (resp. *relativement à* i), si pour tout carré commutatif du type suivant dans C

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L & \xrightarrow[b]{} & Y \end{array} \quad ,$$

il existe une flèche $l : L \longrightarrow X$ telle que $l \circ i = a$ et $p \circ l = b$.

Lorsque A est une petite catégorie, on dira qu'une flèche $p : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$ est une *fibration triviale* si elle vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à tout monomorphisme de $\widehat{A}$ (*i.e.* si $(X,\ p)$ est un objet injectif de la catégorie $\widehat{A}/Y$).

Définition 1.2.19. — Soit C une catégorie. Si $\mathcal{F}$ est une classe de flèches de C, on notera $l(\mathcal{F})$ (resp. $r(\mathcal{F})$), la classe des flèches de C qui vérifient la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement à tous les éléments de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ est formée d'un seul élément f on notera plus simplement $l(f)$ (resp. $r(f)$) la classe $l(\{f\})$ (resp. $r(\{f\})$).

Remarque 1.2.20. — Si C est une catégorie admettant des petites limites inductives, alors pour toute classe de flèches $\mathcal{F}$ de C, $l(\mathcal{F})$ est stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes. En particulier, la classe des flèches de C formée des flèches qui sont des composés transfinis d'images directes d'éléments de $\mathcal{F}$, notée $\mathsf{Cell}(\mathcal{F})$, est contenu dans $l(r(\mathcal{F}))$. On peut montrer que $\mathsf{Cell}(\mathcal{F})$ est stable par compositions transfinies et par images directes (voir [**74**, lemme 2.1.2]). Cela implique, en particulier, que $\mathsf{Cell}(\mathcal{F})$ et $l(\mathcal{F})$ sont stables par sommes (1.1.4).

1.2.21. Lemme du rétracte. — *Soit C une catégorie. On considère deux morphismes i et p de C tels que pi ait un sens. Si $pi \in l(p)$, alors pi est un rétracte de i.*

Démonstration. — Voir [**74**, lemme 1.1.9]. □

Définition 1.2.22. — Soit C une catégorie, et soit I un *ensemble* de flèches de C. On dira que I *permet l'argument du petit objet* si pour tout morphisme $X \longrightarrow Y$ qui est un élément de I, l'objet X est accessible.

Si A est une petite catégorie et I un ensemble de flèches de $\widehat{A}$, il résulte du corollaire 1.2.11 que I permet l'argument du petit objet.

1.2.23. L'argument du petit objet. — *Soient C une petite catégorie, admettant des petites limites inductives, et I un* ensemble *de flèches de C permettant l'argument du petit objet. Alors il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de C en $f = pi$, où $p \in r(I)$, et où i est un composé transfini d'images directes d'éléments de I. En outre, tout élément de la classe $l(r(I))$ est un rétracte de $\mathsf{Cell}(I)$, ce qui fait de $l(r(I))$ la plus petite classe de flèches de C contenant I, et stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes.*

Démonstration. — Voir [**74**, théorème 2.1.14 et corollaire 2.1.15]. □

Lemme 1.2.24. — *Soit A une petite catégorie. On considère une classe C de monomorphismes de $\widehat{A}$ et une classe D de préfaisceaux sur A ayant les propriétés suivantes.*

(a) *La classe C est stable par images directes et par compositions transfinies.*

(b) *Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux monomorphismes composables de $\widehat{A}$, et si f et gf sont des éléments de C, alors $g \in \mathsf{C}$.*

(c) *Tout préfaisceau sur A est réunion de ses sous-objets appartenant à D.*

(d) *Pour tout élément $X \longrightarrow Y$ de C, et tout sous-objet Z de Y appartenant à D, il existe un sous-objet T de Y appartenant à D et contenant Z, tel que $T \cap X \longrightarrow T$ soit un élément de C.*

$$\begin{array}{ccccc} & & T \cap X & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

On note $\mathcal{N}$ la classe des éléments de C dont le but est un élément de D. Alors $\mathsf{C} = \mathsf{Cell}(\mathcal{N})$. Si en outre la classe C est stable par rétractes et s'il existe un ensemble *$D \subset \mathsf{D}$ tel que tout élément de D soit isomorphe à un élément de D, alors l'ensemble I formé des inclusions $X \longrightarrow Y$ appartenant à C, et dont le but est dans D, engendre C dans le sens où on a les égalités : $\mathsf{C} = \mathsf{Cell}(I) = l(r(I))$.*

Démonstration. — La condition (a) implique que $\mathsf{Cell}(\mathcal{N}) \subset \mathsf{C}$. Il suffit donc de montrer l'autre inclusion. Soit $i : K \longrightarrow L$ un élément de C. On considère l'ensemble E^* des sous-objets de L qui sont dans D que l'on munit d'un bon ordre. On note E l'ensemble bien ordonné, d'ensemble sous-jacent $E^* \amalg \{0\}$, obtenu de E^* en adjoignant un nouvel élément initial 0. On va construire une application croissante de E vers l'ensemble des sous-objets de L contenant K, ordonné par inclusion, définissant un foncteur $F : E \longrightarrow \widehat{A}$ tel que $F(0) = K$, et tel que pour tout $X \in E$, $X \neq 0$, X soit contenu dans $F(X)$, et le morphisme $\varinjlim_{X' < X} F(X') \longrightarrow F(X)$ soit un élément de $\mathsf{Cell}(\mathcal{N})$. En vertu de la condition (c), la flèche $K \longrightarrow \varinjlim F$ s'identifiera canoniquement à i, qui sera donc un élément de $\mathsf{Cell}(\mathcal{N})$, ce qui prouvera l'inclusion $\mathsf{C} \subset \mathsf{Cell}(\mathcal{N})$. On procède par récurrence transfinie. Pour $X = 0$, on pose $F(0) = K$. Supposons que

pour un $X \in E$, $X > 0$, on ait construit tous les $F(X')$ pour $X' < X$. On pose $V = \varinjlim_{X'<X} F(X')$. Alors l'inclusion $K \longrightarrow V$ est dans $\mathsf{Cell}(\mathcal{N})$, et en particulier dans C, et il résulte de la condition (b) qu'il en est de même de $V \longrightarrow L$. Comme X est par hypothèse dans D, la condition (d) implique qu'il existe un sous-objet U de L, élément de D, contenant X, et tel que l'inclusion $U \cap V \longrightarrow U$ soit dans C. On pose alors $F(X) = U \cup V$, et on vérifie immédiatement grâce au carré cocartésien ci-dessous que $V \longrightarrow F(X)$ est un élément de $\mathsf{Cell}(\mathcal{N})$, ce qui achève la construction.

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & U \cup V \end{array}$$

La dernière assertion résulte de l'argument du petit objet appliqué à l'ensemble I formé des inclusions appartenant à C dont le but est dans D. □

Remarque 1.2.25. — Le lemme ci-dessus sera le plus souvent appliqué à une classe C de monomorphismes stable par rétractes, et avec pour classe d'objets D les préfaisceaux α-accessibles pour un cardinal α bien choisi.

Définition 1.2.26. — Soit A une petite catégorie. Un *modèle cellulaire* de $\widehat{A}$ est un *ensemble* $\mathcal{M}$ de monomorphismes de $\widehat{A}$, tel que $l(r(\mathcal{M}))$ soit la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$. En vertu du corollaire 1.2.11, et de l'argument du petit objet 1.2.23, la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$ est alors la plus petite classe de flèches de $\widehat{A}$ stable par images directes, compositions transfinies, et rétractes, contenant l'ensemble $\mathcal{M}$.

Proposition 1.2.27. — *Toute catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie admet un modèle cellulaire formé de monomorphismes dont le but est un quotient de préfaisceaux représentables.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme 1.2.24 appliqué à la classe C de tous les monomorphismes de la catégorie de préfaisceaux considérée, et à la classe D des préfaisceaux quotients de réprésentables. □

Corollaire 1.2.28. — *Soit A une petite catégorie. Alors il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de $\widehat{A}$ en $f = pi$ où i est un monomorphisme et où p est une fibration triviale (cf. 1.2.18).*

Démonstration. — Cela résulte du corollaire 1.2.11 et de la proposition 1.2.27, qui permettent d'appliquer l'argument du petit objet. □

Remarque 1.2.29. — Contrairement à ce qui est affirmé dans les articles de Jardine (comme par exemple [**78, 79, 80, 83, 63**]), on ne peut pas toujours prendre pour modèle cellulaire l'ensemble des monomorphismes dont le but est un préfaisceau représentable. Pour un contre-exemple, considérons un groupe non trivial G. Si on considère G comme une catégorie à un objet, les préfaisceaux sur G sont les G-ensembles,

c'est-à-dire les ensembles munis d'une action de G (à droite). Le seul préfaisceau représentable est alors l'ensemble G muni de l'action par translations, lequel n'a que deux sous-objets : le sous-objet vide, et le sous-objet plein. Posons

$$\mathcal{M} = \{\varnothing \longrightarrow G, G \longrightarrow G\} .$$

Le morphisme de G vers le G-ensemble final vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à $\mathcal{M}$, mais il ne vérifie pas la propriété de relèvement à droite relativement au morphisme du G-ensemble vide vers le G-ensemble final. Il s'ensuit donc que $\mathcal{M}$ n'est pas un modèle cellulaire (ce contre-exemple reste valable même si on passe aux G-ensembles simpliciaux).

Cela n'affecte pas les résultats de Jardine dans la mesure où ils n'utilisent en fait que l'existence de modèles cellulaires dans les catégories de faisceaux, ce qui se démontre comme dans le cas des préfaisceaux traité ci-dessus (voir par exemple [**33**]).

Lemme 1.2.30. — *Soient A une petite catégorie, et $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$. Alors toute classe d'objets de $\widehat{A}$ saturée par monomorphismes et contenant l'ensemble des sources et des buts des flèches appartenant à $\mathcal{M}$ est égale à la classe* Ob $\widehat{A}$ *de tous les objets de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — Le lemme résulte facilement de l'argument du petit objet appliqué à $\mathcal{M}$, qui permet d'affirmer que pour tout préfaisceau X, la flèche $\varnothing \longrightarrow X$ est un rétracte d'un composé transfini d'images directes d'éléments de $\mathcal{M}$, et implique en particulier que $\varnothing$ figure parmi les sources des flèches de $\mathcal{M}$. □

Proposition 1.2.31. — *Soient A, B deux petites catégories, $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, C une classe de flèches de $\widehat{B}$ saturée par monomorphismes, $F, G : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, et $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs tel que pour tout X source ou but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$, le morphisme α_X soit dans C. Alors pour tout objet X de $\widehat{A}$ la flèche α_X est dans C.*

Démonstration. — La proposition est conséquence directe du lemme précédent et du lemme 1.1.15. □

Lemme 1.2.32. — *Soit A une petite catégorie.*

(a) *On considère un diagramme commutatif de $\widehat{A}$ de la forme ci-dessous.*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{x_1} & X_0 & \xrightarrow{x_2} & X_2 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & (1) & \downarrow{\scriptstyle i_0} & (2) & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ S_1 & \xleftarrow[s_1]{} & S_0 & \xrightarrow[s_2]{} & S_2 \end{array} .$$

Si les morphismes i_2 et $k : X_1 \amalg_{X_0} S_0 \longrightarrow S_1$ sont des monomorphismes, le morphisme canonique

$$X_1 \amalg_{X_0} X_2 \longrightarrow S_1 \amalg_{S_0} S_2$$

est un monomorphisme.

(b) *Pour tout diagramme commutatif de $\widehat{A}$ de la forme*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{x_1} & X_0 & \xrightarrow{x_2} & X_2 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & (1) & \downarrow{\scriptstyle i_0} & (2) & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ S_1 & \xleftarrow[s_1]{} & S_0 & \xrightarrow[s_2]{} & S_2 \\ {\scriptstyle j_1}\uparrow & (1') & \uparrow{\scriptstyle j_0} & (2') & \uparrow{\scriptstyle j_2} \\ Y_1 & \xleftarrow[y_1]{} & Y_0 & \xrightarrow[y_2]{} & Y_2 \end{array} ,$$

si les flèches verticales et les morphismes x_1, s_1 et y_1 sont des monomorphismes, et si les carrés (1) et (1′) sont cartésiens, alors le morphisme canonique

$$(X_1 \times_{S_1} Y_1) \amalg_{(X_0 \times_{S_0} Y_0)} (X_2 \times_{S_2} Y_2) \longrightarrow (X_1 \amalg_{X_0} X_2) \times_{(S_1 \amalg_{S_0} S_2)} (Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2)$$

est un isomorphisme.

(c) *Pour toute famille de diagrammes de $\widehat{A}$ de la forme*

$$\begin{array}{ccc} X_i & & Y_i \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & S_i & \end{array} ,$$

le morphisme canonique

$$\coprod_i (X_i \times_{S_i} Y_i) \longrightarrow (\coprod_i X_i) \times_{(\coprod_i S_i)} (\coprod_i Y_i)$$

est un isomorphisme.

Remarque 1.2.33. — Pour que le morphisme k de l'énoncé (a) soit un monomorphisme, il suffit que le carré (1) soit cartésien, et que les flèches i_1 et s_1 soient des monomorphismes.

Démonstration. — L'assertion (a) résulte aussitôt du lemme 1.1.10, (a), appliqué à la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$, et l'assertion (c) est une conséquence immédiate du fait que les sommes dans $\widehat{A}$ sont disjointes et universelles.

Pour montrer (b) considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
X_1 \cap Y_1 & & X_0 \cap Y_0 & & X_2 \cap Y_2 \\
\| & & \| & & \| \\
X_1 \times_{S_1} Y_1 & \longleftarrow & X_0 \times_{S_0} Y_0 & \longrightarrow & X_2 \times_{S_2} Y_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X_1 & \longleftarrow & X_0 & \longrightarrow & X_2
\end{array} .$$

On remarque grâce à l'égalité

$$X_1 \cap Y_1 \cap X_0 = X_0 \cap Y_0$$

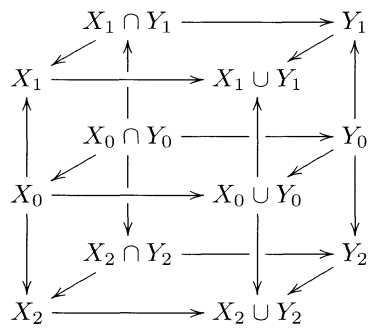
que le carré de gauche est cartésien. Il résulte donc de la remarque 1.2.33 et de (a) que la flèche canonique

$$(X_1 \cap Y_1) \amalg_{(X_0 \cap Y_0)} (X_2 \cap Y_2) \longrightarrow X_1 \amalg_{X_0} X_2$$

est un monomorphisme. On vérifie de la même manière que le morphisme canonique

$$(X_1 \cap Y_1) \amalg_{(X_0 \cap Y_0)} (X_2 \cap Y_2) \longrightarrow Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2$$

est un monomorphisme. On a d'autre part le diagramme commutatif suivant dans $\widehat{A}$, dont toutes les faces horizontales sont cocartésiennes.



On en déduit un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc}
(X_1 \cap Y_1) \amalg_{(X_0 \cap Y_0)} (X_2 \cap Y_2) & \longrightarrow & X_1 \amalg_{X_0} X_2 \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2 & \longrightarrow & (X_1 \cup Y_1) \amalg_{(X_0 \cup Y_0)} (X_2 \cup Y_2)
\end{array} .$$

Or en vertu de ce qui précède, toutes les flèches de ce carré sont des monomorphismes, ce qui implique qu'il est aussi cartésien. Considérons à présent le diagramme commutatif ci-après.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \cup Y_1 & \longleftarrow & X_0 \cup Y_0 & \longrightarrow & X_2 \cup Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_1 & \longleftarrow & S_0 & \longrightarrow & S_2 \end{array}$$

Les trois flèches verticales sont des monomorphismes, ainsi que les flèches horizontales du carré de gauche. Les égalités

$$(X_1 \cup Y_1) \cap S_0 = (X_1 \cap S_0) \cup (Y_1 \cap S_0) = X_0 \cup Y_0$$

montrent que le carré de gauche est cartésien. Il résulte donc de la remarque 1.2.33 et de (a) que la flèche canonique

$$(X_1 \cup Y_1) \amalg_{(X_0 \cup Y_0)} (X_2 \cup Y_2) \longrightarrow S_1 \amalg_{S_0} S_2$$

est un monomorphisme. Cela implique que le carré suivant est cartésien,

$$\begin{array}{ccc} (X_1 \cap Y_1) \amalg_{(X_0 \cap Y_0)} (X_2 \cap Y_2) & \longrightarrow & Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 \amalg_{X_0} X_2 & \longrightarrow & S_1 \amalg_{S_0} S_2 \end{array} ,$$

et démontre (b). □

1.2.34. — On rappelle ici succinctement une construction relative à la factorisation par l'argument du petit objet, et on développe quelques-unes de ses propriétés. Ces considérations forment un cas particulier de certaines constructions de [**72**, chapitre 16], qui se révèlent un peu plus simples dans le cadre des catégories de préfaisceaux.

On considère à présent une petite catégorie A, un *ensemble* $\mathcal{N}$ de monomorphismes de $\widehat{A}$, et un ensemble bien ordonné λ. On note 0 le plus petit élément de λ, et pour $\mu \in \lambda$, on note $\mu+1$ son successeur lorsqu'il existe dans λ. On définit alors un foncteur $L : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$, et un morphisme de foncteurs $l : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow L$ par la « méthode du petit objet » : on commence par définir deux foncteurs $S, B : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$ en posant pour chaque objet X de $\widehat{A}$

$$SX = \coprod_{C \longrightarrow D \in \mathcal{N}} \coprod_{\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(C,X)} C ,$$

et

$$BX = \coprod_{C \longrightarrow D \in \mathcal{N}} \coprod_{\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(C,X)} D ,$$

et on obtient deux morphismes de foncteurs évidents $S \longrightarrow B$ et $S \longrightarrow 1_{\widehat{A}}$. On forme ensuite le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1_{\widehat{A}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_1} \\ B & \longrightarrow & L_1 \end{array} \quad .$$

Pour $\mu \in \lambda$, on définit le foncteur L_μ par induction transfinie en posant $L_0 = 1_{\widehat{A}}$, puis $L_{\mu+1} = L_1 L_\mu$, et lorsque μ n'est pas un élément successeur, on pose $L_\mu = \varinjlim_{\nu<\mu} L_\nu$, la limite étant définie par les morphismes de foncteurs $l_1 L_\nu : L_\nu \longrightarrow L_{\nu+1}$. On définit enfin le foncteur $L = \varinjlim_{\mu\in\lambda} L_\mu$, et on obtient en outre par composition transfinie un morphisme de foncteurs $l : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow L$. On remarque que par construction, si X est un préfaisceau sur A, $l_X : X \longrightarrow LX$ est un composé transfini d'images directes d'éléments de $\mathcal{N}$, et donc un élément de $l(r(\mathcal{N}))$. C'est en particulier un monomorphisme.

Proposition 1.2.35. — *Le foncteur L vérifie les propriétés suivantes.*

(a) *Il respecte les monomorphismes.*

(b) *Si $X \longrightarrow Z$ et $Y \longrightarrow Z$ sont deux monomorphismes de $\widehat{A}$, la flèche canonique $L(X \cap Y) \longrightarrow L(X) \cap L(Y)$ est un isomorphisme.*

(c) *Il est accessible.*

Démonstration. — Pour montrer (a) et (b), on remarque qu'il suffit de montrer les énoncés analogues pour le foncteur L_1, car les limites inductives filtrantes sont exactes. Pour tout préfaisceau C sur A on note K_C le foncteur

$$K_C : \mathcal{E}ns \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad E \longmapsto \coprod_E C \ .$$

On vérifie immédiatement qu'il commute aux produits fibrés, et donc, en particulier, qu'il respecte les monomorphismes. On remarque que

$$S = \coprod_{u:C \longrightarrow D \in \mathcal{N}} S_u \quad (\text{resp.} \quad B = \coprod_{u:C \longrightarrow D \in \mathcal{N}} B_u \ ) \ ,$$

où $S_u : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$ (resp. $B_u : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$) est le composé du foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(C, \ .\ ) : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

suivi du foncteur K_C (resp. K_D). Il est immédiat que les foncteurs de types S_u et B_u commutent aux produits fibrés. Vu que les monomorphismes sont stables par sommes, on en déduit que les foncteurs S et B respectent les monomorphismes, et il résulte de l'assertion (c) du lemme 1.2.32, qu'ils respectent les intersections de sous-objets. Enfin,

on s'aperçoit aussitôt que pour tout monomorphisme $X \longrightarrow Y$, le carré ci-dessous est formé de monomorphismes et est cartésien.

$$\begin{array}{ccc} S\,X & \longrightarrow & B\,X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S\,Y & \longrightarrow & B\,Y \end{array}$$

L'assertion (a) (resp. (b)) est donc conséquence de la partie (a) (resp. (b)) du lemme 1.2.32.

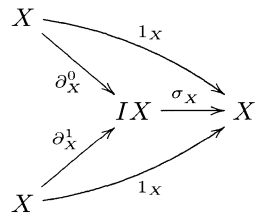
On remarque qu'en vertu du corollaire 1.2.11, les foncteurs S et B sont accessibles (car le composé d'un foncteur accessible avec un foncteur qui commute aux petites limites inductives est accessible et toute somme de foncteurs accessibles est accessible). On en déduit que le foncteur L_1 l'est aussi. La propriété (c) résulte immédiatement du fait que les foncteurs accessibles sont stables par composition et par limites inductives. □

1.3. Extensions anodines

Définition 1.3.1. — Soit A une petite catégorie. Un *cylindre* d'un préfaisceau X sur A est un quadruplet

$$(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X)$$

correspondant à un diagramme commutatif du type suivant dans $\widehat{A}$:



,

et tel que $(\partial^0_X, \partial^1_X) : X \amalg X \longrightarrow IX$ soit un monomorphisme.

Un *morphisme de cylindres*

$$(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X) \longrightarrow (IY, \partial^0_Y, \partial^1_Y, \sigma_Y)$$

est une paire de morphismes $\varphi : X \longrightarrow Y$ et $\psi : IX \longrightarrow IY$ tels que $\psi\partial^\varepsilon_X = \partial^\varepsilon_Y\varphi$, pour $\varepsilon = 0, 1$, et $\varphi\sigma_X = \sigma_Y\psi$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\partial^\varepsilon_X} & IX & \xrightarrow{\sigma_X} & X \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ Y & \xrightarrow[\partial^\varepsilon_Y]{} & IY & \xrightarrow[\sigma_Y]{} & Y \end{array}$$

On note $Cyl(A)$ la catégorie des cylindres de $\widehat{A}$.

Un *cylindre fonctoriel* sur A est une section du foncteur

$$Cyl(A) \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad (IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X) \longmapsto X \ ,$$

i.e. c'est un quadruplet $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$, où I est un foncteur de la catégorie $\widehat{A}$ vers elle-même, et où $\partial^0, \partial^1 : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow I$ sont des morphismes de foncteurs admettant une rétraction fonctorielle commune σ, tels que pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme $(\partial^0_X, \partial^1_X)$ soit un monomorphisme.

1.3.2. — Si X est un préfaisceau sur A, on notera $I \otimes X$ le préfaisceau $I(X)$, et parfois aussi $\partial^\varepsilon \otimes 1_X = \partial^\varepsilon_X : X \longrightarrow I \otimes X$, $\varepsilon = 0, 1$, $\sigma \otimes 1_X = \sigma_X : I \otimes X \longrightarrow X$. Autrement dit, on voit la catégorie des foncteurs $\mathcal{H}om(\widehat{A}, \widehat{A})$ comme une catégorie monoïdale stricte (le produit tensoriel étant donné par la composition des foncteurs), et $\widehat{A}$ comme un module sur celle-ci. Ainsi, pour tout endofoncteur F de $\widehat{A}$ et tout préfaisceau X sur A, on a $F \otimes X = F(X)$, pour tout morphisme de préfaisceaux f, $1_F \otimes f = F(f)$, et pour tout morphisme d'endofoncteurs α, $\alpha \otimes 1_X = \alpha_X$. On notera ∂I le foncteur $X \longmapsto \partial I \otimes X = X \amalg X$. Le couple (∂^0, ∂^1) définit donc une inclusion canonique i de ∂I dans I.

Définition 1.3.3. — Soient $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ un cylindre fonctoriel sur une petite catégorie A, et $u_0, u_1 : X \longrightarrow Y$ deux flèches de $\widehat{A}$. Une $\mathfrak{I}$-*homotopie* (ou encore *homotopie*, lorsque aucune ambiguïté n'en résulte) de u_0 vers u_1 est un morphisme $h : I \otimes X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$ tel que $h(\partial^\varepsilon \otimes 1_X) = u_\varepsilon$, pour $\varepsilon = 0, 1$. Si une telle homotopie existe, on dit que u_0 est $\mathfrak{I}$-*homotope de façon élémentaire* à u_1. On appelle relation de $\mathfrak{I}$-*homotopie* la relation d'équivalence engendrée par la relation d'homotopie élémentaire.

Remarque 1.3.4. — On vérifie immédiatement que la relation d'homotopie est compatible à la composition. On notera $h_{\mathfrak{I}}(A)$ la catégorie quotient, et $Q : \widehat{A} \longrightarrow h_{\mathfrak{I}}(A)$ le foncteur canonique. On dira qu'une flèche f de $\widehat{A}$ est une $\mathfrak{I}$-*équivalence d'homotopie* si $Q(f)$ est un isomorphisme de $h_{\mathfrak{I}}(A)$.

Un préfaisceau X sur A sera dit $\mathfrak{I}$-*contractile* si le morphisme de X vers l'objet final de $\widehat{A}$ est une $\mathfrak{I}$-équivalence d'homotopie.

Lemme 1.3.5. — *Soit A une petite catégorie. Si $p : X \longrightarrow Y$ est une fibration triviale de $\widehat{A}$ (1.2.18), alors elle admet une section, et pour toute section s de p et tout cylindre $(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X)$ de X, il existe une flèche $h : IX \longrightarrow X$ de $\widehat{A}$ telle que*

$$h\partial^0_X = 1_X \ , \quad h\partial^1_X = sp \ , \quad ph = p\sigma_X \ .$$

En particulier, une fibration triviale est une $\mathfrak{I}$-équivalence d'homotopie pour tout cylindre fonctoriel $\mathfrak{I}$ sur A.

Démonstration. — Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration triviale de $\widehat{A}$. On commence par remarquer que comme $\varnothing \longrightarrow Y$ est un monomorphisme, le carré suivant admet un relèvement

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow[1_Y]{} & Y \end{array} \quad ,$$

ce qui implique que p admet une section $s : Y \longrightarrow X$. Pour tout cylindre $(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X)$ de X, on obtient un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{(1_X, sp)} & X \\ {\scriptstyle (\partial^0_X, \partial^1_X)} \downarrow & & \downarrow p \\ IX & \xrightarrow[p\sigma_X]{} & Y \end{array} \quad .$$

Ce dernier admet un relèvement $h : IX \longrightarrow X$, puisque $(\partial^0_X, \partial^1_X)$ est un monomorphisme. On a donc les formules $h\partial^0_X = 1_X$, $h\partial^1_X = sp$ et $ph = p\sigma_X$, ce qui prouve le lemme. □

Définition 1.3.6. — Une *donnée homotopique élémentaire* sur une petite catégorie A est un cylindre fonctoriel $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ vérifiant les axiomes suivants.

DH1 Le foncteur I commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes.

DH2 Pour tout monomorphisme $j : K \longrightarrow L$ dans $\widehat{A}$, les carrés ci-dessous sont cartésiens ($\varepsilon = 0, 1$) :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{j} & L \\ {\scriptstyle \partial^\varepsilon \otimes 1_K} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \partial^\varepsilon \otimes 1_L} \\ I \otimes K & \xrightarrow[1_I \otimes j]{} & I \otimes L \end{array} \quad .$$

Remarque 1.3.7. — Si on a un carré cartésien dans $\widehat{A}$

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & U \end{array} \quad ,$$

et si les flèches $S \longrightarrow U$ et $T \longrightarrow U$ sont des monomorphismes, alors la flèche canonique $T \amalg_R S \longrightarrow U$ est un monomorphisme, et on la notera $T \cup S \longrightarrow U$.

Si $\mathfrak{I}$ est une donnée homotopique élémentaire sur A, on note $\{\varepsilon\} \longrightarrow I$, $\varepsilon = 0, 1$, le sous-objet de I, image du morphisme $\partial^\varepsilon : 1_A \longrightarrow I$. Pour chaque préfaisceau X sur

A, le morphisme $\partial^\varepsilon_X = \partial^\varepsilon \otimes 1_X$ s'identifie donc à l'inclusion $\{\varepsilon\} \otimes X \longrightarrow I \otimes X$. Pour tout monomorphisme $j : K \longrightarrow L$ dans $\widehat{A}$, on en déduit une inclusion

$$I \otimes K \cup \{\varepsilon\} \otimes L \longrightarrow I \otimes L \ ,$$

correspondant au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \{\varepsilon\} \otimes K & \xrightarrow{1_{\{\varepsilon\}} \otimes j} & \{\varepsilon\} \otimes L \\ {\scriptstyle \partial^\varepsilon \otimes 1_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial^\varepsilon \otimes 1_L} \\ I \otimes K & \xrightarrow[1_I \otimes j]{} & I \otimes L \end{array} \ .$$

D'autre part, on remarque que comme les sommes sont universelles dans $\widehat{A}$, il résulte de DH2 que pour tout monomorphisme $j : K \longrightarrow L$ de préfaisceaux sur A, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \partial I \otimes K & \xrightarrow{1_{\partial I} \otimes j} & \partial I \otimes L \\ {\scriptstyle i \otimes 1_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i \otimes 1_L} \\ I \otimes K & \xrightarrow[1_I \otimes j]{} & I \otimes L \end{array} \ ,$$

d'où une inclusion

$$I \otimes K \cup \partial I \otimes L \longrightarrow I \otimes L \ .$$

Enfin, comme en vertu de DH1 le foncteur I commute aux petites limites inductives, il commute en particulier aux sommes binaires, et pour tout préfaisceau K sur A, on a un isomorphisme canonique $I \otimes \partial I \otimes K \simeq \partial I \otimes I \otimes K = I \otimes K \amalg I \otimes K$.

Exemple 1.3.8. — Soient A une petite catégorie, et $\mathbb{I} = (I, \partial^0, \partial^1)$, un *segment séparant* de $\widehat{A}$, c'est-à-dire un préfaisceau I sur A muni de deux sections globales disjointes ∂^0 et ∂^1. On en déduit un cylindre fonctoriel $\mathfrak{I}$ défini par le foncteur

$$X \longmapsto I \times X$$

et par les formules $\partial^\varepsilon_X = \partial^\varepsilon \times 1_X$, $\varepsilon = 0, 1$, $\sigma_X = pr_2$ (où $pr_2 : I \times X \longrightarrow X$ désigne la deuxième projection). On vérifie facilement que ce cylindre fonctoriel est une donnée homotopique élémentaire.

Exemple 1.3.9. — Soit A une petite catégorie. L'*objet de Lawvere* L de $\widehat{A}$ est le préfaisceau sur A défini par

$$a \longmapsto L(a) = \{\text{sous-objets du préfaisceau représenté par } a\}$$

(pour une flèche $u : a \longrightarrow a'$ de A, l'application de $L(a')$ vers $L(a)$ est définie en associant à chaque sous-objet de a' son image réciproque par u). L'universalité des limites inductives dans $\widehat{A}$ implique immédiatement que l'objet de Lawvere classifie les sous-objets des préfaisceaux, ou autrement dit, que pour tout préfaisceau X sur A, on a une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(X, L) \simeq \{\text{sous-objets du préfaisceau } X\}$$

(voir [**94**, propositions I.3.1 et III.7.3] ou [**96**, 1.5.5]). Soit λ^0 (resp. λ^1) la section globale de L définie par le sous-objet plein (resp. vide) de l'objet final de $\widehat{A}$. On a alors essentiellement par définition le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \longrightarrow & e_{\widehat{A}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^0} \\ e_{\widehat{A}} & \xrightarrow[\lambda^1]{} & L \end{array}$$

Autrement dit, $\mathbb{L} = (L, \lambda^0, \lambda^1)$ est un segment séparant appelé le *segment de Lawvere*. Le cylindre fonctoriel correspondant $\mathfrak{L}$ est le *cylindre de Lawvere*. La donnée homotopique élémentaire ainsi obtenue jouera un rôle important par la suite (dû au fait que le préfaisceau L est un objet injectif de $\widehat{A}$, ce qu'on vérifie aussitôt ; voir [**94**, proposition VI.10.1]).

Définition 1.3.10. — Soient A une petite catégorie, et $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ une donnée homotopique élémentaire sur A. Une *classe d'extensions anodines* relatives à $\mathfrak{I}$ est une classe de flèches An de $\widehat{A}$ satisfaisant aux conditions suivantes.

An0 Il existe un *ensemble* Λ de monomorphismes de $\widehat{A}$ tel que $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$.

An1 Si $K \longrightarrow L$ est un monomorphisme de $\widehat{A}$, alors $I \otimes K \cup \{\varepsilon\} \otimes L \longrightarrow I \otimes L$ est dans An, $\varepsilon = 0, 1$.

An2 Si $K \longrightarrow L$ est dans An, alors il en est de même de $I \otimes K \cup \partial I \otimes L \longrightarrow I \otimes L$.

Si Λ est un ensemble de monomorphismes de $\widehat{A}$ tel que $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$, on dira que Λ *engendre* la classe An, ou qu'il est un *ensemble générateur des extensions anodines*.

Remarque 1.3.11. — Il résulte de la remarque 1.2.20 et de la condition An0 que la classe An est stable par images directes, compositions transfinies et rétractes. Plus précisément, comme en vertu du corollaire 1.2.11 l'ensemble Λ permet l'argument du petit objet 1.2.23, la condition An0 implique que la classe An est formée des rétractes des composés transfinis des images directes des morphismes de Λ. En particulier, les flèches de $\widehat{A}$ appartenant à An sont des monomorphismes. D'autre part, comme en vertu de DH1 le foncteur I commute aux petites limites inductives, on a $I \otimes \varnothing \simeq \varnothing$, et il résulte de la condition An1, appliquée à $K = \varnothing \longrightarrow L$, que pour tout objet L de $\widehat{A}$ les morphismes $\partial^\varepsilon_L : L \longrightarrow I \otimes L$, $\varepsilon = 0, 1$, sont dans An. Enfin, on a $I(\mathsf{An}) \subset \mathsf{An}$. En effet, si $j : K \longrightarrow L$ est dans An, et si l'on forme le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\quad j \quad} & L \\ {\scriptstyle \partial^0_K}\downarrow & & \downarrow \\ I \otimes K & \xrightarrow[j']{} & I \otimes K \cup \{0\} \otimes L \end{array} \quad ,$$

on remarque que le morphisme $I(j) = 1_I \otimes j : I \otimes K \longrightarrow I \otimes L$ est le composé de j' et de l'inclusion $I \otimes K \cup \{0\} \otimes L \longrightarrow I \otimes L$. Ces deux flèches étant dans An, la première par stabilité par images directes, et la deuxième en vertu de la condition An1, cela prouve l'assertion.

1.3.12. — Soient A une petite catégorie, $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ une donnée homotopique élémentaire sur A, S un ensemble de monomorphismes de $\widehat{A}$, et $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$ (ce qui existe en vertu de la proposition 1.2.27). On note $\Lambda^0_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ l'ensemble des monomorphismes de $\widehat{A}$ défini par

$$\Lambda^0_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) = S \cup \{I \otimes K \cup \{\varepsilon\} \otimes L \longrightarrow I \otimes L \mid K \longrightarrow L \in \mathcal{M},\ \varepsilon = 0, 1\} .$$

Si T est un ensemble de monomorphismes de $\widehat{A}$, on lui associe l'ensemble de monomorphismes

$$\mathbf{\Lambda}(T) = \{I \otimes K \cup \partial I \otimes L \longrightarrow I \otimes L \mid K \longrightarrow L \in T\} .$$

On définit alors par récurrence des ensembles $\Lambda^n_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ par la formule

$$\Lambda^{n+1}_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) = \mathbf{\Lambda}(\Lambda^n_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})) ,$$

puis on pose

$$\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) = \cup_{n \geqslant 0} \Lambda^n_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) .$$

Autrement dit, $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ est le plus petit ensemble de flèches de $\widehat{A}$ qui contient $\Lambda^0_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ et qui est stable par l'opération $\mathbf{\Lambda}$.

Proposition 1.3.13. — *Soient A une petite catégorie munie d'une donnée homotopique élémentaire $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$, et S un* ensemble *de monomorphismes de $\widehat{A}$. Alors il existe une plus petite classe d'extensions anodines relatives à $\mathfrak{I}$ contenant S. De plus, si $\mathcal{M}$ est un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, cette classe est égale à $l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})))$.*

Démonstration. — Soit An une classe d'extensions anodines relatives à $\mathfrak{I}$ contenant S. Montrons que $l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}))) \subset \mathsf{An}$. Comme $S \subset \mathsf{An}$, et comme $\mathcal{M}$ est formé de monomorphismes, il résulte de la condition An1 que $\Lambda^0_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) \subset \mathsf{An}$. Si $T \subset \mathsf{An}$, la condition An2 implique que $\mathbf{\Lambda}(T) \subset \mathsf{An}$. On en déduit que $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) \subset \mathsf{An}$. La classe An étant, en vertu de la remarque 1.3.11, stable par images directes, compositions transfinies, et rétractes, et $l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})))$ étant la plus petite classe de flèches ayant ces propriétés et contenant $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ (par l'argument du petit objet 1.2.23), on en déduit que $l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}))) \subset \mathsf{An}$.

Il reste à montrer que $l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})))$ est une classe d'extensions anodines de $\widehat{A}$ relatives à $\mathfrak{I}$ et contenant S. On a $S \subset \Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) \subset l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})))$, et comme $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ est un *ensemble*, la condition An0 est évidente.

Pour montrer la condition An1, considérons la classe $\mathcal{B}$ des monomorphismes $K \longrightarrow L$ de $\widehat{A}$ tels que

$$I \otimes K \cup \{\varepsilon\} \otimes L \longrightarrow I \otimes L \in l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}))) .$$

Comme $\Lambda^0_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M}) \subset l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M})))$, on a $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$, et en vertu du corollaire 1.1.8, $\mathcal{B}$ est stable par images directes, compositions transfinies, et rétractes. Les monomorphismes étant la plus petite classe contenant $\mathcal{M}$ et satisfaisant à ces propriétés, il s'ensuit que tout monomorphisme de $\widehat{A}$ est dans $\mathcal{B}$, ce qui pouve An1.

Pour montrer la condition An2, considérons la classe $\mathcal{C}$ des monomorphismes $K \longrightarrow L$ de $\widehat{A}$ tels que

$$I \otimes K \cup \partial I \otimes L \longrightarrow I \otimes L \in l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M}))) \ .$$

Comme $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M}) \subset l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M})))$, et comme $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M})$ est stable par l'opération $\mathbf{\Lambda}$, on en déduit que $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M}) \subset \mathcal{C}$. En vertu du corollaire 1.1.8, $\mathcal{C}$ est stable par images directes, compositions transfinies, et rétractes, et il résulte de l'argument du petit objet 1.2.23 que $l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M})))$ est la plus petite classe satisfaisant à ces propriétés et contenant $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M})$. On en déduit que $\mathcal{C}$ contient $l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M})))$, ce qui prouve la condition An2, et achève la démonstration □

Définition 1.3.14. — Une *structure homotopique* (resp. une *donnée homotopique*) sur une petite catégorie A est un couple $(\mathfrak{I},\mathsf{An})$ (resp. $(\mathfrak{I},S)$) formé d'une donnée homotopique élémentaire $\mathfrak{I}$, et d'une classe d'extensions anodines An relatives à $\mathfrak{I}$ (resp. d'un *ensemble* de monomorphismes S de $\widehat{A}$). Si $(\mathfrak{I},S)$ est une donnée homotopique sur A, on note $\mathsf{An}_{\mathfrak{I}}(S)$ la plus petite classe d'extensions anodines relatives à $\mathfrak{I}$ contenant S, et on dit que $(\mathfrak{I},\mathsf{An}_{\mathfrak{I}}(S))$ est la structure homotopique sur A *engendrée* par la donnée homotopique $(\mathfrak{I},S)$, et que $\mathsf{An}_{\mathfrak{I}}(S)$ est la classe d'extensions anodines définie par cette donnée homotopique. Si $S = \varnothing$, on pose $\mathsf{An}_{\mathfrak{I}} = \mathsf{An}_{\mathfrak{I}}(\varnothing)$. Autrement dit, $\mathsf{An}_{\mathfrak{I}}$ est la plus petite classe d'extensions anodines relatives à $\mathfrak{I}$.

En vertu de la proposition précédente, si $\mathcal{M}$ est un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, pour tout ensemble S de monomorphismes de $\widehat{A}$, on a

$$\mathsf{An}_{\mathfrak{I}}(S) = l(r(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S,\mathcal{M}))) \ .$$

D'autre part, toute structure homotopique $(\mathfrak{I},\mathsf{An})$ sur A est engendrée par une donnée homotopique, puisqu'en vertu de la condition An0, il existe un ensemble de monomorphismes Λ de $\widehat{A}$ tel que $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$, et qu'alors la donnée homotopique $(\mathfrak{I},\Lambda)$ engendre $(\mathfrak{I},\mathsf{An})$.

Remarque 1.3.15. — Les techniques de la démonstration de la proposition ci-dessus permettent d'affiner l'ensemble générateur des extensions anodines dans le cas suivant. Soient A une petite catégorie, $(I,\partial^0,\partial^1)$ un segment séparant de $\widehat{A}$, et $\mathfrak{I}$ la donnée homotopique élémentaire correspondante (cf. exemple 1.3.8). On se donne un modèle cellulaire $\mathcal{M}$ de $\widehat{A}$, et on forme l'ensemble $\Lambda'_I(\mathcal{M})$ des monomorphismes de la forme

$$I \times K \cup \{\varepsilon\} \times L \longrightarrow I \times L$$

pour $\varepsilon = 0, 1$, et $K \longrightarrow L \in \mathcal{M}$ (avec les notations du paragraphe 1.3.12, $\Lambda'_I(\mathcal{M}) = \Lambda^0_{\mathfrak{I}}(\varnothing, \mathcal{M})$). Alors on a l'égalité

$$\mathsf{An}_{\mathfrak{I}} = l(r(\Lambda'_I(\mathcal{M}))) \ .$$

En effet, on démontre comme dans la proposition précédente que $l(r(\Lambda'_I(\mathcal{M}))) \subset \mathsf{An}_{\mathfrak{I}}$ et que $l(r(\Lambda'_I(\mathcal{M})))$ satisfait aux conditions An0 et An1. Pour établir la condition An2, on procède aussi comme dans cette proposition, en remarquant que la condition An1 implique l'inclusion

$$\mathbf{\Lambda}(\Lambda'_I(\mathcal{M})) \subset l(r(\Lambda'_I(\mathcal{M}))) \ ,$$

car pour toute flèche $K \longrightarrow L$ dans $\mathcal{M}$, le morphisme

$$I \times (I \times K \cup \{\varepsilon\} \times L) \cup \partial I \times (I \times L) \longrightarrow I \times (I \times L)$$

est isomorphe (par permutation des deux premiers facteurs) au morphisme

$$I \times (I \times K \cup \partial I \times L) \cup \{\varepsilon\} \times (I \times L) \longrightarrow I \times (I \times L)$$

qui est dans $l(r(\Lambda'_I(\mathcal{M})))$ par An1.

Lemme 1.3.16. — *Soient A une petite catégorie, $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ une donnée homotopique élémentaire sur A, et C une classe de monomorphismes de $\widehat{A}$ vérifiant les conditions suivantes.*

(a) *La classe C est stable par compositions et par images directes.*

(b) *Si $u : X \longrightarrow Y$ et $v : Y \longrightarrow Z$ sont deux monomorphismes de $\widehat{A}$, et si vu et u sont dans C, alors v est dans C.*

(c) *Pour tout préfaisceau X sur A, les inclusions $\partial^\varepsilon_X : X \longrightarrow I \otimes X$, $\varepsilon = 0, 1$, sont dans C.*

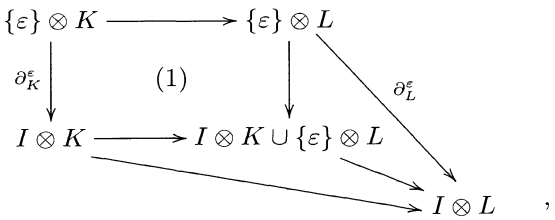
Alors on a $I(\mathsf{C}) \subset \mathsf{C}$, et la classe C satisfait aux conditions An1 *et* An2 *des extensions anodines. En outre, si S est un* ensemble *de monomorphismes de $\widehat{A}$ tel que $S \subset \mathsf{C}$, et $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, l'ensemble $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ défini par la donnée homotopique $(\mathfrak{I}, S)$ est contenu dans C.*

Démonstration. — Soit $u : X \longrightarrow Y$ un élément de C. Alors $I(u) = 1_I \otimes u$ est dans C : en effet, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ u\ } & Y \\ {\scriptstyle \partial^0_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial^0_Y} \\ I \otimes X & \xrightarrow[1_I \otimes u]{} & I \otimes Y \end{array} \quad ,$$

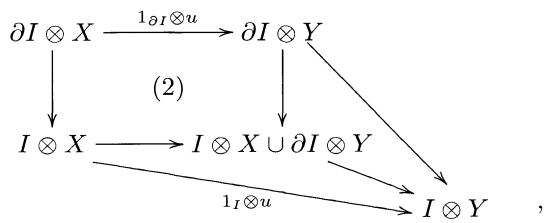
dans lequel les flèches verticales sont dans C (en vertu de (c)), et dont la flèche horizontale du haut est dans C ; il résulte donc de la stabilité par compositions et de (b) que la flèche horizontale du bas est bien dans C.

Montrons que C satisfait à la condition An1. Soit $K \longrightarrow L$ un monomorphisme de $\widehat{A}$, et formons, pour $\varepsilon = 0, 1$ le diagramme commutatif



dont toutes les flèches sont des monomorphismes. En vertu de (c), ∂^ε_K et ∂^ε_L sont dans C, et comme le carré (1) est cocartésien la stabilité de C par images directes implique que le morphisme $\{\varepsilon\} \otimes L \longrightarrow I \otimes K \cup \{\varepsilon\} \otimes L$ est dans C. Il résulte donc de (b) que la flèche $I \otimes K \cup \{\varepsilon\} \otimes L \longrightarrow I \otimes L$ appartient aussi à C.

Pour montrer que C satisfait à la condition An2, soit $u : X \longrightarrow Y$ un élément de C, et formons le diagramme commutatif



dont toutes les flèches sont des monomorphismes. On remarque que (a) implique que C est stable par sommes finies, et en particulier que $1_{\partial I} \otimes u$ est dans C. Comme le carré (2) est cocartésien, on en déduit que le morphisme $I \otimes X \longrightarrow I \otimes X \cup \partial I \otimes Y$ est dans C. Il résulte donc de (b) que la flèche $I \otimes X \cup \partial I \otimes Y \longrightarrow I \otimes Y$ appartient aussi à C.

Pour montrer la dernière assertion, on remarque, en reprenant les notations du paragraphe 1.3.12, que l'inclusion $S \subset$ C, et le fait que C satisfait à la condition An1 impliquent que C contient l'ensemble $\Lambda^0_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$. Comme la classe C satisfait aussi à la condition An2, elle est stable par l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$, ce qui prouve l'inclusion $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) \subset$ C, et achève la démonstration. □

1.3.17. — La notion de catégorie de modèles que nous considèrerons ici est celle de [**74**], laquelle est un peu plus restrictive que celle de Quillen [**109, 111**], mais nous arriverons naturellement dans ce cadre.

Définition 1.3.18. — Une *catégorie de modèles fermée* est la donnée d'un quadruplet $(C, \mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$, où C est une catégorie, et où W, Fib, Cof sont des classes de flèches de C, dont les éléments sont appelés respectivement des *équivalences faibles*, des *fibrations*, et des *cofibrations*, tel que les axiomes suivants soient vérifiés (on appelle

fibrations triviales (resp. *cofibrations triviales*) les flèches de $\mathcal{C}$ qui sont à la fois des fibrations (resp. des cofibrations) et des équivalences faibles).

CM1 La catégorie $\mathcal{C}$ admet des petites limites inductives et projectives.

CM2 Dans tout triangle commutatif de $\mathcal{C}$, si deux des flèches sont des équivalences faibles, alors la troisième en est une.

CM3 Les classes W, Fib et Cof sont stables par rétractes.

CM4 Toute cofibration triviale (resp. fibration triviale) vérifie la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement à toute fibration (resp. à toute cofibration).

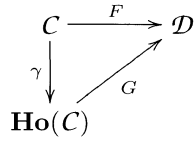
CM5 Il existe deux factorisations fonctorielles de toute flèche f de $\mathcal{C}$ en $f = pi$ et $f = qj$, où p et q sont des fibrations, i et j des cofibrations, i et q des équivalences faibles.

Une catégorie de modèles fermée $(\mathcal{C}, \mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ est *à engendrement cofibrant* s'il existe deux *ensembles* de flèches I et J de $\mathcal{C}$, permettant tous deux l'argument du petit objet, et tels que $l(r(I)) = \mathsf{Cof}$ et $l(r(J)) = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$. On dira alors que le couple (I, J) *engendre* ladite structure de catégorie de modèles fermée.

1.3.19. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $\mathcal{W}$ une classe de flèches de $\mathcal{C}$. On note $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ la *localisation de* $\mathcal{C}$ *par* $\mathcal{W}$, catégorie obtenue en inversant les éléments de la classe $\mathcal{W}$. Cette localisation existe toujours, mais en général les morphismes entre deux objets de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ peuvent former une classe (par opposition à un ensemble). On dispose donc par définition d'un foncteur canonique, appelé *foncteur de localisation*,

$$\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$$

vérifiant la propriété universelle suivante. Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ envoyant les éléments de $\mathcal{W}$ sur des isomorphismes de $\mathcal{D}$, il existe un unique foncteur $G : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$ tel que le triangle ci-dessous commute.



Le foncteur γ est l'identité sur les objets. On fera donc parfois l'abus de notation consistant à voir un objet X de $\mathcal{C}$ comme un objet de la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.

On dit que la partie $\mathcal{W}$ est *fortement saturée* si toute flèche de $\mathcal{C}$ dont l'image par le foncteur de localisation est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ est contenue dans la classe $\mathcal{W}$. Par exemple, la classe des équivalences faibles d'une catégorie de modèles fermée est toujours fortement saturée (voir [**109**, chap. I, sec. 5, prop. 1]).

1.3.20. — Dans la suite de cette section, on se fixe une petite catégorie A, et une structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ sur A, où $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$.

Définition 1.3.21. — Une *cofibration* est un monomorphisme de $\widehat{A}$. On notera Cof la classe des cofibrations de $\widehat{A}$.

Une *fibration triviale* est un morphisme de préfaisceaux sur A vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux monomorphismes.

Une *extension anodine* est un élément de la classe An.

Une *fibration naïve* est un morphisme de préfaisceaux sur A vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux extensions anodines. On note FibN la classe des fibrations naïves.

Un objet X de $\widehat{A}$ est *fibrant* si la flèche $X \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ de X vers l'objet final de $\widehat{A}$ est une fibration naïve.

Une flèche $f : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$ est une *équivalence faible* si pour tout objet fibrant T, l'application

$$f^* : \mathrm{Hom}_{h_{\mathfrak{I}}(A)}(Y, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{h_{\mathfrak{I}}(A)}(X, T)$$

est bijective. On note W la classe des équivalences faibles.

Une *cofibration triviale* est un morphisme de préfaisceaux sur A qui est à la fois une cofibration (*i.e.* un monomorphisme) et une équivalence faible.

Enfin, une *fibration* est un morphisme de préfaisceaux sur A vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations triviales. La classe des fibrations sera désignée par Fib.

Cette section sera consacrée à la démonstration de l'énoncé ci-dessous.

Théorème 1.3.22. — *Avec les définitions ci-dessus,* $(\widehat{A}, \mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ *est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant.*

1.3.23. — On dira que $(\widehat{A}, \mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ est la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A}$ définie par la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$. Si $(\mathfrak{I}, S)$ est une donnée homotopique qui engendre la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$, on dira que la catégorie de modèles est engendrée par cette donnée.

On verra plus loin que les objets fibrants correspondant à cette structure de catégorie de modèles fermée sont les préfaisceaux fibrants définis ci-dessus (cf. 1.3.36). En particulier, la catégorie homotopique correspondant à la structure de catégorie de modèles du théorème 1.3.22 (*i.e.* la localisation de $\widehat{A}$ par les équivalences faibles) est canoniquement équivalente à la sous-catégorie pleine de $h_{\mathfrak{I}}(A)$ formée des préfaisceaux fibrants.

Remarque 1.3.24. — On remarque immédiatement que toute $\mathfrak{I}$-équivalence d'homotopie est une équivalence faible, et que la classe des équivalences faibles est une partie fortement saturée de $\mathrm{Fl}\,\widehat{A}$ (1.3.19). En particulier, la classe des équivalences faibles vérifie l'axiome CM2, et est stable par rétractes.

Définition 1.3.25. — Une flèche $f : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$ est un *rétracte par déformation fort* (resp. le *dual d'un rétracte par déformation fort*) s'il existe deux flèches $g : Y \longrightarrow X$ et $h : I \otimes Y \longrightarrow Y$ (resp. $k : I \otimes X \longrightarrow X$) telles que :

i) $gf = 1_X$ (resp. $fg = 1_Y$) ;
ii) $h\partial^0_Y = 1_Y$ et $h\partial^1_Y = fg$ (resp. $k\partial^0_X = 1_X$ et $k\partial^1_X = gf$) ;
iii) $h(1_I \otimes f) = \sigma_Y(1_I \otimes f)$ (resp. $fk = f\sigma_X$)).

Proposition 1.3.26. — *Toute fibration triviale est le dual d'un rétracte par déformation fort. De plus, toute section d'une fibration triviale, est un rétracte par déformation fort.*

Démonstration. — La première assertion est conséquence directe du lemme 1.3.5. Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration triviale. Une section $s : Y \longrightarrow X$ de p définit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} I \otimes Y \cup \partial I \otimes X & \xrightarrow{(s\sigma_Y, (1_X, sp))} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ I \otimes X & \xrightarrow[p\sigma_X]{} & Y \end{array}$$

qui admet un relèvement $h : I \otimes X \longrightarrow X$. En particulier, on a $h\partial^0_X = 1_X$, $h\partial^1_X = sp$, et $h(1_I \otimes s) = s\sigma_Y = \sigma_X(1_I \otimes s)$, ce qui prouve que s est un rétracte par déformation fort. □

Proposition 1.3.27. — *Un morphisme de $\widehat{A}$ est une fibration triviale si et seulement s'il est à la fois une fibration et une équivalence faible.*

Démonstration. — Comme toute $\mathfrak{I}$-équivalence d'homotopie est une équivalence faible, la proposition ci-dessus implique que toute fibration triviale en est une. Comme toute cofibration triviale est en particulier un monomorphisme, toute fibration triviale est une fibration. Réciproquement, soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration appartenant à W. Par le corollaire 1.2.28, il existe une factorisation de p en $p = qj$, où j est une cofibration, et où q est une fibration triviale. En vertu de ce qui précède, q est une équivalence faible, donc j est une cofibration triviale. Comme p est une fibration, le lemme du rétracte implique que p est un rétracte de q, ce qui prouve que p est une fibration triviale. □

Remarque 1.3.28. — On peut à présent faire l'analyse de ce qu'il manque pour démontrer le théorème 1.3.22. Les axiomes CM1, CM2, CM3 sont immédiats, l'axiome CM4 résulte de la proposition précédente, et de la définition des fibrations, le corollaire 1.2.28 assurant une moitié de l'axiome CM5. Cela signifie qu'il suffit de montrer que toute flèche f de $\widehat{A}$ se factorise (par l'argument du petit objet) en une cofibration triviale suivie d'une fibration.

Proposition 1.3.29. — *Il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de $\widehat{A}$ en $f = pi$, où p est une fibration naïve, et où i est une extension anodine (et même un composé transfini d'images directes d'éléments de Λ, si Λ désigne un* ensemble *de flèches de $\widehat{A}$ tel que $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$).*

Démonstration. — Soit Λ un *ensemble* de flèches de $\widehat{A}$ tel que $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$. Le corollaire 1.2.11 permet d'appliquer l'argument du petit objet à l'ensemble Λ. On en déduit l'existence d'une factorisation fonctorielle de toute flèche f de $\widehat{A}$ en $f = pi$, où p est une fibration naïve, et où i est un composé transfini d'images directes d'éléments de Λ, et en particulier une extension anodine. □

Lemme 1.3.30. — *Soient K et T deux objets de $\widehat{A}$, T étant fibrant. Alors la relation de $\mathfrak{I}$-homotopie élémentaire sur $\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K,T)$ est une relation d'équivalence, et elle coïncide donc à la relation de $\mathfrak{I}$-homotopie. En particulier, si $u, v : K \longrightarrow T$ sont deux morphismes de préfaisceaux, alors $u = v$ dans $h_{\mathfrak{I}}(A)$ si et seulement s'il existe un morphisme $h : I \otimes K \longrightarrow T$ tel que $h(\partial^0 \otimes 1_K) = u$ et $h(\partial^1 \otimes 1_K) = v$.*

Démonstration. — La réflexivité est immédiate : si $u : K \longrightarrow T$ est une flèche de $\widehat{A}$, $u\sigma_K : I \otimes K \longrightarrow T$ est une homotopie de u vers u.

Montrons que si $u, v, w : K \longrightarrow T$ sont trois flèches de $\widehat{A}$, et s'il existe une $\mathfrak{I}$-homotopie $h : I \otimes K \longrightarrow T$ de u vers v, et une $\mathfrak{I}$-homotopie $k : I \otimes K \longrightarrow T$ de u vers w, alors il existe une $\mathfrak{I}$-homotopie $l : I \otimes K \longrightarrow T$ de v vers w. Par hypothèse on a donc

$$h(\partial^0 \otimes 1_K) = u\ , \qquad h(\partial^1 \otimes 1_K) = v\ ,$$
$$k(\partial^0 \otimes 1_K) = u\ , \qquad k(\partial^1 \otimes 1_K) = w\ .$$

En remarquant que $I \otimes \partial I \otimes K \simeq (I \otimes K) \amalg (I \otimes K)$ et $\{0\} \otimes I \otimes K \simeq I \otimes K$, les deux égalités de la première colonne permettent de définir une flèche

$$I \otimes \partial I \otimes K \cup \{0\} \otimes I \otimes K \xrightarrow{((h,k),u\sigma_K)} T\ .$$

La condition An1 des extensions anodines appliquée à l'inclusion $\partial I \otimes I \longrightarrow I \otimes K$ implique que

$$I \otimes \partial I \otimes K \cup \{0\} \otimes I \otimes K \longrightarrow I \otimes I \otimes K$$

est une extension anodine, et comme T est fibrant, on obtient un relèvement H

$$\begin{array}{ccc} I \otimes \partial I \otimes K \cup \{0\} \otimes I \otimes K & \xrightarrow{((h,k),u\sigma_K)} & T \\ \downarrow & \nearrow_{H} & \\ I \otimes I \otimes K & & \end{array}\ ,$$

de sorte que

$$H(1_I \otimes \partial^0 \otimes 1_K) = h\ , \quad H(1_I \otimes \partial^1 \otimes 1_K) = k\ , \quad H(\partial^0 \otimes 1_I \otimes 1_K) = u\sigma_K\ .$$

On pose $l = H(\partial^1 \otimes 1_I \otimes 1_K)$. On a alors les relations

$l(\partial^0 \otimes 1_K) = H(\partial^1 \otimes 1_I \otimes 1_K)(\partial^0 \otimes 1_K) = H(1_I \otimes \partial^0 \otimes 1_K)(\partial^1 \otimes 1_K) = h(\partial^1 \otimes 1_K) = v$,

$l(\partial^1 \otimes 1_K) = H(\partial^1 \otimes 1_I \otimes 1_K)(\partial^1 \otimes 1_K) = H(1_I \otimes \partial^1 \otimes 1_K)(\partial^1 \otimes 1_K) = k(\partial^1 \otimes 1_K) = w$.

Le morphisme $l : I \otimes K \longrightarrow T$ est donc une homotopie de v vers w.

En appliquant ce résultat à $w = u$ et $k = u\sigma_K$, on en déduit que la relation d'homotopie élémentaire est symétrique. La transitivité est conséquence immédiate de ce même résultat et de la symétrie. □

Proposition 1.3.31. — *Toute extension anodine est une équivalence faible.*

Démonstration. — Soient $j : K \longrightarrow L$ une extension anodine, et T un objet fibrant de $\widehat{A}$. Il s'agit de montrer que l'application

$$j^* : \mathrm{Hom}_{h_\mathfrak{I}(A)}(L, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{h_\mathfrak{I}(A)}(K, T)$$

est bijective. La surjectivité est immédiate : soit $k : K \longrightarrow T$ une flèche de $\widehat{A}$. Il existe un relèvement l de j sous k :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & T \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \nearrow_{l} & \\ L & & \end{array}$$

On a donc l'égalité $j^* l = k$.

Pour montrer l'injectivité, on considère deux flèches $l_0, l_1 : L \longrightarrow T$ telles que $l_0 j = l_1 j$ dans $h_\mathfrak{I}(A)$. Par le lemme 1.3.30, il existe un morphisme $h : I \otimes K \longrightarrow T$ tel que $h\partial^0_K = l_0 j$ et $h\partial^1_K = l_1 j$. On en déduit une flèche $u : I \otimes K \cup \partial I \otimes L \longrightarrow T$, définie par $u = (h, (l_0, l_1))$, et comme grâce à la condition An2, $I \otimes K \cup \partial I \otimes L \longrightarrow I \otimes L$ est une extension anodine, on a le relèvement suivant :

$$\begin{array}{ccc} I \otimes K \cup \partial I \otimes L & \xrightarrow{u} & T \\ \downarrow & \nearrow_{H} & \\ I \otimes L & & \end{array}$$

On a donc les égalités $H\partial^\varepsilon_L = l_\varepsilon$, pour $\varepsilon = 0, 1$, autrement dit, $l_0 = l_1$ dans $h_\mathfrak{I}(A)$. □

Lemme 1.3.32. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\widehat{A}$, les préfaisceaux X et Y étant fibrants. Pour que le morphisme f soit une équivalence faible, il faut et il suffit qu'il soit une $\mathfrak{I}$-équivalence d'homotopie* (i.e. *que $Q(f)$ soit un isomorphisme de $h_\mathfrak{I}(A)$).*

Démonstration. — Il est immédiat que c'est une condition suffisante. Réciproquement, supposons que f soit une équivalence faible, et notons $h'_\mathfrak{I}(A)$ la sous-catégorie pleine de $h_\mathfrak{I}(A)$ formée des objets fibrants. Par hypothèse, l'image $Q(f)$ de f dans $h_\mathfrak{I}(A)$ est une flèche de $h'_\mathfrak{I}(A)$, et pour tout objet T de $h'_\mathfrak{I}(A)$, l'application

$$Q(f)^* : \mathrm{Hom}_{h'_\mathfrak{I}(A)}(Y, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{h'_\mathfrak{I}(A)}(X, T)$$

est bijective. Le lemme de Yoneda implique que $Q(f)$ est un isomorphisme de $h'_{\mathfrak{I}}(A)$, donc aussi de $h_{\mathfrak{I}}(A)$, ce qui prouve le lemme. □

Lemme 1.3.33. — *Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration naïve. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *La flèche p est une fibration triviale.*
(b) *La flèche p est le dual d'un rétracte par déformation fort.*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 1.3.26.

Il reste donc à montrer l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. On se donne donc des morphismes $s : Y \longrightarrow X$ et $k : I \otimes X \longrightarrow X$ tels que $ps = 1_Y$, $k\partial^0_X = 1_X$, $k\partial^1_X = sp$, et $pk = p\sigma_X$, et on veut montrer que p est une fibration triviale. On considère un monomorphisme $i : K \longrightarrow L$, et un carré commutatif dans $\widehat{A}$,

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L & \xrightarrow[b]{} & Y \end{array} \quad ,$$

dont on va montrer qu'il admet un relèvement l. Les égalités $k(1_I \otimes a)\partial^1_K = k\partial^1_X a = spa = sbi$ permettent de définir une flèche $(k(1_I \otimes a), sb) : I \otimes K \cup \{1\} \otimes L \longrightarrow X$, et les égalités $psb = b = b\sigma_L\partial^1_L$ et $pk(1_I \otimes a) = p\sigma_X(1_I \otimes a) = pa\sigma_K = bi\sigma_K = b\sigma_L(1_I \otimes i)$ montrent que le carré ci-dessous est commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes K \cup \{1\} \otimes L & & \xrightarrow{(k(1_I \otimes a),\, sb)} & & X \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I \otimes L & \xrightarrow[\sigma_L]{} & L & \xrightarrow[b]{} & Y \end{array}$$

Comme en vertu de la condition An1, j est une extension anodine, ce carré admet un relèvement $h : I \otimes L \longrightarrow X$. On pose $l = h\partial^0_L$. Alors on a $pl = ph\partial^0_L = b\sigma_L\partial^0_L = b$ et $li = h\partial^0_L i = h(1_I \otimes i)\partial^0_K = k(1_I \otimes a)\partial^0_K = k\partial^0_X a = a$, ce qui prouve l'assertion. □

Lemme 1.3.34. — *Une fibration naïve de but fibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale.*

Démonstration. — Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration naïve de but fibrant, et supposons que p soit une équivalence faible. Par le lemme 1.3.32, p est alors une $\mathfrak{I}$-équivalence d'homotopie (*i.e.* $Q(p)$ est un isomorphisme), et il résulte du lemme 1.3.30 qu'il existe une flèche $t : Y \longrightarrow X$, et une flèche $k : I \otimes Y \longrightarrow Y$, telles que $k\partial^0_Y = 1_Y$ et $k\partial^1_Y = pt$.

On a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{t} & X \\ {\scriptstyle \partial^1_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I \otimes Y & \xrightarrow[k]{} & Y \end{array}$$

qui admet un relèvement $k' : I \otimes Y \longrightarrow X$. On pose $s = k'\partial^0_Y$. Alors $ps = pk'\partial^0_Y = k\partial^0_Y = 1_Y$. D'autre part, comme $Q(p)$ est un isomorphisme, on a aussi $Q(s)Q(p) = 1_X$, et donc par le lemme 1.3.30, il existe une $\mathfrak{I}$-homotopie de 1_X vers sp. On se donne donc une flèche $h : I \otimes X \longrightarrow X$ telle que $h\partial^0_X = 1_X$ et $h\partial^1_X = sp$. On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \partial I \otimes X & \xrightarrow[\simeq \partial^1_X \amalg \partial^1_X]{\partial^1_{\partial I \otimes X}} & I \otimes \partial I \otimes X \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ X \amalg X & & I \otimes X \amalg I \otimes X \\ {\scriptstyle (\partial^0_X, \partial^1_X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (h,\, sph)} \\ I \otimes X & \xrightarrow[sp\sigma_X]{} & X \end{array} ,$$

ce qui définit une flèche $(sp\sigma_X,\, (h,\, sph)) : \{1\} \otimes I \otimes X \cup I \otimes \partial I \otimes X \longrightarrow X$. On a d'autre part les relations

$$\begin{aligned} psp\sigma_X &= ph\partial^1_X\sigma_X = ph(1_I \otimes \sigma_X)\partial^1_{I\otimes X} \ , \\ p(h, sph) &= (ph, ph) = ph(1_I \otimes \sigma_X)(1_I \otimes \partial^0_X,\, 1_I \otimes \partial^1_X) \ , \end{aligned}$$

ce qui montre la commutativité du carré suivant,

$$\begin{array}{ccccccc} \{1\} \otimes I \otimes X \cup I \otimes \partial I \otimes X & & \xrightarrow{(sp\sigma_X,\, (h,\, sph))} & & & & X \\ {\scriptstyle (\partial^1_{I\otimes X},\, (1_I \otimes \partial^0_X,\, 1_I \otimes \partial^1_X))}\downarrow & & & & & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I \otimes I \otimes X & \xrightarrow[1_I \otimes \sigma_X]{} & I \otimes X & \xrightarrow[h]{} & X & \xrightarrow[p]{} & Y \end{array} ,$$

ce dernier admettant un relèvement $H : I \otimes I \otimes X \longrightarrow X$. On pose $K = H\partial^0_{I\otimes X}$. Alors on a

$$\begin{aligned} K\partial^0_X &= H\partial^0_{I\otimes X}\partial^0_X = H(1_I \otimes \partial^0_X)\partial^0_X = h\partial^0_X = 1_X \ , \\ K\partial^1_X &= H\partial^0_{I\otimes X}\partial^1_X = H(1_I \otimes \partial^1_X)\partial^0_X = sph\partial^0_X = sp \ , \\ pK &= pH\partial^0_{I\otimes X} = ph(1_I \otimes \sigma_X)\partial^0_{I\otimes X} = ph\partial^0_X\sigma_X = p\sigma_X \ . \end{aligned}$$

Le lemme 1.3.33 montre que p est une fibration triviale. La réciproque résulte de la proposition 1.3.27. □

Corollaire 1.3.35. — *Une cofibration de but fibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une extension anodine.*

Démonstration. — Comme en vertu de la proposition 1.3.31 toute extension anodine est une équivalence faible, il suffit de montrer qu'une cofibration i de but fibrant qui est une équivalence faible est une extension anodine. On factorise i en $i = qj$, où j est une extension anodine, et où q est une fibration naïve (cf. proposition 1.3.29). Comme j est en particulier une équivalence faible, il en est de même de q, et par la proposition ci-dessus, q est une fibration triviale. On en déduit que q vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à i, et par le lemme du rétracte, i est un rétracte de j, ce qui montre que i est une extension anodine. □

Proposition 1.3.36. — *Une cofibration est une équivalence faible si et seulement si elle vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement à la classe des fibrations naïves de but fibrant. En particulier, toute fibration naïve de but fibrant est une fibration, et pour tout préfaisceau X sur A, l'unique flèche $X \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ de X vers l'objet final de $\widehat{A}$ est une fibration si et seulement si X est fibrant.*

Démonstration. — Soit $i : K \longrightarrow L$ une cofibration. Il existe une extension anodine de but fibrant $j : L \longrightarrow L'$ (par la proposition 1.3.29, en factorisant l'unique morphisme $L \longrightarrow e_{\widehat{A}}$), et en vertu du corollaire 1.3.35, i est une équivalence faible si et seulement si ji est une extension anodine.

Supposons que i soit une équivalence faible, et considérons un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L & \xrightarrow[b]{} & Y \end{array} \quad , \tag{1.3.36.1}$$

où la flèche p est une fibration naïve de but fibrant. On veut montrer qu'il admet un relèvement. Comme Y est fibrant, et comme j est une extension anodine, il existe un morphisme $b' : L' \longrightarrow Y$ tel que $b'j = b$. On obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle ji}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L' & \xrightarrow[b']{} & Y \end{array} \quad , \tag{1.3.36.2}$$

lequel admet un relèvement $l : L' \longrightarrow X$. On a alors les égalités $lji = a$ et $plj = b'j = b$. Le morphisme lj est donc un relèvement du carré (1.3.36.1).

Réciproquement, si i vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement à la classe des fibrations naïves de but fibrant, on factorise ji en $ji = pk$, où $k : K \longrightarrow K'$ est une extension anodine, et $p : K' \longrightarrow L'$ est une fibration naïve (1.3.29). Vu que i et j vérifient la propriété de relèvement à gauche relativement à p, il en est de même de ji. On en déduit que ji est un rétracte de k, et donc que c'est une extension anodine. Par conséquent, i est une équivalence faible. □

Corollaire 1.3.37. — *Les cofibrations triviales sont stables par compositions transfinies et par images directes.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition précédente et de la remarque 1.2.20. □

Lemme 1.3.38. — *Tout rétracte par déformation fort est une extension anodine.*

Démonstration. — Soit $i : K \longrightarrow L$ un rétracte par déformation fort. Alors par définition, il existe des morphismes $r : L \longrightarrow K$, $h : I \otimes L \longrightarrow L$, tels que $ri = 1_K$, $h\partial^0_L = 1_L$, $h\partial^1_L = ir$, et $h(1_I \otimes i) = \sigma_L(1_I \otimes i)$. Considérons un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L & \xrightarrow[v]{} & Y \end{array} \quad ,$$

dans lequel p est une fibration naïve, et montrons qu'il admet un relèvement. On remarque qu'on a

$$\begin{aligned} pu\sigma_K &= vi\sigma_K = v\sigma_L(1_I \otimes i) = vh(1_I \otimes i) \ , \\ pur &= vir = vh\partial^1_L \ , \end{aligned}$$

d'où un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} I \otimes K \cup \{1\} \otimes L & \xrightarrow{(u\sigma_K,\, ur)} & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I \otimes L & \xrightarrow[vh]{} & Y \end{array} \quad ,$$

ce dernier admettant un relèvement $k : I \otimes L \longrightarrow X$. On pose $l = k\partial^0_L$. On a alors $li = k\partial^0_L i = k(1_I \otimes i)\partial^0_K = u\sigma_K\partial^0_K = u$, et $pl = pk\partial^0_L = vh\partial^0_L = v$, ce qui prouve l'assertion. □

Lemme 1.3.39. — *Toute extension anodine de source et de but fibrants est un rétracte par déformation fort.*

Démonstration. — Soit $i : K \longrightarrow L$ une extension anodine de source et de but fibrants. Comme K est fibrant on obtient un relèvement

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{1_K} & K \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle r} & \\ L & & \end{array} \quad ,$$

ce qui permet de définir le morphisme $(i\sigma_K, (1_L, ir)) : I \otimes K \cup \partial I \otimes L \longrightarrow I \otimes L$. Comme L est fibrant, on en déduit un relèvement h

$$\begin{array}{ccc} I \otimes K \cup \partial I \otimes L & \xrightarrow{(i\sigma_K, (1_L, ir))} & L \\ \downarrow & \nearrow_{h} & \\ I \otimes L & & \end{array} .$$

Alors on a $h\partial^0_L = 1_L$, $h\partial^1_L = ir$, et $h(1_I \otimes i) = i\sigma_K = \sigma_L(1_I \otimes i)$, ce qui prouve que i est un rétracte par déformation fort. □

L'énoncé suivant, ainsi que sa démonstration, sont directement inspirés de leurs analogues dans [**72**].

Proposition 1.3.40. — *Pour tout cardinal assez grand α, si on pose $\beta = 2^\alpha$, pour toute cofibration triviale $i : C \longrightarrow D$, et pour tout sous-objet β-accessible J de D, il existe un sous-objet β-accessible K de D, qui contient J, tel que l'inclusion canonique $C \cap K \longrightarrow K$ soit une cofibration triviale.*

Démonstration. — En vertu de la condition An0 des extensions anodines, il existe un *ensemble* Λ d'extensions anodines tel que $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$. On va utiliser la proposition 1.2.35, appliquée au foncteur $L : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$ défini à partir de l'ensemble $\mathcal{N} = \Lambda$ et d'un ensemble bien ordonné bien choisi, tel que pour tout préfaisceau X sur A, LX soit fibrant. (Pour cela, il suffit de prendre un ensemble bien ordonné γ-filtrant, pour un cardinal infini γ tel que toute source d'une flèche de Λ soit γ-accessible ; voir la section sur l'argument du petit objet dans [**74**] pour plus de détails). On reprendra les mêmes notations que celles de 1.2.35. En vertu des propositions 1.2.15, 1.2.17 et 1.2.35 on a les propriétés suivantes :

(a) le foncteur L respecte les monomorphismes ;

(b) si $X \longrightarrow Z$ et $Y \longrightarrow Z$ sont deux monomorphismes de $\widehat{A}$, la flèche canonique $L(X \cap Y) \longrightarrow L(X) \cap L(Y)$ est un isomorphisme ;

(c) les foncteurs L et I sont accessibles. Par conséquent, il existe un cardinal α_0 tel que pour tout cardinal $\alpha \geqslant \alpha_0$, les foncteurs L et I soient α-accessibles, et si $\beta = 2^\alpha$, alors L et I envoient tout objet β-accessible de $\widehat{A}$ sur un objet β-accessible ;

(d) il existe un cardinal β_0 tel que pour tout cardinal $\beta \geqslant \beta_0$, tout préfaisceau X sur A soit la réunion β-filtrante de ses sous-objets β-accessibles ;

(e) il existe un morphisme de foncteurs $l : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow L$ tel que pour tout préfaisceau X sur A, l_X soit une extension anodine.

Considérons une cofibration triviale $i : C \longrightarrow D$. On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{l_C} & LC \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Li} \\ D & \xrightarrow[l_D]{} & LD \end{array} \quad .$$

Il résulte des propriétés (a) et (e) ci-dessus que Li est une cofibration triviale, et comme elle est de source et de but fibrants, le corollaire 1.3.35 et le lemme 1.3.39 impliquent que c'est un rétracte par déformation fort. Il existe donc des morphismes $r : LD \longrightarrow LC$, et $h : I \otimes LD \longrightarrow LD$, tels que $rLi = 1_{LC}$, $h\partial^0_{LD} = 1_{LD}$, $h\partial^1_{LD} = L(i)r$, et $h(1_I \otimes Li) = \sigma_{LD}(1_I \otimes Li)$.

On choisit un cardinal infini α assez grand (*i.e.* majorant les cardinaux α_0 et β_0 des conditions (c) et (d) ci-dessus), on note α^+ le cardinal successeur de α, vu comme un ensemble bien ordonné, puis on pose $\beta = 2^\alpha$. On sait que α^+ est un ensemble ordonné α-filtrant, et que $\alpha^+ \leqslant \beta$.

On se donne un sous-objet β-accessible J de D. On va construire une suite de sous-objets β-accessibles de D

$$K_0 \subset \cdots \subset K_\gamma \subset K_{\gamma+1} \subset \cdots \subset D \ , \ \gamma \in \alpha^+ \ ,$$

telle que K_0 contienne J, et telle que pour tout $\gamma \in \alpha^+$, si l'on note $j_\gamma : K_\gamma \longrightarrow D$ l'inclusion, on ait une factorisation k_γ

$$\begin{array}{ccc} I \otimes LK_\gamma & \overset{k_\gamma}{\dashrightarrow} & LK_{\gamma+1} \\ {\scriptstyle 1_I \otimes L(j_\gamma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L(j_{\gamma+1})} \\ I \otimes LD & \xrightarrow[h]{} & LD \end{array} \qquad (1.3.40.1)$$

du morphisme $h(1_I \otimes Lj_\gamma)$ par $LK_{\gamma+1}$ (nécessairement unique, puisqu'en vertu de la condition (a), la flèche $L(j_{\gamma+1})$ est un monomorphisme). Pour cela, on procède par récurrence transfinie. Pour $\gamma = 0$, on pose $K_0 = J$. Si $\gamma > 0$, et si on a construit les $K_{\gamma'}$ pour tout $\gamma' < \gamma$, on pose $K'_\gamma = \varinjlim_{\gamma' < \gamma} K_{\gamma'}$. Alors K'_γ est toujours β-accessible par la proposition 1.2.10, ainsi que $I \otimes LK'_\gamma$, par la condition (c). Comme en vertu de la propriété (d), D est la réunion β-filtrante de ses sous-objets β-accessibles, et comme le foncteur L est β-accessible et respecte les monomorphismes, LD est la réunion β-filtrante de ses sous-objets de la forme LD', D' sous-objet β-accessible de D. On en déduit que le composé de l'inclusion $I \otimes LK'_\gamma \longrightarrow I \otimes LD$ et du morphisme $h : I \otimes LD \longrightarrow LD$ se factorise par un sous-objet LK''_γ de LD, avec K''_γ sous-préfaisceau β-accessible de D. On pose enfin $K_\gamma = K'_\gamma \cup K''_\gamma$, ce qui achève la construction de la suite K_γ, $\gamma \in \alpha^+$.

Soit $K = \varinjlim_{\gamma\in\alpha^+} K_\gamma$. La proposition 1.2.10 montre que K est un objet β-accessible. Grâce à l'α-accessibilité de L et de I, on a les identifications suivantes

$$LK = \varinjlim_{\gamma\in\alpha^+} LK_\gamma \ , \quad \text{et} \quad I\otimes LK = \varinjlim_{\gamma\in\alpha^+} I\otimes LK_\gamma \ .$$

Le carré 1.3.40.1 permet donc d'obtenir par passage à la limite inductive un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} I\otimes LK & \xrightarrow{k} & LK \\ {\scriptstyle 1_I\otimes Lj}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Lj} \\ I\otimes LD & \xrightarrow[h]{} & LD \end{array} \ ,$$

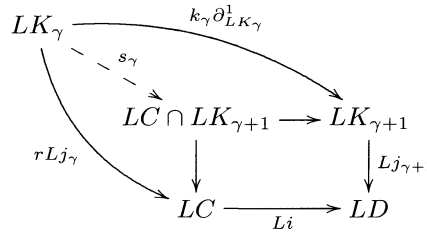
où k est la limite inductive des morphismes k_γ, et $j : K \longrightarrow D$ l'inclusion.

On remarque que pour tout $\gamma \in \alpha^+$, on a les égalités :

$$L(i)rL(j_\gamma) = h\partial^1_{LD}L(j_\gamma) = h(1_I\otimes L(j_\gamma))\partial^1_{LK_\gamma} = L(j_{\gamma+1})k_\gamma\partial^1_{LK_\gamma} \ ,$$

d'où l'existence d'une unique flèche $s_\gamma : LK_\gamma \longrightarrow LC\cap LK_{\gamma+1}$ rendant commutatif le diagramme

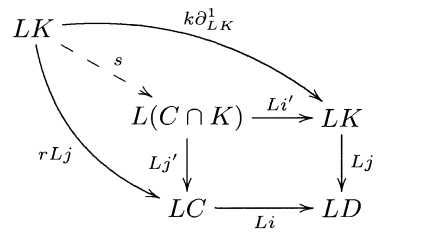
(1.3.40.2)



Grâce à l'universalité des limites inductives dans $\widehat{A}$, à l'α-accessibilité de L, et à la propriété (b) ci dessus, on a les identifications suivantes

$$C\cap K = \varinjlim_{\gamma\in\alpha^+} C\cap K_\gamma \ , \quad \text{et} \quad L(C\cap K) = \varinjlim_{\gamma\in\alpha^+} LC\cap LK_\gamma \ .$$

Le diagramme 1.3.40.2 permet donc d'obtenir par passage à la limite inductive un diagramme commutatif



où s est la limite inductive des morphismes s_γ, et $i' : C\cap K \longrightarrow K$, $j' : C\cap K \longrightarrow C$ sont les inclusions.

On en déduit que $k\partial^1_{LK} = L(i')s$, ainsi que les égalités

$$\begin{aligned}
&L(j')sL(i') = rL(j)L(i') = rL(i)L(j') = L(j') \ , \\
&L(j)k\partial^0_{LK} = h(1_I \otimes L(j))\partial^0_{LK} = h\partial^0_{LD}L(j) = L(j) \ , \\
&L(j)k(1_I \otimes Li') = h(1_I \otimes Lj)(1_I \otimes Li') = h(1_I \otimes Li)(1_I \otimes Lj') \\
&\qquad\qquad = \sigma_{LD}(1_I \otimes Li)(1_I \otimes Lj') = \sigma_{LD}(1_I \otimes Lj)(1_I \otimes Li') \\
&\qquad\qquad = L(j)\sigma_{LK}(1_I \otimes Li') \ .
\end{aligned}$$

Comme en vertu de la propriété (a), $L(j)$ et $L(j')$ sont des monomorphismes, on a donc $sL(i') = 1_{L(C\cap K)}$, $k\partial^0_{LK} = 1_{LK}$, et $k(1_I \otimes Li') = \sigma_{LK}(1_I \otimes Li')$, ce qui prouve que l'inclusion $L(i') : L(C \cap K) \longrightarrow LK$ est un rétracte par déformation fort, et donc une équivalence faible (et même une extension anodine par le lemme 1.3.38). Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
K \cap C & \xrightarrow{l_{K\cap C}} & L(K \cap C) \\
{\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Li'} \\
K & \xrightarrow[l_K]{} & LK
\end{array}$$

montre alors que le morphisme $C \cap K \longrightarrow K$ est une cofibration triviale. □

Remarque 1.3.41. — Au cours de la démonstration de la proposition précédente, on a vu que toute cofibration triviale $i : C \longrightarrow D$ s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{j} & C' \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\
D & \xrightarrow[k]{} & D'
\end{array} \qquad ,$$

avec i', j, k des extensions anodines, et C', D' des objets fibrants (prendre $C' = LC$, $D' = LD$, $i' = LI$, $j = l_C$, $k = l_D$). En particulier, la classe des cofibrations triviales est la plus petite classe C de flèches de $\widehat{A}$ contenant la classe des extensions anodines An, et telle que si $u : X \longrightarrow Y$, $v : Y \longrightarrow Z$ est un couple de morphismes composables de $\widehat{A}$, et si v et vu sont dans C, alors u l'est aussi.

Proposition 1.3.42. — *Il existe un* ensemble $\mathcal{N}$ *de cofibrations triviales, tel que* $l(r(\mathcal{N})) = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$.

Démonstration. — En vertu des propositions 1.3.40 et 1.2.15, et du corollaire 1.3.37, cela résulte du lemme 1.2.24, appliqué à la classe $\mathsf{C} = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$, et à la classe $\mathsf{D} = Acc_\alpha(A)$ des préfaisceaux α-accessibles pour un cardinal α assez grand. □

Corollaire 1.3.43. — *Il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de $\widehat{A}$ en $f = qj$, où j est une cofibration triviale, et où q est une fibration.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 1.3.42 et de l'argument du petit objet. □

1.3.44. — Ceci achève, en vertu de la remarque 1.3.28, la démonstration du théorème 1.3.22 affirmant que $(\widehat{A}, \mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant.

Scholie 1.3.45. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\widehat{A}$. En vertu du lemme 1.3.29, il existe une extension anodine $j : Y \longrightarrow Y'$ de but fibrant, et une décomposition $jf = pi$ de jf en une extension anodine i suivie d'une fibration naïve p. De plus, par la proposition 1.3.36, p est une fibration. On a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow[j]{} & Y' \end{array} \quad ,$$

avec i, j des extensions anodines, p une fibration, et X', Y' des objets fibrants. Si f est une équivalence faible, il en est de même de p qui est donc par les propositions 1.3.26 et 1.3.27 le dual d'un rétracte par déformation fort, et admet en particulier une section s. Le morphisme s est une cofibration triviale, et comme X' et Y' sont fibrants, il résulte du corollaire 1.3.35 que s est une extension anodine. Finalement, toute équivalence faible $f : X \longrightarrow Y$ s'insère dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \uparrow{\scriptstyle s} \\ Y & \xrightarrow[j]{} & Y' \end{array} \qquad\qquad pi = jf \ , \quad ps = 1_{Y'} \ ,$$

avec i, j, s des extensions anodines, p une fibration triviale, et X', Y' des objets fibrants. En particulier, la classe W des équivalences faibles est la plus petite classe de flèches de $\widehat{A}$ satisfaisant à la propriété de « deux sur trois » (axiome CM2) et contenant la classe An des extensions anodines. On en déduit un isomorphisme des catégories localisées

$$\mathsf{An}^{-1}\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \mathsf{W}^{-1}\widehat{A}$$

induit par l'inclusion $\mathsf{An} \subset \mathsf{W}$.

Remarque 1.3.46. — Il est naturel de se demander si toute cofibration triviale est une extension anodine. La réponse est négative en général ; nous proposons en exercice au lecteur de vérifier que [**64**, chap. X, remarque 2.4] se traduit en un contre-exemple. Nous allons malgré tout dégager des conditions nécessaires et suffisantes pour que cela soit le cas.

Proposition 1.3.47. — *Soit A une petite catégorie munie d'une structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$. On considère la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A}$ définie par celle-ci. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Toute cofibration triviale est une extension anodine.*

(b) *Toute fibration naïve est une fibration.*

(c) *Toute fibration naïve qui est aussi une équivalence faible est une fibration triviale.*

(d) *Toute fibration naïve p admet une factorisation de la forme $p = qj$, où q est une fibration, et où j est une extension anodine.*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ se vérifie immédiatement en considérant les propriétés de relèvement correspondantes, et l'implication $(b) \Rightarrow (c)$ est évidente.

Vérifions $(c) \Rightarrow (d)$. Soit p une fibration naïve. On peut factoriser p en $p = ri$, où r est une fibration et i une cofibration triviale, puis factoriser i en $i = sj$, où s est une fibration naïve, et j une extension anodine. Comme s est une équivalence faible, c'est une fibration triviale, et donc en particulier une fibration. Par conséquent, $q = rs$ est une fibration.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que $(d) \Rightarrow (a)$. Si i est une cofibration triviale, on la factorise en $i = qj$, où q est une fibration naïve, et où j est une extension anodine, puis on factorise q en une extension anodine k, suivie d'une fibration r. On obtient ainsi une factorisation de i en une extension anodine suivie d'une fibration, ce qui permet de conclure grâce au lemme du rétracte. □

Définition 1.3.48. — On dira qu'une structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ est *complète*, si les propriétés équivalentes de la proposition ci dessus sont satisfaites. On dira aussi dans ce cas que la classe des extensions anodines An est *complète*, et si la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ est engendrée par une donnée homotopique $(\mathfrak{I}, S)$, que cette dernière est *complète*.

Remarque 1.3.49. — Soient A une petite catégorie, et $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ une structure homotopique sur A. Si $\overline{\mathsf{An}}$ désigne la classe $\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$ des cofibrations triviales de la catégorie de modèles fermée définie par cette structure homotopique, et $\overline{\mathfrak{I}} = (\bar{I}, \bar{\partial}^0, \bar{\partial}^1, \bar{\sigma})$ une donnée homotopique élémentaire telle que pour tout préfaisceau X sur A, la flèche $\bar{\partial}^\varepsilon_X : X \longrightarrow \bar{I} \otimes X$, $\varepsilon = 0, 1$, soit une cofibration triviale (par exemple $\overline{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}$)), alors $(\overline{\mathfrak{I}}, \overline{\mathsf{An}})$ est une structure homotopique complète, définissant la même catégorie de modèles fermée. En effet, en vertu de la proposition 1.3.42 et du lemme 1.3.16, la classe $\overline{\mathsf{An}} = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$ satisfait aux conditions An0, An1, et An2 des extensions anodines, et la coïncidence des deux structures de catégorie de modèles fermée résulte facilement de la proposition 1.3.36.

1.3.50. — Soient A une petite catégorie et X un objet de $\widehat{A}$. On rappelle que le foncteur canonique

$$\widehat{A/X} \simeq \widehat{A}/X \xrightarrow{\mathcal{U}_X} \widehat{A}$$

est fidèle, commute aux produits fibrés et aux petites limites inductives. En particulier, un morphisme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

de $\widehat{A}/X$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) de $\widehat{A}/X$ si et seulement si f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) de $\widehat{A}$, et un carré commutatif de $\widehat{A}/X$ est cartésien (resp. cocartésien) si et seulement si son image par $\mathcal{U}_X$ l'est.

Un cylindre fonctoriel $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ sur A définit un cylindre fonctoriel

$$\mathfrak{I}/X = (I/X, \partial^0/X, \partial^1/X, \sigma/X)$$

sur A/X comme suit : pour tout objet $(K,\ k : K \longrightarrow X)$ de $\widehat{A}/X$, on pose

$$(I/X)(K,k) = (I(K),\ k\sigma_K : I(K) \longrightarrow X)\ ,$$

et on remarque que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K & \overset{\partial^0_K}{\underset{\partial^1_K}{\rightrightarrows}} & I(K) & \xrightarrow{\sigma_K} & K \\ & {\scriptstyle k}\searrow & \downarrow{\scriptstyle k\sigma_K} & \swarrow{\scriptstyle k} & \\ & & X & & \end{array}$$

est commutatif. Ainsi, on pose

$$(\partial^\varepsilon/X)_{(K,k)} = \partial^\varepsilon_K\ , \quad \varepsilon = 0,1\ , \qquad (\sigma/X)_{(K,k)} = \sigma_K\ .$$

Grâce à la fidélité et aux propriétés d'exactitude de $\mathcal{U}_X$, on vérifie aussitôt que si $\mathfrak{I}$ est une donnée homotopique élémentaire, il en est de même de $\mathfrak{I}/X$.

1.3.51. — Soient A une petite catégorie, et X un préfaisceau sur A. Si $\mathcal{F}$ est une classe de flèches de $\widehat{A}$, on note $\mathcal{F}/X$ la classe des flèches de $\widehat{A}/X$ de la forme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}\ ,$$

où $f \in \mathcal{F}$.

Lemme 1.3.52. — *Pour toute partie $\mathcal{F}$ de* Fl $\widehat{A}$, *on a l'égalité $r(\mathcal{F}/X) = r(\mathcal{F})/X$, et si $\mathcal{F}$ est stable par changements de base, on a $l(\mathcal{F}/X) = l(\mathcal{F})/X$. En particulier, pour toute classe de flèches $\mathcal{F}$ de $\widehat{A}$, on a $l(r(\mathcal{F}/X)) = l(r(\mathcal{F}))/X$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ une classe de flèches de $\widehat{A}$. Il est immédiat que $r(\mathcal{F}/X) = r(\mathcal{F})/X$, et que $l(\mathcal{F})/X \subset l(\mathcal{F}/X)$. Supposons que $\mathcal{F}$ soit stable par changements de base, et montrons qu'alors on a aussi l'inclusion $l(\mathcal{F}/X) \subset l(\mathcal{F})/X$. Soient une flèche de $\widehat{A}/X$ appartenant à $l(\mathcal{F}/X)$, et un carré commutatif de $\widehat{A}$

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L \\ & {\scriptstyle k}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle l} & \\ & X & \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L & \xrightarrow[b]{} & Z \end{array} \quad ,$$

avec p dans $\mathcal{F}$. Il s'agit de montrer que ce carré admet un relèvement. La stabilité de $\mathcal{F}$ par changements de base permet de se ramener au cas où $Z = L$ et $b = 1_L$. Mais alors ce carré peut être considéré comme un carré commutatif de $\widehat{A}/X$, et le relèvement existe par hypothèse, ce qui pouve l'assertion. La dernière affirmation résulte des deux premières, et de la stabilité de $r(\mathcal{F})$ par changements de base. □

Dans la suite, on se fixe une petite catégorie A, une structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ sur A, et on garde les notations de 1.3.21.

Proposition 1.3.53. — *Pour tout préfaisceau X sur A, le couple $(\mathfrak{I}/X, \mathsf{An}/X)$ est une structure homotopique sur A/X. De plus, si Λ est un ensemble de monomorphismes de $\widehat{A}$ tel que $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$, alors $(\mathfrak{I}/X, \Lambda/X)$ est une donnée homotopique sur A/X qui engendre la structure homotopique $(\mathfrak{I}/X, \mathsf{An}/X)$.*

Démonstration. — Il est immédiat que An/X satisfait aux conditions An1 et An2 des extensions anodines. Si Λ est un ensemble de monomorphismes de $\widehat{A}$ tel que $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$, le lemme précédent implique que $\mathsf{An}/X = l(r(\Lambda/X))$, ce qui prouve la condition An0 pour An/X, et démontre la dernière assertion. □

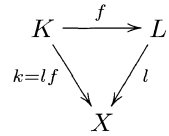
1.3.54. — On dira que $(\mathfrak{I}/X, \mathsf{An}/X)$ est la *structure homotopique induite* sur A/X par la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ sur A. Si l'on note avec un indice X les classes des extensions anodines, fibrations naïves, cofibrations, fibrations, et équivalences faibles, relatives à la structure homotopique induite sur A/X, on a

$$\begin{array}{llll} & \mathsf{An}_X = \mathsf{An}/X \ , & \mathsf{FibN}_X = \mathsf{FibN}/X \ , & \\ (1.3.54.1) & \mathsf{Cof}_X = \mathsf{Cof}/X \ , & \mathsf{Fib}_X \cap \mathsf{W}_X = (\mathsf{Fib} \cap \mathsf{W})/X \ , & \\ & \mathsf{W}_X \subset \mathsf{W}/X \ , & \mathsf{Cof}_X \cap \mathsf{W}_X \subset (\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W})/X \ , & \mathsf{Fib}/X \subset \mathsf{Fib}_X \ , \end{array}$$

et en particulier, les objets fibrants de $\widehat{A}/X$ sont simplement les fibrations naïves de but X. En effet, les quatre égalités sont évidentes (la première par définition, la troisième par les propriétés d'exactitude du foncteur $\mathcal{U}_X$, la deuxième et la quatrième

par le lemme 1.3.52). Montrons l'inclusion $\mathsf{W}_X \subset \mathsf{W}/X$. On a $\mathsf{An}_X = \mathsf{An}/X \subset \mathsf{W}/X$, et W/X satisfait à la condition de « deux sur trois » (axiome CM2). Comme W_X est la plus petite classe de flèches de $\widehat{A}/X$ contenant An_X et satisfaisant à la propriété de « deux sur trois » (scholie 1.3.45), cela prouve l'assertion. Les deux autres inclusions en résultent. En vertu du théorème 1.3.22, $(\widehat{A}/X, \mathsf{W}_X, \mathsf{Fib}_X, \mathsf{Cof}_X)$ est une catégorie de modèles fermée, à engendrement cofibrant. On appellera *X-équivalences faibles* les équivalences faibles de cette structure, autrement dit, les éléments de W_X.

Définition 1.3.55. — On dit qu'un morphisme $f : K \longrightarrow L$ de $\widehat{A}$ est une *équivalence faible absolue* (relativement à la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$) si pour tout préfaisceau X sur A, et toute flèche $l : L \longrightarrow X$ de $\widehat{A}$, le morphisme



de $\widehat{A}/X$ est une X-équivalence faible. On note W^a la classe des équivalences faibles absolues.

On a des inclusions évidentes $\mathsf{An} \subset \mathsf{W}^a \subset \mathsf{W}$, et il résulte de 1.3.54.1 que les fibrations triviales sont des équivalences faibles absolues.

Proposition 1.3.56. — *On a les égalités* $\mathsf{An} = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}^a$ *et* $\mathsf{Fib} \cap \mathsf{W} = \mathsf{FibN} \cap \mathsf{W}^a$.

Démonstration. — L'inclusion $\mathsf{An} \subset \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}^a$ est évidente. Réciproquement, soit $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}^a$. Alors $f : (X, f) \longrightarrow (Y, 1_Y)$ est une cofibration triviale de but fibrant de $\widehat{A}/Y$, donc en vertu du corollaire 1.3.35, une extension anodine de $\widehat{A}/Y$. On en déduit que $f : X \longrightarrow Y$ est une extension anodine de $\widehat{A}$.

De même, l'inclusion $\mathsf{Fib} \cap \mathsf{W} \subset \mathsf{FibN} \cap \mathsf{W}^a$ est évidente. Réciproquement, soit $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathsf{FibN} \cap \mathsf{W}^a$. Il résulte de 1.3.54.1 que $f : (X, f) \longrightarrow (Y, 1_Y)$ est une fibration naïve de but fibrant de $\widehat{A}/Y$, qui est une Y-équivalence faible. Le lemme 1.3.34 implique alors que c'est une fibration triviale de $\widehat{A}/Y$. On en déduit par 1.3.54.1 que $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration triviale de $\widehat{A}$. □

Proposition 1.3.57. — *La classe des équivalences faibles absolues* W^a *de* $\widehat{A}$ *est la plus petite classe* C *de flèches de* $\widehat{A}$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

(a) C *est stable par composition ;*

(b) *si* $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ *est un couple de morphismes composables de* $\widehat{A}$, *et si* f *et* gf *sont dans* C, *il en est de même de* g *;*

(c) $\mathsf{An} \subset \mathsf{C}$.

De plus, la classe W^a *est formée exactement des flèches de* $\widehat{A}$ *qui se décomposent en une extension anodine, suivie d'une fibration triviale.*

Démonstration. — Montrons d'abord que la classe des équivalences faibles absolues satisfait aux conditions (a), (b), (c). Soit $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ un couple de morphismes composables de $\widehat{A}$, et supposons que f soit une équivalence faible absolue. Pour tout préfaisceau T sur A et tout morphisme de préfaisceaux $h : Z \longrightarrow T$, la flèche $f : (X, hgf) \longrightarrow (Y, hg)$ de $\widehat{A}/T$ est une T-équivalence faible. On en déduit que la flèche $g : (Y, hg) \longrightarrow (Z, h)$ de $\widehat{A}/T$ est une T-équivalence faible si et seulement si la flèche composée $gf : (X, hgf) \longrightarrow (Z, h)$ l'est. Il s'ensuit que g est une équivalence faible absolue si et seulement si gf l'est, ce qui prouve les conditions (a) et (b). La condition (c) est évidente.

Montrons ensuite qu'une flèche de $\widehat{A}$ est une équivalence faible absolue si et seulement si elle se décompose en une extension anodine, suivie d'une fibration triviale. Soit donc f une équivalence faible absolue. Le morphisme f se décompose en une extension anodine i, suivie d'une fibration naïve p. En vertu de la condition (b), p est une équivalence faible absolue, et il résulte donc de l'égalité $\mathsf{Fib} \cap \mathsf{W} = \mathsf{FibN} \cap \mathsf{W}^a$ de la proposition 1.3.56 que p est une fibration triviale. La réciproque résulte de la condition (a), et des inclusions $\mathsf{An} \subset \mathsf{W}^a$ et $\mathsf{Fib} \cap \mathsf{W} \subset \mathsf{W}^a$.

Soit maintenant C une classe de flèches de $\widehat{A}$ satisfaisant aux conditions (a), (b), (c), et montrons que $\mathsf{W}^a \subset \mathsf{C}$. En vertu de ce qui précède et des conditions (a) et (c), il suffit de montrer que C contient les fibrations triviales. Or, il résulte de la proposition 1.3.26 que toute fibration triviale $p : X \longrightarrow Y$ admet une section $s : Y \longrightarrow X$, qui est un rétracte par déformation fort. Le lemme 1.3.38 implique alors que s est une extension anodine. Comme 1_Y est aussi une extension anodine, il résulte des conditions (b) et (c) que p est dans C, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 1.3.58. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ un couple de morphismes composables de $\widehat{A}$. Si f et gf sont des extensions anodines et g une cofibration, alors g est une extension anodine.*

Démonstration. — Supposont que f et gf soient des extensions anodines et g une cofibration. Les morphismes f et gf sont alors des équivalences faibles absolues, et il résulte de la condition (b) de la proposition précédente qu'il en est de même de g. Le corollaire résulte alors de l'égalité $\mathsf{An} = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}^a$ de la proposition 1.3.56. □

Corollaire 1.3.59. — *Soient $(\mathfrak{I}, S)$ une donnée homotopique sur A engendrant la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$, et $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$. Alors la classe An des extensions anodines est la plus petite classe C de flèches de $\widehat{A}$ vérifiant les conditions de stabilité suivantes.*

(a) *La classe C est stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes.*

(b) *Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux monomorphismes composables de $\widehat{A}$, et si f et gf sont dans C, alors g est dans C.*

(c) *Pour tout préfaisceau X sur A, source ou but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$, les inclusions $\partial^\varepsilon_X : X \longrightarrow I \otimes X$, $\varepsilon = 0, 1$, sont dans C, et $S \subset \mathsf{C}$.*

Démonstration. — Si C est une classe de flèches de $\widehat{A}$ satisfaisant aux conditions (a), (b), et (c) ci-dessus, la proposition 1.1.16, appliquée aux foncteurs $F = 1_{\widehat{A}}$, $G = I$, aux morphismes de foncteurs ∂^ε, $\varepsilon = 0$, 1, et à la classe $\mathsf{C} \cap \mathsf{Cof}$, implique en vertu du lemme 1.2.30, que pour *tout* préfaisceau X sur A les inclusions $\partial^\varepsilon_X : X \longrightarrow I \otimes X$, $\varepsilon = 0, 1$, sont dans C. Le corollaire résulte donc du lemme 1.3.16, de la proposition 1.3.13, et du corollaire précédent. □

Proposition 1.3.60. — *La classe W^a des équivalences faibles absolues est saturée par monomorphismes (cf. 1.1.14).*

Démonstration. — La proposition résulte de [**74**, corollaire 5.1.6 et lemme 5.2.6] appliqués aux catégories de modèles fermées $(\widehat{A}/X, \mathsf{W}_X, \mathsf{Fib}_X, \mathsf{Cof}_X)$, pour X préfaisceau arbitraire sur A. □

La proposition suivante complète la proposition 1.3.47.

Proposition 1.3.61. — *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Toute cofibration triviale de $\widehat{A}$ est une extension anodine (*i.e. *la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ est complète).*

(b) *Pour tout préfaisceau X sur A, les X-équivalences faibles sont les flèches de $\widehat{A}/X$ dont l'image par le foncteur d'oubli vers $\widehat{A}$ est une équivalence faible.*

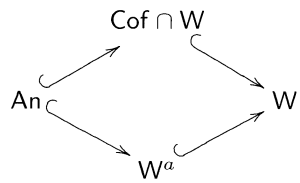
(c) *Toute équivalence faible est une équivalence faible absolue.*

Démonstration. — L'équivalence des conditions (b) et (c) est tautologique, et l'implication $(c) \Rightarrow (a)$ résulte aussitôt de la proposition 1.3.56. Comme la classe W des équivalences faibles est formée des flèches qui se décomposent en une cofibration triviale suivie d'une fibration tiviale, l'implication $(a) \Rightarrow (c)$ résulte de la proposition 1.3.57. □

Scholie 1.3.62. — Soit C une classe de flèches de $\widehat{A}$. Considérons les trois conditions élémentaires composant la propriété de « deux sur trois » pour C : *Pour tout couple de flèches composables $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ de $\widehat{A}$, on a :*

(a) *si f et g sont dans C, il en est de même pour gf ;*
(b) *si g et gf sont dans C, il en est de même pour f ;*
(c) *si f et gf sont dans C, il en est de même pour g ;*

On a un carré commutatif d'inclusions



et on a vu en 1.3.41 (resp. 1.3.57, resp. 1.3.45) que la classe $\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$ (resp. W^a, resp. W) est la plus petite classe de flèches de $\widehat{A}$ contenant An et satisfaisant à la propriété (b) (resp. aux propriétés (a) et (c), resp. aux propriétés (a), (b), et (c)). Les considérations du scholie 1.3.45 impliquent aussi que la classe W est la plus petite classe de flèches de $\widehat{A}$ satisfaisant à la condition (b) (resp. aux conditions (a) et (c)), et contenant la classe W^a (resp. la classe $\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$). De plus, on peut remarquer que dans tout ce qui précède la condition (c) peut être remplacée par la condition (plus faible) :

(c′) *si f est dans C, et si $Z = X$ et $gf = 1_X$, alors g est aussi dans C ;*

ou par la condition de nature différente :

(d) *toute fibration triviale est dans C.*

Ceci nous amène à la section suivante, et à la notion de A-localisateur.

1.4. A-localisateurs

Dans cette section, on va mettre en lumière le lien entre les notions de donnée homotopique et de A-localisateur.

Définition 1.4.1. — Soit A une petite catégorie. Un *A-localisateur* est une classe de flèches W de $\widehat{A}$ satisfaisant aux axiomes suivants.

L1 Si dans un triangle commutatif de $\widehat{A}$, deux des flèches sont dans W, la troisième est dans W.

L2 Toute fibration triviale est dans W.

L3 La classe des monomorphismes de $\widehat{A}$ qui sont dans W est stable par images directes et par compositions transfinies.

On appellera W-*équivalences* les éléments de W. Si S est une classe de flèches de $\widehat{A}$, le *A-localisateur engendré par S*, noté $\mathsf{W}(S)$, est l'intersection de tous les A-localisateurs contenant S. Un A-localisateur est *accessible* s'il est engendré par un *ensemble* de flèches de $\widehat{A}$. Le *A-localisateur minimal* est le A-localisateur $\mathsf{W}(\varnothing)$.

Proposition 1.4.2. — *Soient A une petite catégorie, $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ une structure homotopique sur A, et W la classe des équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A}$ obtenue à partir de $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ par le théorème 1.3.22. Alors W est un A-localisateur accessible. Plus précisément, si Λ est un ensemble générateur de la classe*

*des extensions anodines (*i.e. *un* ensemble *de flèches de* $\widehat{A}$ *tel que* $\mathsf{An} = l(r(\Lambda))$*), alors* $\mathsf{W} = \mathsf{W}(\Lambda)$*. En particulier, si* $(\mathfrak{I}, S)$ *est une donnée homotopique qui engendre la structure homotopique* $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$*, et* $\mathcal{M}$ *un modèle cellulaire de* $\widehat{A}$*, alors* $\mathsf{W} = \mathsf{W}(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}))$*.*

Démonstration. — La classe W des équivalences faibles définies par la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ est un A-localisateur en vertu de la proposition 1.3.27 et du corollaire 1.3.37. Si Λ est un ensemble générateur des extensions anodines, les inclusions $\Lambda \subset \mathsf{An} \subset \mathsf{W}$, et la minimalité de $\mathsf{W}(\Lambda)$ parmi les A-localisateurs contenant Λ, impliquent l'inclusion $\mathsf{W}(\Lambda) \subset \mathsf{W}$.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un élément de W. Par une double application de la proposition 1.3.29, on construit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xrightarrow[j]{} & Y' \end{array} \quad ,$$

où f' est une fibration naïve de but fibrant, et i, j sont des composés transfinis d'images directes d'éléments de Λ. Alors en vertu de la propriété L3 des localisateurs, les morphismes i et j sont des éléments de $\mathsf{W}(\Lambda)$. D'autre part, il résulte du lemme 1.3.34 que f' est une fibration triviale. Par la condition L2, f' est un élément de $\mathsf{W}(\Lambda)$, et par L1 il en est de même de f, ce qui prouve l'inclusion $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}(\Lambda)$. On en déduit, en particulier, que le A-localisateur W est accessible. La dernière assertion résulte de la proposition 1.3.13 □

Théorème 1.4.3. — *Soient* A *une petite catégorie, et* W *une partie de* $\mathrm{Fl}\,\widehat{A}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *La classe* W *est un* A*-localisateur accessible.*

(b) *Il existe un* ensemble S *de monomorphismes de* $\widehat{A}$ *tel que* W *soit la classe des équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée engendrée par la donnée homotopique* $(\mathfrak{L}, S)$*, où* $\mathfrak{L}$ *désigne le cylindre de Lawvere (cf. exemple 1.3.9 et théorème 1.3.22).*

(c) *Il existe une structure homotopique sur* A*, telle que* W *soit la classe des équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée définie par cette structure (cf. théorème 1.3.22).*

(d) *Il existe une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant sur* $\widehat{A}$*, dont les équivalences faibles sont les éléments de* W*, et dont les cofibrations sont les monomorphismes de* $\widehat{A}$*.*

En particulier, pour toute petite catégorie A*,* $\widehat{A}$ *admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de* $\mathsf{W}(\varnothing)$*, appelée la* structure de catégorie de modèles minimale*. Cette structure est engendrée par la donnée homotopique* $(\mathfrak{L}, \varnothing)$*.*

Démonstration. — Supposons que W soit un A-localisateur accessible, et considérons un *ensemble* T de flèches de $\widehat{A}$ tel que $\mathsf{W} = \mathsf{W}(T)$. On factorise chaque élément f de T en $f = p_f i_f$, où i_f est un monomorphisme, et où p_f est une fibration triviale (par le corollaire 1.2.28), et on pose $S = \{i_f \mid f \in T\}$. Il est clair que $\mathsf{W} = \mathsf{W}(S)$. La donnée homotopique $(\mathfrak{L}, S)$, où $\mathfrak{L} = (L, \lambda^0, \lambda^1, pr_2)$ est le cylindre de Lawvere (voir l'exemple 1.3.9), engendre une structure homotopique $(\mathfrak{L}, \mathsf{An})$. En choisissant un modèle cellulaire $\mathcal{M}$, on définit un ensemble d'extensions anodines $\Lambda_{\mathfrak{L}}(S, \mathcal{M})$, et il résulte de la proposition 1.4.2 que la classe des équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée engendrée par la donnée homotopique $(\mathfrak{L}, S)$ est égale à $\mathsf{W}(\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M}))$. Vu que l'objet de Lawvere L est un objet injectif de $\widehat{A}$, et que W contient toutes les fibrations triviales, ce dernier contient en particulier les projections du type $L \times X \longrightarrow X$, et donc aussi les morphismes $\lambda^{\varepsilon}_X : X \longrightarrow L \times X$, $\varepsilon = 0, 1$. Par suite, il résulte du lemme 1.3.16 que W contient $\Lambda_{\mathfrak{L}}(S, \mathcal{M})$, et donc qu'il contient $\mathsf{W}(\Lambda_{\mathfrak{L}}(S, \mathcal{M}))$. Comme il est clair que S est contenu dans $\mathsf{W}(\Lambda_{\mathfrak{L}}(S, \mathcal{M}))$, on en déduit que $\mathsf{W} = \mathsf{W}(\Lambda_{\mathfrak{L}}(S, \mathcal{M}))$, ce qui prouve l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. L'implication $(b) \Rightarrow (c)$ est immédiate, et l'implication $(c) \Rightarrow (d)$ est conséquence du théorème 1.3.22. Si l'assertion (d) est vérifiée, et si $\mathfrak{L}$ désigne le cylindre de Lawvere, on vérifie aussitôt qu'on a une structure homotopique complète $(\mathfrak{L}, \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W})$ dont la classe d'équivalences faibles correspondante n'est autre que W (cela résulte par exemple du scholie 1.3.45). La proposition 1.4.2 montre alors que $(d) \Rightarrow (a)$. □

Remarque 1.4.4. — Le théorème ci-dessus se reformule en disant que W est accessible si et seulement s'il existe un *ensemble* J de morphismes de préfaisceaux sur A tel que $l(r(J)) = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$, et que si c'est le cas, l'ensemble J engendre W en tant que A-localisateur.

1.4.5. — Lorsque W est un A-localisateur accessible, on appellera parfois W-*cofibrations triviales* les éléments de $\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$ (*i.e.* les monomorphismes qui sont des W-équivalences), et W-*fibrations*, ou *fibrations au sens de* W, les éléments de $r(\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W})$ (*i.e.* les flèches ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux W-cofibrations triviales).

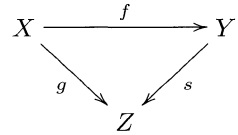
Scholie 1.4.6. — Le théorème 1.4.3 peut être comparé au théorème de J. Smith [**6**, theorem 1.7] qui permet de construire des structures de catégorie de modèles fermée sur une catégorie localement présentable $\mathcal{M}$ (ce qui est trivialement le cas des catégories de préfaisceaux) dès que la classe des équivalences faibles est accessible en tant que sous-classe de la classe des flèches de $\mathcal{M}$ (dans le sens défini par exemple dans [**1**]). L'intérêt du théorème 1.4.3 est qu'il démontre en particulier qu'un A-localisateur W est accessible dans le sens de la définition 1.4.1 si et seulement si W est une sous-classe accessible de la classe des flèches $\widehat{A}$, ce qui n'est pas évident *a priori*.

En admettant un axiome de grands cardinaux appelé principe de Vopěnka, on peut démontrer que *tout* A-localisateur est accessible (voir [**27**]).

Corollaire 1.4.7. — *Pour toute petite catégorie A, tout A-localisateur est fortement saturé (1.3.19).*

Démonstration. — Lorsque le A-localisateur est accessible, cela résulte du théorème précédent et de [**109**, chap. I, sec. 5, prop. 1] (ou plus simplement de la remarque 1.3.24). Dans le cas général, comme tout A-localisateur W est réunion filtrante des A-localisateurs accessibles W' contenus dans W, la catégorie $\mathsf{W}^{-1}\widehat{A}$ est limite inductive filtrante des catégories $\mathsf{W}'^{-1}\widehat{A}$, où W' parcourt la classe des A-localisateurs accessibles contenus dans W. Si une flèche u de $\widehat{A}$ induit un isomorphisme dans $\mathsf{W}^{-1}\widehat{A}$, il existe donc un A-localisateur accessible W' contenu dans W, tel que u induise un isomorphisme dans $\mathsf{W}'^{-1}\widehat{A}$, ce qui montre le corollaire. □

Corollaire 1.4.8. — *Soient A une petite catégorie, W un A-localisateur. Pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathsf{W}^{-1}\widehat{A}$, il existe deux morphismes $g : X \longrightarrow Z$ et $s : Y \longrightarrow Z$ de $\widehat{A}$, le morphisme s étant une W-équivalence, tels que le diagramme suivant commute dans $\mathsf{W}^{-1}\widehat{A}$.*



Démonstration. — Comme $\mathsf{W}^{-1}\widehat{A}$ est limite inductive filtrante des catégories $\mathsf{W}'^{-1}\widehat{A}$, où W' parcourt la classe des A-localisateurs accessibles contenus dans W (voir preuve du corollaire précédent), il existe un A-localisateur accessible $\mathsf{W}' \subset \mathsf{W}$, tel que la flèche f soit l'image d'une flèche de $\mathsf{W}'^{-1}\widehat{A}$ par le foncteur canonique. Or, $\widehat{A}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont tous les objets sont cofibrants, et dont les équivalences faibles sont les W'-équivalences (théorème 1.4.3), ce qui entraîne l'existence d'une W'-équivalence $s : Y \longrightarrow Z$ de but W'-fibrant. Mais alors les morphismes de X vers Z dans $\mathsf{W}'^{-1}\widehat{A}$ sont des classes d'homotopie de morphismes de $\widehat{A}$, ce qui implique l'assertion. □

Corollaire 1.4.9. — *Soient A et B deux petites catégories, W un A-localisateur accessible, et $F : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ un foncteur commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes. Alors le B-localisateur W' engendré par $F(\mathsf{W})$ est accessible.*

Démonstration. — On note Cof indifféremment la classe des monomorphisme de $\widehat{A}$ ou $\widehat{B}$. En vertu du corollaire précédent, il existe un *ensemble* J de monomorphismes de $\widehat{A}$ tel que $l(r(J)) = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}$. On va montrer que $\mathsf{W}' = \mathsf{W}(FJ)$, ce qui prouvera le corollaire. On a des inclusions évidentes $\mathsf{W}(FJ) \subset \mathsf{W}'$, et $FJ \subset \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}(FJ)$ (car F respecte les monomorphismes). Comme F commute aux petites limites inductives, on en déduit que $F(\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}) = F(l(r(J))) \subset \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}(FJ)$, et le scholie 1.3.62 implique alors que $F(\mathsf{W}) \subset \mathsf{W}(FJ)$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 1.4.10. — *Soient A une petite catégorie, et $(\mathsf{W}_i)_{i\in I}$ une famille de A-localisateurs indexée par un* ensemble *I. On considère I comme une petite catégorie discrète, et on définit*

$$\mathsf{W} = \{s \in \mathrm{Fl}\,(\widehat{A \times I}) \mid \forall i \in I,\ s_i \in \mathsf{W}_i\}\ .$$

Alors W est un $(A \times I)$-localisateur, et si pour tout $i \in I$, W_i est un A-localisateur accessible, W est un $(A \times I)$-localisateur accessible.

Démonstration. — Il est immédiat que W est un $(A \times I)$-localisateur. Si pour tout i, W_i est accessible, soit S_i un *ensemble* de monomorphismes tel que $\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}_i = l(r(S_i))$, où Cof désigne la classe de tous les monomorphismes. En identifiant $\widehat{A \times I}$ à $\widehat{A}^I$, on a :

$$l(r(\coprod_{i\in I} S_i)) = \prod_{i\in I} l(r(S_i)) = \prod_{i\in I} (\mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}_i) = \mathsf{Cof} \cap \mathsf{W}\ ,$$

et il résulte du corollaire 1.4.4 que W est accessible. □

Définition 1.4.11. — Soient A une petite catégorie, W un ensemble de flèches de $\widehat{A}$, et X un préfaisceau sur A. Un W-*cylindre* de X est un cylindre $(IX, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ de X tel que la flèche $\sigma : IX \longrightarrow X$ soit un élément de W.

1.4.12. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'une classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{C}$ est *faiblement saturée* si elle vérifie les axiomes suivants.

FS1 Toute identité de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{W}$.

FS2 Si deux des flèches d'un triangle commutatif de $\mathcal{C}$ sont dans $\mathcal{W}$, alors il en est de même de la troisième.

FS3 Si $i : A \longrightarrow B$ et $r : B \longrightarrow A$ sont deux flèches de $\mathcal{C}$ telles que $ri = 1_A$ et ir est dans $\mathcal{W}$, alors i est dans $\mathcal{W}$.

Par exemple toute classe de flèches fortement saturée (1.3.19) est faiblement saturée. En particulier, en vertu du corollaire 1.4.7, pour toute petite catégorie A, tout A-localisateur est faiblement saturé.

Lemme 1.4.13. — *Soient A une petite catégorie, et W une partie faiblement saturée de $\mathrm{Fl}\,\widehat{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Toute fibration triviale est dans W.*

(b) *Pour tout préfaisceau X sur A, la projection $L \times X \longrightarrow X$, où L désigne l'objet de Lawvere de $\widehat{A}$, est dans W.*

(c) *Tout objet de $\widehat{A}$ admet un W-cylindre.*

Démonstration. — Commençons par l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. On sait que l'objet de Lawvere est un objet injectif de $\widehat{A}$ (voir l'exemple 1.3.9). Comme les fibrations triviales sont stables par changement de base, on en déduit que pour tout préfaisceau X sur A, la projection $L \times X \longrightarrow X$ est une fibration triviale.

Pour montrer l'implication $(b) \Rightarrow (c)$, il suffit de remarquer que si $\mathfrak{L}$ désigne le cylindre de Lawvere (1.3.9), pour tout préfaisceau X sur A, le cylindre de X défini par $\mathfrak{L}$, est en vertu de la condition (c) un W-cylindre.

Il reste donc à montrer l'implication $(c) \Rightarrow (a)$. Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration triviale. En vertu de la condition (c), il existe un W-cylindre $(IX, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ de X, et il résulte du lemme 1.3.5 que p admet une section s, et qu'il existe un morphisme $h : IX \longrightarrow X$ de $\widehat{A}$ tel que $h\partial^0 = 1_X$ et $h\partial^1 = sp$. Comme par hypothèse σ est dans W, il en est de même pour ∂^0 et ∂^1, par faible saturation. On en déduit que h est dans W. Par conséquent, sp est aussi dans W, et comme $ps = 1_Y$, il résulte de la propriété FS3 de la faible saturation, que p est dans W. □

Corollaire 1.4.14. — *Soient A une petite catégorie, et* W *une classe de morphismes de préfaisceaux sur A. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La classe* W *est un A-localisateur.*

(ii) *La classe* W *est faiblement saturée, les flèches qui sont à la fois des monomorphismes et des éléments de* W *sont stables par images directes et par compositions transfinies, et tout préfaisceau sur A admet un* W*-cylindre.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du lemme 1.4.13 et du fait que tout A-localisateur est faiblement saturé (puisque fortement saturé). □

Lemme 1.4.15. — *Soient A une petite catégorie, et* W *un A-localisateur.*

(a) *On considère un diagramme commutatif dans $\widehat{A}$*

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xleftarrow{\alpha_1} & A_0 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ B_1 & \xleftarrow[\beta_1]{} & B_0 & \xrightarrow[\beta_2]{} & B_2 \end{array} ,$$

dans lequel α_1 et β_1 sont des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 sont des W*-équivalences. Alors la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \longrightarrow B_1 \amalg_{B_0} B_2$ est une* W*-équivalence.*

(b) *On se donne un* ensemble *bien ordonné λ, deux foncteurs $X, Y : \lambda \longrightarrow \widehat{A}$, et un morphisme de foncteurs $\varphi : X \longrightarrow Y$. On suppose que les flèches $X_\mu \longrightarrow X_\nu$, $Y_\mu \longrightarrow Y_\nu$, $\mu \leqslant \nu$, $\mu, \nu \in \lambda$, sont des monomorphismes, et que les flèches $\varphi_\mu : X_\mu \longrightarrow Y_\mu$, $\mu \in \lambda$, sont des* W*-équivalences. Alors $\varinjlim \varphi : \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$ est une* W*-équivalence.*

(c) *Les* W*-équivalences sont stables par petites sommes.*

Démonstration. — Lorsque W est accessible, il s'agit d'un résultat général dans les catégories de modèles fermées (voir [**74**, corollaire 5.1.6 et lemme 5.2.6]). Le cas non nécessairement accessible s'en déduit, en considérant les localisateurs accessibles engendrés par les *ensembles* des flèches figurant dans les diagrammes intervenant dans ces énoncés. □

Remarque 1.4.16. — Il résulte du corollaire 1.4.7 et des assertions (a) et (b) du lemme précédent que tout A-localisateur est une classe de flèches saturée par monomorphismes (cf. 1.1.14).

Proposition 1.4.17. — *Soient A et B deux petites catégories, $F, G : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ deux foncteurs qui commutent aux petites limites inductives et qui respectent les monomorphismes. Alors pour tout morphisme de foncteurs α de F vers G, le plus petit B-localisateur W tel que pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme induit $\alpha_X : FX \longrightarrow GX$ soit une W-équivalence, est accessible. Plus précisément, si $\mathcal{M}$ est un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, W est engendré par l'ensemble*

$$S = \{\ \alpha_T \mid X \longrightarrow Y \in \mathcal{M},\ T \in \{X, Y\}\ \}\ .$$

Démonstration. — Il est évident que $\mathsf{W}(S) \subset \mathsf{W}$. Soit D la classe formée des objets X de $\widehat{A}$ tels que α_X soit dans $\mathsf{W}(S)$. Il résulte de la remarque précédente et du lemme 1.1.15 que la classe D est saturée par monomorphismes (cf. définition 1.1.12). Comme elle contient l'ensemble S, le lemme 1.2.30 montre que $\mathsf{D} = \mathrm{Ob}\,\widehat{A}$, ce qui prouve que $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}(S)$. □

Corollaire 1.4.18. — *Soient A une petite catégorie, $(\mathfrak{I}, S)$, $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$, une donnée homotopique sur A, et $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$. Alors la classe W des équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée par $(\mathfrak{I}, S)$ est le plus petit A-localisateur contenant l'ensemble*

$$S' = S \cup \{\ \partial^\varepsilon_T \mid X \longrightarrow Y \in \mathcal{M},\ T \in \{X, Y\},\ \varepsilon \in \{0, 1\}\ \}\ ,$$

ou de façon équivalente, contenant l'ensemble

$$S'' = S \cup \{\ \sigma_T \mid X \longrightarrow Y \in \mathcal{M},\ T \in \{X, Y\}\ \}\ .$$

Démonstration. — En vertu de la proposition 1.4.2, on a $\mathsf{W} = \mathsf{W}(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}))$, et comme $S' \subset \mathsf{W}(\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}))$, on en déduit que $\mathsf{W}(S') \subset \mathsf{W}$. Vu que les foncteurs $1_{\widehat{A}}$ et I satisfont aux hypothèses de la proposition précédente, on en déduit que pour tout préfaisceau X sur A, la flèche $\partial^\varepsilon_X : X \longrightarrow I \otimes X$ est dans $\mathsf{W}(S')$. Si l'on note Cof la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$, et An celle des extensions anodines définies par la donnée homotopique $(\mathfrak{I}, S)$, le corollaire 1.3.59, appliqué à la classe $\mathsf{C} = \mathsf{W}(S') \cap \mathsf{Cof}$, implique alors que $\mathsf{An} \subset \mathsf{W}(S')$, et en particulier que $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M}) \subset \mathsf{W}(S')$, ce qui prouve que $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}(S')$, et achève la démonstration. □

Corollaire 1.4.19. — *Soit A une petite catégorie.*

(a) *Si S est une classe de flèches de $\widehat{A}$, on note $\mathsf{cart}(S)$ la classe des flèches de la forme*

$$1_Z \times s : Z \times X \longrightarrow Z \times Y \quad , \quad s : X \longrightarrow Y \in S\ ,\ Z \in \mathrm{Ob}\,\widehat{A}\ .$$

Alors le plus petit A-localisateur contenant $\mathsf{cart}(S)$ est stable par produits finis. Si en outre S est un ensemble*, il est aussi accessible.*

(b) *Si* W *et* W' *sont deux* A*-localisateurs stables par produits finis, alors le* A*-localisateur engendré par leur réunion est stable par produits finis.*

(c) *Le* A*-localisateur minimal est stable par produits finis.*

Démonstration. — Si Z est un préfaisceau sur A, on note π_Z le foncteur

$$\pi_Z : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad X \longmapsto Z \times X \ .$$

On remarque que le foncteur π_Z commute aux petites limites inductives, et qu'il respecte les monomorphismes, ainsi que les fibrations triviales. Par conséquent, pour tout A-localisateur W, $\pi_Z^{-1}\mathsf{W}$ est un A-localisateur.

Montrons l'assertion (a). Soit S une classe de flèches de $\widehat{A}$. Alors pour tout préfaisceau Z sur A, on a l'inclusion $\pi_Z \mathsf{cart}(S) \subset \mathsf{cart}(S)$, ce qui implique que $\pi_Z^{-1}\mathsf{W}(\mathsf{cart}(S))$ est un A-localisateur contenant $\mathsf{W}(\mathsf{cart}(S))$, et prouve la première partie de (a). Dans le cas où S est un *ensemble*, chaque élément $s : X \longrightarrow Y$ définit un morphisme de foncteurs évident

$$\pi_s : \pi_X \longrightarrow \pi_Y$$

qui vérifie les conditions de la proposition 1.4.17, laquelle montre que le A-localisateur $\mathsf{W}(\mathsf{cart}(S))$ est accessible.

L'assertion (b) résulte de (a), une fois remarqué que si W et W' sont deux A-localisateurs stables par produits finis, le A-localisateur engendré par leur réunion est le plus petit contenant $\mathsf{cart}(\mathsf{W} \cup \mathsf{W}')$.

L'assertion (c) est une spécialisation de (a) dans le cas où $S = \varnothing$. □

Proposition 1.4.20. — *Soient* A *et* B *deux petites catégories,* W *un* B*-localisateur, et* $F : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ *un foncteur commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes.*

(a) *Pour que* $F^{-1}\mathsf{W}$ *soit un* A*-localisateur, il faut et il suffit qu'il existe un cylindre fonctoriel* $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ *sur* A *tel que pour tout préfaisceau* X *sur* A*, le morphisme* $F(\sigma_X) : F(I \otimes X) \longrightarrow F(X)$ *soit une* W*-équivalence.*

(b) *Si le foncteur* F *admet un adjoint à gauche respectant les monomorphismes, alors* $F^{-1}\mathsf{W}$ *est un* A*-localisateur.*

(c) *Si le* B*-localisateur* W *est accessible, et si* $F^{-1}\mathsf{W}$ *est un* A*-localisateur, alors il est accessible.*

Démonstration. — L'assertion (a) résulte du lemme 1.4.13 et du corollaire 1.4.7. La deuxième assertion résulte d'un argument standard d'adjonction qui permet d'affirmer que, sous les hypothèses de (b), le foncteur F respecte les fibrations triviales.

Pour montrer l'assertion (c), on remarque d'abord que comme le foncteur F respecte les monomorphismes et les carrés cocartésiens, pour toute paire d'inclusions $J \longrightarrow L$, $K \longrightarrow L$ de $\widehat{A}$, la flèche canonique $F(J \cap K) \longrightarrow F(J) \cap F(K)$ est un isomorphisme. Cela résulte du fait que dans la catégorie des ensembles, donc aussi dans

toute catégorie de préfaisceaux, tout carré cocartésien formé de monomorphismes, est aussi cartésien.

Supposons donc que le B-localisateur W soit accessible, et que $F^{-1}\mathsf{W}$ soit un A-localisateur. En vertu des propositions 1.2.15, 1.2.17 et 1.3.40, et du théorème 1.4.3, il existe un cardinal infini β tel que :

(i) tout préfaisceau sur A est la réunion β-filtrante de ses sous-objets β-accessibles ;

(ii) le foncteur F envoie tout objet β-accessible de $\widehat{A}$ sur un objet β-accessible de $\widehat{B}$;

(iii) pour toute W-cofibration triviale $i : C \longrightarrow D$ dans $\widehat{B}$, et tout sous-objet β-accessible J de D, il existe un sous-objet β-accessible J' de D, contenant J, et tel que l'inclusion $J' \cap C \longrightarrow J'$ soit une W-cofibration triviale.

Soit $K \longrightarrow L$ un monomorphisme de $\widehat{A}$ appartenant à $F^{-1}\mathsf{W}$, et soit J un sous-objet β-accessible de L. On va construire une suite de sous-objets β-accessibles de L, J_n, $n \geqslant 0$, et une suite de sous-objets β-accessibles de FL, J'_n, $n \geqslant 0$, telles que pour tout $n \geqslant 0$, on ait des inclusions

$$J_n \subset J_{n+1} \ , \qquad FJ_n \subset J'_n \subset FJ_{n+1} \ ,$$

les morphismes $F(K) \cap J'_n \longrightarrow J'_n$ étant des W-équivalences. On pose $J_0 = J$. Pour $n \geqslant 1$, supposons qu'on ait construit J_{n-1}, et construisons J'_{n-1} et J_n. Comme J_{n-1} est β-accessible, il en est de même de FJ_{n-1} (en vertu de (ii)), et par (iii), FJ_{n-1} est contenu dans un sous-objet β-accessible J'_{n-1} de FL, tel que $F(K) \cap J'_{n-1} \longrightarrow J'_{n-1}$ soit une W-cofibration triviale. D'autre part, par (i), L est la réunion β-filtrante de ses sous-objets β-accessibles, et donc comme J'_{n-1} est β-accessible, vu que le foncteur F commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes, J'_{n-1} est contenu dans un sous-objet β-accessible de FL, de la forme FJ''_n, où J''_n est un sous-objet β-accessible de L. La propriété (i) implique alors qu'il existe un sous-objet β-accessible J_n de L, contenant J_{n-1} et J''_n.

Une fois cette construction faite, on pose $J' = \varinjlim_n J_n$. On a $J \subset J'$, et J' est un sous-objet β-accessible de L. D'autre part, on a des isomorphismes

$$FJ' \simeq \varinjlim_n FJ_n \simeq \varinjlim_n J'_n \ ,$$

et

$$F(J' \cap K) \simeq F \varinjlim_n (J_n \cap K) \simeq \varinjlim_n F(J_n \cap K) \simeq \varinjlim_n (F(J_n) \cap F(K)) \simeq \varinjlim_n (J'_n \cap F(K)) \ ,$$

et par le lemme 1.4.15, on a une équivalence faible dans $\widehat{B}$,

$$\varinjlim_n (J'_n \cap F(K)) \longrightarrow \varinjlim_n J'_n \ .$$

On en déduit que $J' \cap K \longrightarrow J'$ est une $F^{-1}\mathsf{W}$-équivalence.

Étant donné que la catégorie $Acc_\beta(A)$ est essentiellement petite (1.2.15), le lemme 1.2.24, appliqué à la classe $\mathsf{C} = \mathsf{Cof} \cap F^{-1}\mathsf{W}$ des monomorphismes de $\widehat{A}$

appartenant à $F^{-1}\mathsf{W}$, et à la classe D des objets β-accessibles de $\widehat{A}$, montre à présent qu'il existe un *ensemble* I tel que $l(r(I)) = \mathsf{Cof} \cap F^{-1}\mathsf{W}$, et on conclut grâce à la remarque 1.4.4. □

Corollaire 1.4.21. — *Soit A une petite catégorie. Toute intersection d'un* ensemble *de A-localisateurs accessibles est un A-localisateur accessible.*

Démonstration. — Soit $(\mathsf{W}_i)_{i\in I}$ une famille de A-localisateurs accessibles, indexée par un *ensemble* I. On considère I comme une petite catégorie discrète, et on note W la classe des flèches s de $\widehat{A \times I}$, telles que pour tout $i \in I$, s_i soit dans W_i. En vertu du corollaire 1.4.10, W est un $(A\times I)$-localisateur accessible, et il résulte des assertions (b) et (c) de la proposition 1.4.20 appliquée au foncteur diagonal $\delta : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}^I \simeq \widehat{A \times I}$, que $\bigcap\limits_{i\in I} \mathsf{W}_i = \delta^{-1}\mathsf{W}$ est un A-localisateur accessible. □

Corollaire 1.4.22. — *Soient A et I deux petites catégories, et W un A-localisateur accessible. Alors $\mathcal{H}om(I, \widehat{A})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de la classe W^I formée des morphismes $X \longrightarrow Y$ tels que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $X_i \longrightarrow Y_i$ soit une W-équivalence. En outre, si p est une fibration pour cette structure, alors pour tout objet i de I, le morphisme p_i est une fibration de $\widehat{A}$ au sens de W.*

Démonstration. — Comme la catégorie $\mathcal{H}om(I, \widehat{A})$ s'identifie à la catégorie des préfaisceaux sur $A \times I^{op}$, pour montrer la première assertion, il suffit en vertu du théorème 1.4.3, de montrer que la classe W^I est un $(A \times I^{op})$-localisateur accessible. Notons I_0 l'ensemble des objets de I, ainsi que la catégorie discrète correspondante, et $u : I_0 \longrightarrow I$ le foncteur d'inclusion. Il résulte du corollaire 1.4.10 que la classe de flèches W^{I_0} de $\widehat{A}^{I_0} \simeq \widehat{A \times I_0}$ est un $(A \times I_0)$-localisateur accessible, et si on note

$$u^* : \widehat{A \times I^{op}} \simeq \mathcal{H}om(I, \widehat{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(I_0, \widehat{A}) \simeq \widehat{A}^{I_0}$$

le foncteur image réciproque par u, on a $\mathsf{W}^I = (u^*)^{-1}(\mathsf{W}^{I_0})$. Or, le foncteur u^* commute aux petites limites inductives et projectives, et admet un adjoint à gauche $u_!$ tel que pour toute famille de préfaisceaux $X = (X_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, I}$ sur A, et tout objet j de I, on ait

$$(u_! X)_j = \coprod_{i\in \mathrm{Ob}\, I} \coprod_{\mathrm{Hom}_I(i,j)} X_i \ .$$

En particulier, le foncteur $u_!$ respecte les monomorphismes, et il résulte des assertions (b) et (c) de la proposition 1.4.20 que W^I est un $(A \times I^{op})$-localisateur accessible. D'autre part, en vertu de l'assertion (c) du lemme 1.4.15, le foncteur $u_!$ transforme W^{I_0}-équivalences en W^I-équivalences, et comme il respecte les monomorphismes, un argument standard d'adjonction montre que le foncteur u^* transforme W^I-fibrations en W^{I_0}-fibrations. En remarquant que la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}^{I_0}$

définie par le $(A \times I_0)$-localisateur W^{I_0} est la structure produit, cela prouve la deuxième assertion. □

***Proposition 1.4.23* (Crans [39]).** — *Soient $(\mathcal{M}, \mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ une catégorie de modèles fermée engendrée par un couple (I, J), et $G : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ un foncteur admettant un adjoint à droite $D : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$. On suppose les conditions suivantes vérifiées.*

(i) *La catégorie $\mathcal{M}'$ admet des petites limites projectives et inductives.*
(ii) *Les ensembles GI et GJ permettent l'argument du petit objet.*
(iii) $D(l(r(GJ))) \subset \mathsf{W}$.

On pose $\mathsf{W}' = D^{-1}\mathsf{W}$, $\mathsf{Fib}' = D^{-1}\mathsf{Fib}$, et $\mathsf{Cof}' = l(\mathsf{Fib}' \cap \mathsf{W}')$. Alors le quadruplet $(\mathcal{M}', \mathsf{W}', \mathsf{Fib}', \mathsf{Cof}')$ est une catégorie de modèles fermée engendrée par le couple (GI, GJ).

Démonstration. — La vérification des axiomes CM1, CM2 et CM3 est immédiate. On remarque qu'on a les identifications suivantes

$$\mathsf{Fib}' = D^{-1}\mathsf{Fib} = D^{-1}r(J) = r(GJ) \ ,$$

$$\mathsf{Fib}' \cap \mathsf{W}' = D^{-1}(\mathsf{Fib} \cap \mathsf{W}) = D^{-1}r(I) = r(GI) \ ,$$

d'où $\mathsf{Cof}' = l(r(GI))$. La condition (iii) implique que $l(r(GJ)) \subset \mathsf{Cof}' \cap \mathsf{W}'$. On va montrer l'autre inclusion. Soit $i : X \longrightarrow Y \in \mathsf{Cof}' \cap \mathsf{W}'$. On factorise i en $i = qj$, où $j : X \longrightarrow Z \in l(r(GJ))$ et où $q : Z \longrightarrow Y \in r(GJ)$ (ce qui est possible car en vertu de (ii), l'ensemble GJ permet l'argument du petit objet). Mais alors comme i et j sont dans W', il en est de même de q, et donc $q \in r(GI)$. Le lemme du rétracte implique alors que i est un rétracte de j, et donc que $i \in l(r(GJ))$. On a ainsi montré CM4. L'axiome CM5 résulte du fait que les ensembles GI et GJ permettent l'argument du petit objet. □

***Corollaire 1.4.24*.** — *Soient A et I deux petites catégories, et W un A-localisateur accessible. Alors $\mathcal{H}om(I, \widehat{A})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les morphismes $X \longrightarrow Y$ tels que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $X_i \longrightarrow Y_i$ soit une W-équivalence (resp. une fibration au sens de W).*

Démonstration. — Lorsque I est une catégorie discrète, $\widehat{A \times I} = \prod_I \widehat{A}$, et on obtient ainsi la structure produit. Dans le cas général, on considère l'ensemble $\mathrm{Ob}\, I$ comme une catégorie discrète, et on note $u : \mathrm{Ob}\, I \longrightarrow I$ le foncteur d'inclusion canonique. Il induit un foncteur image inverse

$$u^* : \mathcal{H}om(I, \widehat{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathrm{Ob}\, I, \widehat{A}) = \prod_{\mathrm{Ob}\, I} \widehat{A} \ ,$$

lequel admet un adjoint à gauche

$$u_! : \prod_{\mathrm{Ob}\, I} \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{H}om(I, \widehat{A}) \ .$$

Comme le foncteur u^* envoie les fibrations au sens de la structure du corollaire 1.4.22 sur des fibrations de $\prod_{\mathrm{Ob}\, I} \widehat{A}$, pour toute cofibration triviale j de $\prod_{\mathrm{Ob}\, I} \widehat{A}$, $u_!j$ est une cofibration triviale au sens de la structure du corollaire 1.4.22. On en déduit aussitôt que le couple de foncteurs adjoints $(u_!, u^*)$ vérifie les conditions de la proposition 1.4.23, et qu'on obtient de la sorte la structure de catégorie de modèles fermée escomptée. □

Remarque 1.4.25. — En vertu des corollaires 1.4.22 et 1.4.24, pour tout couple de petites catégories A et I, et tout A-localisateur accessible W, il existe deux structures de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant sur $\mathcal{H}om(I, \widehat{A})$, ayant les mêmes équivalences faibles, à savoir les W-équivalences argument par argument. Pour la première, les cofibrations sont exactement les monomorphismes, et les fibrations sont des W-fibrations argument par argument. Pour la seconde, les fibrations sont exactement les W-fibrations argument par argument, et les cofibrations sont des monomorphismes. On remarque que pour chacune de ces structures les fibrations triviales et les cofibrations sont indépendantes du A-localisateur W. Ces deux structures coïncident quand la catégorie I est discrète, auquel cas on obtient la structure de catégorie de modèles fermée produit.

1.4.26. — Si α désigne un cardinal, on parlera dans la suite de *limites inductives α-filtrantes* pour les limites inductives indexées par des ensembles ordonnés α-filtrants.

Lemme 1.4.27. — *Soit A une petite catégorie. On considère un modèle cellulaire $\mathcal{M}$ de $\widehat{A}$ et un cardinal α tels que tout préfaisceau sur A, source ou but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$, soit α-accessible. Alors les fibrations triviales de $\widehat{A}$ sont stables par les limites inductives α-filtrantes.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{M}$ est un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, la classe des fibrations triviales de $\widehat{A}$ s'identifie à celle des flèches qui vérifient la propriété de relèvement à droite relativement aux éléments de $\mathcal{M}$. Soit I un ensemble ordonné α-filtrant, et soit

$$i \longmapsto p_i : X_i \longrightarrow Y_i$$

un foncteur de I à valeurs dans la catégorie des flèches de $\widehat{A}$, tel que pour tout $i \in I$, p_i soit une fibration triviale. Si $K \rightarrowtail L$ est un élément de $\mathcal{M}$, alors on a le diagramme commutatif ci-dessous, dont les flèches verticales sont des bijections.

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(L, X_i) & \longrightarrow & \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K, X_i) \times_{\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K, Y_i)} \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(L, Y_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(L, \varinjlim_i X_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K, \varinjlim_i X_i) \times_{\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K, \varinjlim_i Y_i)} \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(L, \varinjlim_i Y_i)
\end{array}$$

Les surjections étant stables par limites inductives, et les limites inductives filtrantes étant exactes à gauche, la flèche horizontale du haut est surjective. Il en est donc nécessairement de même de celle du bas, ce qui prouve l'assertion. □

Proposition 1.4.28. — *Soit A une petite catégorie. Il existe un cardinal α tel que tous les A-localisateurs soient stables par limites inductives α-filtrantes (ce qui implique une propriété analogue pour les cardinaux $\beta \geqslant \alpha$).*

Démonstration. — Les diagrammes incriminés étant toujours petits, on s'aperçoit aussitôt qu'il suffit de montrer l'assertion pour les A-localisateurs accessibles. Nous allons vérifier dans un premier temps qu'il suffit de prouver l'assertion pour le A-localisateur minimal. Considérons un A-localisateur accessible W, ainsi qu'une petite catégorie I. La structure de catégorie de modèles fermée du corollaire 1.4.24 implique l'existence d'un foncteur

$$Q_I : \mathcal{H}om(I, \widehat{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(I, \widehat{A}) \ ,$$

et d'un morphisme de foncteurs $Q_I \longrightarrow 1_{\mathcal{H}om(I,\widehat{A})}$ tels que pour tout foncteur X de I vers $\widehat{A}$, $Q_I X$ soit cofibrant au sens de cette structure, et $Q_I X \longrightarrow X$ soit une équivalence faible (en fait une fibration triviale). Comme le foncteur limite inductive

$$\varinjlim_I : \mathcal{H}om(I, \widehat{A}) \longrightarrow \widehat{A}$$

admet un adjoint à droite qui respecte les fibrations et les fibrations triviales, il respecte les cofibrations et les cofibrations triviales. En vertu du lemme de Ken Brown [**74**, lemme 1.1.12], le foncteur $\varinjlim_I Q_I$ respecte donc les équivalences faibles. Une vérification immédiate montre que demander que W soit stable par les limites inductives de type I équivaut à demander que pour tout foncteur X de I dans $\widehat{A}$, la flèche $\varinjlim_I Q_I X \longrightarrow \varinjlim_I X$ soit une W-équivalence. Comme la notion de cofibration est la même quels que soient les A-localisateurs considérés, si cette dernière condition est vérifiée par W, elle le sera encore pour tout A-localisateur contenant W.

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer l'assertion dans le cas du A-localisateur minimal. Il suffit donc de la prouver pour un A-localisateur accessible *fixe* W. On considère un foncteur $L : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$, et une W-équivalence naturelle de foncteurs $1_{\widehat{A}} \longrightarrow L$, tels que L soit accessible, et envoie tout préfaisceau X sur A sur un objet W-fibrant (en vertu de la proposition 1.2.35, de tels objets peuvent être construits grâce à l'argument du petit objet appliqué à un ensemble de générateurs des cofibrations triviales). Soit $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$. On se donne enfin un cardinal α tel que le foncteur L, ainsi que les sources et les but des éléments de $\mathcal{M}$, soient α-accessibles. Soit I un ensemble ordonné α-filtrant. Le lemme 1.4.27 montre que le foncteur $\varinjlim_I$ envoie les fibrations triviales terme à terme sur des fibrations triviales. Le lemme de Ken Brown appliqué à la structure de catégorie de modèles fermée du corollaire 1.4.24 montre que $\varinjlim_I$ envoie les W-équivalences terme à terme entre diagrammes W-fibrants terme à

terme sur des W-équivalences. Or si $X \longrightarrow Y$ est une W-équivalence terme à terme de $\mathcal{H}om(I, \widehat{A})$, on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim_I X & \longrightarrow & \varinjlim_I LX & \xrightarrow{\sim} & L\varinjlim_I X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim_I Y & \longrightarrow & \varinjlim_I LY & \xrightarrow{\sim} & L\varinjlim_I Y \end{array}$$

L'α-accessibilité de L implique que les flèches horizontales du carré de droite sont des isomorphismes. On en déduit aussitôt par l'axiome L1 que les flèches horizontales du carré de gauche sont des W-équivalences. La flèche verticale du milieu étant une W-équivalence, une nouvelle utilisation de l'axiome L1 achève la démonstration de la proposition. □

1.5. Propreté

Définition 1.5.1. — Soit C une catégorie de modèles fermée. Une flèche $X \longrightarrow Y$ de C est une *équivalence faible propre à droite* si pour toute fibration $Z \longrightarrow Y$, le morphisme image réciproque $X \times_Y Z \longrightarrow Z$ est une équivalence faible.

On dit qu'une catégorie de modèles fermée est *propre à droite* si toutes ses équivalences faibles sont propres à droite.

Dualement, on dit qu'une catégorie de modèles fermée C est *propre à gauche* si C^{op} est propre à droite. Une catégorie de modèles fermée est *propre* si elle est à la fois propre à gauche et propre à droite.

Remarque 1.5.2. — Toute équivalence faible propre à droite est une équivalence faible, car toute identité est une fibration.

Il résulte du lemme 1.4.15 que pour toute petite catégorie A et tout A-localisateur accessible, la structure de catégorie de modèles fermée obtenue sur $\widehat{A}$ est propre à gauche.

Définition 1.5.3. — Soit A une petite catégorie. Un A-localisateur *propre* est un A-localisateur accessible W, tel que la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A}$, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de W, soit propre à droite.

Le théorème suivant généralise des résultats de [**107, 81**].

Théorème 1.5.4. — *Soient A une petite catégorie, et S une classe de flèches de $\widehat{A}$. On note* W *le A-localisateur engendré par S, et on suppose que celui-ci est accessible. Alors* W *est propre si et seulement si pour tout élément $f : X \longrightarrow Y$ de S, pour toute fibration de but fibrant (au sens de* W*) $p : E \longrightarrow B$, et pour toute flèche $u : Y \longrightarrow B$, le morphisme $g : X \times_B E \longrightarrow Y \times_B E$, image réciproque de f par p, est une* W*-équivalence.*

Remarque 1.5.5. — Une spécialisation immédiate du théorème ci-dessus est le cas $S = \varnothing$. Autrement dit, la structure de catégorie de modèles minimale sur $\widehat{A}$ (voir le théorème 1.4.3) est propre. On verra plus loin que ce n'est pas le cas de tous les A-localisateurs (9.4.6).

La démonstration de l'énoncé ci-dessus occupe la majeure partie de cette section, mais nous commençons par en donner quelques conséquences.

Corollaire 1.5.6. — *Soit A une petite catégorie. On considère un* ensemble I, *et une famille W_i, $i \in I$, de A-localisateurs propres. Alors le A-localisateur engendré par la réunion des W_i est propre.*

Démonstration. — Pour $i \in I$, on choisit un *ensemble* S_i de flèches de $\widehat{A}$ qui engendre W_i. On pose $S = \cup_i S_i$, et alors $\mathsf{W}(S)$ est le A-localisateur engendré par la réunion des W_i, et il est clair qu'il est accessible. Le fait que $\mathsf{W}(S)$ soit propre résulte du théorème ci-dessus et du fait que pour tout i, toute fibration au sens de W en est une au sens de W_i. □

Corollaire 1.5.7. — *Soient A une petite catégorie, et* D *une classe de préfaisceaux sur A. On note* W *le plus petit A-localisateur contenant les projections $X \times Z \longrightarrow Z$ pour tout $X \in \mathsf{D}$, et tout préfaisceau Z. Si* W *est accessible (pour cela, il suffit, en vertu du corollaire 1.4.19, que* D *soit un* ensemble*), alors* W *est propre.*

Démonstration. — Pour tout morphisme de préfaisceaux sur A, $Y \longrightarrow Z$, et tout $X \in \mathsf{D}$, le carré suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times Z & \longrightarrow & Z \end{array} \quad ,$$

ce qui permet de conclure par le théorème 1.5.4. □

Définition 1.5.8. — Soient A une petite catégorie, W un A-localisateur, et $p : E \longrightarrow B$ un morphisme de préfaisceaux sur A. On note $C(p)$ la classe des flèches $f : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$ telles que pour tout $u \in \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(Y, B)$, une fois formés les carrés cartésiens suivants,

$$\begin{array}{ccccc} X \times_B E & \xrightarrow{g} & Y \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y & \xrightarrow[u]{} & B \end{array} \quad ,$$

la flèche g soit une W-équivalence.

Si $\mathcal{F}$ est une classe de flèches de $\widehat{A}$, alors on note $C(\mathcal{F})$ la classe $\cap_{p \in \mathcal{F}} C(p)$.

Sorites 1.5.9. — *On considère A,* W, *et p comme dans la définition ci-dessus, et on rappelle que* Cof *désigne la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$.*

(a) *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux morphismes de préfaisceaux sur A. Si f et g (resp. f et gf) sont des éléments de $C(p)$, alors il en est de même de gf (resp. de g).*

(b) *L'ensemble $C(p) \cap \mathsf{Cof}$ est stable par rétractes, par images directes, et par compositions transfinies. En outre, si on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} A_2 & \xleftarrow{a_2} & A_0 & \xrightarrow{a_1} & A_1 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ B_2 & \xleftarrow[b_2]{} & B_0 & \xrightarrow[b_1]{} & B_1 \end{array} ,$$

tel que a_1 et b_1 soient des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 des éléments de $C(p)$, alors la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \longrightarrow B_1 \amalg_{B_0} B_2$ est un élément de $C(p)$.

(c) *Si $C(p)$ contient $\mathsf{W} \cap \mathsf{Cof}$, alors $C(p)$ contient W.*

Démonstration. — Commençons par montrer le point (a). Supposons que $f \in C(p)$, et soit $Z \longrightarrow B$ un morphisme de préfaisceaux. On forme les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc} X \times_B E & \longrightarrow & Y \times_B E & \longrightarrow & Z \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y & \xrightarrow[g]{} & Z & \longrightarrow & B \end{array} .$$

Alors le morphisme $X \times_B E \longrightarrow Y \times_B E$ est une équivalence faible, et le morphisme $Y \times_B E \longrightarrow Z \times_B E$ est une équivalence faible si et seulement si le morphisme composé $X \times_B E \longrightarrow Y \times_B E \longrightarrow Z \times_B E$ en est une, ce qui prouve que g est dans $C(p)$ si et seulement si gf l'est.

Pour montrer (b), on définit un foncteur $F : \widehat{A}/B \longrightarrow \widehat{A}$ par $(X \longrightarrow B) \longmapsto X \times_B E$. Ce foncteur commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes. On en déduit que $F^{-1}(\mathsf{W})$ est un A/B-localisateur car les fibrations triviales sont stables par images réciproques. Le point (b) résulte de cette constatation, du lemme 1.4.15, et de l'universalté des limites inductives dans $\widehat{A}$, car $C(p)$ peut à présent être vu comme l'ensemble des flèches $X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$ telles que pour toute flèche $Y \longrightarrow B$, le composé $X \longrightarrow Y \longrightarrow B$ soit une $F^{-1}(\mathsf{W})$-équivalence faible.

Pour se persuader du point (c), il suffit de voir que comme les fibrations triviales de $\widehat{A}$ sont stables par images réciproques, $C(p)$ les contient toutes, et ainsi, l'assertion résulte du corollaire 1.2.28 et du point (a). □

Lemme 1.5.10. — *Soient A une petite catégorie, $(\mathfrak{I}, S)$ une donnée homotopique sur A. On considère une fibration naïve $p : X \longrightarrow Y$, et un rétracte par déformation fort $i : Z \longrightarrow Y$. Alors l'inclusion image réciproque $j : Z \times_Y X \longrightarrow X$ est un rétracte par déformation fort.*

Démonstration. — On a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \xrightarrow{j} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow[i]{} & Y \end{array} .$$

Comme i est un rétracte par déformation fort, il existe, par définition, deux flèches $r : Y \longrightarrow Z$ et $h : I \otimes Y \longrightarrow Y$ telles que $ri = 1_Z$, $h\partial^0_Y = 1_Y$, $h\partial^1_Y = ir$, et $h(1_I \otimes i) = \sigma_Y(1_I \otimes i)$. On a les égalités $h(1_I \otimes p)\partial^0_X = h\partial^0_Y p = 1_Y p = p$, $h(1_I \otimes p)(1_I \otimes j) = h(1_I \otimes i)(1_I \otimes q) = \sigma_Y(1_I \otimes i)(1_I \otimes q) = iq\sigma_{Z\times_Y X} = pj\sigma_{Z\times_Y X}$, et $j\sigma_{Z\times_Y X}\partial^0_{Z\times_Y X} = j$, ce qui permet de définir un morphisme $u : I \otimes (Z \times_Y X) \cup \{0\} \otimes X \longrightarrow X$, en posant $u = (j\sigma_{Z\times_Y X}, 1_X)$, tel que le carré suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} I \otimes (Z \times_Y X) \cup \{0\} \otimes X & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I \otimes X & \xrightarrow[h(1_I \otimes p)]{} & Y \end{array} .$$

Or ce dernier admet un relèvement $k : I \otimes X \longrightarrow X$, puisque p est une fibration naïve, la flèche verticale de gauche dans ce diagramme étant une extension anodine. On a alors les égalités $k(1_I \otimes j) = j\sigma_{Z\times_Y X} = \sigma_X(1_I \otimes j)$ et $k\partial^0_X = 1_X$. D'autre part, on a les égalités $pk\partial^1_X = h(1_I \otimes p)\partial^1_X = h\partial^1_Y p = irp$. Il existe donc une unique flèche $s : X \longrightarrow Z \times_Y X$ telle que $js = k\partial^1_X$, et $qs = rp$. En outre, on a $sj = 1_{Z\times_Y X}$, car $jsj = k\partial^1_X j = k(1_I \otimes j)\partial^1_{Z\times_Y X} = j\sigma_{Z\times_Y X}\partial^1_{Z\times_Y X} = j$, et $qsj = rpj = riq = q$. On a ainsi montré que j est un rétracte par déformation fort. □

Lemme 1.5.11. — *Soient A une petite catégorie, W un A-localisateur accessible, et $q : E \longrightarrow B$ une W-fibration de but W-fibrant. Alors pour tous morphismes composables*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Z$$

de $\widehat{A}$, i étant une cofibration triviale, si i et if sont dans $C(q)$, alors il en est de même de f.

Démonstration. — Soit $u : Y \longrightarrow B$ un morphisme de $\widehat{A}$. Comme i est une cofibration triviale, et B est fibrant, il existe une flèche $v : Z \longrightarrow B$ telle que $u = vi$. On peut alors former les carrés cartésiens ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc} X \times_B E & \xrightarrow{f'} & Y \times_B E & \xrightarrow{i'} & Z \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y & \xrightarrow[i]{} & Z & \xrightarrow[v]{} & B \\ & & & & & \overset{u}{\searrow} & \end{array}$$

Par hypothèse, i' et $i'f'$ sont des équivalences faibles, et donc f' en est une, ce qui prouve l'assertion. □

Lemme 1.5.12. — *Soient A une petite catégorie, W un A-localisateur accessible, et $q : E \longrightarrow B$ une W-fibration. Alors pour tous morphismes composables*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z$$

de $\widehat{A}$, p étant une fibration triviale, si pf est dans $C(q)$, alors il en est de même de f.

Démonstration. — En vertu du théorème 1.4.3, il existe une donnée homotopique $(\mathfrak{L}, S)$, où $\mathfrak{L} = (L, \lambda^0, \lambda^1, pr_2)$ désigne le cylindre de Lawvere (cf. exemple 1.3.9), telle que W soit la classe des équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée engendrée par $(\mathfrak{L}, S)$. On remarque d'abord que toute section d'une fibration triviale est une équivalence faible propre à droite pour cette structure, et en particulier, appartient à $C(q)$. En effet, une telle section est un rétracte par déformation fort (cf. proposition 1.3.26), et comme toute fibration est une fibration naïve, l'assertion résulte du lemme 1.5.10. En particulier, pour tout préfaisceau T sur A, comme la deuxième projection $L \times T \longrightarrow T$ est une fibration triviale (cf. exemple 1.3.9), λ^0_T et λ^1_T sont dans $C(q)$.

Comme p est un fibration triviale, il existe une section s de p et une $\mathfrak{L}$-homotopie de 1_Y vers sp (1.3.26). On en déduit qu'il existe un morphisme $h : L \times X \longrightarrow Y$, tel que $h\lambda^0_X = f$ et $h\lambda^1_X = spf$. En vertu du sorite 1.5.9, (a), vu que pf, s, λ^0_X et λ^1_X sont dans $C(q)$, la deuxième égalité implique que h est dans $C(q)$, et la première qu'il en est de même de f. □

Proposition 1.5.13. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur accessible. On note F_{W} la classe des W-fibrations de but W-fibrant. Alors $C(F_{\mathsf{W}})$ est un A-localisateur contenu dans W.*

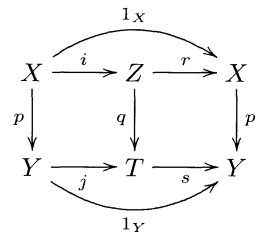
Démonstration. — On remarque que $C(F_{\mathsf{W}}) \subset \mathsf{W}$, puisque l'identité de l'objet final de $\widehat{A}$ est une W-fibration de but W-fibrant. En vertu de 1.5.9, il suffit à présent de montrer que pour tous morphismes composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

de $\widehat{A}$, si g et gf sont dans $C(F_{\mathsf{W}})$, il en est de même de f. Dans ce cas, g est une équivalence faible, et admet donc une factorisation de la forme $g = pi$, où i est une cofibration triviale, et p une fibration triviale. Soit q un élément de F_{W}. Par hypothèse, pi et pif sont dans $C(q)$. Il résulte donc du lemme 1.5.12 que i et if sont dans $C(q)$. Mais alors en vertu du lemme 1.5.11, f est dans $C(q)$, ce qui achève la démonstration. □

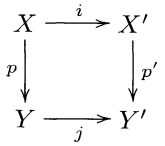
Lemme 1.5.14. — *Soient A une petite catégorie et W un A-localisateur. On considère trois flèches de $\widehat{A}$, $f : K \longrightarrow L$, $p : X \longrightarrow Y$, et $q : Z \longrightarrow T$, et on suppose que p est un rétracte de q. Si $f \in C(q)$, alors $f \in C(p)$.*

Démonstration. — Comme p est un rétracte de q, il existe un diagramme commutatif

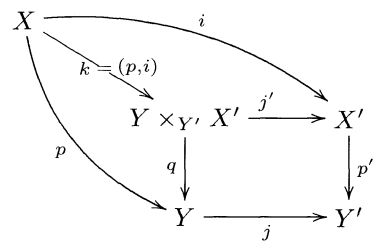


Soit $u : L \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A. On obtient par composition avec j un morphisme $v : L \longrightarrow T$, et on vérifie que par fonctorialité, la flèche $K \times_Y X \longrightarrow L \times_Y X$ est un rétracte de la flèche $K \times_T Z \longrightarrow L \times_T Z$. Comme $f \in C(q)$, cette dernière est dans W, et donc l'assertion résulte de la stabilité de W par rétractes (1.4.7). □

Démonstration du théorème 1.5.4. — Si F_{W} désigne la classe des fibrations de but fibrant (au sens W), il s'agit de montrer que W est propre si et seulement si $S \subset C(F_{\mathsf{W}})$. Or si W est propre $\mathsf{W} \subset C(F_{\mathsf{W}})$, et donc $S \subset C(F_{\mathsf{W}})$. Réciproquement, si $S \subset C(F_{\mathsf{W}})$, il résulte de la proposition 1.5.13 que $\mathsf{W} \subset C(F_{\mathsf{W}})$. Si F' désigne la classe des morphismes images réciproques d'éléments de F_{W}, on s'aperçoit immédiatement que $C(F') = C(F_{\mathsf{W}})$. Pour conclure, en vertu du lemme 1.5.14, il suffit de prouver que toute fibration est un rétracte d'un élément de F'. Si $p : X \longrightarrow Y$ est une fibration, il existe un carré commutatif



dans lequel p' est une fibration de but fibrant, et i, j des cofibrations triviales. On obtient le diagramme commutatif suivant, où q et j' désignent les projections



Comme $j \in \mathsf{W}$ et $p' \in F_{\mathsf{W}}$, la flèche $j' : Y \times_{Y'} X' \longrightarrow X'$, image réciproque de j par p', est une équivalence faible. Vu que $i \in \mathsf{W}$, on en déduit que $k \in \mathsf{W}$. D'autre part, i étant un monomorphisme, il en est de même de k. Par suite, k est une cofibration triviale, et donc le lemme du rétracte achève la démonstration. □

Proposition 1.5.15. — *Soient A et I deux petites catégories, et W un A-localisateur. On rappelle que W^I désigne la classe des flèches f de $\mathcal{H}om(I, \widehat{A}) \simeq \widehat{I^{op} \times A}$ telles que pour tout objet i de la catégorie I, le morphisme f_i soit une W-équivalence. Alors si W est propre, il en est de même de W^I.*

Démonstration. — On sait que si W est accessible, W^I l'est aussi, et qu'alors si p est une fibration de $\mathcal{H}om(I, \widehat{A})$ au sens de W^I, pour tout objet i de I, le morphisme p_i est une fibration de $\widehat{A}$ au sens de W (corollaire 1.4.22). On en déduit immédiatement que si W est propre, l'image réciproque de toute W^I-équivalence par une fibration au sens de W^I est encore une W^I-équivalence. □

Nous terminons cette section par le rappel de quelques résultats généraux sur la propreté dans le cadre abstrait des catégories de modèles fermées.

Définition 1.5.16. — Soit C une catégorie de modèles fermée. Un carré commutatif de C

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{u_0} & Y_0 \\ {\scriptstyle\xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ X_1 & \xrightarrow[u_1]{} & Y_1 \end{array}$$

est *homotopiquement cartésien* si X_0 s'identifie canoniquement à la limite homotopique du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Y_0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ X_1 & \xrightarrow[u_1]{} & Y_1 \end{array} \quad ,$$

i.e. s'il existe un diagramme commutatif dans C,

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \xleftarrow{\eta} & Y_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_1' & \xrightarrow[p]{} & Y_1' & \xleftarrow[q]{} & Y_0' \end{array} \quad ,$$

dans lequel les flèches verticales sont des équivalences faibles, et p, q, des fibrations de but fibrant, tel que le morphisme canonique

$$X_0 \longrightarrow X_1' \times_{Y_1'} Y_0'$$

soit une équivalence faible.

On a aussi une version duale de cette notion : un carré commutatif de C est *homotopiquement cocartésien* si c'est un carré homotopiquement cartésien de C^{op}.

Remarque 1.5.17. — Si C est propre à droite, alors le carré ci-dessus est homotopiquement cartésien si et seulement s'il existe une factorisation de la flèche $Y_0 \longrightarrow Y_1$ en $Y_0 \longrightarrow Z \longrightarrow Y_1$, où $Y_0 \longrightarrow Z$ est une équivalence faible, et où $Z \longrightarrow Y_1$ est une fibration, telle que la flèche $X_0 \longrightarrow X_1 \times_{Y_1} Z$ soit une équivalence faible, et si c'est le cas, alors pour toute factorisation de la flèche $Y_0 \longrightarrow Y_1$ en $Y_0 \longrightarrow Z \longrightarrow Y_1$, où $Y_0 \longrightarrow Z$ est une équivalence faible, et où $Z \longrightarrow Y_1$ est une fibration, le morphisme canonique $X_0 \longrightarrow X_1 \times_{Y_1} Z$ est une équivalence faible. Nous renvoyons le lecteur à [**64**, chap. II, section 8] pour un horizon raisonnablement étendu sur la notion de carré homotopiquement (co)cartésien dans les catégories de modèles fermées propres.

La proposition suivante provient de [**113**].

Proposition 1.5.18. — *Soit C une catégorie de modèles fermée propre à droite, et $p : X \longrightarrow Y$ une flèche de C. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour toute flèche $Z \longrightarrow Y$, le carré suivant est homotopiquement cartésien.*

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

(b) *Pour toute équivalence faible $u : Z' \longrightarrow Z$, et pour toute flèche $Z \longrightarrow Y$, si on forme les carrés cartésiens*

$$\begin{array}{ccccc} Z' \times_Y X & \xrightarrow{v} & Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z' & \xrightarrow[u]{} & Z & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

la flèche v est une équivalence faible.

Démonstration. — Montrons que $(a) \Rightarrow (b)$. En vertu de la condition (a), le carré de droite ainsi que le grand carré composé du diagramme de la condition (b) sont homotopiquement cartésiens. On en déduit qu'il en est de même du carré de gauche. Par suite, si u est une équivalence faible, il en est de même de v.

Il reste à voir la réciproque. Soit $u : Z \longrightarrow Y$ une flèche de C. On factorise u en $Z \longrightarrow T \longrightarrow Y$, où $Z \longrightarrow T$ est une cofibration triviale, et où $T \longrightarrow Y$ est une fibration. Alors en vertu de la condition (b), la flèche $Z \times_Y X \longrightarrow T \times_Y X$ est une équivalence faible, ce qui implique que le carré voulu est homotopiquement cartésien, en regard de la remarque ci-dessus. □

1.5.19. — Soit C une catégorie de modèles fermée. Si X est un objet de C, La catégorie C/X admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles

(resp. les fibrations, resp. les cofibrations) sont les flèches dont l'image par le foncteur d'oubli de C/X vers C en est une dans C. Si $u : X \longrightarrow Y$ est une flèche de C, on a un foncteur

$$u_! : C/X \longrightarrow C/Y \quad , \qquad (Z, z) \longmapsto (Z, u\, z) \ .$$

Ce dernier admet un adjoint à droite

$$u^* : C/Y \longrightarrow C/X$$

qui associe à un objet Z au-dessus de Y l'objet $Z \times_Y X$ au-dessus de X. Il est immédiat que $(u_!, u^*)$ est une adjonction de Quillen, puisque par définition, le foncteur $u_!$ respecte les cofibrations et les équivalences faibles (il en résulte par adjonction que le foncteur u^* respecte les fibrations et les fibrations triviales).

Proposition 1.5.20. — *Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de C. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *u est une équivalence faible propre à droite.*

(b) *Le couple de foncteurs adjoints $(u_!, u^*)$ est une équivalence de Quillen (au sens de* [**74**, définition 1.3.12]*).*

(c) *Le foncteur induit par $u_!$ entre les catégories homotopiques*

$$\mathbf{Ho}\, C/X \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C/Y$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Il s'agit d'un simple exercice de traduction à l'aide de [**109**, chap. I, sec. 5, prop. 1] et de [**74**, proposition 1.3.13]. □

Corollaire 1.5.21. — *Soient C une catégorie, et W une classe de flèches de C. On suppose qu'il existe une structure de catégorie de modèles fermée sur C dont les équivalences faibles sont les éléments de W. Les conditions suivantes sont alors équivalentes.*

(a) *Il existe une structure de catégorie de modèles fermée propre à droite sur C dont les équivalences faibles sont les éléments de W.*

(b) *Toute structure de catégorie de modèles fermée sur C dont les équivalences faibles sont les éléments de W est propre à droite.*

Démonstration. — La condition (c) de la proposition ci-dessus est une propriété du seul couple (C, W), sans mention d'aucune structure de catégorie de modèles fermée sur C. □

Proposition 1.5.22. — *Soient A une petite catégorie, et $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}'$ deux A-localisateurs propres. On considère un carré cartésien de préfaisceaux sur A :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow[v]{} & Y \end{array} \quad .$$

Si p est une W*-fibration de but* W'*-fibrant et si le morphisme canonique de Y' vers le préfaisceau final est une* W*-équivalence, alors ce carré est homotopiquement cartésien au sens de* W *et au sens de* W'.

Démonstration. — Comme W est propre et p est une W-fibration, ce carré est homotopiquement cartésien au sens de W (cf. remarque 1.5.17). On factorise v en une W'-cofibration triviale i suivie d'une W'-fibration q, puis on forme les carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{j} & X'' & \xrightarrow{r} & X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow[i]{} & Y'' & \xrightarrow[q]{} & Y \end{array}$$

On remarque que le morphisme de Y'' vers le préfaisceau final est une W'-équivalence et que Y'' est W'-fibrant. Par conséquent, Y'' est un objet injectif de $\widehat{A}$, ce qui implique que i est une W-équivalence. Comme p est une W-fibration, la flèche j est une W-équivalence, et donc aussi une W'-équivalence. Il suffit donc à présent de vérifier que le carré de droite est homotopiquement cartésien au sens de W', ce qui résulte de la remarque 1.5.17, puisque W' est propre et q est une W'-fibration. □

1.6. Cofibrations exotiques

1.6.1. — Soient A une petite catégorie, et I un *ensemble* de monomorphismes de préfaisceaux sur A. Un morphisme de $\widehat{A}$ est une *I-fibration* s'il vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à I. Un morphisme de $\widehat{A}$ est une *I-cofibration* s'il vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement aux I-fibrations. Un préfaisceau X sur A sera dit *I-cofibrant* si le morphisme du préfaisceau vide vers X est une I-cofibration.

Théorème 1.6.2. — *Soient A une petite catégorie,* W *un A-localisateur accessible. On considère un* ensemble *I de monomorphismes de préfaisceaux sur A tel que toute I-fibration soit une* W*-équivalence. Alors la catégorie des préfaisceaux sur A admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les* W*-équivalences, et les cofibrations, les I-cofibrations (les fibrations triviales sont donc les I-fibrations). En outre, pour que cette structure de catégorie de modèles fermée soit propre (à droite), il faut et il suffit que le A-localisateur* W *le soit.*

Démonstration. — En vertu des propositions 1.2.15 et 1.3.40 et du théorème 1.4.3, il existe un cardinal α tel que les conditions suivantes soient vérifiées.

(a) Les sources et les buts des éléments de I sont α-accessibles.
(b) Tout sous-objet ou objet quotient d'un objet α-accessible de $\widehat{A}$ est α-accessible.

(c) Il existe un *ensemble* D de préfaisceaux sur A tel que tout préfaisceau α-accessible sur A soit isomorphe à un élément de D.

(d) Pour toute W-cofibration triviale $X \rightarrowtail Y$ de préfaisceaux sur A, et tout sous-objet α-accessible K de Y, il existe un sous-objet α-accessible L de Y contenant K tel que l'inclusion $L \cap X \rightarrowtail L$ soit une W-équivalence.

Notons J_0 l'ensemble des W-cofibrations triviales $X \rightarrowtail Y$ telles que X et Y soient dans D. Pour chaque élément f de J_0, on choisit ensuite une factorisation de la forme $q_f j_f$, où j_f est une I-cofibration, et q_f une I-fibration (factorisations qui existent grâce à l'argument du petit objet appliqué à I). On note enfin J l'ensemble des morphismes j_f, où f parcourt les éléments de J_0. On remarque que les morphismes q_f étant des W-équivalences (puisque des I-fibrations), les morphismes j_f sont aussi des W-équivalences. Nous allons montrer que la catégorie des préfaisceaux sur A admet une structure de catégorie de modèles fermée engendrée par le couple (I, J) dont les équivalences faibles sont les W-équivalences. Comme tous les éléments de I sont des monomorphismes, il résulte de l'argument du petit objet appliqué à I que toute I-cofibration est un monomorphisme. On appellera *I-cofibrations triviales* les I-cofibrations qui sont aussi des W-équivalences. Toute I-cofibration triviale est donc une W-cofibration triviale. Les éléments de J étant des I-cofibrations triviales, une nouvelle application de l'argument du petit objet à J montre que toute J-cofibration est une I-cofibration triviale, et donc, en particulier, une W-équivalence.

1.6.2.1. — *Pour tout carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ B & \xrightarrow[b]{} & Y \end{array}$$

de préfaisceaux sur A dans lequel $i \in I$ et w est une W*-cofibration triviale, il existe un diagramme commutatif dans $\widehat{A}$ de la forme*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & A' & \xrightarrow{a'} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ B & \xrightarrow[v]{} & B' & \xrightarrow[b']{} & Y \end{array}$$

tel que $a = a'u$, $b = b'v$, et $i' \in J$.

Soit K l'image du morphisme b dans Y. En vertu de (a) et (b), K est α-accessible, et donc il résulte de (d) que K est contenu dans un sous-objet α-accessible L de Y tel que $L \cap X \rightarrowtail L$ soit une W-cofibration triviale. Les propriétés (b) et (c) impliquent que l'on peut supposer que $L \cap X$ et L sont dans D. L'inclusion f de $L \cap X$ dans L est par conséquent un élément de J_0. On a donc une factorisation de f de la forme

$f = q_f j_f$. Posons $i' = j_f$. Si $A' = L \cap X$ et B' désignent respectivement la source et le but de i', on a un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & A' & \xrightarrow{a'} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ B & \xrightarrow[v']{} & L & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

dans lequel g désigne l'inclusion de L dans Y, avec $a'u = a$ et $gv' = b$. D'autre part, le morphisme q_f étant par construction une I-fibration, et le morphisme i étant dans I par hypothèse, l'égalité $f = q_f i'$ et la commutativité du carré de gauche dans le diagramme ci-dessus impliquent qu'il existe un morphisme $v : B \longrightarrow B'$ tel que $vi = i'u$ et $q_f v = v'$. En posant $b' = gq_f$, on en déduit que $b'v = gq_f v = gv' = b$. On a obtenu de la sorte le diagramme commutatif annoncé.

1.6.2.2. — *Pour tout carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ B & \xrightarrow[b]{} & Y \end{array}$$

de préfaisceaux sur A dans lequel $i \in I$ et w est une W*-équivalence, il existe un diagramme commutatif dans $\widehat{A}$ de la forme*

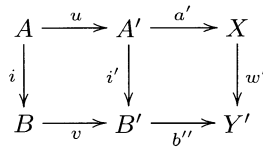
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & A' & \xrightarrow{a'} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ B & \xrightarrow[v]{} & B' & \xrightarrow[b']{} & Y \end{array}$$

tel que $a = a'u$, $b = b'v$, et $i' \in J$.

On factorise w en une cofibration $w' : X \longrightarrow Y'$ suivie d'une fibration triviale $p : Y' \longrightarrow Y$. On voit aussitôt que w' est une W-cofibration triviale. En outre, vu que i est en particulier un monomorphisme, il existe un morphisme $l : B \longrightarrow Y'$ tel que $w'a = li$ et $pl = b$. On peut appliquer 1.6.2.1 au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w'} \\ B & \xrightarrow[l]{} & Y' \end{array} \quad ,$$

ce qui nous donne un diagramme commutatif



tel que $a'u = a$, $b''v = l$, et $i' \in J$. On conclut en posant $b' = pb''$.

1.6.2.3. — *Une J-fibration est une* W*-équivalence si et seulement si c'est une I-fibration.*

Il est clair que toute I-fibration est à la fois une J-fibration et une W-équivalence. Réciproquement, il résulte facilement de 1.6.2.2 que toute J-fibration qui est une W-équivalence vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à I.

1.6.2.4. — *Une I-cofibration est une* W*-équivalence si et seulement si c'est une J-cofibration.*

On sait déjà que toute J-cofibration est à la fois une I-cofibration et une W-équivalence. Soit $i : X \rightarrowtail Y$ une I-cofibration. On peut la factoriser, grâce à l'argument du petit objet appliqué à J, en une J-cofibration j suivie d'une J-fibration q. Si i est une W-équivalence, alors il en est de même de q, ce qui implique en vertu de 1.6.2.3 que q est une I-fibration. Le lemme du rétracte implique que i est un rétracte de j, et qu'il est donc une J-cofibration.

Les axiomes de factorisation étant assurés par l'argument du petit objet, on peut à présent affirmer que $\widehat{A}$ est munie d'une structure de catégorie de modèles fermée engendrée par le couple (I, J) dont les équivalences faibles sont les W-équivalences. La propreté à gauche de cette structure résulte de la propreté à gauche de la structure de catégorie de modèles fermée du théorème 1.4.3 (voir remarque 1.5.2) et de l'énoncé dual du corollaire 1.5.21. Ce dernier corollaire implique aussi la dernière assertion du théorème concernant la propreté à droite. □

Proposition 1.6.3. — *Soient A une petite catégorie, et* W *un A-localisateur accessible. On suppose donnés un* ensemble I *de monomorphismes de $\widehat{A}$ tel que toute I-fibration soit une* W*-équivalence, et une classe* W′ *de morphismes de préfaisceaux sur A contenant* W*. Alors pour que* W′ *soit un A-localisateur accessible, il faut et il suffit que la catégorie des préfaisceaux sur A admette une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les* W′*-équivalences, et les cofibrations, les I-cofibrations.*

Démonstration. — C'est une condition nécessaire en vertu du théorème 1.6.2. Réciproquement, supposons qu'il existe un *ensemble* J de I-cofibrations tel que $\widehat{A}$ admette une structure de catégorie de modèles fermée engendrée par le couple (I, J) dont les équivalences faibles sont les W'-équivalences (*i.e.* les éléments de W'), et notons W'' le A-localisateur engendré par W et par J. On va montrer que $\mathsf{W}' = \mathsf{W}''$. Toute J-cofibration est une W''-équivalence : l'argument du petit objet appliqué à J implique qu'il suffit de vérifier que $J \subset \mathsf{W}''$, ce qui est vrai par définition de W''. Soit u une W'-équivalence. Pour vérifier que u est une W''-équivalence, on remarque que u admet une factorisation en une J-cofibration j suivie d'une J-fibration q. Mais alors q est une W'-équivalence, et donc une I-fibration. Les morphismes j et q étant dans W'', il en est donc de même de u. On a ainsi prouvé que $\mathsf{W}' \subset \mathsf{W}''$. Il reste donc à montrer l'inclusion inverse. Pour cela, il suffit de prouver que W' est un A-localisateur. Le seul axiome non trivial à vérifier est l'axiome L3. Soient i un monomorphisme, et u un morphisme de même source que i dans $\widehat{A}$.

$$Y \xleftarrow{i} X \xrightarrow{u} Z$$

En utilisant des factorisations adéquates en I-cofibrations suivies de I-fibrations, on peut construire un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xleftarrow{i'} & X' & \xrightarrow{u'} & Z' \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} \\ Y & \xleftarrow{i} & X & \xrightarrow{u} & Z \end{array}$$

dans lequel i' est une I-cofibration, et les morphismes x, y et z sont des I-fibrations (on peut par exemple choisir une factorisation de i en une I-cofibration i' suivie d'une I-fibration y, et prendre pour x et z les identités de X et Z respectivement). Toutes les flèches verticales étant en particulier des W-équivalences, il résulte de l'assertion (a) du lemme 1.4.15 que le morphisme canonique $Y' \amalg_{X'} Z' \longrightarrow Y \amalg_X Z$ est une W-équivalence. On en déduit aussitôt que si i est une W'-équivalence, alors le morphisme $Z \longrightarrow Y \amalg_X Z$ en est une aussi. La stabilité par composition transfinie des monomorphismes qui sont dans W' se démontre de manière analogue. Si E est un ensemble bien ordonné, et si $F : E \longrightarrow \widehat{A}$ est un foncteur tel que pour tous $e' < e$, le morphisme $F_{e'} \longrightarrow F_e$ soit un monomorphisme, alors il existe un foncteur $F' : E \longrightarrow \widehat{A}$ tel que pour tout élément e de E, le morphisme $\varinjlim_{e'<e} F_{e'} \longrightarrow F_e$ soit une I-cofibration, et un morphisme de foncteurs $F' \longrightarrow F$ qui soit une I-fibration argument par argument (cela résulte d'une construction élémentaire par récurrence transfinie que nous laissons en exercice au lecteur, ou bien encore de [**74**, théorème 5.1.3] appliqué, pour $\mathcal{B} = E$, à la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A}$ dont les cofibrations sont les I-cofibrations, et les équivalences faibles, les W'-équivalences). L'assertion (b) du lemme 1.4.15 implique alors que le morphisme induit $\varinjlim F' \longrightarrow \varinjlim F$ est une W-équivalence, et donc, en particulier, une W'-équivalence. La classe des I-cofibrations

qui sont des W'-équivalences étant stable par composition transfinie, cela permet de conclure. □

1.6.4. — Les énoncés précédents permettent d'avoir le choix quant aux cofibrations avec lesquelles on peut travailler. Le choix de celles-ci ne change rien à la théorie de l'homotopie considérée : seules les équivalences faibles sont pertinentes. Cependant, cette liberté permet une plus grande souplesse quant à la description des catégories homotopiques et des foncteurs dérivés. On utilisera par exemple ce type de propriété pour dériver les foncteurs de limite inductive (3.1.10) et de passage au quotient sous l'action d'un préfaisceau de groupes (7.2.13). On rappelle dans la proposition suivante quelques éléments du folklore sorital sur la localisation des catégorie de modèles fermées (voir [**72**] pour un développement beaucoup plus exhaustif du sujet).

Proposition 1.6.5. — *Soient C une catégorie admettant des petites limites inductives et projectives, et $(\mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ et $(\mathsf{W}', \mathsf{Fib}', \mathsf{Cof}')$ deux structures de catégorie de modèles fermée sur C telles que $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}'$ et $\mathsf{Cof} = \mathsf{Cof}'$ (ce qui implique que $\mathsf{Fib}' \subset \mathsf{Fib}$). On notera les catégories de modèles fermées correspondantes $C = (C, \mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ et $C' = (C, \mathsf{W}', \mathsf{Fib}', \mathsf{Cof}')$. Le foncteur identité définit donc un foncteur de Quillen à gauche de C vers C'. On appellera* W-équivalences *(resp.* W'-équivalences, *resp.* fibrations, *resp.* fibrations fortes*) les flèches qui sont dans* W *(resp. dans* W', *resp. dans* Fib, *resp. dans* Fib'*). Un objet X sera dit* fibrant *(resp.* fortement fibrant*) si le morphisme de X vers l'objet final est une fibration (resp. une fibration forte). On a alors les propriétés suivantes.*

(i) *Le foncteur canonique $\mathbf{Ho}\, C \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C'$ admet un adjoint à droite pleinement fidèle dont l'image essentielle est formée des objets isomorphes dans $\mathbf{Ho}\, C$ à des objets fortement fibrants.*

(ii) *Un objet fibrant de C est fortement fibrant si et seulement s'il est isomorphe dans $\mathbf{Ho}\, C$ à un objet fortement fibrant.*

(iii) *Considérons un triangle commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ u\ } & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & Z & \end{array}$$

de C dans lequel u est une W-équivalence, et p et q sont des fibrations. Pour que p soit une fibration forte, il faut et il suffit que q en soit une.

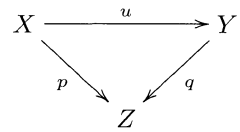
(iv) *Un objet fibrant X de C est fortement fibrant si et seulement si pour toute W'-équivalence entre objets cofibrants $A \longrightarrow B$, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\, C}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\, C}(A, X)$$

est bijective.

(v) *Un morphisme entre objets fortement fibrants est une* W*-équivalence si et seulement s'il est une* W′*-équivalence.*

(vi) *Pour tout triangle commutatif*



dans lequel p et q sont des fibrations fortes, le morphisme u est une W*-équivalence si et seulement s'il est une* W′*-équivalence.*

(vii) *Un morphisme entre objets fortement fibrants est une fibration forte si et seulement s'il est une fibration.*

(viii) *Soit $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur de Quillen à gauche. Pour que G induise un foncteur de Quillen à gauche de $\mathcal{C}'$ vers $\mathcal{D}$ (*i.e. *qu'il envoie les cofibrations triviales de $\mathcal{C}'$ sur des cofibrations triviales de $\mathcal{D}$), il faut et il suffit qu'il envoie les* W′*-équivalences entre objets cofibrants sur des équivalences faibles de $\mathcal{D}$.*

Démonstration. — L'assertion (i) est une conséquence immédiate des sorites généraux sur les adjonctions de Quillen appliqués à l'identité de $\mathcal{C}$, vue comme un foncteur de Quillen à gauche de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ (voir par exemple [**74**, théorème 1.3.7 et lemme 1.3.10]). On en déduit facilement les assertions (ii), (iv) et (v). Les assertions (iii) et (vi) sont des reformulations respectives des énoncés (ii) et (v), appliqués à la catégorie $\mathcal{C}/Z$. Montrons l'énoncé (vii). Supposons que $p : X \to Y$ soit une fibration entre objets fortement fibrants. On peut alors choisir une factorisation de p en une W′-équivalence $i : X \to Z$ suivie d'une fibration forte $q : Z \to Y$. Mais alors Z est fortement fibrant, ce qui implique d'après (v) que i est une W-équivalence. Il résulte donc de (iii) que p est une fibration forte. La réciproque est immédiate (puisque toute fibration forte est une fibration). Il reste à présent à démontrer l'assertion $(viii)$. Le fait que cela soit une condition nécessaire résulte immédiatement du lemme de Ken Brown [**74**, lemme 1.1.12]. Réciproquement, supposons que le foncteur G envoie les W′-équivalences entre objets cofibrants sur des équivalences faibles de $\mathcal{D}$. Le foncteur G admet par définition un adjoint à droite D qui est un foncteur de Quillen à droite. Pour prouver que G définit un foncteur de Quillen à gauche de $\mathcal{C}'$ vers $\mathcal{D}$, il suffit de prouver que le foncteur D envoie les fibrations de $\mathcal{D}$ sur des fibrations fortes. On voit dans un premier temps que le foncteur D envoie les objets fibrants de $\mathcal{D}$ sur des objets fortement fibrants. En effet, si X est un objet fibrant de $\mathcal{D}$, et $A \to B$ une W′-équivalence entre objets cofibrants de $\mathcal{C}$, on a les bijections canoniques ci-dessous (où $\mathbf{L}G$ et $\mathbf{R}D$ désignent respectivement le foncteur dérivé à

gauche de G et le foncteur dérivé à droite de D).

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\,\mathcal{C}}(B, D(X)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\,\mathcal{C}}(B, \mathbf{R}D(X))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\,\mathcal{D}}(\mathbf{L}G(B), X)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\,\mathcal{D}}(G(B), X)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\,\mathcal{D}}(G(A), X)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\,\mathcal{D}}(\mathbf{L}G(A), X)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\,\mathcal{C}}(A, \mathbf{R}D(X))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\,\mathcal{C}}(A, D(X))\end{aligned}$$

Il résulte donc bien de (iv) que DX est un objet fortement fibrant. Considérons enfin une fibration $p : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{D}$. Le foncteur

$$D_Y : \mathcal{D}/Y \longrightarrow \mathcal{C}/DY \quad , \qquad (Z, Z \longrightarrow Y) \longmapsto (DZ, DZ \longrightarrow DY)$$

a pour adjoint à gauche le foncteur

$$G_Y : \mathcal{C}/DY \longrightarrow \mathcal{D}/Y \quad , \qquad (Z, Z \longrightarrow DY) \longmapsto (GZ, GZ \longrightarrow Y) \quad ,$$

où $GZ \longrightarrow Y$ est la flèche obtenue de $Z \longrightarrow DY$ par adjonction. On vérifie aussitôt que G_Y et D_Y forment une adjonction de Quillen, et que G_Y envoie les W'-équivalences entre objets cofibrants au-dessus de DY sur des équivalences faibles au-dessus de Y. Ce qui précède implique donc que $D_Y(X, p)$ est un objet fortement fibrant de $\mathcal{C}/DY$, ou autrement dit, que Dp est une fibration forte. □

CHAPITRE 2

YOGA SIMPLICIAL

2.1. Ensembles simpliciaux

2.1.1. — On rappelle que la catégorie des simplexes Δ est la sous-catégorie pleine de la catégorie ***Cat*** des petites catégories dont les objets sont les ensembles bien ordonnés

$$\Delta_n = \{0, \dots, n\} , \qquad n \geqslant 0 .$$

La catégorie des *ensembles simpliciaux* est par définition la catégorie $\widehat{\Delta}$ des préfaisceaux d'ensembles sur Δ.

Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 1$, on note δ_n^i l'unique application croissante et injective de Δ_{n-1} vers Δ_n qui ne prend pas la valeur i, et pour $0 \leqslant i \leqslant n$, σ_n^i l'unique application croissante et surjective de Δ_{n+1} vers Δ_n qui prend deux fois la valeur i. On définit alors des ensembles simpliciaux $\partial\Delta_n$ par la formule $\partial\Delta_n = \cup_{0\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Im} \delta_n^i$, pour $n \geqslant 1$, et $\partial\Delta_0 = \varnothing$, pour $n = 0$. On a donc, pour chaque $n \geqslant 0$, une inclusion canonique $\partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$.

La catégorie Δ admet un automorphisme involutif non trivial $Inv : \Delta \longrightarrow \Delta$, tel que pour tout $n \geqslant 0$, $Inv(\Delta_n) = \Delta_n$, et pour toute application croissante $\varphi : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$,

$$Inv(\varphi)(k) = n - \varphi(m-k) , \quad 0 \leqslant k \leqslant m .$$

Ainsi, on a

$$Inv(\delta_n^i) = \delta_n^{n-i} , \quad Inv(\sigma_n^i) = \sigma_n^{n-i} .$$

Proposition 2.1.2. — *L'ensemble d'inclusions*

$$\{ \partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n \mid n \geqslant 0 \}$$

est un modèle cellulaire de $\widehat{\Delta}$.

Démonstration. — Voir [**60**, chap. III, § 3.2]. Nous redémontrerons ce fait dans un cadre plus abstrait plus loin ; cf. la proposition 8.1.37. □

2.1.3. — On a un segment séparant $(\Delta_1, \delta_1^1, \delta_1^0)$, ce qui définit une donnée homotopique élémentaire sur Δ, notée $\boldsymbol{\Delta}_1$ (voir l'exemple 1.3.8), une structure homotopique (engendrée par la donnée homotopique $(\boldsymbol{\Delta}_1, \varnothing)$), et donc une classe d'extensions anodines dans $\widehat{\Delta}$, ainsi qu'un Δ-localisateur accessible W_∞ (proposition 1.4.2). On appellera ∞-*équivalences* les éléments de W_∞. La remarque 1.3.15 implique que l'ensemble J des inclusions

$$\Delta_1 \times \partial\Delta_n \cup \{\varepsilon\} \times \Delta_n \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_n \ , \qquad n \geqslant 0 \ , \qquad \varepsilon = 0, 1$$

engendre la classe des extensions anodines, dans le sens où celles-ci sont les élément de la classe $l(r(J))$. Ainsi cette notion d'extensions anodines coïncide avec celle de [**60**]. Pour ne pas nous singulariser, nous appellerons *fibrations de Kan*, les fibrations naïves au sens de cette classe d'extensions anodines, et *complexes de Kan* les objets fibrants.

En vertu du corollaire 1.4.18, W_∞ est le Δ-localisateur engendré par les projections

$$\Delta_1 \times X \longrightarrow X \ , \qquad X \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta} \ .$$

En particulier, il résulte du corollaire 1.4.19 que W_∞ est stable par produits finis.

On peut décrire les extensions anodines en exhibant un autre ensemble qui les engendre. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $n \geqslant 1$, on pose $\Lambda_n^k = \cup_{0 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq k} \mathrm{Im}\ \delta_n^j$. On a alors une inclusion canonique $\Lambda_n^k \longrightarrow \Delta_n$.

Proposition 2.1.4. — *La classe des extensions anodines est la classe*

$$l(r(\{\ \Lambda_n^k \longrightarrow \Delta_n \mid n \geqslant 1,\ 0 \leqslant k \leqslant n\ \}))\ .$$

Démonstration. — Voir [**60**, chap. IV, § 2.1] ou bien encore [**64**, chap. I, proposition 4.2]. □

Proposition 2.1.5. — *La catégorie des ensembles simpliciaux admet une structure de catégorie de modèles fermée, propre, et à engendrement cofibrant, dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et dont les cofibrations sont les monomorphismes. En outre, les objets fibrants sont exactement les complexes de Kan.*

Démonstration. — Le fait que l'on obtienne de la sorte une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, avec pour objets fibrants les complexes de Kan, résulte du théorème 1.3.22 et de la proposition 1.3.36. D'autre part, comme W_∞ est le Δ-localisateur engendré par les projections $\Delta_1 \times X \longrightarrow X$, $X \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta}$, la propreté résulte du corollaire 1.5.7. □

La suite de ce paragraphe sera consacrée, en grande partie, à montrer que la donnée homotopique $(\boldsymbol{\Delta}_1, \varnothing)$ est complète (cf. 1.3.48), autrement dit, que les fibrations de la structure de catégorie de modèles fermée de la proposition ci-dessus sont exactement les fibrations de Kan. On obtiendra ainsi une nouvelle preuve du théorème de Quillen

sur la structure de catégorie de modèles fermée des ensembles simpliciaux[1]. Jusqu'à la preuve de ce résultat on prendra soin de distinguer les fibrations de Kan des fibrations, les extensions anodines des cofibrations triviales, et les équivalences faibles absolues relatives à la donnée homotopique ci-dessus des ∞-équivalences.

Proposition 2.1.6. — *Toute limite inductive filtrante de fibrations de Kan (resp. de fibrations triviales) est une fibration de Kan (resp. une fibration triviale).*

Démonstration. — Soient $j : K \longrightarrow L$ une inclusion d'ensembles simpliciaux de présentation finie (autrement dit, telle que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(M, .)$ commute aux petites limites inductives filtrantes pour $M = K, L$), I une petite catégorie filtrante, X et Y deux foncteurs de I vers $\widehat{\Delta}$, et $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme de foncteurs tel que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $p(i)$ ait la propriété de relèvement à droite relativement à j. On va montrer que $\varinjlim p$ vérifie aussi cette propriété. On se donne donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & \varinjlim X \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varinjlim p} \\ L & \xrightarrow[l]{} & \varinjlim Y \end{array} ,$$

et comme K et L sont de présentation finie, il existe des factorisations de k et de l telles que le diagramme suivant soit commutif

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & X(i) & \longrightarrow & \varinjlim X \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p(i)} & & \downarrow{\scriptstyle \varinjlim p} \\ L & \longrightarrow & Y(i) & \longrightarrow & \varinjlim Y \end{array} .$$

Le carré de gauche admet par hypothèse un relèvement, ce qui en définit un pour le carré composé, qui n'est autre que le carré donné. La proposition résulte à présent des propositions 2.1.2 et 2.1.4, et du fait que les ensembles simpliciaux Δ_n, $\partial\Delta_n$, et Λ^k_n sont de présentation finie. □

2.1.7. — On dit qu'un carré commutatif dans une catégorie C est *absolument cartésien* si son image par tout foncteur de source la catégorie C est un carré cartésien.

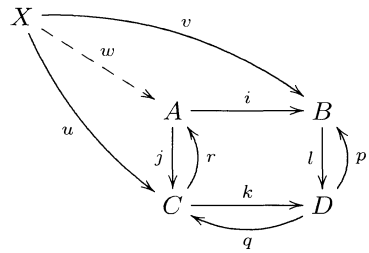
[1] La preuve que nous donnons ici a pour particularité de ne pas faire appel à la théorie des fibrations minimales ni à aucune sorte de réalisation topologique. Elle utilise seulements les bonnes propriétés combinatoires du foncteurs Ex^∞ de Kan (il est à noter que dans [**109**], Quillen annonce l'existence d'une telle démonstration sans plus de détails). Voir aussi le scholie 2.3.21 pour une variante.

Lemme 2.1.8. — *Soient C une catégorie, et*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ C & \xrightarrow[k]{} & D \end{array}$$

un carré commutatif dans C. On suppose que j, k, l admettent des rétractions r, q, p respectivement, et que $pk = ir$. Alors le carré ci-dessus est absolument cartésien.

Démonstration. — Vu que l'image, par un foncteur arbitraire, d'un carré commutatif satisfaisant aux conditions du lemme satisfait encore à ces hypothèses, il suffit de montrer qu'un tel carré est cartésien. Soit donc $u : X \longrightarrow C$, $v : X \longrightarrow B$ deux flèches de C telles que $ku = lv$, et montrons qu'il existe un unique morphisme $w : X \longrightarrow A$ tel que $u = jw$ et $v = iw$.



Unicité : Si w satisfait à ces conditions, on a $w = rjw = ru$, ce qui prouve l'unicité.
Existence : Posons $w = ru$. On a

$$v = plv = pku = iru = iw \ ,$$
$$u = qku = qlv = qliw = qkjw = jw \ ,$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 2.1.9. — *Pour $m \geqslant 2$, $0 \leqslant i < j \leqslant m$, le carré suivant de Δ est absolument cartésien*

$$\mathcal{D}_{m,i,j} \quad = \quad \begin{array}{ccc} \Delta_{m-2} & \xrightarrow{\delta^i_{m-1}} & \Delta_{m-1} \\ {\scriptstyle \delta^{j-1}_{m-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta^j_m} \\ \Delta_{m-1} & \xrightarrow[\delta^i_m]{} & \Delta_m \end{array} \ .$$

Démonstration. — Comme δ^i_m admet une rétraction, il suffit en vertu du lemme précédent, de montrer que δ^{j-1}_{m-1} et δ^j_m admettent des rétractions, r et p respectivement, telles que $\delta^i_{m-1} r = p\delta^i_m$. Les relations simpliciales montrent que si $j < m$, on peut prendre $r = \sigma^{j-1}_{m-2}$ et $p = \sigma^j_{m-1}$, et que si $j = m$ et $i < j - 1$, on peut prendre $r = \sigma^{j-2}_{m-2}$ et $p = \sigma^{j-1}_{m-1}$. Il reste le cas $j = m$ et $i = m - 1$. Mais alors, comme $m \geqslant 2$,

on a $i > 0$. Or le carré $\mathcal{D}_{m,i,j}$ est l'image du carré $\mathcal{D}_{m,m-j,m-i}$ par l'automorphisme *Inv* de Δ. Si $i > 0$, on a $m - i < m$, et l'assertion résulte du premier cas, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 2.1.10. — *Soient A une petite catégorie, et $F : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur commutant aux petites limites inductives. Pour que le foncteur $F : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les monomorphismes, il faut et il suffit que la flèche $(F\delta_1^1, F\delta_1^0) : F\Delta_0 \amalg F\Delta_0 \longrightarrow F\Delta_1$ soit un monomorphisme de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 2.1.2, le foncteur F respecte les monomorphismes si et seulement si pour tout entier positif n, le morphisme $F\partial\Delta_n \longrightarrow F\Delta_n$ est un monomorphisme. On va vérifier que c'est toujours le cas pour $n \neq 1$, ce qui montrera le lemme.

Lorsque $n = 0$, c'est trivial, car $\partial\Delta_0 = \varnothing$, et car le foncteur F commute aux petites limites inductives. Il suffit donc de considérer le cas où $n > 1$. On définit un sous-objet $\partial F\Delta_n$ de $F\Delta_n$ en posant $\partial F\Delta_n = \cup_{0 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Im} F\delta_n^i$. Les carrés absolument cartésiens décrits par la proposition 2.1.9 montrent que pour $i < j$, on a $\operatorname{Im} F\delta_n^i \cap \operatorname{Im} F\delta_n^j \simeq F(\operatorname{Im} \delta_n^i \cap \operatorname{Im} \delta_n^j) \simeq F\Delta_{n-2}$. La présentation standard de $\partial\Delta_n$ (cf. [**60**, chap. II, § 3.9]) permet ainsi de constater que $F\partial\Delta_n \simeq \partial F\Delta_n$, ce qui montre que $F\partial\Delta_n$ est canoniquement un sous-objet de $F\Delta_n$ pour $n > 1$. □

Lemme 2.1.11. — *Soient* D *une classe d'objets de $\widehat{\Delta}$, et n un entier. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées.*

(a) *Pour tout carré cocartésien de $\widehat{\Delta}$*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

tel que i soit un monomorphisme, si X, Y, et X' sont dans D*, il en est de même de Y'.*

(b) *Pour tout m, $0 \leqslant m < n$, Δ_m est dans* D*, et le préfaisceau vide $\varnothing$ est dans* D.

Alors pour tout m, $0 \leqslant m \leqslant n$, tout sous-objet homogène *de Δ_m (réunion de faces de Δ_m) est dans* D*. En particulier, pour tout m, $0 \leqslant m \leqslant n$, $\partial\Delta_m$ est dans* D.

Démonstration. — Pour $m = 0, 1$ c'est immédiat. Soient m un entier , $1 < m \leqslant n$, et K un sous-objet homogène de Δ_m. Alors il existe un sous-ensemble I de $\{0, \ldots, m\}$ tel que $K = \cup_{i \in I} \operatorname{Im} \delta_m^i$. On procède par récurrence sur $|\, I\,|$. Si $|\, I\,| = 0, 1$, alors $K = \varnothing$, Δ_m, et l'assertion résulte de (b). Supposons donc que $|\, I\,| \geqslant 2$, et soit i le

plus petit élément de I. On pose $J = I - \{i\}$, et on définit un sous-objet homogène L de Δ_m par $L = \cup_{j \in J} \operatorname{Im} \delta_m^j$. On a alors un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} L \cap \Delta_{m-1} & \longrightarrow & \Delta_{m-1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_m^i} \\ L & \longrightarrow & K \end{array} .$$

La proposition 2.1.9 montre que $L \cap \Delta_{m-1} \simeq \cup_{j \in J} (\operatorname{Im} \delta_m^j \cap \operatorname{Im} \delta_m^i) \simeq \cup_{j \in J} \operatorname{Im} \delta_{m-1}^{j-1}$. On en déduit que $L \cap \Delta_{m-1}$ est un sous-objet homogène de Δ_{m-1}, et comme $|\, J \,| = |\, I \,| - 1$, l'hypothèse de récurrence implique que L et $L \cap \Delta_{m-1}$ sont dans D. Comme Δ_{m-1} est dans D (par (b)), la condition (a) implique que K est dans D. □

Proposition 2.1.12. — *Soit* D *une classe d'objets de* $\widehat{\Delta}$ *saturée par monomorphismes (cf. 1.1.12). Si pour tout* $m \geqslant 0$, Δ_m *est dans* D, *alors* $\mathsf{D} = \operatorname{Ob} \widehat{\Delta}$.

Démonstration. — En considérant le modèle cellulaire $\partial \Delta_m \longrightarrow \Delta_m$, $m \geqslant 0$, de $\widehat{\Delta}$ (cf. 2.1.2), la proposition résulte du lemme 1.2.30 et du lemme ci-dessus. □

Corollaire 2.1.13. — *Soient* A *une petite catégorie,* $F, G : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ *deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, et* $\alpha : F \longrightarrow G$ *un morphisme de foncteurs.*

(a) *Soit* W *un* A*-localisateur. Si pour tout entier* $m \geqslant 0$, α_{Δ_m} *est dans* W, *alors pour tout ensemble simplicial* X, α_X *est dans* W.

(b) *Soient* $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ *une structure homotopique sur* A, *et* W^a *la classe des équivalences faibles absolues relatives à cette structure. Si pour tout entier* $m \geqslant 0$, α_{Δ_m} *est dans* W^a, *alors pour tout ensemble simplicial* X, α_X *est dans* W^a.

(c) *Soit* $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ *une structure homotopique sur* A, *et supposons que pour tout ensemble simplicial* X, α_X *soit un monomorphisme, et que pour tout entier* $m \geqslant 0$, α_{Δ_m} *soit dans* An. *Alors pour tout ensemble simplicial* X, α_X *est dans* An.

Démonstration. — Les assertions (a) et (b) résultent du lemme 1.1.15, de la proposition 1.3.60, de la remarque 1.4.16, et de la proposition précédente. L'assertion (c) résulte de l'assertion (b) et de la proposition 1.3.56. □

2.1.14. — La catégorie Δ est par définition une sous-catégorie pleine de Cat. On rappelle que le foncteur *nerf* $N : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta}$, $C \longmapsto N\,C$, est le foncteur qui à une petite catégorie C associe l'ensemble simplicial $\Delta_n \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathit{Cat}}(\Delta_n, C)$.

Lemme 2.1.15. — *Soit* A *une petite catégorie admettant un objet final. Alors toute flèche* $f : \Delta_0 \longrightarrow N\,A$ *est une extension anodine.*

Démonstration. — Notons $s : \Delta_0 \longrightarrow N\,A$ la flèche correspondant au 0-simplexe défini par l'objet final de A. On vérifie facilement que ce morphisme est un rétracte par déformation fort, et donc qu'il est une extension anodine de $\widehat{\Delta}$ en vertu du

lemme 1.3.38. En outre, pour $\varepsilon = 0, 1$, le morphisme $\delta_1^\varepsilon : \Delta_0 \longrightarrow \Delta_1$ est une extension anodine. Si $f : \Delta_0 \longrightarrow N\,A$ est un morphisme quelconque, il existe une flèche $h : \Delta_1 \longrightarrow N\,A$ telle que $h\delta_1^1 = f$ et $h\delta_1^0 = s$. Supposons que f soit distinct de s. Alors h est un monomorphisme, et comme δ_1^0 et s sont des extensions anodines, il résulte du corollaire 1.3.58 qu'il en est de même de h. On en déduit que f est une extension anodine. □

Proposition 2.1.16. — *Soient A, B deux petites catégories admettant un objet final. Alors toute flèche $f : N\,A \longrightarrow N\,B$ est une équivalence faible absolue.*

Démonstration. — Le choix d'un 0-simplexe de $N\,A$, par exemple celui défini par l'objet final de A, définit un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \Delta_0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ N\,A & \xrightarrow[f]{} & N\,B \end{array}$$

dont les flèches obliques sont, en vertu du lemme précédent, des extensions anodines. L'assertion résulte donc de la proposition 1.3.57. □

Lemme 2.1.17. — *Soit C une classe de flèches de $\widehat{\Delta}$ satisfaisant aux conditions suivantes.*

(a) *La classe C est stable par compositions et par images directes.*

(b) *Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux monomorphismes de $\widehat{\Delta}$, et si f et gf sont dans C, alors g est dans C.*

(c) *Pour tout $m \geqslant 0$, toute flèche $\Delta_0 \longrightarrow \Delta_m$ est dans C.*

Alors pour tout $m \geqslant 0$, la flèche

$$\delta_1^\varepsilon \times 1_{\Delta_m} : \Delta_m \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_m\ , \quad \varepsilon = 0, 1\ ,$$

est dans C.

Démonstration. — Pour tous m, $n \geqslant 0$, et tout monomorphisme $\Delta_m \longrightarrow \Delta_n$, en choisissant un morphisme $\Delta_0 \longrightarrow \Delta_m$, et en considérant le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 & \longrightarrow & \Delta_m \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Delta_n & \end{array}\ ,$$

on remarque que les conditions (b) et (c) impliquent que $\Delta_m \longrightarrow \Delta_n$ est dans C.

Soit $m \geqslant 0$. Pour $0 \leqslant k \leqslant m$, on définit des monomorphismes de $\widehat{\Delta}$

$$u_k : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_m$$

par

$$u_k(l) = \begin{cases} (0, l) & \text{si } \ 0 \leqslant l \leqslant k \\ (1, l-1) & \text{si } \ k < l \leqslant m+1 \end{cases}\ .$$

En posant $L_k = \cup_{0 \leqslant k' \leqslant k} \operatorname{Im} u_{k'}$, $0 \leqslant k \leqslant m$, on obtient une suite de sous-objets

$$\Delta_{m+1} \simeq L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_m = \Delta_1 \times \Delta_m \ ,$$

telle que pour $0 \leqslant k < m$, on ait $L_k \cap \operatorname{Im} u_{k+1} \simeq \Delta_m$, l'inclusion

$$L_k \cap \operatorname{Im} u_{k+1} \longrightarrow \operatorname{Im} u_{k+1}$$

s'identifiant au monomorphisme $\delta_{m+1}^{k+1} : \Delta_m \longrightarrow \Delta_{m+1}$. On a donc des carrés cocartésiens du type

$$\begin{array}{ccc} \Delta_m & \xrightarrow{\delta_{m+1}^{k+1}} & \Delta_{m+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_k & \longrightarrow & L_{k+1} \end{array} \ ,$$

et la condition (a) entraîne que l'inclusion $L_k \longrightarrow L_{k+1}$ est dans C, ce qui implique qu'il en est de même de la flèche composée $u_0 : \Delta_{m+1} \simeq L_0 \longrightarrow L_m = \Delta_1 \times \Delta_m$. En vertu de (a) et (c), on en déduit que les morphismes $\Delta_0 \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_m$ définis par $(0,0)$ et $(1,0)$ sont dans C, et par suite, par (b) et (c), que les morphismes $\delta_1^\varepsilon \times 1_{\Delta_m} : \Delta_m \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_m$ sont aussi dans C. □

Remarque 2.1.18. — Dans le lemme précédent, on peut remplacer la condition (c) par la condition plus faible

(c′) Pour tout $m \geqslant 0$, les flèches

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 & \xrightarrow{i_m^0} & \Delta_m \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \Delta_0 & \xrightarrow{i_m^m} & \Delta_m \\ 0 & \longmapsto & m \end{array}$$

sont dans C.

En effet, pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant m$, on a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & \longmapsto & 0 \\ 0 & & \Delta_0 & \xrightarrow{i_{m-k}^0} & \Delta_{m-k} \quad l \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_k^k} & & \downarrow \quad \downarrow \\ k & & \Delta_k & \longrightarrow & \Delta_m \quad l+k \\ & & l & \longmapsto & l \end{array}$$

le composé $\Delta_0 \longrightarrow \Delta_m$ étant défini par $0 \longmapsto k$.

Théorème 2.1.19. — *La classe des extensions anodines de $\widehat{\Delta}$ est la plus petite classe C de flèches de $\widehat{\Delta}$ satisfaisant aux conditions suivantes.*

(a) *La classe C est stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes.*

(b) *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *et* $g : Y \longrightarrow Z$ *sont deux monomorphismes composables de* $\widehat{\Delta}$ *et si* f *et* gf *sont dans* C*, alors* g *est dans* C*.*

(c) *Pour tout* $m \geqslant 0$*, toute flèche* $\Delta_0 \longrightarrow \Delta_m$ *est dans* C*.*

Démonstration. — La classe des extensions anodines satisfait aux conditions (a), (b), et (c) en vertu de la remarque 1.3.11, du corollaire 1.3.58, et du lemme 2.1.15 respectivement. D'autre part, il résulte du lemme précédent que les conditions (a), (b), et (c) impliquent que pour tout $m \geqslant 0$, les morphismes $\delta_1^\varepsilon \times 1_{\Delta_m} : \Delta_m \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_m$, $\varepsilon = 0, 1$, sont dans C. La proposition 1.1.16, appliquée aux foncteurs $F = 1_{\widehat{\Delta}}$, $G = \Delta_1 \times 1_{\widehat{\Delta}}$, aux morphismes de foncteurs $\delta_1^\varepsilon \times 1_{1_{\widehat{\Delta}}}$, $\varepsilon = 0, 1$, et à la classe formée des monomorphismes appartenant à C, implique donc, en vertu de la proposition 2.1.12, que pour tout ensemble simplicial X, les morphismes $\delta_1^\varepsilon \times 1_X : X \longrightarrow \Delta_1 \times X$ sont dans C. Le théorème résulte alors du corollaire 1.3.59. □

Corollaire 2.1.20. — *La classe des* ∞*-équivalences de* $\widehat{\Delta}$ *est la plus petite classe* C *de flèches de* $\widehat{\Delta}$ *satisfaisant aux conditions suivantes.*

(a) *La classe des monomorphismes de* $\widehat{\Delta}$ *appartenant à* C *est stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes.*

(b) *Si dans un triangle commutatif de* $\widehat{\Delta}$ *deux des trois flèches sont dans* C*, il en est de même de la troisième.*

(c) *Pour tout* $m \geqslant 0$*, la flèche* $\Delta_m \longrightarrow \Delta_0$ *est dans* C*.*

Démonstration. — Le corollaire résulte aussitôt du scholie 1.3.45, et du théorème précédent, appliqué à la classe des monomorphismes de $\widehat{\Delta}$ appartenant à C. □

Corollaire 2.1.21. — *Le* Δ*-localisateur* W_∞ *est le* Δ*-localisateur engendré par les morphismes* $\Delta_m \longrightarrow \Delta_0$*,* $m \geqslant 0$*.*

Démonstration. — Cela résulte du corollaire 1.4.7, et du corollaire précédent. □

Corollaire 2.1.22. — *Soient* A *une petite catégorie,* W *un* A*-localisateur, et* $F : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ *un foncteur commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes. Si pour tout* $m \geqslant 0$*, le morphisme* $F\Delta_m \longrightarrow F\Delta_0$ *est dans* W*, alors le foncteur* F *transforme les* ∞*-équivalences en* W*-équivalences.*

Démonstration. — La classe des flèches de $\widehat{\Delta}$ dont l'image par F est dans W satisfait, en vertu du corollaire 1.4.7, aux conditions (a), (b), et (c) du corollaire 2.1.20, ce qui prouve l'assertion. □

2.1.23. — On rappelle que si $u : A \longrightarrow C$ est un foncteur défini sur une petite catégorie, et à valeur dans une catégorie admettant des petites limites inductives, il existe un unique foncteur $u_! : \widehat{A} \longrightarrow C$ qui commute aux petites limites inductives prolongeant u, et que le foncteur $u_!$ admet un adjoint à droite, noté $u^* : C \longrightarrow \widehat{A}$, défini par $c \longmapsto \big(a \mapsto \mathrm{Hom}_C(u(a), c)\big)$.

Proposition 2.1.24. — *Soit* $i : \Delta \longrightarrow \mathit{Cat}$ *un foncteur satisfaisant aux conditions suivantes :*

(a) *pour tout* $m \geqslant 0$, $i(\Delta_m)$ *admet un objet final ;*
(b) $i(\delta_1^1) \neq i(\delta_1^0)$.

Soit $N\,i : \Delta \longrightarrow \widehat{\Delta}$ *le composé de* i *avec le foncteur nerf, et posons* $F = (N\,i)_!$. *Alors le foncteur* $F : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ *respecte les extensions anodines.*

Démonstration. — La condition (b) implique en vertu du lemme 2.1.10 que le foncteur F respecte les monomorphismes. Comme ce foncteur commute aux petites limites inductives, on en déduit que la classe des flèches de $\widehat{\Delta}$ dont l'image par F est une extension anodine satisfait aux conditions (a) et (b) du théorème 2.1.19. D'autre part, en vertu des propositions 1.3.56 et 2.1.16, la condition (a) de la proposition implique que cette classe satisfait aussi à la condition (c) du théorème. On en déduit qu'elle contient les extensions anodines, ce qui prouve la proposition. □

Proposition 2.1.25. — *Soient* $i_\varepsilon : \Delta \longrightarrow \mathit{Cat}$, $\varepsilon = 0, 1$, *deux foncteurs satisfaisant aux conditions suivantes :*

(a) *pour tout* $m \geqslant 0$, $i_\varepsilon(\Delta_m)$ *admet un objet final ;*
(b) $i_\varepsilon(\delta_1^1) \neq i_\varepsilon(\delta_1^0)$.

On pose $F_\varepsilon = (N\,i_\varepsilon)_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}$, $\varepsilon = 0, 1$. *Alors tout morphisme de foncteurs* $\alpha : F_0 \longrightarrow F_1$ *est une équivalence faible absolue argument par argument.*

Démonstration. — Les foncteurs F_0 et F_1 commutent aux petites limites inductives, et il résulte de la condition (b) et du lemme 2.1.10 qu'ils respectent les monomorphismes. En vertu du corollaire 2.1.13, (b), il suffit donc donc de prouver que pour tout $m \geqslant 0$,

$$\alpha_{\Delta_m} : F_0(\Delta_m) = N\,i_0(\Delta_m) \longrightarrow N\,i_1(\Delta_m) = F_1(\Delta_m)$$

est une équivalence faible absolue. Mais cela résulte de l'hypothèse (a) et de la proposition 2.1.16. □

2.1.26. — On introduit à présent les foncteurs de *subdivision barycentrique* et d'*extension de Kan* (d'après [**91**]). Soit Ord la catégorie des ensembles ordonnés. On définit un foncteur $\xi : \mathit{Ord} \longrightarrow \mathit{Cat}$, qui à chaque ensemble ordonné E, associe l'ensemble des sous-ensembles totalement ordonnés finis et non vides de E, ordonné par l'inclusion (puis vu comme une catégorie), et à chaque application croissante $f : E \longrightarrow F$, associe l'application croissante $\xi f : \xi E \longrightarrow \xi F$, $S \longmapsto f(S)$. En composant avec le foncteur nerf $N : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta}$, on obtient un foncteur $N\,\xi : \mathit{Ord} \longrightarrow \widehat{\Delta}$. Comme Δ est une sous-catégorie pleine de Ord, cela définit par restriction un foncteur $\sigma : \Delta \longrightarrow \widehat{\Delta}$, $\Delta_n \longmapsto N\,\xi\Delta_n$. On obtient ainsi un foncteur

$$Sd = \sigma_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}\ ,$$

lequel admet un adjoint à droite

$$Ex = \sigma^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}\ .$$

Explicitement, pour tout ensemble simplicial X, et tout entier $m \geqslant 0$,

$$(Ex\,X)_m = \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(N\,\xi\Delta_m, X)\ .$$

On remarque que pour tout ensemble ordonné E, il existe une application croissante $\alpha_E : \xi E \longrightarrow E$, qui à $S \subset E$ associe $\max S$. Si $h : \Delta \longrightarrow \widehat{\Delta}$ est le plongement de Yoneda, cela définit un morphisme de foncteurs $\alpha : \sigma \longrightarrow h$, d'où un morphisme de foncteurs $\alpha : Sd \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$. Par adjonction, on obtient un morphisme de foncteurs $\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex$. Il est immédiat que le foncteur Sd respecte les monomorphismes en vertu du lemme 2.1.10, et comme pour tout $m \geqslant 0$, $\alpha_{\Delta_m} : Sd\,\Delta_m = N\,\xi\Delta_m \longrightarrow \Delta_m$ est un épimorphisme, pour tout ensemble simplicial X, $\beta_X : X \longrightarrow Ex\,X$ est un monomorphisme.

Corollaire 2.1.27. — *Le foncteur Sd respecte les extensions anodines, et le foncteur Ex respecte les fibrations de Kan. De plus, le morphisme de foncteurs $\alpha : Sd \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ est une équivalence faible absolue argument par argument.*

Démonstration. — Le corollaire résulte aussitôt des propositions 2.1.24 et 2.1.25, et d'un argument standard d'adjonction. □

2.1.28. — Soit Y un ensemble simplicial. On définit un foncteur

$$Sd^Y : \widehat{\Delta}/Y \longrightarrow \widehat{\Delta}/Y$$

en posant pour tout objet $(X, f : X \longrightarrow Y)$ de $\widehat{\Delta}/Y$,

$$Sd^Y(X, f) = (Sd\,X, \alpha_Y\,Sd\,f) = (Sd\,X, f\alpha_X)\ ,$$

et pour toute flèche $g : (X, f) \longrightarrow (X', f')$ de $\widehat{\Delta}/Y$, $Sd^Y(g) = Sd\,g$.

$$Sd^Y\left(\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ g\ } & X' \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ & Y & \end{array}\right) \quad = \quad \begin{array}{ccc} Sd\,X & \xrightarrow{\ Sd\,g\ } & Sd\,X' \\ & {\scriptstyle f\alpha_X}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'\alpha_{X'}} & \\ & Y & \end{array}$$

On définit un morphisme de foncteurs $\alpha^Y : Sd^Y \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}/Y}$, par $\alpha^Y_{(X,f)} = \alpha_X$, pour $(X, f) \in \mathrm{Ob}\ \widehat{\Delta}/Y$.

$$\alpha^Y_{(X,f)} \quad = \quad \begin{array}{ccc} Sd\,X & \xrightarrow{\ \alpha_X\ } & X \\ & {\scriptstyle f\alpha_X}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & Y & \end{array}$$

Le foncteur Sd^Y admet un adjoint à droite $Ex^Y : \widehat{\Delta}/Y \longrightarrow \widehat{\Delta}/Y$, tel que pour tout objet $(X, f : X \longrightarrow Y)$ de $\widehat{\Delta}/Y$,

$$Ex^Y(X, f) = (Y \times_{Ex\,Y} Ex\,X\ ,\ Y \times_{Ex\,Y} Ex\,X \longrightarrow Y)\ ,$$

où $Y \times_{Ex\,Y} Ex\,X \longrightarrow Y$ désigne le morphisme obtenu de $Ex\,f : Ex\,X \longrightarrow Ex\,Y$ par le changement de base $\beta_Y : Y \longrightarrow Ex\,Y$. Le morphisme de foncteurs α^Y définit par adjonction un morphisme de foncteurs $\beta^Y : 1_{\widehat{\Delta}/Y} \longrightarrow Ex^Y$ tel que pour tout objet $(X, f : X \longrightarrow Y)$ de $\widehat{\Delta}/Y$,

$$\beta^Y_{(X,f)} = (f, \beta_X) : X \longrightarrow Y \times_{Ex\,Y} Ex\,X$$

soit le morphisme déduit du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta_X} & Ex\,X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ex\,f} \\ Y & \xrightarrow[\beta_Y]{} & Ex\,Y \end{array} .$$

En considérant la structure homotopique sur Δ/Y induite par celle sur Δ (cf. 1.3.54), il résulte du corollaire 2.1.27 que le foncteur Sd^Y respecte les extensions anodines de $\widehat{\Delta}/Y$, et que α^Y est une équivalence faible argument par argument. Par un argument standard d'adjonction, on en déduit que Ex^Y respecte les fibrations naïves de $\widehat{\Delta}/Y$, et en particulier les objets fibrants.

Lemme 2.1.29. — *Soient C une catégorie de modèles fermée, $G : C \longrightarrow C$ un endofoncteur admettant un adjoint à droite D, et respectant les cofibrations et les cofibrations triviales. On se donne aussi un morphisme de foncteurs $\alpha : G \longrightarrow 1_C$, on note $\beta : 1_C \longrightarrow D$ le morphisme obtenu par adjonction, et on suppose que pour tout objet cofibrant X de C, le morphisme α_X est une équivalence faible. Alors pour tout objet fibrant X, le morphisme $\beta_X : X \longrightarrow DX$ est une équivalence faible.*

Démonstration. — Cela est un cas particulier de [**74**, corollaire 1.4.4 (b)]. □

Proposition 2.1.30. — *Pour toute fibration de Kan $p : X \longrightarrow Y$, le morphisme $(p, \beta_X) : X \longrightarrow Y \times_{Ex\,Y} Ex\,X$ est une extension anodine.*

Démonstration. — Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration de Kan. On va appliquer le lemme précédent à la catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\Delta}/Y$ définie par la structure homotopique induite sur Δ/Y, au couple de foncteurs adjoints Sd^Y, Ex^Y, et aux morphismes de foncteurs $\alpha^Y : Sd^Y \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}/Y}$, $\beta^Y : 1_{\widehat{\Delta}/Y} \longrightarrow Ex^Y$. Comme le foncteur Sd respecte les monomorphismes, il en est de même pour Sd^Y, et comme α^Y est une équivalence faible argument par argument, Sd^Y respecte les équivalences faibles. Le foncteur Sd^Y respecte donc les cofibrations et les cofibrations triviales de $\widehat{\Delta}/Y$. Comme p est une fibration de Kan, (X, p) est un objet fibrant de $\widehat{\Delta}/Y$,

et il résulte du lemme précédent que

$$(X,p) \xrightarrow{\beta^Y_{(X,p)}} Ex^Y(X,p) = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(p,\beta_X)} & Y \times_{Ex\,Y} Ex\,X \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle pr_1} & \\ & Y & \end{array}$$

est une équivalence faible de $\widehat{\Delta}/Y$. Le morphisme β_X étant un monomorphisme, il en est de même de $\beta^Y_{(X,p)}$, qui est donc une cofibration triviale de $\widehat{\Delta}/Y$. Mais (X,p) est un objet fibrant de $\widehat{\Delta}/Y$, donc $Ex^Y(X,p)$ aussi, et par suite il résulte du corollaire 1.3.35 que $\beta^Y_{(X,p)}$ est une extension anodine de $\widehat{\Delta}/Y$. On en déduit que $(p,\beta_X) : X \longrightarrow Y \times_{Ex\,Y} Ex\,X$ est une extension anodine de $\widehat{\Delta}$. □

2.1.31. — Pour $n \geqslant 0$, on a un morphisme de foncteurs

$$\beta_{Ex^n} : Ex^n \longrightarrow Ex^{n+1} ,$$

ce qui définit un système inductif de foncteurs,

$$1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex \longrightarrow \cdots \longrightarrow Ex^n \longrightarrow Ex^{n+1} \longrightarrow \cdots .$$

On obtient ainsi un foncteur

$$Ex^\infty = \varinjlim_n Ex^n : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} .$$

On définit par récurrence des morphismes $\beta^n : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex^n$ par $\beta^0 = 1_{1_{\widehat{\Delta}}}$, et $\beta^{n+1} = \beta_{Ex^n}\beta^n$. Cela induit un morphisme de foncteurs $\beta^\infty : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex^\infty$.

Corollaire 2.1.32. — *Pour toute fibration de Kan $p : X \longrightarrow Y$, le morphisme $(p,\beta^\infty_X) : X \longrightarrow Y \times_{Ex^\infty Y} Ex^\infty X$ est une extension anodine.*

Démonstration. — Le morphisme (p,β^∞_X) est le composé transfini de la suite

$$X \to Y \times_{Ex\,Y} Ex\,X \to \cdots \to Y \times_{Ex^nY} Ex^nX \xrightarrow{1_Y \times_{\beta_{Ex^nY}} \beta_{Ex^nX}} Y \times_{Ex^{n+1}Y} Ex^{n+1}X \to \cdots .$$

Comme le foncteur Ex respecte les fibrations de Kan (2.1.27), $Ex^n\,p$ est une fibration de Kan, et le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y \times_{Ex^n Y} Ex^n X & \longrightarrow & Ex^n X \\ {\scriptstyle p_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ex^n p} \\ Y & \longrightarrow & Ex^n Y \end{array}$$

implique que le morphisme p_n est une fibration de Kan. En vertu de la proposition 2.1.30, appliquée à la fibration de Kan p_n, la flèche

$$Y \times_{Ex^n Y} Ex^n X \xrightarrow{(p_n,\beta)} Y \times_{Ex\,Y} Ex(Y \times_{Ex^n Y} Ex^n X)$$

est une extension anodine, et les isomorphismes

$$Y \times_{Ex\,Y} Ex(Y \times_{Ex^n Y} Ex^n X) \simeq Y \times_{Ex\,Y} Ex\,Y \times_{Ex^{n+1}Y} Ex^{n+1}X \simeq Y \times_{Ex^{n+1}Y} Ex^{n+1}X$$

identifient cette flèche au morphisme $1_Y \times_{\beta_{Ex^n Y}} \beta_{Ex^n X}$. Le lemme résulte donc de la stabilité des extensions anodines par compositions transfinies. □

2.1.33. — On définit à présent la catégorie $\mathcal{CS}$ des *complexes simpliciaux combinatoires* : un complexe simplicial combinatoire est un couple $X = (E, \Phi)$, où E est un ensemble ordonné, et où Φ est un sous-ensemble de ξE tel que pour tous $S \in \Phi$, $S' \subset S$, si $S' \neq \varnothing$, alors $S' \in \Phi$, et tel que pour tout élément x de E, le singloton $\{x\}$ soit dans Φ. Un morphisme de complexes simpliciaux combinatoires $f : (E_0, \Phi_0) \longrightarrow (E_1, \Phi_1)$ est une application croissante $f : E_0 \longrightarrow E_1$ telle que $f(\Phi_0) \subset \Phi_1$. On a un foncteur évident $\kappa : \Delta \longrightarrow \mathcal{CS}$, défini par $\Delta_n \longmapsto (\Delta_n, \xi\Delta_n)$ (cf. 2.1.26), ce qui induit un foncteur

$$\kappa^* : \mathcal{CS} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad , \qquad X \longmapsto (\Delta_n \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{CS}}(\kappa\Delta_n, X)) \ .$$

Concrètement, si $X = (E, \Phi)$ est un complexe simplicial combinatoire, un n-simplexe de $\kappa^* X$ est une application croissante $f : \Delta_n \longrightarrow E$ telle que $f(\Delta_n) \in \Phi$. On remarque que si E est un ensemble ordonné, alors $\kappa^*(E, \xi E)$ n'est autre que le nerf de E.

Exemple 2.1.34. — On note Φ_n^k (resp. $\partial\Phi_n$) l'ensemble des parties non vides de Δ_n qui ne contiennent pas $\{0, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$ (resp. $\{0, \ldots, n\}$). Alors $\kappa^*(\Delta_n, \Phi_n^k) = \Lambda_n^k$ (resp. $\kappa^*(\Delta_n, \partial\Phi_n) = \partial\Delta_n$).

2.1.35. — Soit $X = (E, \Phi)$ un complexe simplicial combinatoire. On définit un morphisme naturel

$$Sd\, \kappa^* X \longrightarrow N\, \Phi$$

(où Φ est vu comme un sous-ensemble ordonné de ξE, et donc comme une catégorie) de la manière suivante. Par définition, on a

$$Sd\, \kappa^* X \ = \varinjlim_{\substack{f : \Delta_n \longrightarrow E \\ \text{croissante} \\ f(\Delta_n) \in \Phi}} N\, \xi\Delta_n \quad .$$

Pour toute $f : \Delta_n \longrightarrow E$ croissante telle que $f(\Delta_n) \in \Phi$, on définit une application croissante

$$\xi\Delta_n \longrightarrow \Phi \quad , \qquad (S \subset \Delta_n) \longmapsto f(S) \ ,$$

d'où un morphisme d'ensembles simpliciaux $N\, \xi\Delta_n \longrightarrow N\, \Phi$. Par la propriété universelle des limites inductives, on en déduit le morphisme annoncé $Sd\, \kappa^* X \longrightarrow N\, \Phi$.

Lemme 2.1.36. — *Si E est un ensemble ordonné, alors le morphisme canonique $Sd\, N\, E \longrightarrow N\, \xi E$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'assertion est vraie par définition si $E = \Delta_n$ pour $n \geqslant 0$. Elle est donc vraie pour tout ensemble totalement ordonné fini E (le cas $E = \varnothing$ est trivial). D'autre part, tout ensemble ordonné E est la réunion de ses parties finies et totalement

ordonnées. Si P désigne l'ensemble des parties finies et totalement ordonnées de E, il suffit de montrer que les morphismes évidents

$$\varinjlim_{S \in P} N\,S \longrightarrow N\,E \quad \text{et} \quad \varinjlim_{S \in P} N\,\xi S \longrightarrow N\,\xi E$$

sont des isomorphismes. Comme les sous-objets de $N\,E$ (resp. de $N\,\xi E$) de la forme $N\,S$ (resp. de la forme $N\,\xi S$), $S \in P$, sont stables par intersections finies, cela peut encore se reformuler en disant que $N\,E$ (resp. $N\,\xi E$) est la réunion de ses sous-objets de la forme $N\,S$ (resp. de la forme $N\,\xi S$), $S \in P$, ce qui est évident. □

Lemme 2.1.37. — *Pour tout complexe simplicial combinatoire $X = (E, \Phi)$, le morphisme canonique $Sd\,\kappa^* X \longrightarrow N\,\Phi$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Considérons le monomorphisme $X = (E, \Phi) \longrightarrow (E, \xi E)$ de $\mathcal{CS}$, et le carré commutatif correspondant

$$\begin{array}{ccc} Sd\,\kappa^*(E,\Phi) & \longrightarrow & Sd\,\kappa^*(E,\xi E) = Sd\,N\,E \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\,\Phi & \longrightarrow & N\,\xi E \end{array} .$$

Comme les foncteurs Sd, κ^* et N respectent les monomorphismes, les flèches horizontales sont des monomorphismes, et il résulte du lemme précédent que la flèche verticale de droite est un isomorphisme. On en déduit que la flèche verticale de gauche est un monomorphisme. Il nous reste donc à vérifier que cette flèche est aussi un épimorphisme. Considérons un n-simplexe $S_0 \subset \cdots \subset S_n$ de $N\,\Phi$. Il définit un n-simplexe de $N\,\xi S_n$ dont l'image par l'inclusion de $N\,\xi S_n$ dans $N\,\Phi$ est notre n-simplexe préféré. Or il résulte de la construction même de $Sd\,X$ que l'inclusion de $N\,\xi S_n$ dans $N\,\Phi$ se factorise par $Sd\,X$, ce qui prouve la propriété voulue. □

Remarque 2.1.38. — Le composé de l'isomorphisme inverse $N\,\Phi \longrightarrow Sd\,\kappa^* X$ et du morphisme $\alpha_{\kappa^* X} : Sd\,\kappa^* X \longrightarrow \kappa^* X$ est le morphisme $N\,\Phi \longrightarrow \kappa^* X$ associant à un m-simplexe $S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_m$ de $N\,\Phi$ le m-simplexe de $\kappa^* X$ défini par l'application croissante

$$\Delta_m \longrightarrow E \quad , \qquad k \longmapsto \max S_k \ .$$

Pour le voir, on se ramène aussitôt par fonctorialité au cas où $X = (\Delta_n, \xi\Delta_n)$, auquel cas il s'agit de la définition même de α.

La proposition ci-dessous est issue de [**91**], et la démonstration que nous en donnons ici est essentiellement l'originale.

***Proposition 2.1.39* (Kan [91]).** — *Pour tout ensemble simplicial X, $Ex^\infty X$ est un complexe de Kan.*

Démonstration. — Soient $n \geqslant 1$, et $0 \leqslant k \leqslant n$. On va montrer l'existence d'un morphisme $\psi_n^k : Sd^2\,\Delta_n \longrightarrow Sd\,\Lambda_n^k$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} Sd^2\,\Lambda_n^k & \xrightarrow{Sd\,\alpha_{\Lambda_n^k}} & Sd\,\Lambda_n^k \\ & \searrow \quad \nearrow_{\psi_n^k} & \\ & Sd^2\,\Delta_n & \end{array} .$$

En vertu des lemmes précédents et de l'exemple 2.1.34, on a

$$\begin{aligned} Sd\,\Lambda_n^k &= Sd\,\kappa^*(\Delta_n, \Phi_n^k) \simeq N\,\Phi_n^k\ , \\ Sd^2\,\Lambda_n^k &\simeq Sd\,N\,\Phi_n^k \simeq N\,\xi\Phi_n^k\ , \\ Sd^2\,\Delta_n &\simeq N\,\xi^2\Delta_n\ , \end{aligned}$$

et il résulte de la remarque 2.1.38 que le morphisme $Sd\,\alpha_{\Lambda_n^k}$ s'identifie au nerf de l'application croissante

$$a_n^k : \xi\Phi_n^k \longrightarrow \Phi_n^k \quad , \qquad \mathcal{S} \longmapsto \{\max S \mid S \in \mathcal{S}\}\ .$$

Il suffit donc de construire un triangle commutatif d'ensembles ordonnés

$$\begin{array}{ccc} \xi\Phi_n^k & \xrightarrow{a_n^k} & \Phi_n^k \\ & \searrow \quad \nearrow_{b_n^k} & \\ & \xi^2\Delta_n & \end{array} .$$

On définit une application (non nécessairement croissante) $c_n^k : \xi\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ en posant pour $S \in \xi\Delta_n$, $c_n^k(S) = \max S$ si S est dans Φ_n^k, et $c_n^k(S) = k$ sinon, d'où une application croissante

$$\xi^2\Delta_n \longrightarrow \xi\Delta_n \quad , \qquad \mathcal{S} \longmapsto \{c_n^k(S) \mid S \in \mathcal{S}\}\ .$$

Il est immédiat que cette application se factorise par Φ_n^k, et définit une application croissante $b_n^k : \xi^2\Delta_n \longrightarrow \Phi_n^k$ rendant commutatif le triangle ci-dessus.

Montrons à présent que pour tout ensemble simplicial X, et pour tout morphisme $a : \Lambda_n^k \longrightarrow Ex\,X$, il existe une flèche $b : \Delta_n \longrightarrow Ex^2\,X$ telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{a} & Ex\,X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{Ex\,X}} \\ \Delta_n & \xrightarrow[b]{} & Ex^2\,X \end{array}$$

soit commutatif. En effet, la donnée de a correspond par adjonction à la donnée d'un morphisme $u : Sd\,\Lambda_n^k \longrightarrow X$, et en vertu de ce qui précède, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Sd^2\,\Lambda_n^k & \xrightarrow{Sd\,\alpha_{\Lambda_n^k}} & Sd\,\Lambda_n^k & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow & \nearrow_{\psi_n^k} & & & \\ Sd^2\,\Delta_n & & & & \end{array} .$$

Le morphisme $u\psi_n^k$ correspond par adjonction à un morphisme b qui rend commutatif le carré ci-dessus.

Montrons enfin que pour tout ensemble simplicial X, l'ensemble simplicial $Ex^\infty X$ est un complexe de Kan. Soit $\Lambda_n^k \longrightarrow Ex^\infty X$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Comme Λ_n^k est de présentation finie, ce morphisme se factorise par $Ex^m X$ pour un entier m assez grand, et en vertu de ce qui précède, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{a} & Ex^m X & \longrightarrow & Ex^\infty X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{Ex^m X}} & \nearrow & \\ \Delta_n & \xrightarrow[b]{} & Ex^{m+1} X & & \end{array} .$$

La proposition 2.1.4 achève donc cette démonstration. □

Corollaire 2.1.40. — *Pour toute fibration de Kan p, $Ex^\infty p$ est une fibration entre objets fibrants.*

Démonstration. — Cela résulte directement de la construction du foncteur Ex^∞, du corollaire 2.1.27, et des propositions 2.1.39, 2.1.6 et 1.3.36. □

Proposition 2.1.41. — *Toute fibration de Kan est une fibration.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 1.3.47, il suffit de montrer que toute fibration de Kan $p : X \longrightarrow Y$ se décompose en une extension anodine suivie d'une fibration. En considérant le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y \times_{Ex^\infty Y} Ex^\infty X & \longrightarrow & Ex^\infty X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ex^\infty p} \\ Y & \xrightarrow[\beta_Y^\infty]{} & Ex^\infty Y \end{array} ,$$

il résulte du corollaire précédent que q est une fibration. Comme p est le composé

$$X \xrightarrow{(p,\beta_Y^\infty)} Y \times_{Ex^\infty Y} Ex^\infty X \xrightarrow{q} Y \quad ,$$

l'assertion résulte du corollaire 2.1.32. □

***Théorème 2.1.42* (Quillen [109]).** — *La catégorie des ensembles simpliciaux admet une structure de catégorie de modèles fermée propre, dont les cofibrations sont les monomorphismes, les cofibrations triviales, les extensions anodines, et les fibrations, les fibrations de Kan.*

Démonstration. — Cela résulte des propositions 2.1.5, 1.3.47, et 2.1.41. □

2.2. Caractérisation locale de la classe des ∞-équivalences

2.2.1. — On définit le foncteur « ensemble des composantes connexes »

$$\pi_0 : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

comme l'adjoint à gauche du foncteur

$$p_\Delta^* : \mathcal{E}ns \longrightarrow \widehat{\Delta} \qquad E \longmapsto \amalg_E \, \Delta_0 \ .$$

On vérifie facilement que pour tout ensemble simplicial X, on a une bijection naturelle

$$\pi_0(X) \simeq \mathrm{Coker}\left(X_1 \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_1, X) \underset{\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\delta_1^0, X)}{\overset{\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\delta_1^1, X)}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_0, X) \simeq X_0 \right) . \tag{2.2.1.1}$$

Autrement dit, $\pi_0(X)$ est l'ensemble des classes de Δ_1-homotopie de 0-simplexes de X. On appelle 0-*équivalences* les morphismes de $\widehat{\Delta}$ qui induisent une bijection après application du foncteur π_0.

Lemme 2.2.2. — *Les* 0*-équivalences forment un* Δ*-localisateur qui contient les* ∞*-équivalences.*

Démonstration. — En considérant sur $\mathcal{E}ns$ la structure de catégorie de modèles fermée ayant comme fibrations et cofibrations toutes les applications et comme équivalences faibles les bijections, et sur $\widehat{\Delta}$ celle du théorème 2.1.42, on remarque que le foncteur p_Δ^* respecte les fibrations. Par un argument standard d'adjonction, on en déduit que le foncteur π_0 respecte les cofibrations triviales, et il résulte alors du lemme de Ken Brown [**74**, lemme 1.1.12] que π_0 respecte les équivalences faibles, autrement dit, que toute ∞-équivalence est une 0-équivalence. En particulier, toute fibration triviale est une 0-équivalence, et comme le foncteur π_0 commute aux petites limites inductives, on en déduit aussitôt le lemme. □

Définition 2.2.3. — Soient A une petite catégorie, W une classe de flèches de $\widehat{A}$, et $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\widehat{A}$.

Le morphisme p est une W-*fibration faible* si pour tout élément $f : K \longrightarrow L$ de W, et pour tout morphisme $L \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$, si on forme les carrés cartésiens suivants,

$$\begin{array}{ccccc} K \times_Y X & \xrightarrow{g} & L \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ K & \xrightarrow[f]{} & L & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

la flèche g appartient à W.

Le morphisme p est W-*localement constant* si pour tout morphisme $f : a' \longrightarrow a$ de A, et pour tout morphisme $a \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$, si on forme les carrés cartésiens suivants,

$$\begin{array}{ccccc} a' \times_Y X & \xrightarrow{g} & a \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ a' & \xrightarrow[f]{} & a & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

la flèche g appartient à W.

Le morphisme p est une W-*équivalence universelle* si pour toute flèche $Y' \longrightarrow Y$, le morphisme image réciproque $p' : X' \longrightarrow Y'$ appartient à W.

$$\begin{array}{ccc} X' = Y' \times_Y X & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Exemple 2.2.4. — Il résulte du théorème 2.1.42 et de la proposition 1.5.18 que toute fibration de Kan est une W_∞-fibration faible. Plus généralement, pour toute petite catégorie A et pour tout A-localisateur propre W, toute fibration au sens de W est une W-fibration faible. Pour tout ensemble simplicial X, le morphisme canonique de X vers l'objet final Δ_0 de $\widehat{\Delta}$ est une W_∞-fibration faible (stabilité de W_∞ par produits finis). Tout morphisme d'ensembles simpliciaux qui est une W_∞-fibration faible est un morphisme W_∞-localement constant (toute flèche de la forme $\Delta_m \longrightarrow \Delta_n$ étant une W_∞-équivalence faible). La proposition 2.2.6 montre que la réciproque est vraie aussi.

Proposition 2.2.5. — *Soit* W *un* Δ*-localisateur. Un morphisme d'ensembles simpliciaux* $p : X \longrightarrow Y$ *est* W*-localement constant si et seulement si pour tous carrés cartésiens de la forme*

$$\begin{array}{ccccc} K \times_Y X & \xrightarrow{g} & L \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ K & \xrightarrow[f]{} & L & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

si f *est une* W_∞*-équivalence, alors* g *est une* W*-équivalence.*

Démonstration. — Il est évident que cette condition est suffisante, et il résulte aussitôt des théorèmes 2.1.42 et 2.1.19 assortis des sorites 1.5.9 qu'elle est nécessaire. □

Proposition 2.2.6. — *Soit $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'ensemble simpliciaux. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout morphisme $Z \longrightarrow Y$, le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

(b) *La flèche p est une W_∞-fibration faible.*

(c) *Le morphisme p est W_∞-localement constant.*

Démonstration. — L'équivalence des conditions (a) et (b) résulte de la proposition 1.5.18, et celle des conditions (b) et (c) est un cas particulier de la proposition ci-dessus. □

On dit qu'un ensemble simplicial X est *∞-asphérique* si le morphisme $X \longrightarrow \Delta_0$ est une ∞-équivalence.

Corollaire 2.2.7. — *Soit $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme W_∞-localement constant. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *La flèche p est une ∞-équivalence.*

(b) *Le morphisme p est une ∞-équivalence universelle.*

(c) *Les fibres de p sont ∞-asphériques.*

(c′) *Chaque composante connexe de Y possède un 0-simplexe y tel que la fibre de p en y soit ∞-asphérique.*

Démonstration. — L'équivalence des conditions (a) et (b) résulte immédiatement du critère (a) de la proposition 2.2.6, et l'implication $(b) \Rightarrow (c)$ est évidente. Montrons l'implication $(c) \Rightarrow (a)$. Notons D la classe des ensembles simpliciaux Y' tels que pour toute flèche $v : Y' \longrightarrow Y$, si l'on forme le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow[v]{} & Y \end{array} \quad ,$$

le morphisme p' soit une ∞-équivalence. Il résulte du lemme 1.4.15 et du corollaire 1.4.7 que la classe D est saturée par monomorphismes. D'autre part, pour tout $m \geqslant 0$, et tout morphisme $\Delta_m \longrightarrow Y$, si on choisit une flèche $\Delta_0 \longrightarrow \Delta_m$, et si on forme les carrés cartésiens

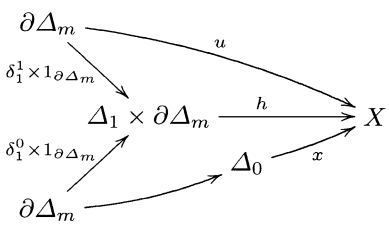
$$\begin{array}{ccccc} \Delta_0 \times_Y X & \longrightarrow & \Delta_m \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_0 & \longrightarrow & \Delta_m & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

la proposition 2.2.6 implique que le morphisme $\Delta_0 \times_Y X \longrightarrow \Delta_m \times_Y X$ est une ∞-équivalence. Comme par hypothèse $\Delta_0 \times_Y X \longrightarrow \Delta_0$ est une ∞-équivalence, on en déduit, par saturation faible, qu'il en est de même de $\Delta_m \times_Y X \longrightarrow \Delta_m$, ce qui prouve que Δ_m est dans D. La proposition 2.1.12 implique alors que Y est dans D, et en prenant le morphisme identique $1_Y : Y \longrightarrow Y$, on en déduit que p est une ∞-équivalence.

Il reste à montrer l'équivalence des conditions (c) et (c'). L'implication $(c) \Rightarrow (c')$ est évidente. Montrons l'implication $(c') \Rightarrow (c)$. Il suffit de montrer que si y_0 et y_1 sont deux 0-simplexes appartenant à une même composante connexe de Y, et si la fibre de p en y_0 est ∞-asphérique, alors il en est de même de la fibre de p en y_1. Cela résulte aussitôt du fait que le morphisme p est W_∞-localement constant, en remarquant que cela implique que pour tout 1-simplexe $y : \Delta_1 \longrightarrow Y$ de Y, la fibre de p en $y_0 = y\delta_1^1$, ou en $y_1 = y\delta_1^0$, est ∞-asphérique si et seulement si le produit fibré $\Delta_1 \times_Y X$ l'est. □

Lemme 2.2.8. — *Soit X un complexe de Kan. On suppose que pour tout $m \geqslant 0$, toute flèche $\partial\Delta_m \longrightarrow X$ est homotope à un morphisme constant. Alors X est contractile.*

Démonstration. — On va montrer que la flèche $X \longrightarrow \Delta_0$ est une fibration triviale, *i.e.* qu'elle satisfait à la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions $\partial\Delta_m \longrightarrow \Delta_m$, $m \geqslant 0$. Soit $u : \partial\Delta_m \longrightarrow X$ un morphisme. Par hypothèse, il existe une flèche $h : \Delta_1 \times \partial\Delta_m \longrightarrow X$, et un 0-simplexe x de X tels que le diagramme suivant soit commutatif.



Soit $v : \Delta_m \longrightarrow X$ le morphisme constant de valeurs x. Comme X est un complexe de Kan, il existe un relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 \times \partial\Delta_m \cup \{1\} \times \Delta_m & \xrightarrow{(h,v)} & X \\ \downarrow & \nearrow_{k} & \\ \Delta_1 \times \Delta_m & & \end{array} .$$

On pose $l = k \mid \{0\} \times \Delta_m = k(\delta_1^1 \times 1_{\Delta_m})$. Alors $l : \Delta_m \longrightarrow X$ relève u. □

On renvoie par exemple à [**60**, chap. VI, § 3] ou à [**64**, chap. I, section 1.7] pour la définition des groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial pointé.

Lemme 2.2.9. — *Pour qu'un complexe de Kan X soit ∞-asphérique, il faut et il suffit qu'il soit connexe, non vide, et que tous ses groupes d'homotopie soient triviaux, autrement dit, que pour tout 0-simplexe x de X, et tout entier $m \geqslant 1$, le groupe $\pi_m(X, x)$ soit trivial.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du lemme précédent. □

Le lemme 2.2.2 et le corollaire 2.2.7 déterminent totalement W_∞ dans le sens suivant.

Théorème 2.2.10. — *Soit W un Δ-localisateur vérifiant les propriétés suivantes.*

(i) *Toute W-équivalence est une 0-équivalence.*

(ii) *Un morphisme W-localement constant est une W-équivalence si et seulement s'il est une W-équivalence universelle.*

(iii) *Pour tout ensemble simplicial X, le morphisme canonique de X vers l'objet final Δ_0 de $\widehat{\Delta}$ est W-localement constant.*

Alors $\mathsf{W} = \mathsf{W}_\infty$.

Démonstration. — On va procéder en plusieurs étapes.

2.2.10.1. — *Toute ∞-équivalence est une W-équivalence.*

En effet, il résulte de (*iii*) que pour tout ensemble simplicial X, la projection $\Delta_1 \times X \longrightarrow X$ est une W-équivalence, ce qui permet de conclure en vertu de la définition même de W_∞ (cf. 2.1.3).

2.2.10.2. — *Une fibration de Kan est une W-équivalence si et seulement si elle est une W-équivalence universelle.*

Toute fibration de Kan est W_∞-localement constante (voir l'exemple 2.2.4) et donc est W-localement constante en vertu de 2.2.10.1. L'assertion résulte donc de la condition (*ii*).

2.2.10.3. — *Soit X un complexe de Kan tel que la flèche canonique $X \longrightarrow \Delta_0$ soit une* W*-équivalence. Alors X est ∞-asphérique.*

Il résulte de la condition (i) que $\pi_0(X)$ est l'ensemble à un élément, et donc en particulier que X n'est pas vide. Soit x un 0-simplexe de X. Comme X est un complexe de Kan, le morphisme canonique (où $\mathcal{Hom}$ désigne le Hom interne de $\widehat{\Delta}$)

$$q : \mathcal{Hom}(\Delta_1, X) \longrightarrow X \times X \simeq \mathcal{Hom}(\partial\Delta_1, X)$$

est une fibration de Kan (cf. [**60**, chap. VI, § 4.3]). D'autre part, si on forme les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega(X,x) & \longrightarrow & P(X,x) & \longrightarrow & \mathcal{Hom}(\Delta_1, X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\
\Delta_0 & \xrightarrow[x]{} & X & \xrightarrow[(1_X,x)]{} & X \times X \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} \\
 & & \Delta_0 & \xrightarrow[x]{} & X
\end{array} \quad ,$$

on obtient un diagramme dont toutes les flèches verticales sont des fibrations de Kan. Le morphisme composé $\mathcal{Hom}(\Delta_1, X) \longrightarrow X$ est une fibration triviale, et il résulte de 2.2.10.2 que $pr_2 : X \times X \longrightarrow X$ est une W-équivalence. On en déduit que le morphisme q est une W-équivalence. Par conséquent, en vertu encore de 2.2.10.2, $\Omega(X, x)$ est un complexe de Kan dont la flèche canonique vers Δ_0 est une W-équivalence. En itérant cette construction, on obtient une suite $\Omega^n(X, x)$ de complexes de Kan vérifiant la même propriété, telle que $\pi_0\Omega^n(X, x)$ soit le n-ième groupe d'homotopie de X au point x. La condition (i) et le lemme 2.2.9 impliquent donc l'assertion.

2.2.10.4. — *Toute fibration de Kan qui est une* W*-équivalence est une ∞-équivalence.*

Considérons une fibration de Kan $p : X \longrightarrow Y$ qui soit aussi une W-équivalence. En vertu de 2.2.10.2 et 2.2.10.3 les fibres de p sont ∞-asphériques. Comme toute fibration de Kan est un morphisme W_∞-localement constant (2.2.4), il résulte du corollaire 2.2.7 que p est une ∞-équivalence.

2.2.10.5. — *Toute* W*-équivalence est une ∞-équivalence.*

Cela résulte immédiatement de 2.2.10.1, de 2.2.10.4, et de l'existence pour tout morphisme de $\widehat{\Delta}$ d'une factorisation en une extension anodine suivie d'une fibration de Kan. □

Le reste de ce paragraphe est consacré à une démonstration élémentaire du théorème de Whitehead [**60**, chap. VI, § 5.6.1], n'utilisant pas la théorie des fibrations minimales.

Lemme 2.2.11. — *Soient X un ensemble simplicial, et m un entier, $m \geqslant 1$. On considère deux 0-simplexes x_0 et x_1 dans une même composante connexe de X. Alors si le groupe $\pi_m(X, x_0)$ est trivial, il en est de même du groupe $\pi_m(X, x_1)$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur m. On peut supposer que X est un complexe de Kan. Il existe alors un 1-simplexe $x : \Delta_1 \longrightarrow X$ tel que $x_0 = x\delta_1^1$ et $x_1 = x\delta_1^0$, et le morphisme canonique

$$q : \mathcal{H}om(\Delta_1, X) \longrightarrow X \times X \simeq \mathcal{H}om(\partial\Delta_1, X)$$

est une fibration de Kan ([**60**, chap. VI, § 4.3]). Considérons le diagramme formé de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(X, x_\varepsilon) & \xrightarrow{f_\varepsilon} & \Omega(X, x) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\Delta_1, X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \Delta_0 & \xrightarrow[\delta_1^{1-\varepsilon}]{} & \Delta_1 & \xrightarrow[(x,x)]{} & X \times X \end{array} \qquad \varepsilon = 0, 1$$

dont les flèches verticales sont des fibrations de Kan. Il résulte du théorème 2.1.42 que f_ε est une ∞-équivalence. En particulier, en vertu du lemme 2.2.2, on a des bijections

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_0(\Omega(X, x_0)) \simeq \pi_0(\Omega(X, x)) \simeq \pi_0(\Omega(X, x_1)) \simeq \pi_1(X, x_1) \ ,$$

ce qui prouve l'assertion pour $m = 1$. Supposons l'assertion établie pour m, et démontrons la pour $m + 1$. Comme f_ε est une ∞-équivalence, on a des bijections

$$\pi_{m+1}(X, x_\varepsilon) \simeq \pi_m(\Omega(X, x_\varepsilon), x_\varepsilon) \simeq \pi_m(\Omega(X, x), f_\varepsilon(x_\varepsilon)) \ , \quad \varepsilon = 0, 1 \ .$$

D'autre part, le morphisme $\Delta_1 \times \Delta_1 \longrightarrow X$ obtenu comme le composé de la première projection sur Δ_1 et de x définit un morphisme t de Δ_1 vers $\mathcal{H}om(\Delta_1, X)$ tel que $qt = (x, x)$. On en déduit l'existence d'une section s du morphisme de $\Omega(X, x)$ vers Δ_1 telle que $s\delta_1^{1-\varepsilon} = f_\varepsilon(x_\varepsilon)$ pour $\varepsilon = 0, 1$. En particulier, les 0-simplexes $f_0(x_0)$ et $f_1(x_1)$ sont dans une même composante connexe de $\Omega(X, x)$, et par hypothèse de récurrence, comme $\pi_m(\Omega(X, x), f_0(x_0))$ est trivial, il en est de même de $\pi_m(\Omega(X, x), f_1(x_1))$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 2.2.12. — *Soit X un ensemble simplicial. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *L'ensemble simplicial X est ∞-asphérique.*

(b) *L'ensemble simplicial X est connexe, non vide, et pour tout 0-simplexe x de X, et tout entier $m \geqslant 1$, le groupe $\pi_m(X, x)$ est trivial.*

(b′) *L'ensemble simplicial X est connexe, et possède un 0-simplexe x tel que pour tout entier $m \geqslant 1$, le groupe $\pi_m(X, x)$ soit trivial.*

Démonstration. — Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (b')$ sont évidentes. Pour montrer l'implication $(b') \Rightarrow (a)$, on peut supposer que X est un complexe de Kan, et l'assertion résulte alors des lemmes 2.2.9 et 2.2.11. □

Corollaire 2.2.13. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le morphisme f est une ∞-équivalence.*

(b) *L'application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ est bijective, et pour tout 0-simplexe x de X, et tout entier $m \geqslant 1$, $\pi_m(f,x) : \pi_m(X,x) \longrightarrow \pi_m(Y,f(x))$ est un isomorphisme de groupes.*

(b′) *L'application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ est bijective, et chaque composante connexe de X possède un 0-simplexe x tel que pour tout entier $m \geqslant 1$, le morphisme $\pi_m(f,x) : \pi_m(X,x) \longrightarrow \pi_m(Y,f(x))$ soit un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. — Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (b')$ sont évidentes. Démontrons l'implication $(b') \Rightarrow (a)$. En décomposant f en une extension anodine suivie d'une fibration de Kan, on peut (en vertu du lemme 2.2.2 et de l'impication $(a) \Rightarrow (b)$) supposer que f est une fibration de Kan. Une fibration de Kan étant un morphisme W_∞-localement constant (2.2.4), l'implication résulte alors du corollaire 2.2.7, de la proposition précédente, et de la longue suite exacte des groupes d'homotopie associée à une fibration de Kan ; voir [**60**, chap. VI, § 3.3] ou encore [**64**, chap. I, lemme 7.3]. □

2.3. Réalisations simpliciales

2.3.1. — Soient A une petite catégorie, et $pr_1 : A \times \Delta \longrightarrow A$, $pr_2 : A \times \Delta \longrightarrow \Delta$ les projections canoniques, qui induisent deux foncteurs images inverses

$$pr_1^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} \qquad \text{et} \qquad pr_2^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} \ .$$

Comme la catégorie Δ admet un objet final, le foncteur pr_1^* est toujours pleinement fidèle, ce qui permet parfois d'identifier $\widehat{A}$ à une sous-catégorie pleine de $\widehat{A \times \Delta}$. De même, par abus de notations, si X, Y et T sont respectivement un préfaisceau sur A, un ensemble simplicial, et un préfaisceau simplicial sur A (*i.e.* un objet de $\widehat{A \times \Delta} \simeq \mathcal{H}om(A^{op}, \widehat{\Delta})$), on désigne respectivement par $X \times Y$, $X \times T$ et $T \times Y$ les préfaisceaux $pr_1^* X \times pr_2^* Y$, $pr_1^* X \times T$ et $T \times pr_2^* Y$ sur $A \times \Delta$.

Lemme 2.3.2. — *Soient A une petite catégorie, et $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$. Alors l'ensemble d'inclusions*

$$\{\ K \times \Delta_n \cup L \times \partial\Delta_n \longrightarrow L \times \Delta_n \mid K \longrightarrow L \in \mathcal{M}\ ,\ n \geqslant 0\ \}$$

est un modèle cellulaire de $\widehat{A \times \Delta}$.

Démonstration. — Pour $n \geqslant 0$, on définit la catégorie $\Delta_{\leqslant n}$ comme la sous-catégorie pleine de Δ dont les objets sont les ensembles ordonnés Δ_k pour $k \leqslant n$, et on note

$$i_n : \Delta_{\leqslant n} \longrightarrow \Delta$$

le foncteur d'inclusion. On obtient de la sorte deux foncteurs

$$i_{n!} : \widehat{\Delta_{\leqslant n}} \longrightarrow \widehat{\Delta} \qquad \text{et} \qquad i_n^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta_{\leqslant n}} \ ,$$

le premier étant un adjoint à gauche du second. Suivant [**60**], cela permet de former un foncteur squelette

$$Sk^n = i_{n!}\, i_n^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} \ ,$$

muni d'un monomorphisme fonctoriel canonique $Sk^n \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ (voir [**60**, chap. II, § 3]). On a ainsi une filtration de $1_{\widehat{\Delta}}$ (cf. [**60**, chap. II, § 3.5, corollaire 1, et § 3.8])

$$\varnothing = Sk^{-1} \subset Sk^0 \subset \cdots \subset Sk^n \subset Sk^{n+1} \subset \cdots \subset 1_{\widehat{\Delta}} \ ,$$

telle que $1_{\widehat{\Delta}} = \varinjlim_n Sk^n$. En appliquant cette construction argument par argument, on obtient un foncteur noté aussi

$$Sk^n : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} \ ,$$

et une filtration de $1_{\widehat{A\times\Delta}}$. Pour chaque monomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A \times \Delta}$, on montre facilement, en utilisant le carré cocartésien [**60**, chap. III, § 3.2, Fig. 18], que le carré suivant de $\widehat{A \times \Delta}$ est cocartésien.

$$\begin{array}{ccc} \big((X_n \cup (Sk^{n-1}\, Y)_n) \times \Delta_n\big) \cup \big(Y_n \times \partial\Delta_n\big) & \longrightarrow & X \cup Sk^{n-1}\, Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_n \times \Delta_n & \longrightarrow & X \cup Sk^n\, Y \end{array}$$

L'égalité $Y = \cup_{n\geqslant 0}(X \cup Sk^n\, Y)$ montre donc que les monomorphismes de $\widehat{A \times \Delta}$ sont engendrés par les flèches de la forme

$$K \times \Delta_n \cup L \times \partial\Delta_n \longrightarrow L \times \Delta_n \ ,$$

définies par un monomorphisme $K \longrightarrow L$ de $\widehat{A}$, et l'une des inclusions canoniques $\partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$, $n \geqslant 0$. L'assertion résulte donc de 1.1.8. □

Lemme 2.3.3. — *Soient A, B deux petites catégories, et $F : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{B}$ un foncteur commutant aux petites limites inductives. Pour tout préfaisceau X sur A, et tout ensemble simplicial Y, on note respectivement $F(X \times ?)$ et $F(? \times Y)$ les foncteurs*

$$F(X\times ?) : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{B} \ , \qquad Z \longmapsto F(X \times Z) \ , \quad Z \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta} \ ,$$
$$F(? \times Y) : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B} \ , \qquad T \longmapsto F(T \times Y) \ , \quad T \in \mathrm{Ob}\,\widehat{A} \ .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) *Le foncteur F respecte les monomorphismes.*

(b) *Pour tout préfaisceau X sur A, et tout ensemble simplicial Y, les foncteurs $F(X\times ?)$ et $F(? \times Y)$ respectent les monomorphismes.*

(c) *Pour tout ensemble simplicial Y, le foncteur $F(? \times Y)$ respecte les monomorphismes, et pour tout préfaisceau X sur A, l'image du morphisme $(\delta_1^1, \delta_1^0) : \Delta_0 \amalg \Delta_0 \longrightarrow \Delta_1$ de $\widehat{\Delta}$ par le foncteur $F(X\times ?)$ est un monomorphisme de $\widehat{B}$.*

Démonstration. — L'équivalence de (b) et (c) résulte du lemme 2.1.10, et l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est immédiate. Supposons que la condition (b) soit satisfaite et montrons la condition (a). En vertu du lemme précédent, il suffit de montrer que pour tout $n \geqslant 0$, et tout monomorphisme $K \longrightarrow L$ de $\widehat{A}$, l'image par F du monomorphisme $K \times \Delta_n \cup L \times \partial\Delta_n \longrightarrow L \times \Delta_n$ de $\widehat{A \times \Delta}$ est un monomorphisme de $\widehat{B}$. Le fait que le foncteur F commute aux sommes amalgamées, et la condition (b) impliquent que cette image s'identifie à l'inclusion $F(K \times \Delta_n) \cup F(L \times \partial\Delta_n) \longrightarrow F(L \times \Delta_n)$, ce qui achève le démonstration. □

Proposition 2.3.4. — *Soient A une petite catégorie, $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, et* D *une classe d'objets de $\widehat{A \times \Delta}$ saturée par monomorphismes. Si pour tout préfaisceau X sur A, source ou but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$, et tout entier $n \geqslant 0$, l'objet $X \times \Delta_n$ de $\widehat{A \times \Delta}$ est dans* D*, alors* $\mathsf{D} = \mathrm{Ob}\ \widehat{A \times \Delta}$.

Démonstration. — En vertu de la remarque 1.1.13, pour tout préfaisceau X sur A, la classe des ensembles simpliciaux K tels que $X \times K$ soit dans D est saturée par monomorphismes. Il résulte donc de l'hypothèse, et de la proposition 2.1.12, que si X est la source ou le but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$, alors pour tout ensemble simplicial K, l'objet $X \times K$ de $\widehat{A \times \Delta}$ est dans D. Par conséquent, si $X \longrightarrow Y$ est un monomorphisme de préfaisceaux sur A appartenant à $\mathcal{M}$, et $K \longrightarrow L$ une inclusion d'ensembles simpliciaux, le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times K & \longrightarrow & Y \times K \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times L & \longrightarrow & X \times L \cup Y \times K \end{array}$$

montre que $X \times L \cup Y \times K$ est dans D. La proposition résulte alors des lemmes 1.2.30 et 2.3.2. □

Corollaire 2.3.5. — *Soient A, B deux petites catégories, $F, G : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{B}$ deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs, $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, et* W *un B-localisateur. Si pour tout préfaisceau X sur A, source ou but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$, et tout $n \geqslant 0$, $\alpha_{X \times \Delta_n}$ est dans* W*, alors α est une* W*-équivalence argument par argument.*

Démonstration. — Le corollaire est une conséquence immédiate de la proposition précédente, de la remarque 1.4.16, et du lemme 1.1.15. □

Corollaire 2.3.6. — *Soient A, B deux petites catégories, $F : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{B}$ un foncteur commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, et* W *un B-localisateur. On suppose que pour tout préfaisceau X sur A, source ou but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$, et tout $n \geqslant 0$, l'image par F de la projection $X \times \Delta_n \longrightarrow X \times \Delta_0$ est dans* W*. Alors pour tout préfaisceau T sur $A \times \Delta$,*

et toute ∞-équivalence $Y \longrightarrow Z$ de $\widehat{\Delta}$, l'image par F du morphisme $T \times Y \longrightarrow T \times Z$ de $\widehat{A \times \Delta}$ est une W*-équivalence.*

Démonstration. — Soit X un préfaisceau sur A, source ou but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$. En vertu du corollaire 2.1.22, appliqué au foncteur

$$F(X \times ?) : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{B} , \qquad Y \longmapsto F(X \times Y) , \quad Y \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta} ,$$

pour toute ∞-équivalence $Y \longrightarrow Z$ de $\widehat{\Delta}$, l'image du morphisme $X \times Y \longrightarrow X \times Z$ de $\widehat{A \times \Delta}$ par le foncteur F est une W-équivalence. Comme W_∞ est stable par produits finis (cf. 2.1.3), l'image par F de $X \times \Delta_n \times Y \longrightarrow X \times \Delta_n \times Z$ est aussi une W-équivalence, pour tout $n \geqslant 0$. En considérant le morphisme de foncteurs de $\widehat{A \times \Delta}$ dans $\widehat{B}$

$$F(? \times Y) \longrightarrow F(? \times Z) , \qquad T \longmapsto \big(F(T \times Y) \longrightarrow F(T \times Z)\big) , \quad T \in \mathrm{Ob}\,\widehat{A \times \Delta} ,$$

défini par l'∞-équivalence $Y \longrightarrow Z$, l'assertion résulte donc du corollaire 2.3.5. □

Corollaire 2.3.7. — *Soient A une petite catégorie, $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\widehat{A}$, et* W *un $A \times \Delta$-localisateur. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout préfaisceau T sur $A \times \Delta$, la projection $T \times \Delta_1 \longrightarrow T$ est dans* W*.*

(b) *Toute Δ_1-équivalence d'homotopie de préfaisceaux sur $A \times \Delta$ est dans* W*.*

(c) *Pour tout préfaisceau X sur A, source ou but d'une flèche appartenant à $\mathcal{M}$, et tout $n \geqslant 0$, la projection $X \times \Delta_n \longrightarrow X \times \Delta_0$ est dans* W*.*

(d) *Pour toute ∞-équivalence $Y \longrightarrow Z$ de $\widehat{\Delta}$, et tout préfaisceau T sur $A \times \Delta$, le morphisme $T \times Y \longrightarrow T \times Z$ est dans* W*.*

En outre, si les conditions équivalentes ci-dessus sont satisfaites, pour toute W*-équivalence $T \longrightarrow T'$ de $\widehat{A \times \Delta}$, et tout ensemble simplicial Y, la flèche $T \times Y \longrightarrow T' \times Y$ est dans* W*.*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est conséquence immédiate du corollaire 1.4.7. L'implication $(b) \Rightarrow (c)$ résulte du fait que Δ_n est Δ_1-contractile. L'implication $(c) \Rightarrow (d)$ est un cas particulier du corollaire précédent appliqué au foncteur identique de $\widehat{A \times \Delta}$, et l'implication $(d) \Rightarrow (a)$ est évidente. Pour montrer la dernière assertion, soit $T \longrightarrow T'$ un morphisme de préfaisceaux sur $\widehat{A \times \Delta}$ appartenant à W. Pour tout $n \geqslant 0$, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} T \times \Delta_n & \longrightarrow & T' \times \Delta_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T' \end{array} ,$$

dont les flèches verticales sont dans W en vertu de (d), montre que $T \times \Delta_n \longrightarrow T' \times \Delta_n$ est une W-équivalence. L'assertion résulte donc du corollaire 2.1.13, (a), appliqué au morphisme de foncteurs de $\widehat{\Delta}$ dans $\widehat{A \times \Delta}$

$$T \times ? \longrightarrow T' \times ? , \qquad Y \longmapsto (T \times Y \longrightarrow T' \times Y) , \quad Y \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta} ,$$

défini par la W-équivalence $T \longrightarrow T'$. □

2.3.8. — Soient A une petite catégorie, et D un objet cosimplicial de $\widehat{A}$ (*i.e.* un foncteur de Δ vers $\widehat{A}$). Pour $n \geqslant 0$, on pose $D_n = D\Delta_n$, et si f est une flèche de Δ, on note encore par abus f l'image de f par D. On a un foncteur

$$\underline{D} : A \times \Delta \longrightarrow \widehat{A} , \qquad (a, \Delta_n) \longmapsto a \times D_n$$

lequel se prolonge de manière unique en un foncteur commutant aux petites limites inductives

$$Real_D = \underline{D}_! : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A} ,$$

et admettant donc un adjoint à droite

$$Sing_D = \underline{D}^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} .$$

Si $\mathcal{H}om$ désigne le Hom interne de $\widehat{A}$, pour tout préfaisceau X sur A, on a

$$(Sing_D\, X)_n = \mathcal{H}om(D_n, X) , \qquad n \geqslant 0 .$$

On vérifie facilement que le composé

$$\widehat{\Delta} \xrightarrow{pr_2^*} \widehat{A \times \Delta} \xrightarrow{Real_D} \widehat{A}$$

n'est autre que le foncteur $D_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$, unique prolongement de D en un foncteur commutant aux petites limites inductives, et que si X et Y sont respectivement un préfaisceau sur A et un ensemble simplicial, on a

$$Real_D(X \times Y) = X \times D_! Y . \tag{2.3.8.1}$$

Pour chaque morphisme $D \longrightarrow D'$ d'objets cosimpliciaux de $\widehat{A}$, on obtient canoniquement deux morphismes de foncteurs

$$Real_D \longrightarrow Real_{D'} \qquad \text{et} \qquad Sing_{D'} \longrightarrow Sing_D .$$

Exemple 2.3.9. — Si P est l'objet cosimplicial constant de valeur l'objet final de $\widehat{A}$, alors le foncteur

$$Sing_P : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$$

est le foncteur pr_1^*, qui à un préfaisceau X sur A associe l'objet simplicial constant de valeur X. Son adjoint à gauche $Real_P$ s'identifie donc au foncteur limite inductive sur Δ^{op} :

$$\varinjlim_{\Delta^{op}} : \mathcal{H}om(\Delta^{op}, \widehat{A}) \simeq \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A} .$$

Si D est un objet cosimplicial quelconque de $\widehat{A}$, on a un unique morphisme canonique de D vers P, ce qui induit des morphismes de foncteurs

$$Real_D \longrightarrow Real_P = \varinjlim_{\Delta^{op}} \qquad \text{et} \qquad Sing_P = pr_1^* \longrightarrow Sing_D .$$

Lemme 2.3.10. — *Soient A une petite catégorie, et D un objet cosimplicial de $\widehat{A}$. Pour que le foncteur $Real_D$ respecte les monomorphismes, il faut et il suffit que la flèche*

$$(\delta_1^1,\ \delta_1^0) : D_0 \amalg D_0 \longrightarrow D_1$$

soit un monomorphisme.

Démonstration. — En vertu de la relation 2.3.8.1, le lemme est conséquence immédiate du lemme 2.3.3. □

2.3.11. — Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. Un W-*segment* est un segment séparant $(I, \partial^0, \partial^1)$ de $\widehat{A}$ tel que pour tout préfaisceau X sur A, la projection $I \times X \longrightarrow X$ soit une W-équivalence, autrement dit, tel que le cylindre fonctoriel défini par ce segment séparant (cf. 1.3.8) soit un W-cylindre (cf. 1.4.11) fonctoriel. En vertu du lemme 1.4.13, pour tout A-localisateur W, le segment de Lawvere de $\widehat{A}$ (cf. 1.3.9) est un W-segment. D'autre part, comme W_∞ est le Δ-localisateur engendré par les projections $\Delta_1 \times X \longrightarrow X$, $X \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta}$ (cf. 2.1.3), le segment $(\Delta_1, \delta_1^1, \delta_1^0)$ de $\widehat{\Delta}$ est un W_∞-segment.

Définition 2.3.12. — Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. Une W-*résolution cosimpliciale* est un objet cosimplicial D de $\widehat{A}$ vérifiant les axiomes suivants.

RC1 La flèche

$$(\delta_1^1,\ \delta_1^0) : D_0 \amalg D_0 \longrightarrow D_1$$

est un monomorphisme.

RC2 Les morphismes $D_n \longrightarrow e_{\widehat{A}}$, $n \geqslant 0$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$, sont des W-équivalences universelles (*i.e.* pour tout préfaisceau X sur A, les projections $X \times D_n \longrightarrow X$ sont des W-équivalences).

Si de plus le préfaisceau D_0 est isomorphe à $e_{\widehat{A}}$, on dit que la W-résolution cosimpliciale D est *normalisée*. Si D est un objet cosimplicial de $\widehat{A}$ vérifiant l'axiome RC1, et s'il existe un W-segment $(I, \partial^0, \partial^1)$ de $\widehat{A}$, tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, D_n soit I-contractile, on voit aussitôt que D est une W-résolution cosimpliciale. On dit qu'une telle résolution est *contractile*.

Exemple 2.3.13. — Soit A une petite catégorie.

Soient W un A-localisateur et $u : A \longrightarrow \mathit{Cat}$ un foncteur, tels que pour tout objet a de A, $u(a)$ soit non vide, et que le morphisme $u^*\Delta_1 \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ soit une W-équivalence universelle. Alors

$$D : \Delta_n \longmapsto u^*\Delta_n$$

est une W-résolution cosimpliciale contractile normalisée (car les préfaisceaux D_n sont tous D_1-contractiles).

Soit $i : A \longrightarrow \mathit{Cat}$ le foncteur qui associe à chaque objet a de A la catégorie A/a des objets de A au-dessus de a. Les objets de A/a sont les couples (a', α), où a' est un objet de A, et α une flèche de a' vers a dans A. Un morphisme de (a', α) vers (a'', α')

dans A/a est une flèche f de a' vers a'' telle que $\alpha' f = \alpha$. Si $f : a_0 \longrightarrow a_1$ est une flèche de A, le foncteur $i(f)$ est défini par

$$i(f) : A/a_0 \longrightarrow A/a_1 \quad , \qquad (a', \alpha) \longmapsto (a', f\alpha) \ .$$

On désigne par $i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}$ le foncteur $C \longmapsto \big(a \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C)\big)$. La *résolution cosimpliciale de Lawvere de A* est l'objet cosimplicial

$$i_A^* \Delta : \Delta_n \longmapsto i_A^* \Delta_n \ .$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, le préfaisceau $i_A^* \Delta_n$ est $i_A^* \Delta_1$-contractile. Or $i_A^* \Delta_1 = L$ est l'objet de Lawvere de $\widehat{A}$ (voir par exemple [**96**, 1.5.5]). Par conséquent, pour tout A-localisateur W, $i_A^* \Delta$ est une W-résolution cosimpliciale contractile (normalisée).

Lemme 2.3.14. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur accessible. On considère un monomorphisme $K \longrightarrow L$ de $\widehat{A}$, et on suppose que les foncteurs*

$$X \longmapsto X \times K \quad \textit{et} \quad X \longmapsto X \times L$$

respectent les W-équivalences. Alors pour toute W-fibration $p : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$, la flèche

$$q : \mathcal{H}om(L, X) \longrightarrow \mathcal{H}om(L, Y) \times_{\mathcal{H}om(K,Y)} \mathcal{H}om(K, X)$$

est une W-fibration ($\mathcal{H}om$ désignant le Hom *interne de $\widehat{A}$).*

Démonstration. — Les fibrations étant définies par le fait qu'elles vérifient la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations triviales, on s'aperçoit aussitôt par adjonction que q est une W-fibration si et seulement si pour toute W-cofibration triviale $U \longrightarrow V$, la flèche

$$U \times L \cup V \times K \longrightarrow V \times L$$

est une W-cofibration triviale. Or cette dernière propriété est une conséquence immédiate de l'hypothèse. □

Proposition 2.3.15. — *Soient A une petite catégorie, W un A-localisateur, et D une W-résolution cosimpliciale. On note $\mathsf{W}^{\Delta^{op}}$ le $A \times \Delta$-localisateur formé des morphismes $X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A \times \Delta}$, tels que pour tout $n \geqslant 0$, la flèche $X_n \longrightarrow Y_n$ soit une W-équivalence (cf. 1.4.22). Alors on a l'inclusion*

$$\mathit{Real}_D \, \mathsf{W}^{\Delta^{op}} \subset \mathsf{W} \ .$$

Démonstration. — Soit $X \longrightarrow Y$ un morphisme appartenant à $\mathsf{W}^{\Delta^{op}}$. En vertu du corollaire 1.4.19, il existe un A-localisateur accessible W' contenu dans W tel que D soit une W'-résolution cosimpliciale et $X \longrightarrow Y$ un élément de $\mathsf{W}'^{\Delta^{op}}$. Il suffit donc de prouver la proposition dans le cas où W est accessible. En vertu du théorème 1.4.3, la catégorie $\widehat{A}$ admet alors une structure de catégorie de modèles fermée (à engendrement cofibrant), dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles les flèches appartenant à W. On peut donc considérer la structure de catégorie de modèles fermée de Reedy induite sur $\widehat{A \times \Delta} \simeq \mathcal{H}om(\Delta^{op}, \widehat{A})$

(voir [**74**, théorème 5.2.5]). On vérifie facilement que les cofibrations pour cette structure sont les morphismes $K \longrightarrow L$ tels que pour tout $n \geqslant 0$, le morphisme de $\widehat{A}$

$$(Sk^{n-1} L)_n \amalg_{(Sk^{n-1} K)_n} K_n \longrightarrow L_n$$

soit un monomorphisme. On en déduit grâce au lemme d'Eilenberg-Zilber [**60**, II, § 3.1] que ce sont exactement les monomorphismes de $\widehat{A \times \Delta}$. En particulier, tous les objets sont cofibrants pour cette structure. En outre, on s'aperçoit grâce à la caractérisation des fibrations pour la structure de Reedy, que si $X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\widehat{A}$, alors la flèche $Sing_D X \longrightarrow Sing_D Y$ est une fibration si et seulement si pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathcal{H}om(D_n, X) \longrightarrow \mathcal{H}om(D_n, Y) \times_{\mathcal{H}om(\partial D_n, Y)} \mathcal{H}om(\partial D_n, X)$$

est une fibration de $\widehat{A}$ (où ∂D_n désigne l'image de $\partial \Delta_n$ par $D_!$). Or il résulte de la définition même de résolution cosimpliciale et du corollaire 2.1.13, (a) que les inclusions $\partial D_n \longrightarrow D_n$ vérifient les hypothèses du lemme ci-dessus. On en déduit que le foncteur $Sing_D$ respecte les fibrations, et donc par adjonction que le foncteur $Real_D$ respecte les cofibration triviales. L'assertion résulte ainsi du lemme de Ken Brown [**74**, lemme 1.1.12]. □

2.3.16. — Soit $\delta : \Delta \longrightarrow \Delta \times \Delta$ le foncteur diagonal (défini par $\delta \Delta_n = (\Delta_n, \Delta_n)$). Il induit un foncteur image inverse

$$\delta^* : \widehat{\Delta \times \Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} , \qquad X \longmapsto (\Delta_n \mapsto X_{n,n}) ,$$

lequel admet un adjoint à droite $\delta_* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}$. Si on note $h : \Delta \longrightarrow \widehat{\Delta}$ le plongement de Yoneda, on a les identifications

$$\delta^* = Real_h \qquad \text{et} \qquad \delta_* = Sing_h .$$

Corollaire 2.3.17. — *Soit* W *un* Δ*-localisateur contenant* W_∞*, et soit* $X \longrightarrow Y$ *un morphisme de* $\widehat{\Delta \times \Delta}$ *tel que pour tout* $n \geqslant 0$*, le morphisme d'ensembles simpliciaux* $X_{\bullet,n} \longrightarrow Y_{\bullet,n}$ *soit une* W*-équivalence. Alors* $\delta^* X \longrightarrow \delta^* Y$ *est une* W*-équivalence.*

Démonstration. — L'inclusion $\mathsf{W}_\infty \subset \mathsf{W}$ implique que le morphisme $\Delta_1 \longrightarrow \Delta_0$ est une W-équivalence universelle (cf. 2.1.3). L'objet cosimplicial h de $\widehat{\Delta}$ est donc une résolution cosimpliciale contractile normalisée (cf. exemple 2.3.13), et le corollaire est par conséquent une spécialisation immédiate de la proposition 2.3.15. □

Lemme 2.3.18. — *Soient* A *une petite catégorie,* $(I, \partial^0, \partial^1)$ *un segment de* $\widehat{A}$*, et deux morphismes* I*-homotopes* $u, v \in \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(X, Y)$*. Alors pour tout préfaisceau* Z *sur* A*, les morphismes induits*

$$u^*, v^* : \mathcal{H}om(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{H}om(X, Z)$$

sont I*-homotopes.*

Démonstration. — On peut supposer qu'il existe une I-homotopie $h : I \times X \longrightarrow Y$ de u vers v, ce qui induit un morphisme

$$h^* : \mathcal{H}om(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{H}om(I \times X, Z) .$$

Or on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}om(I \times X, Z) \simeq \mathcal{H}om(I, \mathcal{H}om(X, Z)) ,$$

et donc h^* induit par adjonction une flèche

$$I \times \mathcal{H}om(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{H}om(X, Z)$$

qui est l'homotopie recherchée. □

***Proposition 2.3.19* (Kan [91]).** — *Les morphismes de foncteurs (cf. 2.1.26, 2.1.31)*

$$\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex \qquad et \qquad \beta^\infty : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex^\infty$$

sont des ∞-équivalences argument par argument.

Démonstration. — Soient $\Delta \xleftarrow{p} \Delta \times \Delta \xrightarrow{q} \Delta$ les deux projections canoniques. Elles induisent deux foncteurs images inverses

$$p^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta \times \Delta} \qquad \text{et} \qquad q^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta \times \Delta} ,$$

et on remarque qu'on a deux morphismes de foncteurs canoniques (2.3.9)

$$p^* \longrightarrow \delta_* \longleftarrow q^* .$$

On a d'autre part un objet cosimplicial σ de $\widehat{\Delta}$, et un morphisme d'objets cosimpliciaux $\alpha : \sigma \longrightarrow h$ (voir 2.1.26), ce qui induit un morphisme de foncteurs

$$\delta_* = Sing_h \longrightarrow Sing_\sigma .$$

Si X est un ensemble simplicial, pour $m, n \geqslant 0$, on a l'égalité

$$(Sing_\sigma X)_{m,n} = \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_m \times Sd\, \Delta_n, X) ,$$

laquelle montre qu'on a un diagramme commutatif d'ensembles bisimpliciaux, naturel en X,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{ccccc} p^*X & \longrightarrow & \delta_*X & \longleftarrow & q^*X \\ \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q^*\beta_X} \\ p^*X & \longrightarrow & Sing_\sigma\, X & \longleftarrow & q^*\, Ex\, X \end{array}$$

tel que pour tous $m, n \geqslant 0$,

$$\mathcal{D}_{m,n} = \begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_m, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_m \times \Delta_n, X) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_n, X) \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_m, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_m \times Sd\, \Delta_n, X) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(Sd\, \Delta_n, X) \end{array} ,$$

les deux flèches verticales étant induites par α_{Δ_n}. Or en vertu du lemme 2.3.18, pour tout $m \geqslant 0$, on a une Δ_1-équivalence d'homotopie

$$(q^*X)_{m,\bullet} = X \longrightarrow (\delta_* X)_{m,\bullet} = \mathcal{H}om(\Delta_m, X) \ ,$$

et comme le foncteur Ex commute aux produits, une $Ex\,\Delta_1$-équivalence d'homotopie

$$(q^*\,Ex\,X)_{m,\bullet} = Ex\,X \longrightarrow (Sing_\sigma\,X)_{m,\bullet} = Ex\,\mathcal{H}om(\Delta_m, X) \ ,$$

laquelle est aussi une Δ_1-équivalence d'homotopie (le morphisme fonctoriel $\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex$ induisant un morphisme du segment $(\Delta_1, \delta_1^1, \delta_1^0)$ vers le segment $(Ex\,\Delta_1, Ex\,\delta_1^1, Ex\,\delta_1^0)$, si deux morphismes d'ensembles simpliciaux sont $Ex\,\Delta_1$-homotopes, alors ils sont Δ_1-homotopes). De même, pour tout $n \geqslant 0$, on a des Δ_1-équivalences d'homotopie

$$(p^*X)_{\bullet,n} = X \longrightarrow (\delta_* X)_{\bullet,n} = \mathcal{H}om(\Delta_n, X)$$

$$(p^*X)_{\bullet,n} = X \longrightarrow (Sing_\sigma\,X)_{\bullet,n} = \mathcal{H}om(Sd\,\Delta_n, X) \ .$$

Comme les Δ_1-équivalences d'homotopie sont des ∞-équivalences, il résulte du corollaire 2.3.17 qu'en appliquant le foncteur δ^*, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \delta^*\delta_* X & \longleftarrow & X \\ \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_X} \\ X & \longrightarrow & \delta^*\,Sing_\sigma\,X & \longleftarrow & Ex\,X \end{array} \ ,$$

dans lequel toutes les flèches horizontales sont des ∞-équivalences. Cela implique que le morphisme β_X est une ∞-équivalence. Comme le morphisme de foncteurs β est un monomorphisme, on en déduit que β_X^∞ est aussi une ∞-équivalence. □

Proposition 2.3.20. — *Les ∞-équivalences sont stables par limites inductives filtrantes.*

Démonstration. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, l'ensemble ordonné $\xi\Delta_n$ est fini, et donc $Sd\,\Delta_n = N\,\xi\Delta_n$ est un ensemble simplicial de présentation finie (cf. [**60**, chap. II, § 5.4]). Par conséquent, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(Sd\,\Delta_n, \,.\,)$ commute aux petites limites inductives filtrantes. On en déduit que le foncteur Ex commute aux petites limites inductives filtrantes, puis qu'il en est de même des foncteurs Ex^n pour $n \geqslant 0$. Comme Ex^∞ est une limite inductive des foncteurs Ex^n, cela implique que ce dernier commute aussi aux petites limites inductives filtrantes. Considérons à présent une petite catégorie filtrante I, et le $I^{op} \times \Delta$-localisateur W_∞^I, formé des morphismes $X \longrightarrow Y$ de $\widehat{I^{op} \times \Delta} \simeq \mathcal{H}om(I, \widehat{\Delta})$, tels que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\,I$, la flèche $X_i \longrightarrow Y_i$ soit une ∞-équivalence. Alors en vertu du corollaire 1.4.24, $\mathcal{H}om(I, \widehat{\Delta})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les éléments de W_∞^I, et les fibrations sont les morphismes $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{H}om(I, \widehat{\Delta})$ tels que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\,I$, $X_i \longrightarrow Y_i$ soit une fibration de Kan. Il résulte de la proposition 2.1.6 que le foncteur limite inductive

$$\varinjlim : \mathcal{H}om(I, \widehat{\Delta}) \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

respecte les fibrations et les fibrations triviales, et donc en vertu du lemme de Ken Brown [**74**, lemme 1.1.12], qu'il respecte les équivalences faibles entre objets fibrants. Soit $X \longrightarrow Y$ une équivalence faible de $\mathcal{H}om(I, \widehat{\Delta})$. Alors le morphisme induit $Ex^\infty X \longrightarrow Ex^\infty Y$ est une équivalence faible entre objets fibrants (propositions 2.1.39 et 2.3.19), et donc $\varinjlim Ex^\infty X \longrightarrow \varinjlim Ex^\infty Y$ est une ∞-équivalence. Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim X & \longrightarrow & \varinjlim Ex^\infty X & \xrightarrow{\sim} & Ex^\infty \varinjlim X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim Y & \longrightarrow & \varinjlim Ex^\infty Y & \xrightarrow{\sim} & Ex^\infty \varinjlim Y \end{array} ,$$

lequel permet de conclure en vertu de la proposition 2.3.19. □

Scholie 2.3.21. — La proposition 2.3.19 permet de donner une seconde preuve du théorème de Quillen 2.1.42 concernant la structure de catégorie de modèles classique sur la catégorie des ensembles simpliciaux (avec la caractérisation des fibrations par la propriété de Kan). En effet, la preuve de la proposition 2.3.19 n'utilise que le fait que le plongement de Yoneda de Δ dans $\widehat{\Delta}$ est une W_∞-résolution cosimpliciale, ce qui est trivialement visible dans la définition même de W_∞ donnée au numéro 2.1.3. Pour retrouver le théorème 2.1.42, il suffit en vertu de la proposition 1.3.47 de prouver que toute fibration de Kan qui est une ∞-équivalence est une fibration triviale. Nous allons en donner une preuve en utilisant la proposition 2.1.39 (dont la démonstration repose sur des considérations purement combinatoires), son corollaire 2.1.40, et la proposition 2.3.19. Dans la suite de ce numéro, on appellera *fibrations de Kan triviales* les fibrations de Kan qui sont des ∞-équivalences. Il s'agit donc de montrer que toute fibration de Kan triviale est une fibration triviale, ce que l'on va faire en quatre temps.

2.3.21.1. — *Les fibrations de Kan triviales sont stables par changement de base.*

Toute fibration de Kan entre complexes de Kan étant une fibration (grâce à 1.3.36), cela résulte aussitôt du fait que le fonteur Ex^∞ commute aux produits fibrés, du corollaire 2.1.40 et de la proposition 2.3.19.

2.3.21.2. — *Toute fibration de Kan triviale de la forme $X \longrightarrow \Delta_n$ est une fibration triviale.*

Soit $p : X \longrightarrow \Delta_n$ une fibration de Kan triviale ($n \geqslant 0$). On forme le carré cartésien suivant,

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta_0 & \xrightarrow[j]{} & \Delta_n \end{array} ,$$

le morphisme j pointant le 0-simplexe 0 de Δ_n. Comme j est un rétracte par déformation fort, et p une fibration de Kan (donc naïve), le lemme 1.5.10 implique que i est un rétracte par déformation fort. En particulier, les morphismes i et j sont des extensions anodines. Comme q est une fibration triviale en vertu de 1.3.34 et de 2.3.21.1, c'est en particulier une équivalence faible absolue, et par conséquent, la proposition 1.3.57 implique que p est une équivalence faible absolue. La proposition 1.3.56 permet donc de conclure.

2.3.21.3. — *Pour qu'un morphisme $X \longrightarrow Y$ d'ensembles simpliciaux soit une fibration triviale, il faut et il suffit que pour toute flèche $\Delta_n \longrightarrow Y$, $n \geqslant 0$, la projection de $\Delta_n \times_Y X$ sur Δ_n soit une fibration triviale.*

Cela résulte facilement du fait que les inclusions de la forme $\partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ forment un modèle cellulaire de la catégorie des ensembles simpliciaux.

2.3.21.4. — *Toute fibration de Kan triviale est une fibration triviale.*

C'est une conséquence immédiate de 2.3.21.1, 2.3.21.2 et 2.3.21.3.

Définition 2.3.22. — Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. On rappelle que $\mathsf{W}^{\Delta^{op}}$ désigne le $A \times \Delta$-localisateur des flèches p de $\widehat{A \times \Delta} \simeq \mathcal{H}om(\Delta^{op}, \widehat{A})$ telles que pour tout $n \geqslant 0$, p_n soit une W-équivalence. La *complétion simpliciale de* W est le $A \times \Delta$-localisateur W_Δ engendré par $\mathsf{W}^{\Delta^{op}}$ et par les projections $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ pour tout préfaisceau X sur $A \times \Delta$.

Remarque 2.3.23. — En gardant les notations de la définition ci-dessus, on remarque que la restriction à Δ du foncteur image réciproque $pr_2^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$ par la deuxième projection $pr_2 : A \times \Delta \longrightarrow \Delta$ définit un objet cosimplicial de $\widehat{A \times \Delta}$, qui est une W_Δ-résolution cosimpliciale contractile normalisée (cf. exemple 2.3.13).

Proposition 2.3.24. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. Si W est accessible (resp. propre), alors il en est de même de sa complétion simpliciale W_Δ.*

Démonstration. — La première assertion est conséquence immédiate des corollaires 1.4.19, 1.4.22, et du théorème 1.4.3. La seconde résulte de la proposition 1.5.15, et des corollaires 1.5.6 et 1.5.7. □

Lemme 2.3.25. — *Soient A une petite catégorie, W un A-localisateur, et D une W-résolution cosimpliciale. Alors pour tout préfaisceau T sur $A \times \Delta$, et toute ∞-équivalence $Y \longrightarrow Z$ de $\widehat{\Delta}$, l'image du morphisme $T \times Y \longrightarrow T \times Z$ par le foncteur $Real_D$ est une W-équivalence.*

Démonstration. — Le foncteur $Real_D$ commute aux petites limites inductives, et en vertu de l'axiome RC1 et du lemme 2.3.10, il respecte les monomorphismes. Pour tout préfaisceau X sur A, et tout morphisme $\Delta_m \longrightarrow \Delta_n$, le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times D_m & \longrightarrow & X \times D_n \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

montre que l'image $X \times D_m \longrightarrow X \times D_n$ du morphisme $X \times \Delta_m \longrightarrow X \times \Delta_n$ par le foncteur $Real_D$ est une W-équivalence (par l'axiome RC2). L'assertion résulte donc du corollaire 2.3.6. □

Lemme 2.3.26. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. On considère deux W_Δ-résolutions cosimpliciales D et E, un morphisme d'objets cosimpliciaux*

$$\varphi : D \longrightarrow E \ ,$$

et on note $\widetilde{D}$ et $\widetilde{E}$ les foncteurs de $A \times \Delta$ vers $\widehat{A \times \Delta}$ définis respectivement par $\widetilde{D}(a, \Delta_n) = a \times D_n$ et $\widetilde{E}(a, \Delta_n) = a \times E_n$. On obtient deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et prolongeant $\widetilde{D}$ et $\widetilde{E}$

$$\widetilde{D}_!, \ \widetilde{E}_! : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} \ ,$$

ainsi qu'un morphisme de foncteurs induit par φ, $\widetilde{D}_! \longrightarrow \widetilde{E}_!$. Alors pour tout préfaisceau T sur $A \times \Delta$, la flèche $\widetilde{D}_! T \longrightarrow \widetilde{E}_! T$ est une W_Δ-équivalence.

Démonstration. — Les foncteurs $\widetilde{D}_!$ et $\widetilde{E}_!$ commutent aux petites limites inductives, et respectent, en vertu du lemme 2.3.3 les monomorphismes. D'autre part, le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times D_m & \longrightarrow & X \times E_m \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

montre que l'assertion est vérifiée lorsque T est de la forme $T = X \times \Delta_m$, où X est un préfaisceau sur A, et $m \geqslant 0$. Le cas général s'en déduit, en vertu du corollaire 2.3.5. □

Proposition 2.3.27. — *Soient A une petite catégorie, W un A-localisateur, et D une W-résolution cosimpliciale. Alors on a les égalités*

$$\mathsf{W}_\Delta = {Real_D}^{-1}\mathsf{W} \qquad et \qquad \mathsf{W} = {pr_1^*}^{-1}\mathsf{W}_\Delta \ ,$$

où $pr_1 : A \times \Delta \longrightarrow A$ désigne la première projection, et les foncteurs induits sur les catégories localisées

$$Real_D : \mathsf{W}_\Delta^{-1}\widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \mathsf{W}^{-1}\widehat{A} \qquad et \qquad pr_1^* : \mathsf{W}^{-1}\widehat{A} \longrightarrow \mathsf{W}_\Delta^{-1}\widehat{A \times \Delta}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — On remarque qu'il suffit de montrer les inclusions

$$Real_D(\mathsf{W}_\Delta) \subset \mathsf{W} \ , \qquad pr_1^*(\mathsf{W}) \subset \mathsf{W}_\Delta \ ,$$

et de prouver qu'il existe un morphisme de foncteurs $Real_D\, pr_1^* \longrightarrow 1_{\widehat{A}}$ qui soit une W-équivalence argument par argument, et une chaîne de morphismes de foncteurs reliant $pr_1^*\, Real_D$ à $1_{\widehat{A\times\Delta}}$, chacun étant une W_Δ-équivalence argument par argument.

La proposition 2.3.15 montre que ${Real_D}^{-1}\,\mathsf{W}$ contient le $A\times\Delta$-localisateur $\mathsf{W}^{\Delta^{op}}$, ce qui implique en particulier, que toute fibration triviale est dans ${Real_D}^{-1}\,\mathsf{W}$. Comme le foncteur $Real_D$ commute aux petites limites inductives et respecte, en vertu du lemme 2.3.10, les monomorphismes, on en déduit que ${Real_D}^{-1}\,\mathsf{W}$ est un $A\times\Delta$-localisateur. l'inclusion $Real_D(\mathsf{W}_\Delta) \subset \mathsf{W}$ résulte donc de la proposition 2.3.15 et du lemme 2.3.25.

L'inclusion $pr_1^*(\mathsf{W}) \subset \mathsf{W}_\Delta$ résulte du fait que l'image par pr_1^* d'une W-équivalence est une W-équivalence argument par argument.

La relation 2.3.8.1 montre que pour tout préfaisceau X sur A on a un isomorphisme canonique $Real_D\, pr_1^* X \simeq X\times D_0$, et la projection $X\times D_0 \longrightarrow X$ définit un morphisme de foncteurs $Real_D\, pr_1^* \longrightarrow 1_{\widehat{A}}$, qui est une W-équivalence argument par argument, en vertu de l'axiome RC2.

Comme le $A\times\Delta$-localisateur W_Δ contient les W-équivalences argument par argument, on vérifie aussitôt qu'en composant la W-résolution cosimpliciale $D : \Delta \longrightarrow \widehat{A}$ avec le foncteur $pr_1^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A\times\Delta}$, on obtient une W_Δ-résolution cosimpliciale notée aussi $D : \Delta \longrightarrow \widehat{A\times\Delta}$. Si l'on désigne par E la W_Δ-résolution cosimpliciale de la remarque 2.3.23, on définit une troisième W_Δ-résolution cosimpliciale $D\times E$ par $\Delta_n \longmapsto D_n\times E_n = D_n\times\Delta_n$. En vertu du lemme 2.3.26, les deux projections

$$D \longleftarrow D\times E \longrightarrow E$$

induisent deux W_Δ-équivalences naturelles

$$\widetilde{D}_! \longleftarrow \widetilde{D\times E}_! \longrightarrow \widetilde{E}_! \ .$$

Or $\widetilde{E}$ s'identifie au plongement de Yoneda de $A\times\Delta$ dans $\widehat{A\times\Delta}$, et donc on a un isomorphisme de foncteurs $\widetilde{E}_! \simeq 1_{\widehat{A\times\Delta}}$. D'autre part, $\widetilde{D}_!$ s'identifie canoniquement au foncteur $pr_1^*\, Real_D$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 2.3.28. — *Soit A une petite catégorie. Un A-localisateur est propre si et seulement si sa complétion simpliciale l'est.*

Démonstration. — C'est une condition nécessaire en vertu de la proposition 2.3.24. Soit W un A-localisateur tel que W_Δ soit propre. Il résulte de la proposition précédente et de 1.4.20, (c) que W est accessible. Pour montrer que W est propre, on procède comme suit. On choisit une W-résolution cosimpliciale contractile D (par exemple, la résolution cosimpliciale de Lawvere de A, cf. 2.3.13), et le lemme 2.3.18 montre que le morphisme de foncteur $pr_1^* \longrightarrow Sing_D$ (cf. 2.3.9) est une W-équivalence argument par

argument, donc une W_Δ-équivalence. En vertu de la proposition précédente, une flèche de $\widehat{A}$ est donc une W-équivalence si et seulement si son image par $Sing_D$ est une W_Δ-équivalence. Or le foncteur $Sing_D$ commute aux produits fibrés et envoie les fibrations au sens de W sur des fibrations au sens de W_Δ : en effet, il admet un adjoint gauche $Real_D$ qui respecte les monomorphismes (par le lemme 2.3.10) et les équivalences faibles (par la proposition ci-dessus). On en déduit aussitôt ce corollaire. □

2.3.29. — Soit A une petite catégorie. Un $A \times \Delta$-localisateur est *discret* s'il contient la complétion simpliciale du A-localisateur minimal.

Proposition 2.3.30. — *Soit A une petite catégorie. L'application $\mathsf{W} \longmapsto \mathsf{W}_\Delta$ définit une bijection croissante pour l'inclusion de l'ensemble des A-localisateurs vers celui des $A \times \Delta$-localisateurs discrets. L'application inverse est définie par $\mathsf{W} \longmapsto {pr_1^*}^{-1}\mathsf{W}$.*

Démonstration. — La proposition 2.3.27 montre que cette application est injective. Il ne reste donc qu'à prouver qu'elle est surjective. Soit W_{min} la complétion simpliciale du A-localisateur minimal. Soit W un $A \times \Delta$-localisateur discret, et posons $\mathsf{W}' = {pr_1^*}^{-1}\mathsf{W}$. On remarque que W' contient ${pr_1^*}^{-1}\mathsf{W}_{min}$, et donc une nouvelle utilisation de la proposition 2.3.27 dans le cas du A-localisateur minimal montre que W' contient le A-localisateur minimal. Par conséquent, W' contient les fibrations triviales, d'où on déduit aussitôt que W' est un A-localisateur. Il reste donc à prouver que la complétion simpliciale de W' n'est autre que W. Pour cela, considérons la résolution cosimpliciale de Lawvere D. Pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme $pr_1^* X \longrightarrow Sing_D X$ est une D_1-équivalence d'homotopie argument par argument (grâce au lemme 2.3.18). En particulier, c'est donc une W_{min}-équivalence. On a donc l'égalité $\mathsf{W}' = {Sing_D}^{-1}\mathsf{W}$, et on en déduit que le foncteur $Sing_D$ envoie le A-localisateur minimal dans sa complétion simpliciale W_{min}. La proposition 2.3.27 (toujours pour le A-localisateur minimal) implique par conséquent que le morphisme d'adjonction $1_{\widehat{A\times\Delta}} \longrightarrow Sing_D\, Real_D$ est une W_{min}-équivalence, et partant, une W-équivalence. Il en résulte que ${Real_D}^{-1}\mathsf{W}' = \mathsf{W}$. Une dernière application de la proposition 2.3.27 au A-localisateur W' montre donc que W est la complétion simpliciale de W'. □

Proposition 2.3.31. — *Soient A, B deux petites catégories, $F : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ un foncteur commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, W' un B-localisateur tel que la partie $\mathsf{W} = F^{-1}\mathsf{W}'$ de $\mathrm{Fl}\,\widehat{A}$ soit un A-localisateur, et*

$$\bar{F} : \widehat{A \times \Delta} \simeq \mathcal{H}om(\Delta^{op}, \widehat{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\Delta^{op}, \widehat{B}) \simeq \widehat{B \times \Delta}$$

le foncteur induit par F. Alors on a l'égalité

$$\mathsf{W}_\Delta = \bar{F}^{-1}(\mathsf{W}'_\Delta)\ .$$

Démonstration. — Il est immédiat que $\mathsf{W}'' = \bar{F}^{-1}(\mathsf{W}'_\Delta)$ est un $A \times \Delta$-localisateur qui contient les W-équivalences argument par argument. Il est aussi évident que pour tout préfaisceau X sur A, la projection de $X \times \Delta_1$ sur X est une W''-équivalence. En

vertu du corollaire 2.3.7, cela implique que W'' contient la complétion simpliciale de W, et donc, en particulier, est discret. On vérifie enfin que si pr_1 désigne la projection de $A \times \Delta$ sur A, on a l'égalité $\mathsf{W} = {pr_1^*}^{-1}\mathsf{W}''$, et donc la proposition 2.3.30 permet de conclure. □

CHAPITRE 3

DENSITÉ HOMOTOPIQUE

3.1. Propriétés locales des extensions de Kan homotopiques

Notations 3.1.1. — Si I est une petite catégorie, on désigne par $p_I : I \longrightarrow e$ le foncteur canonique de I vers la catégorie ponctuelle e.

Soit $u : I \longrightarrow J$ un foncteur entre petites catégories. Pour un objet j de J donné, on note I/j la catégorie définie comme suit. Les objets de I/j sont les couples (i, s), où i est un objet de I, et s une flèche de $u(i)$ vers j dans J. Les flèches de (i_0, s_0) vers (i_1, s_1) sont les morphismes $f : i_0 \longrightarrow i_1$ dans I tels que $s_1 u(f) = s_0$. La loi de composition de I/j est celle induite par celle de I, de sorte que l'on a un foncteur d'oubli

$$\xi(u, j) : I/j \longrightarrow I \quad , \qquad (i, s) \longmapsto i \ .$$

De même, on a un foncteur canonique

$$u/j : I/j \longrightarrow J/j \quad , \qquad (i, s) \longmapsto (u(i), s)$$

(où J/j désigne la catégorie des objets de J au-dessus de j, obtenue comme I/j en remplaçant le foncteur u par l'identité de J). Dualement, on définit la catégorie $j\backslash I$ par

$$j\backslash I = (I^{op}/j)^{op} \ .$$

On a de même des foncteurs $\zeta(u, j) = \xi(u^{op}, j)^{op}$ et $j\backslash u = (u^{op}/j)^{op}$, de sorte que l'on obtient obtient les carrés cartésiens suivants dans ***Cat*** (la vérification est laissée au lecteur)

$$\begin{array}{ccc} I/j & \xrightarrow{\xi(u,j)} & I \\ {\scriptstyle u/j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ J/j & \xrightarrow[\xi(1_J,j)]{} & J \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} j\backslash I & \xrightarrow{\zeta(u,j)} & I \\ {\scriptstyle j\backslash u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ j\backslash J & \xrightarrow[\zeta(1_J,j)]{} & J \end{array} \quad .$$

3.1.2. — Soit C une catégorie admettant des petites limites inductives et projectives. Si I est une petite catégorie, on note $C^I = \mathcal{H}om(I, C)$ la catégorie des foncteurs de I vers C. Si $u : I \longrightarrow J$ est un foncteur entre petites catégories, on obtient un foncteur image inverse

$$u^* : C^J \longrightarrow C^I , \qquad F \longmapsto F \circ u ,$$

lequel admet un adjoint à gauche

$$u_! : C^I \longrightarrow C^J ,$$

et un adjoint à droite

$$u_* : C^I \longrightarrow C^J .$$

On remarque que pour tout foncteur F de I vers C, on a des isomorphismes canoniques (voir [**93**, § X.3, théorème 1])

$$(u_!F)_j \simeq \varinjlim_{I/j} \xi(u,j)^*F \qquad \text{et} \qquad (u_*F)_j \simeq \varprojlim_{j\backslash I} \zeta(u,j)^*F , \qquad j \in \mathrm{Ob}\, J .$$

Autrement dit, on a deux isomorphismes de foncteurs

$$j^*\, u_! \simeq p_{I/j!}\, \xi(u,j)^* \qquad \text{et} \qquad j^*\, u_* \simeq p_{j\backslash I *}\, \zeta(u,j)^* ,$$

où j désigne aussi le foncteur $e \longrightarrow J$ correspondant à l'objet j. Ces identifications peuvent s'interpréter en disant que le calcul des fibres des foncteurs $u_!$ et u_* dépend directement du comportement local ou colocal de u (*i.e.* de sa restiction aux catégories I/j ou aux catégories $j\backslash I$ respectivement).

Définition 3.1.3. — Une catégorie de modèles fermée C est *exponentielle à gauche* (resp. *exponentielle à droite*) si pour toute petite catégorie I, $C^I = \mathcal{H}om(I, C)$ admet une structure de catégorie de modèles fermée (nécessairement unique) dont les équivalences faibles sont les flèches de C^I qui sont des équivalences faibles de C argument par argument, et les cofibrations (resp. les fibrations), les flèches de C^I qui sont des cofibrations (resp. des fibrations) de C argument par argument. Une catégorie de modèles fermée est *exponentielle* si elle est exponentielle à gauche et à droite.

Remarque 3.1.4. — Une catégorie de modèles fermée C est exponentielle à gauche si et seulement si C^{op} est exponentielle à droite.

Exemple 3.1.5. — Si A est une petite catégorie, et W un A-localisateur accessible, alors en vertu des corollaires 1.4.22 et 1.4.24, la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A}$ associée à W (théorème 1.4.3) est exponentielle.

Exemple 3.1.6. — Plus généralement, il résulte de la proposition 1.4.23 (en ayant recours aux mêmes types de méthodes que pour la preuve du corollaire 1.4.24) que toute catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant est exponentielle à droite (cf. [**72**, théorème 13.4.2]).

3.1.7. — Soit C une catégorie, et W une partie de $\mathrm{Fl}\, C$. Si I est une petite catégorie, on note W^I l'ensemble des flèches f de C^I telles que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $f_i \in \mathsf{W}$, et $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, C^I$ ou $\mathbf{Ho}\, C^I$ la localisation de C^I par W^I. Si $u : I \longrightarrow J$ est un morphisme de Cat, alors le foncteur

$$u^* : C^J \longrightarrow C^I$$

vérifie la condition $u^*\mathsf{W}^J \subset \mathsf{W}^I$, et donc induit un foncteur noté aussi

$$u^* : \mathbf{Ho}\, C^J \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C^I \ .$$

Lemme 3.1.8. — *Soit C une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite. Alors pour tout morphisme $u : I \longrightarrow J$ de Cat, le foncteur $u^* : C^J \longrightarrow C^I$ est un foncteur de Quillen à droite de C^J vers C^I au sens de* [**74**, définition 1.3.1].

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que le foncteur u^* admet un adjoint à gauche et qu'il respecte les fibrations et les fibrations triviales. La première condition résulte du fait que C admet des petites limites inductives, et la seconde est évidente. □

Lemme 3.1.9. — *Soit C une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite. Alors pour tout morphisme $u : I \longrightarrow J$ de Cat, le foncteur $u_! : C^I \longrightarrow C^J$ est un foncteur de Quillen à gauche.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme précédent par adjonction. □

Proposition 3.1.10. — *Soit C une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite. Alors pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, le foncteur*

$$u_! : C^I \longrightarrow C^J$$

admet un foncteur dérivé à gauche

$$\mathbf{L}u_! : \mathbf{Ho}\, C^I \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C^J \ ,$$

lequel est en outre un adjoint à gauche du foncteur

$$u^* : \mathbf{Ho}\, C^J \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C^I \ .$$

Démonstration. — Cela résulte du lemme 3.1.8 et de [**74**, lemme 1.3.10]. □

Remarque 3.1.11. — La proposition ci-dessus admet un énoncé dual, à savoir que si C est une catégorie de modèles fermée exponentielle à gauche, pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, le foncteur

$$u^* : \mathbf{Ho}\, C^J \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C^I$$

admet un adjoint à droite

$$\mathbf{R}u_* : \mathbf{Ho}\, C^I \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C^J \ .$$

Lorsque J est la catégorie ponctuelle, et lorsque cela aura un sens, on notera $\mathbf{L}\varinjlim_I$, ou plus simplement $\mathbf{L}\varinjlim$, (resp. $\mathbf{R}\varprojlim_I$ ou $\mathbf{R}\varprojlim$) l'adjoint à gauche (resp. à droite) du foncteur

$$u^* = p_I^* : \mathbf{Ho}\, C \simeq \mathbf{Ho}\, C^e \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C^I \ .$$

Si F est un foncteur de I vers C, $\mathbf{L}\varinjlim F$ (resp. $\mathbf{R}\varprojlim F$) est appelé la *colimite homotopique* de F (resp. la *limite homotopique* de F).

Lemme 3.1.12. — *Soient C une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, I une petite catégorie, et i un objet de I. Le foncteur d'évaluation en i*

$$i^* : C^I \longrightarrow C$$

est un foncteur de Quillen à gauche.

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, le foncteur

$$i_* : C \longrightarrow C^I$$

respecte les fibrations triviales. Or pour chaque objet i' de I, on a une identification canonique

$$i'^*\, i_* \simeq \prod_{\mathrm{Hom}_I(i',i)} 1_C \ ,$$

ce qui permet de conclure car les fibrations triviales sont stables par produits. □

Lemme 3.1.13. — *Soient C une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, $u : I \longrightarrow J$ un morphisme de $\mathbf{Cat}$, et j un objet de J. Le foncteur image inverse*

$$\xi(u,j)^* : C^I \longrightarrow C^{I/j}$$

est un foncteur de Quillen à gauche.

Démonstration. — Comme le foncteur $\xi(u,j)^*$ respecte les équivalences faibles, il suffit de montrer qu'il respecte les cofibrations, ou bien, de manière équivalente, que $\xi(u,j)_*$ respecte les fibrations triviales. Par définition, cette dernière propriété signifie que pour tout objet i de I, le foncteur $i^*\xi(u,j)_*$ respecte les fibrations triviales, autrement dit, par adjonction, que le foncteur $\xi(u,j)^* i_!$ respecte les cofibrations. Or pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$ et tout $(i',\mu') \in \mathrm{Ob}\, I/j$ (*i.e.* $i' \in \mathrm{Ob}\, I$ et $\mu' \in \mathrm{Hom}_J(u(i'),j)$), on a une identification naturelle

$$\mathrm{Hom}_I(i,i') = \coprod_{\mu \in \mathrm{Hom}_J(u(i),j)} \mathrm{Hom}_{I/j}((i,\mu),(i',\mu')) \ ,$$

ce qui induit un isomorphisme canonique

$$\xi(u,j)^*\, i_! \simeq \coprod_{\mu \in \mathrm{Hom}_J(u(i),j)} (i,\mu)_! \ ,$$

et permet de conclure, puisque les foncteurs $(i,\mu)_!$ respectent les cofibrations, et celles-ci sont stables par sommes. □

Proposition 3.1.14. — *Soient C une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, et $u : I \longrightarrow J$ un morphisme de Cat. Pour tout objet j de J, on a un isomorphisme de foncteurs canonique*

$$j^* \mathbf{L}u_! \simeq \mathbf{L}p_{I/j_!}\, \xi(u,j)^* \ .$$

Démonstration. — On sait que le foncteur dérivé à gauche du composé de deux foncteurs de Quillen à gauche est canoniquement isomorphe au composé des deux foncteurs dérivés à gauche correspondants (cf. [**74**, théorème 1.3.7]), et on a un isomorphisme canonique dans C

$$j^* u_! \simeq p_{I/j_!}\, \xi(u,j)^* \ .$$

La proposition résulte donc des lemmes 3.1.9, 3.1.12, et 3.1.13. □

Remarque 3.1.15. — L'énoncé ci-dessus se dualise comme suit. Si C est une catégorie de modèle fermée exponentielle à gauche, alors pour tout morphisme $u : I \longrightarrow J$ de Cat, et tout objet j de J, on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Ho}\, C$

$$j^* \mathbf{R}u_* \simeq \mathbf{R}p_{j\backslash I_*}\, \zeta(u,j)^* \ .$$

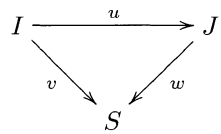
Lemme 3.1.16. — *Soient C une catégorie de modèles fermée, et I une petite catégorie, telles que C^I admette une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles de C argument par argument. Alors la famille des foncteurs*

$$i^* : \mathbf{Ho}\, C^I \longrightarrow \mathbf{Ho}\, C \quad , \qquad i : e \longrightarrow I \quad , \quad i \in \mathrm{Ob}\, I$$

*est conservative (*i.e. *une flèche f de $\mathbf{Ho}\, C^I$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout objet i de I, $f_i = i^*(f)$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}\, C$).*

Démonstration. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathbf{Ho}\, C^I$. Comme C^I admet une structure de catégorie de modèles fermée, on peut supposer que X est un objet cofibrant de C^I, et que Y est un objet fibrant de C^I. Il résulte alors de [**109**, § I.1, corollaire 1 du théorème 1] que f est l'image d'une flèche $f_0 : X \longrightarrow Y$ de C^I, ce qui prouve l'assertion, puisqu'en vertu de [**109**, § I.5, proposition 1], les équivalences faibles de C^I forment une partie fortement saturée de $\mathrm{Fl}\, C^I$. □

3.1.17. — On considère une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite C, ainsi qu'un triangle commutatif de Cat



.

On définit un morphisme de foncteurs canonique dans $\mathbf{Ho}\, C^S$

$$\mathbf{L}v_!\, p_I^* \longrightarrow \mathbf{L}w_!\, p_J^*$$

comme suit. On a un morphisme d'adjonction $\varepsilon : \mathbf{L}u_! u^* \longrightarrow 1_{\mathbf{Ho}\, C^J}$, d'où un morphisme

$$\mathbf{L}w_! \star \varepsilon \star p_J^* : \mathbf{L}w_! \mathbf{L}u_! u^* p_J^* \longrightarrow \mathbf{L}w_! p_J^* .$$

Or, comme $w\, u = v$, on a $u^* w^* = v^*$, d'où un isomorphisme canonique $\mathbf{L}w_! \mathbf{L}u_! \simeq \mathbf{L}v_!$, et comme $p_J u = p_I$, on a $u^* p_J^* = p_I^*$. On obtient donc un isomorphisme $\mathbf{L}w_! \mathbf{L}u_! u^* p_J^* \simeq \mathbf{L}v_! p_I^*$, d'où le morphisme annoncé.

On a aussi un morphisme de foncteurs canonique dans $\mathbf{Ho}\, C$

$$\mathbf{L}p_{I!} v^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!} w^*$$

composé de l'isomorphisme canonique $\mathbf{L}p_{I!} v^* \simeq \mathbf{L}p_{J!} \mathbf{L}u_! u^* w^*$ et du morphisme de foncteurs

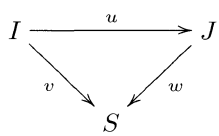
$$\mathbf{L}p_{J!} \star \varepsilon \star w^* : \mathbf{L}p_{J!} \mathbf{L}u_! u^* w^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!} w^* .$$

En particulier, lorsque S est la catégorie ponctuelle, on obtient de la sorte un morphisme canonique dans $\mathbf{Ho}\, C$

$$\mathbf{L}p_{I!} p_I^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!} p_J^*$$

(les deux constructions ci-dessus donnant le même résultat).

Proposition 3.1.18. — *Soient C une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, et*



un triangle commutatif de **Cat**. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout objet s de S, le morphisme $\mathbf{L}p_{I/s!} p_{I/s}^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J/s!} p_{J/s}^*$, induit par $u/s : I/s \longrightarrow J/s$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\, C$.*

(b) *Le morphisme canonique $\mathbf{L}v_! p_I^* \longrightarrow \mathbf{L}w_! p_J^*$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\, C^S$.*

Démonstration. — En vertu du lemme 3.1.16, la condition (b) est équivalente à la suivante.

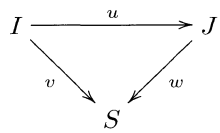
(b′) *Pour tout objet s de S, $s^* \mathbf{L}v_! p_I^* \longrightarrow s^* \mathbf{L}w_! p_J^*$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\, C$.*

Or d'après la proposition 3.1.14, on a deux isomorphismes canoniques

$$s^* \mathbf{L}v_! \simeq \mathbf{L}p_{I/s!}\, \xi(v,s)^* \qquad \text{et} \qquad s^* \mathbf{L}w_! \simeq \mathbf{L}p_{J/s!}\, \xi(w,s)^* .$$

Les égalités $\xi(v,s)^* p_I^* = p_{I/s}^*$ et $\xi(w,s)^* p_J^* = p_{J/s}^*$ montrent l'équivalence entre (a) et (b'), et achèvent ainsi la démonstration. □

Remarque 3.1.19. — On a aussi une formulation duale. Si C est une catégorie de modèles exponentielle à gauche, et si



est un triangle commutatif de ***Cat***, les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) *Pour tout objet s de S, le morphisme $\mathbf{R}p_{s\backslash J\,*}\,p^*_{s\backslash J} \longrightarrow \mathbf{R}p_{s\backslash I\,*}\,p^*_{s\backslash I}$, induit par $s\backslash u : s\backslash I \longrightarrow s\backslash J$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\,C$.*

(b) *Le morphisme canonique $\mathbf{R}w_*\,p^*_J \longrightarrow \mathbf{R}v_*\,p^*_I$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\,C^S$.*

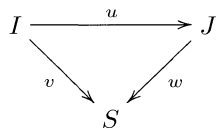
Lemme 3.1.20. — *Soient C une catégorie de modèles fermée exponentielle, et $u : I \longrightarrow J$ un morphisme de ***Cat***. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le morphisme $\mathbf{L}p_{I!}\,p^*_I \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}\,p^*_J$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}\,C$.*

(b) *Le morphisme $\mathbf{R}p_{J*}\,p^*_J \longrightarrow \mathbf{R}p_{I*}\,p^*_I$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}\,C$.*

Démonstration. — Le lemme résulte du fait que chacun des morphismes de (a) et (b) s'obtient de l'autre par transposition. □

Proposition 3.1.21. — *Soient C une catégorie de modèles exponentielle, et*



*un triangle commutatif de ***Cat***. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout objet s de S, le morphisme $\mathbf{L}p_{s\backslash I\,!}\,p^*_{s\backslash I} \longrightarrow \mathbf{L}p_{s\backslash J\,!}\,p^*_{s\backslash J}$, induit par $s\backslash u : s\backslash I \longrightarrow s\backslash J$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\,C$.*

(b) *Le morphisme canonique $\mathbf{L}p_{I!}\,v^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}\,w^*$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\,C^S$.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme précédent et de la remarque 3.1.19, car le morphisme $\mathbf{L}p_{I!}\,v^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}\,w^*$ est le transposé du morphisme $\mathbf{R}w_*\,p^*_J \longrightarrow \mathbf{R}v_*\,p^*_I$. □

Proposition 3.1.22. — *Soit $\Phi : C \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur de Quillen à gauche entre deux catégories de modèles fermées exponentielles à droite. Alors pour chaque petite catégorie I, le foncteur induit par Φ sur les catégories de foncteurs, noté aussi par abus $\Phi : C^I \longrightarrow \mathcal{D}^I$, est un foncteur de Quillen à gauche, et admet donc un foncteur dérivé à gauche*

$$\mathbf{L}\Phi : \mathbf{Ho}\,C^I \longrightarrow \mathbf{Ho}\,\mathcal{D}^I\ .$$

En outre, pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}u_! \, \mathbf{L}\Phi \simeq \mathbf{L}\Phi \, \mathbf{L}u_! \ ,$$

autrement dit, le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}\, C^I & \xrightarrow{\mathbf{L}\Phi} & \mathbf{Ho}\, \mathcal{D}^I \\ {\scriptstyle \mathbf{L}u_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}u_!} \\ \mathbf{Ho}\, C^J & \xrightarrow[\mathbf{L}\Phi]{} & \mathbf{Ho}\, \mathcal{D}^J \end{array}$$

commute à isomorphisme près.

Démonstration. — Il est immédiat que le foncteur $\Phi : C^I \longrightarrow \mathcal{D}^I$ admet un adjoint à droite et que ce dernier respecte les fibrations et les fibrations triviales, ce qui prouve la première assertion. La seconde résulte du lemme 3.1.9, de [**74**, théorème 1.3.7], et du fait que pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, on a un isomorphisme canonique $u_! \, \Phi \simeq \Phi \, u_!$, puisque Φ commute aux petites limites inductives. □

Notations 3.1.23. — Soient A une petite catégorie et W une classe de flèches de $\widehat{A}$ (le plus souvent un A-localisateur). Si I est une petite catégorie, les éléments de W^I seront appelés des W-*équivalences argument par argument*, ou plus simplement des W-*équivalences*, si aucune confusion n'en résulte. On note

$$\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) = \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}^I = (\mathsf{W}^I)^{-1}\, \mathcal{H}om(I, \widehat{A})$$

la localisation de $\mathcal{H}om(I, \widehat{A})$ par les W-équivalences argument par argument, ou bien encore, lorsque I est la catégorie ponctuelle, plus simplement

$$\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A} = \mathsf{W}^{-1} \widehat{A} \ .$$

Si $u : I \longrightarrow J$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, il induit donc un foncteur image inverse

$$u^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \ .$$

3.1.24. — On fixe, dans ce numéro et le suivant, une petite catégorie A, et deux A-localisateurs W et W'. On suppose en outre que W est accessible, et que $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}'$. On vérifie que pour toute petite catégorie I, $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{A}(I)$ est la localisation de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I)$ par les images des W'-équivalences argument par argument. On a donc un foncteur de localisation

$$\gamma : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{A}(I) \ ,$$

et pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{A}(J) \\ {\scriptstyle u^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u^*} \\ \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{A}(I) \end{array} \ .$$

En outre, le foncteur $u^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I)$ admet un adjoint à gauche noté $\mathbf{L}u_!$ (cf. l'exemple 3.1.5 et la proposition 3.1.10).

Lemme 3.1.25. — *Pour tout morphisme $u : I \longrightarrow J$ de* ***Cat****, il existe un unique foncteur*

$$\mathbf{L}u_! : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(J)$$

tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(I) \\ {\scriptstyle \mathbf{L}u_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}u_!} \\ \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(J) & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(J) \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. — Comme $\gamma : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(I)$ est la localisation de la catégorie $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I)$ par les images des W'-équivalences argument par argument, il suffit de montrer que si f est une W'-équivalences de $\widehat{A}^I$, alors $\gamma\, \mathbf{L}u_!(f)$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(J)$. Pour cela, considérons le A-localisateur accessible W'' engendré par W et par l'ensemble $\{f_i \mid i \in \mathrm{Ob}\, I\}$. On a $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}'' \subset \mathsf{W}'$, et en vertu de la proposition 3.1.22, appliquée au foncteur $\Phi = 1_{\widehat{A}}$, on a un carré commutatif, à isomorphisme près,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I) & \xrightarrow{\gamma'} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}''} \widehat{A}(I) \\ {\scriptstyle \mathbf{L}u_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}u_!} \\ \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(J) & \xrightarrow[\gamma']{} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}''} \widehat{A}(J) \end{array} .$$

On en déduit que l'image de $\mathbf{L}u_!(f)$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}''} \widehat{A}(J)$, et à plus forte raison celle dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(J)$, est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 3.1.26. — *Soient A une petite catégorie et W un A-localisateur. Pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ dans* ***Cat****, le foncteur image inverse*

$$u^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I)$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathbf{L}u_! : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(J) \ .$$

Démonstration. — En vertu de la proposition 3.1.10, l'assertion est vérifiée lorsque W est accessible, et en particulier lorsque W est le A-localisateur minimal. Le cas général résulte lemme précédent et de la 2-fonctorialié de la localisation (voir par exemple [**96**, lemme 2.1.6]). □

Remarque 3.1.27. — De façon explicite, le foncteur $\mathbf{L}u_!$ de la proposition précédente est construit comme suit. On considère sur $\widehat{A}^I = \mathcal{H}om(I, \widehat{A})$ la structure de catégorie de modèles fermée du corollaire 1.4.24, associée au A-localisateur *minimal*, et on choisit une résolution cofibrante fonctorielle, autrement dit, un foncteur $L : \widehat{A}^I \longrightarrow \widehat{A}^I$, et un morphisme de foncteurs $q : L \longrightarrow 1_{\widehat{A}^I}$, tels que pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \widehat{A}$, l'objet LF soit cofibrant et la flèche $q_F : LF \longrightarrow F$ une fibration triviale (ou simplement une équivalence faible) au sens de cette catégorie de modèles fermée. Il résulte du lemme 3.1.25 que le foncteur composé $u_!L : \widehat{A}^I \longrightarrow \widehat{A}^J$ respecte les W-équivalences argument par argument. Le foncteur $\mathbf{L}u_! : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J)$ est induit par le foncteur $u_!L$, et en particulier pour tout objet F de $\widehat{A}^I$, on a $\mathbf{L}u_!F = u_!LF$. Le morphisme de foncteurs $u_! \star q : u_!L \longrightarrow u_!$ induit un morphisme canonique de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}^I & \xrightarrow{u_!} & \widehat{A}^J \\ \downarrow & \overset{\alpha}{\swarrow} & \downarrow \\ \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) & \xrightarrow[\mathbf{L}u_!]{} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J) \end{array} \quad .$$

On peut vérifier que le couple $(\mathbf{L}u_!, \alpha)$ satisfait à la propriété universelle des foncteurs dérivés à gauche, et que le morphisme de foncteurs α s'obtient également par adjonction à partir de l'image dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I)$ du morphisme d'adjonction $1_{\widehat{A}^I} \longrightarrow u^*u_!$. Lorsque J est la catégorie ponctuelle, le foncteur $u_!$ est le foncteur limite inductive $\varinjlim_I : \widehat{A}^I \longrightarrow \widehat{A}$, et le foncteur $\mathbf{L}u_! : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$ sera noté $\mathbf{L}\varinjlim_I$, ou plus simplement $\mathbf{L}\varinjlim$. Pour tout objet F de $\widehat{A}^I$, le morphisme de foncteurs α définit alors un morphisme canonique $\alpha_F : \mathbf{L}\varinjlim F \longrightarrow \varinjlim F$.

Proposition 3.1.28. — *On considère deux petites catégories A et B, un A-localisateur* W, *un B-localisateur* W′, *et un foncteur $\Phi : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ qui commute aux petites limites inductives, respecte les monomorphismes, et envoie les* W*-équivalences sur des* W′*-équivalences. Alors pour chaque petite catégorie I, Φ induit un foncteur, noté aussi par abus*

$$\Phi : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{B}(I) \ ,$$

et pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}u_!\, \Phi \xrightarrow{\sim} \Phi\, \mathbf{L}u_! \ .$$

Autrement dit, le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{B}(I) \\ {\scriptstyle \mathbf{L}u_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}u_!} \\ \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J) & \xrightarrow[\Phi]{} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{B}(J) \end{array}$$

commute à isomorphisme près.

Démonstration. — Lorsque W et W′ sont accessibles, cela résulte de la proposition 3.1.22. En particulier, l'assertion est vérifiée lorsque W est le A-localisateur minimal et W′ le B-localisateur engendré par ΦW, qui est accessible en vertu du corollaire 1.4.9. Le lemme 3.1.25 montre que cela implique aussi le cas général. □

Corollaire 3.1.29. — *Soient A une petite catégorie, et* W *un A-localisateur. On considère deux foncteurs $u : I \longrightarrow J$ et $v : K \longrightarrow L$ entre petites catégories induisant un carré commutatif dans* **Cat**

$$\begin{array}{ccc} I \times K & \xrightarrow{u \times 1_K} & J \times K \\ {\scriptstyle 1_I \times v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_J \times v} \\ I \times L & \xrightarrow[u \times 1_L]{} & J \times L \end{array} .$$

On a alors un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}\,(I \times L)$

$$\mathbf{L}(1_I \times v)_!\, (u \times 1_K)^* \simeq (u \times 1_L)^*\, \mathbf{L}(1_J \times v)_! \ ,$$

autrement dit, le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}\,(J \times K) & \xrightarrow{(u \times 1_K)^*} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}\,(I \times K) \\ {\scriptstyle \mathbf{L}(1_J \times v)_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}(1_I \times v)_!} \\ \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}\,(J \times L) & \xrightarrow[(u \times 1_L)^*]{} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}\,(I \times L) \end{array} \tag{3.1.29.1}$$

commute à isomorphisme près.

Démonstration. — Une fois remarqué que le carré 3.1.29.1 s'identifie au carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}^J}\, \widehat{A \times J^{op}}(K) & \xrightarrow{u^*} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}^I}\, \widehat{A \times I^{op}}(K) \\ {\scriptstyle \mathbf{L}v_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}v_!} \\ \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}^J}\, \widehat{A \times J^{op}}(L) & \xrightarrow[u^*]{} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}^I}\, \widehat{A \times I^{op}}(L) \end{array} ,$$

on constate que ce corollaire résulte de la proposition 3.1.28 appliquée au foncteur $\Phi = u^* : \widehat{A \times J^{op}} \longrightarrow \widehat{A \times I^{op}}$ en considérant les W-équivalences argument par argument. □

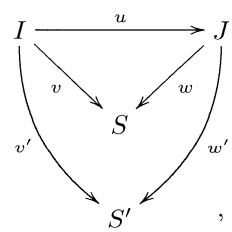
Proposition 3.1.30. — *Soient A une petite catégorie,* W *un A-localisateur, et I une petite catégorie. Une flèche de* $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I)$ *est un isomorphisme si et seulement si pour tout objet i de I, son image par le foncteur i^* :* $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du corollaire 1.4.8, appliqué à la catégorie $A \times I^{op}$ et au $A \times I^{op}$-localisateur W^I, et du corollaire 1.4.7. □

Lemme 3.1.31. — *Soient A une petite catégorie et W, W' deux A-localisateurs. On suppose que W est accessible, et que $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}'$. Pour toute petite catégorie I, et tout* ensemble S *de flèches de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I)$ tel que pour tout $s \in S$ l'image de s dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(I)$ soit un isomorphisme, il existe un A-localisateur accessible W'' tel que $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}'' \subset \mathsf{W}'$, et tel que pour tout $s \in S$ l'image de s dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}''} \widehat{A}(I)$ soit un isomorphisme.*

Démonstration. — En vertu du corollaire 1.4.8, appliqué à la catégorie $A \times I^{op}$ et au $A \times I^{op}$-localisateur W^I, pour tout $s \in S$, il existe deux morphismes f_s et g_s de $\widehat{A}^I$ avec $g_s \in \mathsf{W}^I$, et tels que l'on ait l'égalité $f_s = g_s s$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(I)$. Comme $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}'$, et comme s est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'} \widehat{A}(I)$, il résulte du corollaire 1.4.7 que $f_s \in \mathsf{W}'^I$. On en déduit que le A-localisateur W'' engendré par W et la famille $(f_{s,i})_{s \in S, i \in \mathrm{Ob}\, I}$, de flèches de $\widehat{A}$, est un A-localisateur accessible contenu dans W', et que pour tout $s \in S$, l'image de s dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}''} \widehat{A}(I)$ est un isomorphisme. □

3.1.32. — Dans les deux lemmes suivants, on se fixe une petite catégorie A, un A-localisateur W, et on considère un diagramme commutatif du type suivant dans ***Cat***



et le morphisme de foncteurs dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(S')$

$$\mathbf{L}v'_! \, v^* \longrightarrow \mathbf{L}w'_! \, w^* \ ,$$

composé de l'isomorphisme canonique $\mathbf{L}v'_! \, v^* \simeq \mathbf{L}w'_! \, \mathbf{L}u_! \, u^* w^*$ suivi du morphisme

$$\mathbf{L}w'_! \star \varepsilon \star w^* : \mathbf{L}w'_! \, \mathbf{L}u_! \, u^* w^* \longrightarrow \mathbf{L}w'_! \, w^* \ ,$$

où $\varepsilon : \mathbf{L}u_! \, u^* \longrightarrow 1_{\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(J)}$ désigne le morphisme d'adjonction.

Lemme 3.1.33. — *Soient K une petite catégorie, et $F : K \longrightarrow \widehat{A}^S$ un foncteur tel que pour tout objet k de K, la flèche canonique*

$$\mathbf{L}v'_! \, v^* F_k \longrightarrow \mathbf{L}w'_! \, w^* F_k$$

soit un isomorphisme. Alors si $p = p_K \times 1_S$ désigne la projection de $K \times S$ sur S, on a un isomorphisme

$$\mathbf{L}v'_! \, v^* \mathbf{L}p_! \, F \longrightarrow \mathbf{L}w'_! \, w^* \mathbf{L}p_! \, F \ .$$

Démonstration. — En vertu du corollaire 3.1.29, pour tout objet k de K, on a un isomorphisme

$$\mathbf{L}v'_!\, v^* F_k = \mathbf{L}v'_!\, (k \times 1_I)^* (1_K \times v)^* F \simeq (k \times 1_{S'})^* \mathbf{L}(1_K \times v')_!\, (1_K \times v)^* F \ .$$

En utilisant les formules analogues pour w et w', il résulte de la proposition 3.1.30 et de l'hypothèse du lemme que le morphisme canonique

$$\mathbf{L}(1_K \times v')_!\, (1_K \times v)^* F \longrightarrow \mathbf{L}(1_K \times w')_!\, (1_K \times w)^* F$$

est un isomorphisme. En appliquant le foncteur $\mathbf{L}(p_K \times 1_{S'})_!$, on obtient l'isomorphisme annoncé, en remarquant qu'en vertu du corollaire 3.1.29, on a des isomorphismes

$$\mathbf{L}v'_!\, v^* \mathbf{L}p_!\, F \simeq \mathbf{L}v'_! \mathbf{L}(p_K \times 1_I)_!\, (1_K \times v)^* F \simeq \mathbf{L}(p_K \times 1_{S'})_! \mathbf{L}(1_K \times v')_!\, (1_K \times v)^* F \ ,$$

ainsi que des isomorphismes analogues pour w et w'. □

Lemme 3.1.34. — *Pour que le morphisme de foncteurs*

$$\mathbf{L}v'_!\, v^* \longrightarrow \mathbf{L}w'_!\, w^*$$

soit un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(S')$*, il faut et il suffit que son analogue le soit dans* $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{A}(S')$ *pour un A-localisateur accessible* $\mathsf{W}' \subset \mathsf{W}$.

Démonstration. — Le lemme 3.1.25 montre que c'est une condition suffisante. Il suffit donc de montrer qu'elle est nécessaire. Choisissons un cardinal α tel que tout préfaisceau sur $A \times S^{op}$ soit la limite inductive α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles, et tel que tout A-localisateur soit stable par limites inductives α-filtrantes (cf. 1.2.15 et 1.4.28). Alors pour tout ensemble ordonné α-filtrant K, et tout A-localisateur W', le foncteur limite inductive

$$\varinjlim_K = (p_K \times 1_S)_! : \widehat{A}^{S \times K} \longrightarrow \widehat{A}^S$$

respecte les W'-équivalences argument par argument. Autrement dit, pour tout foncteur $F : K \longrightarrow \widehat{A}^S$, la flèche canonique

$$\mathbf{L}(p_K \times 1_S)_!\, F \longrightarrow \varinjlim_K F$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{A}(S)$. On en déduit que pour que $\mathbf{L}v'_!\, v^* \longrightarrow \mathbf{L}w'_!\, w^*$ soit un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{A}(S)$, il faut et il suffit que pour tout préfaisceau α-accessible X sur $A \times S^{op}$ la flèche $\mathbf{L}v'_!\, v^* X \longrightarrow \mathbf{L}w'_!\, w^* X$ soit un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}'}\, \widehat{A}(S)$. En effet, soit X un préfaisceau arbitraire sur $A \times S^{op}$, et notons K l'ensemble ordonné α-filtrant de ses sous-objets α-accessibles, et $F : K \longrightarrow \widehat{A}^S$ le foncteur évident d'inclusion. En vertu de ce qui précède, on a un isomorphisme

$$\mathbf{L}(p_K \times 1_S)_!\, F \xrightarrow{\sim} X \ ,$$

et le lemme 3.1.33 implique l'assertion. Comme la sous-catégorie de $\widehat{A \times S^{op}}$ formée des préfaisceaux α-accessibles est essentiellement petite (cf. 1.2.15), on achève la démonstration en appliquant le lemme 3.1.31 à l'inclusion du A-localisateur minimal dans le A-localisateur W, et en tenant compte du lemme 3.1.25. □

Proposition 3.1.35. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. On considère le triangle commutatif suivant dans $\mathbf{Cat}$.*

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad u \quad} & J \\ & {\scriptstyle v}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle w} & \\ & S & \end{array}$$

1. *Le foncteur*

$$u^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I)$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathbf{L}u_! : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J)\ ,$$

et ce dernier est le foncteur dérivé à gauche du foncteur

$$u_! : \widehat{A}^I \longrightarrow \widehat{A}^J\ .$$

2. *Pour tout objet j de J, on a un isomorphisme de foncteurs canonique dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$*

$$j^*\, \mathbf{L}u_! \simeq \mathbf{L}p_{I/j\,!}\, \xi(u,j)^*\ .$$

3. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout objet s de S, le morphisme $\mathbf{L}p_{I/s\,!}\, p^*_{I/s} \longrightarrow \mathbf{L}p_{J/s\,!}\, p^*_{J/s}$, induit par $u/s : I/s \longrightarrow J/s$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$.*

(b) *Le morphisme canonique $\mathbf{L}v_!\, p_I^* \longrightarrow \mathbf{L}w_!\, p_J^*$ est un isomorphisme.*

4. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a′) *Pour tout objet s de S, le morphisme $\mathbf{L}p_{s\backslash I\,!}\, p^*_{s\backslash I} \longrightarrow \mathbf{L}p_{s\backslash J\,!}\, p^*_{s\backslash J}$, induit par $s\backslash u : s\backslash I \longrightarrow s\backslash J$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$.*

(b′) *Le morphisme canonique $\mathbf{L}p_{I\,!}\, v^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J\,!}\, w^*$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Dans le cas où W est accessible, cela résulte des propositions 3.1.10, 3.1.14, 3.1.18, et 3.1.21. Dans le cas général, le point 1 est conséquence immédiate de la proposition 3.1.26, et de la remarque 3.1.27. Le point 2 résulte du cas accessible, de la 2-fonctorialité de la localisation, et du lemme 3.1.25. Les équivalences 3 et 4 résultent elles aussi du cas accessible, en vertu du lemme précédent. □

Remarque 3.1.36. — Lorsque le A-localisateur W est accessible, la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A}$ est exponentielle (cf. exemple 3.1.5). En gardant les notations de la proposition précédente, le foncteur

$$u^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I)$$

admet alors également un adjoint à droite

$$\mathbf{R}u_* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(J)\ ,$$

qui est le foncteur dérivé à droite du foncteur

$$u_* : \widehat{A}^I \longrightarrow \widehat{A}^J$$

(cf. remarque 3.1.11), et pour tout objet j de J, on a un isomorphisme de foncteurs canonique dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$

$$j^*\, \mathbf{R}u_* \simeq \mathbf{R}p_{j\backslash I\,*}\, \zeta(u,j)^*$$

(cf. remarque 3.1.15). De plus, on obtient par transposition que les conditions équivalentes de la troisième partie de la proposition sont aussi équivalentes à la condition

(c) *le morphisme canonique* $\mathbf{R}p_{J\,*}\, w^* \longrightarrow \mathbf{R}p_{I\,*}\, v^*$ *est un isomorphisme ;*

et celles de la quatrième partie à la condition

(c′) *le morphisme canonique* $\mathbf{R}w_*\, p_J^* \longrightarrow \mathbf{R}v_*\, p_I^*$ *est un isomorphisme.*

3.2. Préfaisceaux réalisés en catégories

3.2.1. — Soit C une petite catégorie. On a un foncteur

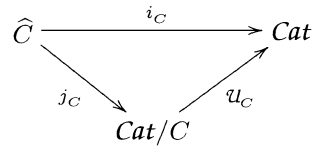
$$i_C : \widehat{C} \longrightarrow \mathit{Cat}$$

qui associe à chaque préfaisceau X sur C la catégorie C/X des objets de C au-dessus de X. Pour être plus explicite, si X est préfaisceau d'ensembles sur C, on définit la catégorie C/X de la manière suivante. Les objets de C/X sont les couples (c,s), où c est un objet de C (vu comme un préfaisceau sur C par le plongement de Yoneda), et s une section de X au-dessus de c (que l'on voit comme un morphisme de préfaisceaux de c vers X). Une flèche f de (c_0,s_0) vers (c_1,s_1) dans C/X est simplement un morphisme f de c_0 vers c_1 tel que $s_1 f = s_0$. Le foncteur i_C ci-dessus est défini sur les morphismes comme suit : pour un morphisme de préfaisceaux $u : X \longrightarrow Y$, le foncteur

$$i_C(u) = C/u : C/X \longrightarrow C/Y$$

envoie un couple (c,s) sur (c,us) (et ici encore, le composé us correspond à la section $u^*(s)$ de Y au-dessus de c induite par u). On vérifie aussitôt que lorsque c est un objet de C vu comme un préfaisceau représentable sur C, la catégorie C/c est canoniquement isomorphe à la catégorie construite au numéro 3.1.1 avec $C = I = J$, $u = 1_C$, et $c = j$. Par la suite, on ne distinguera donc pas ces deux constructions.

Vu que $i_C(e_{\widehat{C}}) = C$ (où $e_{\widehat{C}}$ désigne l'objet final de $\widehat{C}$), le foncteur i_C se factorise de manière unique par la catégorie des petites catégories au-dessus de C (où $\mathcal{U}_C$ désigne le foncteur d'oubli évident) :

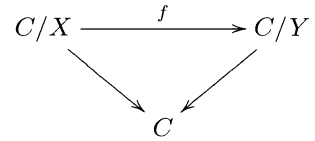


Proposition 3.2.2. — *Pour toute petite catégorie C, le foncteur*

$$j_C : \widehat{C} \longrightarrow \mathit{Cat}/C$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. — Soient X et Y deux préfaisceaux sur C, et soit



,

un morphisme de Cat/C. Si $(c,\ s : c \longrightarrow X)$ est un objet de C/X, alors $f(c,s)$ est un objet de C/Y de la forme $(c, f_c(s) : c \longrightarrow Y)$, puisque le triangle ci-dessus est commutatif. Or par le lemme de Yoneda, on a pour tout objet c de C, et tout préfaisceau T sur C, une identification canonique

$$T(c) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(c, T)\ .$$

Par suite, on peut définir une application $g(c) : X(c) \longrightarrow Y(c)$, par $s \longmapsto f_c(s)$. On vérifie immédiatement que cela définit un morphisme de préfaisceaux $g : X \longrightarrow Y$, que $i_C g = f$, et qu'un tel g est unique. □

Corollaire 3.2.3. — *Pour toute petite catégorie C, le foncteur*

$$i_C : \widehat{C} \longrightarrow \mathit{Cat}$$

est fidèle.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition précédente, et du fait que le foncteur d'oubli $\mathit{Cat}/C \longrightarrow \mathit{Cat}$ est lui-même fidèle. □

3.2.4. — On considère à présent une petite catégorie A, et un foncteur

$$i : A \longrightarrow \mathit{Cat}\ .$$

On obtient alors un foncteur $i^* : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{A}$, défini pour chaque petite catégorie C, et chaque objet a de A, par $i^*(C)(a) = \mathrm{Hom}_{\mathit{Cat}}(ia, C)$. Cela détermine ainsi un foncteur $i_A i^* : \mathit{Cat} \longrightarrow \mathit{Cat}$. Si C est une petite catégorie, on notera par abus A/C la catégorie $i_A i^*(C)$.

On suppose à présent qu'en outre, pour tout objet a de A, la catégorie ia admet un objet final e_a, et on définit un morphisme de foncteurs

$$\alpha : i_A i^* \longrightarrow 1_{Cat}$$

comme suit : si C est une petite catégorie, le foncteur

$$\alpha_C : A/C \longrightarrow C$$

est déterminé sur les objets par la formule $\alpha_C(a,u) = u(e_a)$ (en remarquant que par définition du préfaisceau i^*C, un objet de A/C est un couple (a,u), où a est un objet de A, et u un foncteur $ia \longrightarrow C$), et si $f : (a,u) \longrightarrow (b,v)$ est une flèche de A/C, *i.e.* une flèche $f : a \longrightarrow b$ telle que $v \circ i(f) = u$, $\alpha_C(f) = v(i(f)(e_a) \longrightarrow e_b)$.

Proposition 3.2.5. — *Soient C une petite catégorie, et $p : F \longrightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux sur C. Le carré suivant est cartésien dans* **Cat** *:*

$$\begin{array}{ccc} A/(C/F) & \xrightarrow{\alpha_{C/F}} & C/F \\ {\scriptstyle A/i_C(p)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_C(p)} \\ A/(C/G) & \xrightarrow[\alpha_{C/G}]{} & C/G \end{array} \quad .$$

Démonstration. — Quitte à remplacer la catégorie C par la catégorie C/G, on peut supposer que G est l'objet final de la catégorie des préfaisceaux sur C, et donc qu'on a $C/G = C$, la flèche p étant l'unique flèche de F vers l'objet final de $\widehat{C}$. On notera $D = A/C \times_C C/F$.

Un objet de $A/(C/F)$ est un couple

$$(a, u : ia \longrightarrow C/F) \quad ,$$

où a est une objet de A, et u un foncteur. Le foncteur u induit par composition avec le foncteur d'oubli de C/F vers C un foncteur $v : ia \longrightarrow C$, et l'image par u de l'objet e_a de la catégorie ia est un morphisme $w : c \longrightarrow F$, où $c = v(e_a)$. Comme e_a est un objet final de ia, la donnée d'un tel objet équivaut à celle du triplet

$$(a, v : ia \longrightarrow C, w : c \longrightarrow F)$$

vérifiant la condition $c = v(e_a)$. Or c'est la description même des objets de la catégorie $A/C \times_C C/F$. La correspondance au niveau des flèches se vérifie de manière analogue et est laissée au lecteur. □

3.2.6. — Dans la situation du paragraphe 3.2.4, pour toute petite catégorie C, on obtient un foncteur image inverse

$$\alpha_C^* : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{A}/C \ ,$$

où $\widehat{A}/C$ est la catégorie $\widehat{A}/i^*C$, canoniquement équivalente à la catégorie $\widehat{A/C}$. On note encore $\mathcal{U}_C : \widehat{A}/C \longrightarrow \widehat{A}$ le foncteur d'oubli. Le foncteur i^* induit un

unique foncteur $i^*/C : \mathbf{Cat}/C \longrightarrow \widehat{A}/C$, tel que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cat}/C & \xrightarrow{i^*/C} & \widehat{A}/C \\ {\scriptstyle u_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_C} \\ \mathbf{Cat} & \xrightarrow[i^*]{} & \widehat{A} \end{array} .$$

Lemme 3.2.7. — *Soient $u : C' \longrightarrow C$ un foncteur entre petites catégories, et F un préfaisceau sur C. Alors le carré commutatif induit par u*

$$\begin{array}{ccc} C'/u^*F & \longrightarrow & C/F \\ \downarrow & & \downarrow \\ C' & \xrightarrow[u]{} & C \end{array}$$

est cartésien.

Démonstration. — C'est un corollaire immédiat du lemme de Yoneda. □

Proposition 3.2.8. — *Pour toute petite catégorie C, on a un isomorphisme canonique de foncteurs dans $\widehat{A}/i^*C$ (voir 3.2.6) :*

$$\alpha_C^* \simeq (i^*/C)j_C \ .$$

Démonstration. — La pleine fidélité du foncteur $j_{A/C}$ (proposition 3.2.2) implique qu'il suffit de montrer que les foncteurs $j_{A/C}\alpha_C^*$ et $j_{A/C}(i^*/C)j_C$ sont isomorphes, ou encore que pour tout préfaisceau F sur C, les catégories

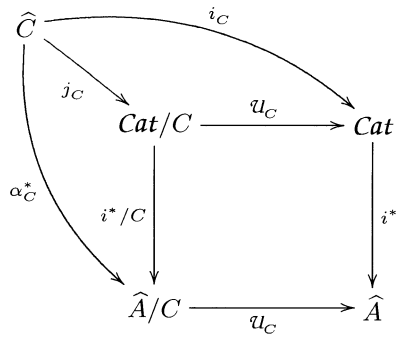
$$(A/C)/\alpha_C^*F \quad \text{et} \quad (A/C)/(i^*/C)j_CF \simeq A/i^*(C/F) = A/(C/F)$$

sont isomorphes au-dessus de A/C, et ce fonctoriellement en F. Or en vertu de la proposition 3.2.5 et du lemme 3.2.7, on a les deux carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccc} A/(C/F) & \longrightarrow & C/F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/C & \xrightarrow[\alpha_C]{} & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (A/C)/\alpha_C^*F & \longrightarrow & C/F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/C & \xrightarrow[\alpha_C]{} & C \end{array}$$

Cela montre que ces deux catégories vérifient la même propriété universelle, et donc qu'elles sont canoniquement isomorphes. □

3.2.9. — On a donc le diagramme commutatif suivant (à isomorphisme près) :



Corollaire 3.2.10. — *Pour toute petite catégorie C, le foncteur $i^*i_C : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{A}$ commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés. En particulier, il respecte les monomorphismes.*

Démonstration. — Le foncteur α_C^* commute aux petites limites inductives et projectives, et le foncteur d'oubli $\mathcal{U}_C$ commute aux petites limites inductives, ainsi qu'aux produits fibrés. Le corollaire résulte donc trivialement de la proposition ci-dessus, et du fait que $i^*i_C = \mathcal{U}_C(i^*/C)j_C$. □

3.2.11. — Soit Δ la catégorie des simplexes, *i.e.* la catégorie dont les objets sont les ensembles bien ordonnés $\Delta_n = \{0, \ldots, n\}$, pour tout $n \geqslant 0$, et dont les flèches sont les applications croissantes. On définit un foncteur $i : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}at$ en associant à chaque objet Δ_n la catégorie associée à sa structure d'ensemble ordonné. Le foncteur i est une inclusion pleine, et on notera par abus $i\Delta_n = \Delta_n$ (abus déjà consommé lors de la définition Δ donnée au numéro 2.1.1). On note $N : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf défini par $N = i^*$, et *cat* son adjoint à gauche. Le foncteur nerf est pleinement fidèle, et on a donc un isomorphisme de foncteurs canonique $cat\, N \simeq 1_{\mathcal{C}at}$ (voir [**60**, corollaire II.4.3]).

Proposition 3.2.12. — *Pour toute petite catégorie C, le foncteur*

$$j_C : \widehat{C} \longrightarrow \mathcal{C}at/C$$

commute aux petites limites inductives et projectives.

Démonstration. — En vertu de la proposition 3.2.8, on a un isomorphisme de foncteurs $\alpha_C^* \simeq (N/C)j_C$, ce qui montre que le foncteur $(N/C)j_C$ commute aux petites limites inductives et projectives, puisque c'est le cas de α_C^*. En outre, comme le foncteur nerf est pleinement fidèle, il en est de même du foncteur $N/C : \mathcal{C}at/C \longrightarrow \widehat{\Delta}/C$, ce qui implique que le foncteur j_C commute aux petites limites inductives et projectives. □

Corollaire 3.2.13. — *Pour toute petite catégorie C, le foncteur*

$$i_C : \widehat{C} \longrightarrow \mathit{Cat}$$

commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés. En particulier, il respecte les monomorphismes. En outre, il admet pour adjoint à droite le foncteur $i_C^* : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{C}$, $D \longmapsto (c \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathit{Cat}}(C/c, D))$.

Démonstration. — Le foncteur i_C est le composé du foncteur j_C et du foncteur d'oubli $\mathcal{U}_C : \mathit{Cat}/C \longrightarrow \mathit{Cat}$, et donc la proposition ci-dessus montre qu'il commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés, puisque le foncteur d'oubli $\mathcal{U}_C$ vérifie la même propriété. On en déduit que le foncteur i_C admet un adjoint à droite, et on vérifie facilement que ce dernier ne peut qu'être le foncteur i_C^*. □

Proposition 3.2.14. — *Soit C une petite catégorie.*

(a) *Le morphisme d'adjonction $\eta : 1_{\widehat{C}} \longrightarrow i_C^* i_C$ est un monomorphisme.*

(b) *Le foncteur $i_C^* i_C : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C}$ commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés.*

(c) *Pour tout morphisme $\varphi : X \longrightarrow Y$ dans $\widehat{C}$, le carré suivant est cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & i_C^* i_C X \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_C^* i_C \varphi} \\ Y & \xrightarrow[\eta_Y]{} & i_C^* i_C Y \end{array} \quad .$$

Démonstration. — L'assertion (a) résulte formellement du fait que le foncteur i_C est fidèle (corollaire 3.2.3).

L'assertion (b) est une conséquence du corollaire 3.2.10 appliqué au foncteur

$$C \longrightarrow \mathit{Cat} \quad , \qquad c \longmapsto C/c \, ,$$

une fois remarqué que pour tout objet c de C, la catégorie C/c admet un objet final (à savoir $(c, 1_c)$).

Pour montrer (c), on commence par considérer le diagramme commutatif suivant dans Cat (où $\varepsilon : i_C i_C^* \longrightarrow 1_{\mathit{Cat}}$ est le morphisme d'adjonction) :

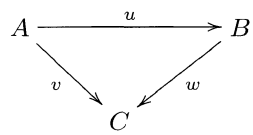
$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle 1_{i_C X}} & & \\ & \overset{i_C\eta_X}{\nearrow} & & \overset{\varepsilon_{i_C X}}{\searrow} & \\ i_C X & & i_C i_C^* i_C X & & i_C X \\ {\scriptstyle i_C\varphi}\downarrow & (1) & \downarrow{\scriptstyle i_C i_C^* i_C \varphi} & (2) & \downarrow{\scriptstyle i_C\varphi} \\ i_C Y & & i_C i_C^* i_C Y & & i_C Y \\ & \underset{i_C\eta_Y}{\searrow} & & \underset{\varepsilon_{i_C Y}}{\nearrow} & \\ & & {\scriptstyle 1_{i_C Y}} & & \end{array} \quad .$$

Ensuite, on vérifie que pour toute petite catégorie D, le foncteur $\varepsilon_D : i_C i_C^* D \longrightarrow D$ est exactement le foncteur défini par la formule $\varepsilon_D(c,u) = u(c,1_c)$ (où c est un objet de C, et $u : C/c \longrightarrow D$ un foncteur), et donc en vertu de la proposition 3.2.5, le carré (2) est cartésien. Grâce à la formule $\varepsilon_{i_C} i_C \eta = 1_{i_C}$, on constate trivialement que le carré (2)$\circ$(1) est aussi cartésien. Par conséquent, le carré (1) ne peut qu'être cartésien. Or on peut voir (1) comme un carré cartésien de $\boldsymbol{Cat}/C$ grâce au foncteur canonique de $i_C i_C^* i_C Y$ vers C. La pleine fidélité de j_C (proposition 3.2.2) achève donc la démonstration. □

3.3. Localisateurs fondamentaux et fibrations de Grothendieck

Cette section ne contient que des définitions et des résultats sans démonstrations. Elle n'est écrite que pour le confort du lecteur. Nous renvoyons ce dernier à [**96**] pour une contribution plus complète à la théorie axiomatique de l'homotopie des petites catégories dégagée par Grothendieck.

3.3.1. — Étant donné un triangle commutatif de $\boldsymbol{Cat}$ de la forme



,

pour chaque objet c de C, on a un foncteur canonique

$$u/c : A/c \longrightarrow B/c$$

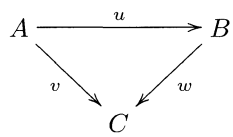
(voir 3.1.1 pour la signification et la construction de A/c et B/c). Le foncteur u/c est obtenu grâce au fait que A/c (resp. B/c) peut être décrite canoniquement comme le produit fibré de A (resp. B) et de C/c au-dessus de C.

Définition 3.3.2 **(Grothendieck)**. — Un *localisateur fondamental* est une classe $\mathcal{W}$ de foncteurs entre petites catégories vérifiant les axiomes suivants.

LA La classe $\mathcal{W}$ est faiblement saturée (1.4.12).

LB Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors $A \longrightarrow e$, où e désigne l'objet final de $\boldsymbol{Cat}$, est dans $\mathcal{W}$.

LC Si



est un triangle commutatif de $\boldsymbol{Cat}$, et si pour tout objet c de C, le foncteur $u/c : A/c \longrightarrow B/c$ induit par u est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

3.3.3. — Soit $\mathcal{W}$ une classe de foncteurs entre petites catégories.

Les éléments de $\mathcal{W}$ seront appelés des *$\mathcal{W}$-équivalences*, ou encore, si cela ne prête pas à confusion, des *équivalences faibles*. On dira qu'une petite catégorie A est *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou encore, plus simplement, *asphérique*, si le foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est une $\mathcal{W}$-équivalence. Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ entre petites catégories sera dit *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou encore, plus simplement, *asphérique*, si pour tout objet b de B, la catégorie A/b est $\mathcal{W}$-asphérique. Enfin, étant donné un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & {\scriptstyle v}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle w} & \\ & C & \end{array}$$

dans $\mathbf{Cat}$, on dira que u est une *$\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de C*, ou bien encore *une équivalence faible localement au-dessus de C*, si pour tout objet c de C, le foncteur u/c est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Une fois cette terminologie fixée, la notion de localisateur fondamental se formalise donc comme suit : la classe $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental si elle est faiblement saturée, si toute petite catégorie admettant un objet final est asphérique, et si tout équivalence faible localement au-dessus d'une petite catégorie donnée est une équivalence faible. En particulier, si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, tout foncteur asphérique est une équivalence faible. En effet, si $u : A \longrightarrow B$ est asphérique, alors pour tout objet b de B, on s'aperçoit immédiatement par l'axiome FS2 de la faible saturation (cf. 1.4.12) que le foncteur canonique de A/b vers B/b est une équivalence faible. Il s'ensuit, en appliquant l'axiome LC avec $C = B$ et $w = 1_B$, que u est bien une équivalence faible. Autrement dit, l'analogue (relativement à $\mathcal{W}$) du théorème A de Quillen [**112**] est vrai par définition pour tout localisateur fondamental.

Exemple 3.3.4. — La classe de toutes les flèches de $\mathbf{Cat}$ forme un localisateur fondamental, appelé le *localisateur fondamental trivial*.

Exemple 3.3.5. — Soit $\mathcal{W}_{gr}$ la classe formée de l'identité de la catégorie vide et des foncteurs entre petites catégories non vides. On vérifie immédiatement que $\mathcal{W}_{gr}$ est un localisateur fondamental, appelé le *localisateur fondamental grossier*. On dit qu'un localisateur fondamental est *grossier* s'il contient le localisateur fondamental grossier. Il est immédiat que les seuls localisateurs fondamentaux grossiers sont le localisateur fondamental trivial et le localisateur fondamental grossier lui-même. Nous renvoyons à la proposition 9.3.2 pour une autre caractérisation des localisateurs grossiers relativement à la notion de connexité.

Exemple 3.3.6. — Il est immédiat que les localisateurs fondamentaux sont stables par intersections. Si S est une partie de $\mathrm{Fl}\,\mathbf{Cat}$, le *localisateur fondamental engendré par S* est l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux contenant S. On le note $\mathcal{W}(S)$. Lorsque S est la classe vide, on obtient de la sorte le *localisateur fondamental*

minimal. Le localisateur fondamental trivial est engendré par le singloton formé de l'inclusion de la catégorie vide dans la catégorie ponctuelle. Le localisateur fondamental grossier est quant à lui engendré par le singloton formé du morphisme canonique $e \amalg e \longrightarrow e$. Pour le voir, on remarque que si $I = e \amalg e$ est asphérique, alors pour toute petite catégorie A, la projection de $I \times A$ sur A est un foncteur asphérique, et donc une équivalence faible (voir plus bas 3.3.8). Si on fait jouer à I le rôle d'un intervalle, on remarque que tout foncteur entre petites catégories est I-homotope à un foncteur constant, et donc que toute petite catégorie non vide est asphérique (cf. [**96**, lemme 1.7.22]).

Exemple 3.3.7. — On verra plus loin que les équivalences faibles usuelles de ***Cat*** définies par le foncteur nerf forment un localisateur fondamental qui n'est autre que le localisateur fondamental minimal (corollaire 4.2.19).

Sorites 3.3.8. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental.*

1. *Les équivalences faibles sont stables par sommes.*
2. *Les équivalences faibles sont stables par produits finis.*
3. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & {\scriptstyle v}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle w} & \\ & C & \end{array}$$

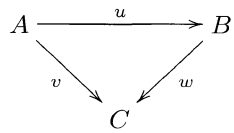
un triangle commutatif de ***Cat***. *Si u est asphérique, alors v est asphérique si et seulement si w est asphérique.*

4. *Une petite catégorie A est asphérique si et seulement si le foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est asphérique.*
5. *Les foncteurs asphériques sont stables par produits finis.*
6. *Tout foncteur entre petites catégories admettant un adjoint à droite est asphérique.*
7. *Un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de* ***Cat*** *est une équivalence faible si et seulement si le foncteur $u^{op} : A^{op} \longrightarrow B^{op}$ est une équivalence faible.*

Démonstration. — Nous renvoyons dans l'ordre à [**96**, proposition 2.1.4, proposition 2.1.3, proposition 1.1.8, proposition 1.1.4, corollaire 1.1.5, proposition 1.1.9, proposition 1.1.22]. □

3.3.9. — Le sorite numéro 7 ci-dessus permet de dualiser les axiomes de localisateur fondamental. Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, on introduit la terminologie suivante. Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est *$\mathcal{W}$-coasphérique*, ou encore, *coasphérique*, si pour tout objet b de B, la catégorie $b\backslash A$ est asphérique (ce qui revient à dire que u^{op} est asphérique). Il est clair que tout foncteur coasphérique est une équivalence faible. De

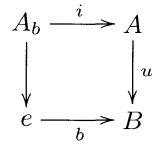
même, étant donné un triangle commutatif



dans ***Cat***, on dira que u est *une $\mathcal{W}$-équivalence colocalement au-dessus de C*, ou encore que u est une *équivalence faible colocalement au-dessus de C*, si pour tout objet c de C, le foncteur induit $c\backslash u : c\backslash A \longrightarrow c\backslash B$ est une équivalence faible. Cela revient à dire que u^{op} est une équivalence faible localement au-dessus de C^{op} ; en particulier, un tel foncteur u est une équivalence faible.

3.3.10. — Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur.

Pour chaque objet b, on note A_b la fibre de u au-dessus de b. On a donc par définition un carré cartésien de catégories



où $b : e \longrightarrow B$ désigne le foncteur qui envoie l'unique objet de la catégorie ponctuelle e sur b. La catégorie A_b peut ainsi être décrite comme la sous-catégorie non pleine de A formée des objets a tels que $u(a) = b$, et dont les flèches sont les morphismes f de A tels que $u(f) = 1_b$. Le foncteur i est alors simplement l'inclusion.

On dit qu'un morphisme $k : a \longrightarrow a'$ de A est *cartésien* au-dessus de B si pour tout morphisme $m : x \longrightarrow a'$ de A tel que $u(k) = u(m)$, il existe un unique morphisme $l : x \longrightarrow a$ tel que $kl = m$.

On dit que le foncteur u est une *préfibration* si pour tout morphisme $x : b \longrightarrow b'$ de B et tout objet a' au-dessus de b' (*i.e.* a' est un objet de A tel que $u(a') = b'$) il existe un morphisme cartésien $k : a \longrightarrow a'$ au-dessus de x (*i.e.* x est un morphisme cartésien tel que $u(k) = x$). On dit enfin que u est une *fibration* si c'est une préfibration, et si les morphismes cartésiens de A au-dessus de B sont stables par composition.

Dualement, on dira que le foncteur u est une *précofibration*[(1)] (resp. une *cofibration*) si le foncteur u^{op} est une préfibration (resp. une fibration).

Les fibrations (resp. les préfibrations, resp. les précofibrations, resp. les cofibrations) sont stables par changement de base (d'après [**69**, Exposé VI, corollaire 6.9]). Les fibrations (resp. les cofibrations) sont stables par composition (c'est immédiat), mais

[(1)] Cette terminologie est assez malvenue dans la mesure où la notion de (co)fibration est déjà définie dans la cadre des catégories de modèles. Nous la conservons cependant car c'est celle qui est utilisée dans [**69**, Exposé VI]. D'une manière générale, le contexte déterminera clairement si l'on parle de (co)fibration au sens catégorique, comme on vient de le définir, ou bien au sens homotopique, dans le cadre des catégories de modèles.

ce n'est pas le cas des préfibrations ni des précofibrations en général. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [**97**] pour un point de vue plus conceptuel sur ces notions.

Exemple 3.3.11. — Si A est une petite catégorie, et si $u : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de préfaisceaux sur A, alors le foncteur $A/p : A/X \longrightarrow A/Y$ (cf. 3.2.1) est une fibration à fibres discrètes (*i.e.* une fibration dont les fibres sont des catégories discrètes). En particulier, si X est préfaisceau sur A, le foncteur canonique de A/X vers A est une fibration à fibres discrètes.

Remarque 3.3.12. — Les préfibrations admettent la caractérisation suivante (qui n'est qu'une simple traduction de la définition) : un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est une préfibration si et seulement si pour tout objet b de B, le foncteur canonique

$$A_b \longrightarrow b\backslash A \quad , \qquad a \longmapsto (a, 1_b)$$

admet un adjoint à droite.

Dualement, un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est une précofibration si et seulement si pour tout objet b de B, le foncteur canonique

$$A_b \longrightarrow A/b \quad , \qquad a \longmapsto (a, 1_b)$$

admet un adjoint à gauche.

On en déduit aussitôt que si un foncteur est une préfibration (resp. une précofibration) à fibres asphériques, alors il est coasphérique (resp. asphérique), et donc, en particulier, est une équivalence faible (et ce relativement à tout localisateur fondamental).

3.3.13. — Soit I une petite catégorie, et F un foncteur de I vers ***Cat***. On lui associe la catégorie $\int F = \int_I F$, appelée l'*intégrale de* F[(2)] comme suit. Les objets de $\int F$ sont les couples (i, x), où i est un objet de I, et x un objet de la catégorie F_i. Une flèche de (i_0, x_0) vers (i_1, x_1) dans $\int F$ est un couple (k, f), où $k : i_0 \longrightarrow i_1$ est une flèche de B, et $f : F_k(x_0) \longrightarrow x_1$ une flèche de $F(i_1)$. La composition de deux morphismes est définie par la formule

$$(k_1, f_1) \circ (k_0, f_0) = (k_1 k_0, f_1 \circ F_{k_1}(f_0)) \ ,$$

où $(k_0, f_0) : (i_0, x_0) \longrightarrow (i_1, x_1)$ et $(k_1, f_1) : (i_1, x_1) \longrightarrow (i_2, x_2)$ sont deux morphismes composables de $\int F$. On a un foncteur canonique

$$\theta_F : \int F \longrightarrow I \quad , \qquad (i, x) \longmapsto i \ .$$

On vérifie facilement que le foncteur θ_F ci-dessus est une cofibration (voir [**96**, 2.2.1]). En outre, pour chaque objet i de I, on a un foncteur

$$F_i \longrightarrow \int F \quad , \qquad x \longmapsto (i, x)$$

qui identifie la fibre de θ_F au-dessus de i avec la catégorie F_i (évaluation de F en i).

(2) Dans la littérature, $\int F$ est souvent appelée la construction de Grothendieck associée à F.

Cette construction est fonctorielle. Cela résulte formellement du fait que la construction de l'intégrale vérifie une propriété universelle (voir par exemple [**96**, 2.2.3 et 2.2.4]). Cependant, on peut décrire cette fonctorialité de manière élémentaire comme suit. Soit $\alpha : F \longrightarrow G$ une transformation naturelle, F et G étant deux foncteurs de I vers $\boldsymbol{Cat}$. On définit un foncteur

$$\int\alpha : \int F \longrightarrow \int G$$

par la formule $\int\alpha(i,x) = (i, \alpha_i(x))$ pour les objets, et $\int\alpha(k,f) = (k, \alpha_{i_1})$ pour les flèches, i_1 désignant le but de f. Il est clair que $\theta_G \int\alpha = \theta_F$.

3.3.14. — Soient à présent I et A une petite catégorie, et F un foncteur de I vers $\widehat{A}$. En reprenant les notations de 3.2.1, on désigne par A/F le foncteur

$$A/F = i_A F : I \longrightarrow \boldsymbol{Cat} \quad , \qquad i \longmapsto A/F_i = i_A(F_i) \ .$$

En vertu du corollaire 3.2.13, on a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim A/F \longrightarrow A/\varinjlim F \ .$$

Pour chaque objet i de I, on désigne par

$$\varepsilon_i : F_i \longrightarrow \varinjlim F$$

le foncteur canonique. Cela permet de définir un foncteur

$$K : \int A/F \longrightarrow A/\varinjlim F$$

comme suit. Les objets de $\int A/F$ sont les couples (i,x) où i est un objet de I, et x un objet de A/F_i. On peut donc voir les objets de $\int A/F$ comme les triplets de la forme (i,a,s), où i est un objet de I, a est un objet de A, et s une section de F_i au-dessus de a. Les morphismes

$$(i_0, a_0, s_0) \longrightarrow (i_1, a_1, s_1)$$

sont les couples (k,f), où $k : i_0 \longrightarrow i_1$ est une flèche de I, et $f : a_0 \longrightarrow a_1$ une flèche de A, telles que le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} a_0 & \xrightarrow{\ f\ } & a_1 \\ {\scriptstyle s_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_1} \\ F(i_0) & \xrightarrow[F(k)]{} & F(i_1) \end{array}$$

Le foncteur K est alors simplement défini par la formule

$$K(i,a,s) = (a, \varepsilon_i s)$$

sur les objets, et par la formule

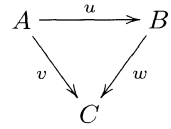
$$K(k,f) = f$$

sur les flèches.

Proposition 3.3.15. — *Le foncteur canonique* $K : \int A/F \longrightarrow A/\varinjlim F$ *est une fibration.*

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 2.3.6]. □

Proposition 3.3.16. — *Soit* $\mathcal{W}$ *un localisateur fondamental. On considère un triangle commutatif de* $\mathcal{C}at$ *de la forme suivante.*



On suppose de plus que pour tout objet c *de* C*, le morphisme* $u_c : A_c \longrightarrow B_c$*, induit par* u *dans les fibres, est une* $\mathcal{W}$*-équivalence.*

(a) *Si* v *et* w *sont des précofibrations, alors le foncteur* u *est une* $\mathcal{W}$*-équivalence localement sur* C*.*

(b) *Si* v *et* w *sont des préfibrations, alors le foncteur* u *est une* $\mathcal{W}$*-équivalence colocalement sur* C*.*

En particulier, dans les deux cas (a) *ou* (b)*, le foncteur* u *est une* $\mathcal{W}$*-équivalence.*

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 2.1.10]. □

3.3.17. — Soit I une petite catégorie. On désigne par $\mathcal{H}om(I, \mathcal{C}at)$ la catégorie des foncteurs de I vers $\mathcal{C}at$. On appelle $\mathcal{W}$*-équivalences argument par argument* les morphismes $F \longrightarrow G$ de $\mathcal{H}om(I, \mathcal{C}at)$ tels que pour tout objet i de I, le foncteur induit $F_i \longrightarrow G_i$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence. On désigne par $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$ la localisation de $\mathcal{H}om(I, \mathcal{C}at)$ par la classe des $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument (*i.e.* la catégorie obtenue à partir de $\mathcal{H}om(I, \mathcal{C}at)$ en inversant formellement la classe des $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument). Lorsque $I = e$ est la catégorie ponctuelle, on posera simplement $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} = \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(e)$.

Si $u : I \longrightarrow J$ est un foncteur entre petites catégories, il induit un foncteur image inverse

$$u^* : \mathcal{H}om(J, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{H}om(I, \mathcal{C}at) \quad , \qquad F \longmapsto u^*(F) = F \circ u \ .$$

Il est immédiat que ce foncteur respecte les $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument. Il induit donc un foncteur noté par abus

$$u^* : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(J) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \ .$$

La théorie des catégories cofibrées (*i.e.* des cofibrations dans le sens défini dans cette section) permet de définir un adjoint à gauche explicite de ce dernier foncteur u^*.

3.3.18. — Soit I une petite catégorie. On définit un foncteur

$$\Theta_I : \mathcal{C}at/I \longrightarrow \mathcal{H}om(I, \mathcal{C}at)$$

de la manière suivante. Si (A,p) est un objet de $\mathcal{C}at/I$ (A est une petite catégorie, et p un foncteur de A vers I), alors $\Theta_I(A,p)$ est le foncteur défini par

$$\Theta_I(A,p)_i = A/i \quad , \qquad i \text{ objet de } I.$$

Autrement dit, pour chaque objet i de I, on a un carré cartésien de catégories

$$\begin{array}{ccc} \Theta_I(A,p)_i & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow p \\ I/i & \longrightarrow & I \end{array}$$

Ce point de vue montre de manière évidente comment faire de Θ_I un foncteur. En vertu de [**96**, proposition 3.1.2], ce dernier est en fait l'adjoint à gauche du foncteur

$$\Theta'_I : \mathcal{H}om(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at/I \quad , \qquad F \longmapsto (\int F, \theta_F)$$

(voir 3.3.13).

Considérons à présent un foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$. On lui associe un foncteur

$$\mathcal{C}at/u : \mathcal{C}at/I \longrightarrow \mathcal{C}at/J \quad , \qquad (A,p) \longmapsto (A, up) \ .$$

Cela permet de définir encore un foncteur noté par abus

$$u_! : \mathcal{H}om(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{H}om(J, \mathcal{C}at)$$

par la formule $u_! = \Theta_J \circ \mathcal{C}at/u \circ \Theta'_I$. On démontre que le foncteur $u_!$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument (cela résulte par exemple directement de [**96**, théorème 3.1.4 et lemme 3.1.5]). Le foncteur $u_!$ induit donc un foncteur

$$\mathbf{L}u_! : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(J) \ .$$

On démontre que ce dernier est un adjoint à gauche du foncteur

$$u^* : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(J) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$$

(voir [**96**, théorème 3.1.7]).

Soit I une petite catégorie. Si p désigne le foncteur de I vers la catégorie ponctuelle, on note

$$\mathbf{L}\varinjlim_I : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} = \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(e)$$

le foncteur défini par $\mathbf{L}\varinjlim_I = \mathbf{L}p_!$. Ce dernier admet une description simple comme suit. Par définition, si F est un foncteur de I vers $\mathcal{C}at$, alors

$$\Theta_e(\mathcal{C}at/p(\Theta'_I(F))) = \int F \ .$$

Ce qui précède nous dit donc en particulier que le foncteur

$$F \longmapsto \int F$$

envoie les $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument sur des $\mathcal{W}$-équivalences, et que pour tout foncteur F de I vers Cat, on a

$$\mathbf{L}\varinjlim_{I}(F) = \int F \ .$$

3.4. Régularité

On considère une petite catégorie A et un A-localisateur W. On rappelle que pour toute petite catégorie I, $p_I : I \longrightarrow e$ désigne l'unique foncteur de I vers la catégorie ponctuelle e.

Définition 3.4.1. — Un foncteur $u : I \longrightarrow J$ dans Cat est une W-*équivalence* si le morphisme canonique $\mathbf{L}p_{I!}\, p_I^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}\, p_J^*$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$.

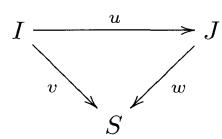
On remarque que si J est la catégorie ponctuelle e, le foncteur $u = p_I$ est une W-équivalence si et seulement si le foncteur p_I^* est pleinement fidèle. On désigne par $\mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$ la classe des W-équivalences de Cat.

Lemme 3.4.2. — *Soit I une petite catégorie admettant un objet final i. Alors le foncteur $\mathbf{L}p_{I!}$ s'identifie au foncteur $i^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$ induit par l'évaluation en l'objet final i, et le foncteur $p_I^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I)$ est pleinement fidèle. En particulier, le morphisme p_I de Cat est une W-équivalence.*

Démonstration. — Le foncteur $i : e \longrightarrow I$, défini par l'objet final de I, est un adjoint à droite pleinement fidèle de p_I. Comme $S \longmapsto \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(S)$, $S \in \mathrm{Ob}\ \mathit{Cat}$, est un 2-foncteur, on en déduit que le foncteur $p_I^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I)$ est un adjoint à droite pleinement fidèle de $i^* : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$, ce qui démontre le lemme. □

Proposition 3.4.3. — *Les W-équivalences de Cat forment un localisateur fondamental.*

Démonstration. — La vérification de l'axiome LA est immédiate, et l'axiome LB résulte du lemme précédent. Il reste à prouver l'axiome LC. Considérons un morphisme de Cat/S (S étant une petite catégorie).



En vertu du point 3 de la proposition 3.1.35, si pour tout objet s de S, le foncteur $I/s \longrightarrow J/s$, induit par u, est une W-équivalence, alors le morphisme canonique $\mathbf{L}v_!\, p_I^* \longrightarrow \mathbf{L}w_!\, p_J^*$ est un isomorphisme. On en déduit un isomorphisme

$$\mathbf{L}p_{I!}\, p_I^* \simeq \mathbf{L}p_{S!}\, \mathbf{L}v_!\, p_I^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}p_{S!}\, \mathbf{L}w_!\, p_J^* \simeq \mathbf{L}p_{J!}\, p_J^* \ ,$$

ce qui achève la démonstration. □

3.4.4. — Afin d'alléger la terminologie, on dira simplement qu'un morphisme de *Cat* est W-*asphérique* (resp. W-*coasphérique*, *etc.*) pour signifier qu'il est W_{Cat}-asphérique (resp. W_{Cat}-coasphérique, *etc.*).

Proposition 3.4.5. — *Soient S une petite catégorie, et*

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad u \quad} & J \\ & {\scriptstyle v}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle w} & \\ & S & \end{array}$$

un S-morphisme. Le foncteur u est une W-*équivalence localement (resp. colocalement) au-dessus de S si et seulement si le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}v_!\, p_I^* \longrightarrow \mathbf{L}w_!\, p_J^* \qquad (\textit{resp.} \qquad \mathbf{L}p_{I!}\, v^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}\, w^* \quad)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — C'est une simple traduction de la troisième (resp. quatrième) assertion de la proposition 3.1.35. □

Corollaire 3.4.6. — *Pour qu'un foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$ soit* W-*asphérique (resp.* W-*coasphérique), il faut et il suffit que le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}u_!\, p_I^* \longrightarrow p_J^* \qquad (\text{resp.} \qquad \mathbf{L}p_{I!}\, u^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!} \quad)$$

soit un isomorphisme.

Démonstration. — C'est le cas particulier de la proposition précédente pour $S = J$, $w = 1_J$, et $v = u$. □

Remarque 3.4.7. — En utilisant les notations des remarques 3.1.11 et 3.1.27, la caractérisation de la coasphéricité du corollaire précédent s'exprime en demandant que pour tout foncteur F de J vers $\widehat{A}$, le morphisme canonique $\mathbf{L}\varinjlim_I u^*F \longrightarrow \mathbf{L}\varinjlim_J F$ soit un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$. Autrement dit, la condition de coasphéricité est une condition de *cofinalité homotopique*. Dualement, lorsque le A-localisateur W est accessible, la caractérisation de l'asphéricité du corollaire, revient par transposition à demander que pour tout foncteur F de J vers $\widehat{A}$, le morphisme canonique $\mathbf{R}\varprojlim_J F \longrightarrow \mathbf{R}\varprojlim_I u^*F$ soit un isomorphisme (cf. remarque 3.1.36). C'est à présent une condition de *finalité homotopique*.

3.4.8. — Si I est une petite catégorie, un foncteur F de I vers $\widehat{A}$ est dit W-*régulier* si le morphisme canonique $\mathbf{L}\varinjlim F \longrightarrow \varinjlim F$ (cf. remarque 3.1.27) est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$. Si F est W-régulier, et si W′ est un A-localisateur contenant W, il résulte immédiatement de la proposition 3.1.28, appliquée au foncteur identique de $\widehat{A}$, que F est W′-régulier.

Pour chaque préfaisceau X sur A, on a un foncteur canonique

$$\varphi_X : A/X \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad (a, s : a \longrightarrow X) \longmapsto a$$

et un isomorphisme canonique dans $\widehat{A}$ de $\varinjlim \varphi_X$ sur X. On dit que X est W-*régulier* si le foncteur φ_X l'est (*i.e.* si le morphisme canonique de $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_X$ vers $\varinjlim \varphi_X \simeq X$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$).

Exemple 3.4.9. — Soient I une petite catégorie, et F un foncteur de I vers $\widehat{A}$. Le foncteur F est W-régulier dans les cas suivants :

1. I est l'ensemble ordonné $\{1 > 0 < 2\}$, et la flèche $F_0 \longrightarrow F_1$ est un monomorphisme ;
2. I est un ensemble bien ordonné, et pour tous $i < i'$ dans I, la flèche $F_i \longrightarrow F_{i'}$ est un monomorphisme ;
3. I est une catégorie discrète.

Lorsque W est accessible, il s'agit d'un résultat général dans les catégories de modèles fermées (voir [**74**, corollaire 5.1.6 et lemme 5.2.6]). Le cas non nécessairement accessible s'en déduit, en considérant le A-localisateur minimal.

Exemple 3.4.10. — Tout préfaisceau représentable sur A est W-régulier. Cela résulte aussitôt du fait que pour tout objet a de A, la catégorie A/a admet le couple $(a, 1_a)$ pour objet final, et donc en vertu du lemme 3.4.2, le foncteur $\mathbf{L}\varinjlim_{A/a}$ n'est autre que le foncteur d'évaluation en $(a, 1_a)$, et on a donc l'identification $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_a = a$.

Lemme 3.4.11. — *Soit I une petite catégorie. Pour qu'un A-localisateur W soit stable par limites inductives de type I, il faut et il suffit que tout foncteur $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ soit W-régulier.*

Démonstration. — En vertu de la remarque 3.1.27, la condition est nécessaire par construction du morphisme $\mathbf{L}\varinjlim_I \longrightarrow \varinjlim_I$. Montrons que la condition est suffisante. Soient F, $F' : I \longrightarrow A$ deux foncteurs, et $\alpha : F \longrightarrow F'$ un morphisme de foncteurs. On a un carré commutatif dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}\varinjlim F & \longrightarrow & \varinjlim F \\ {\scriptstyle \mathbf{L}\varinjlim \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varinjlim \alpha} \\ \mathbf{L}\varinjlim F' & \longrightarrow & \varinjlim F' \end{array} ,$$

dont les flèches horizontales sont les morphismes canoniques. Si α est une W-équivalence argument par argument, $\mathbf{L}\varinjlim \alpha$ est un isomorphisme, et si les foncteurs F et F' sont W-réguliers, les deux flèches horizontales sont des isomorphismes. On en déduit qu'alors $\varinjlim \alpha$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$, ce qui prouve l'assertion en vertu du corollaire 1.4.7. □

Proposition 3.4.12. — *Soient I une petite catégorie, et $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}'$ une inclusion de A-localisateurs. Si W est stable par limites inductives de type I, alors il en est de même pour W'.*

Démonstration. — La proposition résulte aussitôt du lemme précédent, et du fait que si un foncteur $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ est W-régulier, alors il est aussi W'-régulier (cf. 3.4.8). □

Définition 3.4.13. — Un A-localisateur W est *régulier* si tout préfaisceau sur A est W-régulier.

Remarque 3.4.14. — Il résulte immédiatement de la proposition 3.1.28, appliquée au foncteur identique de $\widehat{A}$, que tout A-localisateur contenant un A-localisateur régulier est lui-même régulier.

Étant donnée une partie S de $\mathrm{Fl}\,\widehat{A}$, on peut définir le *A-localisateur régulier engendré par S* comme suit. Pour chaque préfaisceau X sur A, on choisit une résolution cofibrante Q_X de φ_X dans la catégorie $\mathcal{H}om(A/X, \widehat{A})$ au sens de la structure de catégorie de modèles fermée du corollaire 1.4.24 associée au A-localisateur *minimal*. On a donc en particulier une équivalence faible argument par argument (que l'on peut supposer être une fibration triviale argument par argument) $Q_X \longrightarrow \varphi_X$, d'où un morphisme de préfaisceaux

$$u_X : \varinjlim Q_X \longrightarrow \varinjlim \varphi_X \simeq X \ .$$

Or $\varinjlim Q_X$ est un modèle de $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_X$, et u_X un modèle de la flèche canonique, et ce pour tout A-localisateur (cf. remarque 3.1.27). Dire qu'un A-localisateur est régulier revient donc par forte saturation à affirmer qu'il contient toutes les flèches u_X pour tout préfaisceau X sur A, ce critère ne dépendant pas des choix des résolutions cofibrantes ci-dessus. On peut ainsi définir le A-localisateur régulier engendré par S comme le A-localisateur engendré par S et par toutes les flèches u_X.

Si W est un A-localisateur, sa *complétion régulière*, notée $\overline{\mathsf{W}}$, est le A-localisateur régulier engendré par W. On remarque qu'un A-localisateur est régulier si et seulement s'il contient le *A-localisateur régulier minimal* (*i.e.* la complétion régulière du A-localisateur minimal).

On verra à la fin de ce paragraphe des exemples de A-localisateurs qui ne sont pas réguliers.

Lemme 3.4.15. — *Soient A une petite catégorie, X un préfaisceau sur A, $F = (Y, Y \longrightarrow X)$ un objet de $\widehat{A}/X \simeq \widehat{A/X}$, et W un A-localisateur. On note W/X le A/X-localisateur des W-équivalences au-dessus de X. Pour que le préfaisceau F sur A/X soit W/X-régulier, il faut et il suffit que le préfaisceau Y sur A soit W-régulier.*

Démonstration. — On désigne par $\mathcal{U} : \widehat{A}/X \longrightarrow \widehat{A}$ le foncteur d'oubli. On a par définition $\mathsf{W}/X = \mathcal{U}^{-1}\mathsf{W}$, ce qui implique, en vertu des corollaires 1.4.7 et 1.4.8, que le foncteur induit $\mathcal{U} : \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}/X}\,\widehat{A}/X \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$ est conservatif. Par ailleurs, on a l'identification $\mathcal{U}\varphi_F = \varphi_Y$, et vu que le foncteur $\mathcal{U} : \widehat{A}/X \longrightarrow \widehat{A}$ commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes, il résulte de la proposition 3.1.28 qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}\varinjlim \varphi_Y = \mathbf{L}\varinjlim \mathcal{U}\varphi_F \simeq \mathcal{U}\mathbf{L}\varinjlim \varphi_F \ .$$

On en déduit que l'image par $\mathcal{U}$ de la flèche $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_F \longrightarrow F$ de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}/X}\,\widehat{A}/X$ s'identifie à la flèche $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_Y \longrightarrow Y$ de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$, ce qui démontre le lemme. □

Proposition 3.4.16. — *Soient A une petite catégorie et W un A-localisateur régulier. Pour tout préfaisceau X sur A, le A/X-localisateur W/X des W-équivalences au-dessus de X est régulier.*

Démonstration. — La proposition est conséquence directe du lemme précédent. □

3.4.17. — On considère à nouveau une petite catégorie A et un A-localisateur W.

Un foncteur F d'une petite catégorie I vers $\widehat{A}$ est W-*parfait* s'il est W-régulier et si les fibres du foncteur canonique (cf. 3.3.14)

$$\int_I A/F \longrightarrow A/\varinjlim_I F \tag{3.4.17.1}$$

sont W-asphériques.

Remarque 3.4.18. — Les foncteurs de la forme 3.4.17.1 sont des fibrations (cf. proposition 3.3.15). Par conséquent, pour que leurs fibres soient W-asphériques il faut et il suffit que ceux-ci soient W-coasphériques (cf. remarque 3.3.12). On en déduit le

Lemme 3.4.19. — *Les trois types de foncteurs W-réguliers décrits au numéro 3.4.9 sont W-parfaits.*

Démonstration. — L'assertion résulte de la remarque ci-dessus et de [**96**, propositions 2.3.10 et 2.3.14]. □

Proposition 3.4.20. — *Les préfaisceaux W-réguliers sont stables par petites limites inductives W-parfaites. Autrement dit, si F est un foncteur W-parfait d'une petite catégorie I à valeurs dans $\widehat{A}$ tel que pour tout objet i de I, le préfaisceau F_i soit W-régulier, alors $\varinjlim F$ est W-régulier.*

Démonstration. — Commençons par une remarque triviale. Soit X un préfaisceau sur A, et soit $\pi_X : A/X \longrightarrow A$ le foncteur canonique. Si on désigne par $h : A \longrightarrow \widehat{A}$ le plongement de Yoneda, alors en reprenant les notations du paragraphe 3.1.2, on a l'identification $\varphi_X = \pi_X^*(h)$. On note $F' = \varinjlim F$ la limite inductive de F. Pour alléger les notations, on pose $\pi = \pi_{F'}$, et $\pi_i = \pi_{F_i}$ pour $i \in \mathrm{Ob}\, I$. On note enfin k le foncteur canonique de $\int A/F$ vers A/F', p la projection de $\int A/F$ sur A, et q celle de $\int A/F$ sur I. On a le triangle commutatif de catégories suivant.

$$\begin{array}{ccc} \int A/F & \xrightarrow{\;k\;} & A/F' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & \\ & A & \end{array}$$

On en déduit le morphisme canonique suivant dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$.

$$\mathbf{L}\varinjlim p^*h = \mathbf{L}\varinjlim k^*\pi^*h \longrightarrow \mathbf{L}\varinjlim \pi^*h = \mathbf{L}\varinjlim \varphi_{F'} \tag{3.4.20.1}$$

Or le foncteur k est W-coasphérique par hypothèse (voir la remarque 3.4.18), ce qui implique en vertu du corollaire 3.4.6 que la flèche 3.4.20.1 est un isomorphisme. On a d'autre part un morphisme de foncteurs $p^*h \longrightarrow q^*F$ défini par les flèches

$$p^*(h)(i, a, a \longrightarrow F_i) = a \longrightarrow F_i = q^*(F)(i, a, a \longrightarrow F_i) \ ,$$

où $(a, i, a \longrightarrow F_i)$ parcourt l'ensemble des objets de $\int A/F$ (*i.e.* $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $a \in \mathrm{Ob}\, A$, et $a \longrightarrow F_i$ est une section de F_i au-dessus de a). On en déduit par adjonction un morphisme

$$\mathbf{L}q_!p^*h \longrightarrow F \tag{3.4.20.2}$$

dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(I)$. En lui appliquant le foncteur $\mathbf{L}\varinjlim_I$ on en déduit un morphisme canonique

$$\mathbf{L}\varinjlim p^*h \simeq \mathbf{L}\varinjlim \mathbf{L}q_!p^*h \longrightarrow \mathbf{L}\varinjlim F \quad . \tag{3.4.20.3}$$

D'autre part, comme on a supposé F W-régulier (puisque W-parfait), on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$:

$$\mathbf{L}\varinjlim F \longrightarrow F' \ . \tag{3.4.20.4}$$

Les flèches 3.4.20.1, 3.4.20.3 et 3.4.20.4 s'insèrent dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}\varinjlim p^*h & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{L}\varinjlim \pi^*h \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{L}\varinjlim F & \xrightarrow{\sim} & F' \end{array} \quad ,$$

la flèche $\mathbf{L}\varinjlim \pi^*h = \mathbf{L}\varinjlim \varphi_{F'} \longrightarrow F$ étant le morphisme canonique. Vu que 3.4.20.1 et 3.4.20.4 sont des isomorphismes, il suffit donc pour montrer la proposition de vérifier que 3.4.20.3, ou encore 3.4.20.2, en est un (et on n'utilisera pour cela que le fait que pour tout objet i de I, le préfaisceau F_i est W-régulier). En vertu de la proposition 3.1.30, on peut se contenter de montrer que pour tout objet i de I, l'évaluation en i du morphisme 3.4.20.2 (*i.e.* son image par le foncteur i^*)

$$i^*\mathbf{L}q_!p^*h \longrightarrow i^*F = F_i \tag{3.4.20.5}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$. Or il résulte de l'assertion 2 de la proposition 3.1.35 qu'on a un isomorphisme canonique

$$i^*\mathbf{L}q_!p^*h \simeq \mathbf{L}\varinjlim \xi(q, i)^*p^*h \ ,$$

et comme l'inclusion pleine ℓ_i de A/F_i dans $(\int A/F)/i$ admet un adjoint à gauche (3.3.12), elle est coasphérique (par les sorites 6 et 7 de 3.3.8), ce qui implique en vertu du corollaire 3.4.6 que la flèche canonique

$$\mathbf{L}\varinjlim \ell_i^*\xi(q, i)^*p^*h \longrightarrow \mathbf{L}\varinjlim \xi(q, i)^*p^*h$$

est un isomorphisme. Comme $\pi_i = p\xi(q,i)\ell_i$, on a l'égalité $\ell_i^*\xi(q,i)^*p^* = \pi_i^*$, et on obtient donc un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}\varinjlim \pi_i^* h \longrightarrow i^*\mathbf{L}q_!p^*h \ .$$

Puisque l'on a supposé F_i W-régulier, on a aussi un isomorphisme

$$\mathbf{L}\varinjlim \pi_i^* h = \mathbf{L}\varinjlim \varphi_{F_i} \longrightarrow F_i \ .$$

On remarque enfin que le triangle suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}\varinjlim \pi_i^* h & \longrightarrow & i^*\mathbf{L}q_!p^*h \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & F_i & \end{array}$$

d'où on déduit que 3.4.20.5 est bien un isomorphisme, ce qui achève ainsi la démonstration. □

Proposition 3.4.21. — *Les préfaisceaux* W*-réguliers sont stables par rétractes.*

Démonstration. — La construction des morphismes $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_X \longrightarrow X$ est fonctorielle en X, et par conséquent, l'assertion résulte du fait que les isomorphismes sont stables par rétractes. □

Proposition 3.4.22. — *Les préfaisceaux* W*-réguliers forment une classe saturée par monomorphismes.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du lemme 3.4.19 et des propositions 3.4.20 et 3.4.21. □

Théorème 3.4.23. — *Pour qu'un A-localisateur* W *soit régulier, il faut et il suffit que* $\widehat{A}$ *admette un modèle cellulaire dont toutes les sources et les buts sont* W*-réguliers.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition précédente et du lemme 1.2.30. □

Corollaire 3.4.24. — *La complétion régulière d'un A-localisateur accessible est accessible.*

Démonstration. — En vertu de la remarque 3.4.14, le corollaire est conséquence directe du théorème ci-dessus. □

Proposition 3.4.25. — *Tout* Δ*-localisateur est régulier.*

Démonstration. — Tout préfaisceau représentable étant régulier (3.4.10), c'est une conséquence immédiate des propositions 2.1.12 et 3.4.22. □

3.4.26. — On considère à présent, et cela jusqu'au numéro 3.4.33, une petite catégorie A et un $A \times \Delta$-localisateur W tel que pour tout préfaisceau simplicial X sur A, la projection de $X \times \Delta_1$ sur X soit une W-équivalence.

Lemme 3.4.27. — *Soit X un préfaisceau sur A (vu comme un préfaisceau simplicial sur A par l'inclusion canonique $\widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$). On note encore par abus φ_X le foncteur de A/X dans $\widehat{A \times \Delta}$ défini par $\varphi_X(a, a \longrightarrow X) = a$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le préfaisceau X est* W*-régulier.*

(ii) *Pour tout ensemble simplicial K, le préfaisceau simplicial $X \times K$ est* W*-régulier.*

(iii) *La flèche canonique $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_X \longrightarrow X$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A \times \Delta}$.*

Démonstration. — Considérons un entier $n \geqslant 0$. La catégorie $(A \times \Delta)/(X \times \Delta_n)$ s'identifie à la catégorie produit $A/X \times \Delta/\Delta_n$, et le foncteur $\varphi_{X \times \Delta_n}$ correspond par cette identification au foncteur produit $\varphi_X \times \varphi_{\Delta_n}$, *i.e.* à

$$((a, a \longrightarrow X), (\Delta_m, \Delta_m \longrightarrow \Delta_n)) \longmapsto a \times \Delta_m \ .$$

Désignons par p la projection de $A/X \times \Delta/\Delta_n$ sur A/X. Comme Δ/Δ_n admet un objet final, c'est une catégorie W-asphérique, et donc le foncteur p est W-coasphérique (en vertu de 3.3.12, puisqu'il est une fibration à fibres W-asphériques). On a donc par le corollaire 3.4.6 un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}\varinjlim p^*\varphi_X \longrightarrow \mathbf{L}\varinjlim \varphi_X \ .$$

D'autre part, les projections $a \times \Delta_m \longrightarrow a$ sont des W-équivalences (2.3.7) et par suite induisent un isomorphisme

$$\varphi_{X \times \Delta_n} \longrightarrow p^*\varphi_X$$

dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A \times \Delta}(A/X \times \Delta/\Delta_n)$, d'où un isomorphisme

$$\mathbf{L}\varinjlim \varphi_{X \times \Delta_n} \longrightarrow \mathbf{L}\varinjlim p^*\varphi_X \ .$$

Enfin, il est facile de vérifier qu'on a un carré commutatif dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A \times \Delta}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}\varinjlim \varphi_{X \times \Delta_n} & \longrightarrow & X \times \Delta_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{L}\varinjlim \varphi_X & \longrightarrow & X \end{array} \ ,$$

dont la flèche verticale de gauche est le composé des deux isomorphismes ci-dessus, celle de droite est la première projection, et dont les flèches horizontales sonts les morphismes canoniques. Vu que la projection $X \times \Delta_n \longrightarrow X$ est une W-équivalence (2.3.7), ces considérations montrent que la condition (*iii*) équivaut à la W-régularité du préfaisceau simplicial $X \times \Delta_n$ (où l'entier $n \geqslant 0$ est arbitraire). En particulier, le cas $n = 0$ montre l'équivalence des conditions (*i*) et (*iii*). Comme il est trivial que (*ii*) implique (*i*), il reste à vérifier que (*iii*) implique (*ii*). Or il résulte de la proposition 3.4.22 et de la remarque 1.1.13 que la classe des ensembles simpliciaux K tels que $X \times K$ soit W-régulier est saturée par monomorphismes. Comme en vertu

de ce qui précède, (*iii*) implique que cette classe contient les simplexes standard, cela résulte de la proposition 2.1.12. □

Lemme 3.4.28. — *Pour que* W *soit régulier, il faut et il suffit que* $\widehat{A}$ *admette un modèle cellulaire dont les sources et les buts soient* W*-réguliers en tant que préfaisceaux simpliciaux.*

Démonstration. — L'assertion résulte aussitôt du lemme précédent, et des propositions 2.3.4 et 3.4.22. □

3.4.29. — Soient X et Y deux préfaisceaux simpliciaux sur A. On note $\mathrm{Hom}(X,Y)$ l'ensemble simplicial

$$\Delta_n \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{A\times\Delta}}(X\times\Delta_n, Y)$$

qui représente le foncteur

$$\widehat{\Delta}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad , \qquad K \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{A\times\Delta}}(X\times K, Y) \quad .$$

On définit ainsi un foncteur

$$\mathrm{Hom} : \widehat{A\times\Delta}^{op} \times \widehat{A\times\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad .$$

On suppose dans la suite que le $A\times\Delta$-localisateur W est accessible.

Lemme 3.4.30. — *Pour tout préfaisceau simplicial* Y *sur* A*, le foncteur*

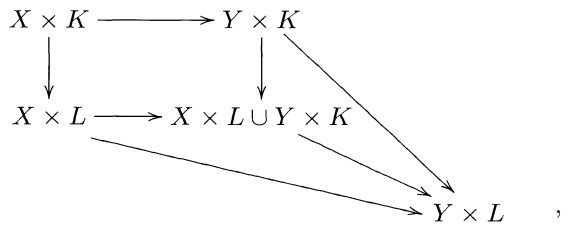
$$\mathrm{Hom}(\,.\,,Y) : \widehat{A\times\Delta}^{op} \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

*commute aux petites limites projectives (*i.e. *envoie les petites limites inductives de* $\widehat{A\times\Delta}$ *sur des limites projectives de* $\widehat{\Delta}$*). Si en outre* Y *est* W*-fibrant, alors ce foncteur respecte les fibrations et les fibrations triviales (*i.e. *transforme les cofibrations (resp. les* W*-cofibrations triviales) de* $\widehat{A\times\Delta}$ *en fibrations de Kan (resp. en fibrations triviales) de* $\widehat{\Delta}$*). En particulier, il envoie les* W*-équivalences sur des* ∞*-équivalences.*

Démonstration. — La première assertion est évidente. La troisième est conséquence de la deuxième en vertu du lemme de Ken Brown [**74**, lemme 1.1.12], puisque tous les objets de $(\widehat{A\times\Delta})^{op}$ sont fibrants. Pour montrer la deuxième assertion, un argument standard d'adjonction implique qu'il suffit de vérifier que pour toute W-cofibration triviale (resp. toute cofibration) $X \longrightarrow Y$ dans $\widehat{A\times\Delta}$, et pour toute inclusion (resp. ∞-cofibration triviale) d'ensembles simpliciaux $K \longrightarrow L$, la flèche

$$X\times L \cup Y\times K \longrightarrow Y\times L$$

est une W-cofibration triviale. En considérant le diagramme commutatif



dont le carré interne est cocartésien, cette vérification se ramène à montrer que si $X \longrightarrow Y$ (resp. $K \longrightarrow L$) est une W-cofibration triviale de $\widehat{A \times \Delta}$ (resp. une ∞-cofibration triviale de $\widehat{\Delta}$), et Z (resp. T) un ensemble (resp. préfaisceau) simplicial, alors $X \times Z \longrightarrow Y \times Z$ (resp. $T \times K \longrightarrow T \times L$) est une W-cofibration triviale. Or cela résulte du corollaire 2.3.7, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 3.4.31. — *Soient X et Y deux préfaisceaux simpliciaux sur A. Si Y est* W*-fibrant, alors l'application canonique*

$$\pi_0 \operatorname{Hom}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A \times \Delta}}(X, Y)$$

est bijective.

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, Y étant supposé W-fibrant, $\operatorname{Hom}(X, Y)$ est un complexe de Kan. On en déduit que l'ensemble $\pi_0 \operatorname{Hom}(X, Y)$ est formé des classes d'équivalences de Δ_1-homotopie de morphismes de X vers Y dans $\widehat{A \times \Delta}$. Or X est cofibrant, Y est fibrant, et le diagramme

$$X \amalg X \longrightarrow X \times \Delta_1 \longrightarrow X$$

est un cylindre de X au sens de la structure de catégorie de modèles fermée associée à W, ce qui implique l'assertion. □

3.4.32. — Soit I une petite catégorie. Conformement au corollaire 1.4.24 (resp. 1.4.22), on considère la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A \times \Delta}^I$ (resp. sur $\widehat{\Delta}^{I^{op}}$) dont les équivalences faibles sont les W-équivalences argument par argument (resp. les ∞-équivalences argument par argument), et dont les fibrations sont les W-fibrations argument par argument (resp. et dont les cofibrations sont les monomorphismes). Il résulte du lemme 3.4.30 que pour tout préfaisceau simplicial W-fibrant Y sur A, le foncteur

$$\operatorname{Hom}(\,.\,, Y) : (\widehat{A \times \Delta}^I)^{op} = (\widehat{A \times \Delta}^{op})^{I^{op}} \longrightarrow \widehat{\Delta}^{I^{op}}$$

est un foncteur de Quillen à droite. Ce dernier admet donc un foncteur dérivé à droite

$$\mathbf{R} \operatorname{Hom}(\,.\,, Y) : \left(\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A \times \Delta}(I)\right)^{op} \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}_\infty} \widehat{\Delta}(I^{op}) \,.$$

Lemme 3.4.33. — *Soient Y un préfaisceau simplicial W-fibrant, et F un foncteur défini sur une petite catégorie I à valeurs dans $\widehat{A \times \Delta}$. La flèche canonique*

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}(\mathbf{L}\varinjlim_I F, Y) \longrightarrow \mathbf{R}\varprojlim_{I^{op}} \mathbf{R}\operatorname{Hom}(F, Y)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}_\infty}\widehat{\Delta}$.

Démonstration. — Cela résulte du lemme 3.4.30 et de la version duale de la proposition 3.1.22. □

Proposition 3.4.34. — *Soit A une petite catégorie. Le $A \times \Delta$-localisateur $\mathsf{W}_\infty^{A^{op}}$ des ∞-équivalences argument par argument est le $A \times \Delta$-localisateur régulier engendré par la classe des projections de la forme $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$, pour X préfaisceau simplicial sur A. Autrement dit, pour qu'un $A \times \Delta$-localisateur W contenant les projections $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ pour tout préfaisceau simplicial X sur A soit régulier, il faut et il suffit que toutes les ∞-équivalences argument par argument soient des W-équivalences (*i.e. *que $\mathsf{W}_\infty^{A^{op}} \subset \mathsf{W}$).*

Démonstration. — On désigne par W le plus petit $A \times \Delta$-localisateur régulier contenant les projections de la forme $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ pour tout préfaisceau simplicial X sur A. Il résulte des corollaires 1.4.19 et 3.4.24 que W est accessible. Pour montrer l'égalité $\mathsf{W} = \mathsf{W}_\infty^{A^{op}}$, on procède en plusieurs étapes.

3.4.34.1. — *Le préfaisceau final $e = e_{\widehat{A \times \Delta}}$ sur $A \times \Delta$ est $\mathsf{W}_\infty^{A^{op}}$-régulier.*

Soit Y un préfaisceau simplicial $\mathsf{W}_\infty^{A^{op}}$-fibrant sur A. On a alors des isomorphismes canoniques dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}_\infty}\widehat{\Delta}$:

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}(e, Y) \simeq \operatorname{Hom}(e, Y) \simeq \varprojlim_{A^{op}} Y \simeq \mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} Y \ .$$

Or pour tout objet a de A, on a aussi les identifications

$$Y_a \simeq \operatorname{Hom}(a, Y) \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}(a, Y) \ ,$$

d'où on déduit grâce au lemme 3.4.33 des isomorphismes :

$$\mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} Y \simeq \mathbf{R}\varprojlim_{a \in A^{op}} \mathbf{R}\operatorname{Hom}(a, Y) \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}(\mathbf{L}\varinjlim_{a \in A} a, Y) \ .$$

Autrement dit, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}(e, Y) \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}(\mathbf{L}\varinjlim_{a \in A} a, Y) \ .$$

On peut alors appliquer le foncteur π_0 à ce dernier, et le lemme 3.4.31 permet d'affirmer par le lemme de Yoneda que la flèche canonique

$$\mathbf{L}\varinjlim_{a \in A} a \longrightarrow e$$

est un isomorphisme. Cela prouve l'assertion en vertu du lemme 3.4.27.

3.4.34.2. — *Tout préfaisceau sur A (vu comme un préfaisceau simplicial sur A) est $\mathsf{W}_\infty^{A^{op}}$-régulier.*

Soit X un préfaisceau d'ensembles sur A. On désigne par

$$\mathcal{U} : A/\widehat{X \times \Delta} \simeq (\widehat{A \times \Delta})/X \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$$

le foncteur d'oubli. Pour tout préfaisceau simplicial Y sur A/X, et pour tout objet a de A, on a une identification canonique

$$(\mathcal{U}Y)(a) = \coprod_{s:a \to X} Y(a,s) \ .$$

Une somme de morphismes d'ensembles simpliciaux étant une ∞-équivalence si et seulement si chacun de ces morphismes l'est, on en déduit que le $A/X \times \Delta$-localisateur $\mathsf{W}_\infty^{A^{op}}/X$ des $\mathsf{W}_\infty^{A^{op}}$-équivalences au dessus de X n'est autre que le $A/X \times \Delta$-localisateur $\mathsf{W}_\infty^{(A/X)^{op}}$ des ∞-équivalences argument par argument. En remarquant que X, vu comme préfaisceau simplicial sur A, est l'image par $\mathcal{U}$ du préfaisceau final sur $A/X \times \Delta$, l'assertion résulte de 3.4.34.1 et du lemme 3.4.15.

3.4.34.3. — *Les ∞-équivalences argument par argument forment un $A \times \Delta$-localisateur régulier. En particulier, toute* W*-équivalence est une ∞-équivalence argument par argument.*

La première assertion résulte immédiatement de 3.4.34.2 et du lemme 3.4.28. La définition même de W implique que la seconde est conséquence de la première et du fait que les projections de la forme $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ sont des ∞-équivalences argument par argument.

3.4.34.4. — *Toute ∞-équivalence argument par argument entre préfaisceaux simpliciaux* W*-fibrants est une* W*-équivalence.*

Soit $Y \longrightarrow Y'$ une ∞-équivalence argument par argument entre préfaisceau simpliciaux W-fibrants. Pour tout objet a de A, et tout entier $n \geqslant 0$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(a \times \Delta_n, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(a \times \Delta_n, Y') \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y_a & \longrightarrow & Y'_a \end{array} \ ,$$

dont les flèches verticales sont les images par les foncteurs $\mathrm{Hom}(\,.\,, Y)$ et $\mathrm{Hom}(\,.\,, Y')$ de la projection de $a \times \Delta_n$ sur a, et sont donc, en vertu du lemme 3.4.30, des ∞-équivalences. La flèche $Y_a \longrightarrow Y'_a$ étant une ∞-équivalence par hypothèse, on en déduit que la flèche $\mathrm{Hom}(a \times \Delta_n, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(a \times \Delta_n, Y')$ est aussi une ∞-équivalence. Soient X un préfaisceau simplicial sur A, et φ_X le foncteur canonique de $(A \times \Delta)/X$ vers $\widehat{A \times \Delta}$. Ce qui précède montre qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\varphi_X, Y) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\varphi_X, Y') \ .$$

On obtient donc grâce aux lemmes 3.4.31, 3.4.33 et à l'isomorphisme canonique $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_X \simeq X$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A\times\Delta}$ les bijections suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\widehat{A\times\Delta}}(X,Y) &\simeq \pi_0\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(X,Y)\\
&\simeq \pi_0\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\mathbf{L}\varinjlim\varphi_X, Y)\\
&\simeq \pi_0\mathbf{R}\varprojlim\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\varphi_X, Y)\\
&\simeq \pi_0\mathbf{R}\varprojlim\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\varphi_X, Y')\\
&\simeq \pi_0\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\mathbf{L}\varinjlim\varphi_X, Y')\\
&\simeq \pi_0\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(X, Y')\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\widehat{A\times\Delta}}(X,Y')\ .
\end{aligned}$$

On conclut par le lemme de Yoneda et la saturation forte de W.

3.4.34.5. — *Toute ∞-équivalence argument par argument est une W-équivalence.*

Soit $u : X \longrightarrow X'$ une ∞-équivalence argument par argument entre préfaisceaux simpliciaux sur A. On choisit une W-équivalence de but W-fibrant $i' : X' \longrightarrow Y'$, puis on factorise $i'u$ en une W-équivalence $i : X \longrightarrow Y$ suivie d'une W-fibration $v : Y \longrightarrow Y'$. Il résulte de 3.4.34.3 que v est une ∞-équivalence argument par argument, et donc, en vertu de 3.4.34.4, v est une W-équivalence, ce qui implique qu'il en est de même de u. □

Lemme 3.4.35. — *Soient A une petite catégorie, W un A-localisateur, et X un préfaisceau sur A. Pour que X soit W-régulier, il faut et il suffit que X, vu comme préfaisceau simplicial constant, soit W_Δ-régulier, où W_Δ désigne la complétion simpliciale de W (2.3.22).*

Démonstration. — Notons $pr_1 : A\times\Delta \longrightarrow A$ la première projection, d'où un foncteur image inverse $pr_1^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A\times\Delta}$. En vertu des propositions 2.3.27 et 3.1.28, on a un carré commutatif (à isomorphisme près)

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}(A/X) & \xrightarrow[\sim]{pr_1^*} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}_\Delta}\,\widehat{A\times\Delta}(A/X)\\
{\scriptstyle \mathbf{L}\varinjlim_{A/X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}\varinjlim_{A/X}}\\
\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A} & \xrightarrow[pr_1^*]{\sim} & \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}_\Delta}\,\widehat{A\times\Delta}
\end{array}\ ,$$

dont les lignes sont des équivalences de catégories. En considérant l'objet φ_X de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}(A/X)$, il résulte alors du lemme 3.4.27 que X est W-régulier si et seulement si pr_1^*X est W_Δ-régulier, ce qui prouve le lemme. □

Théorème 3.4.36. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le A-localisateur W est régulier.*

(b) *La complétion simpliciale de W est régulière.*

(c) *La complétion simpliciale de W contient les ∞-équivalences argument par argument.*

Démonstration. — L'équivalence des assertions (a) et (b) est conséquence des lemmes 3.4.28 et 3.4.35. Celle des assertions (b) et (c) résulte de la proposition 3.4.34. □

Corollaire 3.4.37. — *Soit A une petite catégorie. L'application $\mathsf{W} \longmapsto \mathsf{W}_\Delta$ définit une bijection croissante pour l'inclusion de l'ensemble des A-localisateurs réguliers vers celui des $A \times \Delta$-localisateurs discrets et réguliers. En particulier, la complétion régulière de la complétion simpliciale d'un A-localisateur W coïncide avec la complétion simpliciale de sa complétion régulière (ce qui s'écrit encore $(\overline{(\mathsf{W}_\Delta)} = (\overline{\mathsf{W}})_\Delta)$), et s'identifie au $A \times \Delta$-localisateur engendré par la classe formée des W-équivalences argument par argument et des ∞-équivalences argument par argument.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition 2.3.30 et du théorème 3.4.36. □

Dans la suite, on notera simplement $\overline{\mathsf{W}}_\Delta$ le $A \times \Delta$-localisateur $\overline{(\mathsf{W}_\Delta)} = (\overline{\mathsf{W}})_\Delta$, et on utilisera librement cette égalité sans se référer explicitement au corollaire précédent.

Corollaire 3.4.38. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. Si W est stable par produits finis, il en est de même de sa complétion régulière $\overline{\mathsf{W}}$.*

Démonstration. — Supposons que le A-localisateur W soit stable par produits finis. Le $A \times \Delta$-localisateur $\mathsf{W}^{\Delta^{op}}$ des W-équivalences argument par argument est alors aussi stable par produits finis, et comme il en est de même du $A \times \Delta$-localisateur $\mathsf{W}_\infty^{A^{op}}$ des ∞-équivalences argument par argument (cf. 2.1.3), il résulte du corollaire précédent et du corollaire 1.4.19, (b) que la complétion simpliciale $\overline{\mathsf{W}}_\Delta$ de la complétion régulière $\overline{\mathsf{W}}$ de W est stable par produits finis. Si $pr_1 : A \times \Delta \longrightarrow A$ désigne la première projection, le corollaire résulte donc de l'égalité $\overline{\mathsf{W}} = pr_1^{*-1}\overline{\mathsf{W}}_\Delta$ (2.3.27), et de la commutativité du foncteur $pr_1^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$ aux produits. □

Corollaire 3.4.39. — *Pour toute petite catégorie A, le A-localisateur régulier minimal est stable par produits finis.*

Démonstration. — Cela résulte du corollaire précédent et du corollaire 1.4.19, (c). □

Corollaire 3.4.40. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur. Si W est propre, il en est de même de sa complétion régulière.*

Démonstration. — Si le A-localisateur $\mathcal{W}$ est propre, le corollaire 2.3.28 implique que W_Δ est propre, et il résulte de la proposition 3.4.34 que la complétion régulière de W_Δ est le $A \times \Delta$-localisateur engendré par W_Δ et par les ∞-équivalences argument par argument. La preuve s'achève donc grâce au théorème 2.1.42, à la proposition 1.5.15, et aux corollaires 1.5.6 et 2.3.28. □

Corollaire 3.4.41. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur régulier. Les W-équivalences sont stables par limites inductives filtrantes.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 2.3.27, il suffit de montrer que la complétion simpliciale de W est stable par petites limites inductives filtrantes, et le théorème 3.4.36 implique que celle-ci contient les ∞-équivalences argument par argument. Or la proposition 2.3.20 implique immédiatement que les ∞-équivalences argument par argument sont stables par petites limites inductives filtrantes. Le corollaire résulte donc de la proposition 3.4.12. □

Lemme 3.4.42. — *Soit A une petite catégorie. Les A-localisateurs réguliers sont stables par intersections.*

Démonstration. — Cela résulte de la stabilité des A-localisateurs par intersections et du fait que les A-localisateurs réguliers sont ceux qui contiennent le A-localisateur régulier minimal (voir la remarque 3.4.14). □

Lemme 3.4.43. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories ; il définit un foncteur image inverse*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A} .$$

On considère un A-localisateur régulier W, et on suppose que $\mathsf{W}' = (u^*)^{-1}(\mathsf{W})$ est un B-localisateur (voir la proposition 1.4.20 pour des conditions suffisantes). Alors W' est régulier. Si en outre W est accessible, il en est de même de W'.

Démonstration. — L'assertion relative à l'accessibililité résulte aussitôt de la proposition 1.4.20. Il suffit donc de prouver que W' est régulier. Le foncteur $u \times 1_\Delta$ induit un foncteur image inverse :

$$(u \times 1_\Delta)^* : \widehat{B \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} .$$

En vertu de la proposition 2.3.31, la complétion simpliciale de W' est formée des flèches dont l'image par $(u \times 1_\Delta)^*$ est dans la complétion simpliciale de W. D'autre part, le foncteur $(u \times 1_\Delta)^*$ respecte les ∞-équivalences argument par argument, et il résulte du théorème 3.4.36 (appliqué à W) que la complétion simpliciale de W, donc aussi celle de W', contient les ∞-équivalences argument par argument. Une nouvelle application du théorème 3.4.36 (cette fois à W') achève ainsi la démonstration. □

Proposition 3.4.44. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur régulier. Pour toute petite catégorie I, le $A \times I^{op}$-localisateur W^I des W-équivalences argument par argument est régulier.*

Démonstration. — Pour chaque objet i de I, on note W_i le $A \times I^{op}$-localisateur formé des morphismes dont l'évaluation en i est une W-équivalence. Le lemme précédent appliqué au foncteur $i : e \longrightarrow I$, défini par l'objet i, montre que W_i est régulier. Comme W^I est l'intersection des W_i, l'assertion résulte ainsi du lemme 3.4.42. □

Proposition 3.4.45. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur régulier. Un foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$ est une W-équivalence (3.4.1) si et seulement si pour tout préfaisceau représentable a sur A, le morphisme canonique $\mathbf{L}p_{I!}\, p_I^*(a) \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}\, p_J^*(a)$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du lemme 3.1.33. □

Proposition 3.4.46. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur régulier. On considère un morphisme de préfaisceaux $X \longrightarrow Y$ sur A, et on définit un foncteur*

$$\rho : A/Y \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad (a, a \longrightarrow Y) \longmapsto X \times_Y a \ .$$

Alors le morphisme canonique $\mathbf{L}\varinjlim \rho \longrightarrow X$, induit par les projections $X \times_Y a \longrightarrow X$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$.

Démonstration. — On va décomposer la preuve en plusieurs étapes.

3.4.46.1. — *Si on suppose en outre que W est stable par produits finis et que Y est le préfaisceau final $e = e_{\widehat{A}}$, alors l'assertion est vérifiée.*

Pour le voir, on commence par remarquer que l'assertion est immédiate si l'on suppose de plus que X est le préfaisceau final : cela revient à affirmer que le préfaisceau final est W-régulier. Si on suppose que W est stable par produits finis, alors le foncteur $X' \longmapsto X \times X'$ commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes autant que les W-équivalences. En vertu de la proposition 3.1.28, si h désigne le plongement de Yoneda de A dans $\widehat{A}$, on obtient ainsi des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{L}\varinjlim_A \rho = \mathbf{L}\varinjlim_A (X \times h) \simeq X \times \mathbf{L}\varinjlim_A h \simeq X \times e = X \ .$$

3.4.46.2. — *L'assertion est vérifiée si on suppose que Y est le préfaisceau final.*

Soit W_{reg} le A-localisateur régulier minimal. En vertu du corollaire 3.4.39, celui-ci est stable par produits finis, et donc il résulte de 3.4.46.1 que la flèche canonique

$$\mathbf{L}\varinjlim_A \rho \longrightarrow X$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}_{reg}}\, \widehat{A}$. En vertu de la proposition 3.1.28, appliquée à l'identité de $\widehat{A}$ en regard de l'inclusion $\mathsf{W}_{reg} \subset \mathsf{W}$, cette flèche est aussi un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$.

3.4.46.3. — *L'assertion est vérifiée en général.*

Considérons le foncteur d'oubli $\mathcal{U}$ de $\widehat{A}/Y$ vers $\widehat{A}$, et $\mathsf{W}/Y = \mathcal{U}^{-1}\mathsf{W}$ le A/Y-localisateur des W-équivalences au-dessus de Y. On peut voir le foncteur ρ comme l'image par $\mathcal{U}$ du foncteur ρ/Y de A/Y dans $\widehat{A}/Y$ défini de manière analogue, mais à partir du morphisme

$$(X, X \longrightarrow Y) \longrightarrow (Y, 1_Y) \ .$$

On a alors les égalités $\mathcal{U}(\rho/Y) = \rho$ et $\mathcal{U}(X, X \longrightarrow Y) = X$. Comme $\mathcal{U}$ respecte les monomorphismes et les équivalences faibles tout en commutant aux petites limites inductives, il résulte de 3.4.46.2, appliqué à ρ/Y, et de la proposition 3.1.28, appliquée à $\mathcal{U}$, qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{L}\varinjlim_{A/Y} \rho = \mathbf{L}\varinjlim_{A/Y} \mathcal{U}(\rho/Y) \simeq \mathcal{U}\mathbf{L}\varinjlim_{A/Y} \rho/Y \simeq \mathcal{U}(X, X \longrightarrow Y) = X \ ,$$

ce qui achève cette démonstration. □

Corollaire 3.4.47. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur régulier. On considère un triangle commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ u\ } & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & S & \end{array}$$

de préfaisceaux sur A. Si pour tout objet a de A, et toute section $a \longrightarrow S$ de S au-dessus de a, le morphisme $X \times_S a \longrightarrow Y \times_S a$ est une W-équivalence, alors u est une W-équivalence.

Démonstration. — On note ρ (resp. ρ') le foncteur de A/S vers $\widehat{A}$ qui associe à une section $a \longrightarrow S$ le préfaisceau $X \times_S a$ (resp. $Y \times_S a$). Les hypothèses impliquent qu'on a un isomorphisme $\rho \simeq \rho'$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}(A/S)$, d'où en vertu de la proposition précédente, des isomorphismes canoniques dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\, \widehat{A}$

$$X \simeq \mathbf{L}\varinjlim \rho \simeq \mathbf{L}\varinjlim \rho' \simeq Y \ ,$$

ce qui achève la démonstration par forte saturation. □

Proposition 3.4.48. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur propre et régulier. On considère un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

de préfaisceaux sur A. Pour que celui-ci soit homotopiquement cartésien au sens de W*, il suffit que pour tout préfaisceau représentable a sur A, et toute section s de Y' au-dessus de a, le carré*

$$\begin{array}{ccc} a \times_{Y'} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ a & \xrightarrow[fs]{} & Y \end{array}$$

soit homotopiquement cartésien au sens de W.

Démonstration. — On choisit une factorisation de p de la forme $p = qj$, où j est une W-équivalence, et q une W-fibration. Pour tout objet a de A, et toute section de Y' au-dessus de a, on peut alors former le diagramme suivant (où Z' désigne le produit fibré de Z et de Y' au-dessus de Y).

$$\begin{array}{ccccc} a \times_{Y'} X' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle j_a} & & \downarrow{\scriptstyle j'} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ a \times_{Y'} Z' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ a & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

On veut montrer que la flèche j' est une équivalence faible (cf. 1.5.17). Or on sait par hypothèse que la flèche j_a est une équivalence faible pour tout objet a de A et toute section de Y' au-dessus de a, et par conséquent, le corollaire 3.4.47 implique que j' est une équivalence faible, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 3.4.49. — *Soient A une petite catégorie, et* W *un A-localisateur propre et régulier. La notion de* W*-fibration faible (cf. 2.2.3) est locale dans le sens suivant : pour qu'un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A soit une* W*-fibration faible, il faut et il suffit que pour tout préfaisceau représentable a sur A, et toute section s de Y au-dessus de a, le carré ci-dessous soit* W*-homotopiquement cartésien.*

$$\begin{array}{ccc} a \times_{Y} X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ a & \xrightarrow[s]{} & Y \end{array}$$

Démonstration. — Il résulte aussitôt de la proposition précédente que la condition invoquée est équivalente à la condition (a) de la proposition 1.5.18, laquelle implique donc ce corollaire. □

3.4.50. — Soit G un groupe. Si on voit ce dernier comme une catégorie à un objet, la catégorie des G-ensembles à droite (*i.e.* des ensembles munis d'une action de G à droite) s'identifie à celle des préfaisceaux d'ensembles sur G. Si X et Y sont deux

G-ensembles, on note $\mathrm{Hom}_G(X,Y)$ l'ensemble des morphismes G-équivariants de X vers Y. Par exemple, si X est un G-ensemble, et si H est un sous-groupe de G, $\mathrm{Hom}_G(H\backslash G, X)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble X^H des éléments de X invariants sous l'action de H induite par celle de G ($H\backslash G$ désignant le quotient de G par H muni de l'action de G par translations à droite).

On désigne par W_∞^f la partie de $\mathrm{Fl}\,\widehat{G\times\Delta}$ formée des morphismes de G-ensembles simpliciaux (à droite) $X\longrightarrow Y$ tels que pour tout sous-groupe H de G, le morphisme d'ensembles simpliciaux $X^H\longrightarrow Y^H$ soit une ∞-équivalence. On appellera les éléments de W_∞^f des *∞-équivalences fines*. Le but de la fin de ce paragraphe est de montrer que lorsque G est différent du groupe trivial, alors W_∞^f est un $G\times\Delta$-localisateur propre qui n'est pas régulier.

Lemme 3.4.51. — *Tout monomorphisme de G-ensembles est une inclusion de la forme $X\longrightarrow X\amalg Y$.*

C'est immédiat.

Lemme 3.4.52. — *Les inclusions de la forme $\varnothing\longrightarrow H\backslash G$, H parcourant l'ensemble des sous-groupes de G, forment un modèle cellulaire de la catégorie des G-ensembles.*

Démonstration. — C'est une conséquence directe du lemme précédent et du fait que tout G-ensemble est somme de G-ensembles de la forme $H\backslash G$, où H est un sous-groupe de G. □

Lemme 3.4.53. — *Soit H un sous-groupe de G.*

(i) *Le foncteur $X\longmapsto X^H$ respecte les monomorphismes.*

(ii) *Si*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ Y & \xrightarrow[v]{} & Y' \end{array}$$

est un carré cocartésien de G-ensembles, et si i est un monomorphisme, alors

$$\begin{array}{ccc} X^H & \xrightarrow{u^H} & X'^H \\ {\scriptstyle i^H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'^H} \\ Y^H & \xrightarrow[v^H]{} & Y'^H \end{array}$$

est un carré cocartésien d'ensembles.

(iii) *Si I est un ensemble bien ordonné, et si X est un foncteur de I à valeurs dans la catégorie des G-ensembles tel que pour tous $i<j$ dans I, $X_i\longrightarrow X_j$ soit un monomorphisme, alors l'application canonique de $\varinjlim(X^H)$ vers $(\varinjlim X)^H$ est bijective.*

Démonstration. — Cela résulte facilement du lemme 3.4.51, une fois remarqué que le foncteur $X \longmapsto X^H$ commute aux petites sommes. □

3.4.54. — En vertu des lemmes 2.3.2 et 3.4.52, l'ensemble I des inclusions

$$H\backslash G \times \partial\Delta_n \longrightarrow H\backslash G \times \Delta_n \quad , \qquad H \text{ sous-groupe de } G \ , \quad n \geqslant 0 \ ,$$

forme un modèle cellulaire de la catégorie des G-ensembles simpliciaux. On définit d'autre part une donnée homotopique élémentaire sur $G \times \Delta$ en considérant le segment séparant défini par Δ_1, muni de l'action triviale (cf. exemple 1.3.8). À l'aide de la remarque 1.3.15, on constate que l'ensemble J formé des inclusions de la forme

$$H\backslash G \times (\Delta_1 \times \partial\Delta_n \cup \{\varepsilon\} \times \Delta_n) \longrightarrow H\backslash G \times \Delta_1 \times \Delta_n \ , \qquad \begin{array}{c} H \text{ sous-groupe de } G \ , \\ n \geqslant 0 \ , \quad \varepsilon = 0, 1 \ , \end{array}$$

engendre la classe d'extensions anodines définie par cette donnée homotopique (cf. le numéro 1.3.14). Il résulte facilement de 2.1.4 que les dites extensions anodines sont aussi engendrées par l'ensemble des morphismes de la forme

$$H\backslash G \times \Lambda_n^k \longrightarrow H\backslash G \times \Delta_n \quad , \qquad H \text{ sous-groupe de } G \ , \quad n \geqslant 1 \ , \quad 0 \leqslant k \leqslant n \ .$$

Proposition 3.4.55. — *Les ∞-équivalences fines forment le $G \times \Delta$-localisateur engendré par les projections de la forme $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$, pour X G-ensemble simplicial. Ce $G \times \Delta$-localisateur est propre, et en particulier accessible. En outre, la structure de catégorie de modèles fermée associée (en vertu du théorème 1.4.3) est engendrée par le couple (I, J) défini ci-dessus (ce qui signifie simplement que les fibrations au sens de W_∞^f sont les morphismes $X \longrightarrow Y$ de G-ensembles simpliciaux tels que pour tout sous-groupe H de G, $X^H \longrightarrow Y^H$ soit une fibration de Kan).*

Démonstration. — Montrons que les ∞-équivalences fines forment un $G \times \Delta$-localisateur contenant les projections de la forme $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$. La vérification de l'axiome L1 est immédiate, et l'axiome L3 résulte aussitôt du lemme précédent. D'autre part, si on voit Δ_1 comme un G-ensemble simplicial muni de l'action triviale, pour tout G-ensemble simplicial X, la projection $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ est une ∞-équivalence fine. En particulier, tout G-ensemble simplicial admet un W_∞^f-cylindre, et vu qu'il est aussi immédiat que les ∞-équivalences fines forment une classe faiblement saturée, le lemme 1.4.13 prouve l'axiome L2, ce qui démontre bien l'assertion.

Soit W le $G \times \Delta$-localisateur engendré par les projections $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$. En vertu du corollaire 1.5.7, ce dernier est propre (et donc en particulier accessible). Ce qui précède montre en outre que toute W-équivalence est une ∞-équivalence fine. Considérons à présent la donnée homotopique élémentaire définie par le segment séparant Δ_1, ainsi que les extensions anodines, et fibrations naïves correspondantes (voir 3.4.54). Il résulte du corollaire 1.4.18 que le $A \times \Delta$-localisateur W est la classe des équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée par cette donnée

homotopique. On remarque que pour tout sous-groupe H de G, le foncteur

$$\widehat{G \times \Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad , \qquad X \longmapsto X^H \ , \quad X \in \mathrm{Ob}\, \widehat{G \times \Delta} \ ,$$

admet comme adjoint à gauche le foncteur

$$\widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{G \times \Delta} \quad , \qquad K \longmapsto H\backslash G \times K \ , \quad K \in \mathrm{Ob}\, \widehat{\Delta} \ ,$$

(K étant muni de l'action triviale). Vu la description des ensembles I et J qui engendrent les cofibrations et les extensions anodines respectivement (3.4.54), un argument standard d'adjonction montre que les fibrations naïves (resp. triviales) sont les morphismes $X \longrightarrow Y$ de G-ensembles simpliciaux tels que pour tout sous-groupe H de G, $X^H \longrightarrow Y^H$ soit une fibration de Kan (resp. une fibration triviale). On en déduit que toute fibration naïve qui est aussi une ∞-équivalence fine est une fibration triviale (puisqu'en vertu du théorème 2.1.42, toute fibration de Kan qui est une ∞-équivalence est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux). Il résulte donc de la proposition 1.3.47 que la donnée homotopique considérée ci-dessus est complète. En outre, cela implique que toute ∞-équivalence fine est une W-équivalence. En effet, soit u une ∞-équivalence fine ; elle se décompose en une W cofibration triviale i, suivie d'une W-fibration p. Comme $\mathsf{W} \subset \mathsf{W}_\infty^f$, p est une ∞-équivalence fine, donc une fibration triviale, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 3.4.56. — *Si G n'est pas le groupe trivial, il existe un G-ensemble simplicial X dont l'ensemble simplicial sous-jacent est contractile, et tel que $X^G = \varnothing$.*

Démonstration. — Si Y est un ensemble, on lui associe un groupoïde EY dont les objets sont les éléments de Y, et dont les flèches sont les couples (y, x) (x étant la source, et y le but). La composition est définie par $(z, y) \circ (y, x) = (z, x)$. Il est clair que lorsque Y n'est pas vide, le nerf de EY est un ensemble simplicial contractile : EY est une catégorie équivalente à la catégorie ponctuelle. D'autre part, cette construction étant fonctorielle, si Y est muni d'une action de G, alors le nerf de EY est canoniquement muni d'une structure de G-ensemble simplicial. Soit X le G-ensemble simplicial obtenu comme le nerf de EG, en considérant l'ensemble G muni de l'action par translations à droite. Il est alors immédiat que si G n'est pas trivial, l'action de G sur X n'admet aucun point fixe parmi les 0-simplexes de X. □

Proposition 3.4.57. — *Le $G \times \Delta$-localisateur des ∞-équivalences fines n'est pas régulier si G n'est pas le groupe trivial.*

Démonstration. — Les ∞-équivalences argument par argument de $\widehat{G \times \Delta}$ sont les morphismes de G-ensembles simpliciaux qui sont des ∞-équivalences d'ensembles simpliciaux après oubli de l'action de G (car le foncteur d'oubli de l'action de G est le foncteur d'évaluation en l'unique objet de G vu comme une catégorie). Or si G n'est pas trivial, le lemme précédent montre qu'il existe un G-ensemble X tel que la flèche

de X vers le G-ensemble final soit une ∞-équivalence argument par argument, mais pas une ∞-équivalence fine. Autrement dit, on a une inclusion stricte $\mathsf{W}_\infty^f \subset \mathsf{W}_\infty^{G^{op}}$, ce qui permet de conclure en vertu de la proposition 3.4.34. □

PARTIE II

À LA POURSUITE DES MODÈLES

CHAPITRE 4

CORRESPONDANCES FONDAMENTALES

4.1. Catégories test locales

Dans cette section, on suppose qu'un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est fixé (cf. définition 3.3.2).

4.1.1. — On désigne par $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ la localisation de la catégorie Cat par la classe des $\mathcal{W}$-équivalences.

4.1.2. — Soit A une petite catégorie. D'après 3.2.1 et 3.2.13, on dispose d'un foncteur

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathit{Cat} \quad , \qquad X \longmapsto A/X$$

qui commute aux limites inductives et aux produits fibrés. Il admet pour adjoint à droite le foncteur

$$i_A^* : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad C \longmapsto (a \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathit{Cat}}(A/a, C)) \ .$$

Soit Δ_1 la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$. On vérifie facilement (voir [**96**, 1.5.5]) que le préfaisceau $i_A^*(\Delta_1)$ n'est autre que l'objet de Lawvere L de $\widehat{A}$ (cf. 1.3.9). La section de L correspondant à l'identité (resp. au sous-objet vide) du préfaisceau final sur A est l'image par le foncteur i_A^* de l'inclusion de $\{0\}$ (resp. de $\{1\}$) dans Δ_1.

Soit X un préfaisceau sur A. Le foncteur

$$i_{A/X} : \widehat{A/X} \simeq \widehat{A}/X \longrightarrow \mathit{Cat}$$

s'identifie canoniquement au foncteur composé du foncteur d'oubli de $\widehat{A}/X$ vers $\widehat{A}$ avec le foncteur i_A. Autrement dit, si $X' \longrightarrow X$ est un morphisme de préfaisceaux sur A, on a

$$i_{A/X}(X', X' \longrightarrow X) = i_A(X') = A/X' \ .$$

On en déduit que le foncteur $i_{A/X}^*$ correspond au foncteur

$$\mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{A}/X \quad , \qquad C \longmapsto X \times i_A^*(C) \ .$$

Définition 4.1.3. — Soit A une petite catégorie. Un morphisme de préfaisceaux sur A est une *$\mathcal{W}$-équivalence*, ou plus simplement, une *équivalence faible*, si son image par le foncteur i_A est une $\mathcal{W}$-équivalence. On désigne par $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$ la classe des $\mathcal{W}$-équivalences de préfaisceaux sur A. Un morphisme $u : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A est une *$\mathcal{W}$-équivalence locale*, ou plus simplement une *équivalence faible locale*, si pour tout préfaisceau représentable a sur A, le morphisme $a \times X \longrightarrow a \times Y$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Un préfaisceau X sur A est *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement, *asphérique*, si la catégorie A/X est $\mathcal{W}$-asphérique. Un préfaisceau X sur A est *localement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement, *localement asphérique*, si pour tout préfaisceau représentable a sur A, la catégorie $A/(a \times X)$ est $\mathcal{W}$-asphérique.

4.1.4. — Si A est une petite catégorie, on note $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}$ la localisation de la catégorie $\widehat{A}$ par la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ des $\mathcal{W}$-équivalences de préfaisceaux sur A.

Remarque 4.1.5. — Considérons un triangle commutatif de préfaisceaux sur A de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\;u\;} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & Z & \end{array}$$

Il induit donc un triangle commutatif de catégories de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccc} A/X & \xrightarrow{\;A/u\;} & A/Y \\ & {\scriptstyle A/p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle A/q} & \\ & A/Z & \end{array}$$

En outre, on a les identifications

$$A/X = A/Z(X,p) \quad \text{et} \quad A/Y = A/Z(Y,q)\ .$$

On en déduit que u est une $\mathcal{W}$-équivalence en tant que morphisme de préfaisceaux sur A si et seulement si u est une $\mathcal{W}$-équivalence en tant que morphisme de préfaisceaux sur A/Z (*i.e.* en tant que morphisme de préfaisceaux sur A au-dessus de Z). Soit a un préfaisceau représentable sur A, et $s : a \longrightarrow Z$ une section de Z au-dessus de a. Le couple (a, s) peut aussi être considéré comme un objet de la catégorie A/Z. Comme le foncteur i_A commute aux produits fibrés, on obtient les identifications suivantes.

$$(A/X)/(a,s) = A/(a \times_Z X) \quad \text{et} \quad (A/Y)/(a,s) = A/(a \times_Z Y)\ .$$

Par conséquent, dire que le foncteur A/u est une équivalence faible localement au-dessus de A/Z revient à dire que pour tout objet a de A, et toute section s de Z au-dessus de a, le morphisme de préfaisceaux

$$a \times_Z X \longrightarrow a \times_Z Y$$

est une équivalence faible. En particulier, une telle condition implique que le morphisme u est une équivalence faible de préfaisceaux sur A. On déduit aussitôt de ces considérations que toute équivalence faible locale est une équivalence faible.

Remarque 4.1.6. — Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A. On s'aperçoit facilement que u est une équivalence faible locale si et seulement si pour tout préfaisceau Z sur A, le morphisme $1_Z \times u : Z \times X \longrightarrow Z \times Y$ est une équivalence faible. En effet, dire que u est une équivalence faible locale équivaut à dire que le foncteur A/u est une équivalence faible localement au-dessus de A. D'après les calculs effectués dans la remarque précédente, cela revient encore à affirmer que pour tout préfaisceau représentable a, le morphisme $1_a \times u : a \times X \longrightarrow a \times Y$ est une équivalence faible. On en déduit que pour tout préfaisceau Z sur A, le morphisme $1_Z \times u$ est une équivalence faible locale de préfaisceaux sur A/Z. En particulier, $1_Z \times u$ est donc une équivalence faible.

Remarque 4.1.7. — Lorsque A est asphérique, un préfaisceau X sur A est asphérique si et seulement si le morphisme de X vers l'objet final de $\widehat{A}$ est une équivalence faible. Or pour tout objet a de A, la catégorie A/a est asphérique (puisqu'elle admet un objet final). On en déduit qu'un préfaisceau X sur A est localement asphérique si et seulement si pour tout préfaisceau représentable a sur A, la projection

$$a \times X \longrightarrow a$$

est une équivalence faible. Autrement dit, un préfaisceau X sur A est localement asphérique si et seulement si le morphisme de X vers le préfaisceau final sur A est une équivalence faible locale. D'après la remarque 4.1.6, on peut donc encore donner la caractérisation suivante : un préfaisceau X sur A est localement asphérique si et seulement si pour tout préfaisceau Y sur A, la projection

$$X \times Y \longrightarrow Y$$

est une équivalence faible.

Définition 4.1.8 **(Grothendieck)**. — Une petite catégorie A est une *$\mathcal{W}$-catégorie test faible*, ou plus simplement, une *catégorie test faible*, si pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est $\mathcal{W}$-asphérique.

Remarque 4.1.9. — La définition que nous avons adoptée pour cette notion n'est pas celle donnée dans [**96**, 1.3.7]. Elle est cependant équivalente à cette dernière en regard du résultat élémentaire suivant.

Proposition 4.1.10. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *A est une catégorie test faible ;*
(ii) *la catégorie A est asphérique, et on a $i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$;*
(iii) *la catégorie A est asphérique, et $\mathcal{W} = (i_A^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$;*

(iv) *pour toute petite catégorie C, le morphisme de co-unité $i_A i_A^*(C) \longrightarrow C$ est une équivalence faible ;*

(v) *pour toute petite catégorie C, le morphisme de co-unité $i_A i_A^*(C) \longrightarrow C$ est asphérique ;*

(vi) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.*

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 1.3.9]. □

Remarque 4.1.11. — Si A est une catégorie test faible, on montre facilement le fait suivant (voir [**96**, paragraphe 1.3.7, lemme 1.3.8 et proposition 1.3.9]). Les foncteurs i_A et i_A^* respectent tous deux les équivalences faibles, ce qui implique qu'ils induisent respectivement des foncteurs

$$\overline{i}_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} \quad \text{et} \quad \overline{i}_A^* : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A} .$$

Pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme d'unité $X \longrightarrow i_A^* i_A(X)$ est une équivalence faible. En utilisant la condition (*iv*) ci-dessus, on obtient de plus que les foncteurs $\overline{i}_A$ et $\overline{i}_A^*$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Définition 4.1.12 **(Grothendieck)**. — Une petite catégorie A est une *$\mathcal{W}$-catégorie test locale*, ou plus simplement, une *catégorie test locale*, si pour tout objet a de A, la catégorie A/a est une $\mathcal{W}$-catégorie test faible. Une petite catégorie A est une *$\mathcal{W}$-catégorie test*, ou plus simplement, une *catégorie test*, si elle est à la fois une $\mathcal{W}$-catégorie test faible et une $\mathcal{W}$-catégorie test locale.

Remarque 4.1.13. — On vérifie facilement qu'une petite catégorie A est une catégorie test si et seulement si A est une catégorie test locale et si A est asphérique (voir [**96**, remarque 1.5.4]). Par exemple, si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors A est une catégorie test locale si et seulement si A est une catégorie test. En particulier, on obtient la caractérisation suivante : une petite catégorie A est une catégorie test locale si et seulement si pour tout objet a de A, la catégorie A/a est une catégorie test.

En conclusion de cette remarque, pour caractériser les catégories test, il suffit de savoir caractériser les catégories test locales. On obtient un premier critère comme suit.

Proposition 4.1.14. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La catégorie A est une catégorie test locale.*

(ii) *Pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est localement asphérique.*

(iii) *Pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est localement asphérique.*

(iv) *Le foncteur i_A^* envoie les équivalences faibles de* **Cat** *sur des équivalences faibles locales de $\widehat{A}$.*

(v) *Pour tout préfaisceau X sur A, la catégorie A/X est une catégorie test locale.*

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 1.5.3 et remarque 1.5.4, *b*)]. □

4.1.15. — On dit qu'un foncteur entre petites catégories $j : U \longrightarrow X$ est une *immersion ouverte* s'il est pleinement fidèle, injectif sur les objets, et si $j(U)$ est un crible de X. Cette dernière condition revient à dire que pour tout objet x de X, et tout objet u de U, s'il existe un flèche de x vers $j(u)$ dans X, alors il existe un objet v de U tel que $x = j(v)$ (un tel v est bien entendu nécessairement unique en vertu de l'injectivité de j). Dualement, on dit qu'un foncteur entre petites catégories $i : Z \longrightarrow X$ est une *immersion fermée* si le foncteur $i^{op} : Z^{op} \longrightarrow X^{op}$ est une immersion ouverte (ce qui revient à dire que i est pleinement fidèle, injectif sur les objets, et identifie Z à un cocrible de X).

Par exemple, si A est une petite catégorie, et si X est un sous-objet de l'objet final de $\widehat{A}$, alors le foncteur canonique de A/X vers A est une immersion ouverte. Toutes les immersions ouvertes sont obtenues de cette manière (à isomorphisme de catégories près).

Soit $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte. On désigne par Z la sous-catégorie pleine de X formée des objets z de X qui ne sont pas de la forme $j(u)$ pour u dans U. Alors le foncteur d'inclusion $i : Z \longrightarrow X$ est une immersion fermée. On dit alors que Z est le cocrible complémentaire à U dans X, et que i est l'immersion fermée complémentaire de j. Le résultat ci-dessous est alors immédiat.

Lemme 4.1.16. — *Soient X une catégorie, $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte, et F le cocrible complémentaire à U. Alors pour toute catégorie A admettant un objet final e_A, et tout foncteur $u : U \longrightarrow A$, il existe un unique foncteur $x : X \longrightarrow A$, tel que $x \circ j = u$, et dont la restriction à F soit le foncteur constant de valeur e_A.* □

Lemme 4.1.17. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow$ **Cat** un foncteur. On suppose que le foncteur $i_! : \widehat{A} \longrightarrow$ **Cat**, unique prolongement de i commutant aux petites limites inductives, envoie les monomorphismes de $\widehat{A}$ sur des immersions ouvertes. Alors l'adjoint à droite de $i_!$, $i^* :$ **Cat** $\longrightarrow \widehat{A}$, $C \longmapsto (a \mapsto \mathrm{Hom}_{Cat}(i(a), C)$, envoie les petites catégories admettant un objet final sur des objets injectifs de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — Le lemme 4.1.16 implique que si C est une petite catégorie admettant un objet final, le foncteur canonique $p : C \longrightarrow e$, où e désigne la catégorie ponctuelle, vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux immersions ouvertes, ce qui permet de conclure par un argument standard d'adjonction. □

Proposition 4.1.18. — *Soit A une petite catégorie, et W une classe faiblement saturée (cf. 1.4.12) de morphismes de préfaisceaux sur A. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour toute petite catégorie C admettant un objet final, et pour tout préfaisceau X sur A, la projection du produit $X \times i_A^*(C)$ sur X est dans* W.

(ii) *Tout morphisme de préfaisceaux sur A vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement à la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$ est dans* W.

Démonstration. — Le fait que (*ii*) implique (*i*) résulte aussitôt du lemme 4.1.17. L'autre implication est quant à elle conséquence du lemme 1.4.13 et des faits suivants : l'objet de Lawvere de $\widehat{A}$ s'identifie au préfaisceau $i_A^*(\Delta_1)$ (voir 4.1.2), et la catégorie Δ_1 admet un objet final. □

Théorème 4.1.19. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La catégorie A est une catégorie test locale.*

(ii) *L'objet de Lawvere de $\widehat{A}$ est un préfaisceau localement asphérique.*

(iii) *Il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement asphérique.*

(iv) *Toute fibration triviale de $\widehat{A}$ (*i.e *tout morphisme de préfaisceaux sur A vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement à la classe des monomorphismes) est une équivalence faible de préfaisceaux sur A.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 4.1.14 l'équivalence des conditions (*i*) et (*iv*) résulte de la proposition 4.1.18. L'équivalence des conditions (*ii*), (*iii*) et (*iv*) résulte du lemme 1.4.13 et du fait que l'objet de Lawvere de $\widehat{A}$ définit un segment séparant (voir 1.3.9). □

Exemple 4.1.20. — Soit A une petite catégorie admettant des produits finis. En particulier, la catégorie A admet un objet final, et donc elle est asphérique. Par conséquent, pour que A soit une catégorie test, il faut et il suffit que A soit une catégorie test locale. D'autre part, comme A admet des produits finis, les préfaisceaux représentables sur A sont stables par produits finis. Or tout préfaisceau représentable sur A est asphérique. On en déduit que dans cette situation, tout préfaisceau représentable sur A est localement asphérique. Supposons en outre que $\widehat{A}$ admette un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ tel que I soit un préfaisceau représentable sur A. Alors il résulte du critère (*iii*) du théorème 4.1.19 que A est une catégorie test. Ce procédé permet de construire un grand nombre d'exemples de catégories test : toute petite catégorie équvalente à la catégorie des ensembles finis non vides (resp. à la catégorie des ensembles ordonnés finis non vides, resp. à la catégorie des catégories finies admettant un objet final, *etc.*) est une catégorie test.

Exemple 4.1.21. — La catégorie des simplexes (2.1.1) est une catégorie test. Pour le voir, on démontre par un procédé combinatoire que le préfaisceau représentable Δ_1 est localement asphérique, et on applique une nouvelle fois le critère (*iii*) du théorème 4.1.19. Voir [**96**, exemple 1.5.11] pour une preuve élémentaire et complète.

Corollaire 4.1.22. — *Soient A une catégorie test locale (resp. une catégorie test), et B une petite catégorie arbitraire (resp. asphérique). Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test locale (resp. une catégorie test).*

Démonstration. — Voir [**96**, corollaire 1.5.10]. □

4.1.23. — Si A est une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathit{Cat}$ un foncteur, on rappelle que

$$i^* : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{A}$$

désigne le foncteur

$$C \longmapsto (a \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathit{Cat}}(ia, C)) .$$

Par exemple, si i désigne le foncteur

$$a \longmapsto A/a ,$$

alors i^* n'est autre que le foncteur à présent bien connu i_A^*.

Définition 4.1.24. — Soit A une petite catégorie. Un foncteur $i : A \longrightarrow \mathit{Cat}$ est un $\mathcal{W}$-*foncteur test local*, ou plus simplement un *foncteur test local*, si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

(a) La catégorie A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale.

(b) Pour tout objet a de A, la catégorie ia est $\mathcal{W}$-asphérique.

(c) Pour toute catégorie $\mathcal{W}$-asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement $\mathcal{W}$-asphérique.

Un foncteur $i : A \longrightarrow \mathit{Cat}$ est un *foncteur $\mathcal{W}$-test*, ou plus simplement *un foncteur test*, si i est un $\mathcal{W}$-foncteur test local et si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test.

Remarque 4.1.25. — La définition de foncteur test local que nous avons introduite ci-dessus n'est pas identique à celle donnée dans [**96**, définition 1.7.11], mais seulement équivalente ; nous renvoyons le lecteur à [**96**, théorème 1.7.13 et corollaire 1.7.10] pour une caractérisation des foncteurs test locaux généraux. La situation se simplifie beaucoup si on considère la situation suivante.

Soit $i : A \longrightarrow \mathit{Cat}$ un foncteur, A étant une petite catégorie. On suppose que pour tout objet a de A, la catégorie ia admet un objet final. Alors on peut définir une transformation naturelle explicite (cf. 3.2.4)

$$\alpha : i_A i^* \longrightarrow \mathit{Cat} .$$

On obtient alors la caractérisation suivante.

Théorème 4.1.26. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathit{Cat}$ un foncteur. On suppose que pour tout objet a de A, la catégorie ia admet un objet final. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur i est un foncteur test local (en particulier, A est donc une catégorie test locale).*

(ii) *Pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique.*

(iii) *Le foncteur i^* envoie les équivalences faibles de Cat sur des équivalences faibles locales de $\widehat{A}$.*

(iv) *Le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique.*

Si l'une des conditions ci-dessus est vérifiée, et si en outre A est asphérique, alors A est une catégorie test, et pour toute petite catégorie C, le morphisme naturel

$$\alpha_C : A/C = i_A i^*(C) \longrightarrow C$$

est un foncteur asphérique (en particulier, une équivalence faible). En outre, le foncteur i^* respecte les équivalences faibles (on a même l'égalité $(i^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}}) = \mathcal{W}$), et le foncteur induit

$$\bar{i}^* : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}$$

est une équivalence de catégories, quasi-inverse du foncteur

$$\bar{i}_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} \ .$$

Démonstration. — Voir [**96**, théorème 1.7.13] pour l'équivalence des conditions (i) à (iv). Les autres assertions sont démontrées par [**96**, proposition 1.7.6 (d) et corollaire 1.7.10]. □

Remarque 4.1.27. — Nous n'utiliserons pas ce fait par la suite, mais le théorème précédent reste vrai pour un foncteur test général si l'on retire les conditions (ii) et (iv). En particulier, tout foncteur test i induit un quasi-inverse du foncteur $\bar{i}_A$.

Exemple 4.1.28. — Soit A une petite catégorie. Alors A est une catégorie test locale si et seulement si le foncteur

$$A \longrightarrow \mathit{Cat} \quad , \qquad a \longmapsto A/a$$

est un foncteur test local.

Exemple 4.1.29. — Soit $i : \Delta \longrightarrow \mathit{Cat}$ le foncteur d'inclusion (où Δ désigne la catégorie des simplexes). Alors on démontre grâce au critère (iv) du théorème 4.1.26 que i est un foncteur test (voir [**96**, exemple 1.7.18]). Or dans ce cas le foncteur

$$i^* : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

n'est autre que le foncteur nerf (2.1.14). On retrouve ainsi formellement que le foncteur nerf induit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux et la catégorie homotopique des petites catégories.

4.2. Modélisateurs élémentaires

4.2.1. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On rappelle que pour chaque petite catégorie I, on note $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$ la localisation de la catégorie des foncteurs de I vers Cat par la classe des $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument (cf. 3.3.17). Lorsque I est la catégorie ponctuelle, cette localisation est notée plus simplement $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$. Si A est une petite catégorie, $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ désigne la classe de flèches $i_A^{-1}\mathcal{W}$ (cf. 4.1.3).

Lemme 4.2.2. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Pour toute petite catégorie A, la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ de flèches de $\widehat{A}$ vérifie l'axiome L3 des A-localisateurs (cf. définition 1.4.1).*

Démonstration. — Cela résulte de [**96**, corollaires 2.3.12 et 2.3.17]. □

Proposition 4.2.3. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Pour qu'une petite catégorie A soit une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, il faut et il suffit que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit un A-localisateur.*

Démonstration. — Puisque $\mathcal{W}$ est par définition une classe de flèches faiblement saturée, il est immédiat que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est faiblement saturé. Par conséquent, $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ vérifie en particulier l'axiome L1 de la définition 1.4.1. Le lemme 4.2.2 et la caractérisation (*iv*) du théorème 4.1.19 permettent donc de conclure. □

Proposition 4.2.4. — *Tout localisateur fondamental est fortement saturé, et donc, en particulier, est stable par rétractes.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On choisit une $\mathcal{W}$-catégorie test A (voir les exemples 4.1.20 et 4.1.21). Alors un morphisme de Cat est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si son image par i_A^* est une $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{A}$, et l'assertion résulte donc du corollaire 1.4.7 et de la proposition 4.2.3. □

4.2.5. — Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une petite catégorie. Pour chaque petite catégorie I, on note $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}(I)$ la localisation de la catégorie des foncteurs de I vers $\widehat{A}$ par la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}}^I$ des $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalences argument par argument, *i.e.* pour reprendre les notations du chapitre précédent, $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}(I) = \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}_{\widehat{A}}}\,\widehat{A}(I)$. Lorsque I est la catégorie ponctuelle, cette localisation est notée plus simplement $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}$.

Corollaire 4.2.6. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Le foncteur $\bar{\imath}_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est conservatif.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de la forte saturation de $\mathcal{W}$ et du lemme 1.4.8. □

Proposition 4.2.7. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Alors les foncteurs i_A et i_A^* induisent, pour toute petite catégorie I, un couple de foncteurs adjoints*

$$\bar{\imath}_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \qquad \textit{et} \qquad \bar{\imath}_A^* : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}(I)\ .$$

En outre, pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on a un isomorphisme de foncteurs canonique

$$\mathbf{L}u_! \, \bar{\imath}_A \xrightarrow{\sim} \bar{\imath}_A \mathbf{L}u_! \ .$$

Autrement dit, le carré suivant est commutatif à isomorphisme près.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) & \xrightarrow{\bar{\imath}_A} & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \\ {\scriptstyle \mathbf{L}u_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}u_!} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) & \xrightarrow[\bar{\imath}_A]{} & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(J) \end{array}$$

*Enfin, lorsque A est $\mathcal{W}$-asphérique (*i.e. *une $\mathcal{W}$-catégorie test), les foncteurs $\bar{\imath}_A$ et $\bar{\imath}_A^*$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.*

Démonstration. — La première assertion résulte du fait que les foncteurs i_A et i_A^* respectent les $\mathcal{W}$-équivalences (toute $\mathcal{W}$-équivalence locale étant une $\mathcal{W}$-équivalence en vertu de la remarque 4.1.5, cela résulte de la caractérisation (*iv*) de la proposition 4.1.14) et de la 2-fonctorialité de la localisation (voir par exemple [**96**, lemme 2.1.6]). La deuxième est conséquence de la première, puisque $\mathbf{L}u_! \, \bar{\imath}_A$ et $\bar{\imath}_A \, \mathbf{L}u_!$ sont tous deux des adjoints à gauche de $\bar{\imath}_A^* u^* = u^* \bar{\imath}_A^*$ (voir 3.3.18 et la proposition 3.1.26). Enfin, la troisième résulte du fait que dans ce cas, $i_A i_A^* \longrightarrow 1_{Cat}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, et $1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$ une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence (voir la remarque 4.1.11). □

Lemme 4.2.8. — *Soient A une petite catégorie, et X un préfaisceau sur A. On désigne par φ_X le foncteur de A/X dans $\widehat{A}$, $(a, a \longrightarrow X) \longmapsto a$. Alors le foncteur canonique*

$$\textstyle\int_{A/X} i_A \varphi_X \longrightarrow \varinjlim_{A/X} i_A \varphi_X \simeq i_A X$$

est une fibration dont les fibres sont des catégories admettant un objet initial.

Démonstration. — Le fait qu'il s'agit d'une fibration est un cas particulier de la proposition 3.3.15. D'autre part, si $s = (a, a \longrightarrow X)$ est un objet de $A/X = i_A X$, alors la fibre de ce foncteur au-dessus de s est canoniquement isomorphe à la catégorie $s\backslash(A/X)$, laquelle admet évidemment un objet initial. □

Proposition 4.2.9. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Pour toute $\mathcal{W}$-catégorie test locale A, $\mathsf{W} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est un A-localisateur régulier.*

Démonstration. — La proposition 4.2.3 implique que si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, alors W est un A-localisateur. Il suffit donc de vérifier la régularité de W. Considérons une petite catégorie I, et un foncteur F de I vers $\widehat{A}$. Le foncteur canonique K de $\int i_A F$ vers $\varinjlim i_A F$ (3.3.14) correspond dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ au morphisme obtenu par adjonction à partir du morphisme $i_A F \longrightarrow p_I^* \varinjlim i_A F$ dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$. En vertu de la proposition 4.2.7, K est donc isomorphe dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ à l'image par le foncteur $\bar{\imath}_A$

du morphisme canonique $\mathbf{L}\varinjlim F \longrightarrow \varinjlim F$. Grâce au corollaire 4.2.6, il suffit par conséquent de montrer que pour tout préfaisceau X sur A, le foncteur canonique

$$K : \int i_A \varphi_X \longrightarrow \varinjlim i_A \varphi_X \simeq A/X$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence. Or en vertu de la proposition 3.3.15 et du lemme 4.2.8, K est une fibration à fibres asphériques, et donc K est une équivalence faible (voir la remarque 3.3.12). Cela achève la démonstration. □

Définition 4.2.10. — Si S est une partie de $\mathrm{Fl}\,\boldsymbol{Cat}$, on rappelle que le *localisateur fondamental engendré par* S est le plus petit localisateur fondamental $\mathcal{W}$ contenant S (*i.e.* l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux contenant S). On dit alors que S *engendre* $\mathcal{W}$. Un localisateur fondamental est *accessible* s'il est engendré par un *ensemble* de flèches de $\boldsymbol{Cat}$. Le *localisateur fondamental minimal* est le localisateur fondamental engendré par $\varnothing \subset \mathrm{Fl}\,\boldsymbol{Cat}$ (il est par définition accessible).

Définition 4.2.11. — Soit A une petite catégorie.

Un *A-localisateur test* est un A-localisateur régulier W tel que pour tout préfaisceau représentable a sur A, le morphisme canonique de a vers l'objet final de $\widehat{A}$ soit une W-équivalence.

Un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est *modelable par* une petite catégorie A si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test.

Remarque 4.2.12. — Si S est un *ensemble* de flèches de $\widehat{A}$, alors le A-localisateur test engendré par S est accessible. En effet, il est la complétion régulière du A-localisateur engendré par S et par l'ensemble des morphismes $a \longrightarrow e_{\widehat{A}}$, $a \in \mathrm{Ob}\,A$, ce qui implique l'assertion en vertu du corollaire 3.4.24. De même, si S est un *ensemble* de flèches de $\boldsymbol{Cat}$, le localisateur fondamental modelable par A engendré par S est accessible, puisqu'il est le localisateur fondamental engendré par S et par les foncteurs $A \longrightarrow e$ et $i_A(a \times i_A^* \Delta_1) \longrightarrow e$, $a \in \mathrm{Ob}\,A$ (cf. le théorème 4.1.19).

Lemme 4.2.13. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur test. Un foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$ est une W-équivalence si et seulement si le morphisme canonique $\mathbf{L}p_{I!}\, p_I^*(e_{\widehat{A}}) \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}\, p_J^*(e_{\widehat{A}})$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$.*

Démonstration. — Les morphismes $a \longrightarrow e_{\widehat{A}}$, $a \in \mathrm{Ob}\,A$, sont des W-équivalences, et donc pour toute petite catégorie I, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{L}p_{I!}\, p_I^*(a) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}p_{I!}\, p_I^*(e_{\widehat{A}})\ .$$

Ce lemme résulte donc de la proposition 3.4.45. □

Lemme 4.2.14. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur test. Pour tout objet X de $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$, on a un isomorphisme naturel dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$,*

$$\mathbf{L}p_{A/X\,!}\, p_{A/X}^*(e_{\widehat{A}}) \simeq X\ .$$

En outre, on a l'égalité $\mathsf{W} = i_A^{-1}\mathsf{W}_{\boldsymbol{Cat}}$, et A est W-asphérique.

Démonstration. — Soit X un préfaisceau sur A. On a alors par régularité un isomorphisme canonique $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_X \simeq X$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}$. D'autre part, si $P = p^*_{A/X}(e_{\widehat{A}})$ désigne le foncteur constant sur A/X de valeur l'objet final de $\widehat{A}$, les flèches $a \longrightarrow e_{\widehat{A}}$, $a \in \mathrm{Ob}\, A$, étant des W-équivalences, on a un isomorphisme $\varphi_X \simeq P$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}} \widehat{A}(A/X)$. On en déduit par fonctorialité un isomorphisme $\mathbf{L}\varinjlim \varphi_X \simeq \mathbf{L}\varinjlim P$. Or $\mathbf{L}\varinjlim P$ s'identifie par définition à $\mathbf{L}p_{A/X\,!}\, p^*_{A/X}(e_{\widehat{A}})$, d'où un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}p_{A/X\,!}\, p^*_{A/X}(e_{\widehat{A}}) \simeq X \ .$$

Le lemme précédent, vue la forte saturation de W, montre donc que $\mathsf{W} = i_A^{-1}\mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$. Il implique aussi que A est W-asphérique, une fois remarqué qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{L}p_{A\,!}\, p^*_A(e_{\widehat{A}}) \simeq \mathbf{L}p_{A/e_{\widehat{A}}\,!}\, p^*_{A/e_{\widehat{A}}}(e_{\widehat{A}}) \simeq e_{\widehat{A}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{L}p_{e\,!}\, p^*_e(e_{\widehat{A}}) \simeq e_{\widehat{A}} \ ,$$

où e désigne la catégorie ponctuelle. □

Théorème 4.2.15. — *Soit A une petite catégorie. L'application $\mathsf{W} \longmapsto \mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$ (3.4.1) établit une bijection croissante pour l'inclusion, entre l'ensemble des A-localisateurs test et celui des localisateurs fondamentaux modelables par A, l'application inverse étant définie par $\mathcal{W} \longmapsto \mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$. En outre, cette correspondance conserve l'accessibilité dans le sens où un localisateur fondamental modelable par A est accessible si et seulement si le A-localisateur (test) correspondant l'est.*

Démonstration. — Soit W un A-localisateur test. Alors en vertu de la proposition 3.4.3, $\mathcal{W} = \mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$ est un localisateur fondamental, et en vertu du lemme 4.2.14, A est $\mathcal{W}$-asphérique et $\mathsf{W} = i_A^{-1}\mathcal{W}$. La proposition 4.2.3 implique donc que A est une $\mathcal{W}$-catégorie test, ce qui montre que l'application est bien définie et injective. Pour prouver la surjectivité, considérons un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ modelable par A, et posons $\mathsf{W} = \mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$. Les propositions 4.2.3 et 4.2.9, ainsi que la $\mathcal{W}$-asphéricité de A, impliquent que W est un A-localisateur test. En vertu de ce qui précède, on a $\mathsf{W} = i_A^{-1}\mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$, et la $\mathcal{W}$-catégorie test A est une $\mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$-catégorie test (et en particulier test faible). On a donc les égalités $\mathcal{W} = (i_A^*)^{-1}\mathsf{W} = \mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$. L'assertion relative à l'accessibilité s'en déduit alors formellement grâce à la remarque 4.2.12. □

Remarque 4.2.16. — Il résulte immédiatement du théorème ci-dessus que pour toute petite catégorie A, et tout A-localisateur test W, on a $\mathsf{W}_{\mathit{Cat}} = (i_A^*)^{-1}\mathsf{W}$ (et plus généralement, en vertu du théorème 4.1.26, que pour tout $\mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$-foncteur test $i : A \longrightarrow \mathit{Cat}$ tel que ia admette un objet final, on a $\mathsf{W}_{\mathit{Cat}} = (i^*)^{-1}\mathsf{W}$). Ainsi, si $\mathcal{W}$ est le localisateur modelable par A engendré par une classe S de flèches de Cat, $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est le A-localisateur test engendré par la classe i_A^*S (ou la classe i^*S, si i est un $\mathcal{W}$-foncteur test comme ci-dessus), de même que si W est le A-localisateur test engendré par une classe S de flèches de $\widehat{A}$, $\mathsf{W}_{\mathit{Cat}}$ est le localisateur fondamental modelable par A engendré par $i_A S$.

Scholie 4.2.17. — Il résulte du théorème 4.2.15 qu'en admettant le principe de Voŏpenka, *tout* localisateur fondamental est accessible (voir le scholie 1.4.6).

Corollaire 4.2.18. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Alors $\widehat{A}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$.*

Démonstration. — En vertu du théorème 1.4.3, il suffit de montrer que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est un A-localisateur accessible. Lorsque A est une $\mathcal{W}$-catégorie test, cela résulte du théorème 4.2.15. Dans le cas général, on choisit une $\mathcal{W}$-catégorie test B (par exemple B peut être une petite catégorie équivalente à la catégorie des ensembles ordonnés finis non vides, ou bien la catégorie des simplexes), et un $\mathcal{W}$-foncteur test $i : B \longrightarrow \boldsymbol{Cat}$ tel que pour tout $b \in \mathrm{Ob}\, B$, $i(b)$ admette un objet final (par exemple simplement le foncteur $b \longmapsto B/b$). En vertu du corollaire 3.2.10, le foncteur composé $i^*\, i_A : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes. Comme i est un foncteur test, on vérifie immédiatement que $i_A^{-1}(i^*)^{-1}\mathcal{W}_{\widehat{B}} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il résulte de la proposition 4.2.3 que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est un A-localisateur, et le critère (c) de la proposition 1.4.20 appliqué au foncteur $i^*\, i_A$ achève ainsi la démonstration. □

Lorsque $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, on dira parfois qu'une flèche de $\widehat{A}$ est une *$\mathcal{W}$-fibration* (resp. une *$\mathcal{W}$-cofibration triviale*, *etc.*), ou une *fibration* (resp. une *cofibration triviale*, *etc.*) *au sens de $\mathcal{W}$*, pour signifier qu'elle est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-fibration (resp. une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-cofibration triviale, *etc.*), autrement dit, qu'elle est une fibration (resp. une cofibration triviale, *etc.*) pour la structure de catégorie de modèles fermée du corollaire ci-dessus.

Corollaire 4.2.19. — *Le localisateur fondamental minimal est formé des morphismes de $\boldsymbol{Cat}$ dont l'image par le foncteur nerf $N : \boldsymbol{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ est une ∞-équivalence.*

Démonstration. — La catégorie des simplexes Δ est une $\mathcal{W}$-catégorie test pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ (voir l'exemple 4.1.21). Il résulte donc du théorème 4.2.15, que le localisateur fondamental minimal correspond au Δ-localisateur test minimal. Or tout Δ-localisateur est régulier (cf. 3.4.25), et par suite le corollaire 2.1.21 montre que W_∞ est le Δ-localisateur test minimal. Pour conclure, il suffit donc de remarquer que l'inclusion canonique de Δ dans $\boldsymbol{Cat}$ est un foncteur test (cf. 4.1.29) et de lui appliquer les dernières assertions du théorème 4.1.26. □

4.2.20. — On notera $\mathcal{W}_\infty$ le localisateur fondamental minimal, et les $\mathcal{W}_\infty$-équivalences seront appelées aussi des *∞-équivalences*. On emploiera volontier les adjectifs *∞-asphérique*, *∞-coasphérique*, *etc.*, au lieu de $\mathcal{W}_\infty$-asphérique, $\mathcal{W}_\infty$-coasphérique *etc.* On note $\mathbf{Hot}_\infty$ la localisation de $\boldsymbol{Cat}$ par les ∞-équivalences. Il résulte du corollaire 4.2.19 que $\mathbf{Hot}_\infty$ est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{\Delta} = \mathbf{Ho}_{\mathsf{W}_\infty}\widehat{\Delta}$. Plus généralement, pour toute petite catégorie A, tout

A-localisateur test acccessible W définit canoniquement une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hot}_\infty$. De façon plus précise on a l'énoncé ci-dessous. (Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite, et nous en laissons la démonstration au lecteur.)

Corollaire 4.2.21. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur test accessible. La catégorie $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$ s'identifie canoniquement à la localisation de $\mathbf{Hot}_\infty$ par les W-équivalences, et le foncteur de localisation de $\mathbf{Hot}_\infty$ vers $\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$ admet un adjoint à droite pleinement fidèle.*

Corollaire 4.2.22. — *Tout localisateur fondamental est stable par limites inductives filtrantes.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Comme l'inclusion canonique de la catégorie des simplexes Δ dans Cat est un $\mathcal{W}$-foncteur test (4.1.29), on a l'égalité $\mathcal{W} = N^{-1}\, i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ (4.1.26). Or en vertu de la proposition 4.2.9, $i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ est un Δ-localisateur régulier, et donc le corollaire 3.4.41 implique qu'il est stable par limites inductives filtrantes. L'assertion résulte donc de la commutativité du foncteur nerf aux petites limites inductives filtrantes. □

Proposition 4.2.23. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. On remarque que pour chaque préfaisceau X sur B, on a un carré cartésien canonique de la forme suivante dans Cat (dont les flèches horizontales sont les flèches canoniques, cf. 3.2.7).*

$$\begin{array}{ccc} A/u^*(X) & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow u \\ B/X & \longrightarrow & B \end{array}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) *Le foncteur u est $\mathcal{W}$-asphérique.*

(b) *Pour qu'un préfaisceau X sur B soit $\mathcal{W}$-asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $u^*(X)$ sur A soit asphérique.*

(b′) *Si X est un préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique sur B, alors $u^*(X)$ est un préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique sur A.*

(b″) *Pour tout objet b de B, le préfaisceau $u^*(b)$ sur A est $\mathcal{W}$-asphérique.*

(c) *Pour tout préfaisceau X sur B, le foncteur canonique $A/u^*(X) \longrightarrow B/X$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(c′) *Pour tout préfaisceau X sur B, le foncteur $A/u^*(X) \longrightarrow B/X$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*

(c″) *Pour tout objet b de B, le foncteur $A/u^*(b) \longrightarrow B/b$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Si ces conditions sont satisfaites, on a alors la propriété suivante.

(d) *Pour qu'un morphisme φ de $\widehat{B}$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence, il faut et il suffit que $u^*(\varphi)$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{A}$.*

De plus, si A et B sont $\mathcal{W}$-asphériques, les conditions (a) *à* (d) *sont équivalentes, et équivalentes à la condition ci-dessous.*

(d′) *Si φ est une $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{B}$, alors $u^*(\varphi)$ est une $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 1.2.9]. □

Proposition 4.2.24. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur $\mathcal{W}$-asphérique entre deux $\mathcal{W}$-catégories test. Alors le couple de foncteurs adjoints*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A} \quad et \quad u_* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$$

est une équivalence de Quillen.

Démonstration. — En vertu de l'assertion (d) de la proposition 4.2.23, le foncteur u^* respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, et il est immédiat qu'il respecte les monomorphismes, ce qui prouve qu'on a une adjonction de Quillen. Il reste donc à montrer que le foncteur u^* induit une équivalence de catégories entre les catégories homotopiques. Or en vertu de l'assertion (c) de la proposition 4.2.23, on a une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle du foncteur $i_A u^*$ vers le foncteur i_B. On obtient donc un triangle commutatif à isomorphisme de foncteurs près

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{B} & \xrightarrow{\quad u^* \quad} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} \\ & {\scriptstyle \bar{i}_B} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \bar{i}_A} & \\ & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} & \end{array}$$

dont les deux flèches obliques sont des équivalences de catégories (puisque A et B sont des catégories test), ce qui achève la démonstration. □

Remarque 4.2.25. — On verra plus loin que cet énoncé reste vrai si on suppose seulement que A et B sont des $\mathcal{W}$-catégories test locales.

Proposition 4.2.26. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A, B une paire de $\mathcal{W}$-catégories test. Alors le foncteur*

$$i_B^* \, i_A : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$$

est un foncteur de Quillen à gauche.

Démonstration. — En vertu du corollaire 3.2.10, ce foncteur commute aux petites limites inductives, et donc admet un adjoint à droite. Il est d'autre part immédiat qu'il respecte les monomorphismes et les équivalences faibles. Enfin, comme A et B sont des $\mathcal{W}$-catégories test, il induit une équivalence des catégories homotopiques. □

Remarque 4.2.27. — La preuve ci-dessus montre plus généralement que pour tout foncteur test $i : B \longrightarrow \mathbf{Cat}$ tel que pour tout objet b de B, la catégorie $i(b)$ admette un objet final, le foncteur $i^* i_A : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ est l'adjoint à gauche d'une équivalence de Quillen.

4.3. Ubiquité de la propreté

4.3.1. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On dit qu'une petite catégorie A est *totalement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement, *totalement asphérique*, si elle est $\mathcal{W}$-asphérique, et si pour tous préfaisceaux représentables a et b sur A, le préfaisceau $a \times b$ est $\mathcal{W}$-asphérique (ce qui signifie simplement que la catégorie $A/a \times b$ est $\mathcal{W}$-asphérique).

Proposition 4.3.2. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tous préfaisceaux représentables a et b sur A, le préfaisceau $a \times b$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*

(b) *Les préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A sont stables par produits finis.*

(c) *Pour tous préfaisceaux X et Y sur A, le foncteur canonique*

$$A/(X \times Y) \longrightarrow A/X \times A/Y$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\mathbf{Cat}$.

(d) *Pour tous préfaisceaux X et Y sur A, le foncteur canonique*

$$A/(X \times Y) \longrightarrow A/X \times A/Y$$

est $\mathcal{W}$-asphérique.

(e) *Tout préfaisceau représentable sur A est localement $\mathcal{W}$-asphérique.*

(f) *Le foncteur diagonal $A \longrightarrow A \times A$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*

(g) *Les $\mathcal{W}$-équivalences de préfaisceaux sur A sont stables par produits finis.*

Si en outre A est non vide, chacune de ces conditions implique que A est une catégorie $\mathcal{W}$-asphérique (et donc que A est totalement $\mathcal{W}$-asphérique).

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 1.6.1] pour la preuve de l'équivalence entre les six premières conditions et pour la preuve du fait que chacune d'entre elles implique que A est $\mathcal{W}$-asphérique. L'équivalence entre les conditions (c) et (g) résulte trivialement du fait que $\mathcal{W}$ est stable par produits finis (cf. 3.3.8). □

4.3.3. — Une *$\mathcal{W}$-catégorie test stricte*, ou plus simplement, une *catégorie test stricte*, est une $\mathcal{W}$-catégorie test qui est aussi totalement $\mathcal{W}$-asphérique.

Proposition 4.3.4. — *Soit A une petite catégorie totalement $\mathcal{W}$-asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La catégorie A est une $\mathcal{W}$-catégorie test faible.*

(ii) *La catégorie A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale.*
(iii) *La catégorie A est une $\mathcal{W}$-catégorie test.*
(iv) *La catégorie A est une $\mathcal{W}$-catégorie test stricte.*
(v) *Il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ tel que I soit $\mathcal{W}$-asphérique.*
(vi) *L'objet de Lawvere de $\widehat{A}$ est un préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 1.6.8]. □

Exemple 4.3.5. — Toute catégorie test vérifiant les conditions de l'exemple 4.1.20 est une $\mathcal{W}$-catégorie test stricte.

Exemple 4.3.6. — La catégorie des simplexes Δ est une $\mathcal{W}$-catégorie test stricte.

4.3.7. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On considère deux petites catégories A et B, on note

$$A \xleftarrow{p} A \times B \xrightarrow{q} B$$

les projections, et on désigne par

$$\widehat{A} \xrightarrow{p^*} \widehat{A \times B} \xleftarrow{q^*} \widehat{B}$$

les foncteurs image inverse correspondants.

Lemme 4.3.8. — *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\widehat{A \times B}$. Si pour tout objet b de B, $\varphi_b : X_b \longrightarrow Y_b$ est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\widehat{A}$, alors le morphisme φ est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\widehat{A \times B}$.*

Démonstration. — Si Z est un préfaisceau sur $A \times B$, alors $i_{A\times B}Z$ est une catégorie fibrée au-dessus de $A \times B$, et donc au-dessus de B (par la projection de $A \times B$ vers B). D'autre part, pour chaque objet b de B, $i_A Z_b$ s'identifie canoniquement à la fibre en b du foncteur $i_{A\times B}Z \longrightarrow B$. Comme ce dernier est une fibration, le lemme résulte de la proposition 3.3.16. □

Lemme 4.3.9. — *Si la catégorie B n'est pas vide, un morphisme de $\widehat{A}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si son image dans $\widehat{A \times B}$ par le foncteur p^* en est une.*

Démonstration. — Si X est un préfaisceau sur A, on a une identification canonique

$$i_{A\times B}\, p^* X \simeq i_A X \times B \ .$$

Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\widehat{A}$. En vertu du lemme précédent, si φ est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors $p^*\varphi$ en est une. Réciproquement, si $p^*\varphi$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, comme tout choix d'un objet de B fait de $i_A\varphi$ un rétracte de $i_{A\times B}\, p^*\varphi = i_A\varphi \times 1_B$, il résulte de la stabilité de $\mathcal{W}$ par rétractes (proposition 4.2.4) que $i_A\varphi$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. □

4.3.10. — On garde les hypothèses et les notations du numéro 4.3.7. On suppose en outre que B est non vide, et qu'il existe un préfaisceau localement $\mathcal{W}$-asphérique I sur B admettant une structure de segment séparant, et tel que tout objet de B soit I-contractile. Les objets I-contractiles étant stables par produits finis, la catégorie B est totalement $\mathcal{W}$-asphérique, et donc, en vertu de la proposition 4.3.4, B est sous ces hypothèses une $\mathcal{W}$-catégorie test stricte. On considère par ailleurs un foncteur i de A à valeurs dans $\widehat{B}$, et on note

$$i^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad X \longmapsto (a \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(ia, X))$$

le foncteur image inverse correspondant. On suppose que le foncteur i vérifie les conditions suivantes :

(a) le préfaisceau i^*I est localement $\mathcal{W}$-asphérique ;
(b) pour tout objet a de A, ia est I-contractile.

On remarque qu'en vertu de la condition (b), pour tout objet a de A, le préfaisceau ia admet une section globale, ce qui implique en particulier que l'image par le foncteur i^* du préfaisceau vide sur B est le préfaisceau vide sur A. Comme le foncteur i^* commute aux petites limites projectives, on en déduit que la condition (b) implique que i^*I admet une structure de segment séparant. Il résulte donc du théorème 4.1.19 que la condition (a) implique que la catégorie A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale.

On définit un foncteur

$$j : A \times B \longrightarrow \widehat{B}$$

par $j(a, b) = ia \times b$, d'où un foncteur image inverse

$$j^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A \times B} \quad , \qquad X \longmapsto \big((a, b) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(ia \times b, X)\big) \ .$$

On obtient deux morphismes de foncteurs induits par les projections $ia \times b \longrightarrow ia$ et $ia \times b \longrightarrow b$

$$p^*i^* \longrightarrow j^* \longleftarrow q^* \ . \tag{4.3.10.1}$$

Lemme 4.3.11. — *Les deux morphismes de 4.3.10.1 sont des $\mathcal{W}$-équivalences naturelles.*

Démonstration. — On va procéder en adaptant (une partie de) la démonstration de la proposition 2.3.19. Soit X un préfaisceau sur B. Si $a \in \mathrm{Ob}\, A$, alors en vertu du lemme 2.3.18, le morphisme

$$(q^*X)_a = X \longrightarrow \mathcal{H}om(ia, X) = (j^*X)_a$$

est une I-équivalence d'homotopie, et si $b \in \mathrm{Ob}\, B$, comme le foncteur i^* commute aux produits, le même lemme implique que

$$(p^*i^*X)_b = i^*X \longrightarrow i^*\,\mathcal{H}om(b, X) = (j^*X)_b$$

est une i^*I-équivalence d'homotopie. Le lemme 4.3.8 achève ainsi la preuve. □

Proposition 4.3.12. — *Sous les hypothèses du numéro 4.3.10, le foncteur image inverse* $i^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ *respecte les* $\mathcal{W}$*-équivalences. Si en outre* A *est non vide, alors on a l'égalité* $(i^*)^{-1}\mathcal{W}_{\widehat{A}} = \mathcal{W}_{\widehat{B}}$.

Démonstration. — Cela résulte des lemmes 4.3.8, 4.3.9 et 4.3.11. □

4.3.13. — Soit A une petite catégorie. On a un foncteur $A \longrightarrow \widehat{\Delta}$ défini par $a \longmapsto N\,A/a$, et on note par abus

$$i_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$$

le foncteur image inverse correspondant. Il résulte du corollaire 3.2.10 que ce dernier est un adjoint à droite du foncteur

$$N\,i_A : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{\Delta}\ .$$

Cet abus de notation et la pleine fidélité du foncteur nerf permettent d'écrire pour toute petite catégorie C, $i_A^* C = i_A^*\,N\,C$.

Corollaire 4.3.14. — *Soit* $\mathcal{W}$ *un localisateur fondamental. Pour toute* $\mathcal{W}$*-catégorie test locale* A*, le foncteur* $i_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ *respecte les* $\mathcal{W}$*-équivalences. Si en outre* A *n'est pas vide ou bien est une* $\mathcal{W}$*-catégorie test, alors* $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = {i_A^*}^{-1}\mathcal{W}_{\widehat{A}}$.

Démonstration. — Les conditions décrites dans le paragraphe 4.3.10 sont vérifiées en posant $B = \Delta$, $I = \Delta_1$, et $ia = N\,A/a$. La proposition 4.3.12 montre donc la première assertion, ainsi que la seconde dans le cas où A n'est pas vide. Si A est une catégorie test vide, alors $\mathcal{W} = \mathrm{Fl}(\mathit{Cat})$ (cf. 3.3.6), et l'énoncé est alors trivial. □

Corollaire 4.3.15. — *Soit* $\mathcal{W}$ *un localisateur fondamental. Pour toute* $\mathcal{W}$*-catégorie test locale* A*, et pour tout préfaisceau* X *sur* A*, le foncteur*

$$X \times i_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad K \longmapsto X \times i_A^* K$$

respecte les $\mathcal{W}$*-équivalences.*

Démonstration. — Le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \widehat{A}/X = \widehat{A/X} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, et pour tout ensemble simplicial K, on a l'égalité $\mathcal{U} i_{A/X}^* K = X \times i_A^* K$, ce qui permet de conclure en vertu du corollaire précédent. □

Proposition 4.3.16. — *Il existe deux* ∞*-équivalences naturelles*

$$N\,i_\Delta \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}} \quad \textit{et} \quad 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow i_\Delta^*\ .$$

Démonstration. — On va à nouveau s'inspirer de la preuve de la proposition 2.3.19. On considère cette fois le plongement de Yoneda de Δ dans $\widehat{\Delta}$, le foncteur

$$\Delta \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad , \qquad \Delta_n \longmapsto N\,\Delta/\Delta_n\ ,$$

et le foncteur

$$j : \Delta \times \Delta \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad , \qquad (\Delta_m, \Delta_n) \longmapsto (N\,\Delta/\Delta_m) \times \Delta_n\ .$$

On a un morphisme fonctoriel $N\,\Delta/\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ (3.2.4), ce qui détermine en le prolongeant par limites inductives (grâce au corollaire 3.2.10) un morphisme de foncteurs $N\,i_\Delta \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$, et donc par adjonction un morphisme de foncteurs $1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow i_\Delta^*$. En vertu du lemme 4.3.11, si δ_* désigne l'adjoint à droite du foncteur diagonal, il existe un diagramme commutatif dans $\widehat{\Delta \times \Delta}$

$$\begin{array}{ccccc} p^* & \longrightarrow & \delta_* & \longleftarrow & q^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ p^* i_\Delta^* & \longrightarrow & j^* & \longleftarrow & q^* \end{array} \quad ,$$

dont toutes les flèches horizontales sont des ∞-équivalences. Le lemme 4.3.9 implique donc que le morphisme de foncteurs $1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow i_\Delta^*$ est une ∞-équivalence. Comme les deux foncteurs $N\,i_\Delta$ et i_Δ^* respectent les ∞-équivalences (4.3.14), et induisent des équivalences de catégories de la catégorie localisée (4.2.27), on en déduit par transposition que $N\,i_\Delta \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ est une ∞-équivalence. □

Lemme 4.3.17. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Pour tout ensemble simplicial K, le foncteur*

$$\widehat{A} \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad X \longmapsto X \times i_A^* K$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences.

Démonstration. — On considère d'abord le cas où K est le nerf d'une petite catégorie C. Si on demande en outre que C admette un objet final, l'assertion résulte de la proposition 4.1.14. Dans le cas général, pour chaque préfaisceau X sur A, la projection de $X \times i_A^* C$ vers $i_A^* C$ et le morphisme d'adjonction $i_A i_A^* C \longrightarrow C$ permettent de voir $i_A(X \times i_A^* C)$ comme une catégorie au-dessus de C. Pour chaque objet c de C, on a alors une identification canonique

$$i_A(X \times i_A^* C)/c \simeq i_A(X \times i_A^* C/c) \ .$$

On en déduit que si φ est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\widehat{A}$, alors le foncteur $i_A(\varphi \times 1_{i_A^* C})$ est une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de C, et donc une $\mathcal{W}$-équivalence. On suppose à présent que K est un ensemble simplicial quelconque. En vertu de la proposition 4.3.16, on a une $\mathcal{W}$-équivalence $N\,i_\Delta K \longrightarrow K$, et il résulte du corollaire 4.3.15 que pour chaque préfaisceau X sur A, le morphisme induit $X \times i_A^* i_\Delta K \longrightarrow X \times i_A^* K$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Comme en vertu de ce qui précède le foncteur $X \longmapsto X \times i_A^* i_\Delta K$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, on en déduit que le foncteur $X \longmapsto X \times i_A^* K$ les respecte aussi, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.3.18. — *Soient A une petite catégorie, et W un A-localisateur test accessible. Pour tout objet X de $\widehat{A}$ fibrant au sens de W, le foncteur $Y \longmapsto X \times Y$, $Y \in \mathrm{Ob}\,\widehat{A}$, respecte les W-équivalences.*

Démonstration. — Soit X un objet fibrant de $\widehat{A}$ au sens de W. Le théorème 4.2.15 implique que le localisateur fondamental $\mathcal{W} = \mathsf{W}_{Cat}$ est accessible, et comme Δ est une $\mathcal{W}$-catégorie test, que le Δ-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$ est accessible. On peut donc choisir une $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$-équivalence de but fibrant $N\,i_A X \longrightarrow K$. On remarque que le foncteur $N\,i_A$ respecte les cofibrations triviales, et donc que par adjonction, le foncteur i_A^* respecte les fibrations. Par conséquent, $i_A^* K$ est un objet fibrant de $\widehat{A}$ au sens de $\mathsf{W} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Or en vertu du corollaire 4.3.14, le morphisme $i_A^* i_A X \longrightarrow i_A^* K$ est une W-équivalence, et comme A est une $\mathcal{W}$-catégorie test, le morphisme d'adjonction $X \longrightarrow i_A^* i_A X$ est une W-équivalence. Le morphisme composé $X \longrightarrow i_A^* K$ est donc une W-équivalence entre objets fibrants, ce qui implique qu'il est une $i_A^*\Delta_1$-équivalence d'homotopie. On en déduit que pour tout objet Y de $\widehat{A}$, la flèche $Y \times X \longrightarrow Y \times i_A^* K$ est aussi une $i_A^*\Delta_1$-équivalence d'homotopie, et donc une W-équivalence. Le lemme 4.3.17 permet ainsi d'achever la démonstration. □

Théorème 4.3.19. — *Pour toute petite catégorie A, le A-localisateur test minimal est propre.*

Démonstration. — Soient A une petite catégorie, et W le A-localisateur test minimal. En vertu de la remarque 4.2.12, on sait que ce dernier est accessible. Si W_{reg} désigne le A-localisateur régulier minimal (*i.e.* la complétion régulière du A-localisateur minimal), alors W peut être défini comme le A-localisateur engendré par W_{reg} et par les flèches $a \longrightarrow e_{\widehat{A}}$, $a \in \mathrm{Ob}\, A$. Or on sait que W_{reg} est propre (voir la remarque 1.5.5 et le corollaire 3.4.40). Comme toute fibration au sens de W en est une au sens de W_{reg}, il résulte du théorème 1.5.4 qu'il suffit de montrer que pour tout objet a de A, le morphisme $a \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ est une W-équivalence propre à droite, *i.e.* que pour tout objet fibrant X au sens de W, la projection $X \times a \longrightarrow X$ est une W-équivalence, ce qui résulte de la proposition précédente. □

Corollaire 4.3.20. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test. Alors pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme d'adjonction η_X : $X \longrightarrow i_A^* i_A X$ est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence propre à droite.*

Démonstration. — Soit W' le A-localisateur test minimal. Comme $\mathsf{W}' \subset \mathsf{W} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, toute fibration au sens de W en est une au sens de W', et donc toute W'-équivalence propre à droite est une W-équivalence propre à droite. Or η_X est une W'-équivalence puisque A est une W'_{Cat}-catégorie test, et il résulte du théorème ci-dessus que toutes les W'-équivalences sont propres à droite. □

Définition 4.3.21. — Un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est *propre* si pour toute $\mathcal{W}$-catégorie test A, le A-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$ est propre.

Exemple 4.3.22. — En vertu des théorèmes 4.2.15 et 4.3.19, le localisateur fondamental minimal est propre.

Remarque 4.3.23. — Il résulte aussitôt du théorème 4.2.15 que tout localisateur fondamental propre est en particulier accessible.

Théorème 4.3.24. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est propre.*

(ii) *Il existe une $\mathcal{W}$-catégorie test A telle que le A-localisateur induit $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit propre.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe une $\mathcal{W}$-catégorie test A telle que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit un A-localisateur propre, et en particulier donc accessible. En vertu du théorème 4.2.15, le Δ-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est aussi accessible, et on dispose sur $\widehat{A}$ et $\widehat{\Delta}$ les structures de catégorie de modèles fermée du théorème 1.4.3, dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences de $\widehat{A}$ et $\widehat{\Delta}$ respectivement. Le foncteur i_A respecte les $\mathcal{W}$-équivalences par définition, et le foncteur nerf les respecte car l'inclusion canonique de Δ dans Cat est un foncteur test. Il résulte en outre du corollaire 4.3.14 que $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = {i_A^*}^{-1}\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Or le foncteur $N\, i_A$ respecte les cofibrations triviales, et par conséquent, le foncteur i_A^* respecte les fibrations. Ce dernier commute en outre aux petites limites projectives (car il admet un adjoint à gauche), et donc en particulier aux produits fibrés. On en déduit aussitôt que le Δ-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est propre. Il suffit par conséquent de montrer que si $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est propre, alors pour toute catégorie test A, $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre.

On suppose à présent que le Δ-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est propre, et on considère une $\mathcal{W}$-catégorie test A. On va montrer que le A-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre. On sait déjà en vertu du théorème 4.2.15 que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est accessible. On procède en plusieurs étapes.

4.3.24.1. — *Soient X un ensemble simplicial, Y un préfaisceau sur A, $u : Y' \longrightarrow Y$ une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence, et $p : X \longrightarrow N\, i_A Y$ une fibration au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$. Si on forme les carrés cartésiens suivants dans $\widehat{A}$*

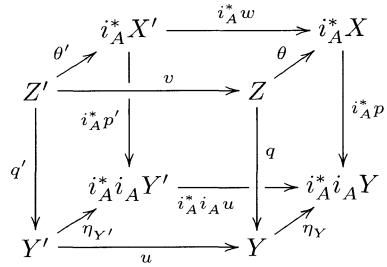
$$\begin{array}{ccccc} Z' & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{\theta} & i_A^* X \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_A^* p} \\ Y' & \xrightarrow[u]{} & Y & \xrightarrow[\eta_Y]{} & i_A^* i_A Y \end{array} \quad ,$$

alors le morphisme v est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence.

On forme le carré cartésien ci-dessous dans $\widehat{\Delta}$.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{w} & X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ N\, i_A Y' & \xrightarrow[N\, i_A u]{} & N\, i_A Y \end{array}$$

Comme p est une fibration au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$, il en est de même de p', et comme $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est propre, w est une $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$-équivalence. On obtient le cube commutatif suivant, dont les faces latérales sont des carrés cartésiens (en fait, il résulte de la proposition 3.2.14 que toutes ses faces sont cartésiennes).



Comme le foncteur i_A^* respecte les fibrations, les morphismes i_A^*p et i_A^*p' sont des fibrations au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il résulte donc du corollaire 4.3.20 que les flèches θ et θ' sont des $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalences. D'autre part, le corollaire 4.3.14 implique que i_A^*w est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence, ce qui prouve l'assertion.

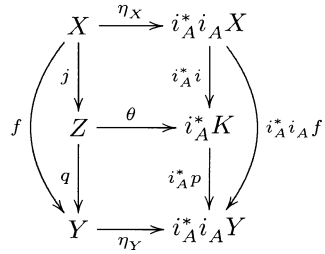
4.3.24.2. — *Toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$ admet une factorisation de la forme $f = qj$, où $j : X \longrightarrow Z$ est une cofibration triviale au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, telle qu'il existe une fibration $p : K \longrightarrow N\,i_AY$ au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$, et un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\theta} & i_A^*K \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_A^*p} \\ Y & \xrightarrow[\eta_Y]{} & i_A^*i_AY \end{array} \quad .$$

On factorise $N\,i_Af$ en une cofibration triviale $i : N\,i_AX \longrightarrow K$ suivie d'une fibration $p : K \longrightarrow N\,i_AY$, et on forme le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\theta} & i_A^*K \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_A^*p} \\ Y & \xrightarrow[\eta_Y]{} & i_A^*i_AY \end{array}$$

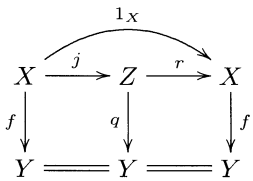
En vertu de la proposition 3.2.14, on obtient le diagramme commutatif ci-dessous, dont tous les carrés sont cartésiens, et dont toutes les flèches horizontales sont des cofibrations (*i.e.* des monomorphismes).



Comme le foncteur i_A^* respecte les monomorphismes, on s'aperçoit aussitôt que j est une cofibration. Le corollaire 4.3.20 implique que les morphismes η_X, η_Y et θ sont des $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalences. Comme le foncteur i_A^* respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, on en déduit que j est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence.

4.3.24.3. — *Le A-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre.*

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fibration au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. On considère une factorisation de f de la forme décrite en 4.3.24.2, dont on reprend les notations. Comme f vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à j, il existe un morphisme $r : Z \longrightarrow X$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.



Considérons à présent une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence $u : Y' \longrightarrow Y$, et formons les carrés cartésiens suivants.

On s'aperçoit immédiatement que par fonctorialité, w est un rétracte de v, et il résulte de 4.3.24.1 que v est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence. Par conséquent, w est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-équivalence. □

Corollaire 4.3.25. — *Soient I un* ensemble, *et $\mathcal{W}_i$, $i \in I$, une famille de localisateurs fondamentaux propres. Alors le localisateur fondamental engendré par $\cup_i \mathcal{W}_i$ est propre.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{W}$ le localisateur fondamental en question. On choisit une petite catégorie A telle que pour tout $i \in I$, A soit une $\mathcal{W}_i$-catégorie test (il suffit pour cela de prendre une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test). Alors en vertu du théorème 4.2.15, $i_A^{-1}\mathcal{W}$ est

le A-localisateur engendré par $\cup_i i_A^{-1}\mathcal{W}_i$. Le théorème ci-dessus et le corollaire 1.5.6 permettent ainsi de conclure. □

4.3.26. — Soit $\mathcal{F}$ une classe de petites catégories. Un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ *trivialise* $\mathcal{F}$ si tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont des catégories $\mathcal{W}$-asphériques. Un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est *à engendrement asphérique* s'il existe une classe $\mathcal{F}$ de petites catégories telle que $\mathcal{W}$ soit le plus petit localisateur fondamental qui trivialise $\mathcal{F}$ (*i.e.* si $\mathcal{W}$ est engendré par les flèches de la forme $C \longrightarrow e$, pour C petite catégorie dans $\mathcal{F}$, ou encore de façon équivalente, s'il est le plus petit localisateur fondamental faisant des éléments de $\mathcal{F}$ des catégories asphériques).

Exemple 4.3.27. — Pour toute petite catégorie A, le localisateur fondamental modelable par A minimal est à engendrement asphérique : c'est le plus petit localisateur fondamental qui trivialise la catégorie A elle même ainsi que les catégories A/X pour tout préfaisceau X de la forme $X = i_A^*\Delta_1 \times a$, $a \in \mathrm{Ob}\, A$.

Corollaire 4.3.28. — *Tout localisateur fondamental accessible et à engendrement asphérique est propre.*

Démonstration. — On choisit une fois pour toutes une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test A. Considérons une classe $\mathcal{F}$ de petites catégories, et $\mathcal{W}$ le plus petit localisateur fondamental qui trivialise $\mathcal{F}$, et supposons que ce dernier est accessible, ce qui implique que $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$ est un A-localisateur accessible (4.2.15). Pour toute petite catégorie C dans $\mathcal{F}$, le préfaisceau i_A^*C est localement $\mathcal{W}$-asphérique (4.1.14). Par conséquent, pour tout préfaisceau X sur A, la projection $X \times i_A^*C \longrightarrow X$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. On en déduit que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est le A-localisateur engendré par celles-ci et par le A-localisateur test minimal (cf. 4.2.16). Comme ce dernier est propre (4.3.19), il résulte du théorème 1.5.4 que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre. Le théorème 4.3.24 achève donc la démonstration. □

Remarque 4.3.29. — On verra plus loin que le corollaire ci-dessus caractérise les localisateurs fondamentaux propres (théorème 6.1.11).

Suivant des méthodes dégagées par Thomason, on va montrer dans le chapitre suivant que pour tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences. On peut en outre démontrer que pour que $\mathcal{W}$ soit propre, il faut et il suffit que ladite structure de catégorie de modèles le soit (cf. 5.2.15), ce qui donne une caractérisation supplémentaire des localisateurs fondamentaux propres.

4.4. Types d'homotopie localement constants

4.4.1. — Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Les foncteurs $N\, i_A$ et i_A^* respectent les $\mathcal{W}$-équivalences (cf. 4.1.26, 4.1.29 et 4.3.14),

et par conséquent induisent pour chaque petite catégorie I, une paire de foncteurs adjoints

$$\overline{N}\bar{\imath}_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(I) \qquad \text{et} \qquad \bar{\imath}_A^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(I) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I) \ .$$

Proposition 4.4.2. — *Le foncteur $\overline{N}\bar{\imath}_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(I)$ est conservatif.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des corollaires 1.4.7 et 1.4.8, de l'égalité $N^{-1}\,\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = \mathcal{W}$ (cf. 4.1.26 et 4.1.29), et de la définition des $\mathcal{W}$-équivalences dans $\widehat{A}$. □

Proposition 4.4.3. — *Pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on a un isomorphisme canonique dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(J)$*

$$\mathbf{L}u_!\overline{N}\bar{\imath}_A \simeq \overline{N}\bar{\imath}_A\,\mathbf{L}u_! \ .$$

Autrement dit, le carré ci-dessous est commutatif à isomorphisme de foncteurs près.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I) & \xrightarrow{\overline{N}\bar{\imath}_A} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(I) \\ {\scriptstyle \mathbf{L}u_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}u_!} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(J) & \xrightarrow[\overline{N}\bar{\imath}_A]{} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(J) \end{array}$$

Démonstration. — Cela résulte du fait que $\mathbf{L}u_!\,\overline{N}\bar{\imath}_A$ et $\overline{N}\bar{\imath}_A\,\mathbf{L}u_!$ sont des adjoints à gauche du foncteur $\bar{\imath}_A^*\,u^* = u^*\,\bar{\imath}_A^*$. □

Lemme 4.4.4. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et $i : A \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un $\mathcal{W}$-foncteur test local tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admette un objet final e_a. Alors pour toute petite catégorie C, le foncteur*

$$(q_C, \alpha_C) : A/C = i_A i^* C \longrightarrow A \times C$$

est $\mathcal{W}$-asphérique (où q_C désigne la projection canonique de A/C sur A, et α_C le foncteur qui associe à un objet $(a,\, u : i(a) \longrightarrow C)$ de A/C l'objet $u(e_a)$ de C).

Démonstration. — Si (a, c) est un objet de $A \times C$, la catégorie $(A/C)/(a, c)$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $(A/a)/(C/c) = i_A(a \times i^*(C/c))$, laquelle est asphérique puisque i est un foncteur test local, et C/c une catégorie asphérique. □

Proposition 4.4.5. — *Pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on a un isomorphisme canonique dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(J)$*

$$\mathbf{L}u_!\,\bar{\imath}_A^* \simeq \bar{\imath}_A^*\,\mathbf{L}u_! \ .$$

Autrement dit, le carré ci-dessous est commutatif à isomorphisme de foncteurs près.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(I) & \xrightarrow{\bar{\imath}_A^*} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I) \\ {\scriptstyle \mathbf{L}u_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}u_!} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(J) & \xrightarrow[\bar{\imath}_A^*]{} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(J) \end{array}$$

Démonstration. — Soit $u : I \longrightarrow J$ un foncteur entre petites catégories. On veut montrer que pour tout foncteur F de I vers $\mathcal{C}at$, le morphisme

$$\mathbf{L}u_! \, \bar{\imath}_A^*(F) \longrightarrow \bar{\imath}_A^* \, \mathbf{L}u_!(F)$$

induit par adjonction de l'identité $u^* \bar{N} \bar{\imath}_A = \bar{N} \bar{\imath}_A u^*$ est un isomorphisme dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I)$. En vertu des propositions 4.4.2 et 4.4.3, on remarque qu'il suffit de prouver que pour tout foncteur F de I vers $\widehat{\Delta}$, le morphisme canonique

$$\mathbf{L}u_! \, \bar{N} \bar{\imath}_A \bar{\imath}_A^*(F) \longrightarrow \bar{N} \bar{\imath}_A \bar{\imath}_A^* \, \mathbf{L}u_!(F)$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(I)$. Or le foncteur $\bar{N} \bar{\imath}_A \bar{\imath}_A^*$ est le foncteur induit par le foncteur $N \, i_A i_A^*$: ce dernier respecte les $\mathcal{W}$-équivalences en tant que composé de trois foncteurs ayant la même propriété. En outre, pour tout ensemble simplicial X, on a un morphisme naturel

$$\varpi_X : N \, i_A i_A^*(X) \longrightarrow X \times N \, A$$

induit par la morphisme de co-unité $N \, i_A i_A^*(X) \longrightarrow X$ et par le morphisme canonique de $N \, i_A i_A^*(X)$ vers $N \, A$. Ce morphisme ϖ_X est une $\mathcal{W}$-équivalence. Pour le voir, on remarque que si X est le nerf d'une petite catégorie C, alors ϖ_X est le nerf du morphisme q_C du lemme 4.4.4 correspondant au foncteur test local

$$i : A \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad a \longmapsto A/a \ ,$$

et donc ce lemme implique notre assertion dans ce cas. Pour un ensemble simplicial général X, il existe une $\mathcal{W}$-équivalence $N \, C \longrightarrow X$, où C est une petite catégorie (on peut prendre par exemple $C = \Delta/X$ en vertu de 4.3.16). On obtient donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} N \, i_A i_A^*(C) & \longrightarrow & N \, C \times N \, A \\ \downarrow & & \downarrow \\ N \, i_A i_A^*(X) & \longrightarrow & X \times N \, A \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales ainsi que la flèche horizontale supérieure sont des $\mathcal{W}$-équivalences. On en déduit aussitôt le cas général de notre assertion (à savoir que le morphisme ϖ_X ci-dessus est une $\mathcal{W}$-équivalence pour tout ensemble simplicial X). Il s'ensuit que le foncteur $\bar{N} \bar{\imath}_A \bar{\imath}_A^*$ est isomorphe au foncteur induit par le foncteur

$$X \longmapsto X \times N \, A \ .$$

Comme ce dernier respecte les monomorphismes ainsi que les $\mathcal{W}$-équivalences, on conclut en lui appliquant la proposition 3.1.28. □

4.4.6. — La résolution cosimpliciale de Lawvere (cf. exemple 2.3.13)

$$i_A^*\Delta : \Delta \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad \Delta_n \longmapsto i_A^*\Delta_n \ ,$$

se prolonge de manière unique à isomorphisme près en un foncteur commutant aux petites limites inductives $|\,.\,|_A : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$. On a un morphisme de foncteurs canonique

$$|\,.\,|_A \longrightarrow i_A^*$$

qui est l'identité sur les ensembles simpliciaux Δ_n, $n \geqslant 0$, et qui est défini pour un ensemble simplicial arbitraire K comme étant le morphisme canonique

$$|K|_A \simeq \varinjlim_{\Delta/K} i_A^*\,\varphi_K \longrightarrow i_A^* \varinjlim_{\Delta/K} \varphi_K \simeq i_A^* K \ .$$

(φ_K désignant le foncteur de Δ/K vers $\widehat{\Delta}$ qui associe à chaque objet $(\Delta_n, \Delta_n \longrightarrow K)$ de Δ/K, l'ensemble simplicial Δ_n). On remarque que pour tout ensemble simplicial K, $|K|_A = \mathit{Real}_{i_A^*\Delta}\, K$, K étant considéré comme préfaisceau simplicial constant, (cf. 2.3.8), ce qui implique que le foncteur $|\,.\,|_A$ envoie les ∞-équivalences sur des $\mathcal{W}$-équivalences (d'après 2.3.27, 4.2.9 et 3.4.36).

Corollaire 4.4.7. — *Le morphisme de foncteurs $|\,.\,|_A \longrightarrow i_A^*$ est une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle.*

Démonstration. — On veut prouver que pour tout ensemble simplicial K, le morphisme $|K|_A \longrightarrow i_A^* K$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, ou encore, de manière équivalente (grâce à la forte saturation des A-localisateurs), que c'est un isomorphisme dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}$. Comme les ∞-équivalences forment un Δ-localisateur régulier, les propositions 3.1.28 et 4.4.5 impliquent qu'il suffit de le vérifier lorsque K est de la forme Δ_n. Or dans ce cas, c'est une égalité. □

4.4.8. — Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une catégorie test locale. La résolution cosimpliciale de Lawvere $i_A^*\Delta : \Delta \longrightarrow \widehat{A}$, définit un foncteur de réalisation

$$\mathit{Real}_{i_A^*\Delta} : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A} \ .$$

On obtient ainsi deux foncteurs, $i_{A\times\Delta}$ et $i_A\, \mathit{Real}_{i_A^*\Delta}$ de $\widehat{A \times \Delta}$ vers Cat, qui sont reliés de la façon suivante.

Proposition 4.4.9. — *Il existe un foncteur*

$$S : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \mathit{Cat}$$

et deux $\mathcal{W}$-équivalences naturelles

$$i_{A\times\Delta} \longleftarrow S \longrightarrow i_A\, \mathit{Real}_{i_A^*\Delta} \ .$$

Démonstration. — Il résulte du lemme 4.3.8 que la complétion simpliciale W_Δ du A-localisateur $\mathsf{W} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est contenue dans $\mathcal{W}_{\widehat{A\times\Delta}}$. Une vérification facile montre que les objets cosimpliciaux de $\widehat{A\times\Delta}$, $i_A^*\Delta$, $i_A^*\Delta\times\Delta$ et Δ, sont des W_Δ-résolutions cosimpliciales. En vertu du lemme 2.3.26, les projections induisent donc des $\mathcal{W}$-équivalences naturelles

$$\widetilde{(i_A^*\Delta)}_! \longleftarrow \widetilde{(i_A^*\Delta\times\Delta)}_! \longrightarrow \widetilde{\Delta}_! \simeq 1_{\widehat{A\times\Delta}} .$$

On pose $S = i_{A\times\Delta}\widetilde{(i_A^*\Delta\times\Delta)}_!$. On a donc deux $\mathcal{W}$-équivalences naturelles

$$i_{A\times\Delta}\widetilde{(i_A^*\Delta)}_! \longleftarrow S \longrightarrow i_{A\times\Delta} .$$

On remarque que pour tout préfaisceau simplicial X sur A on a l'identification suivante.

$$i_{A\times\Delta}\widetilde{(i_A^*\Delta)}_!(X) \simeq i_A\, Real_{i_A^*\Delta}(X)\times\Delta$$

Comme la catégorie Δ est $\mathcal{W}$-asphérique, la première projection induit une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle

$$i_{A\times\Delta}\widetilde{(i_A^*\Delta)}_! \longrightarrow i_A\, Real_{i_A^*\Delta} ,$$

ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 4.4.10. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une catégorie test locale. Le $A\times\Delta$-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A\times\Delta}}$ est la complétion simpliciale du A-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Si p désigne la projection de $A\times\Delta$ vers A, alors le foncteur image inverse par p, allant de la catégorie des préfaisceaux sur A vers celle des préfaisceaux simpliciaux sur A, respecte les $\mathcal{W}$-équivalences et induit une équivalence de catégories*

$$p^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A\times\Delta} .$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement des propositions 2.3.27 et 4.4.9. □

4.4.11. — La construction $\int$ a une version duale, notée ici ∇. Si A est une petite catégorie, et F un foncteur de A^{op} vers $\mathcal{C}at$, on pose

$$\nabla F = \left(\int F^{op}\right)^{op} .$$

La catégorie $\nabla F = \nabla_A F$ est appelée la *cointégrale* du préfaisceau F. On a une projection canonique

$$\zeta_F : \nabla F \longrightarrow A$$

définie par

$$\zeta_F = \left(\theta_{F^{op}}\right)^{op} .$$

Il est clair que le foncteur

$$\theta_{F^{op}} : \int F^{op} \longrightarrow A^{op}$$

étant une cofibration, le foncteur ζ_F est une fibration.

4.4.12. — Nous allons à présent introduire les constructions duales à celles du paragraphe 3.3.18 (*i.e.* en termes de préfaisceaux et de catégories fibrées). Soit A une petite catégorie. On a le foncteur « catégorie fibrée associée »

$$\Xi' : \mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at/A \quad , \quad F \longmapsto (\nabla F, \zeta_F) = ((\int F^{op})^{op}, (\theta_{F^{op}})^{op}) \quad .$$

Si (C, γ) est un objet de $\mathcal{C}at/A$, *i.e.* un couple formé d'une petite catégorie C, et d'un foncteur $\gamma : C \longrightarrow A$, on lui associe un préfaisceau $\Xi(C, \gamma)$ sur A à valeurs dans $\mathcal{C}at$ défini par

$$a \longmapsto a\backslash C \quad , \qquad a \in \mathrm{Ob}\, A \ .$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\Xi : \mathcal{C}at/A \longrightarrow \mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at) \quad .$$

Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, on rappelle qu'une *$\mathcal{W}$-équivalence argument par argument* de $\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$ est un morphisme φ tel que pour tout objet a de A, φ_a soit une $\mathcal{W}$-équivalence. On désigne par $\mathcal{W}^{A^{op}}$ la partie de $\mathrm{Fl}\,\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$ formée des $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument. On note enfin $\mathcal{W}_A^{\mathrm{coloc}}$ la partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{C}at/A)$ formée des flèches qui sont des $\mathcal{W}$-équivalences colocalement au-dessus de A.

Lemme 4.4.13. — *Le foncteur Ξ' est un adjoint à droite du foncteur Ξ. En outre, on a les égalités*

$$\mathcal{W}^{A^{op}} = {\Xi'}^{-1}\mathcal{W}_A^{\mathrm{coloc}} \quad et \quad \mathcal{W}_A^{\mathrm{coloc}} = \Xi^{-1}\mathcal{W}^{A^{op}} \ ,$$

et les morphismes d'adjonction

$$\varepsilon : \Xi\Xi' \longrightarrow 1_{\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)} \quad et \quad \eta : 1_{\mathcal{C}at/A} \longrightarrow \Xi'\Xi$$

sont des équivalences faibles naturelles.

Démonstration. — La première assertion résulte aussitôt de [**96**, proposition 3.1.2]. En vertu du septième sorite de 3.3.8, la seconde résulte de (la preuve de) [**96**, théorème 3.1.4]. Voir aussi [**96**, remarque 3.1.13]. □

4.4.14. — On définit $\mathcal{W}/A$ comme la classe des flèches de $\mathcal{C}at/A$ dont l'image par le foncteur d'oubli $\mathcal{C}at/A \longrightarrow \mathcal{C}at$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Les éléments de $\mathcal{W}/A$ seront appelés des *$\mathcal{W}$-équivalences sur A*. On remarque que toute flèche de $\mathcal{C}at/A$ qui est une $\mathcal{W}$-équivalence colocalement sur A est une $\mathcal{W}$-équivalence sur A (3.3.9). On note $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$ la localisation de $\mathcal{C}at/A$ par $\mathcal{W}/A$. Cette catégorie sera appelée la *catégorie des $\mathcal{W}$-types d'homotopie localement constants sur A*. On dira qu'une flèche de $\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$ est une *$\mathcal{W}/A$-équivalence* si son image par le foncteur Ξ' en est une. Le lemme 4.4.13 implique aussitôt que le foncteur Ξ respecte les $\mathcal{W}/A$-équivalences, et que les foncteurs Ξ' et Ξ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre les catégories localisées. D'autre part, le foncteur de localisation de

$\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$ par les $\mathcal{W}/A$-équivalences se factorise par la catégorie $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A^{op})$, localisée de $\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$ par les $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument. On obtient donc en particulier l'énoncé qui suit.

Proposition 4.4.15. — *Les foncteurs Ξ' et Ξ induisent des équivalences de catégories quasi inverses l'une de l'autre entre la localisation de la catégorie $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A^{op})$ par l'image de $\mathcal{W}/A$ et la catégorie des $\mathcal{W}$-types d'homotopie localement constants sur A.*

4.4.16. — On fixe un localisateur fondamental $\mathcal{W}$. Soit A une petite catégorie. Le foncteur nerf induit un foncteur

$$N : \mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{H}om(A^{op}, \widehat{\Delta}) \simeq \widehat{A \times \Delta} \ ,$$

et en composant avec le foncteur $i_{A\times\Delta}$, on obtient un foncteur

$$i_{A\times\Delta}\, N : \mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at \ .$$

Ce foncteur est relié au foncteur

$$\nabla_A : \mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at$$

de la manière suivante.

Lemme 4.4.17. — *Il existe une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle $i_{A\times\Delta}\, N \longrightarrow \nabla_A$.*

Démonstration. — Soit F un préfaisceau sur A à valeurs dans $\mathcal{C}at$. On a une $\mathcal{W}$-équivalence argument par argument $i_{\Delta}\, N\, F \longrightarrow F$ (en appliquant le théorème 4.1.26 à l'exemple 4.1.29), d'où une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle $\nabla_A i_{\Delta}\, N\, F \longrightarrow \nabla_A F$ (cf. 3.3.16). Or un calcul explicite simple montre l'identification $\nabla_A i_{\Delta}\, N\, F = i_{A\times\Delta}\, N\, F$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.4.18. — *Le foncteur nerf induit une équivalence de catégories de la localisation de $\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$ par les $\mathcal{W}/A$-équivalences vers la catégorie $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A \times \Delta}$.*

Démonstration. — On sait que le foncteur nerf induit une équivalence de catégories de $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A^{op})$ vers $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}(A^{op})$, et il résulte du lemme ci-dessus qu'un morphisme de $\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$ est une $\mathcal{W}/A$-équivalence si et seulement si son nerf est une $\mathcal{W}$-équivalence dans la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur A, ce qui implique l'assertion. □

4.4.19. — Soit A une petite catégorie. On rappelle qu'on a un foncteur

$$j_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at/A \ ,$$

défini par $j_A X = (A/X, A/X \longrightarrow A)$, la flèche de A/X vers A étant le foncteur d'oubli (cf. 3.2.1). Il est immédiat qu'on a l'égalité $j_A^{-1}(\mathcal{W}/A) = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. En particulier le foncteur j_A induit donc un foncteur $\bar{\jmath}_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$.

Corollaire 4.4.20. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Alors le foncteur*

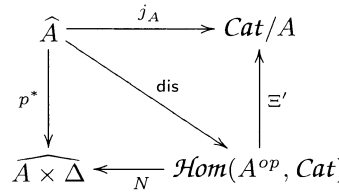
$$\bar{\jmath}_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Tout ensemble pouvant être vu comme une catégorie discrète, on obtient une inclusion pleine

$$\mathsf{dis} : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at) \ .$$

Si on note $p : A \times \Delta \longrightarrow A$ la première projection, et $p^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$ le foncteur image inverse, on vérifie facilement que le diagramme suivant est commutatif.



Or le corollaire 4.4.10 implique que le foncteur p^* induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A \times \Delta} \ ,$$

et en vertu de la proposition 4.4.15 (resp. 4.4.18), le foncteur Ξ' (resp. N) définit une équivalence de catégories entre la localisation de la catégorie $\mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$ par les $\mathcal{W}/A$-équivalences et la catégorie $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A \times \Delta}$). On en déduit que les foncteurs dis et j_A induisent aussi des équivalences de catégories entre les catégories localisées, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.4.21. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, A une $\mathcal{W}$-catégorie test, et C une petite catégorie. Le foncteur $i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}$ induit un foncteur*

$$i_A^*/C : \mathcal{C}at/C \longrightarrow \widehat{A}/i_A^*C \quad , \qquad (B, B \longrightarrow C) \longmapsto (i_A^*B, i_A^*B \longrightarrow i_A^*C) \ ,$$

qui envoie les $\mathcal{W}/C$-équivalences sur des $\mathcal{W}$-équivalences. En outre, ce dernier définit une équivalence de catégories entre la localisation de $\widehat{A}/i_A^*C$ par les $\mathcal{W}$-équivalences et la catégorie des $\mathcal{W}$-types d'homotopie localement constants sur C.

Démonstration. — Comme A est une $\mathcal{W}$-catégorie test, le morphisme d'adjonction $\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, et la première assertion est évidente. D'autre part, le foncteur $i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$ induit un foncteur

$$i_A/C : \widehat{A}/i_A^*C \longrightarrow \mathcal{C}at/C \quad , \quad (X, \xi) \longmapsto (A/X, \varepsilon_C\, i_A\xi) \ ,$$

et le morphisme ε définit une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle ε/C de $i_A/C\, i_A^*/C$ vers $1_{\mathcal{C}at/C}$. On vérifie facilement que i_A/C est un adjoint à gauche de i_A^*/C, que ε/C est l'un des

morphismes d'adjonction, et que $(i_A/C)^{-1}(\mathcal{W}/C) = i^{-1}_{A/i^*_A C}\mathcal{W}$. La deuxième assertion en résulte aussitôt (voir [**96**, lemme 1.3.8]). □

4.4.22. — Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. On considère un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A. Le foncteur d'oubli par f

$$f_! : \widehat{A}/X \longrightarrow \widehat{A}/Y \quad , \qquad (T, T \xrightarrow{s} X) \longmapsto (T, T \xrightarrow{fs} Y) \ ,$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences (on a même $\mathcal{W}_{\widehat{A}/X} = f_!^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}/Y})$), et induit par conséquent un foncteur

$$f_! : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/X \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/Y \ .$$

Proposition 4.4.23. — *Si $\mathcal{W}$ est accessible, un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence propre à droite si et seulement si le foncteur d'oubli par f*

$$f_! : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/X \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/Y$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Le corollaire 4.2.18 permet de donner un sens à l'énoncé qui est alors un cas particulier de la proposition 1.5.20. □

Corollaire 4.4.24. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A. On suppose qu'il existe un localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, tel que A soit une $\mathcal{W}'$-catégorie test locale, et tel que f soit une $\mathcal{W}'$-équivalence propre à droite. Alors le foncteur $f_! : \widehat{A}/X \longrightarrow \widehat{A}/Y$ induit une équivalence de catégories après localisation par les $\mathcal{W}$-équivalences.*

Démonstration. — Lorsque $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$, cela résulte de la proposition précédente. On remarque que pour toute petite catégorie C, on a une équivalence de catégories canonique

$$\mathcal{W}^{-1}_{\widehat{C}}\widehat{C} \simeq \mathcal{W}^{-1}_{\widehat{C}}\mathcal{W}'^{-1}_{\widehat{C}}\widehat{C} \ .$$

Le cas particulier implique donc le cas général. □

Lemme 4.4.25. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et $u : I \longrightarrow J$ un morphisme de $\mathbf{Cat}$. On suppose qu'il existe un localisateur fondamental propre $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ tel que u soit une $\mathcal{W}'$-équivalence. Alors le foncteur d'oubli par u, de $\mathbf{Cat}/I$ vers $\mathbf{Cat}/J$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, et induit une équivalence de catégories*

$$u_! : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/I \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/J \ .$$

Démonstration. — La première assertion est évidente et ne dépend d'ailleurs pas des hypothèses faites sur u. Pour montrer la seconde, on choisit une $\mathcal{W}'$-catégorie test A,

et on remarque qu'on a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/ I & \xrightarrow{u_!} & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/ J \\ {\scriptstyle \bar{i}_A^*/I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{i}_A^*/J} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A/i_A^*I} & \xrightarrow[i_A^*(u)_!]{} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A/i_A^*J} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences de catégories (en vertu de la proposition 4.4.21). Comme le localisateur fondamental $\mathcal{W}'$ est propre, $i_A^*(u)$ est une $\mathcal{W}'$-équivalence propre à droite, et donc le corollaire précédent implique que la flèche horizontale du bas est une équivalence de catégories, donc celle du haut aussi. □

Proposition 4.4.26. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur $\mathcal{W}$-asphérique. Alors le foncteur d'oubli par u induit une équivalence de catégories*

$$u_! : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/ A \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/ B \ .$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{W}'$ le localisateur fondamental minimal parmi ceux qui rendent asphérique le foncteur u. En vertu du corollaire 4.3.28, $\mathcal{W}'$ est propre, et comme u est $\mathcal{W}$-asphérique, on a l'inclusion $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$. L'assertion résulte donc du lemme ci-dessus. □

Corollaire 4.4.27. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur $\mathcal{W}$-asphérique entre deux $\mathcal{W}$-catégories test locales. Alors le foncteur image inverse*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences et induit une équivalence de catégories

$$u^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} \ .$$

Si en outre $\mathcal{W}$ est accessible, le foncteur u^* est l'adjoint à gauche d'une équivalence de Quillen.

Démonstration. — En vertu de la proposition 4.2.23, le foncteur u^* respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, et on a une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle de $i_A u^*$ vers i_B, laquelle peut s'interpréter comme un morphisme de $u_! j_A u^*$ vers j_B dans $\mathbf{Cat}/B$ ($u_!$ désignant le foncteur d'oubli par u, de $\mathbf{Cat}/A$ vers $\mathbf{Cat}/B$). On obtient ainsi un carré commutatif à isomorphisme de foncteurs près,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{B} & \xrightarrow{u^*} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} \\ {\scriptstyle \bar{\jmath}_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\jmath}_A} \\ \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/ B & \xleftarrow[u_!]{} & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/ A \end{array} \ ,$$

dont les flèches verticales sont des équivalences de catégories (4.4.20). Vu que la flèche horizontale du bas est aussi une équivalence de catégories (en vertu de la proposition ci-dessus), cela prouve la première partie du corollaire. La seconde en résulte aussitôt, puisque le foncteur $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ admet un adjoint à droite et respecte les monomorphismes. □

La proposition suivante généralise la proposition 4.4.21.

Proposition 4.4.28. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, A une $\mathcal{W}$-catégorie test, $i : A \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un $\mathcal{W}$-foncteur test tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admette un objet final, et C une petite catégorie. Le foncteur i^* induit un foncteur*

$$i^*/C : \mathbf{Cat}/C \longrightarrow \widehat{A}/i^*C \quad , \qquad (B, B \longrightarrow C) \longmapsto (i^*B, i^*B \longrightarrow i^*C)$$

qui envoie les $\mathcal{W}/C$-équivalences sur des $\mathcal{W}$-équivalences. En outre, ce dernier définit une équivalence de catégories entre la localisation de $\widehat{A}/i^*C$ par les $\mathcal{W}$-équivalences et la catégorie des $\mathcal{W}$-types d'homotopie localement constants sur C.

Démonstration. — La première assertion résulte du théorème 4.1.26. Nous allons montrer que le foncteur i^*/C induit une équivalence de catégories après localisation. On note $\mathcal{W}'$ le localisateur fondamental minimal parmi ceux qui rendent asphériques les catégories A et $A/a \times i^*\Delta_1$, $a \in \operatorname{Ob} A$. Le corollaire 4.3.28 implique que $\mathcal{W}'$ est propre, et le théorème 4.1.26 que i est un $\mathcal{W}'$-foncteur test et que $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$. En vertu du théorème 4.1.26, on a donc une $\mathcal{W}'$-équivalence naturelle $i_A i^* \longrightarrow 1_{\mathbf{Cat}}$. Comme A est une $\mathcal{W}'$-catégorie test, le morphisme $\nu : i^* \longrightarrow i_A^*$ obtenu par adjonction est aussi une $\mathcal{W}'$-équivalence naturelle. On définit un foncteur $\mu : \mathbf{Cat}/C \longrightarrow \widehat{A}/i_A^*C$ comme le composé du foncteur i^*/C et du foncteur d'oubli induit par ν_C. Le morphisme de foncteurs ν définit une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle de μ vers i_A^*/C. On obtient ainsi un diagramme commutatif à isomorphime près

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/C & \xrightarrow{\bar{i}^*/C} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A/i^*C} \\ & {\scriptstyle \bar{i}_A^*/C} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \nu_{C!}} & \\ & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A/i_A^*C} & \end{array} .$$

En vertu de la proposition 4.4.21 et du corollaire 4.4.24, les foncteurs $\bar{i}_A^*/C$ et $\nu_{C!}$ sont des équivalences de catégories, et par conséquent, il en est de même de $\bar{i}^*/C$. □

Scholie 4.4.29. — Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, on peut expliciter un quasi-inverse de l'équivalence de catégories induite par le foncteur i^*/C (ce qui fournit une autre démonstration). On a en effet un morphisme de foncteurs $\alpha : i_A i^* \longrightarrow 1_{\mathbf{Cat}}$ (3.2.4), et le foncteur i étant un foncteur test, il est en particulier asphérique. Il résulte donc du théorème 4.1.26 que le foncteur α_C est asphérique, et par conséquent, la proposition 4.4.26 implique que le foncteur d'oubli par α_C induit une équivalence de

catégories de la catégorie des $\mathcal{W}$-types d'homotopie localement constants sur A/i^*C vers celle des $\mathcal{W}$-types d'homotopie localement constants sur C. D'autre part, comme A/i^*C est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, le foncteur j_{A/i^*C} définit une équivalence de catégories (4.4.20)

$$\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A/i^*C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/(A/i^*C) \ .$$

En composant ces deux foncteurs, on obtient une équivalence de catégories

$$\alpha_{C!}\,\bar{j}_{A/i^*C} : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A/i^*C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/C \ .$$

Nous laissons le lecteur se persuader qu'il s'agit bien là du quasi-inverse annoncé.

Théorème 4.4.30. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Si $\mathcal{W}$ est propre, alors pour toute $\mathcal{W}$-catégorie test locale A, le A-localisateur des $\mathcal{W}$-équivalences est propre. Réciproquement, s'il existe une $\mathcal{W}$-catégorie test locale non vide A telle que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit propre, alors $\mathcal{W}$ est propre.*

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que $\mathcal{W}$ est propre, et considérons une $\mathcal{W}$-catégorie test locale A. On rappelle que pour tout préfaisceau X sur A, la catégorie A/X est encore une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Par conséquent, le foncteur $j_{A/X}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/X$ et la catégorie des $\mathcal{W}$-types d'homotopie localement constants sur A/X (corollaire 4.4.20). Soit $u : X \longrightarrow Y$ une $\mathcal{W}$-équivalence. On obtient le carré commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/X & \xrightarrow{u_!} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/Y \\ {\scriptstyle \bar{j}_{A/X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{j}_{A/Y}} \\ \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/(A/X) & \xrightarrow[(i_A u)_!]{} & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/(A/Y) \end{array}$$

Comme on vient de le rappeler, les foncteurs verticaux sont des équivalences de catégories, et il résulte du lemme 4.4.25 que le foncteur $(i_A u)_!$ ci-dessus est une équivalence de catégories. On en déduit que le foncteur $u_!$ en est une. Le corollaire 4.2.18 implique, en vertu du théorème 1.4.3, que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est accessible, et la proposition 4.4.23 montre donc que u est une $\mathcal{W}$-équivalence propre à droite. On a ainsi prouvé que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre.

Supposons à présent qu'il existe une $\mathcal{W}$-catégorie test locale non vide A telle que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit un A-localisateur propre, et choisissons un objet a de A. Alors A/a est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, et comme elle admet un objet final, elle est $\mathcal{W}$-asphérique, et donc est une $\mathcal{W}$-catégorie test. Comme le foncteur d'oubli $\mathcal{U}_a : \widehat{A/a} \simeq \widehat{A}/a \longrightarrow \widehat{A}$ commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes, et comme $\mathcal{W}_{\widehat{A/a}} = \mathcal{U}_a^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$, la proposition 1.4.20, (c) implique que le A/a-localisateur des $\mathcal{W}$-équivalences est accessible. Il résulte alors facilement de la proposition 4.4.23 que ce A/a-localisateur est propre. Le théorème 4.3.24 implique donc que $\mathcal{W}$ est propre. □

Remarque 4.4.31. — On n'a considéré dans la seconde partie de l'énoncé ci-dessus que des catégories test locales non vides, car pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$, la catégorie vide est test locale, et le $\varnothing$-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\varnothing}}$ est toujours propre, puisque la catégorie $\widehat{\varnothing}$ s'identifie à la catégorie ponctuelle.

CHAPITRE 5

FACTORISATIONS DE FONCTEURS

5.1. Cofibrations formelles

5.1.1. — Soit I la catégorie engendrée par le graphe

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{a_{01}} & 1 \\ {\scriptstyle a_{02}}\downarrow & & \\ 2 & & \end{array}$$

La donnée d'un foncteur F de I vers ***Cat*** revient à celle d'un diagramme dans ***Cat*** de la forme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

dans lequel A (resp. A', resp. B) est l'image de l'objet 0 (resp. 1, resp. 2) de I. On note

$$\int \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \\ B & & \end{array} = \int_I F \ .$$

Les objets de cette catégorie sont donc les couples $(\imath, x)$, où $\imath$ est un objet de I, et x est un objet de A, A' ou B, selon que $\imath$ soit égal à 0, 1, ou 2 respectivement (voir 3.3.13 pour la définition explicite de $\int F$, et [**96**, 2.3.2] pour une description encore plus détaillée). Si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

est un carré commutatif de *Cat*, la construction générale donnée dans [**96**, 2.2.3] nous donne un foncteur canonique

$$K : \int_{i} \begin{matrix} A \xrightarrow{\alpha} A' \\ \downarrow \\ B \end{matrix} \longrightarrow B' \tag{5.1.1.1}$$

défini par

$$K(\imath, x) = \begin{cases} i'\alpha(x) = \beta i(x) & \text{si } \imath = 0, \\ i'(x) & \text{si } \imath = 1, \\ \beta(x) & \text{si } \imath = 2. \end{cases}$$

5.1.2. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Un carré commutatif de *Cat*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

est *$\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien* si le foncteur canonique 5.1.1.1 est une $\mathcal{W}$-équivalence.

On dira qu'un carré commutatif de *Cat* est un *carré homotopiquement cocartésien absolu* si c'est un carré $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ (ou de manière équivalente, si c'est un carré $\mathcal{W}_\infty$-homotopiquement cocartésien).

Les résultats suivants sont des corollaires du paragraphe 2.3 de [**96**].

Sorites 5.1.3. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental.*

(a) *Tout carré commutatif de la forme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des $\mathcal{W}$-équivalences est $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien.

(b) *Si dans un carré $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

le foncteur i est une $\mathcal{W}$-équivalence, il en est de même de i'.

(c) *Considérons deux carrés commutatifs de* **Cat** *de la forme suivante.*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' & \xrightarrow{\alpha'} & A'' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & C & {\scriptstyle i'}\downarrow & C' & \downarrow{\scriptstyle i''} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' & \xrightarrow[\beta']{} & B'' \end{array}$$

Si C est un carré $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien, pour que le carré C' soit $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien, il faut et il suffit que le carré composé $C' \circ C$ le soit.

(d) *Pour qu'un carré commutatif de* **Cat**

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

soit $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien, il faut et il suffit que le carré dual

$$\begin{array}{ccc} A^{op} & \xrightarrow{\alpha^{op}} & A'^{op} \\ {\scriptstyle i^{op}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'^{op}} \\ B^{op} & \xrightarrow[\beta^{op}]{} & B'^{op} \end{array}$$

le soit.

(e) *Les carrés $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésiens sont stables par limites inductives filtrantes.*

Démonstration. — Les assertions (a) et (b) sont des conséquences faciles de [**96**, proposition 2.3.3]. La preuve de (c) peut être faite en manipulant directement des morphismes de la forme (5.1.1.1) (exercice laissé au lecteur). Une autre méthode (moins élémentaire) est la suivante. Il est immédiat que l'on peut supposer que $\mathcal{W}$ est accessible. Or une fois choisie une $\mathcal{W}$-catégorie test A, en vertu de la proposition 4.2.7, un carré commutatif de **Cat** est $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien si et seulement si son image par le foncteur i_A^* est un carré homotopiquement cocartésien au sens de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{A}$ associée à $\mathcal{W}$. L'assertion (c) résulte donc des sorites généraux sur les carrés homotopiquement cocartésiens dans les catégories de modèles fermées. Montrons l'assertion (d). Pour chaque petite catégorie C, on construit fonctoriellement dans **Cat** un diagramme de la forme

$$C^{op} \xleftarrow{s_C} S(C) \xrightarrow{t_C} C$$

comme suit. La catégorie $S(C)$ a pour objets les flèches de C. Si $f : a \longrightarrow b$ et $f' : a' \longrightarrow b'$ sont deux objets de $S(C)$, une flèche de f vers f' est un

diagramme commutatif dans C de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ {\scriptstyle g}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ a' & \xrightarrow{f'} & b' \end{array}$$

Les foncteurs s_C et t_C sont définis par les formules

$$s_C(f : a \longrightarrow b) = a \quad \text{et} \quad t_C(f : a \longrightarrow b) = b \ .$$

On vérifie que s_C et t_C sont des cofibrations dont les fibres admettent un objet initial, ce qui implique que ce sont des foncteurs $\mathcal{W}$-asphériques (voir [**96**, lemmes 1.1.19 et 1.1.20]). Si $u : C \longrightarrow D$ est un foncteur entre petites catégories, on obtient un diagramme commutatif de catégories

$$\begin{array}{ccccc} C^{op} & \xleftarrow{s_C} & S(C) & \xrightarrow{t_C} & C \\ {\scriptstyle u^{op}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(u)} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ D^{op} & \xleftarrow{s_D} & S(D) & \xrightarrow{t_D} & D \end{array} \quad ,$$

où $S(u)$ désigne le foncteur évident défini par

$$S(u)(f : a \longrightarrow b) = (u(f) : u(a) \longrightarrow u(b)) \ .$$

Il est clair que l'on a en particulier défini de la sorte un foncteur S. Si F désigne le foncteur de I vers $\boldsymbol{Cat}$ défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \\ B & & \end{array} \quad ,$$

on obtient ainsi un diagramme commutatif de la forme suivante, dans lequel $S(F)$ désigne le foncteur de I vers $\boldsymbol{Cat}$ composé avec le foncteur S défini ci-dessus.

$$\begin{array}{ccccc} \int F^{op} & \longleftarrow & \int S(F) & \longrightarrow & \int F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B'^{op} & \longleftarrow & S(B') & \longrightarrow & B' \end{array}$$

Or il résulte de la proposition 3.3.16 que les flèches horizontales de la première ligne de ce diagramme sont des $\mathcal{W}$-équivalences localement au-dessus de I, et donc que ce sont des $\mathcal{W}$-équivalences. Les flèches verticales du diagramme ci-dessus étant des foncteurs canoniques de la forme (5.1.1.1), l'assertion (d) en résulte aussitôt. Enfin, la stabilité par limites inductives filtrantes résulte de la fonctorialité des morphismes de la forme (5.1.1.1), du fait que le foncteur d'intégration commute aux limites inductives, et de la stabilité des $\mathcal{W}$-équivalences par limites inductives filtrantes (cf. 4.2.22). □

5.1.4. — Un foncteur entre petites catégories $i : A \longrightarrow B$ est une *cofibration formelle* si tout carré cocartésien de ***Cat*** de la forme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

est un carré homotopiquement cocartésien absolu.

Proposition 5.1.5. — *Les cofibrations formelles sont stables par composition, par images directes, par limites inductives filtrantes, et par rétractes.*

Démonstration. — La stabilité par composition et par images directes est une conséquence formelle de la définition et du sorite 5.1.3, (c). Celle par rétractes résulte de la fonctorialité des morphismes de la forme (5.1.1.1), et de la stabilité des ∞-équivalences par rétractes. La stabilité par limites inductives filtrantes est quant à elle conséquence du sorite 5.1.3, (e). □

Proposition 5.1.6. — *Pour qu'un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ soit une cofibration formelle, il faut et il suffit que le foncteur $u^{op} : A^{op} \longrightarrow B^{op}$ en soit une.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du sorite 5.1.3, (d). □

5.1.7. — Un foncteur $i : A \longrightarrow B$ est un *rétracte par déformation* s'il existe un foncteur $r : B \longrightarrow A$, et un morphisme de foncteurs $\varepsilon : ir \longrightarrow 1_B$, tels que $ri = 1_A$ et $\varepsilon \star i = 1_i$.

Proposition 5.1.8. — *Les rétractes par déformation sont stables par images directes.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

un carré cocartésien de ***Cat***, i étant un rétracte par déformation. Soient $r : B \longrightarrow A$ et $\varepsilon : ir \longrightarrow 1_B$ tels que $ri = 1_A$ et $\varepsilon \star i = 1_i$. On obtient par la propriété universelle des images directes un unique morphisme $r' : B' \longrightarrow A'$ tel que $r'i' = 1_{A'}$ et $r'\beta = \alpha r$. D'autre part, la donnée de ε équivaut à celle d'un foncteur encore noté par abus

$\varepsilon : \Delta_1 \times B \longrightarrow B$. La relation $\varepsilon \star i = 1_i$ s'interprète par la commutativité du carré de gauche dans le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 \times B & \xleftarrow{1_{\Delta_1} \times i} & \Delta_1 \times A & \xrightarrow{1_{\Delta_1} \times \alpha} & \Delta_1 \times A' \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ B & \xleftarrow[i]{} & A & \xrightarrow[\alpha]{} & A' \end{array}$$

En prenant la limite inductive dudit diagramme, on obtient ainsi un nouveau foncteur $\varepsilon' : \Delta_1 \times B' \longrightarrow B'$, tel que $\varepsilon'|_{\{0\}\times B'} = i'r'$, $\varepsilon'|_{\{1\}\times B'} = 1_{B'}$, et $\varepsilon'(1_{\Delta_1} \times i') = i'pr_2$ (cela résulte des propriétés analogues pour ε). On a ainsi prouvé que i' est un rétracte par déformation. □

Corollaire 5.1.9. — *Les rétractes par déformation sont des cofibrations formelles.*

Démonstration. — Les rétractes par déformation étant des ∞-équivalences (ce sont en particulier des Δ_1-équivalences d'homotopie), cela résulte de la proposition précédente et du sorite 5.1.3, (a). □

Lemme 5.1.10. — *Les immersions ouvertes sont stables par les opérations suivantes.*

(a) *Si dans un carré cocartésien de* $\mathcal{C}at$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array} \quad ,$$

le foncteur i est une immersion ouverte, alors il en est de même de i'. En outre, dans ce cas, ce carré est aussi cartésien, et le cocrible complémentaire $B - A$ de A dans B est canoniquement isomorphe via β au cocrible complémentaire $B' - A'$ de A' dans B'.

(b) *Tout composé transfini d'immersions ouvertes est une immersion ouverte.*

(c) *Tout rétracte d'une immersion ouverte est une immersion ouverte.*

Démonstration. — On rappelle que le foncteur $\mathcal{C}at^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ qui associe à chaque petite catégorie C l'ensemble $Cr(C)$ de ses cribles est représentable par la catégorie $\Delta_1 = \{0 \longrightarrow 1\}$. Plus précisément, la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(C, \Delta_1) \longrightarrow Cr(C)$ est définie par $u \longmapsto u^{-1}(0)$. Si i est une immersion ouverte, on a donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \{0\} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[\chi]{} & \Delta_1 \end{array} \quad .$$

Le carré considéré étant supposé cocartésien, le foncteur $A' \longrightarrow \{0\}$ induit un unique foncteur $\chi' : B' \longrightarrow \Delta_1$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' & \longrightarrow & \{0\} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' & \xrightarrow[\chi']{} & \Delta_1 \end{array} \qquad \chi : B \longrightarrow \Delta_1$$

On remarque en outre que $A' = \chi'^{-1}(0)$. En effet, Comme les limites inductives sont universelles dans $\mathcal{C}at$, on a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi^{-1}(0) & \longrightarrow & \chi'^{-1}(0) \end{array} \quad ,$$

dont la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. On a ainsi prouvé que i' est une immersion ouverte. Les carrés

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \{0\} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[\chi]{} & \Delta_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & \{0\} \\ {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow[\chi']{} & \Delta_1 \end{array}$$

étant cartésiens, on en déduit aussitôt que le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

l'est aussi. Pour vérifier la dernière assertion de (a), on procède de la même manière : le cocrible complémentaire $B - A$ de A dans B s'identifie à l'image réciproque $\chi^{-1}(1)$, et on a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \longrightarrow & \varnothing \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi^{-1}(1) & \longrightarrow & \chi'^{-1}(1) \end{array} \quad ,$$

ce qui montre que le foncteur β induit un isomorphisme de $B - A$ sur $B' - A'$. La stabilité des immersions ouvertes par composition transfinie et par rétractes est immédiate. □

Lemme 5.1.11. — *Tout carré cocartésien de* **Cat** *formé d'immersions fermées*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

est un carré homotopiquement cocartésien absolu.

Démonstration. — Si on a un carré cocartésien de la même forme que dans l'énoncé ci-dessus dont toutes les flèches sont des immersions ouvertes, on peut le voir comme l'image par le foncteur $i_{B'}$ d'un carré cocartésien de préfaisceaux sur B' formé de monomorphismes. Or une telle situation définit un carré homotopiquement cocartésien absolu (cf. [**96**, proposition 2.3.10]). Ce lemme résulte donc du sorite 5.1.3, (d). □

Lemme 5.1.12. — *Soit $i : A \longrightarrow B$ une immersion ouverte. On suppose qu'il existe un cocrible W de B contenant A tel que l'inclusion de A dans W soit une cofibration formelle. Alors i est une cofibration formelle.*

Démonstration. — Considérons un carré cocartésien de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array}$$

Si $W' = W \amalg_A A'$, ce carré peut être vu comme le composé des carrés cocartésiens

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ W & \xrightarrow[\omega]{} & W' \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k'} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & B' \end{array} \quad .$$

Or comme j est une cofibration formelle, le carré du haut est un carré homotopiquement cocartésien absolu. Il s'ensuit qu'il suffit de prouver que le carré du bas est un carré homotopiquement cartésien absolu. Soit V (resp. V') le cocrible complémentaire de A (resp. de A') dans B (resp. dans B'). On remarque que $V \cap W$ est le complémentaire de A (resp. de A') dans W (resp. dans W'). Il résulte donc du lemme 5.1.10, (a), que β (resp. ω) induit un isomorphisme $V \simeq V'$ (resp. $V \cap W \simeq V' \cap W'$). On

remarque enfin que $B = V \cup W$ (resp. que $B' = V' \cup W'$). On en déduit qu'on a les carrés cocartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccccc} V \cap W & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

Or toutes les flèches du carré de gauche et du carré composé sont des immersions fermées, et par conséquent, en vertu du lemme 5.1.11, ceux-ci sont des carrés homotopiquement cocartésiens absolus. Le sorite 5.1.3, (c) implique donc que le carré de droite est un carré homotopiquement cocartésien absolu, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 5.1.13. — *Soit $i : A \rightarrowtail B$ une immersion ouverte. On suppose qu'il existe un cocrible W de B contenant A tel que l'inclusion de A dans W soit un rétracte par déformation. Alors i est une cofibration formelle.*

Démonstration. — En vertu du corollaire 5.1.9, cela résulte du lemme précédent. □

5.1.14. — Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, on appellera *cofibration formelle $\mathcal{W}$-triviale* tout foncteur entre petites catégories qui est à la fois une cofibration formelle et une $\mathcal{W}$-équivalence.

Proposition 5.1.15. — *Les cofibrations formelles $\mathcal{W}$-triviales sont stables par composition, images directes, limites inductives filtrantes, et rétractes.*

Démonstration. — Cela résulte du sorite 5.1.3, (b), de la proposition 5.1.5, et de la stabilité des $\mathcal{W}$-équivalences par limites inductives filtrantes et par rétractes. □

Proposition 5.1.16. — *Les $\mathcal{W}$-équivalences sont stables par image directe le long d'une cofibration formelle.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du sorite 5.1.3, (b). □

5.2. Structures de catégorie de modèles de Thomason

Proposition 5.2.1. — *Soit α un cardinal. Toute petite catégorie dont le nerf est un ensemble simplicial α-accessible est α-accessible dans $\mathbf{Cat}$.*

Démonstration. — On vérifie immédiatement que les ensembles ordonnés Δ_n, $n \geqslant 0$, sont des objets de présentation finie (*i.e.* 0-accessibles) dans $\mathbf{Cat}$. Cela implique en particulier que le foncteur nerf N commute aux petites limites inductives filtrantes (*i.e.* qu'il est 0-accessible). Soit C une petite catégorie telle que $N\,C$ soit α-accessible. On considère un ensemble ordonné α-filtrant I, et un foncteur F de I dans $\mathbf{Cat}$.

Comme le foncteur nerf est pleinement fidèle, on obtient les bijections canoniques suivantes

$$\begin{aligned}\varinjlim_I \mathrm{Hom}_{Cat}(C,F) &= \varinjlim_I \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(N\,C, N\,F)\\ &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(N\,C, \varinjlim_I N\,F)\\ &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(N\,C, N \varinjlim_I F)\\ &= \mathrm{Hom}_{Cat}(C, \varinjlim_I F)\ ,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion. □

Corollaire 5.2.2. — *Toute petite catégorie est accessible. En particulier, tout* ensemble *de flèches de* $\boldsymbol{Cat}$ *permet l'argument du petit objet.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 5.2.1 et du fait que tout ensemble simplicial est accessible. □

Corollaire 5.2.3. — *Soit* I *un* ensemble *de foncteurs entre petites catégories. Pour que tout élément de* $l(r(I))$ *soit une cofibration formelle, il suffit que tout élément de* I *en soit une. De même, si* $\mathcal{W}$ *est un localisateur fondamental, pour que tout élément de* $l(r(I))$ *soit une cofibration formelle* $\mathcal{W}$*-triviale, il suffit que tout élément de* I *le soit.*

Démonstration. — Cela résulte de l'argument du petit objet appliqué à I (1.2.23) et des propositions 5.1.5 et 5.1.15 respectivement. □

5.2.4. — Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ entre petites catégories est un *morphisme de Dwyer* s'il est une immersion ouverte, et s'il existe un cocrible W de B contenant A tel que l'inclusion de A dans W admette un adjoint à droite.

Proposition 5.2.5. — *Tout morphisme de Dwyer est une cofibration formelle.*

Démonstration. — Toute inclusion pleine admettant un adjoint à droite étant en particulier un rétracte par déformation, cela résulte de la proposition 5.1.13. □

5.2.6. — Si $cat : \widehat{\Delta} \longrightarrow \boldsymbol{Cat}$ désigne l'adjoint à gauche du foncteur nerf, et si $Sd^2 : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ désigne le foncteur de subdivision barycentrique itéré deux fois (2.1.26), on obtient un foncteur

$$cat\ Sd^2 : \widehat{\Delta} \longrightarrow \boldsymbol{Cat}\ ,$$

lequel admet pour adjoint à droite le foncteur

$$Ex^2\ N : \boldsymbol{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta}\ ,$$

Ex^2 désignant le foncteur Ex (adjoint à droite de Sd), itéré deux fois.

Lemme 5.2.7. — *Pour tout complexe simplicial combinatoire (E, Φ) (2.1.33), on a des isomorphismes canoniques*

$$N\ cat\ Sd^2\ \kappa^*(E,\Phi) \simeq N\ \xi\Phi \simeq Sd\ N\ \Phi \simeq Sd^2\ \kappa^*(E,\Phi)$$

(où Φ est muni de la structure d'ensemble ordonné induite par l'inclusion).

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du lemme 2.1.37. □

Lemme 5.2.8. — *Soit $E \longrightarrow F$ une inclusion pleine d'ensembles ordonnés. Alors l'image de celle-ci par le foncteur ξ (cf.* 2.1.26*), $\xi E \longrightarrow \xi F$, est un morphisme de Dwyer.*

Démonstration. — L'inclusion d'ensembles ordonnés $\xi E \longrightarrow \xi F$ est trivialement un crible. D'autre part, le cocrible W engendré par ξE dans ξF est formé des $S \subset F$ tels que $S \cap E$ soit non vide. On définit un foncteur $r : W \longrightarrow \xi E$ par $S \longmapsto S \cap E$. Une vérification immédiate montre que celui-ci est un adjoint à droite de l'inclusion de ξE dans W. □

Proposition 5.2.9. — *Pour tout $n \geqslant 0$, le foncteur $cat\ Sd^2\ \partial\Delta_n \longrightarrow cat\ Sd^2\ \Delta_n$ est un morphisme de Dwyer, et donc, en particulier, une cofibration formelle.*

Démonstration. — On rappelle que l'inclusion canonique $i_n : \partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ est induite par l'inclusion de complexes simpliciaux combinatoires

$$(\Delta_n, \partial\Phi_n) \longrightarrow (\Delta_n, \xi\Delta_n)\ ,$$

où $\partial\Phi_n$ est l'ensemble des sous-ensembles non vides de Δ_n, différents de Δ_n (2.1.34). Comme le foncteur nerf est pleinement fidèle, la formule du lemme 5.2.7 montre que l'image de i_n par $cat\ Sd^2$ est l'image par ξ de l'inclusion d'ensembles ordonnés $\partial\Phi_n \longrightarrow \xi\Delta_n$. La proposition 5.2.5 et le lemme 5.2.8 impliquent donc l'assertion. □

Corollaire 5.2.10. — *Le foncteur $cat\ Sd^2$ envoie les monomorphismes de $\widehat{\Delta}$ sur des cofibrations formelles.*

Démonstration. — Comme les inclusions de bord forment un modèle cellulaire de $\widehat{\Delta}$, cela résulte aussitôt du fait que $cat\ Sd^2$ commute aux petites limites inductives, de l'argument du petit objet (1.2.23), et de la proposition 5.1.5. □

Lemme 5.2.11. — *Pour tout couple d'entiers n et k, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$, le foncteur canonique $cat\ Sd^2\ \Lambda^k_n \longrightarrow cat\ Sd^2\ \Delta_n$ est une cofibration formelle $\mathcal{W}_\infty$-triviale.*

Démonstration. — En vertu du corollaire ci-dessus, du lemme 5.2.7, et en reprenant les notations de 2.1.34, il s'agit de montrer que $\xi\Phi^k_n \longrightarrow \xi^2\Delta_n$ est une ∞-équivalence, ou encore, de manière équivalente, que le morphisme d'ensembles simpliciaux $Sd^2\ \Lambda^k_n \longrightarrow Sd^2\ \Delta_n$ est une extension anodine. Or cela résulte immédiatement du corollaire 2.1.27. □

Théorème 5.2.12* (Thomason [124]).** — *La catégorie* ***Cat *des petites catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant, dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences. Les cofibrations sont engendrées par l'ensemble I, formé des cofibrations formelles*

$$cat\, Sd^2\, \partial\Delta_n \longrightarrow cat\, Sd^2\, \Delta_n \quad , \quad n \geqslant 0 \ ,$$

et les cofibrations triviales par l'ensemble J, formé des flèches

$$cat\, Sd^2\, \Lambda^k_n \longrightarrow cat\, Sd^2\, \Delta_n \quad , \quad n \geqslant 1 \ , \ 0 \leqslant k \leqslant n \ .$$

Le couple de foncteurs adjoints $(cat\, Sd^2, Ex^2\, N)$ définit une équivalence de Quillen de la catégorie des ensembles simpliciaux vers celle des petites catégories. En outre, les foncteurs $cat\, Sd^2$ et $Ex^2\, N$ respectent les équivalences faibles, et les morphismes d'adjonction

$$cat\, Sd^2\, Ex^2\, N \longrightarrow 1_{Cat} \quad et \quad 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex^2\, N\, cat\, Sd^2$$

sont des ∞-équivalences naturelles.

Démonstration. — En vertu de la proposition 2.3.19, on a une ∞-équivalence naturelle $N \longrightarrow Ex^2\, N$. Par conséquent, $(Ex^2\, N)^{-1} i_\Delta^{-1} \mathcal{W}_\infty = \mathcal{W}_\infty$. Il résulte d'autre part du corollaire 5.2.3 et du lemme 5.2.11 que $l(r(J)) \subset \mathcal{W}_\infty$, et comme en vertu du corollaire 5.2.2, tout *ensemble* de flèches de ***Cat*** permet l'argument du petit objet, la proposition 1.4.23 implique que l'on a bien défini ainsi une structure de catégorie de modèles fermée sur ***Cat*** dont toutes les cofibrations sont des cofibrations formelles (5.2.3, 5.2.9). La propreté à gauche de cette structure est assurée par la proposition 5.1.16. La propreté à droite résulte de la propreté du Δ-localisateur $i_\Delta^{-1} \mathcal{W}_\infty$, et du fait que $Ex^2\, N$ respecte les fibrations (par définition d'icelles) et commute aux produits fibrés. Il est par ailleurs immédiat que le couple $(cat\, Sd^2, Ex^2\, N)$ est une adjonction de Quillen. Comme tous les ensembles simpliciaux sont cofibrants, le lemme de Ken Brown [**74**, lemme 1.1.12] implique que le foncteur $cat\, Sd^2$ respecte les équivalences faibles. Pour conclure, vue la forte saturation des ∞-équivalences, il suffit donc de montrer que le foncteur $Ex^2\, N$ induit une équivalence de catégories après localisation, ce qui résulte aussitôt de la propriété analogue pour le foncteur nerf. □

5.2.13. — On appellera *cofibrations de Thomason* les cofibrations pour la structure de catégorie de modèles fermée ci-dessus. Il est immédiat que toute cofibration de Thomason est une cofibration formelle. De même, on appellera *fibrations de Thomason triviales* les fibrations triviales au sens de cette structure de catégorie de modèles fermée (*i.e.* les flèches vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations de Thomason).

Lemme 5.2.14. — *Pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$, le foncteur $cat\, Sd^2$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences.*

Démonstration. — Toute ∞-équivalence étant une $\mathcal{W}$-équivalence, il résulte de la dernière assertion du théorème ci-dessus qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux f est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si $Ex^2\, N\, cat\, Sd^2\, f$ en est une, et donc si et seulement si $N\, cat\, Sd^2\, f$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, ce qui implique aussitôt l'assertion. □

Théorème 5.2.15. — *Pour tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$, la catégorie $\boldsymbol{Cat}$ des petites catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les cofibrations de Thomason, et dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences. En outre, pour que cette structure soit propre (à droite), il faut et il suffit que $\mathcal{W}$ soit propre.*

Démonstration. — L'existence de cette structure, ainsi que la propreté à gauche s'établit en invoquant les mêmes arguments que pour celle du théorème 5.2.12 (grâce aux corollaires 5.2.3, 5.2.10 et au lemme 5.2.14). Si $\mathcal{W}$ est propre, alors $i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ est propre, et la propreté de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\boldsymbol{Cat}$ s'obtient comme ci-dessus en utilisant le foncteur $Ex^2\, N$, car dans cette situation encore, par construction, une flèche de $\boldsymbol{Cat}$ est une fibration (resp. une équivalence faible) si et seulement si son image par $Ex^2\, N$ en est une dans $\widehat{\Delta}$. Il reste donc à vérifier que réciproquement, si cette structure de catégorie de modèles fermée est propre, alors $\mathcal{W}$ est propre. Supposons que c'est le cas, et considérons une $\mathcal{W}$-catégorie test A, et $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A. On obtient un carré commutatif de catégories (les flèches horizontales sont induites par les foncteurs d'oubli évidents)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/X & \xrightarrow{u_!} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/Y \\ {\scriptstyle \bar{\jmath}_{A/X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\jmath}_{A/Y}} \\ \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/(A/X) & \xrightarrow[(i_A u)_!]{} & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/(A/Y) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences de catégories (4.4.20). Si u est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors en vertu de la proposition 1.5.20 appliquée à $\boldsymbol{Cat}$, le foncteur $(i_A u)_!$ est une équivalence de catégories, ce qui implique qu'il en est de même du foncteur $u_!$. Une nouvelle application de la proposition 1.5.20 (cette fois à $\widehat{A}$) montre donc que u est une équivalence faible propre à droite, ce qui achève la démonstration. □

5.2.16. — Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental accessible, la structure de catégorie de modèles fermée sur $\boldsymbol{Cat}$ définie dans le théorème précédent sera appelée la *structure de catégorie de modèles de Thomason associée à $\mathcal{W}$*. On appellera alors *$\mathcal{W}$-fibrations de Thomason* les fibrations de cette structure de catégorie de modèles fermée. Une petite catégorie A sera dite *$\mathcal{W}$-fibrante* si le foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est une $\mathcal{W}$-fibration de Thomason.

Proposition 5.2.17. — *Si $u : A \longrightarrow B$ est une $\mathcal{W}$-fibration de Thomason, alors pour tout objet b de B, la catégorie A/b est $\mathcal{W}$-fibrante.*

Démonstration. — Le foncteur $u/b : A/b \longrightarrow B/b$ est une $\mathcal{W}$-fibration de Thomason, puisqu'il est obtenu à partir de u par changement de base. Il suffit donc de prouver que B/b est $\mathcal{W}$-fibrante. On est donc ramené à démontrer que si C est une petite catégorie admettant un objet final, alors le foncteur de C vers la catégorie ponctuelle est une fibration de Thomason triviale. Or cela résulte aussitôt du fait que les cofibrations de Thomason sont en particulier des immersions ouvertes (grâce au lemme 5.1.10, à l'argument du petit objet, et à la proposition 5.2.9) et du lemme 4.1.16. □

5.2.18. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible. Un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ est une *$\mathcal{W}$-bifibration de Thomason* s'il est une $\mathcal{W}$-fibration de Thomason, et s'il en est de même du foncteur $u^{op} : A^{op} \longrightarrow B^{op}$.

Il résulte du septième sorite de 3.3.8 et du théorème 5.2.15 que $\boldsymbol{Cat}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, et les fibrations, les foncteurs $u : A \longrightarrow B$ tels que $u^{op} : A^{op} \longrightarrow B^{op}$ soit une $\mathcal{W}$-fibration de Thomason (et bien sûr, cette structure est propre si et seulement si $\mathcal{W}$ l'est). Cette structure sera appelée la *structure de catégorie de modèles fermée duale associée à $\mathcal{W}$*. On en déduit l'énoncé suivant.

Proposition 5.2.19. — *Pour tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$, la catégorie des petites catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, et les fibrations, les $\mathcal{W}$-bifibrations de Thomason. Cette structure de catégorie de modèles fermée est propre si et seulement si $\mathcal{W}$ est propre.*

Démonstration. — On note $\boldsymbol{Cat}^{\mathcal{W}}_{can}$ (resp. $\boldsymbol{Cat}^{\mathcal{W}}_{duale}$) la catégorie $\boldsymbol{Cat}$ munie de la structure de catégorie de modèles fermée (à engendrement cofibrant) de Thomason (resp. duale) associée à $\mathcal{W}$. On obtient de la sorte une catégorie de modèles fermée produit $\boldsymbol{Cat}^{\mathcal{W}}_{can} \times \boldsymbol{Cat}^{\mathcal{W}}_{duale}$. On définit un foncteur

$$G : \boldsymbol{Cat}^{\mathcal{W}}_{can} \times \boldsymbol{Cat}^{\mathcal{W}}_{duale} \longrightarrow \boldsymbol{Cat}$$

par $G(A, B) = A \amalg B^{op}$, et un foncteur

$$D : \boldsymbol{Cat} \longrightarrow \boldsymbol{Cat}^{\mathcal{W}}_{can} \times \boldsymbol{Cat}^{\mathcal{W}}_{duale}$$

par $D(C) = (C, C^{op})$. Il est clair que G est un adjoint à gauche du foncteur D. On remarque qu'un foncteur entre petites catégories est une $\mathcal{W}$-équivalence (resp. est une $\mathcal{W}$-bifibration de Thomason) si et seulement si son image par le foncteur D est une équivalence faible (resp. une fibration). Pour conclure, il suffit donc de prouver que les hypothèses de la proposition 1.4.23 sont vérifiées, ce qui résulte immédiatement

du corollaire 5.2.3, des sorites 3.3.8, et des propositions 5.1.5 et 5.1.6. L'assertion concernant la propreté est conséquence du théorème 5.2.15 et du corollaire 1.5.21. □

Remarque 5.2.20. — La structure de catégorie de modèles fermée obtenue dans la proposition précédente est définie de telle manière que l'automorphisme de ***Cat*** qui associe à une petite catégorie C sa catégorie duale C^{op} respecte les équivalences faibles, les cofibrations, et les fibrations.

5.3. Approximations propres et lisses

5.3.1. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental.

Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est *$\mathcal{W}$-propre*, ou plus simplement, *propre*, si pour tout objet b de B, le foncteur canonique

$$A_b \longrightarrow A/b \quad , \qquad a \longmapsto (a, 1_b)$$

est $\mathcal{W}$-coasphérique.

Dualement, un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est *$\mathcal{W}$-lisse*, ou plus simplement, *lisse*, si pour tout objet b de B, le foncteur canonique

$$A_b \longrightarrow b\backslash A \quad , \qquad a \longmapsto (a, 1_b)$$

est $\mathcal{W}$-asphérique (ce qui revient à dire que le foncteur $u^{op} : A^{op} \longrightarrow B^{op}$ est propre).

Exemple 5.3.2. — Toute précofibration est propre, et toute préfibration est lisse (cela résulte aussitôt de 3.3.8 et de 3.3.12). En particulier, toute immersion ouverte (4.1.15) est lisse, et dualement, toute immersion fermée est propre.

5.3.3. — Les résultats qui vont suivre sont tous démontrés dans [**96**]. Ils ne concernent que les foncteurs propres. Par dualité, ils impliquent des énoncés analogues pour les foncteurs lisses que nous laissons au lecteur de loisir d'expliciter.

Proposition 5.3.4. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de **Cat**. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est propre ;*

(b) *pour tout objet a de A, les fibres du morphisme*

$$a\backslash A \longrightarrow b\backslash B \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u, sont asphériques ;

(c) *pour tout morphisme $B' = \Delta_1 \longrightarrow B$ de **Cat**, si l'on forme le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} A' = A \times_B B' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

l'inclusion $A'_1 \hookrightarrow A'$, de la fibre de A' au-dessus de l'objet 1 de $B' = \Delta_1$, est un morphisme coasphérique ;

(d) *pour toute flèche $f_0 : b_0 \to b_1$ de B, et tout objet a_0 de A_{b_0}, la catégorie $A(a_0, f_0)$ dont les objets sont les flèches $f : a_0 \to a$ de source a_0 qui relèvent f_0 ($u(f) = f_0$), et dont les morphismes sont les triangles commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} & a_0 & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f'} \\ a & \xrightarrow[g]{} & a' \end{array} \quad ,$$

avec g morphisme de A_{b_1} ($u(g) = 1_{b_1}$), est asphérique.

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 3.2.3]. □

Remarque 5.3.5. — La proposition ci-dessus implique que $u : A \to B$ est propre si et seulement si pour tout objet b de B, le foncteur canonique $b\backslash A \to b\backslash B$ est propre [**96**, lemme 3.2.7]. Or ces derniers sont des foncteurs dont les fibres sont asphériques, ce qui a son intérêt en vertu des corollaires suivants.

Corollaire 5.3.6. — *Les morphismes propres sont stables par changement de base, autrement dit, pour tout carré cartésien dans* **Cat**

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

si u est propre, il en est de même de u'.

Démonstration. — Voir [**96**, corollaire 3.2.4]. □

Corollaire 5.3.7. — *Un foncteur propre est asphérique si et seulement s'il est universellement une équivalence faible (*i.e. *s'il est une équivalence faible et le reste après tout changement de base).*

Démonstration. — On voit facilement qu'un foncteur propre est asphérique si et seulement si ses fibres sont asphériques. Les foncteurs propres étant stables par changement de base en vertu du corollaire précédent, et les foncteurs à fibres asphériques étant stables par changement de base pour des raisons évidentes, cela implique ce corollaire. □

Proposition 5.3.8. — *Les morphismes propres sont stables par composition.*

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 3.2.10]. □

5.3.9. — Les notions de foncteurs propres et de foncteurs lisses vont jouer un grand rôle dans la suite du texte, en particulier dans la construction de carrés homotopiquement cartésiens dans $\mathcal{C}at$. En fait on s'attend à ce que les foncteurs à la fois propres et lisses jouent le rôles de « fibrations formelles » en un sens homotopique adéquat (voir par exemple le corollaire 6.4.8 ainsi que le théorème 6.4.15, et son corollaire). Cela explique pourquoi on peut aussi s'attendre à ce qu'il existe une structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, et telle que toute fibration (au sens de cette structure de catégorie de modèles) soit à la fois propre et lisse. Ce qui suit consiste à obtenir (un peu de force, il faut bien l'avouer) une telle structure à partir de celle donnée par la proposition 5.2.19.

Proposition 5.3.10. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. On note v le foncteur canonique*

$$v : \mathcal{H}om(\Delta_1, A) \longrightarrow A \times_B \mathcal{H}om(\Delta_1, B)$$

correspondant au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om(\Delta_1, A) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\Delta_1, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow[u]{} & B \end{array}$$

dont les flèches verticales sont induites par l'inclusion $\{0\} \longrightarrow \Delta_1$. Pour que le foncteur u soit $\mathcal{W}$-propre, il faut et il suffit que les fibres du foncteur v soient $\mathcal{W}$-asphériques.

Démonstration. — Un objet de $A \times_B \mathcal{H}om(\Delta_1, B)$ correspond à un couple (a, f) dans lequel a est un objet de A, et $f : b \longrightarrow b'$ une flèche de B tels que $ua = b$. Or il est immédiat que la fibre de v au-dessus de (a, f) est la catégorie $A(a, f)$ de la condition (d) de la proposition 5.3.4, ce qui implique aussitôt l'assertion. □

Proposition 5.3.11. — *Soit $i : A \longrightarrow B$ une immersion fermée de petites catégories. Le foncteur canonique*

$$j : B \times \{0\} \cup A \times \Delta_1 = B \times \{0\} \amalg_{A \times \{0\}} A \times \Delta_1 \longrightarrow B \times \Delta_1 \quad ,$$

induit par l'inclusion $\{0\} \longrightarrow \Delta_1$, est un rétracte par déformation.

Démonstration. — On vérifie que $B \times \{0\} \amalg_{A \times \{0\}} A \times \Delta_1$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $B \times \Delta_1$ formée des objets de la forme (a, e), avec a dans A et $e = 0, 1$, ou de la forme $(b, 0)$, avec b dans B (exercice facile laissé au lecteur). On définit un foncteur

$$r : B \times \Delta_1 \longrightarrow B \times \{0\} \cup A \times \Delta_1$$

par $r(a,e) = (a,e)$, pour a dans A et $e = 0,1$, $r(b,0) = (b,0)$, pour b dans B, et $r(b,1) = (b,0)$, pour b dans le complémentaire de A. Le fait que cela définisse bien un foncteur (avec les définitions évidentes pour les flèches) résulte immédiatement du fait que A est un cocrible de B. Il est clair que rj est l'identité de $B \times \{0\} \cup A \times \Delta_1$, et on définit un morphisme de foncteurs $\varepsilon : jr \longrightarrow 1_{B\times\Delta_1}$ de la seule manière raisonnable possible : $\varepsilon_{(b,e)}$ est l'identité si b est dans A ou si $e = 0$, et est le morphisme $(b,0) \longrightarrow (b,1)$ lorsque b n'est pas dans A et $e = 1$. Il est clair que r et ε font de j un rétracte par déformation. □

5.3.12. — On note L l'ensemble des foncteurs de la forme

$$cat\, Sd^2\, \Delta_n \times \{1\} \cup cat\, Sd^2\, \partial\Delta_n \times \Delta_1 \longrightarrow cat\, Sd^2\, \Delta_n \times \Delta_1 \quad ,$$

pour $n \geqslant 0$. On désigne par P l'ensemble des foncteurs de la forme $u^{op} : A^{op} \longrightarrow B^{op}$, pour $u : A \longrightarrow B$ dans L.

Un foncteur entre petites catégories sera dit *fortement lisse* (resp. *fortement propre*) s'il vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à L (resp. relativement à P). Un foncteur sera dit *fortement propre et lisse* s'il est fortement propre et fortement lisse.

On vérifie aussitôt qu'un foncteur u est fortement propre si et seulement si u^{op} est fortement lisse.

Proposition 5.3.13. — *Tout foncteur fortement propre (resp. fortement lisse) est propre (resp. lisse) pour tout localisateur fondamental.*

Démonstration. — Un argument standard d'adjonction montre que si un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est fortement propre, alors le foncteur v de la proposition 5.3.10 vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux morphismes du type

$$(cat\, Sd^2\, \partial\Delta_n)^{op} \longrightarrow (cat\, Sd^2\, \Delta_n)^{op} \quad ,$$

pour tout $n \geqslant 0$. Autrement dit, le foncteur v^{op} est une fibration de Thomason triviale. En particulier, le foncteur v^{op} est une équivalence faible universelle, ce qui implique qu'il en est de même de v (voir 3.3.8). La proposition 5.3.10 implique donc que u est un foncteur propre. On en déduit, par une nouvelle application du septième sorite de 3.3.8, que tout foncteur fortement lisse est lisse. □

Théorème 5.3.14. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible. Alors la catégorie des petites catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, et les fibrations, les $\mathcal{W}$-bifibrations de Thomason fortement propres et lisses. En particulier, toutes les fibrations au sens de cette structure de catégorie de modèles fermée sont des foncteurs $\mathcal{W}$-propres et $\mathcal{W}$-lisses. En outre, pour que cette structure de catégorie de modèles fermée soit propre, il faut et il suffit que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ soit propre.*

Démonstration. — En vertu du corollaire 5.1.9 et du septième sorite de 3.3.8 et des propositions 5.1.6, 5.2.9 et 5.3.11, tous les éléments de $L \cup P$ sont des cofibrations formelles $\mathcal{W}$-triviales. La proposition 5.2.19 montre que $\boldsymbol{Cat}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, et les fibrations, les $\mathcal{W}$-bifibrations de Thomason. Soit (I, J) un couple qui engendre cette structure de catégorie de modèles fermée. Posons $I' = I \cup L \cup P$, et $J' = J \cup L \cup P$. Un morphisme de $\boldsymbol{Cat}$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à I' (resp. à J') si et seulement s'il est à la fois une $\mathcal{W}$-bifibration de Thomason triviale (resp. une $\mathcal{W}$-bifibration de Thomason) et un foncteur fortement propre et lisse. Il est donc clair qu'un élément de $r(J')$ est dans $r(I')$ si et seulement s'il est une $\mathcal{W}$-équivalence. D'autre part, il résulte de l'argument du petit objet (5.2.3) que tous les éléments de $l(r(I'))$ (resp. de $l(r(J'))$ sont des cofibrations formelles (resp. des cofibrations formelles $\mathcal{W}$-triviales). On en déduit que $l(r(J')) = l(r(I')) \cap \mathcal{W}$. En effet, si u est dans $l(r(I')) \cap \mathcal{W}$, l'argument du petit objet appliqué à J' nous donne une factorisation de u de la forme $u = pi$, où i est dans $l(r(J'))$, et p dans $r(J')$. Mais alors, comme i est une $\mathcal{W}$-équivalence, p est dans $r(I') = r(J') \cap \mathcal{W}$, ce qui implique que u est un rétracte de i, et donc qu'il est dans $l(r(J'))$. L'argument du petit objet assurant l'existence des factorisations de l'axiome CM5, on en déduit que $\boldsymbol{Cat}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée engendrée par le couple (I', J') dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, et les fibrations, les $\mathcal{W}$-bifibrations de Thomason fortement propres et lisses. Les assertions concernant la propreté résultent de leurs analogues dans la proposition 5.2.19 et du corollaire 1.5.21. Le fait que les fibrations au sens de cette structure soient propres et lisses découle de la proposition précédente. □

CHAPITRE 6

CHANGEMENTS DE BASE HOMOTOPIQUES

6.1. Propreté et asphéricité

Proposition 6.1.1. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. On considère un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme p est une $\mathcal{W}$-fibration faible de préfaisceaux sur A.*

(ii) *Pour tous carrés cartésiens de préfaisceaux sur A*

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{i} & X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y'' & \xrightarrow[j]{} & Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \quad ,$$

si Y'' et Y' sont $\mathcal{W}$-asphériques, alors i est une $\mathcal{W}$-équivalence.

(iii) *Pour tous carrés cartésiens de préfaisceaux sur A*

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{i} & X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y'' & \xrightarrow[j]{} & Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \quad ,$$

si Y'' est représentable et si Y' est $\mathcal{W}$-asphérique, alors i est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — Il est immédiat que (*i*) implique (*ii*) et que (*ii*) implique (*iii*). Montrons que (*iii*) implique (*i*). Le A-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ étant régulier et propre (voir 4.2.9 et 4.4.30), il suffit de vérifier le critère donné par le corollaire 3.4.49. Soit $s : a \longrightarrow Y$ un morphisme d'un préfaisceau représentable a sur A vers Y. On le factorise en une $\mathcal{W}$-cofibration triviale $j : a \longrightarrow E$ suivie d'une $\mathcal{W}$-fibration $q : E \longrightarrow Y$. Le préfaisceau a étant $\mathcal{W}$-asphérique et j étant une $\mathcal{W}$-équivalence, le préfaisceau E est $\mathcal{W}$-asphérique. L'hypothèse faite sur p implique donc que le

morphisme image inverse $a \times_Y X \longrightarrow E \times_Y X$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Autrement dit, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} a \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ a & \xrightarrow[s]{} & Y \end{array}$$

est homotopiquement cartésien au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 6.1.2. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. On considère un morphisme d'ensembles simpliciaux $p : X \longrightarrow Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme p est une $\mathcal{W}$-fibration faible d'ensembles simpliciaux.*

(ii) *Pour tous carrés cartésiens d'ensembles simpliciaux*

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{i} & X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y'' & \xrightarrow[j]{} & Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \quad ,$$

si Y'' et Y' sont les nerfs de petites catégories $\mathcal{W}$-asphériques, alors i est une $\mathcal{W}$-équivalence.

(iii) *Pour tous carrés cartésiens d'ensembles simpliciaux*

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{i} & X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y'' & \xrightarrow[j]{} & Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \quad ,$$

si Y'' et Y' sont $\mathcal{W}$-asphériques, alors i est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — Il est clair que (i) implique (ii), et la proposition précédente montre que (iii) implique (i). Pour montrer que (ii) implique (iii), on utilisera le Δ/Y-localisateur W formé des flèches $Y'' \longrightarrow Y'$ au-dessus de Y telles que si on forme les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{i} & X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y'' & \xrightarrow[j]{} & Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \quad ,$$

le morphisme i soit une $\mathcal{W}$-équivalence. La proposition 2.2.5 implique que W contient les ∞-équivalences. Or si $Y'' \longrightarrow Y'$ est un morphisme au-dessus de Y entre ensembles

simpliciaux $\mathcal{W}$-asphériques, on a un carré commutatif au-dessus de Y

$$\begin{array}{ccc} N(\Delta/Y'') & \longrightarrow & N(\Delta/Y') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y'' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des ∞-équivalences (grâce à la proposition 4.3.16), et la flèche horizontale supérieure est une W-équivalence. On en déduit que $Y'' \longrightarrow Y'$ est aussi une W-équivalence, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 6.1.3. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. On suppose donnée une classe $\mathcal{A}$ de préfaisceaux sur A. Pour chaque préfaisceau X sur A, on note W_X le A/X-localisateur régulier engendré par les morphismes entre éléments de $\mathcal{A}$ au-dessus de X. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.*

(a) *Tout élément de $\mathcal{A}$ est un préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique, et tout préfaisceau représentable est dans $\mathcal{A}$.*

(b) *Pour tout préfaisceau X sur A, le A/X-localisateur W_X est accessible.*

(c) *Pour tout préfaisceau représentable a sur A, tout morphisme entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques au-dessus de a est dans W_a.*

(d) *Pour qu'un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ soit une $\mathcal{W}$-fibration faible de préfaisceaux sur A, il suffit que pour tous carrés cartésiens*

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{i} & X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y'' & \xrightarrow[j]{} & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

avec Y'' et Y' dans $\mathcal{A}$, le morphisme i soit une $\mathcal{W}$-équivalence.

Alors $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est le A-localisateur régulier engendré par les morphismes entre éléments de $\mathcal{A}$.

Démonstration. — Soit W le A-localisateur régulier engendré par les morphismes entre éléments de $\mathcal{A}$. Pour montrer que $\mathsf{W} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, on décompose la preuve comme suit.

6.1.3.1. — *Toute W-équivalence est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

On sait que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est régulier (4.2.9), et il est clair qu'il contient les morphismes entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A, ce qui implique aussitôt l'assertion en vertu de l'hypothèse (a).

6.1.3.2. — *Pour tout élément X de $\mathcal{A}$, les W_X-équivalences forment un A/X-localisateur propre.*

Dans ce cas, il résulte aussitôt de (a) et du théorème 4.2.15 (ou plus précisément de la remarque qui le suit) que W_X est le A/X-localisateur test correspondant au localisateur fondamental modelable par A/X engendré par les foncteurs de la forme $A/X' \longrightarrow e$ pour tout élément X' de $\mathcal{A}$ et toute flèche de X' vers X. Il résulte d'autre part de (b) et d'une nouvelle application du théorème 4.2.15 que ce localisateur fondamental est accessible. Vu qu'il est à engendrement asphérique par construction, l'assertion est à présent une simple conséquence du corollaire 4.3.28.

6.1.3.3. — *Pour tout préfaisceau X sur A, le foncteur d'oubli de $\widehat{A}/X$ vers $\widehat{A}$ envoie W_X dans W.*

Soit $\mathcal{U}$ ledit foncteur d'oubli, et posons $\mathsf{W}' = \mathcal{U}^{-1}\mathsf{W}$. Il est clair que W' est un A/X-localisateur, et il s'agit de vérifier qu'il contient W_X. Pour cela, il suffit de constater qu'il est régulier (ce qui résulte de la proposition 3.4.16), et qu'il contient les morphismes entre éléments de $\mathcal{A}$ au-dessus de X (ce qui est évident).

6.1.3.4. — *Le A-localisateur W est accessible.*

C'est un cas particulier de l'hypothèse (b).

La catégorie des préfaisceaux sur A admet donc une structure de catégorie de modèles fermée dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les W-équivalences. En particulier, tout morphisme de préfaisceaux sur A admet une factorisation en une W-cofibration triviale suivie d'une W-fibration.

6.1.3.5. — *Si $p : X \longrightarrow Y$ est une W-fibration, alors c'est une W_Y-fibration.*

Cela résulte aussitôt de 6.1.3.3 et de la caractérisation des fibrations d'une catégorie de modèles fermée par la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations triviales.

6.1.3.6. — *Toute W-fibration est une $\mathcal{W}$-fibration faible de préfaisceaux sur A.*

Les W-fibrations étant stables par changement de base, il résulte donc de (d) et de 6.1.3.1 qu'il suffit de vérifier que pour tout carré cartésien de $\widehat{A}$ de la forme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow[j]{} & Y \end{array} \quad ,$$

si Y' et Y sont dans $\mathcal{A}$, et si p est une W-fibration, alors i est une W-équivalence. Or dans ce cas, il résulte de 6.1.3.5 que p est une W_Y-fibration, et il est clair que le morphisme j est alors une W_Y-équivalence. D'autre part, en vertu de 6.1.3.2, le A/Y-localisateur W_Y est propre. On en déduit aussitôt que i est une W_Y-équivalence. En invoquant 6.1.3.3, cela implique dès lors que i est une W-équivalence, ce qu'il fallait démontrer.

6.1.3.7. — *Toute $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{A}$ est une* W*-équivalence.*

Soit f une $\mathcal{W}$-équivalence de préfaisceaux sur A. On la factorise en une W-cofibration triviale i suivie d'une W-fibration $p : X \longrightarrow Y$. En particulier, en vertu de 6.1.3.6, p est une $\mathcal{W}$-fibration faible de préfaisceaux sur A. Or il résulte de 6.1.3.1 que i est aussi une $\mathcal{W}$-équivalence, ce qui implique qu'il en est de même de p. Le A-localisateur des $\mathcal{W}$-équivalences étant propre en vertu du théorème 4.4.30, on en déduit aussitôt grâce à la proposition 1.5.18 que p est une $\mathcal{W}$-équivalence universelle. Par conséquent, pour tout préfaisceau représentable a sur A, et toute section de Y au-dessus de a, la projection de $a \times_Y X$ sur a est une $\mathcal{W}$-équivalence. Mais alors, le préfaisceau a étant $\mathcal{W}$-asphérique, le produit fibré $a \times_Y X$ vérifie la même propriété, et par conséquent, l'hypothèse (c) implique que ce morphisme est une W_a-équivalence. Il résulte donc de 6.1.3.3 que c'est une W-équivalence. Le A-localisateur W étant régulier par construction, il s'en suit grâce au corollaire 3.4.47 que p est une W-équivalence. On en déduit aussitôt qu'il en est de même de f, ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Lemme 6.1.4. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Alors pour tout cardinal assez grand α, si on pose $\beta = 2^\alpha$, pour tout préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique E sur A, il existe une fibration triviale $D \longrightarrow E$ telle que D soit la réunion filtrante de ses sous-préfaisceaux à la fois $\mathcal{W}$-asphériques et β-accessibles.*

Démonstration. — En vertu du corollaire 4.2.18 et du théorème 1.4.3, $\mathsf{W} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est un A-localisateur accessible, et donc pour tout cardinal α assez grand, les cofibrations triviales au sens de W satisfont à l'énoncé de la proposition 1.3.40. On considère un tel cardinal infini $\alpha \geqslant |\operatorname{Fl} A|$, et on pose $\beta = 2^\alpha$. Les préfaisceaux β-accessibles sont alors stables par réunions finies (cf. 1.2.10 et 1.2.16), et tout préfaisceau sur A est la réunion filtrante de ses sous-objets β-accessibles (cf. 1.2.15). Soit E un préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique sur A. S'il est vide, l'assertion est évidente. Sinon, il existe un objet a de A, et une section $a \longrightarrow E$ de E au-dessus de a. On peut alors la factoriser en une cofibration $i : a \longrightarrow D$ suivie d'une fibration triviale $D \longrightarrow E$. Dans ce qui suit, on identifiera par i le préfaisceau a à un sous-objet de D.

6.1.4.1. — *Tout sous-objet β-accessible J de D est contenu dans un sous-objet à la fois β-accessible et asphérique K de D.*

Soit J un un sous-préfaisceau β-accessible de D. Comme $J \cup a$ est encore β-accessible, en vertu de la proposition 1.3.40, il existe un sous-préfaisceau β-accessible K de D, contenant $J \cup a$ tel que l'inclusion $a \cap K = a \longrightarrow K$ soit une W-équivalence.

6.1.4.2. — *L'ensemble des sous-préfaisceaux à la fois β-accessibles et asphériques de D est filtrant.*

Ce dernier n'est pas vide puisque i en donne un élément. Si C et C' sont deux sous-préfaisceaux à la fois β-accessibles et asphériques de D, comme $C \cup C'$ est encore β-accessible, il résulte de 6.1.4.1 qu'il existe un sous-préfaisceau à la fois β-accessible et asphérique de D qui contient $C \cup C'$, ce qui prouve l'assertion.

6.1.4.3. — *Le préfaisceau D est la réunion filtrante de ses sous-préfaisceaux à la fois β-accessibles et asphériques.*

Étant donné que D est la réunion filtrante de ses sous-préfaisceaux β-accessibles, c'est une conséquence immédiate de 6.1.4.1 et de 6.1.4.2. □

Remarque 6.1.5. — Il est possible d'améliorer le lemme ci-dessus comme suit : pour tout cardinal assez grand α, si on pose $\beta = 2^\alpha$, tout préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique sur A est la réunion filtrante de ses sous-préfaisceaux β-accessibles et $\mathcal{W}$-asphériques. Pour le montrer, on remarque que la preuve ci-dessus permet de vérifier l'assertion lorsque A est une $\mathcal{W}$-catégorie test telle que tout préfaisceau non vide sur A admette une section globale. En particulier, on obtient le résultat pour les ensembles simpliciaux. Pour en déduire le cas général, on applique ensuite le même type de méthode que pour la preuve de la proposition 1.4.20, en utilisant le foncteur $N\, i_A : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{\Delta}$. Il est même amusant de constater que cela ne nécessite aucune hypothèse sur A. Ceci dit, ce raffinement ne sera pas utilisé dans la suite.

Lemme 6.1.6. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Il existe un* ensemble $\mathcal{A}_0$ *de préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A tel que pour tout préfaisceau X sur A, le A/X-localisateur régulier engendré par les morphismes entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques au-dessus de X soit le A/X-localisateur régulier engendré par les morphismes entre éléments de $\mathcal{A}_0$ au-dessus de X. En particulier, ce A/X-localisateur est accessible.*

Démonstration. — On peut supposer que $\mathcal{W}$ n'est pas le localisateur fondamental trivial Fl $\boldsymbol{Cat}$ (car sinon l'assertion est évidente). En particulier, on peut supposer que tout préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique n'est pas vide. Pour qu'un A-localisateur contienne tous les morphismes entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques, il suffit alors qu'il contienne tous les morphismes allant d'un préfaisceau représentable vers un préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique.

Considérons un cardinal α assez grand, de telle manière que l'énoncé du lemme 6.1.4 soit vérifié, et posons $\beta = 2^\alpha$. Nous allons montrer que tout ensemble $\mathcal{A}_0$ de préfaisceaux sur A contenant au moins un représentant de chaque classe d'isomorphisme de préfaisceaux à la fois $\mathcal{W}$-asphériques et β-accessibles sur A (et en particulier de préfaisceaux représentables) vérifie la propriété voulue. Soit X un préfaisceau sur A. Soit W le A/X-localisateur régulier engendré par les morphismes de la forme $a \longrightarrow E$ au-dessus de X, a étant un préfaisceau représentable, et E un préfaisceau β-accessible et $\mathcal{W}$-asphérique sur A. Comme W est régulier, il est en particulier stable par

petites limites inductives filtrantes (3.4.41), et donc le lemme 6.1.4 implique que tout morphisme de la forme $s : a \longrightarrow E$, a étant représentable, et E $\mathcal{W}$-asphérique, est une W-équivalence. En effet, une fois choisie une fibration triviale $p : D \longrightarrow E$ dont la source est la réunion filtrante de ses sous-préfaisceaux à la fois β-accessibles et $\mathcal{W}$-asphériques, il existe un morphisme $t : a \longrightarrow D$ tel que $pt = s$. Or a est un objet de présentation finie, et donc D est la réunion filtrante de ses sous-préfaisceaux à la fois β-accessibles et $\mathcal{W}$-asphériques qui contiennent $t(a)$. Cela implique que t est une limite inductive filtrante de morphismes de la forme $a \longrightarrow D'$, D' étant β-accessible et $\mathcal{W}$-asphérique. On en déduit que t est dans W, et comme il en est de même de p pour des raisons évidentes, s est bien une W-équivalence. Le A/X-localisateur régulier minimal étant accessible (3.4.24), il est clair que W l'est aussi. □

6.1.7. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On désigne par $\mathcal{W}_{asph}$ le plus petit localisateur fondamental qui trivialise la classe des catégories $\mathcal{W}$-asphériques (cf. 4.3.26). On a une inclusion $\mathcal{W}_{asph} \subset \mathcal{W}$, et une petite catégorie est $\mathcal{W}$-asphérique si et seulement si elle est $\mathcal{W}_{asph}$-asphérique. De même, un foncteur entre petites catégories est $\mathcal{W}$-asphérique si et seulement s'il est $\mathcal{W}_{asph}$-asphérique. Pour que $\mathcal{W}$ soit à engendrement asphérique (cf. 4.3.26), il faut et il suffit que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{asph}$.

Proposition 6.1.8. — *Pour tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$, le localisateur fondamental $\mathcal{W}_{asph}$ est propre (en particulier, accessible).*

Démonstration. — Une fois choisie une $\mathcal{W}$-catégorie test A, l'accessibilité résulte du théorème 4.2.15 et du lemme 6.1.6 appliqués à A. La propreté est quant à elle conséquence du corollaire 4.3.28. □

Proposition 6.1.9. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Le A-localisateur des $\mathcal{W}$-équivalences est le A-localisateur régulier engendré par les morphismes entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A. Plus précisément, il existe un* ensemble *$\mathcal{A}_0$ de préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A tel que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit le A-localisateur régulier engendré par les morphismes entre éléments de $\mathcal{A}_0$.*

Démonstration. — Pour prouver la première assertion, il suffit de montrer que les hypothèses de la proposition 6.1.3 sont vérifiées en considérant la classe $\mathcal{A}$ des préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A. Or les conditions (b) et (d) résultent respectivement du lemme 6.1.6 (lequel impliquera par ailleurs la seconde assertion) et de la proposition 6.1.1. Les hypothèses (a) et (c) de la proposition 6.1.3 sont quant à elles vérifiées par définition même de $\mathcal{A}$. □

Corollaire 6.1.10. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Alors A est une $\mathcal{W}_{asph}$-catégorie test locale. En outre, le A-localisateur des $\mathcal{W}_{asph}$-équivalences est propre (et donc en particulier accessible), et s'identifie au A-localisateur régulier engendré par les morphismes entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A.*

Démonstration. — Il est clair que A est encore une $\mathcal{W}_{asph}$-catégorie test locale, car pour tout objet a de A, le préfaisceau $i_A^*\Delta_1 \times a$ est $\mathcal{W}$-asphérique. Le corollaire résulte aussitôt des propositions 6.1.8 et 6.1.9 et du théorème 4.4.30. □

Théorème 6.1.11. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est accessible et à engendrement asphérique.*

(ii) *Il existe un* ensemble *$\mathcal{F}$ de petites catégories tel que $\mathcal{W}$ soit le plus petit localisateur fondamental qui trivialise $\mathcal{F}$.*

(iii) *Il existe un* ensemble *$\mathcal{M}$ de morphismes de $\mathbf{Cat}$ tel que $\mathcal{W}$ soit le plus petit localisateur fondamental faisant des éléments de $\mathcal{M}$ des foncteurs asphériques.*

(iv) *Il existe un* ensemble *$\mathcal{T}$ de petites catégories tel que $\mathcal{W}$ soit le plus petit localisateur fondamental modelable par les éléments de $\mathcal{T}$.*

(v) *Le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est propre.*

En particulier, il résulte de la proposition 6.1.8 que si $\mathcal{W}$ est accessible, alors $\mathcal{W}_{asph}$ est le plus grand localisateur fondamental propre contenu dans $\mathcal{W}$.

Démonstration. — L'équivalence des conditions (ii) et (iii) est évidente. Si $\mathcal{T}$ est un ensemble de petites catégories, le plus petit localisateur fondamental modelable par les éléments de $\mathcal{T}$ est le localisateur fondamental engendré par les flèches

$$A \longrightarrow e\ , \quad i_A(a \times i_A^*\Delta_1) \longrightarrow e \quad , \qquad a \in \mathrm{Ob}\ A\ , \quad A \in \mathcal{T}\ ,$$

ce qui prouve que (iv) implique (ii). Pour montrer que (ii) implique (iv), on remarque que si $\mathcal{W}$ est le plus petit localisateur fondamental qui trivialise un ensemble $\mathcal{F}$, alors il résulte du corollaire 4.1.22 que $\mathcal{W}$ est le plus petit localisateur fondamental modelable par les éléments de l'ensemble $\mathcal{T} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{F}\}$, où B est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test arbitraire donnée (par exemple $B = \Delta$). L'implication $(i) \Rightarrow (v)$ résulte du corollaire 4.3.28, et il est clair que (ii) implique (i). Il reste donc à vérifier que (v) implique (ii). Or une fois choisie une $\mathcal{W}$-catégorie test, cela résulte immédiatement du théorème 4.2.15 et de la proposition 6.1.9 appliqués à celle-ci. □

6.1.12. — On peut encore caractériser les localisateurs fondamentaux propres en termes de *localisateurs fondamentaux faibles* comme suit.

On rappelle qu'une classe de flèches $\mathcal{W}$ de $\mathbf{Cat}$ est un *localisateur fondamental faible* si elle vérifie les axiomes suivants (voir aussi [**96**, 1.1.2]).

La La classe $\mathcal{W}$ est faiblement saturée.

Lb Toute petite catégorie admettant un objet final est $\mathcal{W}$-asphérique.

Lc Tout foncteur $\mathcal{W}$-asphérique est une $\mathcal{W}$-équivalence (*i.e.* si $u : A \longrightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories tel que pour tout objet b de B, la catégorie A/b soit $\mathcal{W}$-asphérique, alors u est une $\mathcal{W}$-équivalence).

Par exemple, tout localisateur fondamental est un localisateur fondamental faible. Une grande partie de la théorie de l'homotopie de Grothendieck reste consistante si on

travaille avec seulement des localisateurs fondamentaux faibles au lieu de localisateurs fondamentaux : par exemple, la théorie des catégories test et des foncteurs test n'utilise essentiellement que les axiomes de localisateur fondamental faible (nous renvoyons pour cela le lecteur à [**96**]).

6.1.13. — Un foncteur $u : A \to B$ entre petites catégories est une *$\mathcal{W}$-fibration faible* si pour tout diagramme formé de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{i} & A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow{\scriptstyle u''} & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[j]{} & B' & \longrightarrow & B \end{array} ,$$

si j est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors il en est de même de i.

Exemple 6.1.14. — Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental propre, alors il résulte de la proposition 1.5.18 et du théorème 5.2.15 que toute $\mathcal{W}$-fibration de Thomason est une $\mathcal{W}$-fibration faible.

Proposition 6.1.15. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Les $\mathcal{W}$-fibrations faibles sont stables par composition et changement de base.*

C'est évident.

Proposition 6.1.16. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental faible et $\mathcal{W}'$ un localisateur fondamental propre. Pour que toute $\mathcal{W}'$-équivalence soit une $\mathcal{W}$-équivalence, il suffit que toute catégorie $\mathcal{W}'$-asphérique soit $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{W}'$ est un localisateur fondamental propre, la catégorie des petites catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée propre dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}'$-équivalences, à savoir par exemple la structure de Thomason associée à $\mathcal{W}'$ (cf. 5.2.15). On en déduit que ***Cat*** admet une structure de catégorie d'objets fibrants au sens de K. Brown [**22**] dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}'$-équivalences, et les fibrations, les $\mathcal{W}'$-fibrations faibles : le seul axiome non trivial à vérifier est l'existence de factorisations en une équivalence faible suivie d'une fibration, et cela résulte de l'existence d'une factorisation en une $\mathcal{W}'$-équivalence suivie d'une $\mathcal{W}'$-fibration de Thomason, car $\mathcal{W}'$ étant propre, toute $\mathcal{W}'$-fibration de Thomason est une $\mathcal{W}'$-fibration faible. Supposons que toute catégorie $\mathcal{W}'$-asphérique soit $\mathcal{W}$-asphérique. Pour prouver que $\mathcal{W}'$ est contenu dans $\mathcal{W}$, en vertu du lemme de Ken Brown pour les catégories d'objets fibrants [**22**, I.1, Factorization lemma], il suffit de prouver que toute $\mathcal{W}'$-fibration faible qui est une $\mathcal{W}'$-équivalence est une $\mathcal{W}$-équivalence. Autrement dit, il suffit de prouver que tout foncteur qui est universellement dans $\mathcal{W}'$ est dans $\mathcal{W}$. Or tout foncteur $\mathcal{W}'$-asphérique étant $\mathcal{W}$-asphérique par hypothèse, c'est une évidence. □

Corollaire 6.1.17. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Le plus petit localisateur fondamental faible qui rend asphériques les catégories $\mathcal{W}$-asphériques s'identifie au localisateur fondamental $\mathcal{W}_{asph}$.*

Démonstration. — On peut supposer sans perte de généralité que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{asph}$. Les localisateurs fondamentaux faibles (resp. les localisateurs fondamentaux) étant stables par réunions filtrantes, on peut supposer que $\mathcal{W}$ est accessible, et donc, en vertu du théorème 6.1.11, que $\mathcal{W}$ est propre. L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

Théorème 6.1.18. — *La classe des ∞-équivalences est le localisateur fondamental faible minimal.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental faible. On veut montrer que toute ∞-équivalence est une $\mathcal{W}$-équivalence. Pour cela, en vertu de la proposition 6.1.16 et du fait que le localisateur fondamental minimal est propre, il suffit de démontrer que toute catégorie ∞-asphérique est $\mathcal{W}$-asphérique, ce que l'on va prouver suivant les étapes ci-dessous.

6.1.18.1. — *Toute intégrale d'un foncteur à valeurs dans la catégorie des catégories $\mathcal{W}$-asphériques, indexé par une catégorie $\mathcal{W}$-asphérique, est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Si I est une petite catégorie, et si F est un foncteur de I vers $\mathbf{Cat}$ tel que pour tout objet i de I, $F(i)$ soit $\mathcal{W}$-asphérique, alors en vertu de [**96**, proposition 1.1.17], la projection canonique de $\int F$ sur I est $\mathcal{W}$-asphérique. Il s'ensuit que si I est $\mathcal{W}$-asphérique, il en est de même de $\int F$.

6.1.18.2. — *Soit A une petite catégorie. On considère un carré cocartésien de préfaisceaux sur A de la forme suivante.*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

Si i est un monomorphisme, et si X, Y et X' sont $\mathcal{W}$-asphériques, alors Y' est $\mathcal{W}$-asphérique.

Cela résulte de 6.1.18.1, et de [**96**, corollaires 1.1.11 et 1.1.24, et proposition 2.3.10].

6.1.18.3. — *Soit A une petite catégorie. On considère un ensemble bien ordonné non vide I, et un foncteur F de I dans $\widehat{A}$ tels que pour tous $i < j$, $F(i) \longrightarrow F(j)$ soit un monomorphisme, et pour tout i dans I, $F(i)$ soit $\mathcal{W}$-asphérique. Alors $\varinjlim F$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Cela résulte comme ci-dessus de 6.1.18.1 et de [**96**, corollaires 1.1.11 et 1.1.24, et proposition 2.3.14].

6.1.18.4. — *Pour tous $n \geqslant 1$ et k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le cornet Λ_n^k est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Soit $n \geqslant 1$. On peut en fait montrer une assertion légèrement plus générale : pour tout sous-ensemble strict et non vide J de $\{0, \ldots, n\}$, $\Lambda_n(J) = \cup_{j \in J} \operatorname{Im} \delta_n^j$ est $\mathcal{W}$-asphérique. Lorsque $n = 1$, ou plus généralement, lorsque J est un singleton, c'est évident. Si $n > 1$ et si J n'est pas un singleton, il résulte de 2.1.9 qu'on a un carré (cartésien et) cocartésien de la forme suivante (où k est le plus grand élément de J).

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{n-1}(J - \{k\}) & \longrightarrow & \Delta_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_n^k} \\ \Lambda_n(J - \{k\}) & \longrightarrow & \Lambda_n(J) \end{array}$$

Cela permet de conclure par une récurrence évidente en invoquant [**96**, proposition 1.1.27].

6.1.18.5. — *Toute catégorie ∞-asphérique est $\mathcal{W}$-asphérique.*

La catégorie Δ étant une $\mathcal{W}$-catégorie test, il suffit de prouver que tout ensemble simplicial ∞-asphérique est $\mathcal{W}$-asphérique. Soit J l'ensemble des inclusions de la forme $\Lambda_n^k \longrightarrow \Delta_n$, pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. En vertu de 6.1.18.4, les éléments de J sont des monomorphismes de source et de but $\mathcal{W}$-asphériques. Soit X un ensemble simplicial ∞-asphérique. Comme X n'est pas vide, il existe un morphisme $x : \Delta_0 \longrightarrow X$. L'argument du petit objet permet d'obtenir une factorisation de x de la forme $x = pi$, où i est un composé transfini d'images directes d'éléments de J, et où p est une fibration de Kan. Vu que Δ_0 est $\mathcal{W}$-asphérique, on déduit par récurrence transfinie de 6.1.18.2 et de 6.1.18.3 que le but de i est $\mathcal{W}$-asphérique. Pour conclure, il suffit donc de prouver que p est une $\mathcal{W}$-équivalence. Or p est à la fois une fibration de Kan et une ∞-équivalence, et donc une fibration triviale. En vertu du lemme 1.4.13, le morphisme p est une $\mathcal{W}$-équivalence, et par conséquent, X est un ensemble simplicial $\mathcal{W}$-asphérique, ce qui achève cette démonstration. □

6.2. Critères locaux pour les carrés homotopiquement cartésiens

6.2.1. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible. Un carré commutatif de $\boldsymbol{Cat}$ est *$\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien* s'il est homotopiquement cartésien au sens de la structure de catégorie de modèles du théorème 5.2.15 associée à $\mathcal{W}$. On vérifie aussitôt qu'un carré commutatif de $\boldsymbol{Cat}$ est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien si et seulement s'il existe un $\mathcal{W}$-foncteur test $i : A \longrightarrow \boldsymbol{Cat}$, tel que son image par i^* soit un carré homotopiquement cartésien au sens du A-localisateur des $\mathcal{W}$-équivalences.

Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ entre petites catégories est une $\mathcal{W}$-*fibration faible* si pour tout diagramme formé de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{i} & A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[j]{} & B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

si j est une $\mathcal{W}$-équivalence, il en est de même de i.

Proposition 6.2.2. — *Considérons un localisateur fondamental propre $\mathcal{W}$, et le carré commutatif de* **Cat** *suivant.*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \tag{6.2.2.1}$$

Pour que ce carré soit $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien, il suffit que pour tout objet b' de B', le carré induit ci-dessous le soit.

$$\begin{array}{ccc} A'/b' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u'/b'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'/b' & \longrightarrow & B \end{array} \tag{6.2.2.2}$$

Démonstration. — Comme $\mathcal{W}$ est propre, la structure de catégorie de modèles fermée de Thomason associée à $\mathcal{W}$ est propre (5.2.15). Factorisons le foncteur u en une $\mathcal{W}$-équivalence $i : A \longrightarrow C$ suivie d'une $\mathcal{W}$-fibration de Thomason $p : C \longrightarrow B$. Si C' désigne le produit fibré de B' et de C au-dessus de B, on obtient pour chaque objet b' de B', le diagramme commutatif suivant (induit par le carré commutatif 6.2.2.1).

$$\begin{array}{ccccc} A'/b' & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle i'/b'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ C'/b' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C \\ {\scriptstyle p'/b'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B'/b' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

Dire que le carré 6.2.2.1 (resp. 6.2.2.2) est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien, revient à demander que le foncteur i' (resp. i'/b') soit une $\mathcal{W}$-équivalence, et demander que les foncteurs i'/b' soient des $\mathcal{W}$-équivalences pour tout objet b' de B', revient à demander que i' soit une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de B', ce qui implique aussitôt notre assertion. □

Proposition 6.2.3. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est une $\mathcal{W}$-fibration faible.*

(ii) *Tout carré cartésien de la forme*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien.

(iii) *Tout carré cartésien de la forme*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

dans lequel B' admet un objet final est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien.

(iv) *Pour tous carrés cartésiens dans $\mathbf{Cat}$,*

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{i} & A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[j]{} & B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

si B'' admet un objet final, et si B' est $\mathcal{W}$-asphérique, alors le foncteur i est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — La proposition 1.5.18, appliquée à la structure de catégorie de modèles fermée propre sur $\mathbf{Cat}$ associée à $\mathcal{W}$, montre que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes, et l'équivalence des conditions (ii) et (iii) résulte aussitôt de la proposition 6.2.2. Il est clair que la condition (i) implique la condition (iv). Il suffit donc de prouver que la condition (iv) entraîne la condition (iii). Considérons le carré cartésien suivant dans lequel on suppose que la catégorie B' admet un objet final.

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

Grâce à l'existence de la structure de catégorie de modèles de Thomason sur $\mathbf{Cat}$, on peut alors factoriser le foncteur v en une $\mathcal{W}$-équivalence $i : B' \longrightarrow B''$ suivie d'une

$\mathcal{W}$-fibration de Thomason $p : B'' \longrightarrow B$, puis former les carrés cartésiens ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{j} & A'' & \xrightarrow{q} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[i]{} & B'' & \xrightarrow[p]{} & B \end{array}$$

Si u vérifie la condition (iv), le foncteur j est une $\mathcal{W}$-équivalence, ce qui implique que le carré de départ est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien. □

Proposition 6.2.4. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. Pour qu'un foncteur $\mathcal{W}$-propre (ou $\mathcal{W}$-lisse) $u : A \longrightarrow B$ soit une $\mathcal{W}$-fibration faible, il faut et il suffit que pour tout objet b de B, le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} A_b & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ e & \xrightarrow[b]{} & B \end{array}$$

soit $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien.

Démonstration. — Il suffit de prouver l'assertion lorsque u est propre, le cas où u est lisse s'en déduisant par dualité. Il est clair que c'est une condition nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons que pour tout objet b de B, A_b soit la fibre homotopique de u au-dessus de b au sens de $\mathcal{W}$, et considérons un carré cartésien de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

Pour chaque objet b' de B', si $b = v(b')$, on peut compléter ce diagramme en formant les carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccccccc} A_b & \xrightarrow{i} & A'/b' & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{w} & A \\ \downarrow & & {\scriptstyle u'/b'}\downarrow & & {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ e & \xrightarrow[(b',1_{b'})]{} & B'/b' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

Le grand carré composé est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien par hypothèse. Vu que u est $\mathcal{W}$-propre, il en est de même de u' (5.3.6), ce qui implique que le foncteur i est $\mathcal{W}$-coasphérique, et donc en particulier une $\mathcal{W}$-équivalence. En conséquence, les hypothèses de la proposition 6.2.2 sont vérifiées. Le critère (ii) de la proposition 6.2.3 achève ainsi la démonstration. □

Proposition 6.2.5. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Un carré commutatif de préfaisceaux sur A est homotopiquement cartésien si et seulement si son image dans $\mathbf{Cat}$ par le foncteur i_A l'est.*

Démonstration. — Le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ étant propre, un carré commutatif d'ensembles simpliciaux au-dessus de $N\,A$ est homotopiquement cartésien (au sens de $\mathcal{W}$) si et seulement si c'est un carré homotopiquement cartésien d'ensembles simpliciaux après application du foncteur d'oubli de $\widehat{\Delta}/\,N\,A$ vers $\widehat{\Delta}$. Cette proposition équivaut donc à affirmer qu'un carré commutatif de préfaisceaux sur A est homotopiquement cartésien si et seulement si son image par le foncteur $F = (N\,/A)j_A$ (cf. 3.2.1 et 3.2.6) est un carré homotopiquement cartésien dans la catégorie des ensembles simpliciaux au-dessus de $N\,A$. Or il résulte du corollaire 4.4.20 et des propositions 3.2.8 et 4.4.28 que le foncteur F est une équivalence de Quillen (à gauche) qui respecte les équivalences faibles, ce qui implique immédiatement l'assertion. □

Lemme 6.2.6. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et S une petite catégorie. Pour tout S-foncteur*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & S & \end{array} \quad ,$$

le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(p,1_A)} & S\times A \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_S\times u} \\ B & \xrightarrow[(q,1_B)]{} & S\times B \end{array}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien.

Démonstration. — On a les carrés commutatifs suivants.

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle 1_A}\frown & & \\ A & \xrightarrow{(p,1_A)} & S\times A & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_S\times u} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B & \xrightarrow[(q,1_B)]{} & S\times B & \longrightarrow & B \\ & & {\scriptstyle 1_B}\smile & & \end{array}$$

Comme $\mathcal{W}$ est stable par produits finis, le carré de droite est homotopiquement cartésien, et le grand carré composé est trivialement homotopiquement cartésien. On en déduit aussitôt l'assertion. □

Proposition 6.2.7. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, et W le A-localisateur des $\mathcal{W}$-équivalences. Pour tout morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A, si $\eta : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$ désigne le morphisme d'adjonction, alors le carré*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & i_A^* i_A X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_A^* i_A p} \\ Y & \xrightarrow[\eta_Y]{} & i_A^* i_A Y \end{array}$$

est homotopiquement cartésien au sens de W.

Démonstration. — En vertu du lemme 4.4.4 appliqué au $\mathcal{W}$-foncteur test local $a \longmapsto A/a$, pour toute petite catégorie C, le foncteur

$$(q_C, \varepsilon_C) : i_A i_A^* C \longrightarrow A \times C$$

(q_C étant le foncteur canonique de $A/i_A^* C$ sur A, et $\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{Cat}$ le morphisme d'adjonction) est $\mathcal{W}$-asphérique. Le morphisme p de l'énoncé induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} i_A X & \xrightarrow{i_A \eta_X} & i_A i_A^* i_A X & \xrightarrow{(q_{i_A X}, \varepsilon_{i_A X})} & A \times i_A X \\ {\scriptstyle i_A p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_A i_A^* i_A p} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A \times i_A p} \\ i_A Y & \xrightarrow[i_A \eta_Y]{} & i_A i_A^* i_A Y & \xrightarrow[(q_{i_A Y}, \varepsilon_{i_A Y})]{} & A \times i_A Y \end{array} .$$

En vertu du lemme 4.4.4, le carré de droite est trivialement homotopiquement cartésien (les flèches horizontales de droite sont des équivalences faibles), et le lemme 6.2.6 montre que le grand carré composé est homotopiquement cartésien. On en déduit aussitôt que le carré de gauche est homotopiquement cartésien. Or ce dernier n'est autre que l'image par le foncteur i_A du carré commutatif de l'énoncé, et donc la proposition 6.2.5 achève cette démonstration. □

Proposition 6.2.8. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et $i : A \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un $\mathcal{W}$-foncteur test local tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admette un objet final. Alors le foncteur $i^* : \mathbf{Cat} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les carrés homotopiquement cartésiens au sens de $\mathcal{W}$.*

Démonstration. — Le lemme 4.4.4 implique que pour toute petite catégorie C, on a une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle

$$A/C = i_A i^* C \longrightarrow A \times C .$$

En vertu de la proposition 6.2.5, on est donc ramené à prouver que le foncteur $C \longmapsto A \times C$ respecte les carrés $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésiens, ce qui résulte trivialement de la stabilité de $\mathcal{W}$ par produits finis. □

6.3. Transversalité homotopique

6.3.1. — Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories, et F un foncteur de B vers Cat. On vérifie qu'on a un carré cartésien de catégories de la forme

$$\begin{array}{ccc} \int u^*F & \xrightarrow{u_F} & \int F \\ {\scriptstyle \theta_{u^*F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_F} \\ A & \xrightarrow[u]{} & B \end{array} \quad ,$$

où on rappelle que u^*F désigne le foncteur composé

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{F} \mathit{Cat} \ ,$$

et où u_F est le foncteur défini par

$$u_F(a,x) = (u(a),x) \quad \text{pour } a \text{ objet de } A, \text{ et } x \text{ objet de } F_{u(a)}.$$

6.3.2. — Considérons le carré cartésien de petites catégories suivant.

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \tag{6.3.2.1}$$

Pour tout foncteur $F : A \longrightarrow \mathit{Cat}$, on obtient ainsi en vertu de 6.3.1 les deux carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccc} \int w^*F & \xrightarrow{w_F} & \int F \\ {\scriptstyle \theta_{w^*F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_F} \\ A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

Or pour chaque objet b' de B', le foncteur w_F induit un foncteur

$$\big(\int w^*F\big)/b' \longrightarrow \big(\int F\big)/v(b') \ ,$$

et on remarque que par définition des foncteurs $u'_!$ et $u_!$ (cf. 3.3.18), on a

$$\big(\int w^*F\big)/b' = \big(u'_! w^*(F)\big)_{b'} \quad \text{et} \quad \big(\int F\big)/v(b') = \big(v^* u_!(F)\big)_{b'} \ .$$

On vérifie que cela définit un morphisme

$$u'_! w^*(F) \longrightarrow v^* u_!(F)$$

naturel en F. Autrement dit, on a ainsi un morphisme de foncteurs

$$u'_! w^* \longrightarrow v^* u_! \tag{6.3.2.2}$$

appelé le *morphisme de changement de base associé au carré cartésien* (6.3.2.1).

Proposition 6.3.3. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et soit*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

un carré cartésien de $\mathbf{Cat}$, avec u morphisme propre (resp. v morphisme lisse). Alors le morphisme de changement de base $u'_! w^* \to v^* u_!$ est une $\mathcal{W}$-équivalence argument par argument. Autrement dit, pour tout foncteur $F : A \to \mathbf{Cat}$, et pour tout objet b' de B', le foncteur

$$u'_! w^*(F)_{b'} \to v^* u_!(F)_{b'}$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — Cela résulte de [**96**, proposition 3.2.28]. □

Proposition 6.3.4. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et soit $u : A \to B$ un foncteur entre petites catégories. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le morphisme u est $\mathcal{W}$-coasphérique.*

(b) *Pour tout foncteur $F : B \to \mathbf{Cat}$, le morphisme*

$$\int u^* F \to \int F \quad ,$$

induit par u, est $\mathcal{W}$-coasphérique ;

(c) *pour tout foncteur $F : B \to \mathbf{Cat}$, le morphisme*

$$\int u^* F \to \int F \quad ,$$

induit par u, est une $\mathcal{W}$-équivalence faible.

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 3.2.22]. □

Proposition 6.3.5. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Les foncteurs $\mathcal{W}$-asphériques (resp. $\mathcal{W}$-coasphériques) sont stables par changement de base $\mathcal{W}$-lisse (resp. $\mathcal{W}$-propre). Autrement dit, si on considère un carré cartésien dans $\mathbf{Cat}$ de la forme*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

avec u $\mathcal{W}$-asphérique (resp. $\mathcal{W}$-coasphérique) et v $\mathcal{W}$-lisse (resp. $\mathcal{W}$-propre) alors u' est $\mathcal{W}$-asphérique (resp. $\mathcal{W}$-coasphérique).

Démonstration. — Voir [**96**, corollaire 3.2.13] et sa version duale. □

6.3.6. — On rappelle que la construction $\int$ a une version duale ∇ (cf. 4.4.11). Si A est une petite catégorie, et F un préfaisceau sur A à valeurs dans $\mathcal{C}at$, on a donc une fibration canonique

$$\nabla F = \nabla_A F \longrightarrow A \ .$$

Nous laissons au lecteur le soin de formuler et de démontrer l'analogue du carré cartésien défini au numéro 6.3.1. En vertu de la stabilité de tout localisateur fondamental par le foncteur de passage à la catégorie opposée (voir les sorites 3.3.8), cela permet de voir que la proposition précédente a un sens en remplaçant la construction $\int$ par la construction ∇, et la notion de foncteur coasphérique par celle de foncteur asphérique.

6.3.7. — On peut montrer que la proposition 6.3.3 caractérise les foncteurs propres et les foncteurs lisses (voir [**96**, théorèmes 3.2.30 et 3.2.32]). En outre, la classe des foncteurs propres et la classe des foncteurs coasphériques (resp. la classe des foncteurs lisses et la classe des foncteurs asphériques) se déterminent l'une l'autre (voir [**96**, théorème 3.2.15] et sa version duale). En un certain sens, les notions de foncteur lisse et de foncteur asphérique sont des notions « absolues », et ce qui suit peut être vu comme une version « relative » de la même théorie.

6.3.8. — On fixe un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

Un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ est *fortement $\mathcal{W}$-localement constant* si le foncteur image inverse

$$u^* : \mathcal{H}om(B^{op}, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{H}om(A^{op}, \mathcal{C}at)$$

envoie les $\mathcal{W}/B$-équivalences sur des $\mathcal{W}/A$-équivalences (cf. 4.4.14). De manière équivalente, cela revient à demander que pour tout morphisme $\varphi : F \longrightarrow G$ de préfaisceaux sur B à valeurs dans $\mathcal{C}at$, si on forme les carrés cartésiens suivants,

$$\begin{array}{ccccc} \nabla u^* F & \xrightarrow{\nabla u^* \varphi} & \nabla u^* G & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ \nabla F & \xrightarrow[\nabla \varphi]{} & \nabla G & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

et si $\nabla\varphi$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors $\nabla u^*\varphi$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Il résulte aussitôt de cette formulation que si le foncteur u est une $\mathcal{W}$-fibration faible, alors il est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.

Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Un foncteur $v : B' \longrightarrow B$ est *$\mathcal{W}$-transverse à u* si le morphisme de changement de base $u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$ (6.3.2) associé au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence argument par argument.

Exemple 6.3.9. — Il résulte de la proposition 6.3.3 que pour tout foncteur (resp. tout foncteur $\mathcal{W}$-propre) $u : A \longrightarrow B$, tout foncteur $\mathcal{W}$-lisse (resp. tout foncteur) de but B est $\mathcal{W}$-transverse à u.

Proposition 6.3.10. — *Les foncteurs fortement $\mathcal{W}$-localement constants sont stables par composition.*

C'est évident.

Proposition 6.3.11. — *Tout foncteur $\mathcal{W}$-asphérique est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de la version duale de la proposition 6.3.4. □

Proposition 6.3.12. — *Si $u : A \longrightarrow B$ est un foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant, alors le foncteur image inverse $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences.*

Démonstration. — Si X est un préfaisceau sur B, vu comme un préfaisceau de catégories discrètes, B/X s'identifie canoniquement à $\nabla_B X$. On a en outre un carré cartésien canonique

$$\begin{array}{ccc} A/u^*X & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B/X & \longrightarrow & B \end{array}$$

(identifiant A/u^*X à $\nabla_A u^* X$), et par suite, l'assertion résulte directement de la définition. □

Lemme 6.3.13. — *On considère deux foncteurs $u : A \longrightarrow B$ et $v : B' \longrightarrow B$. On note G_v le préfaisceau sur B à valeurs dans $\mathbf{Cat}$ défini par $G_v(b) = b\backslash B'$, et e_A le foncteur constant de A dans $\mathbf{Cat}$ de valeur la catégorie ponctuelle e. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Cat}$:*

$$\textstyle\int_{B'} v^* u_!(e_A) \simeq \nabla_A u^* G_v$$

(où u^*G_v désigne par abus le préfaisceau de catégories sur A défini par $u^*G_v(a) = G_v(u(a))$).

Démonstration. — Le foncteur $u_!(e_A)$ s'identifie canoniquement au foncteur F_u de B dans $\mathbf{Cat}$ défini par $F_u(b) = A/b$ pour chaque objet b de B. On doit donc prouver que $\int v^* F_u$ et $\nabla u^* G_v$ sont canoniquement isomorphes, ce qui résulte aussitôt de la description explicite de ces objets. □

Lemme 6.3.14. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. On note $F_u = u_!(e_A)$ le foncteur de B dans $\mathbf{Cat}$ défini par $F_u(b) = A/b$ pour chaque objet b de B. Alors le morphisme canonique (3.3.14)*

$$\int_B u_!(e_A) = \int_B F_u \longrightarrow \varinjlim_B F_u = A$$

est une fibration à fibres $\mathcal{W}$-asphériques. En particulier, c'est donc une $\mathcal{W}$-équivalence universelle.

Démonstration. — Dans le cas où u est l'identité de B, on sait déjà que ce foncteur est une fibration dont les fibres sont des catégories admettant un objet initial (cela résulte du lemme 4.2.8 appliqué au préfaisceau final sur B). Dans le cas général, on remarque simplement qu'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \int_B F_u & \longrightarrow & \int_B F_{1_B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array} .$$

Les fibrations à fibres $\mathcal{W}$-asphériques étant stables par changement de base, et toute fibration à fibres $\mathcal{W}$-asphériques étant une $\mathcal{W}$-équivalence (puisque $\mathcal{W}$-coasphérique), cela achève la démonstration. □

6.3.15. — Considérons un diagramme formé de carrés cartésiens dans $\mathbf{Cat}$ de la forme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w'} & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

Il induit trois morphismes de changement de base (voir 6.3.2) :

$$c' : u'_! w^* \longrightarrow v^* u_! \quad , \qquad c'' : u''_! w'^* \longrightarrow v'^* u'_!$$

$$\text{et} \quad c : u''_! w'^* w^* = u''_! (ww')^* \longrightarrow (vv')^* u_! = v'^* v^* u_! \ .$$

On vérifie en outre que le triangle suivant commute dans $\mathcal{H}om(B'', \mathbf{Cat})$ (exercice laissé au lecteur).

(6.3.15.1)
$$\begin{array}{ccc} u''_! w'^* w^* & \xrightarrow{c'' \star w^*} & v'^* u'_! w^* \\ & {\scriptstyle c}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle v'^* \star c'} & \\ & v'^* v^* u_! & \end{array}$$

Lemme 6.3.16. — *Considérons le carré cartésien suivant dans* **Cat**

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

ainsi qu'un foncteur $v' : B'' \longrightarrow B'$. Si v est $\mathcal{W}$-transverse à u et v' est $\mathcal{W}$-transverse à u', alors vv' est $\mathcal{W}$-transverse à u.

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du triangle commutatif (6.3.15.1). □

Lemme 6.3.17. — *On suppose donnés les carrés cartésiens suivants dans* **Cat**.

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w'} & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \tag{6.3.17.1}$$

Notons alors F' (resp. *F''*) *le préfaisceau en catégories sur B défini par $F'(b) = b\backslash B'$* (resp. *$F''(b) = b\backslash B''$*). *Le foncteur v' induit un morphisme de préfaisceaux $f : F'' \longrightarrow F'$, ce qui permet de former les carrés cartésiens suivants dans* **Cat**.

$$\begin{array}{ccccc} \nabla_A u^* F'' & \xrightarrow{\nabla u^* f} & \nabla_A u^* F' & \xrightarrow{\zeta_{u^*F'}} & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \nabla_B F'' & \xrightarrow[\nabla f]{} & \nabla_B F' & \xrightarrow[\zeta_{F'}]{} & B \end{array} \tag{6.3.17.2}$$

(a) *Les flèches verticales du carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \nabla_B F'' & \xrightarrow{\nabla f} & \nabla_B F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' \end{array}$$

sont des cofibrations à fibres $\mathcal{W}$-asphériques. En particulier, le foncteur v' est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si le foncteur ∇f du diagramme (6.3.17.2) *en est une.*

(b) *Si les foncteurs v et vv' sont $\mathcal{W}$-transverses à u, alors pour que w' soit une $\mathcal{W}$-équivalence, il faut et il suffit que le foncteur $\nabla u^* f$ en soit une.*

Démonstration. — L'assertion (a) résulte aussitôt de la version duale du lemme 6.3.14. Montrons à présent l'assertion (b). En vertu du lemme 6.3.13, la flèche $\nabla u^* f$ est canoniquement isomorphe dans **Cat** au morphisme induit par v'

$$\alpha : \textstyle\int_{B''} v'^* v^* u_!(e_A) \longrightarrow \int_{B'} v^* u_!(e_A)$$

(où e_A désigne le foncteur constant de A dans $\mathbf{Cat}$ de valeur la catégorie ponctuelle). D'autre part, en reprenant les notations du paragraphe 6.3.15, on a le diagramme commutatif suivant, induit par les morphismes de changement de base c et c' (cf. 6.3.15).

$$\begin{array}{ccc} \int_{B''} u''_! w'^* w^*(e_A) & \xrightarrow{\int c(e_A)} & \int_{B''} v'^* v^* u_!(e_A) \\ {\scriptstyle \alpha'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ \int_{B'} u'_! w^*(e_A) & \xrightarrow[\int c'(e_A)]{} & \int_{B'} v^* u_!(e_A) \end{array}$$

Comme c et c' sont des $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument, les flèches horizontales de ce diagramme sont des $\mathcal{W}$-équivalences (3.3.18). Par conséquent, pour que α soit une $\mathcal{W}$-équivalence, il faut et il suffit que α' le soit. Enfin, en vertu du lemme 6.3.14, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \int_{B''} u''_!(e_{A''}) & \xrightarrow{\alpha'} & \int_{B'} u'_!(e_{A'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'' & \xrightarrow[w']{} & A' \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des $\mathcal{W}$-équivalences. Par conséquent, α est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si w' en est une, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 6.3.18. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. On aura à considérer des carrés cartésiens de $\mathbf{Cat}$ de la forme suivante.*

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w'} & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \tag{6.3.18.1}$$

Les assertions ci-dessous sont équivalentes.

(i) *Le foncteur u est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*

(ii) *Pour tous carrés cartésiens de la forme* (6.3.18.1)*, si v et vv' sont $\mathcal{W}$-transverses à u, et si v' est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(iii) *Pour tous carrés cartésiens de la forme* (6.3.18.1)*, si v et vv' sont $\mathcal{W}$-lisses, et si v' est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que (i) implique (ii). En effet, il est clair que (ii) implique (iii) (cf. 6.3.9), et toute fibration étant $\mathcal{W}$-lisse, il est évident que (iii) implique (i). Supposons que u soit fortement $\mathcal{W}$-localement constant, et donnons nous des carrés cartésiens de la forme (6.3.18.1) tels que v et vv' soient $\mathcal{W}$-transverses à u, et v' soit une $\mathcal{W}$-équivalence. Comme u est fortement $\mathcal{W}$-localement constant, en vertu de l'assertion (a) du lemme 6.3.17 (dont on reprend les notations), les carrés

cartésiens du diagramme 6.3.17.2 impliquent que $\nabla u^* f$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Par conséquent, l'assertion (b) du lemme 6.3.17 implique que w' est une $\mathcal{W}$-équivalence, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 6.3.19. — *Un foncteur $\mathcal{W}$-propre est fortement $\mathcal{W}$-localement constant si et seulement s'il est une $\mathcal{W}$-fibration faible.*

Démonstration. — En effet, si $u : A \longrightarrow B$ est un foncteur $\mathcal{W}$-propre, tout foncteur $v : B' \longrightarrow B$ est $\mathcal{W}$-transverse à u (6.3.9), et par conséquent, ce corollaire résulte immédiatement de la caractérisation (ii) de la proposition précédente. □

Corollaire 6.3.20. — *Les foncteurs fortement $\mathcal{W}$-localement constants sont stables par changements de base $\mathcal{W}$-lisses.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de la stabilité des foncteurs $\mathcal{W}$-lisses par composition (par la version duale de la proposition 5.3.8) et de la caractérisation (iii) de la proposition 6.3.18. □

Corollaire 6.3.21. — *Les foncteurs fortement $\mathcal{W}$-localement constants sont stables par produits finis.*

Démonstration. — Les foncteurs fortement $\mathcal{W}$-localement constants étant stables par composition, il suffit de vérifier que si $u : A \longrightarrow B$ est fortement $\mathcal{W}$-localement constant, alors pour toute petite catégorie C, il en est de même du foncteur $u \times 1_C : A \times C \longrightarrow B \times C$. Mais cela résulte du fait que la projection de $B \times C$ sur B est une fibration, et donc en particulier un foncteur $\mathcal{W}$-lisse, d'où on déduit que l'assertion résulte du corollaire précédent. □

Lemme 6.3.22. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre $\mathcal{W}$-catégories test locales. Pour que le foncteur $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, il faut et il suffit qu'il en soit de même du foncteur $(u \times 1_\Delta)^* : \widehat{B \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$.*

Démonstration. — Considérons la classe W formée des morphismes de préfaisceaux simpliciaux sur B dont l'image par le foncteur $(u \times 1_\Delta)^*$ est dans $\mathcal{W}_{\widehat{A \times \Delta}}$. On déduit aussitôt du lemme 4.3.8, que W est un $B \times \Delta$-localisateur qui contient les $\mathcal{W}$-équivalences d'ensembles simpliciaux argument par argument, et donc, en particulier, les ∞-équivalences d'ensembles simpliciaux argument par argument. Comme $\mathcal{W}_{\widehat{B}}$ est régulier (4.2.9), il résulte du théorème 3.4.36 que sa complétion simpliciale est le $B \times \Delta$-localisateur engendré par les ∞-équivalences d'ensembles simpliciaux argument par argument et par les $\mathcal{W}$-équivalences de préfaisceaux sur B argument par argument. D'autre part, on sait que $\mathcal{W}_{\widehat{B \times \Delta}}$ est précisément la complétion simpliciale de $\mathcal{W}_{\widehat{B}}$ (4.4.10), d'où le lemme. □

Proposition 6.3.23. — *Pour un foncteur $u : A \longrightarrow B$ entre petites catégories, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*
(ii) *Pour toute petite catégorie C, le foncteur image inverse*

$$(u \times 1_C)^* : \widehat{B \times C} \longrightarrow \widehat{A \times C}$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences.
(iii) *Il existe une $\mathcal{W}$-catégorie test C telle que le foncteur image inverse*

$$(u \times 1_C)^* : \widehat{B \times C} \longrightarrow \widehat{A \times C}$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences.

Démonstration. — L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte de la proposition 6.3.12, du corollaire 6.3.21, et du fait que les identités sont des foncteurs fortement $\mathcal{W}$-localement constants. L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ étant triviale, il reste à prouver que (iii) implique (i). Dans le cas où $C = \Delta$, cela résulte du lemme 4.4.17. Dans le cas général, on remarque que si C est une $\mathcal{W}$-catégorie test telle que le foncteur $(u \times 1_C)^*$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, comme $A \times C$ et $B \times C$ sont alors des $\mathcal{W}$-catégories test locales (4.1.22), il résulte du lemme précédent que le foncteur

$$(u \times 1_C \times 1_\Delta)^* : B \widehat{\times C \times} \Delta \longrightarrow A \widehat{\times C \times} \Delta$$

respecte aussi les $\mathcal{W}$-équivalences. Comme les projections

$$B \times C \times \Delta \longrightarrow B \times \Delta \quad \text{et} \quad A \times C \times \Delta \longrightarrow A \times \Delta$$

sont des foncteurs $\mathcal{W}$-asphériques, la proposition 4.2.23 implique alors que le foncteur $(u \times 1_\Delta)^* : \widehat{B \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 6.3.24. — *Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ entre $\mathcal{W}$-catégories test locales est fortement $\mathcal{W}$-localement constant si et seulement si le foncteur image inverse*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.3.23 et du lemme 6.3.22. □

Corollaire 6.3.25. — *Si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A est une $\mathcal{W}$-fibration faible de préfaisceaux sur A si et seulement si le foncteur induit de A/X vers A/Y est un foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*

Démonstration. — Dire que p est une $\mathcal{W}$-fibration faible, revient à demander que le foncteur image inverse par p

$$\widehat{A}/Y \longrightarrow \widehat{A}/X \quad , \qquad (Y', Y' \longrightarrow Y) \longmapsto (X' = Y' \times_Y X, X' \longrightarrow X)$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences. Les catégories A/X et A/Y étant des $\mathcal{W}$-catégories test locales, cet énoncé résulte donc directement de la proposition précédente. □

Lemme 6.3.26. — *Considérons un carré cartésien de petites catégories :*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} .$$

On a alors les carrés cartésiens suivants dans **Cat** *(où F_u désigne toujours le foncteur de B dans* **Cat** *qui associe à un objet b de B la catégorie A/b, et i_u le foncteur défini par $i_u(a) = (u(a), (a, 1_{u(a)}))$).*

$$\begin{array}{ccccc} & A' & \xrightarrow{w} & A & \\ & {\scriptstyle j_{u,v}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_u} & \\ {\scriptstyle u'}\swarrow & \int_{B'} v^* F_u & \longrightarrow & \int_B F_u & \searrow{\scriptstyle u} \\ & {\scriptstyle \theta_{v^* F_u}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{F_u}} & \\ & B' & \xrightarrow[v]{} & B & \end{array}$$

Le foncteur i_u est une $\mathcal{W}$-équivalence, et le foncteur θ_{F_u} une cofibration. En outre, si v est $\mathcal{W}$-transverse à u, alors le morphisme $j_{u,v}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — On vérifie que dans le diagramme commutatif suivant, les foncteurs i_u et $i_{u'}$ sont des Δ_1-équivalences d'homotopie, et donc des $\mathcal{W}$-équivalences (voir [**96**, 3.2.29]).

$$\begin{array}{ccccc} & A' & \xrightarrow{w} & A & \\ & {\scriptstyle i_{u'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_u} & \\ {\scriptstyle u'}\swarrow & \int_{B'} F_{u'} & \longrightarrow & \int_B F_u & \searrow{\scriptstyle u} \\ & {\scriptstyle \theta_{F_{u'}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{F_u}} & \\ & B' & \xrightarrow[v]{} & B & \end{array}$$

La catégorie $\int_{B'} v^* F_u$ est le produit fibré de B' et de $\int_B F_u$ au-dessus de B (voir 6.3.1). Il existe par conséquent un foncteur canonique au-dessus de B' :

$$k_{u,v} : \int_{B'} F_{u'} \longrightarrow \int_{B'} v^* F_u \ .$$

En posant $j_{u,v} = k_{u,v} i_{u'}$, on obtient le diagramme annoncé. Pour conclure, il suffit de vérifier que lorsque v est $\mathcal{W}$-transverse à u, le morphisme $k_{u,v}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Or dans ce cas, le morphisme de changement de base

$$c : u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence argument par argument. De plus, si e_A désigne le foncteur constant de A dans $\mathbf{Cat}$ de valeur la catégorie ponctuelle, on a des identifications canoniques au-dessus de B' :

$$\int_{B'} F_{u'} = \int_{B'} u'_!(e_{A'}) = \int_{B'} u'_! w^*(e_A) \quad \text{et} \quad \int_{B'} v^* F_u = \int_{B'} v^* u_!(e_A) \ .$$

Le morphisme $k_{u,v}$ correspond alors à l'intégrale du morphisme de foncteurs induit par c. Le foncteur d'intégration envoyant les $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument sur des $\mathcal{W}$-équivalences, cela achève la démonstration. □

Nous allons à présent raffiner la caractérisation des foncteurs fortement localement constants dans le cas d'un localisateur fondamental propre.

Proposition 6.3.27. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Les assertions ci-dessous sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*

(ii) *Pour tous carrés cartésiens de la forme* (6.3.18.1), *si v et vv' sont $\mathcal{W}$-transverses à u, et si B'' et B' sont $\mathcal{W}$-asphériques, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(iii) *Pour tous carrés cartésiens de la forme* (6.3.18.1), *si v et vv' sont $\mathcal{W}$-lisses, et si B'' et B' sont $\mathcal{W}$-asphériques, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(iv) *Pour tous carrés cartésiens de la forme* (6.3.18.1), *si v et vv' sont des fibrations, et si B'' et B' sont $\mathcal{W}$-asphériques, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Démonstration. — De la proposition 6.3.18 découle que (*i*) implique (*ii*), et on s'aperçoit aussitôt que (*ii*) implique (*iii*) et que (*iii*) implique (*iv*). Le lemme 6.3.17 permet quant à lui de prouver que (*iv*) implique (*ii*). Il suffit donc de montrer que la condition (*ii*) implique la condition (*i*). Or si u est en outre supposé $\mathcal{W}$-propre, en vertu de l'exemple 6.3.9, la condition (*ii*) implique le critère (*iv*) de la proposition 6.2.3, et donc il résulte de cette dernière que u est alors une $\mathcal{W}$-fibration faible, ce qui entraîne l'implication voulue dans ce cas. L'implication (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) étant démontrée dans le cas propre (en particulier celui d'une cofibration), on en déduit aussitôt le cas général grâce au lemme 6.3.26. □

Proposition 6.3.28. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. On considère un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*

(ii) *Tout carré cartésien de la forme*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

dans lequel v est $\mathcal{W}$-transverse à u est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien.

(iii) *Pout tout objet b de B, le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u/b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien.

Démonstration. — Le lemme 6.3.26 montre qu'il suffit de prouver la proposition dans le cas où u est $\mathcal{W}$-propre. Dans ce cas, en vertu du corollaire 6.3.19, de l'exemple 6.3.9, et de la proposition 1.5.18 appliquée à la structure de catégorie de modèles fermée propre sur $\boldsymbol{Cat}$ associée à $\mathcal{W}$, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. D'autre part, pour tout objet b de B, si u est $\mathcal{W}$-propre, le foncteur canonique de la fibre A_b de u au-dessus de b vers la catégorie A/b est $\mathcal{W}$-coasphérique. La condition (iii) ci-dessus est donc dans ce cas équivalente au critère donné dans la proposition 6.2.4, ce qui prouve l'équivalence des conditions (i) et (iii). □

Corollaire 6.3.29. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. Un foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement s'il est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du critère (iii) de la proposition ci-dessus. □

Théorème 6.3.30. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre deux $\mathcal{W}$-catégories test locales. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*

(ii) *Pour tout préfaisceau X sur B, le carré cartésien canonique*

$$\begin{array}{ccc} A/u^*X & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u/X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B/X & \longrightarrow & B \end{array}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien.

(iii) *Pour tout objet b de B, le carré cartésien canonique*

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u/b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien.

(iv) *Le foncteur $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences.*

(v) *Pour tout morphisme $X \longrightarrow Y$ entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur B, le morphisme $u^*X \longrightarrow u^*Y$ est une $\mathcal{W}$-équivalence de préfaisceaux sur A.*

Démonstration. — La proposition 6.3.28 permet de constater que les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes, et en vertu de la proposition 6.3.24, les conditions (i) et (iv) sont équivalentes. Vu qu'il est trivial que (iv) implique (v), il suffit de montrer que (v) implique (iv). On suppose donc dans la suite que le foncteur u^* envoie les morphismes entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur des $\mathcal{W}$-équivalences. Soit W la classe des morphismes de préfaisceaux sur B dont l'image par le foncteur u^* est une $\mathcal{W}$-équivalence de préfaisceaux sur A. On va vérifier que W est un B-localisateur. Le seul aspect non trivial à vérifier est que toute fibration triviale est dans W. Considérons dans un premier temps un préfaisceau localement $\mathcal{W}$-asphérique I sur B, et montrons que pour tout préfaisceau X sur B, la projection σ_X de $I \times X$ sur X est dans W. On sait que cela est vérifié lorsque X est $\mathcal{W}$-asphérique, car alors $I \times X$ est lui aussi $\mathcal{W}$-asphérique. Cela est donc vérifié lorsque X est représentable. Pour voir le cas général, on procède comme suit. On peut considérer la catégorie A/u^*X au-dessus de la catégorie B/X, et alors pour tout objet b de B, et toute section $s : b \longrightarrow X$, on a les identifications suivantes :

$$(A/u^*(I \times X))/(b,s) = A/u^*(I \times b) \quad \text{et} \quad (A/u^*X)/(b,s) = A/u^*b = A/b\ .$$

On déduit donc de ce qui précède que le foncteur induit par la projection σ_X

$$A/u^*(I \times X) \longrightarrow A/u^*X$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de B/X. C'est donc en particulier une $\mathcal{W}$-équivalence. Comme B est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, grâce au théorème 4.1.19, il existe un segment séparant et localement $\mathcal{W}$-asphérique I sur B. On en déduit aussitôt par le lemme 1.4.13 que W est un B-localisateur. Mais alors en vertu du lemme 3.4.43, W est même un B-localisateur régulier, et donc il résulte de la proposition 6.1.9 que W contient les $\mathcal{W}$-équivalences, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 6.3.31. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. On considère un foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant $u : A \longrightarrow B$ entre $\mathcal{W}$-catégories test locales. Alors sous les identifications canoniques $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} \simeq \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{B} \simeq \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/B$, le foncteur $u^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{B} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}$ correspond à l'adjoint à droite du foncteur $u_! : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/B$. En particulier, pour que u^* induise une équivalence de catégories (au niveau homotopique), il faut et il suffit que u soit une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la caractérisation (ii) du théorème précédent (la seconde assertion résultant immédiatement de la propreté de $\mathcal{W}$). □

Remarque 6.3.32. — La première assertion du corollaire ci-dessus reste vrai sans hypothèse de propreté (mais la bonne condition pour que u^* induise une équivalence de catégories est alors que u soit $\mathcal{W}$-asphérique). Cela ne sera pas utilisé dans la suite, et nous en laissons la démonstration au lecteur.

Corollaire 6.3.33. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. On considère un foncteur $u : A \longrightarrow B$ entre deux $\mathcal{W}$-catégories test locales tel que pour tout morphisme $p : X \longrightarrow Y$ entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur B, le morphisme $u^*p : u^*X \longrightarrow u^*Y$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence de préfaisceaux sur A. Alors le couple de foncteurs adjoints*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A} \quad et \quad u_* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$$

est une adjonction de Quillen pour les structures de catégorie de modèles fermée dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les $\mathcal{W}$-équivalences. En outre, pour que cette adjonction soit une équivalence de Quillen, il faut et il suffit que le foncteur u soit une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — Comme le foncteur u^* respecte toujours les monomorphismes, cela résulte immédiatement du théorème 6.3.30 et du corollaire précédent. □

Proposition 6.3.34. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant entre $\mathcal{W}$-catégories test locales. Pour chaque préfaisceau X sur B, on a un carré commutatif canonique à la fois cartésien et $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} u^*X & \longrightarrow & i_A^*B/X \\ \downarrow & & \downarrow \\ e_{\widehat{A}} & \longrightarrow & i_A^*B \end{array} .$$

Plus généralement, pour tout morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur B, on a un carré à la fois cartésien et $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien de préfaisceaux sur A :

$$\begin{array}{ccc} u^*X & \longrightarrow & i_A^*B/X \\ {\scriptstyle u^*p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_A^*i_Bp} \\ u^*Y & \longrightarrow & i_A^*B/Y \end{array} .$$

Démonstration. — La première assertion résulte aussitôt de la seconde (en posant $Y = e_{\widehat{B}}$). On remarque grâce à la proposition 3.2.14 que pour tout morphisme

$X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur B, on a les deux carrés cartésiens ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} u^*X & \xrightarrow{\eta_{u^*X}} & i_A^*A/u^*X & \longrightarrow & i_A^*B/X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ u^*Y & \xrightarrow[\eta_{u^*Y}]{} & i_A^*A/u^*Y & \longrightarrow & i_A^*B/Y \end{array}$$

Le carré de gauche est homotopiquement cartésien en vertu de la proposition 6.2.7, et il résulte du théorème 6.3.30 que celui de droite est l'image par le foncteur i_A^* d'un carré homotopiquement cartésien dans $\boldsymbol{Cat}$. La proposition 6.2.8, appliquée au foncteur test local canonique $a \longmapsto A/a$, implique donc que le carré de droite est homotopiquement cartésien. □

Lemme 6.3.35. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. On considère un carré commutatif de $\boldsymbol{Cat}$*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \tag{6.3.35.1}$$

dans lequel le foncteur v est supposé fortement $\mathcal{W}$-localement constant. On suppose de plus que pour tout objet a de A, le carré induit

$$\begin{array}{ccc} A'/a & \xrightarrow{w/a} & A/a \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \tag{6.3.35.2}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien. Alors le carré (6.3.35.1) *est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien, et le foncteur w est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*

Démonstration. — Il résulte de la proposition 6.2.2 que le carré (6.3.35.1) est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien. Les carrés de la forme (6.3.35.2) étant $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésiens pour tout objet a de A, on en déduit que les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} A'/a & \xrightarrow{w/a} & A/a \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow[w]{} & A \end{array}$$

sont $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésiens pour tout objet a de A. Le critère (*iii*) de la proposition 6.3.28 montre donc que w est fortement $\mathcal{W}$-localement constant, et achève ainsi cette démonstration. □

6.3.36. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est *localement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, si pour tout objet a de A, le foncteur

$$A/a \longrightarrow B/u(a) \quad , \qquad (a', a' \longrightarrow a) \longmapsto (u(a'), u(a') \longrightarrow u(a))$$

est $\mathcal{W}$-asphérique.

Proposition 6.3.37. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental.*

(i) *Pour qu'un foncteur $u : A \longrightarrow B$ soit localement $\mathcal{W}$-asphérique, il faut et il suffit que pour tout objet b de B, le foncteur $u/b : A/b \longrightarrow B/b$ soit localement $\mathcal{W}$-asphérique.*

(ii) *Les foncteurs localement $\mathcal{W}$-asphériques sont stables par composition.*

(iii) *Les foncteurs localement $\mathcal{W}$-asphériques sont stables par produits finis.*

(iv) *Les foncteurs localement $\mathcal{W}$-asphérique sont stables par changement de base lisse. Autrement dit, si*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

est un carré cartésien de $\mathbf{Cat}$, avec u localement $\mathcal{W}$-asphérique et v $\mathcal{W}$-lisse, alors u' est localement $\mathcal{W}$-asphérique.

Démonstration. — Voir [**96**, proposition 1.1.14 et la version duale du corollaire 3.2.14]. □

Exemple 6.3.38. — Tout foncteur lisse est localement asphérique (d'après la version duale de [**96**, proposition 3.2.9]).

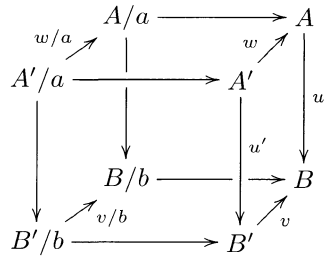
Proposition 6.3.39. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. On considère un carré cartésien de petites catégories de la forme suivante.*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

Alors si u est localement $\mathcal{W}$-asphérique et si v est à la fois $\mathcal{W}$-lisse et fortement $\mathcal{W}$-localement constant, le carré ci-dessus est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien, et le foncteur w est à la fois $\mathcal{W}$-lisse et fortement $\mathcal{W}$-localement constant.

Démonstration. — Les foncteurs $\mathcal{W}$-lisses étant stables par changement de base, il est clair que w est un foncteur $\mathcal{W}$-lisse. La proposition sera donc démontrée si on vérifie

les hypothèses du lemme 6.3.35. Soit a un objet de A. On lui associe canoniquement le cube commutatif suivant (en posant $b = u(a)$).



Le foncteur v étant $\mathcal{W}$-lisse, et les foncteurs $\mathcal{W}$-lisses étant stables par changement de base, il en est de même de v/b. Comme le foncteur $A/a \longrightarrow B/b$ est $\mathcal{W}$-asphérique, la face latérale de gauche étant cartésienne, il résulte de la proposition 6.3.5 que le foncteur $A'/a \longrightarrow B'/b$ est $\mathcal{W}$-asphérique. D'autre part, la face horizontale inférieure de ce cube est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésienne (le foncteur v étant fortement $\mathcal{W}$-localement constant, cela résulte du critère (*iii*) de la proposition 6.3.28). On en déduit aussitôt que les hypothèses du lemme 6.3.35 sont vérifiées, ce qui prouve que le carré voulu est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien et que le foncteur w est fortement $\mathcal{W}$-localement constant. □

Corollaire 6.3.40. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur localement $\mathcal{W}$-asphérique entre $\mathcal{W}$-catégories test locales. Si $p : X \longrightarrow Y$ est une $\mathcal{W}$-fibration faible de préfaisceaux sur B, alors le carré cartésien associé à p*

$$\begin{array}{ccc} A/u^*X & \xrightarrow{i_A u^* p} & A/u^*Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/X & \xrightarrow[i_B p]{} & B/Y \end{array}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien, et le morphisme $u^*p : u^*X \longrightarrow u^*Y$ est une $\mathcal{W}$-fibration faible de préfaisceaux sur A. En outre, pour tout triangle commutatif de préfaisceaux sur B

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & S & \end{array} ,$$

si p et q sont des $\mathcal{W}$-fibrations faibles, et si f est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors le morphisme $u^*f : u^*X \longrightarrow u^*Y$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. En particulier, le foncteur $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les $\mathcal{W}$-fibrations faibles et les $\mathcal{W}$-équivalences universelles.

Démonstration. — La première assertion implique aussitôt les suivantes. Nous nous contenterons donc de prouver celle-ci. Soit $p : X \longrightarrow Y$ une $\mathcal{W}$-fibration faible de préfaisceaux sur B. Formons les carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccccc} A/u^*X & \xrightarrow{i_A u^* p} & A/u^*Y & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u/X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u/Y} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B/X & \xrightarrow[i_B p]{} & B/Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

Les foncteurs localement $\mathcal{W}$-asphériques étant stables par changements de base $\mathcal{W}$-lisses (6.3.37), vu que le foncteur canonique $B/Y \longrightarrow B$ est une fibration, le foncteur u/Y est localement $\mathcal{W}$-asphérique. D'autre part, le foncteur $i_B p$ est une fibration (à fibres discrètes), et comme p est une $\mathcal{W}$-fibration faible, le corollaire 6.3.25 implique que $i_B p$ est fortement $\mathcal{W}$-localement constant. L'assertion résulte donc aussitôt de la proposition précédente et d'une nouvelle application du corollaire 6.3.25 au morphisme u^*p. □

6.3.41. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ entre petites catégories est *$\mathcal{W}$-excellent* s'il est fortement $\mathcal{W}$-localement constant et localement $\mathcal{W}$-asphérique. Par exemple, en vertu de 6.3.38, tout foncteur $\mathcal{W}$-lisse et fortement $\mathcal{W}$-localement constant est $\mathcal{W}$-excellent. Lorsque $\mathcal{W}$ est propre, les $\mathcal{W}$-bifibrations de Thomason fortement propres et lisses (c'est-à-dire les fibrations de la structure de catégorie de modèles fermée du théorème 5.3.14) sont des foncteurs $\mathcal{W}$-excellents.

Proposition 6.3.42. — *Les foncteurs $\mathcal{W}$-excellents sont stables par composition et par changement de base $\mathcal{W}$-lisse.*

Démonstration. — Les foncteurs localement $\mathcal{W}$-asphériques (resp. fortement $\mathcal{W}$-localement constants) sont stables par composition et par changement de base $\mathcal{W}$-lisse par la proposition 6.3.37 (resp. par la proposition 6.3.10 et en vertu du corollaire 6.3.20). □

Proposition 6.3.43. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. Pour tout foncteur $\mathcal{W}$-excellent $u : A \longrightarrow B$ entre deux $\mathcal{W}$-catégories test locales, le foncteur image inverse*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences et les $\mathcal{W}$-fibrations faibles.

Démonstration. — Le fait que u^* respecte les $\mathcal{W}$-équivalences résulte aussitôt du fait que u est fortement $\mathcal{W}$-localement constant. Le fait qu'il respecte les $\mathcal{W}$-fibrations faibles résulte immédiatement du corollaire 6.3.40. □

6.4. Foncteurs localement constants

6.4.1. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de ***Cat*** est *$\mathcal{W}$-localement constant* si pour toute flèche $b \longrightarrow b'$ de B, le foncteur induit $A/b \longrightarrow A/b'$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Exemple 6.4.2. — Tout foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant, et en particulier tout foncteur $\mathcal{W}$-asphérique, est $\mathcal{W}$-localement constant.

Exemple 6.4.3. — Soit I une petite catégorie, et soit F un foncteur de I dans ***Cat*** tel que pour toute flèche $i \longrightarrow j$ de I, le foncteur $F_i \longrightarrow F_j$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence. Alors la projection canonique de $\int F$ sur I est un foncteur $\mathcal{W}$-localement constant.

Exemple 6.4.4. — Soit A une petite catégorie. Si X est un préfaisceau sur A tel que pour toute flèche $a \longrightarrow a'$ de A, le morphisme $X \times a \longrightarrow X \times a'$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence, alors le foncteur canonique de A/X vers A est $\mathcal{W}$-localement constant. Par exemple, si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, pour toute petite catégorie C, c'est le cas de $X = i_A^* C$ (4.3.17). Si en outre $\mathcal{W}$ est propre, c'est aussi le cas pour tout préfaisceau fibrant X sur A au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$.

Exemple 6.4.5. — Soient A une petite catégorie, et $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A. Pour que le morphisme p de $\widehat{A}$ soit $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-localement constant (cf. 2.2.3), il faut et il suffit que le foncteur $i_A p : A/X \longrightarrow A/Y$ soit $\mathcal{W}$-localement constant.

Proposition 6.4.6. — *Un foncteur $\mathcal{W}$-propre $u : A \longrightarrow B$ est $\mathcal{W}$-localement constant si et seulement si pour tout foncteur $B' = \Delta_1 \longrightarrow B$, si on forme le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} ,$$

l'inclusion $A'_0 \longrightarrow A'$ de la fibre A'_0 de u' au-dessus de l'objet 0 de B' est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — Soit $b : b_0 \longrightarrow b_1$ une flèche de B. Cette dernière définit un foncteur, noté par abus $b : B' = \Delta_1 \longrightarrow B$, tel que $b(0) = b_0$ et $b(1) = b_1$. Désignons par A' la fibre de u au-dessus de b, *i.e.* le produit fibré de B' et A au-dessus de B. Pour $\varepsilon = 0, 1$, on note $A'_\varepsilon = A_{b_\varepsilon}$ la fibre de A' au-dessus de ε. Comme u est propre, les inclusions

$$A'_\varepsilon \longrightarrow A/b_\varepsilon \quad , \qquad \varepsilon = 0, 1 \ ,$$

sont des $\mathcal{W}$-équivalences. Le critère (c) de la proposition 5.3.4 implique d'autre part que le foncteur $A'_1 \longrightarrow A'$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A'_1 & \longrightarrow & A' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & A/b_1 & \end{array}$$

montre par conséquent que le foncteur $A' \longrightarrow A/b_1$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. On en déduit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A'_0 & \longrightarrow & A/b_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A/b_1 \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des $\mathcal{W}$-équivalences, ce qui prouve la proposition. □

Corollaire 6.4.7. — *Les foncteurs à la fois $\mathcal{W}$-propres et $\mathcal{W}$-localement constants sont stables par changement de base.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition précédente et du corollaire 5.3.6. □

Corollaire 6.4.8. — *Tout foncteur à la fois $\mathcal{W}$-propre et $\mathcal{W}$-lisse est $\mathcal{W}$-localement constant.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 6.4.6 et de la version duale du critère (c) de la proposition 5.3.4. □

Proposition 6.4.9. — *Les foncteurs $\mathcal{W}$-localement constants sont stables par changement de base le long des foncteurs $\mathcal{W}$-lisses.*

Démonstration. — Considérons un carré cartésien de petites catégories

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

le foncteur v étant $\mathcal{W}$-lisse, et le foncteur u étant $\mathcal{W}$-localement constant. Il s'agit de montrer que le foncteur u' est $\mathcal{W}$-localement constant. Soit b' un objet de B', et posons $b = v(b')$. On a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A'/b' & \longrightarrow & A/b \\ \downarrow & & \downarrow \\ B'/b' & \longrightarrow & B/b \end{array} \quad .$$

Comme v est $\mathcal{W}$-lisse, $B'/b' \longrightarrow B/b$ est universellement dans $\mathcal{W}$ (c'est un foncteur $\mathcal{W}$-lisse à fibres $\mathcal{W}$-asphériques), ce qui implique que le foncteur $A'/b' \longrightarrow A/b$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Si $b'_0 \longrightarrow b'_1$ est une flèche de B', et si on note $b_\varepsilon = v(b'_\varepsilon)$, pour $\varepsilon = 0, 1$, on a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A'/b'_0 & \longrightarrow & A'/b'_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/b_0 & \longrightarrow & A/b_1 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des $\mathcal{W}$-équivalences. On en déduit aussitôt que u' est $\mathcal{W}$-localement constant. □

Proposition 6.4.10. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tous carrés cartésiens dans* ***Cat****,*

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w'} & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

si $B'' = e$ est la catégorie ponctuelle, et B' un ensemble totalement ordonné fini, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.

(b) *Pour tous carrés cartésiens dans* ***Cat****,*

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w'} & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

si v' est une ∞-équivalence, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — On sait qu'un foncteur est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si son nerf est une $\mathcal{W}$-équivalence d'ensembles simpliciaux. Le foncteur nerf étant pleinement fidèle et commutant aux produits fibrés, cet énoncé est donc une conséquence de la proposition 2.2.5. □

Lemme 6.4.11. — *Soit $F : B \longrightarrow$ **Cat** un foncteur défini sur une petite catégorie tel que pour toute flèche $b \longrightarrow b'$ de B, le foncteur $F(b) \longrightarrow F(b')$ soit une*

$\mathcal{W}$-équivalence. Posons $A = \int F$, et désignons par u la projection canonique de A sur B. Alors pour tous carrés cartésiens dans **Cat**,

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w'} & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

si $B'' = e$ est la catégorie ponctuelle, et si B' admet un objet final, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — Si v' pointe l'objet final de B', alors v' est un foncteur $\mathcal{W}$-coasphérique, et donc en vertu de la proposition 6.3.4, le foncteur w' est $\mathcal{W}$-coasphérique. Dans le cas général, v' correspond à un objet b de B, et la catégorie A'' s'identifie alors à $F(b)$, et w' à l'inclusion canonique dans $A' = \int v^* F$. Si b_0 est un objet final de B, le morphisme de b vers b_0 induit par fonctorialité un morphisme i de $F(b)$ vers $F(b_0)$. Or i est une $\mathcal{W}$-équivalence par hypothèse, et on vient de voir que l'inclusion canonique w'_0 de $F(b_0)$ dans A' est une $\mathcal{W}$-équivalence. Or on a un morphisme de foncteurs canonique de w' vers $w'_0 i$ induit par la flèche de b vers b_0 (voir [**96**, 2.2.3]). Cela implique que les morphismes w' et $w'_0 i$ sont Δ_1-homotopes, d'où on déduit que w' est aussi une $\mathcal{W}$-équivalence. □

Proposition 6.4.12. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est $\mathcal{W}$-localement constant.*

(ii) *Pour tous carrés cartésiens dans* **Cat**,

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w'} & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

si v et vv' sont $\mathcal{W}$-transverses à u, et si v' est une ∞-équivalence, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.

(iii) *Pour tous carrés cartésiens dans* **Cat**,

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w'} & A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

si v et vv' sont $\mathcal{W}$-lisses, et si v' est une ∞-équivalence, alors w' est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — Soit F_u le foncteur de B dans $\mathbf{Cat}$ défini par $F_u(b) = A/b$ pour tout objet b de B. On s'aperçoit aussitôt grâce au lemme 6.3.26 que u est $\mathcal{W}$-localement constant si et seulement si la projection canonique θ_{F_u} de $\int F_u$ sur B l'est. Le même lemme implique donc qu'il suffit de prouver la proposition pour un foncteur de la forme θ_{F_u}. Mais alors cela résulte immédiatement du lemme 6.4.11 et de la proposition 6.4.10. □

Scholie 6.4.13. — Les propositions 6.4.10 et 6.4.12 peuvent être vues comme des versions abstraites du théorème de complétion en groupe. Cela pourra paraître plus évident pour le lecteur si on les applique dans le cas où $\mathcal{W}$ est défini par une théorie homologique au sens de 9.4.3 (voir [**100, 101, 64**]). On en déduit aussi les variantes suivantes du théorème B de Quillen.

Proposition 6.4.14. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est une $\mathcal{W}_\infty$-fibration faible.*

(ii) *Tout carré cartésien de la forme*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

où B' est un ensemble totalement ordonné fini, est $\mathcal{W}_\infty$-homotopiquement cartésien.

(iii) *Pour tous carrés cartésiens dans $\mathbf{Cat}$,*

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{i} & A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[j]{} & B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

si $B'' = e$ est la catégorie ponctuelle, et B' un ensemble totalement ordonné fini, alors i est une ∞-équivalence.

Démonstration. — La proposition 6.4.10 montre l'équivalence entre les conditions (*i*) et (*iii*), et il est clair que la condition (*ii*) implique la condition (*iii*). La proposition 6.2.3 montre enfin que (*i*) implique (*ii*). □

Théorème 6.4.15 **(Quillen [112])**. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est $\mathcal{W}_\infty$-localement constant.*

(ii) *Le foncteur u est fortement $\mathcal{W}_\infty$-localement constant.*

(iii) *Le foncteur image inverse $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les ∞-équivalences.*

(iv) *Pour tout préfaisceau X sur B, le carré ci-dessous est $\mathcal{W}_\infty$-homotopiquement cartésien.*

$$\begin{array}{ccc} A/X & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u/X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B/X & \longrightarrow & B \end{array}$$

(v) *Pour tout objet b de B, A/b est la fibre homotopique de A au-dessus de b au sens de $\mathcal{W}_\infty$,* i.e. *le carré ci-dessous est $\mathcal{W}_\infty$-homotopiquement cartésien.*

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u/b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array}$$

(vi) *Si $v : B' \longrightarrow B$ est $\mathcal{W}_\infty$-transverse à u, alors le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

est $\mathcal{W}_\infty$-homotopiquement cartésien.

Démonstration. — La proposition 6.4.12 montre que (i) implique (ii), et la proposition 6.3.28 implique que les conditions (ii), (iv), (v) et (vi) sont équivalentes. Les implications $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ étant triviales, cela prouve le théorème. □

Corollaire 6.4.16. — *Un foncteur $\mathcal{W}_\infty$-propre est $\mathcal{W}_\infty$-localement constant si et seulement si c'est une $\mathcal{W}_\infty$-fibration faible.*

Démonstration. — Cela résulte du corollaire 6.3.19 et du théorème 6.4.15. □

Corollaire 6.4.17. — *On considère une petite catégorie S, et un morphisme de $\mathbf{Cat}/S$*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & S & \end{array} \quad ,$$

tel que les foncteurs p et q soient $\mathcal{W}_\infty$-localement constants. Alors le foncteur u est une ∞-équivalence si et seulement s'il est une ∞-équivalence localement au-dessus de S.

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du critère (v) du théorème 6.4.15. □

Corollaire 6.4.18. — *Un morphisme $\mathcal{W}_\infty$-localement constant de $\mathbf{Cat}$ est une ∞-équivalence si et seulement s'il est ∞-asphérique.*

Démonstration. — Il s'agit d'un cas particulier du corollaire précédent, appliqué à $B = S$ et $q = 1_B$. □

Corollaire 6.4.19. — *Les foncteurs $\mathcal{W}_\infty$-localement constants sont stables par composition.*

Démonstration. — Il est immédiat que la condition (*iii*) du théorème 6.4.15 est stable par composition. □

Remarque 6.4.20. — Tous les énoncés ci-dessus admettent des versions duales en passant aux catégories opposées.

6.4.21. — On définit le foncteur *composantes connexes*

$$\pi_0 : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

comme l'adjoint à gauche du foncteur qui associe à chaque ensemble la catégorie discrète correspondante. Si X est un ensemble simplicial, on obtient une bijection canonique $\pi_0 X \simeq \pi_0 \Delta/X$. On vérifie enfin sans difficultés que pour toute petite catégorie C, on a une bijection canonique $\pi_0 C \simeq \pi_0 N C$. Un morphisme de $\mathcal{C}at$ sera appelé une 0-*équivalence* s'il induit une bijection après application du foncteur π_0. On vérifie immédiatement que les 0-équivalences forment un localisateur fondamental grâce au fait que le foncteur π_0 commute aux petites limites inductives. Ce qui précède implique en outre que le Δ-localisateur correspondant au localisateur fondamental des 0-équivalences est celui des 0-équivalences au sens du paragraphe 2.2.1. On obtient dès lors un analogue du théorème 2.2.10 en termes de localisateurs fondamentaux.

Théorème 6.4.22. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental satisfaisant aux conditions suivantes.*

(a) *Toute $\mathcal{W}$-équivalence est une 0-équivalence.*

(b) *Un foncteur $\mathcal{W}$-localement constant est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement s'il est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$.

Démonstration. — Comme $\mathcal{W}_\infty$ est par définition le localisateur fondamental minimal, il suffit de montrer que toute $\mathcal{W}$-équivalence est une ∞-équivalence. En vertu du théorème 4.2.15 et du corollaire 4.2.19, il suffit même de montrer que le Δ-localisateur (test) $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ est contenu dans celui des ∞-équivalences. Pour cela, on va montrer qu'il vérifie les conditions du théorème 2.2.10. La condition (*i*) correspond à la condition (*a*), et la condition (*iii*) exprime simplement le fait que pour tout ensemble simplicial X, les projections $X \times \Delta_n \longrightarrow X$ sont des $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$-équivalences. Il reste donc à montrer la condition (*ii*). Or il est immédiat qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux est $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$-localement constant au sens de la définition 2.2.3 si et seulement si son image par le foncteur i_Δ est $\mathcal{W}$-localement constante, ce qui prouve le théorème. □

Remarque 6.4.23. — On peut vérifier que les seuls localisateurs fondamentaux qui ne satisfont pas à la condition (a) de l'énoncé ci-dessus sont les localisateurs fondamentaux grossiers (voir 9.3.2). Or il est facile de voir que le localisateur fondamental grossier non trivial ne satisfait pas non plus à la condition (b) : pour avoir un contre-exemple, il suffit de considérer une inclusion non surjective d'ensembles non vides (vus comme des catégories discrètes). Autrement dit, ce théorème peut être raffiné de la manière suivante : le seul localisateur fondamental non trivial satisfaisant à la condition (b) ci-dessus est le localisateur fondamental minimal.

Proposition 6.4.24. — *Soit A une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale. On désigne par $\mathsf{W}_\infty = i_A^{-1}\mathcal{W}_\infty$ le A-localisateur régulier et propre des ∞-équivalences. On considère un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout morphisme $Z \longrightarrow Y$, le carré*

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est W_∞-homotopiquement cartésien.

(b) *La flèche p est une W_∞-fibration faible.*

(c) *Le morphisme p est W_∞-localement constant.*

Démonstration. — Le fait que les conditions (a) et (b) sont équivalentes résulte aussitôt de la proposition 1.5.18. On vérifie grâce au corollaire 6.3.25 (resp. immédiatement) que la condition (b) (resp. (c)) équivaut à dire que le foncteur $i_A p$ est fortement $\mathcal{W}_\infty$-localement constant (resp. $\mathcal{W}_\infty$-localement constant). Cette proposition résulte donc du théorème 6.4.15. □

Corollaire 6.4.25. — *Soit A une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale. On désigne par $\mathsf{W}_\infty = i_A^{-1}\mathcal{W}_\infty$ le A-localisateur des ∞-équivalences, et on se donne un morphisme W_∞-localement constant $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le morphisme p est une ∞-équivalence.*

(b) *Le morphisme p est une W_∞-équivalence universelle.*

(c) *Pour tout préfaisceau représentable a sur A, et toute section $a \longrightarrow Y$ de Y au-dessus de a, la projection de $a \times_Y X$ sur a est une ∞-équivalence.*

Proposition 6.4.26. — *Soit A une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale. Alors $\mathsf{W}_\infty = i_A^{-1}\mathcal{W}_\infty$ est le A-localisateur régulier engendré par les morphismes entre préfaisceaux représentables sur A.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les hypothèses de la proposition 6.1.3 sont vérifées en prenant pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des préfaisceaux représentables sur A. La condition (a) est évidente, la condition (b) résulte du corollaire 3.4.24, la condition (c) du théorème 4.2.15, et la condition (d) de la proposition 6.4.24. □

Corollaire 6.4.27. — *Soient A une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale, et B une petite catégorie. Le $A \times B$-localisateur des ∞-équivalences est le plus petit parmi ceux qui contiennent les ∞-équivalences argument par argument sur B (*i.e. *les flèches $X \longrightarrow Y$ telles que pour tout objet b de B, $X_b \longrightarrow Y_b$ soit une ∞-équivalence) et les flèches de la forme $1_a \times g : a \times b \longrightarrow a \times b'$ pour tout objet a de A, et toute flèche $g : b \longrightarrow b'$ de B.*

Démonstration. — On sait que $A \times B$ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale (4.1.22), ce qui donne déjà un sens à l'énoncé. Soit W le plus petit $A \times B$-localisateur contenant les ∞-équivalences argument par argument sur B et les flèches de la forme $1_a \times g : a \times b \longrightarrow a \times b'$. Le A-localisateur des ∞-équivalences étant régulier, il résulte de la proposition 3.4.44 que W contient un $A \times B$-localisateur régulier, et est donc lui-même régulier. Il est d'autre part immédiat que W contient toutes les flèches de $A \times B$, et par conséquent, la proposition précédente implique que W contient toutes les ∞-équivalences. L'inclusion inverse résulte aussitôt du lemme 4.3.8. □

Remarque 6.4.28. — Le corollaire ci-dessus montre que la caractérisation de W_∞ donnée dans la proposition 6.4.26 est optimale : il implique que le contre-exemple 3.4.57 montre l'existence de $\mathcal{W}_\infty$-catégories test locales A telles que le A-localisateur engendré par les flèches entre préfaisceaux représentables sur A soit strictement contenu dans celui des ∞-équivalences.

Proposition 6.4.29. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur $\mathcal{W}_\infty$-localement constant entre deux $\mathcal{W}_\infty$-catégories test locales. Le couple de foncteurs*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A} \quad et \quad u_* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$$

est une adjonction de Quillen pour les structures de catégorie de modèles fermée associées au localisateur fondamental $\mathcal{W}_\infty$ (dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les ∞-équivalences). En outre, ce couple de foncteurs adjoints est une équivalence de Quillen si et seulement si u est une ∞-équivalence.

Démonstration. — En vertu des théorèmes 6.3.30 et 6.4.15, c'est un cas particulier du corollaire 6.3.33. □

6.5. Systèmes locaux

6.5.1. — On considère un localisateur fondamental accessible fixé $\mathcal{W}$.

Soit A une petite catégorie. Le foncteur d'intégration (3.3.13) définit un foncteur

$$\int_A : \mathcal{H}om(A, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at/A \ .$$

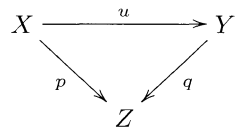
Ce dernier envoie les $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument sur des $\mathcal{W}$-équivalences au-dessus de A, et par conséquent, induit un foncteur

$$\int_A : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A) = (\mathcal{W}^A)^{-1}\, \mathcal{H}om(A, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A \ .$$

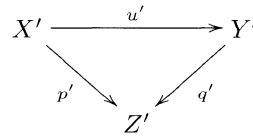
Ce dernier identifie la catégorie $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$ avec la localisation de $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A)$ par les images des flèches de $\mathcal{H}om(A, \mathcal{C}at)$ dont l'intégrale est une $\mathcal{W}$-équivalence ; voir [**96**, théorème 3.1.4].

On dira qu'un foncteur $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ est *fortement $\mathcal{W}$-localement constant* s'il est isomorphe dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A)$ à un foncteur de la forme $\Theta_A(X, p)$ (cf. 3.3.18), où $p : X \longrightarrow A$ est une $\mathcal{W}$-fibration de Thomason (cf. 5.2.16).

Lemme 6.5.2. — *soit C une catégorie de modèles fermée. On considère un triangle commutatif de C de la forme suivante.*



Si p et q sont des fibrations, et u une équivalence faible, alors pour tout morphisme $f : Z' \longrightarrow Z$, dans le triangle commutatif



obtenu à partir du précédent par changement de base le long de f, le morphisme u' est une équivalence faible.

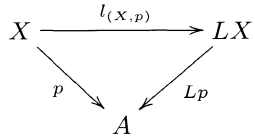
Démonstration. — Le foncteur évident $C/Z' \longrightarrow C/Z$ est un foncteur de Quillen à gauche, et donc son adjoint à droite est un foncteur de Quillen à droite. En particulier, il respecte les équivalences faibles entre objets fibrants. Ce lemme n'est qu'une reformulation de cette dernière assertion. □

Proposition 6.5.3. — *Le foncteur $\int_A : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$ admet un adjoint à droite pleinement fidèle dont l'image essentielle est formée des foncteurs fortement $\mathcal{W}$-localement constants dans le sens défini ci-dessus.*

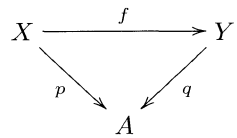
Démonstration. — Le couple de foncteurs adjoints Θ'_A et Θ_A induit des équivalences de catégories (quasi-inverses l'une de l'autre) entre $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A)$ et la localisation de $\mathcal{C}at/A$ par les $\mathcal{W}$-équivalences localement au-dessus de A [**96**, théorème 3.1.4]. L'existence de la structure de catégorie de modèles fermée de Thomason associée à $\mathcal{W}$ (5.2.15) implique qu'il existe un endofoncteur L de $\mathcal{C}at/A$

$$L : \mathcal{C}at/A \longrightarrow \mathcal{C}at/A \quad , \qquad (X, p : X \longrightarrow A) \longmapsto (LX, Lp : LX \longrightarrow A)$$

et un morphisme de foncteurs $l : 1_{Cat/A} \longrightarrow L$ tels que pour tout objet (X, p) au-dessus de A, le morphisme $l_{(X,p)}$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence.

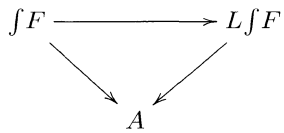


Le lemme précédent (appliqué à la structure de catégorie de modèles fermée de Thomason associée à $\mathcal{W}$) implique que pour toute $\mathcal{W}$-fibration de Thomason $p : X \longrightarrow A$, le morphisme $l_{(X,p)}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de A, et que pour tout morphisme f au-dessus de A,



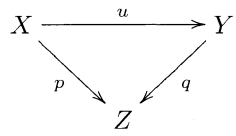
le morphisme Lf est une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de A. Cela permet de s'apercevoir aisément que la localisation de la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Cat}/A$ formée des $\mathcal{W}$-fibration de Thomason de but A par les $\mathcal{W}$-équivalences localement au-dessus de A s'identifie avec la localisation de la même catégorie par les $\mathcal{W}$-équivalences au-dessus de A. Cela permet de conclure formellement. □

Remarque 6.5.4. — En reprenant la construction et les notations de la preuve ci-dessus, on déduit par un argument de forte saturation que pour qu'un foncteur F de A dans $\mathbf{Cat}$ soit fortement $\mathcal{W}$-localement constant, il faut et il suffit que le A-morphisme



soit une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de A.

Lemme 6.5.5. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. On considère un triangle commutatif de $\mathbf{Cat}$ de la forme suivante.*



(a) *Si le foncteur u est une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de A, pour que p soit un foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant, il faut et il suffit qu'il en soit de même de q.*

(b) *Si les foncteurs p et q sont fortement $\mathcal{W}$-localement constants, pour que le foncteur u soit une $\mathcal{W}$-équivalence, il faut et il suffit qu'il soit une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de A.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du critère (*iii*) de la proposition 6.3.28. □

Théorème 6.5.6. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre et A une petite catégorie. On considère un foncteur F défini sur A et à valeurs dans $\mathbf{Cat}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le foncteur F est fortement $\mathcal{W}$-localement constant.*

(b) *Le foncteur F est dans l'image essentielle de l'adjoint à droite du foncteur de localisation $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$.*

(c) *La projection canonique $\int F \longrightarrow A$ est un foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant (cf. 6.3.8).*

(d) *La projection canonique $\int F \longrightarrow A$ est une $\mathcal{W}$-fibration faible.*

Démonstration. — L'équivalence de (a) et (b) est un cas particulier de la proposition précédente, et celle entre (c) et (d) provient du corollaire 6.3.19 (pour le moment, nous n'avons pas utilisé la propreté de $\mathcal{W}$, mais seulement l'accessibilité). La remarque 6.5.4 et le lemme précédent permettent quant à eux de vérifier l'équivalence entre (a) et (d). □

Corollaire 6.5.7. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre. Pour tout foncteur entre petites catégories $u : A' \longrightarrow A$, le foncteur image inverse*

$$u^* : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A')$$

respecte les foncteurs fortement $\mathcal{W}$-localement constants.

Démonstration. — Les $\mathcal{W}$-fibrations faibles étant stables par changement de base cela résulte du carré cartésien défini au numéro 6.3.1 et de la caractérisation (d) ci-dessus. □

Corollaire 6.5.8. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et A une petite catégorie. Pour qu'un foncteur F de A dans $\mathbf{Cat}$ soit fortement $\mathcal{W}$-localement constant, il faut et il suffit que pour tout foncteur $u : A' \longrightarrow A$ de source $\mathcal{W}$-asphérique, le foncteur u^*F soit isomorphe dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A')$ à un foncteur constant.*

Démonstration. — Si A est $\mathcal{W}$-asphérique, on a une équivalence de catégories canonique $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A \simeq \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$. Il s'ensuit que tout foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant sur A est isomorphe à un foncteur constant. Cela montre grâce au corollaire 6.5.7 que c'est une condition nécessaire. Réciproquement, supposons que F est un foncteur de A dans $\mathbf{Cat}$ tel que pour tout foncteur $u : A' \longrightarrow A$ de source $\mathcal{W}$-asphérique, le foncteur u^*F soit isomorphe dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A')$ à un foncteur constant. Tout foncteur constant étant fortement $\mathcal{W}$-localement constant, on en déduit grâce

au critère (d) du théorème 6.5.6 et à la caractérisation (iv) de la proposition 6.2.3 que F est fortement $\mathcal{W}$-localement constant. □

Corollaire 6.5.9. — *Pour un foncteur F défini sur une petite catégorie A à valeurs dans Cat, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le foncteur F est fortement $\mathcal{W}_\infty$-localement constant.*

(b) *Le foncteur F est ∞-localement constant dans le sens où pour toute flèche $a \longrightarrow a'$ de A, le foncteur $F_a \longrightarrow F_{a'}$ est une ∞-équivalence.*

(c) *Pour tout objet a de A, la restriction de F à A/a est isomorphe à un foncteur constant dans $\mathbf{Hot}_\infty(A/a)$.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du théorème B de Quillen (6.4.15) et du théorème 6.5.6. □

Remarque 6.5.10. — Cet énoncé peut être vu comme une reformulation dans Cat du corollaire 6.4.27. On en déduit une caractérisation des ∞-équivalences comme suit (cela peut être vu comme une version abstraite du théorème B de Quillen).

Si C est une catégorie de modèles fermée et A une petite catégorie, on dit qu'un préfaisceau F sur A à valeurs dans C est *localement constant* si pour toute flèche $a \longrightarrow a'$ de A, le morphisme $F_{a'} \longrightarrow F_a$ est une équivalence faible de C. On note $\mathbf{LC}(A, C)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ho}(\mathcal{H}om(A^{op}, C))$ formée des foncteurs localement constants.

On admet ici que la notion de limite homotopique a un sens pour une catégorie de modèles fermée arbitraire (cf. [**29, 34, 48, 72**]).

Théorème 6.5.11. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre pettes catégories. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le foncteur u est une ∞-équivalence.*

(ii) *Pour toute catégorie de modèles fermée C et tout préfaisceau F sur B à valeurs dans C, si F est localement constant, alors le morphisme canonique*

$$\mathbf{R}\varprojlim_{B^{op}} F \longrightarrow \mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} u^* F$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(C)$.

(iii) *Pour tout préfaisceau simplicial F sur B, si F est localement constant, alors le morphisme canonique*

$$\mathbf{R}\varprojlim_{B^{op}} F \longrightarrow \mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} u^* F$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{\Delta} \simeq \mathbf{Hot}_\infty$.

Démonstration. — Il est trivial que (ii) implique (iii), et on constate que (iii) implique (i), car le lemme 3.1.20 montre que l'hypothèse (iii) (appliquée seulement pour les préfaisceaux constants sur B) et le théorème 4.2.15 (appliqué à la catégorie test Δ)

impliquent (i). Supposons que u est une ∞-équivalence, et démontrons (iii). Il suffit de prouver que le foncteur image inverse

$$u^* : \mathbf{Ho}(\mathcal{H}om(B^{op}, \widehat{\Delta})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{H}om(A^{op}, \widehat{\Delta}))$$

induit une équivalence de catégories

$$u^* : \mathbf{LC}(B, \widehat{\Delta}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{LC}(A, \widehat{\Delta}) \ .$$

On en déduira alors par pleine fidélité que pour tout préfaisceau localement constant F sur B à valeurs dans $\widehat{\Delta}$ et tout ensemble simplicial K, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Hot}_\infty}(K, \mathbf{R}\varprojlim_{B^{op}} F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hot}_\infty}(K, \mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} u^*F) \ ,$$

d'où l'isomorphisme attendu $\mathbf{R}\varprojlim_{B^{op}} F \simeq \mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} u^*F$ par le lemme de Yoneda. Or il résulte formellement de 6.5.6 et 6.5.9 que l'on a une équivalence de catégories canonique

$$\mathbf{LC}(X, \mathit{Cat}) \simeq \mathbf{Hot}_\infty /\!\!/ X^{op}$$

pour toute petite catégorie X (où Cat est munie de la structure de catégorie de modèles fermée de Thomason associée à $\mathcal{W}_\infty$). On a aussi une équivalence de catégories

$$\mathbf{LC}(X, \widehat{\Delta}) \simeq \mathbf{LC}(X, \mathit{Cat})$$

issue de l'équivalence de Quillen entre Cat et $\widehat{\Delta}$ (5.2.12), ou bien encore, de manière équivalente, des équivalences de catégories induites par le foncteur i_Δ (en appliquant 4.2.24 pour $A = \Delta$). Après ces identifications, le foncteur u^* correspond sur les préfaisceaux localement constants à l'adjoint à droite du foncteur induit par u^{op}

$$\mathbf{Hot}_\infty /\!\!/ A^{op} \longrightarrow \mathbf{Hot}_\infty /\!\!/ B^{op} \ ,$$

lequel est une équivalence de catégories puisque u^{op} est une ∞-équivalence et $\mathcal{W}_\infty$ est propre. Montrons enfin que (iii) entraîne (ii). Considérons une catégorie de modèles fermée abstraite $\mathcal{C}$, et K un objet de $\mathcal{C}$. Pour un préfaisceau localement constant F sur B à valeurs dans $\mathcal{C}$, on a par (ii) le calcul suivant (voir par exemple [**34**, proposition 6.13] pour lui donner un sens raisonnable) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(K, \mathbf{R}\varprojlim_{B^{op}} F) &\simeq \pi_0\big(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(K, \mathbf{R}\varprojlim_{B^{op}} F)\big) \\
&\simeq \pi_0\big(\mathbf{R}\varprojlim_{B^{op}} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(K, F)\big) \\
&\simeq \pi_0\big(\mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} u^*\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(K, F)\big) \\
&= \pi_0\big(\mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(K, u^*F)\big) \\
&\simeq \pi_0\big(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(K, \mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} u^*F)\big) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(K, \mathbf{R}\varprojlim_{A^{op}} u^*F) \ .
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration grâce au lemme de Yoneda. □

Corollaire 6.5.12. — *Soit I une petite catégorie ∞-asphérique. Pour toute catégorie de modèles fermée C et tout préfaisceau F sur I à valeurs dans C, si F est localement constant, alors pour tout objet i de I, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{R}\varprojlim_{I^{op}} F \simeq F_i$$

dans la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(C)$.

Démonstration. — On applique le théorème précédent au cas où u est le foncteur $i : e \longrightarrow I$. □

Scholie 6.5.13. — Soient C une catégorie de modèles fermée, et X une petite catégorie. Pour un préfaisceau F sur X à coefficients dans C, on définit la *cohomologie de X à coefficients dans F* par la formule

$$\mathbf{R}\Gamma(X, F) = \mathbf{R}\varprojlim_{X^{op}} F \ .$$

Le théorème 6.5.11 s'interprète alors en disant que les ∞-équivalences sont testées par la cohomologie à coefficients localement constants. Par exemple si $C = \widehat{\Delta}$, on peut prendre pour F le i-ème espace d'Eilenberg-MacLane $K(L, i)$ associé à un préfaisceau localement constant L sur X (*i.e.* L est un préfaisceau sur le groupoïde fondamental de X), en supposant que $i = 0$ si L est un préfaisceau d'ensembles, $i = 1$ si L est un préfaisceau de groupes, ou que $i \geqslant 2$ si L est un préfaisceau de groupes abéliens. On a alors la formule

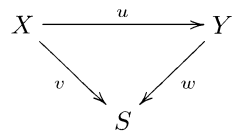
$$\pi_n \mathbf{R}\Gamma(X, K(L, i)) = \begin{cases} H^{i-n}(X, L) & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant i, \\ 0 & \text{si } n > i. \end{cases}$$

Un théorème de Whitehead bien connu affirme qu'un foncteur entre petites catégories $f : X \longrightarrow Y$ est une ∞-équivalence si et seulement si pour tout système local de la forme $K(L, i)$ sur Y, le morphisme

$$\mathbf{R}\Gamma(Y, K(L, i)) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, K(f^* L, i))$$

est un isomorphisme. Cela se déduit facilement de la caractérisation (*iii*) du théorème 6.5.11 et de la théorie des tours de Postnikov.

Pour terminer cet aparté cohomologique, mentionnons enfin la caractérisation suivante des foncteurs coasphériques. Considérons un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$ de la forme



.

Alors le foncteur u est une ∞-équivalence colocalement au-dessus de S si et seulement si pour toute catégorie de modèles fermée C et tout préfaisceau F sur S à coefficients dans C, le morphisme canonique

$$\mathbf{R}\Gamma(Y, w^*F) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, v^*F)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(C)$. Si C est une catégorie de modèles fermée exponentielle[(1)], cela résulte par transposition de la condition (b) de la proposition 3.1.18. Le cas général se démontre de la même manière ; voir [**32, 34**]. En particulier, un foncteur $u : X \longrightarrow Y$ entre petites catégories est ∞-coasphérique si et seulement si pour tout préfaisceau F sur Y à coefficients dans C, le morphisme canonique

$$\mathbf{R}\Gamma(Y, F) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, u^*F)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(C)$. Ainsi, toutes les propriétés fondamentales de $\mathcal{W}_\infty$ se trouvent reflétées du point de vue cohomologique. C'est en se guidant sur ce type de caractérisation des ∞-équivalences (dans le cadre plus général des topos) que Grothendieck a dégagé la notion de localisateur fondamental. Comme cela est déjà mentionné dans la *Poursuite des champs* [**67**], les notions de foncteurs propres ou lisses admettent une caractérisation cohomologique en termes d'isomorphismes de changement de base (d'où cette terminologie). Cela est développé dans [**96**, 3.2.24] pour des coefficients à valeurs dans $\mathcal{C}at$ (en fait, plutôt $\mathcal{C}at^{op}$ de notre point de vue). Cela garde bien entendu tout son sens pour une catégorie de modèles fermée abstraite, et plus généralement pour tout *dérivateur* ; voir [**68, 95, 34, 32, 37**].

(1) Nous rappelons que c'est le cas de toutes les catégorie de modèles fermées qui apparaissent dans ce livre. En fait, c'est essentiellement toujours le cas dans la pratique (cf. [**6, 7**]) : c'est vrai par exemple pour les complexes de modules sur un anneau [**74**] et pour les spectres [**19, 64, 75**].

CHAPITRE 7

REPRÉSENTATIONS ET STRUCTURES FIBRÉES

7.1. Représentations d'un préfaisceau de groupes

7.1.1. — Soit A une petite catégorie. Si $\mathbb{A}$ est un préfaisceau de petites catégories sur A (ou de manière équivalente, un objet catégorie dans $\widehat{A}$), on définit $\mathcal{R}ep(\mathbb{A})$, la *catégorie des représentations de* $\mathbb{A}$, de la manière suivante. Un objet de $\mathcal{R}ep(\mathbb{A})$ est un couple (X, ξ) où X est la donnée pour chaque objet $a \in A$ d'un préfaisceau d'ensembles X_a sur la catégorie $\mathbb{A}_a$, et ξ est la donnée pour chaque flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A, d'un morphisme $\xi_\alpha : X_{a'} \longrightarrow \mathbb{A}_\alpha^* X_a$ de préfaisceaux sur $\mathbb{A}_{a'}$, tel que pour tout objet a de A, on ait l'égalité $\xi_{1_a} = 1_{X_a}$, et pour toute paire de flèches composables de A,

$$a \xrightarrow{\alpha} a' \xrightarrow{\alpha'} a'' ,$$

le diagramme ci-dessous commute.

$$X_{a''} \xrightarrow{\xi_{\alpha'}} \mathbb{A}_{\alpha'}^* X_{a'} \xrightarrow{\mathbb{A}_{\alpha'}^* \xi_\alpha} \mathbb{A}_{\alpha'}^* \mathbb{A}_\alpha^* X_a = \mathbb{A}_{\alpha' \alpha}^* X_a$$
$$\xi_{\alpha' \alpha}$$

Une flèche φ de (X, ξ) vers (Y, η) est la donnée pour chaque objet a de A d'un morphisme $\varphi_a : X_a \longrightarrow Y_a$ dans $\widehat{\mathbb{A}_a}$, telle que pour toute flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A, le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} X_{a'} & \xrightarrow{\xi_\alpha} & \mathbb{A}_\alpha^* X_a \\ {\scriptstyle \varphi_{a'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{A}_\alpha^* \varphi_a} \\ Y_{a'} & \xrightarrow[\eta_\alpha]{} & \mathbb{A}_\alpha^* Y_a \end{array}$$

Exemple 7.1.2. — Si A est une petite catégorie, et si $\mathbb{G}$ est un préfaisceau de groupes sur A, on peut considérer $\mathbb{G}$ comme un préfaisceau de catégories (puisqu'un groupe est en particulier une petite catégorie n'ayant qu'un seul objet). La catégorie $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est la catégorie des préfaisceaux sur A munis d'une action de $\mathbb{G}$ (à droite). En effet,

si G est un groupe vu comme une petite catégorie, on vérifie immédiatement que la catégorie des préfaisceaux sur G est la catégorie des ensembles munis d'une action de G à droite, et l'explicitation de la catégorie $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ ci-dessus prend alors le sens annoncé. On note dans ce cas $\mathcal{B}\mathbb{G} = \nabla\mathbb{G}$ la *catégorie classifiante associée à* $\mathbb{G}$.

Lemme 7.1.3. — *Soient A une petite catégorie et $\mathbb{A}$ un préfaisceau de petites catégories sur A. On rappelle que $\nabla\mathbb{A}$ désigne la catégorie fibrée sur A associée à $\mathbb{A}$. Alors la catégorie des représentations de $\mathbb{A}$ est canoniquement équivalente à celle des préfaisceaux sur $\nabla\mathbb{A}$.*

Démonstration. — On rappelle que la catégorie $\nabla\mathbb{A}$ est définie comme suit. Les objets sont les couples (a, x), $a \in A$, $x \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{A}_a$, les flèches $(a, x) \longrightarrow (a', x')$ sont les couples (α, u), où $\alpha : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A, et $u : x \longrightarrow \mathbb{A}_\alpha(x')$ une flèche de $\mathbb{A}_a$. Si $(\alpha, u) : (a, x) \longrightarrow (a', x')$ et $(\alpha', u') : (a', x') \longrightarrow (a'', x'')$ sont deux flèches composables, alors

$$(\alpha', u') \circ (\alpha, u) = (\alpha' \circ \alpha, \mathbb{A}_\alpha(u') \circ u) \ .$$

Pour chaque objet a de A, on a un foncteur canonique

$$\ell_a : \mathbb{A}_a \longrightarrow \nabla\mathbb{A} \quad , \qquad x \longmapsto (a, x) \ ,$$

et pour chaque flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A, on a un morphisme de foncteurs

$$\tilde{\alpha} : \ell_a\, \mathbb{A}_\alpha \longrightarrow \ell_{a'} \quad , \qquad \tilde{\alpha}_x = (\alpha, 1_{\mathbb{A}_\alpha(x)}) \quad , \quad x \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{A}_{a'} \ .$$

Si X est un préfaisceau sur $\nabla\mathbb{A}$, pour chaque objet a de A, on pose $\widetilde{X}_a = \ell_a^* X$, et pour chaque flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$, le morphisme de foncteurs $\tilde{\alpha}$ induit un morphisme

$$\xi_\alpha = \tilde{\alpha}^* : \ell_{a'}^* X = \widetilde{X}_{a'} \longrightarrow \mathbb{A}_\alpha^* \widetilde{X}_a = \mathbb{A}_\alpha^*\, \ell_a^* X \ .$$

On obtient de la sorte un foncteur

$$\widehat{\nabla\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{A}) \quad , \qquad X \longmapsto (\widetilde{X}, \xi) \ .$$

Inversement, si (X, ξ) est une représentation de $\mathbb{A}$, on définit un préfaisceau $\overline{X}$ sur $\nabla\mathbb{A}$ de la manière suivante. Si (a, x) est un objet de $\mathbb{A}$, on pose

$$\overline{X}_{(a,x)} = (X_a)_x \ ,$$

et si $(\alpha, u) : (a, x) \longrightarrow (a', x')$, est une flèche de $\mathbb{A}$, on obtient une application évidente

$$\overline{X}_{(a',x')} = (X_{a'})_{x'} \longrightarrow (\mathbb{A}_\alpha^* X_a)_{x'} = (X_a)_{\mathbb{A}_\alpha(x')} \longrightarrow (X_a)_x = \overline{X}_{(a,x)} \ .$$

Une vérification immédiate montre que $X \longmapsto \overline{X}$ définit un foncteur quasi-inverse du précédent. □

7.1.4. — Soient A une petite catégorie, et $\mathbb{G}$ un préfaisceau de groupes sur A. On a alors la catégorie classifiante de ce dernier, $\mathcal{B}\mathbb{G}$, et une fibration canonique

$$q : \mathcal{B}\mathbb{G} \longrightarrow A \quad .$$

Si X est un préfaisceau sur A, $X \times \mathbb{G}$ peut être vu comme une représentation de $\mathbb{G}$ en considérant l'action triviale sur le premier facteur, et l'action par translations (à droite) sur le second. La catégorie $\mathcal{B}\mathbb{G}$ peut alors être décrite comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ dont les objets sont les représentations de la forme $a \times \mathbb{G}$, où a est un objet de A (vu comme un préfaisceau représentable muni de l'action triviale). Si a et a' sont deux objets de A, l'ensemble des morphismes équivariants de $a \times \mathbb{G}$ vers $a' \times \mathbb{G}$ s'identifie canoniquement à celui des couples (α, g), où $\alpha : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A, et g un élément du groupe $\mathbb{G}_a$. Un tel couple correspond au morphisme équivariant

$$a \times \mathbb{G} \xrightarrow{g} a \times \mathbb{G} \xrightarrow{\alpha \times 1_{\mathbb{G}}} a' \times \mathbb{G}$$

où g désigne par abus le morphisme de multiplication (à gauche) par g. Enfin, la composition est donnée comme suit : si

$$(\alpha, g) : a \times \mathbb{G} \longrightarrow a' \times \mathbb{G} \quad \text{et} \quad (\alpha', g') : a' \times \mathbb{G} \longrightarrow a'' \times \mathbb{G}$$

sont deux flèches composables de $\mathcal{B}\mathbb{G}$, leur composée est définie par

$$(\alpha', g')\,(\alpha, g) = (\alpha'\,\alpha, \alpha^*(g')\,g)\ ,$$

où $\alpha^* = \mathbb{G}_\alpha$ désigne le morphisme de groupes de $\mathbb{G}_{a'}$ vers $\mathbb{G}_a$ induit par α. La fibration q est définie en envoyant $a \times \mathbb{G}$ sur a pour les objets, et par la formule $q(\alpha, g) = \alpha$ pour les flèches : autrement dit, c'est la restriction à $\mathcal{B}\mathbb{G}$ du foncteur de passage au quotient sous l'action de $\mathbb{G}$.

On définit un foncteur

$$s : A \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}$$

de la manière suivante. Pour chaque objet a de A, on pose $sa = a \times \mathbb{G}$, et pour chaque flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A, on pose $s\alpha = (\alpha, e_a)$ (e_a désignant l'élément neutre du groupe $\mathbb{G}_a$). Il est évident que s est une section de q.

Les deux foncteurs q et s induisent des foncteurs image inverse (on identifie la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{B}\mathbb{G}$ et celle des représentations de $\mathbb{G}$)

$$q^* : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \quad \text{et} \quad s^* : \mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \longrightarrow \widehat{A}\ .$$

Le foncteur q^* est le foncteur qui à un préfaisceau X sur A associe le préfaisceau X muni de l'action triviale de $\mathbb{G}$, et le foncteur s^* est le foncteur d'oubli de l'action de $\mathbb{G}$. Les foncteurs q^* et s^* admettent chacun deux adjoints, l'un à gauche et l'autre à droite, et donc commutent aux petites limites inductives et projectives. En particulier, ils respectent les monomorphismes et les produits cartésiens. L'adjoint à gauche de q^* est le foncteur

$$q_! : \mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \longrightarrow \widehat{A}$$

qui associe à une représentation X de $\mathbb{G}$ son quotient $\mathbb{G}\backslash X$ sous l'action de $\mathbb{G}$. L'adjoint à gauche de s^*, noté

$$s_! : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \quad ,$$

est le foncteur qui à un préfaisceau X sur A associe le préfaisceau $X \times \mathbb{G}$ (avec l'action triviale sur le premier facteur, et l'action par translations sur le second).

Un morphisme de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est une *cofibration locale* s'il vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement aux morphismes équivariants qui sont des fibrations triviales de préfaisceaux sur A (après oubli de l'action de $\mathbb{G}$). Une représentation X de $\mathbb{G}$ est *localement cofibrante* si la flèche canonique de la représentation vide vers X est une cofibration locale.

7.1.5. — Dans la suite, on fixe un A-localisateur W. Un morphisme de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ sera appelé une W-*équivalence* si elle en est une dans $\widehat{A}$ (après oubli de l'action). On note $\mathsf{W}_{\mathbb{G}}$ la classe des W-équivalences de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. On dira par abus qu'une classe de flèches de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est un $\mathcal{B}\mathbb{G}$-*localisateur* si son image par l'équivalence de catégories canonique du lemme 7.1.3 en est un. On se permettra de même dans ce contexte de parler d'accessibilité, de régularité et de propreté.

Proposition 7.1.6. — *Les* W*-équivalences forment un* $\mathcal{B}\mathbb{G}$*-localisateur. Si en outre* W *est accessible (resp. régulier), alors il en est de même de* $\mathsf{W}_{\mathbb{G}}$.

Démonstration. — Le foncteur d'oubli s^* admet un adjoint à gauche qui respecte les monomorphismes (voir la description explicite de $s_!$ ci-dessus). Il résulte donc de la proposition 1.4.20 que les W-équivalences forment un $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur, et que ce dernier est accessible si c'est le cas de W. L'assertion concernant la régularité est quant à elle conséquence immédiate du lemme 3.4.43. □

7.1.7. — On dira que $\mathbb{G}$ est *faiblement* W*-fibrant* si le produit par $\mathbb{G}$ respecte les W-équivalences de préfaisceaux sur A.

Proposition 7.1.8. — *Si* W *est accessible, et si* $\mathbb{G}$ *est faiblement* W*-fibrant, alors la catégorie des représentations de* $\mathbb{G}$ *admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les* W*-équivalences, les cofibrations, les cofibrations locales, et dont les fibrations sont les morphismes de* $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ *qui sont des* W*-fibrations dans* $\widehat{A}$ *après oubli de l'action de* $\mathbb{G}$. *En outre, si* I *(resp.* J*) engendre les cofibrations (resp. les cofibrations triviales) de* $\widehat{A}$*, alors les morphismes de la forme*

$$i \times 1_{\mathbb{G}} : X \times \mathbb{G} \longrightarrow Y \times \mathbb{G}$$

pour tout $i \in I$ *(resp.* $i \in J$*) engendrent les cofibrations locales (resp. les cofibrations locales triviales). Enfin, si de plus* W *est propre, cette structure de catégorie de modèles fermée l'est aussi.*

Démonstration. — Il résulte aussitôt de la proposition 7.1.6 et du fait que $\mathbb{G}$ est faiblement W-fibrant que les hypothèses de la proposition 1.4.23 sont vérifiées pour le couple de foncteurs adjoints $(s_!, s^*)$. Cette dernière proposition permet donc de conclure quant à l'existence de la structure de catégorie de modèles fermée. D'autre

part, comme les W-équivalences forment un $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur accessible, on sait que $\mathcal{R}ep(\mathbb{G}) = \widehat{\mathcal{B}\mathbb{G}}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les W-équivalences et les cofibrations sont les monomorphismes. En particulier, tous les objets sont cofibrants pour cette structure, ce qui implique qu'elle est propre à gauche. Le corollaire 1.5.21 implique par conséquent que la structure de catégorie de modèles fermée définie par les W-équivalences et les cofibrations locales est aussi propre à gauche. La dernière assertion concernant la propreté à droite résulte aussitôt du fait que le foncteur d'oubli s^* commute aux produits fibrés et respecte les fibrations et les équivalences faibles. □

Corollaire 7.1.9. — *Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, si* W *est propre, il en est de même du* $\mathcal{B}\mathbb{G}$*-localisateur des* W*-équivalences.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de la proposition précédente et du corollaire 1.5.21. □

Proposition 7.1.10. — *Si* W *est accessible, alors la catégorie des représentations de* $\mathbb{G}$ *admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche et à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les cofibrations locales, et dont les équivalences faibles sont les* W*-équivalences.*

Démonstration. — En vertu du théorème 1.6.2, il suffit de prouver l'assertion dans le cas du A-localisateur minimal. En particulier, on peut supposer que W est stable par produits finis (1.4.19), et donc en particulier que $\mathbb{G}$ est faiblement W-fibrant, ce qui permet d'invoquer la proposition 7.1.8, et achève la démonstration. □

Proposition 7.1.11. — *On suppose à présent que* W *est régulier et que* $\mathbb{G}$ *est faiblement* W*-fibrant. Alors les* W*-équivalences de* $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ *s'identifient au* $\mathcal{B}\mathbb{G}$*-localisateur régulier engendré par la classe* S *formée des morphismes de la forme*

$$i \times 1_{\mathbb{G}} : X \times \mathbb{G} \longrightarrow Y \times \mathbb{G}$$

pour toute W*-cofibration triviale* $i : X \longrightarrow Y$ *de* $\widehat{A}$

Démonstration. — Il suffit clairement de prouver la proposition lorsque W est accessible, ce qu'on supposera dans la suite de la preuve. Soit W′ le $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur régulier engendré par S. Il résulte facilement du fait que le foncteur $s_!$ commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes et du corollaire 3.4.24 que W′ est accessible, et en vertu de la proposition 7.1.6, W′ est contenu dans $\mathsf{W}_{\mathbb{G}}$. On a donc trois structures de catégorie de modèles fermées sur $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$: la première est celle de la proposition 7.1.8 (appliquée à W), et la deuxième (resp. la troisième) celle associée au $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur accessible $\mathsf{W}_{\mathbb{G}}$ (resp. W′) par le théorème 1.4.3. L'identité de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est un foncteur de Quillen de la troisième vers la seconde, mais aussi de la première vers la troisième (cette dernière assertion résulte aussitôt de la description de l'ensemble générateur des cofibrations triviales de la structure de la proposition 7.1.8).

Notons G l'identité de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ vue comme un foncteur de Quillen à gauche de la première vers la troisième, et D le même foncteur, mais vu comme un foncteur de Quillen à droite de la troisième vers la première. Choisissons un endofoncteur L de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ à valeurs dans les objets localement cofibrants, et une W-équivalence naturelle de L vers l'identité de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Soit X une représentation de $\mathbb{G}$. On va montrer que $LX \longrightarrow X$ est une W′-équivalence. Pour cela, on remarque que ce morphisme correspond dans la catégorie homotopique de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ (relativement aux W′-équivalences) au morphisme d'adjonction $\mathbf{L}G\,\mathbf{R}D(X) \longrightarrow X$. Il s'agit donc par forte saturation de montrer que ce dernier est un isomorphisme. Or le foncteur $\mathbf{L}G$ commute aux colimites homotopiques (dans le sens précis donné par la proposition 3.1.22, laquelle est applicable ici puisqu'en vertu de 3.1.6, toutes les structures de catégorie de modèles fermée considérées sont exponentielles à droite), et il en est de même du foncteur $\mathbf{R}D$: pour ce dernier, on utilise le fait que D est aussi un foncteur de Quillen à gauche de la troisième structure vers la seconde, ce qui permet d'invoquer une nouvelle fois la proposition 3.1.22 (il faut remarquer que la définition des extensions de Kan homotopiques en termes de foncteurs adjoints ne dépend que des équivalences faibles, et en aucun cas des cofibrations ou des fibrations). Vu que W′ est régulier, il suffit donc de prouver que le morphisme d'adjonction ci-dessus est un isomorphisme lorsque X est de la forme $a \times \mathbb{G}$, où a est un préfaisceau représentable sur A (*i.e.* lorsque X est un préfaisceau représentable sur $\mathcal{B}\mathbb{G}$). Mais alors X est en particulier localement cofibrant, et donc $LX \longrightarrow X$ est une W′-équivalence. On en déduit aussitôt que toute W-équivalence est une W′-équivalence, ce qui achève la démonstration. □

7.1.12. — On rappelle qu'un $\mathbb{G}$-*torseur* est une représentation X de $\mathbb{G}$ telle le morphisme de X vers le préfaisceau final sur A soit un épimorphisme (ce qui revient à dire que X_a est non vide pour tout objet a de A), et telle que le morphisme

$$X \times \mathbb{G} \longrightarrow X \times X \quad , \qquad (x, g) \longmapsto (x, xg)$$

soit un isomorphisme. Si K est un préfaisceau sur A, la restriction $\mathbb{G}|_K$ de $\mathbb{G}$ à A/K est un préfaisceau de groupes sur A/K. La donnée d'une représentation de $\mathbb{G}|_K$ correspond canoniquement à celle d'une représentation X de $\mathbb{G}$ munie d'un morphisme équivariant de X vers K (où K est muni de l'action triviale). On dit qu'une telle donnée est un $\mathbb{G}$-*torseur* sur K si la représentation de $\mathbb{G}|_K$ correspondante est un $\mathbb{G}|_K$-torseur. Cela revient à a dire que le morphisme structural $X \longrightarrow K$ est un épimorphisme de préfaisceaux sur A, et que le morphisme $X \times \mathbb{G} \longrightarrow X \times_K X$ défini par la première projection et par l'action de $\mathbb{G}$ sur X est un isomorphisme[(1)]. Il est remarquable que dans cette situation, le morphisme de X vers K induit un isomorphisme canonique du quotient de X sous l'action de $\mathbb{G}$ sur K. On dira qu'une représentation X de $\mathbb{G}$ est un $\mathbb{G}$-*torseur sur son quotient* si le morphisme canonique $X \longrightarrow \mathbb{G}\backslash X$ de X vers son quotient fait de X un $\mathbb{G}$-torseur sur $\mathbb{G}\backslash X$.

[(1)] Dans la littérature, un tel objet est aussi appelé un $\mathbb{G}$-*fibré principal* sur K.

Proposition 7.1.13. — *Soit $X \longrightarrow Y$ une cofibration locale de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. On suppose que X est un $\mathbb{G}$-torseur sur son quotient. Alors Y est un $\mathbb{G}$-torseur sur son quotient. En particulier, toute représentation localement cofibrante X de $\mathbb{G}$ est un torseur sur son quotient, et donc pour tout objet a de A, et toute section $u : a \longrightarrow \mathbb{G}\backslash X$, on a un carré cartésien de la forme suivante dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$.*

$$\begin{array}{ccc} a \times \mathbb{G} & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow \\ a & \xrightarrow[u]{} & \mathbb{G}\backslash X \end{array}$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{T}$ la classe des monomorphismes $X \longrightarrow Y$ de représentations de $\mathbb{G}$ tels que pour tout objet a de A, $Y_a - X_a$ soit un $\mathbb{G}_a$-torseur sur son quotient $\mathbb{G}_a\backslash(Y_a - X_a)$. On vérifie facilement que $\mathcal{T}$ est stable par rétractes, par images directes, et par compositions transfinies. Comme on peut trouver un ensemble générateur des cofibrations locales trivialement dans $\mathcal{T}$ (cf. la proposition 7.1.8), on en déduit que toute cofibration locale est dans $\mathcal{T}$, ce qui implique aussitôt l'assertion. □

Corollaire 7.1.14. — *Pour tout morphisme de représentations localement cofibrantes $X \longrightarrow Y$, le carré commutatif canonique*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}\backslash X & \longrightarrow & \mathbb{G}\backslash Y \end{array}$$

est cartésien.

Corollaire 7.1.15. — *Si X est une représentation localement cofibrante de $\mathbb{G}$ dont le quotient est un préfaisceau représentable a sur A, alors X est isomorphe dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ à $a \times \mathbb{G}$.*

7.2. Descente et monodromie

Théorème 7.2.1. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On considère un foncteur $\mathcal{W}$-lisse $u : A \longrightarrow B$. Alors si B est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, il en est de même de la catégorie A.*

Démonstration. — Tout foncteur $\mathcal{W}$-lisse est localement $\mathcal{W}$-asphérique (6.3.38), et donc le théorème résulte de [**96**, corollaire 1.7.15]. □

Corollaire 7.2.2. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. On considère un préfaisceau en petites catégories $\mathbb{A}$ sur A. Alors la catégorie des représentations de $\mathbb{A}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes et*

dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences. Si de plus $\mathcal{W}$ est propre, alors cette structure est propre.

En outre, il existe une équivalence de catégories canonique entre la catégorie homotopique $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{R}ep(\mathbb{A})$ et la catégorie $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}//\nabla\mathbb{A}$ des $\mathcal{W}$-types d'homotopie localement constants sur $\nabla\mathbb{A}$.

Démonstration. — En vertu du lemme 7.1.3, cela résulte des théorèmes 7.2.1 et 4.4.30, ainsi que des corollaires 4.2.18 et 4.4.20. □

7.2.3. — On va à présent interpréter le corollaire précédent en termes de représentations de préfaisceaux de groupes[(2)]. Le but est de démontrer un théorème de correspondance de Galois dans ce cadre (ce qui est contenu essentiellement dans la proposition 7.2.7, et explicité davantage dans le scholie 7.2.15), puis de faire le lien avec la théorie de l'homotopie classique des représentations d'un groupe simplicial. Dans ce qui va suivre, on fixe une fois pour toutes un localisateur fondamental $\mathcal{W}$, une petite catégorie A, et un préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ sur A.

Lemme 7.2.4. — *Pour tout objet a de A, le foncteur canonique $A/a \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}/a \times \mathbb{G}$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — Ce foncteur est induit par le foncteur défini en envoyant b sur $b \times \mathbb{G}$ pour les objets, et $u : b \longrightarrow b'$ sur (u, e_b) pour les flèches. Soit (b, β, g) un objet de $\mathcal{B}\mathbb{G}$ au-dessus de $a \times \mathbb{G}$ (b est un objet de A, et (β, g) une flèche de $b \times \mathbb{G}$ vers $a \times \mathbb{G}$ dans $\mathcal{B}\mathbb{G}$). Un objet de $(A/a)/(b, \beta, g)$ est un quadruplet (c, u, γ, h), où u est une flèche de c vers a dans A, et (γ, h) une flèche de $c \times \mathbb{G}$ vers $b \times \mathbb{G}$ dans $\mathcal{B}\mathbb{G}$, telles que $(\beta, g)(\gamma, h) = (u, e_c)$. En regard de l'égalité $(\beta, g)(\gamma, h) = (\beta\gamma, \gamma^*(g)h)$, cela s'écrit encore $u = \beta\gamma$, et $h = \gamma^*(g^{-1})$. On vérifie aussitôt que $(b, \beta, 1_b, g^{-1})$ est un objet final de $(A/a)/(b, \beta, g)$, ce qui implique que cette catégorie est asphérique, et prouve le lemme. □

Proposition 7.2.5. — *Le foncteur canonique $s : A \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}$ (défini en envoyant a sur $a \times \mathbb{G}$) est localement $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du lemme précédent. □

Corollaire 7.2.6. — *Pour toute représentation X de $\mathbb{G}$, le foncteur canonique $A/X = A/s^*X \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}/X$ est localement $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — Ce foncteur est obtenu à partir de $s : A \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}$ par changement de base le long de $\mathcal{B}\mathbb{G}/X \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}$. L'assertion résulte par conséquent de la proposition

(2) La digression envisagée ici reste valable sans changements majeurs dans le cas d'un groupoïde enrichi en préfaisceaux sur A, et même, modulo quelques modifications moins triviales, pour une catégorie enrichie en préfaisceaux sur A. Ceci dit, l'objet de ce chapitre étant essentiellement heuristique, nous nous contenterons des groupes.

ci-dessus et de la stabilité des foncteurs localement asphériques par changement de base lisse (6.3.37). □

Proposition 7.2.7. — *On considère un préfaisceau B sur A, et un $\mathbb{G}$-torseur E sur B. Alors le foncteur canonique $\mathcal{B}\mathbb{G}/E \longrightarrow A/B$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — Considérons un morphisme $u : a \longrightarrow B$, a étant un objet de A. On peut alors former le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} a \times \mathbb{G} & \xrightarrow{v} & E \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow \\ a & \xrightarrow[u]{} & B \end{array}$$

Ce dernier induit le carré cartésien de catégories ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}\mathbb{G}/a \times \mathbb{G} & \longrightarrow & \mathcal{B}\mathbb{G}/E \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/a & \longrightarrow & A/B \end{array}$$

Cela implique que la catégorie $(\mathcal{B}\mathbb{G}/E)/(a,u)$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $\mathcal{B}\mathbb{G}/a \times \mathbb{G}$. Or cette dernière admet un objet final (puisque $a \times \mathbb{G}$ correspond à un préfaisceau représentable sur $\mathcal{B}\mathbb{G}$), et donc est asphérique. □

Corollaire 7.2.8. — *Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, pour tout carré cartésien dans $\widehat{A}$ de la forme*

$$\begin{array}{ccccc} E'' & \xrightarrow{u'} & E' & \xrightarrow{u} & E \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B'' & \xrightarrow[v']{} & B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

E étant un $\mathbb{G}$-torseur sur B, et p la projection canonique, pour que v' soit une $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{A}$, il faut et il suffit que u' soit une $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$.

Démonstration. — Notons p le foncteur $\mathcal{B}\mathbb{G}/E \longrightarrow A/B$. Le foncteur image inverse correspondant

$$p^* : \widehat{A}/B \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{G})/E = \widehat{\mathcal{B}\mathbb{G}}/E$$

est défini en associant à $(B', B' \longrightarrow B)$ le couple $(E', E' \longrightarrow E)$ obtenu en formant le carré cartésien suivant dans $\widehat{A}$

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{u} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array} \quad ,$$

la structure de $\mathbb{G}$-torseur de E sur B induisant la structure de $\mathbb{G}$-torseur de E' sur B'. Ce corollaire n'est donc qu'une simple traduction de la proposition précédente et de la propriété (d) des foncteurs asphériques donnée dans la proposition 4.2.23. □

7.2.9. — On suppose à présent donné un localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$. On considère une $\mathcal{W}$-catégorie test locale A ainsi qu'un préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ sur A fixés.

Proposition 7.2.10. — *La catégorie des représentations de $\mathbb{G}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, et les cofibrations, les cofibrations locales. Si en outre $\mathcal{W}$ est propre, alors cette structure de catégorie de modèles fermée l'est aussi.*

Démonstration. — Soit W le A-localisateur régulier minimal. Si $i : X \longrightarrow Y$ est une W-équivalence, le A-localisateur des $\mathcal{W}$-équivalences étant régulier, il résulte aussitôt du corollaire 7.2.8 que le morphisme $i \times 1_{\mathbb{G}} : X \times \mathbb{G} \longrightarrow Y \times \mathbb{G}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Comme le $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur des $\mathcal{W}$-équivalences est régulier, et vu que $\mathbb{G}$ est faiblement W-fibrant (d'après 1.4.19, W est stable par produits finis), la proposition 7.1.11 implique que toute W-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Les propositions 1.6.2 et 7.1.8 (cette dernière étant appliquée à W) assurent l'existence de la structure de catégorie de modèles fermée annoncée. L'assertion concernant la propreté est quant à elle conséquence des corollaires 1.5.21 et 7.2.2. □

7.2.11. — On appellera structure de catégorie de modèles fermée *injective* (resp. *locale*) associée à $\mathcal{W}$ la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, et les cofibrations, les monomorphismes (resp. les cofibrations locales).

Corollaire 7.2.12. — *Si $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est munie la structure de catégorie de modèles fermée locale associée à $\mathcal{W}$, le foncteur d'oubli de l'action de $\mathbb{G}$ est un foncteur de Quillen à droite. En outre, le foncteur dérivé à droite correspondant*

$$\mathbf{R}s^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}$$

est conservatif.

Démonstration. — Le corollaire 7.2.8 implique facilement que l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli respecte les cofibrations triviales, et vu qu'il est clair qu'il respecte les cofibrations, on en déduit aussitôt la première assertion. Pour la seconde, il suffit de vérifier que si un morphisme f de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ entre objets fibrants est une équivalence faible de $\widehat{A}$, alors il est une équivalence faible de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Mais dans ce cas, si W désigne le A-localisateur minimal, f est une W-équivalence, et donc f est une W-équivalence dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$, ce qui implique que c'est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. □

Corollaire 7.2.13. — *En considérant la structure de catégorie de modèles fermée locale associée à $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$, le foncteur de passage au quotient sous l'action de $\mathbb{G}$*

$$\mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad X \longmapsto \mathbb{G}\backslash X$$

est un foncteur de Quillen à gauche.

Démonstration. — Le foncteur de passage au quotient a pour adjoint à droite le foncteur qui associe à un préfaisceau X sur A la représentation triviale de $\mathbb{G}$ correspondant à X. Or il est clair que ce foncteur est un foncteur de Quillen à droite si on munit $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ de la structure de catégorie de modèles fermée de la proposition 7.1.8 appliquée dans le cas du A-localisateur régulier minimal W (on rappelle que ce dernier est stable par produits finis, ce qui assure le fait que $\mathbb{G}$ est faiblement W-fibrant). Le foncteur de passage au quotient est donc un foncteur de Quillen à gauche relativement à cette structure. En vertu de l'assertion (*viii*) de la proposition 1.6.5 appliquée à $\mathcal{C} = \mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ en prenant pour classe W' celle des $\mathcal{W}$-équivalences, il suffit pour conclure de prouver que le foncteur de passage au quotient respecte les $\mathcal{W}$-équivalences entre représentations localement cofibrantes, ce qui résulte aussitôt des corollaires 7.1.14 et 7.2.8. □

Proposition 7.2.14. — *Soit E un $\mathbb{G}$-torseur sur un préfaisceau B sur A. Alors le foncteur de passage au quotient $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})/E \longrightarrow \widehat{A}/B$ (défini en associant à une représentation de $\mathbb{G}$ au-dessus de E son quotient au-dessus de $\mathbb{G}\backslash E \simeq B$) est une équivalence de Quillen à gauche (en considérant la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})/E$ induite par la structure locale associée à $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$).*

Démonstration. — On sait déjà que le foncteur de passage au quotient est un foncteur de Quillen à gauche (cela résulte immédiatement du corollaire 7.2.13). Il suffit donc de prouver que le foncteur dérivé à gauche correspondant est une équivalence de catégories. Notons p la projection canonique de $\mathcal{B}\mathbb{G}/E$ sur A/B. Le foncteur de passage au quotient est l'extension de Kan à gauche $p_!$ de p, et admet pour adjoint à droite le foncteur image inverse

$$p^* : \widehat{A}/B \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{G})/E = \widehat{\mathcal{B}\mathbb{G}}/E \ .$$

Or on sait que p est asphérique (proposition 7.2.7), ce qui implique en vertu du corollaire 4.4.27 que le foncteur p^* respecte les $\mathcal{W}$-équivalences et induit une équivalence de catégories après localisation. Or il est clair que le foncteur induit par p^* est un adjoint à droite du foncteur dérivé à gauche de $p_!$, et par conséquent, ce dernier est bien une équivalence de catégories. □

Scholie 7.2.15. — On fixe pour la suite un *espace classifiant* de $\mathbb{G}$, c'est-à-dire un préfaisceau $B\mathbb{G}$ sur A muni d'un $\mathbb{G}$-torseur *universel*

$$E\mathbb{G} \longrightarrow B\mathbb{G} \ ,$$

ce qui signifie que $E\mathbb{G}$ est un $\mathbb{G}$-torseur sur $B\mathbb{G}$ et que le morphisme de $E\mathbb{G}$ vers l'objet final de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est une $\mathcal{W}$-équivalence propre à droite (grâce à 7.1.13, on peut construire un tel espace classifiant en choisissant une représentation localement cofibrante $E\mathbb{G}$ de telle manière que la flèche de celle-ci vers l'objet final de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ soit une fibration triviale au sens de la structure de catégorie de modèles fermée locale associée à $\mathcal{W}$, puis en définissant $B\mathbb{G}$ comme le quotient de $E\mathbb{G}$ sous l'action de $\mathbb{G}$).

Le foncteur d'oubli de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})/E\mathbb{G}$ vers $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est une équivalence de Quillen à gauche pour les structures de catégorie de modèles fermées (locales ou injectives) associées à $\mathcal{W}$ (puisque par hypothèse, le morphisme de $E\mathbb{G}$ vers l'objet final de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est une $\mathcal{W}$-équivalence propre à droite). D'autre part, il résulte aussitôt de la proposition précédente que le foncteur de passage au quotient induit une équivalence de Quillen à gauche

$$\mathcal{R}ep(\mathbb{G})/E\mathbb{G} \longrightarrow \widehat{A}/B\mathbb{G} \quad , \qquad (X, X \longrightarrow E\mathbb{G}) \longmapsto (\mathbb{G}\backslash X, \mathbb{G}\backslash X \longrightarrow B\mathbb{G}) \ .$$

On définit un foncteur de *descente*

$$\mathsf{Desc} : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/B\mathbb{G}$$

comme le composé du foncteur de passage au quotient $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{R}ep(\mathbb{G})/E\mathbb{G} \simeq \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/B\mathbb{G}$ et de l'équivalence de catégories canonique $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \simeq \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{R}ep(\mathbb{G})/E\mathbb{G}$. Si le morphisme de $E\mathbb{G}$ vers l'objet final de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est une fibration triviale de $\widehat{A}$, on peut décrire le foncteur Desc de la manière suivante : pour une représentation localement cofibrante X de $\mathbb{G}$, $\mathsf{Desc}(X) \simeq (\mathbb{G}\backslash X, f)$, où f est un morphisme obtenu en choisissant un morphisme équivariant $f_0 : X \longrightarrow E\mathbb{G}$ puis en passant au quotient. Le foncteur de descente est donc une équivalence de catégories et admet pour quasi-inverse le foncteur de *monodromie*

$$\mathsf{Mon} : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/B\mathbb{G} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$$

défini en associant à $(X, X \longrightarrow B\mathbb{G})$ la représentation $X \times_{B\mathbb{G}} E\mathbb{G}$ (laquelle est nécessairement un $\mathbb{G}$-torseur sur X). Le fait que les foncteurs de descente et de monodromie soient des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre peut être vu comme une généralisation de la théorie de Galois topologique établissant une correspondance entre la catégorie des revêtements d'un espace (localement simplement connexe) et la catégorie des représentations de son groupoïde fondamental. Le corollaire 4.4.20 peut-être vu comme une autre incarnation de ce phénomène. Cela met en évidence l'idée que les types d'homotopie peuvent être interpétés (si ce n'est représentés) par une notion de ∞-groupoïde (whatever it means), et établit un lien évident entre le point de vue des catégories test locales et le point de départ de Grothendieck dans la *Poursuite des champs*. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Bertrand Toën [**127**] pour un développement plus approfondi de ce point de vue dans le cas du localisateur fondamental $\mathcal{W}_\infty$ (les résultats évoqués dans ce paragraphe donnent en outre une nouvelle preuve

de [**127**, théorème 2.22]). Il est à noter que le formalisme développé ici permet de dégager une notion de « $\mathcal{W}$-groupoïde » pour chaque localisateur fondamental (propre) $\mathcal{W}$ et de généraliser la théorie de Toën à ce cadre (par les mêmes méthodes que dans [**127**]). En particulier, en considérant le localisateur fondamental des n-équivalences au sens de 9.2.1 (pour un entier $n \geqslant 0$), on obtiendra de la sorte une théorie de correspondance de Galois pour les n-types d'homotopie (ce qui devrait correspondre à une notion de n-groupoïde).

7.3. Torseurs et fibrations faibles

7.3.1. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, un préfaisceau X sur A sera dit *faiblement $\mathcal{W}$-fibrant* si le morphisme de X vers le préfaisceau final sur A est une $\mathcal{W}$-fibration faible, ou de manière équivalente, si le foncteur $Y \longmapsto X \times Y$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences de $\widehat{A}$ (et il est clair que si $\mathbb{G}$ est un préfaisceau de groupes sur A, il est faiblement $\mathcal{W}$-fibrant si et seulement s'il est faiblement $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$-fibrant dans le sens défini au numéro 7.1.7).

Proposition 7.3.2. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, et $\mathbb{G}$ un préfaisceau de groupes sur A. Si $\mathbb{G}$ est faiblement $\mathcal{W}$-fibrant dans $\widehat{A}$, alors tout morphisme de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ qui est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\widehat{A}$ (après oubli de l'action de $\mathbb{G}$) est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$*

Démonstration. — Les $\mathcal{W}$-équivalences de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ forment un $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur régulier, et il résulte aussitôt de la proposition 7.2.7 que pour toute $\mathcal{W}$-équivalence $X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A, $X \times \mathbb{G} \longrightarrow Y \times \mathbb{G}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence de représentations de $\mathbb{G}$. La proposition 7.1.11 permet ainsi de conclure. □

Sauf mention explicite du contraire, on fixe pour la suite un localisateur fondamental propre $\mathcal{W}$.

7.3.3. — On considère à présent donnés une $\mathcal{W}$-catégorie test locale A et un préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ faiblement $\mathcal{W}$-fibrant sur A.

Proposition 7.3.4. — *Soit E un $\mathbb{G}$-torseur sur un préfaisceau B sur A. Si E est faiblement $\mathcal{W}$-fibrant dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$, alors B est faiblement $\mathcal{W}$-fibrant dans $\widehat{A}$.*

Démonstration. — Supposons E faiblement $\mathcal{W}$-fibrant dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Soit $i : X \longrightarrow Y$ une $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{A}$. En vertu de la proposition 7.3.2, c'est aussi une $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ (en tant que morphisme de représentations triviales). Par conséquent, le morphisme produit $E \times X \longrightarrow E \times Y$ est une $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Il résulte donc du corollaire 7.2.8 que le morphisme $B \times X \longrightarrow B \times Y$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Autrement dit, B est faiblement $\mathcal{W}$-fibrant dans $\widehat{A}$. □

Lemme 7.3.5. — *Toute $\mathcal{W}$-fibration faible de $\widehat{A}$ est une $\mathcal{W}$-fibration faible de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ (vue comme un morphisme de représentations triviales).*

Démonstration. — Le foncteur $q : \mathcal{B}\mathbb{G} \longrightarrow A$ est $\mathcal{W}$-lisse (puisqu'une fibration), et donc est en particulier localement $\mathcal{W}$-asphérique (6.3.38), ce qui implique en vertu du corollaire 6.3.40 que le foncteur image inverse

$$q^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}\mathbb{G}} = \mathcal{R}ep(\mathbb{G})$$

respecte les $\mathcal{W}$-fibrations faibles. Or q^* est le foncteur qui associe à un préfaisceau sur A le même objet muni de l'action triviale. □

Proposition 7.3.6. — *Considérons un $\mathbb{G}$-torseur E sur un préfaisceau B sur A, et un carré cartésien de la forme suivante.*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{u} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

Pour que v soit une $\mathcal{W}$-fibration faible dans $\widehat{A}$, il faut et il suffit que u soit une $\mathcal{W}$-fibration faible dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$.

Démonstration. — Le carré considéré étant cartésien (et ce qu'il soit vu dans $\widehat{A}$ ou dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$) et les $\mathcal{W}$-fibrations faibles étant stables par changement de base, le lemme ci-dessus montre que si v est une $\mathcal{W}$-fibration faible dans $\widehat{A}$, alors u est une $\mathcal{W}$-fibration faible dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Pour la réciproque, considérons un diagramme commutatif constitué de carrés cartésiens de la forme suivante dans $\widehat{A}$.

$$\begin{array}{ccccc} B'_0 & \xrightarrow{f'} & B'_1 & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ B_0 & \xrightarrow[f]{} & B_1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

Considérons le diagramme de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$

$$\begin{array}{ccccc} E'_0 & \xrightarrow{g'} & E'_1 & \longrightarrow & E' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ E_0 & \xrightarrow[g]{} & E_1 & \longrightarrow & E \end{array}$$

obtenu du précédent par changement de base le long de p. Supposons que u soit une $\mathcal{W}$-fibration faible dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. En vertu du corollaire 7.2.8, si f est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\widehat{A}$, alors g est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Il suit donc que g' est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Une nouvelle application du corollaire 7.2.8 implique

alors que f' est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\widehat{A}$. On a bien prouvé de la sorte que v est une $\mathcal{W}$-fibration faible dans $\widehat{A}$. □

7.3.7. — Soit A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Un préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ sur A est *$\mathcal{W}$-excellent* si le foncteur canonique $s : A \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}$ est $\mathcal{W}$-excellent (cf. 6.3.41). Le foncteur s étant toujours $\mathcal{W}$-localement asphérique (proposition 7.2.5), dire que $\mathbb{G}$ est $\mathcal{W}$-excellent revient à demander que s soit fortement $\mathcal{W}$-localement constant.

Proposition 7.3.8. — *Soient A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, et $\mathbb{G}$ un préfaisceau de groupes sur A. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ est $\mathcal{W}$-excellent.*

(b) *Toute $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est une $\mathcal{W}$-équivalence après oubli de l'action de $\mathbb{G}$.*

(c) *Pour qu'un morphisme de représentations de $\mathbb{G}$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$, il faut et il suffit qu'il en soit une dans $\widehat{A}$ après oubli de l'action de $\mathbb{G}$.*

(d) *Pour tout $\mathbb{G}$-torseur E de base B, la projection canonique de E sur B est une $\mathcal{W}$-fibration faible de $\widehat{A}$.*

(e) *Pour tout $\mathbb{G}$-torseur E de base B, la projection canonique de E sur B est une $\mathcal{W}$-fibration faible de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$.*

En outre, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors $\mathbb{G}$ est faiblement $\mathcal{W}$-fibrant, et les $\mathcal{W}$-équivalences de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ forment le $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur régulier engendré par les morphismes de la forme $i \times 1_{\mathbb{G}} : X \times \mathbb{G} \longrightarrow Y \times \mathbb{G}$ pour toute flèche $i : X \longrightarrow Y$ entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A. En particulier, si les $\mathcal{W}$-équivalences de $\widehat{A}$ sont stables par produits finis, il en est de même des $\mathcal{W}$-équivalences de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$.

Démonstration. — Le foncteur image inverse par s étant le foncteur d'oubli de l'action de $\mathbb{G}$, l'équivalence des conditions (a) et (b) ci-dessus résulte donc de l'équivalence des conditions (i) et (iv) du théorème 6.3.30. Les conditions (b) et (c) sont équivalentes : si (b) est vérifiée, il résulte facilement de la proposition 7.2.7 que $\mathbb{G}$ est faiblement $\mathcal{W}$-fibrant, et donc la proposition 7.3.2 montre que (b) implique (c). Le corollaire 7.2.8 montre quant à lui que la condition (b) implique la condition (d). Montrons à présent que (d) implique (b). Soit $X \longrightarrow Y$ un morphisme de représentations de $\mathbb{G}$. On peut lui associer un carré commutatif de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des fibrations triviales dans $\widehat{A}$ de source localement cofibrantes (grâce à l'existence de la structure de catégorie de modèles fermée locale associée à $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ du numéro 7.2.10). Autrement dit, il suffit de prouver que toute $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ entre représentations localement cofibrantes est

une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\widehat{A}$, ce qui résulte immédiatement de la proposition 7.1.13 (et de son corollaire) et du corollaire 7.2.13. Le foncteur d'oubli commutant aux produits fibrés, il est clair que les conditions (c) et (d) impliquent la condition (e) ; réciproquement, pour voir que (e) implique (d), on utilise de nouveau le fait que le foncteur canonique $s : A \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}$ est localement asphérique, et cette implication est une conséquence immédiate du corollaire 6.3.40. Il reste à montrer la dernière assertion. On a déjà vu que si $\mathbb{G}$ est $\mathcal{W}$-excellent, alors il est faiblement $\mathcal{W}$-fibrant. Soit W le $\mathcal{B}\mathbb{G}$-localisateur régulier engendré par les morphismes de la forme $i \times 1_{\mathbb{G}}$, où i est une flèche entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques sur A, et W' la classe des flèches f de $\widehat{A}$ telles que $f \times 1_{\mathbb{G}}$ soit dans W. Montrons que W' est un A-localisateur. Le seul aspect non trivial consiste à vérifier que W' contient les fibrations triviales. Pour cela, en vertu du lemme 1.4.13, il suffit de prouver que tout préfaisceau sur A admet un W'-cylindre. Soit I un segment séparant et localement $\mathcal{W}$-asphérique de A (on peut prendre par exemple $I = i_A^* \Delta_1$). Alors pour tout préfaisceau X sur A, la projection de $I \times X \times \mathbb{G}$ sur $X \times \mathbb{G}$ est dans W. En effet, c'est vérifié par définition de W lorsque $X = a$ est représentable (puisqu'alors $\mathcal{W}$-asphérique), et en général, pour tout morphisme $a \times \mathbb{G} \longrightarrow X \times \mathbb{G}$ dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} I \times a \times \mathbb{G} & \longrightarrow & I \times X \times \mathbb{G} \\ {\scriptstyle pr_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ a \times \mathbb{G} & \longrightarrow & X \times \mathbb{G} \end{array} \quad ,$$

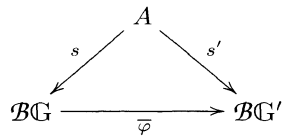
ce qui permet de conclure en vertu de la régularité de W et du corollaire 3.4.47. Il résulte à présent des propositions 7.1.11 et 6.1.9 qu'il suffit de vérifier que W' est régulier. Pour cela, on remarque que le foncteur $X \longmapsto X \times \mathbb{G}$ est le composé du foncteur image inverse par la projection composée $\mathcal{B}\mathbb{G}/\mathbb{G} \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G} \longrightarrow A$ avec le foncteur d'oubli canonique $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})/\mathbb{G} \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. L'assertion résulte donc de la proposition 3.4.16 et du lemme 3.4.43. La dernière assertion concernant la stabilité par produits finis résulte trivialement de la condition (c). □

Corollaire 7.3.9. — *Soient A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, et $\varphi : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}'$ un morphisme de préfaisceaux de groupes sur A. Si $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$ sont $\mathcal{W}$-excellents, le foncteur $\overline{\varphi} : \mathcal{B}\mathbb{G} \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{G}'$ induit par φ entre les catégories classifiantes correspondantes est $\mathcal{W}$-excellent. En particulier, le foncteur image inverse associé*

$$\overline{\varphi}^* : \mathcal{R}ep(\mathbb{G}') \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{G})$$

respecte les $\mathcal{W}$-équivalences et les $\mathcal{W}$-fibrations faibles. En outre, le foncteur $\overline{\varphi}^*$ est un foncteur de Quillen à gauche (resp. à droite) en regard des structures de catégorie de modèles fermées injectives (resp. locales) associées à $\mathcal{W}$.

Démonstration. — Soit s (resp. s') le foncteur canonique de A vers $\mathcal{B}\mathbb{G}$ (resp. $\mathcal{B}\mathbb{G}'$). On a alors le triangle commutatif canonique suivant



dans lequel les deux flèches obliques sont $\mathcal{W}$-localement asphériques (proposition 7.2.5). On en déduit grâce au troisième sorite de 3.3.8 que le foncteur $\overline{\varphi}$ est $\mathcal{W}$-localement asphérique (il faut aussi remarquer pour cela que les foncteurs s et s' sont bijectifs sur les objets). On vérifie aussitôt grâce à la relation $s^*\overline{\varphi}^* = s'^*$ (obtenue par la commutativité du triangle ci-dessus) et au critère (c) de la proposition précédente que le foncteur $\overline{\varphi}^*$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, et donc en vertu de la proposition 6.3.24 et du théorème 7.2.1 qu'il est fortement $\mathcal{W}$-localement constant. Le foncteur $\overline{\varphi}$ étant $\mathcal{W}$-excellent, le fait que le foncteur $\overline{\varphi}^*$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences et les $\mathcal{W}$-fibrations faibles résulte de la proposition 6.3.43. La dernière assertion est une trivialité : elle traduit simplement le fait que $\overline{\varphi}^*$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, les monomorphismes, et les fibrations au sens des structures locales associées à $\mathcal{W}$. □

Remarque 7.3.10. — Le fait que le foncteur $\overline{\varphi}^*$ soit un foncteur de Quillen à droite pour les structures locales associées à $\mathcal{W}$ ne nécessite en fait aucune hypothèse sur $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$ (ni même sur $\mathcal{W}$, mis à part bien entendu l'accessibilité), comme on peut s'en convaincre en s'inspirant de la preuve du corollaire 7.2.13.

Proposition 7.3.11. — *Soit A une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale. Pour qu'un préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ sur A soit $\mathcal{W}_\infty$-excellent, il faut et il suffit qu'il soit faiblement $\mathcal{W}_\infty$-fibrant.*

Démonstration. — Supposons $\mathbb{G}$ faiblement $\mathcal{W}_\infty$-fibrant. Soit E un $\mathbb{G}$-torseur de base B, et p la projection de E sur B. Tout $\mathbb{G}$-torseur étant localement trivial, il résulte aussitôt de la proposition 6.4.24 que p est une $\mathcal{W}_\infty$-fibration faible de $\widehat{A}$. Le critère (d) de la proposition 7.3.8 implique donc que $\mathbb{G}$ est $\mathcal{W}_\infty$-excellent. Tout préfaisceau de groupes $\mathcal{W}_\infty$-excellent étant en particulier faiblement $\mathcal{W}_\infty$-fibrant (7.3.8), cela prouve l'équivalence annoncée. □

Corollaire 7.3.12. — *Tout préfaisceau de groupes sur une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test stricte est $\mathcal{W}_\infty$-excellent.*

Remarque 7.3.13. — Dans le cas où $A = \Delta$, on obtient par le corollaire précédent que tout groupe simplicial $\mathbb{G}$ est $\mathcal{W}_\infty$-excellent. Les ∞-équivalences de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ sont donc en vertu de la proposition 7.3.8 les morphismes qui sont des ∞-équivalences d'ensembles simpliciaux après oubli de l'action de $\mathbb{G}$. On retrouve ainsi par conséquent la théorie de l'homotopie $\mathbb{G}$-équivariante usuelle (la structure de catégorie de modèles fermée classique correspondant à la structure de catégorie de modèles fermée locale

associée à $\mathcal{W}_\infty$ sur $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ plutôt qu'à la structure de catégorie de modèles fermée injective associée à $\mathcal{W}_\infty$).

7.4. Classification des torseurs

7.4.1. — Soient A une petite catégorie et $\mathbb{G}$ un préfaisceau de groupes sur A. On dit qu'une représentation U de $\mathbb{G}$ est *monogène* si U est un $\mathbb{G}$-torseur sur son quotient et s'il existe un objet a de A, et un épimorphisme de la représentation $a \times \mathbb{G}$ vers U. On note $\mathcal{M}_{\mathbb{G}}$ l'ensemble des monomorphismes $U \longrightarrow V$ entre représentations monogènes. Un morphisme de représentations de $\mathbb{G}$ est une *cofibration géométrique* s'il est contenu dans la classe $l(r(\mathcal{M}_{\mathbb{G}}))$. Un morphisme de représentations de $\mathbb{G}$ est une *fibration géométrique triviale* s'il est dans la classe $r(\mathcal{M}_{\mathbb{G}})$. On démontre sans difficultés l'énoncé suivant.

Lemme 7.4.2. — *Soit E un $\mathbb{G}$-torseur sur son quotient. Pour que E soit monogène, il faut et il suffit que le quotient de E sous l'action de $\mathbb{G}$ soit un quotient d'un préfaisceau représentable.*

Proposition 7.4.3. — *Si E et F sont deux $\mathbb{G}$-torseurs sur leurs quotients, alors tout monomorphisme de E dans F est une cofibration géométrique. En particulier, pour tout $\mathbb{G}$-torseur sur son quotient E, le morphisme $\varnothing \longrightarrow E$ est une cofibration géométrique.*

Démonstration. — Soit $u : E \longrightarrow F$ un monomorphisme. Désignons par $v : X \longrightarrow Y$ le morphisme obtenu de u en passant au quotient sous l'action de $\mathbb{G}$. Si on désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des monomorphisme entre quotients de préfaisceaux représentables sur A, on sait que la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$ s'identifie à $\mathsf{Cell}(\mathcal{M})$ (cela résulte aussitôt du lemme 1.2.24). En particulier, il existe un ensemble bien ordonné I d'élément initial 0 et un foncteur

$$I \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad i \longmapsto Y_i$$

tel que $Y_0 = X$, tel que pour tout $i > 0$ dans I, on ait un carré cocartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc} K_i & \longrightarrow & Y_{<i} \\ {\scriptstyle b_i}\downarrow & & \downarrow \\ L_i & \longrightarrow & Y_i \end{array}$$

avec b_i dans $\mathcal{M}$ et où on a posé $Y_{<i} = \varinjlim_{i' <i} Y_{i'}$, et tel que le morphisme v s'identifie au morphisme $Y_0 \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} Y_i$. Pour i dans I, définissons $F_i = Y_i \times_Y F$,

$F_{<i} = \varinjlim_{i'<i} F_{i'}$, $U_i = K_i \times_Y F$ et $V_i = L_i \times_Y F$. On a alors un carré cocartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & F_{<i} \\ {\scriptstyle a_i}\downarrow & & \downarrow \\ V_i & \longrightarrow & F_i \end{array}$$

avec a_i dans $\mathcal{M}_{\mathbb{G}}$ (7.4.2). Le morphisme u étant isomorphe au morphisme $F_0 \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} F_i$, cela achève cette preuve. □

7.4.4. — On considère à présent une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale A et un préfaisceau de groupes $\mathbb{G}$ sur A fixés.

Proposition 7.4.5. — *La catégorie des représentations de $\mathbb{G}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et les cofibrations, les cofibrations géométriques.*

Démonstration. — Toute cofibration locale étant une cofibration géométrique, il résulte de la proposition 7.2.10 que toute fibration géométrique triviale est une ∞-équivalence. Il s'agit ensuite d'une application directe du théorème 1.6.2 et du corollaire 7.2.2. □

7.4.6. — Pour un préfaisceau X sur A, on note $H^1(X, \mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathbb{G}$-torseurs sur X. On dit qu'un morphisme $u : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A est une $\mathbb{G}$-*équivalence* si l'application

$$u^* : H^1(Y, \mathbb{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G})$$

(induite par le foncteur $E \longmapsto X \times_Y E$) est une bijection. Il est clair que par définition, les $\mathbb{G}$-équivalences forment une classe de flèches de $\widehat{A}$ fortement saturée. Il résulte d'autre part de l'universalité des limites inductives dans $\widehat{A}$ et du fait que les $\mathbb{G}$-torseurs sur leurs quotients forment une classe d'objets saturée par monomorphismes dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ que la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$ qui sont des $\mathbb{G}$-équivalences est stable par images directes et par compositions transfinies (exercice laissé au lecteur). D'autre part, tout $\mathbb{G}$-torseur sur un préfaisceau représentable sur A étant trivial, il est évident que tout morphisme entre préfaisceaux représentables sur A est une $\mathbb{G}$-équivalence. Nous allons démontrer que les $\mathbb{G}$-équivalences forment un A-localisateur régulier. Pour cela, nous allons d'abord considérer une version simpliciale ce cette situation. Soit p le foncteur de projection de $A \times \Delta$ sur A. Il définit un foncteur image inverse

$$p^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} .$$

On obtient de la sorte un préfaisceau de groupes $p^*\mathbb{G}$ sur $A \times \Delta$, et donc une notion de $p^*\mathbb{G}$-équivalence. Pour le lemme ci-dessous, on aura besoin d'éléments de la théorie de Galois simpliciale telle qu'elle est exposée dans [**60**, appendice I].

Lemme 7.4.7. — *Soient Y un ensemble simplicial, et G un groupe. On suppose que le morphisme canonique $Y \longrightarrow \pi_0(Y)$ est une ∞-équivalence (on note encore par abus $\pi_0(Y)$ l'ensemble simplicial discret associé à l'ensemble des composantes connexes de Y). Si E est un G-torseur sur Y, alors $\pi_0(E)$ est un G-torseur sur $\pi_0(Y)$, et le morphisme canonique $E \longrightarrow \pi_0(E)$ est G-équivariant.*

Démonstration. — Si Y est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on peut clairement supposer que Y est 0-connexe, ce qui implique que Y est en particulier ∞-asphérique. On remarque que tout G-torseur sur Y est en particulier un revêtement de Y. Or le groupe fondamental de Y étant trivial, tout revêtement de Y est trivial, et donc admet une section dès qu'il est non vide. Cela implique que tout G-torseur sur Y est trivial. Ce lemme résulte à présent du fait que le foncteur π_0 commute aux produits finis. □

Lemme 7.4.8. — *Soient X un préfaisceau sur A, et Y un préfaisceau simplicial sur A. Toute ∞-équivalence simpliciale argument par argument $Y \longrightarrow p^*X$ est une $p^*\mathbb{G}$-équivalence.*

Démonstration. — Soit $u : Y \longrightarrow p^*X$ une ∞-équivalence simpliciale argument par argument. Si $p_!$ désigne l'adjoint à gauche de p^*, on voit que pour tout objet a de A, on a $p_!(Y)_a = \pi_0(Y_a)$. Le foncteur u étant une ∞-équivalence, on en déduit que $p_!(Y) = X$ et que u est le morphisme d'adjonction canonique η_Y. Nous allons démontrer que le foncteur u^* de la catégorie des $p^*\mathbb{G}$-torseurs sur p^*X vers la catégorie des $p^*\mathbb{G}$-torseurs sur Y défini par $E \longmapsto Y \times_{p^*X} E$ est une équivalence de catégories. Pour un $p^*\mathbb{G}$-torseur E sur Y, on a le carré commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\eta_E} & p^*p_!(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[u]{} & p^*X \end{array}$$

Il résulte du lemme 7.4.7 que $p^*p_!(E)$ est un $p^*\mathbb{G}$-torseur sur X et que le morphisme η_E est $p^*\mathbb{G}$-équivariant. On vérifie aussitôt que le foncteur $E \longmapsto p^*p_!(E)$ définit un quasi-inverse de u^*, d'où le lemme. □

Lemme 7.4.9. — *Les $p^*\mathbb{G}$-équivalences forment un $A \times \Delta$-localisateur régulier qui contient tous les morphismes entre préfaisceaux représentables.*

Démonstration. — Notons W la classe des $p^*\mathbb{G}$-équivalences. Nous avons déjà vu plus haut que W est une classe fortement saturée qui contient tous les morphismes entre préfaisceaux représentables, et qui vérifie l'axiome L3 de la définition 1.4.1. Pour montrer que W est un $A \times \Delta$-localisateur il suffit donc de prouver que tout morphisme de préfaisceaux simpliciaux sur A vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux monomorphismes est une $p^*\mathbb{G}$-équivalence, ce que nous

allons faire en utilisant le lemme 1.4.13. Soit X un préfaisceau sur A. Si $n \geqslant 0$ est un entier, on vérifie immédiatement grâce au lemme 7.4.8 que la projection de $X \times \Delta_n$ sur X est une $p^*\mathbb{G}$-équivalence. La classe C des morphismes d'ensembles simpliciaux $K \longrightarrow L$ tels que $X \times K \longrightarrow X \times L$ soit une $p^*\mathbb{G}$-équivalence vérifie donc les conditions (a), (b) et (c) du corollaire 2.1.20, ce qui implique que C contient toutes les ∞-équivalences simpliciales. La classe D des préfaisceaux simpliciaux X sur A tels que l'inclusion de $X \times \{0\}$ dans $X \times \Delta_1$ soit dans W est saturée par monomorphismes (1.1.16). Il résulte par conséquent de 2.3.4 que tout préfaisceau simplicial est dans D. Autrement dit, pour tout préfaisceau simplicial X sur A, la projection de $X \times \Delta_1$ sur X est dans W. Le lemme 1.4.13 implique donc que W est un $A \times \Delta$-localisateur. Montrons que W est régulier. Soit X un préfaisceau sur A. Nous allons montrer que p^*X est W-régulier. D'après la remarque 3.4.14, il existe un morphisme de préfaisceaux simpliciaux $u : Y \longrightarrow p^*X$ qui représente le morphisme canonique de la colimite homotopique du foncteur

$$\varphi_{p^*X} : A \times \Delta/p^*X \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} \quad , \qquad ((a, \Delta_n), s) \longmapsto a \times \Delta_n$$

vers X. Il s'agit de monter que u est dans W. Or d'après la proposition 3.4.34, u est une ∞-équivalence simpliciale argument par argument, et donc le lemme 7.4.8 implique la propriété voulue. Le lemme 3.4.28 montre ainsi que W est régulier. □

Proposition 7.4.10. — *Les $\mathbb{G}$-équivalences forment un A-localisateur régulier qui contient toutes les ∞-équivalences de préfaisceaux sur A.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 6.4.26 et du lemme 7.4.9, toute ∞-équivalence de préfaisceaux sur la catégorie test locale $A \times \Delta$ est une $p^*\mathbb{G}$-équivalence. D'autre part, le foncteur p^* étant pleinement fidèle, on vérifie immédiatement que pour tout préfaisceau X sur A, l'application canonique

$$H^1(X, \mathbb{G}) \longrightarrow H^1(p^*X, p^*\mathbb{G})$$

est bijective. Il en résulte qu'un morphisme de préfaisceaux sur A est une $\mathbb{G}$-équivalence si et seulement si son image par le foncteur p^* est une $p^*\mathbb{G}$-équivalence. D'autre part, le foncteur p étant asphérique, un morphisme de préfaisceaux sur A est une ∞-équivalence si et seulement si son image par le foncteur p^* en est une (proposition 4.2.23, (d)). On en déduit que toute ∞-équivalence de $\widehat{A}$ est une $\mathbb{G}$-équivalence, d'où la proposition. □

7.4.11. — On choisit à présent un $\mathbb{G}$-torseur sur son quotient $E\mathbb{G}$ tel que le morphisme de $E\mathbb{G}$ vers la représentation finale soit une fibration géométrique triviale. On note $B\mathbb{G}$ le quotient de $E\mathbb{G}$ sous l'action de $\mathbb{G}$. Il est immédiat que $B\mathbb{G}$ est un espace classifiant de $\mathbb{G}$ dans le sens défini au numéro 7.2.15.

Proposition 7.4.12. — *Le préfaisceau $B\mathbb{G}$ est $\mathcal{W}_\infty$-fibrant.*

Démonstration. — Choisissons une cofibration $\mathcal{W}_\infty$-triviale de but $\mathcal{W}_\infty$-fibrant i de $B\mathbb{G}$ vers B dans $\widehat{A}$. En vertu de la proposition 7.4.10, il existe un $\mathbb{G}$-torseur E sur B tel que $E\mathbb{G}$ soit isomorphe à $B\mathbb{G} \times_B E$ au-dessus de $B\mathbb{G}$. Mais vu que i est un monomorphisme, le morphisme induit j de $E\mathbb{G}$ vers E est une cofibration géométrique (7.4.3), ce qui implique que j admet une rétraction. On en déduit par fonctorialité du passage au quotient que $B\mathbb{G}$ est un rétracte de B, ce qui achève la démonstration. □

7.4.13. — Pour un préfaisceau X sur A, on pose

$$[X, B\mathbb{G}] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{A}}(X, B\mathbb{G}) \ .$$

On remarque qu'en vertu de la proposition 7.4.12, l'ensemble $[X, B\mathbb{G}]$ s'identifie aux classes d'homotopie de morphismes de préfaisceaux sur A de X vers $B\mathbb{G}$ (après avoir éventuellement choisi un cylindre adéquat de X).

Théorème 7.4.14. — *Il existe une bijection naturelle* $[X, B\mathbb{G}] \simeq H^1(X, \mathbb{G})$.

Démonstration. — On a une application

$$m : \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(X, B\mathbb{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G})$$

qui associe à un morphisme u l'image réciproque de $E\mathbb{G}$ par u. Pour un morphisme $u : X \longrightarrow B\mathbb{G}$, on a l'application

$$u^* : H^1(B\mathbb{G}, \mathbb{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}) \ ,$$

et on a par définition l'égalité $u^*(E\mathbb{G}) = m(u)$. D'autre part, il résulte de la proposition 7.4.10 que le foncteur $X \longmapsto H^1(X, \mathbb{G})$ se factorise par la catégorie homotopique $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{A}$. Cela implique immédiatement que si u et v sont deux morphismes de X vers $B\mathbb{G}$ qui induisent le même morphisme dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{A}$, alors $m(u) = m(v)$. On en déduit que l'application m induit une application naturelle

$$\mathsf{m} : [X, B\mathbb{G}] \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}) \ .$$

Soit E un $\mathbb{G}$-torseur sur X. Considérons un segment séparant $(I, \partial^0, \partial^1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement ∞-asphérique (par exemple $I = i_A^*(\Delta_1)$). On remarque que $\partial I \times E$ et $I \times E$ sont des $\mathbb{G}$-torseurs sur $\partial I \times X$ et $I \times X$ respectivement. On en déduit en vertu de la proposition 7.4.3 que l'inclusion de $\partial I \times E$ dans $I \times E$ est une cofibration géométrique. D'autre part, en vertu du corollaire 7.2.8, la projection de $I \times E$ sur E est une ∞-équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$. Autrement dit, nous venons de vérifier que $I \times E$ est un cylindre de E au sens de la catégorie de modèles fermée de la proposition 7.4.5. On remarque enfin que E est cofibrant et $E\mathbb{G}$ fibrant relativement à la structure de catégorie de modèles fermée de la proposition 7.4.5. Vu que $E\mathbb{G}$ est un objet final de $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$, il existe un morphisme équivariant unique à I-homotopie près de E vers $E\mathbb{G}$. On vérifie en outre que si u_0 et u_1 sont deux morphismes de E vers $E\mathbb{G}$, alors les morphismes induits par passage au quotient de X vers $B\mathbb{G}$ sont I-homotopes : en

effet, tout morphisme de $I \times E$ vers $E\mathbb{G}$ induit par passage au quotient un morphisme de $I \times X$ vers $B\mathbb{G}$. On définit donc une application

$$\mathsf{d} : H^1(X, \mathbb{G}) \longrightarrow [X, B\mathbb{G}]$$

en envoyant la classe d'un $\mathbb{G}$-torseur E sur X sur la classe d'homotopie du morphisme $u : X \longrightarrow B\mathbb{G}$ obtenu par passage au quotient d'un morphisme équivariant de E vers $E\mathbb{G}$ choisi arbitrairement. On vérifie immédiatement que les applications m et d sont inverses l'une de l'autre. □

7.5. Fibrés et fibrations

7.5.1. — Soit A une petite catégorie. Un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A est *localement trivial* (on dira aussi que p est un *fibré de base* Y) si pour tout objet a de A, et toute section $s : a \longrightarrow Y$, il existe un préfaisceau F sur A, et un isomorphisme au-dessus de a de $a \times F$ vers $a \times_Y X$.

$$\begin{array}{ccc} a \times F & \xrightarrow{\sim} & a \times_Y X \\ & {\scriptstyle pr_1} \searrow \quad \swarrow & \\ & a & \end{array}$$

Un morphisme de préfaisceaux sur A est *globalement trivial* s'il est isomorphe à une projection de la forme $Y \times F \longrightarrow Y$ (il est alors en particulier un fibré de base Y).

Lemme 7.5.2. — *Pour tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$, toute $\mathcal{W}$-fibration d'ensembles simpliciaux p admet une factorisation en deux morphismes $p = qr$, où r est une fibration triviale, et q est une $\mathcal{W}$-fibration localement triviale.*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{r} & Z & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & p & & \end{array}$$

Démonstration. — Comme $\mathcal{W}$ contient les ∞-équivalences, toute $\mathcal{W}$-fibration est une fibration de Kan. Or toute fibration de Kan p admet une factorisation de la forme $p = qr$, où r est une fibration triviale, et q une fibration minimale (cf. par exemple [**64**, chap. I, proposition 10.3 et lemme 10.11]). Or toute fibration minimale est localement triviale (voir cette fois [**60**, VI, § 5.4] ou bien [**64**, chap. I, corollaire 10.8]). Pour conclure, il suffit de prouver que si p est de plus une $\mathcal{W}$-fibration, alors il en est de même de q. Mais cela résulte du fait que q est un rétracte de p (puisque r est une fibration triviale, elle admet une section). □

Lemme 7.5.3. — *Soit A une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale. Tout morphisme localement trivial de préfaisceaux sur A de base ∞-asphérique est globalement trivial.*

Démonstration. — Considérons un morphisme localement trivial $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A de base ∞-asphérique et de fibre F. Soit $\mathcal{A}ut(F)$ le préfaisceau de groupes des automorphismes de F, et $\mathcal{I}som_Y(Y \times F, X)$ le $\mathcal{A}ut(F)$-torseur de base Y des isomorphismes du fibré trivial sur Y de fibre F vers X au-dessus de Y. Le préfaisceau Y étant ∞-asphérique, il existe une ∞-équivalence d'un préfaisceau représentable sur A vers Y. Il résulte par conséquent de la proposition 7.4.10 que tout $\mathcal{A}ut(F)$-torseur de base Y est trivial, et donc, en particulier, admet une section. Or une section de la projection canonique de $\mathcal{I}som_Y(Y \times F, X)$ sur Y correspond à une trivialisation de p, ce qui prouve le lemme. □

Proposition 7.5.4. — *Pour toute petite catégorie A, le foncteur $i_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les morphismes localement triviaux.*

Démonstration. — Soit $X \longrightarrow Y$ un morphisme localement trivial d'ensembles simpliaux. Considérons un objet a de A, et une section s de $i_A^* Y$ au-dessus de a. Le morphisme s correspond par adjonction à un morphisme $\bar{s}$ de $N\,A/a$ vers Y. Comme le nerf de A/a est contractile, la projection $N\,A/a \times_Y X \longrightarrow N\,A/a$ est globalement triviale (7.5.3). Le foncteur i_A^* commutant aux limites projectives, on en déduit que ce dernier envoie ladite projection sur un morphisme globalement trivial de préfaisceaux sur A. On vérifie d'autre part que dans le diagramme suivant, tous les carrés sont cartésiens.

$$\begin{array}{ccccc}
a \times_{i_A^* Y} i_A^* X & \longrightarrow & i_A^*(N\,A/a \times_Y X) & \longrightarrow & i_A^* X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
a & \xrightarrow[\eta_a]{} & i_A^*(N\,A/a) & \xrightarrow[i_A^* \bar{s}]{} & i_A^* Y \\
 & & & \overset{s}{\searrow} & \uparrow \\
 & & & & \\
\end{array}$$

On en déduit immédiatement que la projection de $a \times_{i_A^* Y} i_A^* X$ vers a est globalement triviale, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 7.5.5. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Tout morphisme u de préfaisceaux sur A admet une factorisation de la forme $u = qri$, où i est une $\mathcal{W}$-cofibration triviale, r est une fibration triviale, et q est une $\mathcal{W}$-fibration localement triviale.*

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que $\mathcal{W}$ est propre. Comme le foncteur $N\,i_A$ respecte les monomorphismes et les $\mathcal{W}$-équivalences, son adjoint à droite respecte les fibrations triviales et les $\mathcal{W}$-fibrations. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A. On factorise $N\,i_A u$ en une $\mathcal{W}$-cofibration triviale i', suivie d'une $\mathcal{W}$-fibration p'. Le morphisme p' admet quant à lui une factorisation en une

fibration triviale r', suivie d'une $\mathcal{W}$-fibration localement constante q' (7.5.2).

$$N\,A/X \xrightarrow{i'} T' \xrightarrow{r'} Z' \xrightarrow{q'} N\,A/Y, \qquad p' : T' \to N\,A/Y$$

Formons à présent les carrés cartésiens suivants (cf. 3.2.14).

$$\begin{array}{ccccccc} & & & u & & & \\ & \curvearrowright & & & & \curvearrowright & \\ X & \xrightarrow{i} & T & \xrightarrow{r} & Z & \xrightarrow{q} & Y \\ {\scriptstyle \eta_X}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ i_A^*A/X & \xrightarrow[i_A^*i']{} & i_A^*T' & \xrightarrow[i_A^*r']{} & i_A^*Z' & \xrightarrow[i_A^*q']{} & i_A^*A/Y \end{array}$$

La flèche i_A^*r' (resp. i_A^*q') est une fibration triviale (resp. une $\mathcal{W}$-fibration), et par conséquent, il en est de même de r (resp. de q). Comme $\mathcal{W}$ est propre, on en déduit que les deux carrés de droite sont homotopiquement cartésiens. Le grand carré étant homotopiquement cartésien par la proposition 6.2.7, et la flèche i_A^*i' une équivalence faible, il en est de même de i. D'autre part, le foncteur i_A^* respectant les monomorphismes, i_A^*i' est un monomorphisme, et par suite, i est une $\mathcal{W}$-cofibration triviale. Pour conclure, il suffit de constater que les morphismes localement triviaux sont stables par changement de base, et que i_A^*q' est un morphisme localement trivial en vertu du lemme 7.5.4, ce qui implique que q est localement trivial.

Pour en venir au cas général, on remarque qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque u est une $\mathcal{W}$-fibration (quitte à factoriser au besoin u en une $\mathcal{W}$-cofibration triviale suivie d'une $\mathcal{W}$-fibration). Soit $\mathcal{W}'$ un localisateur fondamental propre contenu dans $\mathcal{W}$ tel que A soit une $\mathcal{W}'$-catégorie test locale (ce qui existe en vertu du corollaire 6.1.10). En vertu de ce qui précède, on peut alors factoriser u en $u = qri$ où i est une $\mathcal{W}'$-cofibration triviale, r est une fibration triviale, et q est une $\mathcal{W}'$-fibration localement triviale. Or vu que u et q sont reliés par une $\mathcal{W}'$-équivalence au-dessus de X, on en déduit par l'assertion (*iii*) de la proposition 1.6.5 que q est nécessairement une $\mathcal{W}$-fibration, ce qui achève la preuve de ce corollaire. □

On obtient ainsi la généralisation suivante d'un résultat de Quillen [**110**] :

Corollaire 7.5.6. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. La classe des $\mathcal{W}$-fibrations de $\widehat{A}$ est la plus petite classe de flèches de $\widehat{A}$ stable par compositions, changements de base et rétractes qui contient les $\mathcal{W}$-fibrations localement triviales.*

Démonstration. — Soit F la plus petite classe de flèches de $\widehat{A}$ stable par compositions, changements de base et rétractes qui contient les $\mathcal{W}$-fibrations localement triviales. Il est clair que tout élément de F est une $\mathcal{W}$-fibration, et pour montrer l'inclusion inverse, le théorème précédent assorti du lemme du rétracte implique qu'il suffit de

prouver que toute fibration triviale de $\widehat{A}$ est dans F. Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration triviale. On peut construire par des factorisations adéquates un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ Y & \xrightarrow[j]{} & Y' \end{array}$$

dans lequel i et j sont des cofibrations (triviales), et p' une fibration triviale entre préfaisceaux $\mathcal{W}$-fibrants. Soit $X'' = Y \times_{Y'} X'$. La projection q de X'' sur Y est une fibration triviale, et la flèche canonique (p, i) de X vers X'' est donc une cofibration (triviale). Le lemme du rétracte implique donc que p est un rétracte de q, et par conséquent, il suffit de prouver que q est dans F. Mais comme q est par construction obtenue par changement de base à partir de p', il suffit pour conclure de prouver que p' est dans F. Pour cela, on forme le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X' & = & X' \\ {\scriptstyle (1_{X'}, p')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X' \times Y' & \xrightarrow[q']{} & Y' \end{array} \quad ,$$

q' étant la seconde projection. Comme $(1_{X'}, p')$ est un monomorphisme, ce carré admet un relèvement, ce qui fait de p' un rétracte de q'. Or il est clair que q' est un morphisme globalement trivial, et donc, en particulier, un morphisme localement trivial. Or comme X' est $\mathcal{W}$-fibrant, q' est une $\mathcal{W}$-fibration, ce qui prouve que c'est un élément de F, et achève la démonstration. □

PARTIE III

ZOOLOGIES

CHAPITRE 8

EXEMPLES DE CATÉGORIES TEST LOCALES

8.1. Catégories squelettiques

Le but de cette section est de dégager une classe de petites catégories dont la catégorie des préfaisceaux admette un modèle cellulaire explicite et simple à manipuler. L'exercice consiste en fait à formaliser les propriétés de la catégorie des simplexes en suivant l'exposition de [**60**].

Définition 8.1.1. — Une *catégorie squelettique* est la donnée d'un quadruplet (A, A_+, A_-, λ_A), où A est une petite catégorie, A_+ et A_- sont des sous-catégories de A, et $\lambda_A : \mathrm{Ob}\, A \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application, tel que les axiomes suivants soient vérifiés.

Sq0 Tout isomorphisme de A est une flèche de A_+ et une flèche de A_-. Si a et a' sont deux objets isomorphes dans A, alors $\lambda_A(a) = \lambda_A(a')$.

Sq1 Si $a \longrightarrow a'$ est une flèche de A_+ (resp. de A_-) qui n'est pas un isomorphisme, alors $\lambda_A(a) < \lambda_A(a')$ (resp. $\lambda_A(a') < \lambda_A(a)$).

Sq2 Chaque flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A admet une factorisation de la forme $\alpha = \delta\,\pi$, où $\delta : b \longrightarrow a'$ est une flèche de A_+, et $\pi : a \longrightarrow b$ une flèche de A_-. Une telle factorisation est unique dans le sens où pour toute autre factorisation de α de la forme $\alpha = \delta'\,\pi'$ avec $\delta' : b' \longrightarrow a'$ dans A_+ et $\pi' : a \longrightarrow b'$ dans A_-, il existe une unique flèche $\tau : b \longrightarrow b'$ telle que $\tau\pi = \pi'$ et $\delta = \delta'\tau$.

Sq3 Toutes les flèches de A_- admettent des sections. Deux flèches $\pi, \pi' : a \longrightarrow a'$ de A_- sont égales si et seulement si elles ont les mêmes sections.

En pratique, on dira que A est une catégorie squelettique, la référence à A_+, A_- et à λ_A étant implicite.

Remarque 8.1.2. — Lorsque tous les isomorphismes de A sont des identités, les axiomes Sq1 et Sq2 impliquent que A est une catégorie de Reedy (voir [**74**, définition 5.2.1]).

Dans le cas général, on remarque que tout monomorphisme de A (resp. tout épimorphisme scindé de A) est dans A_+ (resp. dans A_-). En effet, si α est un monomorphisme (resp. un épimorphisme scindé) de A, il admet une factorisation de la forme $\alpha = \delta\,\pi$, où δ est une flèche de A_+, et π une flèche de A_-. Il est immédiat que π (resp. δ) doit être un monomorphisme (resp. un épimorphisme scindé). Or tout morphisme qui est à la fois un épimorphisme scindé et un monomorphisme est un isomorphisme. L'axiome Sq0 implique donc que α est dans A_+ (resp. dans A_-). D'autre part, dans l'axiome Sq2, le morphisme τ est nécessairement un isomorphisme.

Exemple 8.1.3. — Les catégories vide et ponctuelle sont squelettiques.

Exemple 8.1.4. — Soit Δ la catégorie des simplexes. On note Δ_+ (resp. Δ_-) la sous-catégorie de Δ formée des monomorphismes (resp. des épimorphismes) de Δ. On a une application évidente

$$\lambda_\Delta : \mathrm{Ob}\,\Delta \longrightarrow \mathbb{N} \quad , \quad \Delta_n \longmapsto n \quad ,$$

ce qui définit une structure de catégorie squelettique sur Δ.

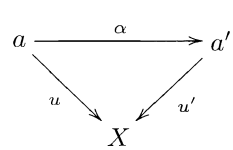
Exemple 8.1.5. — La catégorie Υ, sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}ns$ formée des ensembles finis de la forme $\Upsilon_n = \{0, \ldots, n\}$ pour $n \geqslant 0$, est une catégorie squelettique : Υ_+ (resp. Υ_-) est la sous-catégorie de Υ formée des monomorphismes (resp. des épimorphismes), et λ_Υ est l'application évidente. Les préfaisceaux sur Υ sont appelés les *ensembles simpliciaux symétriques*.

Lemme 8.1.6. — *La notion de catégorie squelettique est stable par localisation. Autrement dit, si A est une catégorie squelettique, et si X est un préfaisceau sur A, alors la catégorie A/X est naturellement munie d'une structure de catégorie squelettique. Si $u_X : A/X \longrightarrow A$ désigne le foncteur d'oubli, celle-ci est définie en posant*

$$(A/X)_+ = u_X^{-1} A_+ \quad , \quad (A/X)_- = u_X^{-1} A_- \quad ,$$

$$\textit{et} \quad \lambda_{A/X} : \mathrm{Ob}\,A/X \longrightarrow \mathbb{N} \quad , \quad (a, a \longrightarrow X) \longmapsto \lambda_A(a) \quad .$$

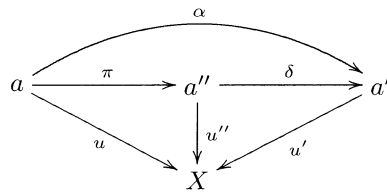
Démonstration. — Les axiomes Sq0 et Sq1 sont vérifiés immédiatement. Soit



une flèche de A/X. On factorise α dans A en

$$a \xrightarrow{\pi} a'' \xrightarrow{\delta} a' \ ,$$

où π est une flèche de A_-, et δ une flèche de A_+, puis on pose $u'' = u'\,\delta$. On obtient de la sorte la factorisation ci-dessous dans A/X.



L'unicité de cette factorisation résulte de la propriété analogue dans A. L'axiome Sq2 est ainsi vérifié, et l'axiome Sq3 résulte du fait que le foncteur d'oubli u_X est fidèle, et que pour toute flèche α de A/X, l'ensemble des sections de α est canoniquement en bijection avec celui des sections de $u_X(\alpha)$. □

Remarque 8.1.7. — Si A et B sont deux catégories squelettiques, on pose $\lambda_{A\times B}(a,b) = \lambda_A(a) + \lambda_B(b)$, et $(A\times B)_\varepsilon = A_\varepsilon \times B_\varepsilon$, $\varepsilon = +,-$, ce qui fait de $A\times B$ une catégorie squelettique.

On fixe à présent une catégorie squelettique A.

Définition 8.1.8. — Soit a un objet de A. Une flèche $a \longrightarrow a'$ de A est une *dégénérescence* de a si $\lambda_A(a') < \lambda_A(a)$.

Un objet a de A est *dégénéré* s'il admet une dégénérescence. Un objet de A est *non dégénéré* s'il n'est pas dégénéré.

Soit X un préfaisceau sur A. Si a est un objet de A, une section u de X au-dessus de a est *dégénérée* si l'objet correspondant de A/X (à savoir (a,u)) l'est, *i.e.* s'il existe une flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A, ainsi qu'une section u' de X au-dessus de a', tels que $\lambda_A(a') < \lambda_A(a)$ et $u = X_\alpha(u')$. Une section de X au-dessus d'un objet de A est *non dégénérée* si elle n'est pas dégénérée.

Proposition 8.1.9. — *Un objet a de A est dégénéré si et seulement s'il existe une flèche de A_- de source a qui n'est pas un isomorphisme.*

Démonstration. — C'est une condition suffisante en vertu de l'axiome Sq1. Réciproquement, si a est dégénéré, alors il existe une flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A telle que $\lambda_A(a') < \lambda_A(a)$. En vertu de l'axiome Sq2, α admet une factorisation de la forme

$$a \xrightarrow{\pi} a'' \xrightarrow{\delta} a' \ ,$$

où π est une flèche de A_-, et δ une flèche de A_+. Or π n'est pas un isomorphisme, car sinon, les isomorphismes de A étant dans A_+, on aurait α dans A_+, et donc l'axiome Sq1 impliquerait l'inégalité $\lambda_A(a) \leqslant \lambda_A(a')$. □

Corollaire 8.1.10. — *Soit X un préfaisceau sur A. Une section u de X au-dessus d'un objet a de A est dégénérée si et seulement s'il existe une flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A_- qui n'est pas un isomorphisme, et une section u' de X au-dessus de a' tels que $u = X_\alpha(u')$.*

Proposition 8.1.11. — *Soit a un objet de A. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'objet a est non dégénéré.*

(ii) *Pour tout morphisme $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A, on a l'inégalité $\lambda_A(a) \leqslant \lambda_A(a')$.*

(iii) *Tout morphisme de A_- de source a est un isomorphisme.*

(iv) *Tout morphisme de A de source a est un morphisme de A_+.*

Démonstration. — L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ est une traduction de la définition, et l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ résulte de l'axiome Sq1. Supposons la condition (iii) vérifiée. Si $\alpha : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A, elle admet une factorisation de la forme

$$a \xrightarrow{\pi} a'' \xrightarrow{\delta} a' ,$$

où $\pi \in \mathrm{Fl}\, A_-$ et $\delta \in \mathrm{Fl}\, A_+$. Or (iii) implique que π est un isomorphisme, et donc que $\alpha \in \mathrm{Fl}\, A_+$. On a ainsi montré $(iii) \Rightarrow (iv)$, et $(iv) \Rightarrow (ii)$ est une conséquence immédiate des axiomes Sq0 et Sq1. □

Corollaire 8.1.12. — *Soient X un préfaisceau sur A, a un objet de A, et u une section de X au-dessus de a. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La section u est non dégénérée.*

(ii) *Pour tous $\alpha : a \longrightarrow a' \in \mathrm{Fl}\, A$ et $u' \in X_{a'}$ tels que $u = X_\alpha(u')$, on a l'inégalité $\lambda_A(a) \leqslant \lambda_A(a')$.*

(iii) *Si $\alpha : a \longrightarrow a' \in \mathrm{Fl}\, A_-$ et $u' \in X_{a'}$ vérifient $u = X_\alpha(u')$, alors α est un isomorphisme.*

(iv) *Si $\alpha : a \longrightarrow a' \in \mathrm{Fl}\, A$ et $u' \in X_{a'}$ vérifient $u = X_\alpha(u')$, alors α est une flèche de A_+.*

Proposition 8.1.13. — *Pour tout objet a de A, il existe un couple (π, b), où $\pi : a \longrightarrow b$ est une flèche de A_-, et où b est non dégénéré. Un tel couple est appelé une* décomposition d'Eilenberg-Zilber *de a.*

Démonstration. — Considérons l'ensemble E_a des couples de la forme (π, b), où b est un objet de A, et π une flèche de a vers b dans la catégorie A_-. Il est non vide puisqu'il contient l'élément $(a, 1_a)$. L'ensemble des entiers naturels étant bien ordonné, cela implique que E_a admet un élément (π, b) tel que $\lambda_A(b)$ soit minimal. La proposition 8.1.11 montre que b est alors nécessairement non dégénéré. □

Corollaire 8.1.14. — *Soient X un préfaisceau sur A, a un objet de A, et u une section de X au-dessus de a. Alors il existe un couple (π, v), où $\pi : a \longrightarrow b$ est une flèche de A_- et v une section non dégénérée de X au-dessus de b, tel que $u = X_\pi(v)$. Un tel couple sera appelé une* décomposition d'Eilenberg-Zilber *de u.*

8.1.15. — On note $A_{\leqslant -1} = \varnothing$, et pour $n \geqslant 0$, on considère la sous-catégorie pleine $A_{\leqslant n}$ de A formée dees objets a tels que $\lambda_A(a) \leqslant n$. Pour $n \geqslant -1$, on note $i_n : A_{\leqslant n} \longrightarrow A$ l'inclusion pleine canonique. Les catégories $A_{\leqslant n}$ admettent des structures de catégorie squelettique évidentes. Soit $n \geqslant -1$ un entier. On note $Sk^n A$ le crible

de A engendré par la sous-catégorie $A_{\leqslant n}$. Autrement dit, $Sk^n A$ est la sous-catégorie pleine de A dont les objets sont les éléments a de $\mathrm{Ob}\, A$ tels qu'il existe une flèche dans A de source a et de but un objet de $A_{\leqslant n}$ (*i.e.* un objet a' de A tel que $\lambda_A(a') \leqslant n$).

Proposition 8.1.16. — *Soit a un objet de A. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'objet a de A est dans le crible $Sk^n A$ de A.*

(ii) *Il existe une flèche de A_- de source a et de but un objet de $A_{\leqslant n}$.*

(iii) *Si (π, b) est une décomposition d'Eilenberg-Zilber de a, b est un objet de $A_{\leqslant n}$.*

Démonstration. — Les implications $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ sont évidentes. Il suffit par conséquent de montrer que $(i) \Rightarrow (iii)$. Supposons que a soit un objet de $Sk^n A$, et considérons une décomposition d'Eilenberg-Zilber (π, b) de a. Comme π est une flèche de A_-, elle admet une section (axiome Sq3), et comme $Sk^n A$ est par définition un crible, cela implique que b est un objet de $Sk^n A$. Il existe donc une flèche de b vers un objet a' de $A_{\leqslant n}$, et en vertu de la proposition 8.1.11, on a l'inégalité $\lambda_A(b) \leqslant \lambda_A(a')$. Cela implique que b est un objet de $A_{\leqslant n}$, et achève ainsi la démonstration. □

8.1.17. — Soit X un préfaisceau sur A. Le crible $Sk^n(A/X)$ de A/X correspond à un sous-préfaisceau de X, noté $Sk^n X$, et appelé le *n-ième squelette de X*. Par définition, on a donc $A/\,Sk^n X = Sk^n(A/X)$. Le préfaisceau $Sk^n X$ peut se définir explicitement en posant pour tout objet a de A,

$$(Sk^n X)_a = \{u \in X_a \mid \exists \alpha : a \longrightarrow a',\ \lambda_A(a') \leqslant n\ ,\ \exists u' \in X_{a'}\ ,\ X_\alpha(u') = u\}\ .$$

On vérifie immédiatement que pour toute flèche $X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A, on a le carré commutatif suivant dans $\boldsymbol{Cat}$.

$$\begin{array}{ccc} Sk^n(A/X) & \longrightarrow & A/X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sk^n(A/Y) & \longrightarrow & A/Y \end{array}$$

L'association $X \longmapsto Sk^n X$ définit ainsi un endofoncteur de $\widehat{A}$.

Corollaire 8.1.18. — *Soient X un préfaisceau sur A, et u une section de X au-dessus d'un objet a de A. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La section u de X appartient au sous-préfaisceau $Sk^n X$ de X.*

(ii) *Il existe une flèche $\pi : a \longrightarrow a'$ de A_- telle que $\lambda_A(a') \leqslant n$, et une section u' de X au-dessus de a' vérifiant l'équation $X_\pi(u') = u$.*

(iii) *Si (π, v) est une décomposition d'Eilenberg-Zilber de u, le but de π est un objet de $A_{\leqslant n}$.*

8.1.19. — Soit C un crible de A. Alors C correspond à un sous-préfaisceau X de l'objet final de $\widehat{A}$, et s'identifie à la catégorie A/X. Il est donc muni d'une structure naturelle de catégorie squelettique (lemme 8.1.6). Les sous-catégories C_+ et C_- s'identifient

aux intersections $C \cap A_+$ et $C \cap A_-$, et l'application λ_C est la restriction de λ_A à C. Pour tout $n \geqslant -1$, on a l'égalité $C_{\leqslant n} = C \cap A_{\leqslant n}$.

Proposition 8.1.20. — *Soit C un crible de A. Alors pour tout $n \geqslant -1$, l'inclusion de C dans A induit naturellement le carré cartésien suivant dans $\mathbf{Cat}$.*

$$\begin{array}{ccc} Sk^n C & \longrightarrow & Sk^n A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & A \end{array}$$

Autrement dit, $Sk^n C$ est l'intersection des cribles C et $Sk^n A$ de A.

Démonstration. — On a le carré cartésien ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} C_n & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & A \end{array}$$

ce qui montre qu'on a un foncteur naturel de $Sk^n C$ dans le produit fibré $C \cap Sk^n A$ de C et $Sk^n A$ au-dessus de A. On vérifie aussitôt que cela fait de $Sk^n C$ un crible de $C \cap Sk^n A$. En particulier, ce foncteur est pleinement fidèle et injectif sur les objets, et par conséquent, il suffit de montrer qu'il est surjectif sur les objets. Soit a un objet de $C \cap Sk^n A$. En vertu de la proposition 8.1.16, il existe une flèche $\pi : a \longrightarrow a'$ dans A_- dont le but a' est un objet de la catégorie $A_{\leqslant n}$. Or il résulte de l'axiome Sq3 que cette flèche admet une section, et donc, vu que C est un crible de A, a' est un objet de C. On en déduit immédiatement que a est un objet de $Sk^n C$. □

Corollaire 8.1.21. — *Soit $X \longrightarrow Y$ un monomorphisme de $\widehat{A}$. Alors pour tout entier n, $n \geqslant -1$, le carré suivant est cartésien.*

$$\begin{array}{ccc} Sk^n X & \longrightarrow & Sk^n Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Autrement dit, $Sk^n X$ est l'intersection des sous-préfaisceaux X et $Sk^n Y$ de Y.

Démonstration. — A/X est un crible de A/Y, et on rappelle qu'on a par définition les égalités $Sk^n(A/X) = A/\,Sk^n X$ et $Sk^n(A/Y) = A/\,Sk^n Y$. La proposition 8.1.20 montre que l'image du carré considéré dans l'énoncé par le foncteur

$$j_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Cat}/A \quad , \quad X \longmapsto (A/X, A/X \longrightarrow A)$$

est le carré cartésien ci-dessous dans Cat/A

$$\begin{array}{ccc} A/\,Sk^n\,X & \longrightarrow & A/\,Sk^n\,Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/X & \longrightarrow & A/Y \end{array} .$$

Or le foncteur j_A est pleinement fidèle (proposition 3.2.2), ce qui implique immédiatement l'assertion. □

Proposition 8.1.22. — *Soit $n \geqslant -1$ un entier, et soit X un préfaisceau sur A. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $Sk^n\,X = X$.

(ii) *Pour tout objet a de A, s'il existe une section non dégénérée de X au-dessus de a, alors $\lambda_A(a) \leqslant n$.*

(iii) *Pour toute section u de X au-dessus d'un objet a de A, si (π, v) désigne une décomposition d'Eilenberg-Zilber de u, alors v est une section de X au-dessus d'un objet de $A_{\leqslant n}$.*

(iv) *Pout toute section u de X au-dessus d'un objet a de A, il existe une flèche $\pi : a \longrightarrow a'$ de A_-, et une section u' de X au-dessus de a' tels que $u = X_\pi(u')$ et $\lambda_A(a') \leqslant n$.*

Démonstration. — Les équivalences entre les conditions (*i*), (*iii*) et (*iv*) résultent du corollaire 8.1.18, et il est immédiat que (*ii*) équivaut à (*iii*). □

8.1.23. — Soient X un préfaisceau sur A, et a un objet de A. On dit qu'une section non dégénérée v de X au-dessus de a est *dominante* si le couple (a, v) n' a pas d'automorphismes non triviaux dans la catégorie A/X. Une section u de X au-dessus de A est *normale* s'il existe une décomposition d'Eilenberg-Zilber (π, v) de u telle que v soit une section dominante de X. On remarque qu'une section non dégénérée est normale si et seulement si elle est dominante.

Un préfaisceau sur A est dit *normal* si toutes ses sections sont normales.

On vérifie immédiatement que tout sous-préfaisceau d'un préfaisceau normal est normal. De manière non moins évidente, on constate que lorsque les objets de A n'ont pas d'automorphismes non triviaux, tout préfaisceau sur A est normal. L'axiome Sq2 se reformule en disant que tout préfaisceau représentable sur A est normal.

Proposition 8.1.24. — *Soit X un préfaisceau sur A. Soient a un objet de A, et u une section normale de X au-dessus de a. On considère deux décompositions d'Eilenberg-Zilber (π, v) et (π', v') de u, $\pi : a \longrightarrow b$ et $\pi : a \longrightarrow b'$ étant dans A_-, et v et v' étant des sections non dégénérées de X au-dessus de b et b' respectivement. Alors les sections v et v' sont dominantes, et il existe un unique morphisme $\tau : b \longrightarrow b'$ dans A tel que $\tau\pi = \pi'$ et $v'\tau = v$. On se permettra donc dans ce cas de parler de* la *décomposition d'Eilenberg-Zilber de u.*

Démonstration. — Quitte à remplacer A par A/X, on peut supposer que X est le préfaisceau final sur A (cela ne sert qu'à simplifier les notations). On peut aussi supposer que v est dominante, ce qui revient à considérer deux décompositions d'Eilenberg-Zilber (π, b) et (π', b') d'un objet a de A, l'objet b n'admettant pas d'automorphisme non trivial dans A. Montrons qu'il existe un unique morphisme $\tau : b \longrightarrow b'$ tel que $\tau\pi = \pi'$. Si σ' est une section de π', comme b' est non dégénérée, il résulte de 8.1.11 que $\pi\sigma'$ est dans A_+, ce qui implique que $\lambda_A(b') \leqslant \lambda_A(b)$. Le choix d'une section de π implique donc par le même procédé que $\lambda_A(b') = \lambda_A(b)$, d'où il vient par l'axiome Sq1 que $\pi\sigma'$ est un isomorphisme. Vu que b n'a pas d'automorphismes non triviaux, ce qui précède implique que π et $\pi\sigma'\pi'$ ont les mêmes sections. On déduit donc de l'axiome Sq3 que $\pi = \pi\sigma'\pi'$. En posant $\tau = (\pi\sigma')^{-1}$, on a donc $\pi' = \tau\pi$. Si $\tau' : b \longrightarrow b'$ est un autre morphisme tel que $\pi' = \tau'\pi$, on a $\tau'\tau^{-1} = \pi'\sigma' = 1_{b'}$, d'où $\tau' = \tau$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 8.1.25. — *Un préfaisceau sur A est normal si et seulement si toutes ses sections non dégénérées sont dominantes.*

8.1.26. — Soit $n \geqslant -1$. Le foncteur $i_n : A_{\leqslant n} \longrightarrow A$ induit un foncteur image inverse

$$i_n^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}_{\leqslant n} \quad ,$$

lequel admet un adjoint à gauche $i_{n!}$, et un adjoint à droite i_{n*}.

$$\widehat{A}_{\leqslant n} \xrightarrow{i_{n!}} \widehat{A} \qquad\qquad \widehat{A}_{\leqslant n} \xrightarrow{i_{n*}} \widehat{A}$$

Le foncteur i_n étant pleinement fidèle (par construction), les deux foncteurs $i_{n!}$ et i_{n*} sont aussi pleinement fidèles. On note

$$\varepsilon : i_{n!}\, i_n^* \longrightarrow 1_{\widehat{A}}$$

le morphisme d'adjonction non trivial (l'autre, défini de $1_{\widehat{A}_{\leqslant n}}$ vers $i_n^*\, i_{n!}$ est un isomorphisme, puisque $i_{n!}$ est pleinement fidèle).

Lemme 8.1.27. — *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A. On considère un objet a de A, puis l'évaluation $\varphi_a : X_a \longrightarrow Y_a$ de φ en a.*

(i) *Pour tout objet a de A, l'application φ_a envoie les sections dégénérées sur des sections dégénérées.*

(ii) *Si φ_a est une injection, alors elle envoie les sections non dégénérées sur des sections non dégénérées.*

Démonstration. — Il est immédiat que le foncteur $A/\varphi : A/X \longrightarrow A/Y$ envoie les dégénérescences sur des dégénérescences, ce qui prouve l'assertion (i). On suppose à présent que φ_a est une injection, et on considère une section non dégénérée u de X

au-dessus de a. Si $\varphi_a(u)$ est une section dégénérée de Y au-dessus de a, alors en vertu du corollaire 8.1.10, il existe un carré commutatif dans $\widehat{A}$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\pi} & a' \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ X & \xrightarrow[\varphi]{} & Y \end{array}$$

dans lequel le morphisme π est une flèche de A_- qui n'est pas un isomorphisme. L'axiome Sq3 assure l'existence d'une section σ de π. On obtient dès lors les égalités suivantes :

$$\varphi_a(u) = \varphi\, u = u'\,\pi = u'\pi\sigma\pi = \varphi\, u\,\sigma\,\pi = \varphi_a(u\,\sigma\,\pi)\ .$$

L'injectivité de φ_a implique donc l'égalité $u = u\sigma\pi$, ce qui est une contradiction car u est non dégénérée. □

Lemme 8.1.28. — *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A, Y étant normal. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant -1$ tel que $Sk^n X = X$, et tel que pour tout objet a de $A_{\leqslant n}$, l'évaluation de φ en l'objet a soit une application injective. Alors φ est un monomorphisme.*

Démonstration. — Soit a un objet de A, et soient u_0 et u_1 deux sections de X au-dessus de a. Pour $i = 0, 1$, on choisit une décomposition d'Eilenberg-Zilber (π_i, v_i) de u_i, et on note b_i le but de π_i. Comme $X = Sk^n X$, la proposition 8.1.22 implique les inégalités

$$\lambda_A(b_i) \leqslant n \quad , \qquad i = 0,\, 1 \quad ,$$

et donc il résulte du lemme 8.1.27, (ii) que les sections $\varphi_{b_i}(v_i)$, $i = 0, 1$, de Y sont non dégénérées. Autrement dit, $(\pi_i, \varphi_{b_i}(v_i))$ est une décomposition d'Eilenberg-Zilber de $\varphi_a(u_i)$ pour $i = 0, 1$. Par conséquent, si $\varphi_a(u_0) = \varphi_a(u_1)$, *i.e.* si $\varphi\, u_0 = \varphi\, u_1$, comme Y est normal, la proposition 8.1.24 implique l'existence d'un unique morphisme τ de b_0 vers b_1 tel que $\tau\pi_0 = \pi_1$ et $\varphi v_1 \tau = \varphi v_0$. L'application φ_{b_0} étant injective, on a nécessairement l'égalité $v_1\tau = v_0$, d'où les égalités

$$u_0 = v_0\pi_0 = v_1\tau\pi_0 = v_1\pi_1 = u_1\ ,$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 8.1.29. — *Si X est un préfaisceau normal sur A, pour tout pour tout entier n, $n \geqslant -1$, le morphisme d'adjonction*

$$\varepsilon_X : i_{n!}\, i_n^* X \longrightarrow X$$

est un monomorphisme dont l'image est le sous-préfaisceau $Sk^n X$ de X.

Démonstration. — On vérifie immédiatement que $Sk^n\, i_{n!}\, i_n^* X = i_{n!}\, i_n^* X$, ce qui implique que l'image de ε_X dans X est contenue dans $Sk^n\, X$. Comme le foncteur $i_{n!}$ est pleinement fidèle, le morphisme

$$i_n^* \varepsilon_X : i_n^* i_{n!}\, i_n^* X \longrightarrow i_n^* X$$

est un isomorphisme, et donc en vertu du lemme 8.1.28, ε_X est un monomorphisme. D'autre part, on vérifie aussitôt que le crible $A/i_{n!}\, i_n^* X$ de A/X contient la sous-catégorie $(A/X)_{\leqslant n}$, ce qui implique qu'il contient le crible engendré par cette dernière, à savoir $Sk^n(A/X) = A/\, Sk^n\, X$. L'image du morphisme ε_X est donc bien le préfaisceau $Sk^n\, X$. □

8.1.30. — Soit a un objet de A. Le *bord* de a est le préfaisceau $\partial a = Sk^{\lambda_A(a)-1}\, a$. On a donc une inclusion canonique $\ell_a : \partial a \longrightarrow a$.

Un monomorphisme $X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A est *normal* si pour tout objet a de A, toute section de Y au-dessus de a qui ne se factorise pas par X est normale. Cela revient encore à demander que toute section non dégénérée de Y qui ne se factorise pas par X est dominante. Par exemple tout monomorphisme entre préfaisceaux normaux est normal.

Proposition 8.1.31. — *Les monomorphismes normaux sont stables par images directes, compositions transfinies et rétractes.*

Démonstration. — La seule propriété non triviale à vérifier est la stabilité par images directes (on vérifie les autres immédiatement grâce au lemme 8.1.27, (*ii*)).

Considérons un carré cocartésien de préfaisceaux sur A de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ Y & \xrightarrow[v]{} & Y' \end{array}$$

Supposons que le morphisme i est un monomorphisme normal (ce qui implique que i' est un monomorphisme). Nous allons montrer que i' est un monomorphisme normal. Soit a un objet de A, et s' une section non dégénérée de Y' au-dessus de a. Si s' ne se factorise pas par X', alors il existe une section s de Y au-dessus de a qui est envoyée sur s' par le morphisme v (ce qui s'écrit encore $vs = s'$). La section s est non dégénérée (car sinon, la section s' serait dégénérée en vertu du lemme 8.1.27, (*i*)), et elle ne se factorise pas par X. Soit τ un automorphisme de a dans A tel que $s'\tau = s'$. L'application induite par v

$$Y_a - X_a \longrightarrow Y'_a - X'_a$$

étant injective, on obtient $s\tau = s$. Or i étant un monomorphisme normal, la section s est normale et donc dominante. On obtient ainsi l'égalité $\tau = 1_a$, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 8.1.32. — *La classe des préfaisceaux normaux sur une catégorie squelettique est saturée par monomorphismes.*

8.1.33. — On rappelle qu'on dispose d'une suite d'inclusions de foncteurs

$$\varnothing = Sk^{-1} \subset Sk^0 \subset Sk^1 \subset \cdots \subset Sk^n \subset Sk^{n+1} \subset \cdots ,$$

et pour tout préfaisceau X sur A, on a l'égalité

$$X = \underset{n \geqslant -1}{\cup} Sk^n X .$$

Lemme 8.1.34. — *Soient $i : X \longrightarrow Y$ un monomorphisme normal de préfaisceaux sur A, et n un entier, $n \geqslant 0$. On choisit un représentant dans chaque classe d'isomorphisme d'objets non dégénérés (a, s) de A/Y tels que $\lambda_A(a) = n$ et tels que $s : a \longrightarrow Y$ ne se factorise pas par X. Si Σ désigne l'ensemble de ces représentants, on a un carré cocartésien de la forme*

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(a,s) \in \Sigma} \partial a & \longrightarrow & X \cup Sk^{n-1} Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{(a,s) \in \Sigma} a & \longrightarrow & X \cup Sk^n Y \end{array} .$$

Démonstration. — Pour montrer que le carré commutatif ci-dessus est cocartésien, il suffit de vérifier que son évaluation en chaque objet b de A est un carré cocartésien d'ensembles. Si $\lambda(b) < n$, l'évaluation des deux flèches verticales sont des identités, et donc le carré obtenu est trivialement un carré cocartésien. Supposons à présent que $\lambda(b) \geqslant n$. Posons

$$\partial Z = \coprod_{(a,s) \in \Sigma} \partial a \quad \text{et} \quad Z = \coprod_{(a,s) \in \Sigma} a .$$

L'application $Z_b \longrightarrow (X \cup Sk^n Y)_b$ est définie explicitement par $\alpha \longmapsto s\alpha$ pour une flèche $\alpha : b \longrightarrow a$ de A, et (a, s) un élément de Σ. L'intersection de l'image de $Z_b - \partial Z_b$ et de $(X \cup Sk^{n-1} Y)_b$ est vide. Cela revient à affirmer que $s\alpha$ se factorise par X si et seulement si s se factorise par X. Il est en effet évident que si s se factorise par X alors $s\alpha$ se factorise par X. Réciproquement, si $s\alpha = it$ où $t : b \longrightarrow X$ est une section de X au-dessus de b, on peut d'après l'axiome Sq3 choisir une section σ de α. On a alors $s = s\alpha\sigma = it\sigma$. En conclusion, on obtient une application

$$Z_b - \partial Z_b \longrightarrow (X \cup Sk^n Y)_b - (X \cup Sk^{n-1} Y)_b .$$

Le lemme revient ainsi à vérifier que cette dernière est bijective. Montrons l'injectivité. Considérons (a_j, s_j), $j = 0, 1$, deux éléments de Σ, et $\alpha_j : b \longrightarrow a_j$, $j = 0, 1$ deux éléments de Z_b qui ne sont pas dans ∂Z_b. Cette dernière condition implique que les morphismes α_j sont dans A_+. Il s'ensuit que pour $j = 0, 1$, (α_j, s_j) est une décomposition d'Eilenberg-Zilber de $s_j\alpha_j$. Si $s_0\alpha_0 = s_1\alpha_1$, alors en vertu de la proposition 8.1.24, il existe un unique morphisme $\tau : a_0 \longrightarrow a_1$ tel que $\tau\alpha_0 = \alpha_1$, et $s_1\tau = s_0$. Ce morphisme τ est nécessairement un isomorphisme, et comme on a choisi

au plus un représentant de chaque classe d'isomorphisme de sections non dégénérées de Y, on a $a_0 = a_1$ et $s_0 = s_1$. Comme en outre s_0 est dominante, τ doit être une identité, ce qui implique que $\alpha_0 = \alpha_1$. Il reste enfin à vérifier la surjectivité. Soit t une section de $Sk^n Y$ au-dessus de b. En vertu de la proposition 8.1.14, il existe une décomposition d'Eilenberg-Zilber (α', s') de t. Si t n'est pas dans $(X \cup Sk^{n-1} Y)_b$, alors on a nécessairement $\lambda_A(a') = n$ (8.1.16). La section s' est non dégénérée, et elle ne se factorise pas par X. Il existe par conséquent un élément (a, s) de Σ, et un isomorphisme de (a', s') sur (a, s) dans A/Y. Autrement dit, il existe un isomorphisme τ de a' sur a tel que $s\tau = s'$. L'élément correspondant à $\alpha = \tau\alpha'$ dans $Z_b - \partial Z_b$ est bien envoyé sur $t = s\alpha$. □

Proposition 8.1.35. — *Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des inclusions $\partial a \rightarrowtail a$, $a \in \mathrm{Ob}\, A$. La classe des monomorphismes normaux s'identifie à la classe de morphismes $\mathsf{Cell}(\mathcal{M}) = l(r(\mathcal{M}))$.*

Démonstration. — Tout préfaisceau représentable sur A étant normal, les éléments de $\mathcal{M}$ sont des monomorphismes normaux, d'où il résulte par la proposition 8.1.31 et par le lemme 8.1.34 que la classe des monomorphismes normaux s'identifie à $\mathsf{Cell}(\mathcal{M})$. En particulier, $\mathsf{Cell}(\mathcal{M})$ est stable par rétractes, ce qui donne l'égalité $\mathsf{Cell}(\mathcal{M}) = l(r(\mathcal{M}))$. □

Définition 8.1.36. — On dit qu'une catégorie squelettique A est *normale* si tous les préfaisceaux sur A sont normaux.

Proposition 8.1.37. — *Soit A une catégorie squelettique. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des inclusions de la forme $\partial a \rightarrowtail a$, $a \in \mathrm{Ob}\, A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La catégorie A est une catégorie squelettique normale.*

(ii) *Tout monomorphisme de préfaisceaux sur A est normal.*

(iii) *La classe de morphismes $\mathsf{Cell}(\mathcal{M})$ est la classe des monomorphismes de préfaisceaux sur A.*

(iv) *L'ensemble de morphismes $\mathcal{M}$ est un modèle cellulaire de $\widehat{A}$.*

(v) *Les objets de A n'ont pas d'automorphismes non triviaux.*

Démonstration. — Tout monomorphisme entre préfaisceaux normaux étant normal, il est immédiat que (i) et (ii) sont équivalentes. L'équivalence de (ii), (iii) et (iv) est une conséquence immédiate de la proposition 8.1.35. Il est clair que (v) implique (i). Il reste donc à démontrer que (i) implique (v). Considérons un objet a de A, et G le groupe des automorphismes de a dans A. Désignons par a/G le quotient du préfaisceau a par l'action de G, et notons $p : a \longrightarrow a/G$ la projection canonique. La section p de a/G au-dessus de a est non dégénérée. En effet, considérons un morphisme $\pi : a \longrightarrow b$ dans A_-, et un morphisme $v : b \longrightarrow a/G$ tels que $p = v\pi$. Comme p est un épimorphisme, il existe alors un morphisme $u : b \longrightarrow a$ tel que $pu = v$. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(a, a/G)$ est par définition le quotient de l'ensemble $\mathrm{Hom}_A(a, a)$ par l'action de

G définie en composant les éléments de G (à gauche). L'égalité $pu\pi = p$ implique donc qu'il existe un automorphisme g de a tel que $u\pi = g$. En particulier, $u\pi$ doit être un isomorphisme, et par suite π un monomorphisme. Mais d'après l'axiome Sq3, π est aussi un épimorphisme scindé, ce qui implique que π est un isomorphisme. D'après le corollaire 8.1.12, cela montre bien que la section p est non dégénérée. Or il est évident que tout élément de G définit un automorphisme de (a, p) dans $A/a/G$. Par conséquent, d'après le corollaire 8.1.25, pour que a/G soit un préfaisceau normal sur A, il faut que le groupe G soit trivial. □

Remarque 8.1.38. — Soient A une catégorie squelettique, et $\mathbb{G}$ un préfaisceau de groupes sur A. Pour une représentation X de $\mathbb{G}$ et un entier $n \geqslant 0$, on définit $Sk^n X$ par le carré cartésien ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} Sk^n X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sk^n(\mathbb{G}\backslash X) & \longrightarrow & \mathbb{G}\backslash X \end{array}$$

Cette construction permet de prouver que si X est un $\mathbb{G}$-torseur sur son quotient, et si $\mathbb{G}\backslash X$ est un préfaisceau normal sur A, alors X est localement cofibrante. En effet, on a par le lemme 8.1.34 des carré cocartésiens de la forme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(a,s)\in\Sigma} \partial a & \longrightarrow & Sk^{n-1}(\mathbb{G}\backslash X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{(a,s)\in\Sigma} a & \longrightarrow & Sk^n(\mathbb{G}\backslash X) \end{array} ,$$

ce qui donne par image inverse le long de $X \longrightarrow \mathbb{G}\backslash X$ des carrés cocartésiens de la forme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(a,s)\in\Sigma} \partial a \times \mathbb{G} & \longrightarrow & Sk^{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{(a,s)\in\Sigma} a \times \mathbb{G} & \longrightarrow & Sk^n X \end{array} .$$

Comme X est la réunion de ses squelettes $Sk^n X$, $n \geqslant -1$, cela implique que X est une représentation localement cofibrante. On démontre de la même manière que si $i : X \longrightarrow Y$ est un morphisme entre représentations de $\mathbb{G}$ tel que X et Y soient des $\mathbb{G}$-torseurs sur leurs quotients et que le morphisme de $\mathbb{G}\backslash X$ vers $\mathbb{G}\backslash Y$ soit un monomorphisme normal, alors i est une cofibration locale. Il en résulte par la proposition 7.1.13 que si A est une catégorie squelettique normale, alors les représentations localement cofibrantes de $\mathbb{G}$ sont exactement les représentations qui sont des $\mathbb{G}$-torseurs sur leurs quotients, et qu'un morphisme de représentations localement cofibrantes est une cofibration locale si et seulement si c'est un monomorphisme.

8.2. Catégories squelettiques régulières

8.2.1. — Soit A une catégorie squelettique. Un préfaisceau X sur A est *régulier* si toute section non dégénérée de X au-dessus d'un objet de A est un monomorphisme. Il est immédiat que tout préfaisceau régulier est normal.

Dire qu'un préfaisceau X sur A est régulier équivaut encore à affirmer que pour tout préfaisceau représentable a sur A, et tout morphisme $u : a \longrightarrow X$, l'image de u est représentable (cela se déduit de l'existence d'une décomposition d'Eilenberg-Zilber de u). On vérifie que tout sous-objet d'un préfaisceau régulier sur A est lui-même régulier. Ces remarques permettent de prouver la proposition suivante.

Proposition 8.2.2. — *Soit A une catégorie squelettique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Tout préfaisceau représentable sur A est régulier.*

(ii) *Le bord de tout préfaisceau représentable sur A est régulier.*

(iii) *Toutes les flèches de A_+ sont des monomorphismes de A.*

(iv) *L'image de tout morphisme entre préfaisceaux représentables sur A est représentable.*

Définition 8.2.3. — Une catégorie squelettique A est *prérégulière* si tout préfaisceau représentable sur A est régulier.

Une catégorie squelettique A est *régulière* si elle est normale et prérégulière.

Remarque 8.2.4. — Le critère (*iii*) de la proposition 8.2.2 implique qu'une petite catégorie A admet au plus une structure de catégorie squelettique prérégulière (au choix de l'application λ_A près).

Exemple 8.2.5. — La catégorie des simplexes Δ est une catégorie squelettique régulière.

Proposition 8.2.6. — *Si A est une catégorie squelettique régulière, alors pour tout préfaisceau X sur A, la catégorie A/X est une catégorie squelettique régulière.*

Démonstration. — Soit X un préfaisceau sur une petite catégorie A. On sait que A/X est squelettique en vertu du lemme 8.1.6, et il est clair que si A est normale, il en est de même de A/X. D'autre part, un morphisme de A/X est un monomorphisme si et seulement si son image dans A en est un. Cela implique l'assertion. □

Remarque 8.2.7. — Les catégories squelettiques régulières sont aussi stables par produits finis.

Proposition 8.2.8. — *Soit A une catégorie squelettique prérégulière. Pour qu'une classe de préfaisceaux sur A saturée par monomorphismes contienne tous les préfaisceaux normaux sur A, il suffit qu'elle contienne tous les préfaisceaux représentables sur A.*

Démonstration. — Soit C une classe d'objets de $\widehat{A}$ saturée par monomorphismes et contenant les objets de A. Il résulte de l'argument du petit objet et de la proposition 8.1.37 que pour montrer que tout préfaisceau normal sur A est dans C, il suffit de vérifier que pour tout objet a de A, ∂a est dans C. On va en fait vérifier que tout sous-objet de a est dans C, en procédant par récurrence sur $n = \lambda_A(a)$. Si $n = 0$, les seuls sous-objets de a sont $\varnothing$ et a, et donc l'assertion est trivialement vérifiée. Dans le cas général, si K est un sous-objet de a, $K \neq a$, on déduit de 8.2.2, (iv), qu'il existe un ensemble I, et une famille a_i, $i \in I$, de sous-objets représentables de a telle que pour tout i, $\lambda_A(a_i) < n$, et telle que $K = \cup_{i\in I} a_i$. On peut munir I d'un bon ordre et définir un foncteur $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ par $i \longmapsto \cup_{i'\leqslant i} a_{i'}$. On va montrer par récurrence transfinie que pour tout i dans I, F_i est dans C. Si i est l'élément initial, F_i est représentable, et donc cette condition est vérifiée par hypothèse. Sinon, on remarque que si pour tout $i' < i$, $F_{i'}$ est dans C, alors $\varinjlim_{i'<i} F_{i'} = \cup_{i'<i} a_{i'}$ est aussi dans C, et que le carré suivant est cocartésien.

$$\begin{array}{ccc} \cup_{i'<i} a_{i'} \cap a_i & \longrightarrow & \cup_{i'<i} a_{i'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_i & \longrightarrow & F_i \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence sur n, vu que $\lambda_A(a_i) < n$, $\cup_{i'<i} a_{i'} \cap a_i$ est dans C, et par conséquent, il en est de même de F_i. On en déduit que $\varinjlim F = K$ est dans C, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 8.2.9. — *Soit A une catégorie squelettique régulière. Alors pour tout préfaisceau X sur A, tout A/X-localisateur est régulier.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 8.2.6, il suffit de montrer que tout A-localisateur est régulier. Or cela résulte immédiatement de l'exemple 3.4.10, et des propositions 3.4.22 et 8.2.8. □

Définition 8.2.10. — Soit A une petite catégorie. Un *A-prélocalisateur* est une classe W de flèches de $\widehat{A}$ vérifiant les axiomes suivants.

PL1 W est faiblement saturée et stable par rétractes.

PL2 Pour tout diagramme commutatif dans $\widehat{A}$ du type

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xleftarrow{\alpha_1} & A_0 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ B_1 & \xleftarrow[\beta_1]{} & B_0 & \xrightarrow[\beta_2]{} & B_2 \end{array} \quad ,$$

dans lequel α_1 et β_1 sont des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 sont des éléments de W, la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \longrightarrow B_1 \amalg_{B_0} B_2$ est un élément de W.

PL3 Si λ est un ensemble bien ordonné, $X, Y : \lambda \longrightarrow \widehat{A}$ une paire de foncteurs, et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de foncteurs tels que pour tous $\nu \leqslant \mu \in \lambda$, les

flèches naturelles $X(\nu) \longrightarrow X(\mu)$ et $Y(\nu) \longrightarrow Y(\mu)$ soient des monomorphismes, $\varphi(\mu) : X(\mu) \longrightarrow Y(\mu)$ étant dans W, alors $\varinjlim \varphi : \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$ est un élément de W.

En d'autres termes, un A-prélocalisateur est une classe de flèches faiblement saturée de $\widehat{A}$, qui est saturée par monomorphismes comme classe d'objets de la catégorie des flèches de $\widehat{A}$ (cf. 1.1.14).

Exemple 8.2.11. — En vertu du lemme 1.4.15, tout A-localisateur est un A-prélocalisateur (l'axiome PL1 résulte du fait que tout A-localisateur est fortement saturé).

Exemple 8.2.12. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Alors pour toute petite catégorie A, $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$ est un A-prélocalisateur (l'axiome PL1 étant trivialement vérifié (cf. 4.2.4 pour la stabilité par rétractes), cela résulte de [**96**, corollaires 2.3.13 et 2.3.16]).

Remarque 8.2.13. — On vérifie que tout A-prélocalisateur W vérifie les axiomes L1 et L3 de la définition de A-localisateur (1.4.1). Par conséquent, pour que W soit un A-localisateur, il faut et il suffit qu'il satisfasse à l'axiome L2 (ou bien l'une des conditions énoncées dans le lemme 1.4.13).

Lemme 8.2.14. — *Soient A une catégorie squelettique régulière, B une petite catégorie, W un B-prélocalisateur, Φ et Ψ deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, de la catégorie des préfaisceaux sur A vers celle des préfaisceaux sur B, et α un morphisme de foncteurs de Φ vers Ψ. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout préfaisceau représentable a sur A, le morphisme*

$$\alpha_a : \Phi(a) \longrightarrow \Psi(a)$$

est dans W.

(b) *Pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme*

$$\alpha_X : \Phi(X) \longrightarrow \Psi(X)$$

est dans W.

Démonstration. — Il résulte aussitôt du lemme 1.1.15 que la classe des préfaisceaux X sur A tels que α_X soit dans W est saturée par monomorphismes. L'assertion résulte donc de la proposition 8.2.8. □

Proposition 8.2.15. — *Soit A une catégorie squelettique régulière. On considère une donnée homotopique élémentaire sur A,*

$$\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma) \ ,$$

et un A-prélocalisateur W tels que pour tout objet a de A, le morphisme

$$\sigma_a : I \otimes a \longrightarrow a$$

soit un élément de W. *Alors* W *est un* A*-localisateur, et pour tout préfaisceau* X *sur* A, *le morphisme*

$$\sigma_X : I \otimes X \longrightarrow X$$

est une W*-équivalence.*

Démonstration. — En vertu du lemme 1.4.13, il suffit de montrer la seconde assertion, à savoir que pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme σ_X est dans W. Le lemme 8.2.14, appliqué au cas où $A = B$, $\Phi = I$ et $\Psi = 1_{\widehat{A}}$, permet de conclure. □

Corollaire 8.2.16. — *Soit* A *une catégorie squelettique régulière. On considère une donnée homotopique élémentaire sur* A

$$\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma) \ ,$$

et un localisateur fondamental $\mathcal{W}$, *tels que pour tout objet* a *de* A, *le morphisme*

$$\sigma_a : I \otimes a \longrightarrow a$$

soit une $\mathcal{W}$*-équivalence. Alors* A *est une* $\mathcal{W}$*-catégorie test locale, et pour tout préfaisceau* X *sur* A, *le morphisme*

$$\sigma_X : I \otimes X \longrightarrow X$$

est une $\mathcal{W}$*-équivalence.*

Démonstration. — Vu que $i_A^{-1}\mathcal{W}$ est un A-prélocalisateur (8.2.12), l'assertion résulte du corollaire 4.2.3 et de la proposition ci-dessus. □

Lemme 8.2.17. — *Soit* A *une catégorie squelettique régulière. On suppose que* A *est une* $\mathcal{W}_\infty$*-catégorie test locale. Pour qu'un* A*-localisateur* W *coïncide avec celui des* ∞*-équivalences, il faut et il suffit que toute* W*-équivalence soit une* ∞*-équivalence et que tout monomorphisme de préfaisceaux représentables soit une* W*-équivalence.*

Démonstration. — Il est clair que c'est une condition nécessaire. Réciproquement, considérons un A-localisateur W, et supposons que toute W-équivalence est une ∞-équivalence et que tout monomorphisme de préfaisceaux représentables est une W-équivalence. On remarque grâce aux axiomes Sq2 et Sq3 que toute flèche de A est dans W. Enfin, comme W est régulier (8.2.9), on en déduit grâce à la proposition 6.4.26 que toute ∞-équivalence est une W-équivalence. □

Théorème 8.2.18. — *Soit* A *une* $\mathcal{W}_\infty$*-catégorie test locale. On désigne par* W_∞ *la classe des* ∞*-équivalences dans* $\widehat{A}$. *On suppose que* A *est squelettique régulière, et on suppose donnée une structure homotopique* $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ *telle que la classe des équivalences faibles associée soit* W_∞. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Tout morphisme de préfaisceaux représentables sur* A *est une équivalence faible absolue.*

(b) *Tout monomorphisme entre préfaisceaux représentables est une extension anodine.*

(c) *La structure homotopique* $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ *est complète.*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est immédiate (proposition 1.3.56). Si la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ est complète, cela signifie en vertu de la proposition 1.3.61 que les équivalences faibles absolues sont simplement les équivalences faibles (en l'occurrence les ∞-équivalences), et donc, en particulier, toute flèche entre préfaisceaux représentables est alors une équivalence faible absolue, ce qui prouve que (c) implique (a). Il reste ainsi à vérifier que (b) implique (c). Supposons que tout monomorphisme de A soit une équivalence faible absolue. Pour chaque préfaisceau X sur A, on considère la structure homotopique induite $(\mathfrak{I}/X, \mathsf{An}/X)$ sur X (cf. 1.3.54). On remarque qu'une flèche de $\widehat{A}/X$ est une ∞-équivalence si et seulement si son image dans $\widehat{A}$ en est une. On en déduit que toute X-équivalence (*i.e.* toute équivalence faible de $\widehat{A}/X$ au sens de la structure homotopique $(\mathfrak{I}/X, \mathsf{An}/X)$) est une ∞-équivalence (cf. 1.3.54). Le lemme 8.2.17 implique donc, grâce à la proposition 8.2.6, que toute ∞-équivalence au-dessus de X est une X-équivalence. Autrement dit, les ∞-équivalences de $\widehat{A}$ sont toutes des équivalences faibles absolues, ce qui achève la démonstration en vertu de la proposition 1.3.61. □

Corollaire 8.2.19. — *Soit A une catégorie squelettique régulière. On considère une donnée homotopique $(\mathfrak{I}, S)$ sur A (avec $\mathfrak{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$) vérifiant les hypothèses suivantes.*

(a) *Tout élément de S est une ∞-équivalence.*

(b) *Tout monomorphisme de A est dans $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ (pour cela, il suffit que tout monomorphisme de A soit dans S).*

(c) *Pour tout objet a de A, le morphisme $\sigma_a : I \otimes a \longrightarrow a$ est une ∞-équivalence* (i.e. *la catégorie $A/(I \otimes a)$ est ∞-asphérique*).

Alors la catégorie des préfaisceaux sur A admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les ∞-équivalences. Les cofibrations sont engendrées par l'ensemble $\mathcal{M}$ des inclusions canoniques de la forme $\partial a \longrightarrow a$, $a \in \mathrm{Ob}\, A$, et les cofibrations triviales par les éléments de $\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ (cf. 1.3.12).

Démonstration. — L'hypothèse (c) implique que A est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale en vertu du corollaire 8.2.16, ce qui prouve aussi la première assertion (corollaire 4.2.18 et théorème 4.4.30). Désignons par W la classe des équivalences faibles définie par la donnée homotopique $(\mathfrak{I}, S)$. En vertu des corollaires 1.4.18 et 8.2.16, les hypothèses (a) et (c) impliquent que toute W-équivalence est une ∞-équivalence. L'hypothèse (b) et le lemme 8.2.17 impliquent donc que W est la classe des ∞-équivalences. Mais l'hypothèse (b) implique en particulier que tout monomorphisme de A est une extension

anodine, et donc le théorème précédent montre que la donnée homotopique $(\mathfrak{I}, S)$ est complète, ce qui achève la démonstration. □

Scholie 8.2.20. — Une partie des travaux de Clemens Berger [**11**] peuvent ête vus du point de vue des catégories test squelettiques régulières. Soit Θ la catégorie cellulaire de Joyal (que l'on peut voir comme la catégorie opposée de la catégorie des ω-disques ; voir [**11**, proposition 2.2]). Nous renvoyons le lecteur à *loc. cit.* pour une définition précise de Θ, et nous nous contenterons de dire ici que cette catégorie permet de coder la combinatoire sous-jacente à la théorie des catégories supérieures ; voir aussi [**4, 5, 12, 120**]. Les préfaisceaux sur Θ sont appelés les *ensembles cellulaires*. Il résulte facilement de [**11**, lemme 2.4] que Θ est une catégorie squelettique régulière. La description combinatoire du produit cartésien de deux préfaisceaux représentables sur Θ donnée par [**11**, proposition 2.8] permet de prouver que Θ est une catégorie totalement asphérique. Comme elle admet un objet final, c'est une catégorie test ; voir 4.3.4. On en déduit que la catégorie des ensembles cellulaires admet une structure de catégorie de modèles fermée propre dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les ∞-équivalences. On peut ainsi retrouver[(1)] une construction purement combinatoire de la structure de catégorie de modèles fermée de [**11**, théorème 3.9] (la description explicite d'un ensemble générateur des cofibrations triviales résultant essentiellement du théorème 8.2.18). En sortant du cadre des catégories squeletiques, on peut interpréter les résultats de [**11**] en termes de catégories test. En effet, Berger associe à toute ω-opérade A une catégorie Θ_A. Pour tout morphisme de ω-opérades $f : A \longrightarrow B$, on a un foncteur canonique associé $f : \Theta_A \longrightarrow \Theta_B$; voir [**11**, définition 1.15]. En outre, si $A = \omega$ désigne l'ω-opérade finale, on a $\Theta_\omega = \Theta$. Il est alors possible, en s'inspirant de la preuve de [**11**, théorème 4.14], de prouver que pour toute ω-opérade A qui est contractile au sens de [**11**, définition 1.20], le foncteur $p : \Theta_A \longrightarrow \Theta$ est $\mathcal{W}_\infty$-excellent et que Θ_A est totalement ∞-asphérique. Comme p est en particulier localement ∞-asphérique, il s'en suit en vertu de [**96**, corollaire 1.7.15] que Θ_A est une catégorie test stricte. Cela permet d'obtenir une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des ensembles A-cellulaires (*i.e.* des préfaisceaux sur Θ_A), et donc de répondre affirmativement à l'une des questions posées par Berger ; voir [**11**, remarque 4.20].

8.2.21. — Soit A une catégorie squelettique prérégulière. Si X est un préfaisceau régulier sur A, on désigne par ξX l'ensemble des sous-objets représentables de X,

(1) La preuve de [**11**, théorème 3.9] utilise un foncteur de réalisation topologique des ensembles cellulaires et la théorie des quasi-fibrations topologiques. Il est remarquable que la théorie des quasi-fibrations topologiques est un ingrédient essentiel dans la preuve originale du théorème B de Quillen et que la preuve du théorème 8.2.18 utilise de manière essentielle le théorème B en question.

ordonné par l'inclusion. Si $u : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de préfaisceaux réguliers sur A, on lui associe une application croissante

$$\xi u : \xi X \longrightarrow \xi Y \quad , \qquad a \subset X \longmapsto u(a) \subset Y$$

(où $u(a)$ désigne l'image du morphisme composé $a \longrightarrow X \longrightarrow Y$, laquelle est représentable puisque Y est régulier). Cette construction définit un foncteur de la catégorie des préfaisceaux réguliers sur A vers la catégorie des ensembles ordonnés. En restreignant ce dernier aux préfaisceaux représentables, on obtient le *foncteur de subdivision barycentrique*

$$\xi : A \longrightarrow \mathit{Cat} \quad .$$

Ce foncteur admet un prolongement unique en un foncteur commutant aux petites limites inductives $\xi_!$, lequel admet un adjoint à droite ξ^*.

$$\xi_! : \widehat{A} \longrightarrow \mathit{Cat} \qquad \xi^* : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{A}$$

On définit enfin un foncteur

$$\sigma : A \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

en composant ξ avec le foncteur nerf. Comme ci-dessus, le foncteur σ admet un unique prolongement en un foncteur commutant aux petites limites inductives noté $Sd = \sigma_!$, lequel admet un adjoint à droite $Ex = \sigma^*$.

$$Sd : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{\Delta} \qquad Ex : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$$

Il va de soi que les notations employées dans ce paragraphe sont compatibles avec celles de 2.1.26.

Lemme 8.2.22. — *Pour tout préfaisceau régulier X sur A, si $\psi_X : \xi X \longrightarrow \widehat{A}$ désigne le foncteur défini par $\psi_X(a \subset X) = a$, alors le morphisme évident $\varinjlim \psi_X \longrightarrow X$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le foncteur $\psi_X : \xi X \longrightarrow \widehat{A}$ se factorise par le foncteur canonique $\varphi_X : A/X \longrightarrow \widehat{A}$, défini par $(a, u : a \longrightarrow X) \longmapsto a$,

$$\xi X \longrightarrow A/X \xrightarrow{\varphi_X} \widehat{A}$$

et comme le morphisme canonique $\varinjlim \varphi_X \longrightarrow X$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que le foncteur $\xi X \longrightarrow A/X$ est cofinal, autrement dit, que pour tout objet $(a, u : a \longrightarrow X)$ de A/X, la catégorie $(a, u)\backslash \xi X$ est connexe. Or le préfaisceau X est régulier, ce qui implique que $\operatorname{Im} u$ est un préfaisceau représentable sur A, et la catégorie $(a, u)\backslash \xi X$ admet un objet initial, à savoir le couple $(\operatorname{Im} u \subset X, a \longrightarrow \operatorname{Im} u)$, où $a \longrightarrow \operatorname{Im} u$ désigne l'épimorphisme canonique, ce qui prouve le lemme. □

Proposition 8.2.23. — *Pour tout préfaisceau régulier X sur A, on a des isomorphismes canoniques $Sd\, X \simeq N\, \xi_! X \simeq N\, \xi X$.*

Démonstration. — L'assertion étant trivialement vérifiée lorsque X est représentable, il suffit en vertu du lemme précédent, de prouver que les foncteurs ξ et $N\,\xi_!$ commutent aux limites inductives du type évoqué dans ce lemme. Si B est une petite catégorie, et si F_B désigne le foncteur de B dans $\boldsymbol{Cat}$ qui associe à b la catégorie B/b, on sait que $\varinjlim F_B = B$ et que $\varinjlim N\,F_B = N\,B$ (voir 3.2.10 pour la seconde limite inductive). Pour conclure, il suffit à présent de constater que pour $B = \xi X$, on a $\xi\psi_X = F_{\xi X}$. □

Corollaire 8.2.24. — *Pour tout préfaisceau représentable a sur A, le foncteur $\xi_!\partial a \longrightarrow \xi_! a$ est une immersion ouverte.*

Démonstration. — Les sous-objets d'un préfaisceau régulier étant réguliers, le bord de a est régulier. Par conséquent, en vertu de la proposition précédente (et de la pleine fidélité du foncteur nerf), $\xi_!\partial a = \xi\partial a$ est le sous-ensemble ordonné de ξa formé des $a' \subset a$ tels que $a' \neq a$. Il est clair que cela forme un crible de ξa. □

Corollaire 8.2.25. — *Le foncteur $\xi_! : \widehat{A} \longrightarrow \boldsymbol{Cat}$ envoie les monomorphismes normaux sur des immersions ouvertes.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition 8.1.35, du lemme 5.1.10 et du corollaire 8.2.24. □

Corollaire 8.2.26. — *Le foncteur $Sd : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ envoie les monomorphismes normaux des monomorphismes.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition 8.1.35, de la proposition 8.2.23 et du corollaire 8.2.24. □

8.2.27. — On suppose à présent que A est une catégorie squelettique régulière.

Soit a un objet de A. On définit un foncteur

$$\pi_a : A/a \longrightarrow \xi a$$

par $\pi_a(a', \alpha : a' \longrightarrow a) = \alpha(a')$ (où $\alpha(a')$ désigne toujours l'image de α). Cette construction est naturelle en a, et par conséquent, on peut prolonger $N\,\pi$ par limites inductives, ce qui nous fournit un morphisme de foncteurs

$$N\,i_A \longrightarrow Sd\ .$$

Proposition 8.2.28. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Pour tout préfaisceau X sur A, le morphisme $N\,A/X \longrightarrow Sd\,X$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Démonstration. — Les foncteurs $N\,i_A$ et Sd commutent aux petites limites inductives (voir 3.2.10 pour le premier) et respectent les monomorphismes (comme A est régulière, tout monomorphisme est normal, ce qui permet d'appliquer le corollaire précédent). En vertu du lemme 8.2.14, il suffit donc de prouver l'assertion lorsque X est représentable. Or dans ce cas, $N\,A/X$ et $Sd\,X = N\,\xi X$ sont contractiles, ce qui permet de conclure. □

Proposition 8.2.29. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et soit A une catégorie squelettique régulière. Pour que A soit une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, il faut et il suffit que le foncteur de subdivision barycentrique $\xi : A \longrightarrow \mathbf{Cat}$ soit un $\mathcal{W}$-foncteur test local. En outre, si c'est le cas, les foncteurs Sd et Ex respectent les $\mathcal{W}$-équivalences. Enfin, si de plus $\mathcal{W}$ est accessible, le couple de foncteurs adjoints*

$$Sd : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad et \quad Ex : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$$

est une adjonction de Quillen (voire une équivalence de Quillen si A est $\mathcal{W}$-asphérique) pour les structures de catégorie de modèles associées à $\mathcal{W}$.

Démonstration. — En vertu du lemme 4.1.17 et du corollaire 8.2.25, le foncteur ξ^* envoie les petites catégories admettant un objet final sur des objets injectifs de $\widehat{A}$. Si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, il résulte donc de la proposition 4.2.3 que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $\xi^* C$ est localement $\mathcal{W}$-asphérique, ce qui prouve que ξ est un $\mathcal{W}$-foncteur test local grâce au théorème 4.1.26. La réciproque résulte de la définition même des foncteurs test locaux. Supposons à présent que A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Le fait que le foncteur Ex respecte les $\mathcal{W}$-équivalences est une application directe de la proposition 4.3.12, avec $B = \Delta$ et $i = \sigma$ (il résulte du corollaire 8.2.24, de la pleine fidélité du foncteur nerf et du lemme 4.1.17 appliqué à $i = \xi$ que $Ex\, \Delta_1 = \xi^* \Delta_1$ est un objet injectif de $\widehat{A}$ (ce qui implique qu'il est localement asphérique), et pour tout objet a de A, l'ensemble ordonné ξa admet a comme élément maximal, ce qui implique que son nerf $Sd\, a$ est contractile, et permet de vérifier les hypothèses faites au numéro 4.3.10). Il est clair en vertu de la proposition 8.2.28 que le foncteur Sd respecte les équivalences faibles. Pour achever la démonstration, il faut encore vérifier que le foncteur Sd respecte les monomorphismes, ce qui est en fait déjà connu (8.1.37 et 8.2.26). Le fait que le foncteur Sd soit une équivalence de Quillen à gauche lorsque A est asphérique résulte facilement de la proposition 8.2.28. □

8.3. Ensembles simpliciaux symétriques

8.3.1. — On rappelle que les ensembles simpliciaux symétriques sont les préfaisceaux sur la catégorie Υ des ensembles finis de la forme $\Upsilon_n = \{0, \ldots, n\}$ pour $n \geqslant 0$. On sait déjà que Υ est une catégorie squelettique (prérégulière). La catégorie Υ est aussi une catégorie test stricte ; voir 4.1.20. Nous avons donc sur $\widehat{\Upsilon}$ une structure de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et les cofibrations, les monomorphismes. Nous allons construire une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des ensembles simpliciaux symétriques dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et les cofibrations, les monomorphismes normaux (cf. 8.1.30).

On note

$$v : \Delta \longrightarrow \Upsilon \quad , \qquad \Delta_n \longmapsto \Upsilon_n$$

le foncteur d'inclusion évident. Il induit un foncteur image inverse

$$v^* : \widehat{\Upsilon} \longrightarrow \widehat{\Delta} ,$$

lequel admet pour adjoint à gauche l'extension de Kan à gauche de v, notée comme il se doit

$$v_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Upsilon} .$$

Proposition 8.3.2. — *Pour tout entier $n \geqslant 0$, le foncteur $v_!$ envoie l'inclusion $\partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ sur l'inclusion $\partial\Upsilon_n \longrightarrow \Upsilon_n$.*

Démonstration. — L'assertion est triviale dans le cas $n = 1$, ce qui implique par le lemme 2.1.10 que le foncteur $v_!$ respecte les monomorphismes. On en déduit que la flèche canonique de $\partial\Delta_n$ vers $\partial\Upsilon_n$ est un monomorphisme. Or il est immédiat que cette dernière est un épimorphisme. □

Corollaire 8.3.3. — *Le foncteur $v_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Upsilon}$ envoie les monomorphismes sur des monomorphismes normaux.*

Démonstration. — Cela résulte de l'argument du petit objet et des propositions 8.1.35 et 8.3.2. □

Lemme 8.3.4. — *Soient $m, n \geqslant 0$ deux entiers. On a une application fonctorielle en Δ_m qui admet une section fonctorielle canonique*

$$\varsigma_m : \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(Sd\,\Delta_m, \Delta_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Upsilon}(\Upsilon_m, \Upsilon_n) .$$

Démonstration. — Tout morphisme d'ensembles simpliciaux de $Sd\,\Delta_m$ vers Δ_n est le nerf d'une unique application croissante $v : \xi\Delta_m \longrightarrow \Delta_n$. On associe à v une application $u : \Upsilon_m \longrightarrow \Upsilon_n$ définie par la formule $u(i) = v(\{i\})$. Cela définit l'application ς_m annoncée. La vérification de la fonctorialité revient à constater que pour toute application croissante $\varphi : \Delta_p \longrightarrow \Delta_m$, on a l'identification $v(\{\varphi(i)\}) = v(\varphi(\{i\}))$ pour tout i dans Υ_p.

Pour construire une section fonctorielle en Δ_m de l'application précédente, on procède comme suit. Toute application $u : \Upsilon_m \longrightarrow \Upsilon_n$ induit une application croissante $\xi\Delta_m \longrightarrow \xi\Delta_n$ définie par $S \longmapsto u(S)$. En composant celle-ci avec l'application naturelle $\xi\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ (cf. 2.1.26), on associe de la sorte à u un morphisme v de $Sd\,\Delta_m$ vers Δ_n. Si w désigne l'image de v par l'application ς_m, on a par construction $w(i) = \max\{u(i)\} = u(i)$ pour tout i dans Υ_m. La fonctorialité de cette section en Δ_m est immédiate. □

Proposition 8.3.5. — *Pour tout entier $n \geqslant 0$, $v^*\Upsilon_n$ est un objet injectif dans la catégorie des ensembles simpliciaux.*

Démonstration. — Il résulte du fait que les foncteurs Sd et $v_!$ commutent aux limites inductives, de la proposition 8.3.2 et du lemme 8.3.4 que l'on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(Sd\,\Delta_m, \Delta_n) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Upsilon}}(\Upsilon_m, \Upsilon_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(Sd\,\partial\Delta_m, \Delta_n) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Upsilon}}(\partial\Upsilon_m, \Upsilon_n) \end{array}$$

dont les flèches horizontales admettent des sections. Or on veut montrer que la flèche verticale de droite est une surjection. Pour cela, il suffit de montrer que la flèche verticale de gauche est une surjection. Autrement dit, nous sommes ramenés à prouver que $Ex\,\Delta_n$ est un objet injectif dans la catégorie des ensembles simpliciaux. Cela résulte immédiatement du lemme 4.1.17 et du corollaire 8.2.25. □

Corollaire 8.3.6. — *Le foncteur $v : \Delta \longrightarrow \Upsilon$ est ∞-asphérique.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 4.1.19, du corollaire 8.3.3 et de la proposition 8.3.5. On peut aussi en donner une preuve plus élémentaire ; voir [**96**, preuve de 1.7.25]. □

8.3.7. — Pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $\Upsilon_n^k = v_!\Lambda_n^k$. On remarque qu'il existe des isomorphismes $\Upsilon_n^0 \simeq \Upsilon_n^k$.

Proposition 8.3.8. — *La catégorie des ensembles simpliciaux symétriques admet une structure de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et dont les cofibrations sont les monomorphismes normaux. Les cofibrations sont engendrées par l'ensemble des inclusions de la forme*

$$\partial\Upsilon_n \longrightarrow \Upsilon_n \quad , \qquad n \geqslant 0 \ ,$$

et les cofibrations triviales sont engendrées par les morphismes de la forme

$$\Upsilon_n^0 \longrightarrow \Upsilon_n \quad , \qquad n \geqslant 1 \ .$$

En outre, les foncteurs $v_!$ et v^* sont des équivalences de Quillen à gauche.

Démonstration. — En vertu des corollaires 8.3.3 et 2.1.22, le foncteur $v_!$ respecte les ∞-équivalences. La proposition 4.2.23 et le corollaire 8.3.6 impliquent qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux symétriques est une ∞-équivalence si et seulement si son image par v^* est une ∞-équivalence d'ensembles simpliciaux. La proposition 1.4.23 appliquée au couple de foncteurs adjoints $(v_!, v^*)$ et la proposition 8.3.2 donnent donc cette structure de catégorie de modèles fermée (la propreté résulte du fait que $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental propre et d'une double application du corollaire 1.5.21). Pour vérifier que les foncteurs $v_!$ et v^* sont des équivalences de Quillen à gauche, il suffit de vérifier que c'est le cas de v^*, ce qui résulte facilement de la proposition 4.2.24. □

Remarque 8.3.9. — Pour la structure de catégorie de modèles ci-dessus, les objets cofibrants sont donc les préfaisceaux normaux, et les cofibrations entre objets cofibrants les monomorphismes. En outre, pour tout ensemble simplicial symétrique X, le morphisme d'adjonction $v_!v^*X \longrightarrow X$ est une ∞-équivalence, et l'ensemble simplicial symétrique $v_!v^*X$ est normal, ce qui fournit une résolution cofibrante fonctorielle. On a aussi une résolution fibrante fonctorielle $X \longrightarrow v_* Ex^\infty v^*X$, le foncteur $v_* Ex^\infty v^*$ ayant en outre le bon goût de commuter aux produits finis et de respecter les fibrations.

Remarque 8.3.10. — On obtient une autre équivalence de Quillen entre les ensembles simpliciaux et les ensembles simpliciaux symétriques (toujours avec la structure de la proposition 8.3.8) par le foncteur de subdivision barycentrique défini au numéro 8.2.21 (exercice laissé au lecteur). Il est remarquable que pour tout ensemble simplicial X, on a $Sd\, v_!X = Sd\, X$. Cette identification est utilisée implicitement dans la preuve de la proposition 2.1.39.

Remarque 8.3.11. — En vertu de la proposition 8.1.37, l'ensemble des inclusions de la forme $\partial\Upsilon_n \longrightarrow \Upsilon_n$ n'est pas un modèle cellulaire de $\widehat{\Upsilon}$. Cela compromet un certain nombre d'affirmations de Rosický et Tholen [**115**]. On peut cependant déduire de la proposition 8.3.5 que la structure de catégorie de modèles fermée de la proposition 8.3.8 est « déterminée à gauche » au sens de *loc. cit.* relativement à la classe des monomorphismes normaux.

8.4. Ensembles cubiques

8.4.1. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\square_n$ l'ensemble produit $\{0,1\}^n$. Pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\varepsilon = 0, 1$, on définit une application

$$\delta_n^{i,\varepsilon} : \square_{n-1} \longrightarrow \square_n$$

par la formule

$$\delta_n^{i,\varepsilon}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon, x_i, \ldots, x_{n-1}) \quad ,$$

et pour $n \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, une application

$$\sigma_n^i : \square_{n+1} \longrightarrow \square_n$$

par la formule

$$\sigma_n^i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) \quad .$$

On définit la *catégorie des cubes* $\square$ comme la sous-catégorie de $\mathcal{E}ns$ dont les objets sont les ensembles $\square_n$, $n \geqslant 0$, engendrée par les flèches $\delta_n^{i,\varepsilon}$, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon = 0, 1$, et les flèches σ_n^i, $n \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'énoncé suivant (nous renvoyons à [**23, 66**] pour des développements systématiques sur la combinatoire cubique).

Proposition 8.4.2. — *La catégorie* $\square$ *est la sous-catégorie de* $\mathcal{E}ns$ *dont les objets sont les ensembles* $\square_n$, $n \geqslant 0$, *et dont les flèches sont les applications*

$$f : \square_m \longrightarrow \square_n \ , \quad f = (f_1, \dots, f_n) \ , \quad f_j : \square_m \longrightarrow \square_1 \ , \quad 1 \leqslant j \leqslant n \ ,$$

satisfaisant aux deux conditions suivantes.

(a) *Pour tout* j, $1 \leqslant j \leqslant n$, f_j *est une application constante (de valeur* 0 *où* 1*) ou bien une projection du type*

$$pr_i : \square_m \longrightarrow \square_1 \ , \quad (x_1, \dots, x_m) \longmapsto x_i \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant m \ .$$

(b) *Pour tous* j_1, j_2, $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n$, *si* $f_{j_1} = pr_{i_1}$ *et* $f_{j_2} = pr_{i_2}$, *alors* $i_1 < i_2$.

8.4.3. — Les applications $\delta_n^{i,\varepsilon}$ et σ_n^i vérifient les *relations cocubiques* ci-dessous.

$$\begin{aligned}
\delta_n^{j,\eta}\,\delta_{n-1}^{i,\varepsilon} &= \delta_n^{i,\varepsilon}\,\delta_{n-1}^{j-1,\eta} && i < j \\
\sigma_n^j\,\sigma_{n+1}^i &= \sigma_n^i\,\sigma_{n+1}^{j+1} && i \leqslant j \\
\sigma_n^j\,\delta_{n+1}^{i,\varepsilon} &= \begin{cases} \delta_n^{i,\varepsilon}\,\sigma_{n-1}^{j-1} & i < j \\ \delta_n^{i-1,\varepsilon}\,\sigma_{n-1}^{j} & i > j \\ 1_{\square_n} & i = j \end{cases}
\end{aligned} \tag{8.4.3.1}$$

On peut montrer que ces relations fournissent une présentation de la catégorie des cubes. Les relations cocubiques donnent le lemme suivant.

Lemme 8.4.4. — *Tout morphisme* $\varphi : \square_m \longrightarrow \square_n$ *de* $\square$ *est de la forme*

$$\varphi = \delta_n^{l_0,\varepsilon_0}\,\delta_{n-1}^{l_1,\varepsilon_1} \dots \delta_{n-i+1}^{l_{i-1},\varepsilon_{i-1}}\,\sigma_{m-1-j}^{k_j}\,\sigma_{m-j}^{k_{j-1}} \dots \sigma_{m-1}^{k_0} \ ,$$

où $n - i = m - 1 - j$. *En particulier, tout monomorphisme* $i : \square_m \longrightarrow \square_n$ *s'écrit*

$$i = \delta_n^{l_0,\varepsilon_0}\,\delta_{n-1}^{l_1,\varepsilon_1} \dots \delta_{m+1}^{l_{n-m-1},\varepsilon_{n-m-1}} \ ,$$

et tout épimorphisme $\pi : \square_m \longrightarrow \square_n$ *s'écrit*

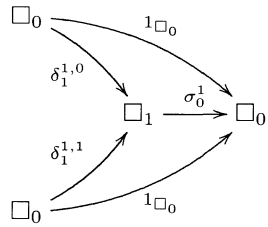
$$\pi = \sigma_n^{k_{m-n-1}}\,\sigma_{n+1}^{k_{m-n-2}} \dots \sigma_{m-1}^{k_0} \ .$$

8.4.5. — La catégorie des cubes $\square$ admet une structure de catégorie monoïdale stricte induite par le produit cartésien d'ensembles (ce qui résulte immédiatement de la description de $\square$ obtenue par la proposition 8.4.2). Autrement dit, il existe un foncteur

$$\otimes : \square \times \square \longrightarrow \square \quad , \qquad (\square_m, \square_n) \longmapsto \square_m \otimes \square_n = \square_{m+n}$$

faisant de $\square$ une catégorie monoïdale dont l'objet unité est l'oblet final de $\square$, à savoir $\square_0$. La catégorie des cubes, munie de cette structure, est caractérisée par une propriété universelle. On note $\square_{\leqslant 1}$ la sous-catégorie pleine de $\square$ dont les objets sont

les ensembles $\square_0$ et $\square_1$. Il s'agit donc de la catégorie représentée par le diagramme commutatif



Proposition 8.4.6. — *Soit C une catégorie monoïdale. La catégorie des foncteurs monoïdaux de $\square$ vers C est canoniquement équivalente à celle des foncteurs de $\square_{\leqslant 1}$ vers C qui envoient $\square_0$ sur l'objet unité de C, dans le sens où tout foncteur*

$$\Phi_1 : \square_{\leqslant 1} \longrightarrow C$$

tel que $\Phi_1(\square_0)$ soit l'objet unité de C se prolonge de manière unique à isomorphisme canonique près en un foncteur monoïdal

$$\Phi : \square \longrightarrow C$$

$$\square_n \longmapsto \Phi_1(\square_1)^{\otimes n} = \Phi_1(\square_1) \otimes (\Phi_1(\square_1) \otimes (\cdots (\Phi_1(\square_1) \otimes \Phi_1(\square_1)) \cdots)) \ .$$

Démonstration. — Pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\varepsilon = 0, 1$, on a l'égalité

$$\delta_n^{i,\varepsilon} = 1_{\square_{i-1}} \otimes \delta_1^{1,\varepsilon} \otimes 1_{\square_{n-i}} \ ,$$

et pour $n \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, l'égalité

$$\sigma_n^i = 1_{\square_{i-1}} \otimes \sigma_0^1 \otimes 1_{\square_{n-i+1}} \ .$$

La structure monoïdale de $\square$, ces égalités, et les relations $\sigma_0^1 \delta_1^{1,0} = 1_{\square_0} = \sigma_0^1 \delta_1^{1,1}$, venant de $\square_{\leqslant 1}$, suffisent pour retrouver les relations (8.4.3.1), lesquelles caractérisent $\square$, ce qui implique la proposition. □

Exemple 8.4.7. — On peut réaliser la catégorie $\square_{\leqslant 1}$ comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des simplexes Δ, en envoyant $\square_0$ sur Δ_0, $\square_1$ sur l'ensemble ordonné Δ_1, σ_0^1 sur σ_0^0, et $\delta_1^{1,\varepsilon}$ sur $\delta_1^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon = 0, 1$. L'inclusion canonique de Δ dans Cat nous donne donc par composition une inclusion pleine de $\square_{\leqslant 1}$ dans Cat qui envoie $\square_0$ sur la catégorie ponctuelle. Or cette dernière est l'objet unité pour la structure de catégorie monoïdale de Cat définie par le produit cartésien. On obtient donc par prolongement un foncteur monoïdal

$$i : \square \longrightarrow \mathit{Cat} \quad , \quad \square_n \longmapsto \Delta_1^n \ .$$

Ce foncteur sera appelé le *plongement canonique de $\square$ dans Cat* (on remarque cependant qu'il est fidèle et injectif sur les objets, sans être plein).

Exemple 8.4.8. — Si A est une petite catégorie, toute donnée homotopique élémentaire sur A détermine, à isomorphisme canonique près, un foncteur monoïdal de la catégorie des cubes vers celle des endofoncteurs de la catégorie des préfaisceaux sur A.

8.4.9. — Nous allons à présent montrer que la catégorie des cubes est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test, et que le plongement canonique de $\square$ dans Cat est un $\mathcal{W}_\infty$-foncteur test. Nous allons donner dans un premier temps une démonstration élémentaire de ce fait, puis développer les propriétés homotopiques intrinsèques de $\widehat{\square}$, lesquelles nous donnerons des informations supplémentaires sur la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\square}$, ainsi qu'une seconde preuve du fait que $\square$ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test.

Soit A une petite catégorie. Un *précylindre fonctoriel* est un triplet

$$(I, \partial^0, \partial^1) ,$$

où I est un endofoncteur de A, et ∂^ε, $\varepsilon = 0, 1$, deux morphismes de foncteurs de l'identité de A vers I. Une *augmentation* d'un tel précylindre est une famille

$$\sigma = (\sigma_a : I(a) \longrightarrow a)_{a \in \mathrm{Ob}\, A}$$

de morphismes de A, telle que pour tout objet a de A, et pour $\varepsilon = 0, 1$, on ait l'égalité $\sigma_a \, \partial^\varepsilon_a = 1_a$. Un précylindre admettant une augmentation sera dit *augmenté*.

Remarque 8.4.10. — Si $(I, \partial^0, \partial^1)$ est un précylindre fonctoriel dans une petite catégorie A admettant une augmentation σ, alors pour tout objet a de A, la flèche σ_a permet de définir un précylindre fonctoriel dans la catégorie A/a,

$$(I|_{A/a}, \partial^0|_{A/a}, \partial^1|_{A/a}) ,$$

défini comme suit. Pour tout objet (a', α) de A/a, on pose

$$I|_{A/a}(a', \alpha : a' \longrightarrow a) = (I(a'), \sigma_a \, I(\alpha) : I(a') \longrightarrow a) ,$$

et pour toute flèche $f : (a', \alpha) \longrightarrow (a'', \alpha')$ de A/a, on pose

$$I|_{A/a}(f) = I(f) .$$

Les morphismes de foncteurs $\partial^0|_{A/a}$ et $\partial^1|_{A/a}$ sont induits par les morphismes de foncteurs ∂^0 et ∂^1.

Lemme 8.4.11. — *On fixe un localisateur fondamental $\mathcal{W}$. Soient A une petite catégorie,*

$$i : A \longrightarrow \mathit{Cat}$$

un foncteur, et

$$(I, \partial^0, \partial^1)$$

un précylindre fonctoriel dans A. On suppose les conditions suivantes vérifiées.

(a) *Pour tout objet a de A, le foncteur $i\partial^0_a : i(a) \longrightarrow i\, I(a)$ est une immersion ouverte,* i.e. *un isomorphisme sur un crible U_a de la catégorie $i\, I(a)$, et le foncteur $i\partial^1_a : i(a) \longrightarrow i\, I(a)$ se factorise par le cocrible complémentaire de U_a, $F_a = i\, I(a) - U_a$.*

(b) *Pour tout morphisme $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A, on a $i\, I(\alpha)(F_a) \subset F_{a'}$.*

Alors pour toute petite catégorie C admettant un objet final e_C, le foncteur d'oubli

$$A/C = A/i^*C \longrightarrow A$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Démonstration. — On définit un foncteur

$$D : A/C \longrightarrow A/C$$

comme suit. On pose pour chaque objet (a, u) de A/C,

$$D(a, u : i(a) \longrightarrow C) = (I(a), v_u : i\,I(a) \longrightarrow C) ,$$

où v_u est l'unique foncteur dont la restriction à U_a est u, *i.e.* tel que $v_u|_{U_a} = v_u|_{i(a)} = v_u\, i(\partial^0_a) = u$, et dont la restriction au crible complémentaire F_a est le foncteur constant de valeur e_C (cette définition prend un sens à la lumière du lemme 4.1.16, lequel est applicable grâce à la condition (a) et au fait que e_C est un objet final de C). Si α est une flèche de (a, u) vers (a', u') dans A/C, on pose simplement $D(\alpha) = I(\alpha)$. Le fait que l'on obtient bien de la sorte un foncteur résulte de vérifications élémentaires utilisant la propriété (b). On définit ensuite un morphisme de foncteurs

$$\delta^0 : 1_{A/C} \longrightarrow D$$

par la formule

$$\delta^0_{(a,u)} = \partial^0_a \ , \ (a, u) \in \mathrm{Ob}\, A/C \ .$$

On considère enfin le foncteur

$$j : A \longrightarrow A/C \ , \quad a \longmapsto (a, e_C : i(a) \longrightarrow C) \ ,$$

où e_C désigne aussi le foncteur constant de valeur e_C. En composant j avec le foncteur d'oubli r de A/C vers A, on obtient un endofoncteur $K = jr$ de A/C, et on définit un morphisme de foncteurs

$$\delta^1 : K \longrightarrow D$$

par la formule

$$\delta^1_{(a,u)} = \partial^1_a \ , \ (a, u) \in \mathrm{Ob}\, A/C \ .$$

On interprète δ^0 et δ^1 comme des homotopies de l'identité de A/C vers D et de $K = jr$ vers D respectivement. Cela implique que jr est une $\mathcal{W}$-équivalence, et comme $rj = 1_A$, cela implique que r en est une aussi, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 8.4.12. — *On fixe un localisateur fondamental $\mathcal{W}$. Soient A une petite catégorie, $i : A \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un foncteur, et $(I, \partial^0, \partial^1)$ un précylindre fonctoriel augmenté dans A. On suppose les conditions suivantes vérifiées.*

(a) *Pour tout objet a de A, le foncteur $i\partial^0_a : i(a) \longrightarrow i\,I(a)$ est une immersion ouverte,* i.e. *un isomorphisme sur un crible U_a de la catégorie $i\,I(a)$, et le foncteur $i\partial^1_a : i(a) \longrightarrow i\,I(a)$ se factorise par le cocrible complémentaire de U_a, $F_a = i\,I(a) - U_a$.*

(b) *Pour tout morphisme $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A, on a $i\,I(\alpha)(F_a) \subset F_{a'}$.*

(c) *Pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admet un objet final.*

Alors i est un $\mathcal{W}$-foncteur test local (en particulier, A est donc une $\mathcal{W}$-catégorie test locale).

Démonstration. — Comme on a supposé le précylindre fonctoriel augmenté, on vérifie que pour tout objet a de A, le foncteur composé

$$A/a \longrightarrow A \xrightarrow{i} \mathit{Cat} \ ,$$

et le précylindre fonctoriel induit dans A/a grâce à l'augmentation,

$$(I|_{A/a}, \partial^0|_{A/a}, \partial^1|_{A/a}) \ ,$$

satisfont aux hypothèses du lemme 8.4.11. On en déduit que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, la projection $i^*C \times a \longrightarrow a$ est une $\mathcal{W}$-équivalence (dans $\widehat{A}/a$ et donc dans $\widehat{A}$). Le théorème 4.1.26 implique dès lors l'assertion. □

Corollaire 8.4.13. — *La catégorie des cubes est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test, et l'inclusion canonique de $\square$ dans Cat est un $\mathcal{W}_\infty$-foncteur test.*

Démonstration. — On définit un précylindre fonctoriel augmenté dans $\square$ par

$$I(\square_n) = \square_1 \otimes \square_n \quad , \qquad n \geqslant 0 \ ,$$

$$\sigma_{\square_n} = \sigma^1_n \quad \text{et} \quad \partial^\varepsilon_{\square_n} = \delta^{1,\varepsilon}_{n+1} \quad , \quad n \geqslant 0 \ , \ \varepsilon = 0, 1 \ .$$

Les hypothèses de la proposition 8.4.12 sont vérifiées pour celui-ci et pour l'inclusion canonique de $\square$ dans Cat, ce qui montre que i est un $\mathcal{W}_\infty$-foncteur test local. Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que $\square$ est une catégorie $\mathcal{W}_\infty$-asphérique, ce qui est immédiat puisqu'elle admet un objet final (à savoir $\square_0$). □

Scholie 8.4.14. — Soit A une catégorie admettant un objet final 1. On désigne par $\mathbb{P}(A)$ la catégorie monoïdale stricte libre engendrée par A telle que 1 soit l'objet unité. S'il existe un segment séparant représentable sur A, alors $\mathbb{P}(A)$ est une catégorie test : on applique simplement la proposition 8.4.12 au foncteur canonique

$$\mathbb{P}(A) \longrightarrow \mathit{Cat} \quad , \qquad x \longmapsto \mathbb{P}(A)/x \ .$$

Nous proposons au lecteur l'exercice consistant à démontrer que si A est en outre une catégorie squelettique régulière, alors il en est de même de la catégorie $\mathbb{P}(A)$. Lorsque $A = \square_{\leqslant 1}$, on retrouve de la sorte la catégorie des cubes. Lorsque $A = \Delta$, $\mathbb{\Delta} = \mathbb{P}(\Delta)$ est la *catégorie des prismes*, et les préfaisceaux sur $\mathbb{\Delta}$ sont appelés les *ensembles prismatiques*. On obtient de la sorte une catégorie de modèles fermée sur la catégorie des ensembles prismatiques qui avait été conjecturée par Dwyer, Hirschhorn et Kan. Un autre cas éventuellement intéressant est celui où $A = \mathbf{O}$ est la catégorie globulaire. Les objets de $\mathbf{O}$ sont les O_n pour $n \geqslant 0$, et les flèches sont engendrées par les opérateurs

$$s, t : O_n \longrightarrow O_{n+1} \quad \text{et} \quad i : O_{n+1} \longrightarrow O_n$$

soumis aux relations ci-dessous.

$$ss = ts \qquad tt = st \qquad is = 1 = it$$

Les préfaisceaux sur $\mathbf{O}$ sont donc les ω-graphes réflexifs. Grothendieck conjecture dans la *Poursuite des champs* que la catégorie $\mathbf{O}$ est une catégorie test. On peut démontrer qu'il n'en est rien : pour tout ω-graphe réflexif X, le groupoïde fondamental de la catégorie $\mathbf{O}/X$ est le groupoïde libre engendré par le 1-graphe sous-jacent à X, ce qui fait que $\mathbf{O}$ ne peut même pas être une catégorie test faible pour des raisons évidentes. On peut cependant vérifier facilement que $\mathbf{O}$ est une catégorie squelettique régulière, d'où il résulte que $\mathbb{P}(\mathbf{O})$ est une catégorie test squelettique régulière. Cette catégorie peut être vue comme le mariage des combinatoires globulaires et cubiques, alors que la catégorie Θ de Joyal (cf. 8.2.20) peut être vue comme celui des combinatoires globulaires et simpliciales.

8.4.15. — On appellera *ensembles cubiques* les préfaisceaux sur la catégorie des cubes. Si X est un ensemble cubique, et si $n \geqslant 0$, on notera X_n l'évaluation de X en l'objet $\square_n$. Comme annoncé, nous allons à présent développer la théorie homotopique des ensembles cubiques.

8.4.16. — On note $\square_+$ (resp. $\square_-$) la sous-catégorie de $\square$ dont les objets sont les ensembles $\square_n$, $n \geqslant 0$, et dont les flèches sont les monomorphismes (resp. les épimorphismes) de $\square$. On a en outre une application évidente

$$\lambda_{\square} : \mathrm{Ob}\square \longrightarrow \mathbb{N} , \quad \square_n \longmapsto n .$$

Proposition 8.4.17. — *La catégorie des cubes, munie des sous-catégories $\square_+$ et $\square_-$, et de l'application $\lambda_{\square}$, est une catégorie squelettique régulière.*

Démonstration. — Les axiomes Sq0 et Sq1 sont évidents. Les axiomes Sq2 et Sq3 se démontrent facilement avec la description de $\square$ donnée par la proposition 8.4.2 (une autre méthode possible consiste à utiliser le lemme 8.4.4). La régularité résulte du critère (*iii*) de la proposition 8.2.2. □

Lemme 8.4.18. — *Pour tout entier $n \geqslant 0$, et tous i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant n+2$, le carré suivant est absolument cartésien (cf. 2.1.7).*

$$\begin{array}{ccc} \square_n & \xrightarrow{\delta^{i,\varepsilon}_{n+1}} & \square_{n+1} \\ {\scriptstyle \delta^{j-1,\eta}_{n+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta^{j,\eta}_{n+2}} \\ \square_{n+1} & \xrightarrow[\delta^{i,\varepsilon}_{n+2}]{} & \square_{n+2} \end{array}$$

Démonstration. — Les équations (8.4.3.1) montrent que ce carré est commutatif, que $\delta^{j-1,\eta}_{n+1}$, $\delta^{i,\varepsilon}_{n+2}$, $\delta^{j,\eta}_{n+2}$ admettent des rétractions σ^{j-1}_n, σ^{i}_{n+1}, σ^{j}_{n+1} respectivement, et qu'on a $\sigma^{j}_{n+1}\delta^{i,\varepsilon}_{n+2} = \delta^{i,\varepsilon}_{n+1}\sigma^{j-1}_n$. L'assertion résulte donc du lemme 2.1.8. □

Lemme 8.4.19. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, et tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, le carré suivant est cartésien dans $\widehat{\square}$.*

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \longrightarrow & \square_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_n^{i,0}} \\ \square_{n-1} & \xrightarrow[\delta_n^{i,1}]{} & \square_n \end{array}$$

Démonstration. — Cette assertion est équivalente à l'affirmation qu'il n'existe pas de carré commutatif dans $\square$ du type

$$\begin{array}{ccc} \square_m & \longrightarrow & \square_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_n^{i,0}} \\ \square_{n-1} & \xrightarrow[\delta_n^{i,1}]{} & \square_n \end{array}$$

pour $m \geqslant 0$. Comme il existe toujours un morphisme de $\square_0$ vers $\square_m$, on peut se contenter de vérifier l'inexistence de tels diagrammes commutatifs lorsque $m = 0$, ce qui est une constatation immédiate. □

Notations 8.4.20. — Pour $n \geqslant 0$, on note

$$i_n : \partial\square_n \longrightarrow \square_n$$

l'inclusion canonique du bord de $\square_n$ dans $\widehat{\square}$.

Lemme 8.4.21. — *Soient A une petite catégorie, et*

$$F : \widehat{\square} \longrightarrow \widehat{A}$$

un foncteur commutant aux petites limites inductives. Pour que F respecte les monomorphismes, il faut et il suffit que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, le morphisme

$$(F(\delta_n^{i,0}), F(\delta_n^{i,1})) : F(\square_{n-1}) \amalg F(\square_{n-1}) \longrightarrow F(\square_n)$$

soit un monomorphisme.

Démonstration. — La condition est nécessaire puisqu'en vertu du lemme 8.4.19, les morphismes de type $(\delta_n^{i,0}, \delta_n^{i,1})$ sont des monomorphismes de $\widehat{\square}$. Montrons la réciproque. Les morphismes $i_n : \partial\square_n \longrightarrow \square_n$, $n \geqslant 0$ formant un modèle cellulaire de $\widehat{\square}$ (8.1.37), il suffit de montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $F(i_n)$ est un monomorphisme. Comme $\Phi(\varnothing) = \varnothing$, le cas $n = 0$ est évident, et le cas $n = 1$ est en fait vérifié par hypothèse. On peut donc supposer que $n \geqslant 2$. La démonstration utilise alors les lemmes 8.4.18 et 8.4.19, et repose sur le même principe que celle de 2.1.10. Les détails sont laissés au lecteur. □

8.4.22. — Le produit tensoriel de la catégorie des cubes se prolonge de manière unique à isomorphisme unique près en un produit tensoriel

$$\otimes : \widehat{\square} \times \widehat{\square} \longrightarrow \widehat{\square} \quad , \quad (X, Y) \longmapsto X \otimes Y$$

tel que pour tout ensemble cubique X, les foncteurs

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

commutent aux petites limites inductives. La catégorie des ensembles cubiques est ainsi munie d'une structure de catégorie monoïdale, dont l'objet unité est l'objet final $\square_0$. Cela permet d'énoncer la propriété universelle suivante, dont la démonstration résulte immédiatement de la proposition 8.4.6.

Proposition 8.4.23. — *Soit C une catégorie monoïdale admettant des petites limites inductives, et telle que pour tout objet X de C, les foncteurs*

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \textit{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

commutent aux petites limites inductives. Alors la catégorie des foncteurs monoïdaux et commutant aux petites limites inductives de la catégorie $\widehat{\square}$ vers C est canoniquement équivalente à celle des foncteurs de la catégorie $\square_{\leqslant 1}$ vers C qui envoient l'objet $\square_0$ sur l'objet unité de C.

Exemple 8.4.24. — Le foncteur monoïdal $\square \longrightarrow \widehat{\Delta}$ qui associe au n-cube $\square_n$ le produit Δ_1^n, induit un unique foncteur commutant aux petites limites inductives

$$i_! : \widehat{\square} \longrightarrow \widehat{\Delta} \ .$$

La proposition ci-dessus implique que le foncteur $i_!$ est monoïdal pour le produit cartésien d'ensembles simpliciaux, *i.e.* que pour toute paire d'ensembles cubiques X et Y, on a un isomorphisme canonique

$$i_!(X \otimes Y) \simeq i_!(X) \times i_!(Y) \ .$$

En outre, le foncteur $i_!$ admet un adjoint à droite

$$i^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\square} \ ,$$

défini par la formule

$$i^*(X)_n = \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_1^n, X) \quad , \quad X \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta} \quad , \quad n \geqslant 0 \ .$$

Proposition 8.4.25. — *Pour tout ensemble cubique X, les foncteurs*

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \textit{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

respectent les monomorphismes. En outre, pour toute paire de monomorphismes de $\widehat{\square}$,

$$A \longrightarrow B \quad \textit{et} \quad K \longrightarrow L \ ,$$

le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \otimes K & \longrightarrow & B \otimes K \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes L & \longrightarrow & B \otimes L \end{array}$$

est cartésien, ou encore, de manière équivalente (puisque les flèches de ce carré sont toutes des monomorphismes), la flèche canonique

$$A \otimes L \amalg_{A \otimes K} B \otimes K \longrightarrow B \otimes L$$

est un monomorphisme. Comme de coutume, on écrira dans ce cas

$$A \otimes L \amalg_{A \otimes K} B \otimes K = A \otimes L \cup B \otimes K \ .$$

Démonstration. — Soient X et Y deux ensembles cubiques. On va montrer que le morphisme

$$X \otimes Y \amalg X \otimes Y \xrightarrow{(1_X \otimes \delta_1^{1,0} \otimes 1_Y, 1_X \otimes \delta_1^{1,1} \otimes 1_Y)} X \otimes \square_1 \otimes Y$$

est un monomorphisme. De manière équivalente, il s'agit de vérifier qu'il n'existe pas de carré commutatif dans $\widehat{\square}$ de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \square_n & \longrightarrow & X \otimes Y \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_X \otimes \delta_1^{1,0} \otimes 1_Y} \\ X \otimes Y & \xrightarrow[1_X \otimes \delta_1^{1,1} \otimes 1_Y]{} & X \otimes \square_1 \otimes Y \end{array}$$

Or si cela était le cas, comme $\square_0$ est à la fois l'objet final de $\widehat{\square}$ et l'objet neutre de la structure monoïdale que nous considérons, il existerait par fonctorialité un tel carré dans le cas où $X = Y = \square_0$, ce qui est contraire au lemme 8.4.19. Par conséquent, pour tout ensemble cubique X, les foncteurs

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

respectent les monomorphismes. En effet, en vertu de ce qui précède, comme on a la décomposition monoïdale

$$\delta_n^{i,\varepsilon} = 1_{\square_{i-1}} \otimes \delta_1^{1,\varepsilon} \otimes 1_{\square_{n-i}} \ , \quad n \geqslant 0 \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n \ ,$$

les morphismes

$$X \otimes \square_{n-1} \amalg X \otimes \square_{n-1} \xrightarrow{(1_X \otimes \delta_n^{i,0}, 1_X \otimes \delta_n^{i,1})} X \otimes \square_n$$

sont des monomorphismes, ce qui permet d'appliquer le lemme 8.4.21. Considérons à présent deux entiers $m, n \geqslant 0$. Alors le carré induit par les inclusions

canoniques des bords de $\square_m$ et $\square_n$,

$$\begin{array}{ccc} \partial\square_m \otimes \partial\square_n & \longrightarrow & \square_m \otimes \partial\square_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial\square_m \otimes \square_n & \longrightarrow & \square_m \otimes \square_n \end{array} \quad ,$$

est cartésien. En effet, en vertu de ce qui précède, ce carré est formé de monomorphismes, et il résulte des lemmes 8.4.18 et 8.4.19 que si on note I l'ensemble

$$I = \{\ (i,j,\varepsilon,\eta) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant n\ ,\ \varepsilon,\eta = 0,1\ \}\ ,$$

on a les égalités suivantes de sous-objets de $\square_m \otimes \square_n$,

$$\begin{aligned} \partial\square_m \otimes \square_n \cap \square_m \otimes \partial\square_n &= \bigcup_{(i,j,\varepsilon,\eta)\,\in\, I} \Big(\mathrm{Im}\big(\delta^{i,\varepsilon}_{m+n}\big) \cap \mathrm{Im}\big(\delta^{m+j,\eta}_{m+n}\big) \Big) \\ &= \bigcup_{(i,j,\varepsilon,\eta)\,\in\, I} \mathrm{Im}\Big(\delta^{m+j,\eta}_{m+n}\, \delta^{i,\varepsilon}_{m+n-1} \Big) \\ &= \bigcup_{(i,j,\varepsilon,\eta)\,\in\, I} \mathrm{Im}\Big(\delta^{i,\varepsilon}_{m} \otimes \delta^{j,\eta}_{n} \Big) \quad , \end{aligned}$$

ce qui est une présentation possible de $\partial\square_m \otimes \partial\square_m$. Le morphisme canonique

$$\partial\square_m \otimes \square_n \amalg_{\partial\square_m \otimes \partial\square_n} \square_m \otimes \partial\square_n \longrightarrow \square_m \otimes \square_m$$

est donc un monomorphisme, ce qui achève la démonstration, en vertu de la proposition 8.1.37 et d'une double application du corollaire 1.1.8, ou plus simplement de [**74**, lemme 4.2.4]. □

8.4.26. — On considère à présent le foncteur $i_!$ de l'exemple 8.4.24, ainsi que son adjoint à droite i^*. On remarque que si C est une petite catégorie, $i^*\, N\, C$ s'identifie canoniquement à l'ensemble cubique i^*C, où cette fois i^* désigne le foncteur de $\boldsymbol{Cat}$ dans $\widehat{\square}$ induit par le plongement canonique de $\square$ dans $\boldsymbol{Cat}$.

Grâce à la proposition ci-dessus, le produit tensoriel à gauche par $\square_1$ définit une donnée homotopique élémentaire sur $\square$, les morphismes

$$\partial^\varepsilon_X : X \longrightarrow \square_1 \otimes X\ , \quad \varepsilon = 0,1\ ,$$

étant définis par $\partial^\varepsilon_X = \delta^{1,\varepsilon}_1 \otimes 1_X$ et les morphismes

$$\sigma_X : \square_1 \otimes X \longrightarrow X$$

par $\sigma_X = \sigma^1_0 \otimes 1_X$. On dira que cette donnée homotopique est la *donnée homotopique canonique sur* $\square$, et sera notée $\square_1$.

Proposition 8.4.27. — *La catégorie des cubes est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test, et pour tout ensemble cubique X, les foncteurs*

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \textit{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

respectent les ∞-équivalences. En outre, le $\square$-localisateur des ∞-équivalences est le plus petit $\square$-prélocalisateur contenant les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geqslant 0$.

Démonstration. — La catégorie $\square$ est ∞-asphérique, puisqu'elle admet un objet final, et donc il suffit de montrer qu'elle est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale. Comme pour tout $n \geqslant 0$, la flèche

$$\sigma_0^1 \otimes 1_{\square_n} \ : \square_1 \otimes \square_n = \square_{n+1} \longrightarrow \square_n$$

est une ∞-équivalence, les propositions 8.4.17 et 8.4.25, et le corollaire 8.2.16, impliquent la première assertion. On en déduit aussi que pour tout ensemble cubique X, tout entier $n \geqslant 0$, le morphisme $\square_n \otimes X \longrightarrow X$ est une ∞-équivalence. Par conséquent, pour toute ∞-équivalence $X \longrightarrow Y$ dans $\widehat{\square}$, les flèches

$$\square_n \otimes X \longrightarrow \square_n \otimes Y \quad , \quad n \geqslant 0 \ ,$$

sont encore des ∞-équivalences. Le lemme 8.2.14 implique dès lors la deuxième assertion. Il reste à caractériser les ∞-équivalences de $\widehat{\square}$ en termes de $\square$-prélocalisateurs. Le même argument que ci-dessus, mais assisté cette fois de la proposition 8.2.15, montre que le plus petit $\square$-prélocalisateur contenant les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geqslant 0$ est en fait le $\square$-localisateur engendré par les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geqslant 0$. D'autre part, comme $\square$ est une catégorie squelettique régulière, tout $\square$-localisateur est régulier (proposition 8.2.9), et donc il résulte du théorème 4.2.15 que les ∞-équivalences de $\widehat{\square}$ sont les éléments du $\square$-localisateur engendré par les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geqslant 0$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 8.4.28. — *Le foncteur* $i^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\square}$ *détecte les* ∞*-équivalences,* i.e. *un morphisme d'ensembles simpliciaux est une* ∞*-équivalence si et seulement si son image par le foncteur* i^* *en est une.*

Démonstration. — C'est une application directe de la proposition 4.3.12 pour $A = \square$ et $B = \Delta$, une fois remarqué que comme le plongement canonique de $\square$ dans Cat est un $\mathcal{W}_\infty$-foncteur test (8.4.13), l'ensemble cubique $i^*\Delta_1$ est localement $\mathcal{W}_\infty$-asphérique (4.1.26). □

Lemme 8.4.29. — *Le foncteur* $i_! : \widehat{\square} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ *respecte les monomorphismes.*

Démonstration. — Le foncteur $i_!$ envoie l'inclusion $\partial\square_1 \longrightarrow \square_1$ sur son analogue $\partial\Delta_1 \longrightarrow \Delta_1$ qui est un monomorphisme. Comme le foncteur $i_!$ est monoïdal, et comme les monomorphismes sont stables par produits finis, on en déduit aussitôt que les conditions du lemme 8.4.21 sont satisfaites, ce qui implique l'assertion. □

Proposition 8.4.30. — *Le foncteur* $i_!$ *respecte les* ∞*-équivalences, et les morphismes d'adjonction*

$$i_!\, i^* \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}} \quad \textit{et} \quad 1_{\widehat{\square}} \longrightarrow i^*\, i_!$$

sont des ∞*-équivalences dans* $\widehat{\Delta}$ *et dans* $\widehat{\square}$ *respectivement. En particulier, le couple* $(i_!, i^*)$ *est une équivalence de Quillen.*

Démonstration. — On sait que le plongement canonique de $\square$ dans Cat est un $\mathcal{W}_\infty$-foncteur test (corollaire 8.4.13). Par conséquent, le foncteur induit

$$i^* : \mathit{Cat} \longrightarrow \widehat{\square}$$

définit une équivalence de catégories

$$i^* : \mathbf{Hot}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square} ,$$

$\mathbf{Hot}_\infty$ désignant la localisation de Cat par les ∞-équivalences. On sait par ailleurs que pour des raisons similaires, le foncteur nerf induit une équivalence de catégories

$$N : \mathbf{Hot}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta} .$$

Comme le foncteur $i^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\square}$ respecte les ∞-équivalences, il induit un foncteur entre les catégories homotopiques correspondantes noté aussi par abus i^*, et on en déduit le triangle commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hot}_\infty & \xrightarrow{\quad i^* \quad} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square} \\ & {\scriptstyle N} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle i^*} & \\ & \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta} & \end{array}$$

Par conséquent, le foncteur

$$i^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square}$$

est une équivalence de catégories. D'autre part le foncteur $i_!$ respecte les ∞-équivalences. En effet, comme le foncteur $i_!$ commute aux petites limites inductives, il résulte du lemme 8.4.29 que $i_!^{-1}\mathsf{W}_\infty$ est un $\square$-prélocalisateur, et il est évident qu'il contient les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geqslant 0$, ce qui implique grâce à la dernière assertion de la proposition 8.4.27 que c'est un $\square$-localisateur qui contient les ∞-équivalences. On vérifie aussitôt que le foncteur induit

$$i_! : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}$$

est un adjoint à gauche du foncteur i^*, les morphismes d'adjonction étant induits par leurs analogues avant localisation, et donc que c'est une équivalence de catégories. La forte saturation des localisateurs permet alors de montrer que les morphismes d'adjonction de $i_!$ et i^* sont des ∞-équivalences avant localisation. □

8.4.31. — Le foncteur $(X, Y) \longmapsto X \otimes Y$ respecte les ∞-équivalences de $\widehat{\square}$, en chaque variable (8.4.27), et donc induit un foncteur

$$\otimes : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square} \times \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square} .$$

Comme $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square}$ est une catégorie équivalente à la catégorie $\mathbf{Hot}_\infty$, cela induit un foncteur

$$\otimes : \mathbf{Hot}_\infty \times \mathbf{Hot}_\infty \longrightarrow \mathbf{Hot}_\infty .$$

Corollaire 8.4.32. — *Le foncteur* $\otimes : \mathbf{Hot}_\infty \times \mathbf{Hot}_\infty \longrightarrow \mathbf{Hot}_\infty$ *est le foncteur produit cartésien* $(X, Y) \longmapsto X \times Y$.

Démonstration. — L'équivalence de catégories de $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{\square}$ vers $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{\Delta}$ est induite par le foncteur monoïdal $i_!$. Il suffit donc de vérifier que le produit cartésien d'ensembles simpliciaux induit bien le produit cartésien dans $\mathbf{Hot}_\infty$, ce qui est bien connu (cela se déduit par exemple du fait que Δ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test stricte). □

Remarque 8.4.33. — Le produit cartésien d'ensembles cubiques ne respecte pas les ∞-équivalences en général. On peut par exemple calculer explicitement le type d'homotopie de l'ensemble cubique $\square_1 \times \square_1$ et vérifier qu'il n'est même pas simplement connexe.

Cependant, comme la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\square}$ est propre, si X est un ensemble cubique fibrant, le produit par X respecte les équivalences faibles.

8.4.34. — Nous allons à présent donner une description plus précise des fibrations pour la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\square}$ (dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et les cofibrations, les monomorphismes).

On a vu que le produit tensoriel par $\square_1$ définit une donnée homotopique canonique sur $\square$, notée encore $\square_1$. Pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\varepsilon = 0, 1$, on définit le sous-objet $\sqcap_n^{i,\varepsilon}$ de $\square_n$ par

$$\sqcap_n^{i,\varepsilon} = \bigcup_{(j,\eta)\neq(i,\varepsilon)} \operatorname{Im} \delta_n^{j,\eta} \ ,$$

et on note $u_n^{i,\varepsilon}$ l'inclusion dans $\square_n$.

$$u_n^{i,\varepsilon} : \sqcap_n^{i,\varepsilon} \longrightarrow \square_n$$

On définit l'ensemble J comme celui des flèches du type $u_n^{i,\varepsilon}$, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\varepsilon = 0, 1$. On obtient ainsi une donnée homotopique sur $\square$:

$$(\square_1, J) \ .$$

Si I désigne l'ensemble des inclusions du type

$$\partial\square_n \longrightarrow \square_n \quad , \quad n \geqslant 0 \ ,$$

on sait que I est un modèle cellulaire de $\widehat{\square}$, et donc par le procédé du paragraphe 1.3.12, on obtient un ensemble d'extensions anodines

$$\Lambda_{\square_1}(J, I) \ ,$$

puis une classe d'extensions anodines

$$l(r(\Lambda_{\square_1}(J, I))) \ .$$

D'autre part, la donnée homotopique $(\square_1, J)$ définit une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes.

Lemme 8.4.35. — *On considère deux carrés commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y'' \end{array}$$

tels que les flèches

$$Y \amalg_X X' \longrightarrow Y' \quad et \quad Y' \amalg_{X'} X'' \longrightarrow Y''$$

soient des extensions anodines. Alors la flèche

$$Y \amalg_X X'' \longrightarrow Y''$$

est une extension anodine.

Démonstration. — On a un carré cocartésien canonique :

$$\begin{array}{ccc} Y \amalg_X X' & \longrightarrow & Y \amalg_X X'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y' \amalg_{X'} X'' \end{array} .$$

L'assertion résulte ainsi de la stabilité des extensions anodines par composition et par images directes. Ce lemme peut aussi être considéré comme un cas particulier du lemme 1.1.6, (b). □

Lemme 8.4.36. — *Soient $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\varepsilon = 0, 1$. Les carrés commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \sqcap_n^{i,\varepsilon} \otimes \partial\square_m & \longrightarrow & \square_n \otimes \partial\square_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqcap_n^{i,\varepsilon} \otimes \square_m & \longrightarrow & \square_n \otimes \square_m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \partial\square_m \otimes \sqcap_n^{i,\varepsilon} & \longrightarrow & \partial\square_m \otimes \square_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \square_m \otimes \sqcap_n^{i,\varepsilon} & \longrightarrow & \square_m \otimes \square_n \end{array}$$

induisent les identifications

$$\sqcap_n^{i,\varepsilon} \otimes \square_m \cup \square_n \otimes \partial\square_m = \sqcap_{n+m}^{i,\varepsilon} \quad et \quad \square_m \otimes \sqcap_n^{i,\varepsilon} \cup \partial\square_m \otimes \square_n = \sqcap_{m+n}^{i+m,\varepsilon} .$$

Démonstration. — Il résulte de la proposition 8.4.25 qu'on obtient bien de la sorte des sous-préfaisceaux de $\square_{m+n}$. Les identifications annoncées sont quant à elles conséquences des lemmes 8.4.18 et 8.4.19. □

Lemme 8.4.37. — *On conserve les notations de 8.4.34.*

(i) *Tous les cornets,* i.e. *les éléments de J, sont des ∞-équivalences.*
(ii) *On a l'égalité $\Lambda_{\square_1}(J, I) = J$.*

(iii) *Pour toute paire, $i : X \longrightarrow Y$, $j : K \longrightarrow L$, de monomorphismes d'ensembles cubiques, les inclusions*

$$X \otimes \square_1 \otimes K \cup Y \otimes \{\varepsilon\} \otimes L \longrightarrow Y \otimes \square_1 \otimes L \quad , \quad \varepsilon = 0, 1 \ ,$$

induites par les carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \square_0 \otimes K & \xrightarrow{i \otimes 1_{\square_0} \otimes j} & Y \otimes \square_0 \otimes L \\ \downarrow{\scriptstyle 1_X \otimes \delta_1^{1,\varepsilon} \otimes 1_K} & & \downarrow{\scriptstyle 1_Y \otimes \delta_1^{1,\varepsilon} \otimes 1_L} \\ X \otimes \square_1 \otimes K & \xrightarrow[i \otimes 1_{\square_1} \otimes j]{} & Y \otimes \square_1 \otimes L \end{array} \quad ,$$

sont des extensions anodines. En particulier, pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\varepsilon = 0, 1$, les morphismes

$$\delta_n^{i,\varepsilon} : \square_{n-1} \longrightarrow \square_n$$

sont des extensions anodines.

Démonstration

(*i*) Les deux inclusions $\sqcap_1^{1,\varepsilon} \longrightarrow \square_1$, $\varepsilon = 0, 1$, sont les morphismes $\delta_1^{1,\varepsilon}$ et sont donc des ∞-équivalences. Pour montrer que $\sqcap_n^{i,\varepsilon} \longrightarrow \square_n$ est une ∞-équivalence, on procède par récurrence sur $n \geqslant 1$ grâce au lemme précédent, et la stabilité des ∞-équivalences par produit tensoriel (8.4.27).

(*ii*) En reprenant les notations de 1.3.12, le lemme 8.4.36 montre que $J = \Lambda^0_{\square_1}(J, I)$ et implique que $\mathbf{\Lambda}(J) \subset J$, ce qui prouve l'assertion.

(*iii*) En vertu de la proposition 8.4.25, de 8.4.36 et de [**74**, lemme 4.2.4] (ou d'une double application du corollaire 1.1.8), si $K \longrightarrow L$ est une extension anodine et $X \longrightarrow Y$ un monomorphisme, les flèches

$$L \otimes X \cup K \otimes Y \longrightarrow L \otimes Y \quad \text{et} \quad X \otimes L \cup Y \otimes K \longrightarrow Y \otimes L$$

sont des extensions anodines. L'assertion résulte ainsi du lemme 8.4.35. Il reste à vérifier que cela permet de réaliser les applications du type $\delta_n^{i,\varepsilon}$ comme des extensions anodines. Pour cela, il suffit de voir que lorsque $Y = \square_{i-1}$, $L = \square_{n-i}$ et $X = K = \varnothing$, on obtient par cette construction $\delta_n^{i,\varepsilon}$. □

Théorème 8.4.38. — *La catégorie des ensembles cubiques admet une structure de catégorie de modèles fermée monoïdale propre, dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et les cofibrations, les monomorphismes. Cette structure est engendrée par le couple (I, J), où I désigne l'ensemble des inclusions de bords*

$$i_n : \partial\square_n \longrightarrow \square_n \quad , \quad n \geqslant 0 \ ,$$

et J celui des inclusions de cornets

$$u_n^{i,\varepsilon} : \sqcap_n^{i,\varepsilon} \longrightarrow \square_n \quad , \quad n \geqslant 1 \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \varepsilon = 0, 1 \ .$$

Démonstration. — La première assertion résulte du fait que $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental propre et que $\square$ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test (l'aspect monoïdal étant contenu dans les propositions 8.4.25 et 8.4.27). Il s'agit de montrer que la structure de catégorie de modèles fermée obtenue est engendrée par le couple (I, J). On sait déjà que I est un modèle cellulaire de $\widehat{\square}$ (8.1.37). Il suffit donc de montrer que J engendre bien les cofibrations triviales, ce qui résulte du lemme 8.2.17 et du théorème 8.2.18 (dont les hypothèses sont vérifiées grâce au lemme 8.4.37). □

Remarque 8.4.39. — Le théorème ci-dessus permet de montrer facilement le fait suivant. Soit A une petite catégorie munie d'une structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$. La propriété universelle de $\square$ (8.4.6) et la théorie des extensions de Kan permettent d'étendre la structure de cylindre de $\mathfrak{I}$ en une action unitaire et associative de la catégorie des ensembles cubiques sur la catégorie des préfaisceaux sur A (*i.e.* en un foncteur monoïdal de $\widehat{\square}$ vers $\mathcal{H}om(\widehat{A}, \widehat{A})$). La structure de catégorie de modèles fermée correspondante à la structure homotopique $(\mathfrak{I}, \mathsf{An})$ (1.3.22) fait alors de $\widehat{A}$ une « catégorie de modèles cubique », c'est-à-dire une $\widehat{\square}$-catégorie de modèles au sens de [**74**, définition 4.2.18] (exercice laissé au lecteur).

8.5. Ensembles cycliques

8.5.1. — Suivant Elmendorf [**57**], on définit la *catégorie des simplexes périodiques* $\mathbf{L}$ comme suit. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on dispose d'un objet L_n. Si $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$ sont deux entiers, l'ensemble de flèches de L_m vers L_n est l'ensemble $\mathbf{L}(m, n)$ formé des applications croissantes $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telles que pour tout entier i, on ait $u(i + m + 1) = u(i) + n + 1$. La loi de composition de $\mathbf{L}$ est induite par la composition des endomorphismes de $\mathbb{Z}$. On définit la catégorie des *ensembles périodiques* comme la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbf{L}$.

Pour $n \geqslant 0$, on note β_n l'élément de $\mathbf{L}(n, n)$ défini par $\beta_n(i) = i - 1$. Les éléments de $\mathbf{L}(m, n)$ peuvent ainsi être décrits comme les applications croissantes $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telles que $u\beta_m^{m+1} = \beta_n^{n+1}u$. Si u et v sont deux éléments de $\mathbf{L}(m, n)$, on dit que u et v sont $\mathbb{Z}$-*équivalents* s'il existe un entier k tel que $u\beta_m^{k(m+1)} = v$. On vérifie que cela définit une relation d'équivalence compatible à la composition sur les morphismes de $\mathbf{L}$. On définit la *catégorie des simplexes cycliques* $\mathbf{\Lambda}$ comme la catégorie dont les objets sont les symboles Λ_n pour $n \geqslant 0$, et dont les morphismes de Λ_m vers Λ_n sont les éléments de l'ensemble $\mathbf{\Lambda}(m, n)$, obtenu comme le quotient de $\mathbf{L}(m, n)$ par la relation de $\mathbb{Z}$-équivalence. On a donc par définition un foncteur

$$\pi : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{\Lambda}$$

défini par $\pi(L_n) = \Lambda_n$ sur les objets et induit par les projections $\mathbf{L}(m, n) \longrightarrow \mathbf{\Lambda}(m, n)$.

Suivant Connes [**38**], on définit les *ensembles cycliques* comme les préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbf{\Lambda}$. Le but de cette section est de prouver que $\mathbf{\Lambda}$ est une catégorie

test locale et de l'étudier en tant que telle, ce qui peut être vu comme une relecture de l'article de Dwyer, Hopkins et Kan [**49**].

L'une des propriétés fondamentales de la catégorie $\mathbf{\Lambda}$ est qu'elle est autoduale dans le sens où il existe un isomorphisme (non canonique) $\mathbf{\Lambda} \simeq \mathbf{\Lambda}^{op}$. Le moyen le plus simple de construire un tel isomorphisme provient du lemme ci-dessous (dont la démonstration est immédiate).

Lemme 8.5.2. — *Si on considère l'ensemble ordonné $\mathbb{Z}$ comme une catégorie, tout foncteur $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ admet un adjoint à gauche $Du : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ défini par la formule*

$$Du(i) = \inf\{j \mid i \leqslant u(j)\} \ .$$

En outre, l'application

$$\mathrm{Hom}_{Ord}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ord}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \quad , \qquad u \longmapsto Du$$

est bijective.

8.5.3. — On vérifie que l'application $u \longmapsto Du$ envoie les éléments de $\mathbf{L}(m, n)$ sur des éléments de $\mathbf{L}(n, m)$, induisant une bijection $\mathbf{L}(m, n) \simeq \mathbf{L}(n, m)$. On obtient de la sorte un foncteur

$$D : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{L}^{op}$$

induisant l'identitié sur les objets. Il est clair que le foncteur D est un isomorphisme de catégories. On voit immédiatement que pour $n \geqslant 0$, on a $D\beta_n = \beta_n^{-1}$ (ce qui donne aussi la formule $D^2\beta_n = \beta_n$). Cela implique que le foncteur D est compatible avec la relation de $\mathbb{Z}$-équivalence, et induit par conséquent un isomorphisme de catégories

$$D : \mathbf{\Lambda} \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^{op} \ .$$

En outre, le carré ci-dessous est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L} & \xrightarrow{D} & \mathbf{L}^{op} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{op}} \\ \mathbf{\Lambda} & \xrightarrow[D]{} & \mathbf{\Lambda}^{op} \end{array}$$

On note τ_n l'image de β_n par la projection π.

8.5.4. — On vérifie aussitôt que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\Delta}(\Delta_m, \Delta_n)$ s'identifie canoniquement aux éléments u de $\mathbf{L}(m, n)$ vérifiant les conditions $0 \leqslant u(0)$ et $u(m) \leqslant n$. Cela définit un foncteur fidèle

$$i : \Delta \longrightarrow \mathbf{L}$$

en posant $i(\Delta_n) = L_n$. On note

$$j : \Delta \longrightarrow \mathbf{\Lambda}$$

le foncteur composé $j = \pi i$. On désigne par $\mathbf{L}_0$ la sous-catégorie de $\mathbf{L}$ ayant les mêmes objets que $\mathbf{L}$, mais pour morphismes de L_m vers L_n les éléments v de $\mathbf{L}(m, n)$ tels

que $v(0) = 0$. On remarque alors que $D(i(\Delta)) = \mathbf{L}_0^{op}$. On obtient de la sorte un isomorphisme de catégories

$$Di : \Delta \longrightarrow \mathbf{L}_0^{op} \ .$$

Lemme 8.5.5. — *Soient $m, n \geqslant 0$ deux entiers. Tout morphisme $u : L_m \longrightarrow L_n$ dans $\mathbf{L}$ se factorise de manière unique sous la forme $u = i(\varphi)\beta_m^k$, où φ est un morphisme de Δ_m vers Δ_n dans Δ, et k est un entier. De même, tout morphisme $u : \Lambda_m \longrightarrow \Lambda_n$ admet une factorisation unique de la forme $u = j(\varphi)\tau_m^k$, où φ est un morphisme de Δ_m vers Δ_n dans Δ, et k est un entier, $0 \leqslant k \leqslant m$.*

Démonstration. — Cette propriété de factorisation des morphismes de $\mathbf{L}$ se traduit via le foncteur de dualité D en disant que tout morphisme de $\mathbf{L}$ admet une factorisation unique de la forme $\beta_m^{-k} v$, où v est un morphisme de $\mathbf{L}_0$, et k un entier, ce qui est immédiat. La propriété analogue dans $\mathbf{\Lambda}$ s'en déduit aussitôt. □

Corollaire 8.5.6. — *Le foncteur $j : \Delta \longrightarrow \mathbf{\Lambda}$ est fidèle.*

Proposition 8.5.7. — *Les catégories $\mathbf{L}$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont des catégories squelettiques prérégulières.*

Démonstration. — Mis à part le fait que deux épimorphismes de $\mathbf{L}$ ou de $\mathbf{\Lambda}$ ayant les mêmes sections sont égaux, les propriétés à vérifier découlent immédiatement du fait que Δ est une catégorie squelettique dont tous les monomorphismes admettent des rétractions et du lemme 8.5.5. La propriété manquante résulte facilement du fait que si $p : L_m \longrightarrow L_n$ est un épimorphisme de $\mathbf{L}$, alors pour tout entier k, il existe une section s de p telle que $sp(k) = k$. □

8.5.8. — Les propriétés des foncteurs i et j données par le lemme 8.5.5 se formalisent comme suit.

Un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ est un *épaississement* s'il vérifie les conditions suivantes.

E1 Le foncteur u est surjectif sur les objets.

E2 Pour deux objets a et a' de A, l'application

$$\mathrm{Aut}_B(u(a)) \times \mathrm{Hom}_A(a, a') \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(u(a), u(a')) \quad , \qquad (\tau, \varphi) \longmapsto u(\varphi)\tau$$

est bijective.

La condition E2 implique que u est un foncteur fidèle.

Proposition 8.5.9. — *Tout épaississement est localement $\mathcal{W}_\infty$-asphérique.*

Démonstration. — Soient $u : A \longrightarrow B$ un épaississement, et a_0 un objet de A. Posons $b_0 = u(a_0)$. On veut montrer que le foncteur

$$v : A/a_0 \longrightarrow B/b_0 \quad , \qquad (a, \varphi) \longmapsto (u(a), u(\varphi))$$

est ∞-asphérique. Pour cela il suffit de montrer que le foncteur v admet un adjoint à droite (3.3.8). Or on a mieux : le foncteur v est une équivalence de catégories. Il résulte en effet de la fidélité de u que v est fidèle. Montrons que v est plein. Soient (a, φ) et (a', φ') deux objets de A/a_0, et $\sigma : (u(a), u(\varphi)) \longrightarrow (u(a'), u(\varphi'))$ une flèche de B/b_0. On a donc un triangle commutatif dans B de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} u(a) & \xrightarrow{\quad\sigma\quad} & u(a') \\ & {\scriptstyle u(\varphi)}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle u(\varphi')} & \\ & b_0 & \end{array}$$

Il existe un couple (τ, ψ), où τ est un automorphisme de $u(a)$, et ψ un morphisme de a vers a' dans A, tel que $\sigma = u(\psi)\tau$. On obtient donc

$$u(\varphi'\psi)\tau = u(\varphi')\sigma = u(\varphi) \ .$$

La condition E2 implique donc que τ est l'identité de $u(a)$ et que $\varphi'\psi = \varphi$. Le morphisme ψ définit donc un morphisme de (a, φ) vers (a', φ') dans A/a_0 qui est envoyé sur σ par v. Il reste donc à montrer que v est essentiellement surjectif. Soit (b, ψ) un objet de B/b_0. Comme u est surjectif sur les objets, il existe un objet a de A tel que $b = u(a)$. D'autre part, il existe un automorphisme τ de b dans B et un morphisme φ de a vers a_0 tels que $\psi = u(\varphi)\tau$. Le morphisme τ peut alors être vu comme un isomorphisme de (b, ψ) vers $v(a, \varphi)$. □

Proposition 8.5.10. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un épaississement. On suppose que les ∞-équivalences de préfaisceaux sur A sont stables par produits finis (ce qui est le cas par exemple si A est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test stricte). Pour qu'un morphisme de préfaisceaux sur B soit une ∞-équivalence, il faut et il suffit que son image par le foncteur $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ soit une ∞-équivalence. En particulier, les ∞-équivalences de $\widehat{B}$ sont stables par produits finis, et le foncteur u est fortement $\mathcal{W}_\infty$-localement constant.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer qu'un morphisme de préfaisceaux sur B est une ∞-équivalence si et seulement si c'est une ∞-équivalence locale. En effet, le foncteur u étant localement ∞-asphérique (8.5.9), en vertu de [**96**, corollaire 1.2.10, (b')], un morphisme de préfaisceaux sur B est une ∞-équivalence locale, si et seulement si son image par le foncteur u^* est une ∞-équivalence locale, ce qui permet de conclure, puisque par hypothèse, toutes les ∞-équivalences de préfaisceaux sur A sont des ∞-équivalences locales (la dernière assertion de la proposition est ensuite une conséquence immédiate du théorème 6.4.15). Il suffit même de prouver que tout morphisme entre préfaisceaux représentables sur B est une ∞-équivalence locale. En effet, cela équivaut à affirmer que pour tout préfaisceau X sur B, le foncteur $B/X \longrightarrow B$ est $\mathcal{W}_\infty$-localement constant, ce qui implique par le théorème 6.4.15 que pour tout préfaisceau X sur B, le foncteur $Y \longmapsto X \times Y$ respecte les ∞-équivalences. Comme tout isomorphisme est une ∞-équivalence locale, la condition E2 du numéro 8.5.8 montre

qu'il suffit de prouver que pour tout morphisme φ de A, le morphisme $u(\varphi)$ est une ∞-équivalence locale de préfaisceaux sur B, ce que nous allons accomplir à présent. Soient $\varphi : a_0 \longrightarrow a_1$ un morphisme de A, et b un objet de B. On pose $b_\varepsilon = u(a_\varepsilon)$ pour $\varepsilon = 0, 1$. Pour $\varepsilon = 0, 1$, on a des carrés cartésiens de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} A/(a_\varepsilon \times u^*(b)) & \longrightarrow & B/(b_\varepsilon \times b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/a_\varepsilon & \longrightarrow & B/b_\varepsilon \end{array}$$

Comme $A/a_\varepsilon \longrightarrow B/b_\varepsilon$ est ∞-asphérique (8.5.9), et comme la projection de $B/(b_\varepsilon \times b)$ sur B/b_ε est $\mathcal{W}_\infty$-lisse (c'est une fibration à fibres discrètes), il résulte de la proposition 6.3.5 que le foncteur canonique

$$A/(a_\varepsilon \times u^*(b)) \longrightarrow B/(b_\varepsilon \times b)$$

est ∞-asphérique. On obtient ainsi un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A/(a_0 \times u^*(b)) & \longrightarrow & A/(a_1 \times u^*(b)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/(b_0 \times b) & \longrightarrow & B/(b_1 \times b) \end{array}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont des ∞-équivalences. Mais la flèche horizontale supérieure est une ∞-équivalence : cela résulte du fait que φ est une ∞-équivalence locale de préfaisceaux sur A. On a ainsi prouvé que le morphisme $u(\varphi)$ est une ∞-équivalence locale de préfaisceaux sur B. □

8.5.11. — On sait que pour un foncteur localement asphérique $u : A \longrightarrow B$, si B est une catégorie test locale, alors il en est de même de A ; voir [**96**, corollaire 1.7.15]. Voici une réciproque partielle.

Proposition 8.5.12. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur localement $\mathcal{W}$-asphérique. On suppose que u est surjectif sur les objets et que le foncteur $u_! : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ respecte les monomorphismes. Si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, alors B est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale.*

Démonstration. — Comme le foncteur $u_!$ respecte les monomorphismes, le foncteur u^* respecte les fibrations triviales (c'est-à-dire les morphismes qui ont la propriété de relèvement à droite relativement aux monomorphismes). Or si A est une catégorie test locale, les fibrations triviales de $\widehat{A}$ sont des équivalences faibles locales. D'autre part, comme u est surjectif sur les objets, il résulte de [**96**, corollaire 1.2.10, (b')] que les équivalences faibles locales de $\widehat{B}$ sont les morphismes dont les images par le foncteur u^* sont des équivalences faibles locales de $\widehat{A}$. En particulier, toute fibration triviale de $\widehat{B}$ est une équivalence faible locale, et donc une équivalence faible. Il vient donc par la proposition 4.1.18 que B est une catégorie test locale. □

Théorème 8.5.13. — *Soit $u : \Delta \longrightarrow A$ un épaississement. On note comme de coutume $u_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ l'extension de Kan à gauche de u. On suppose que le morphisme*

$$u_!(\partial\Delta_1) \longrightarrow u_!(\Delta_1) = u(\Delta_1)$$

est un monomorphisme de préfaisceaux sur A. Alors A est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale, et les ∞-équivalences de préfaisceaux sur A sont les morphismes qui sont envoyés sur des ∞-équivalences d'ensembles simpliciaux par le foncteur image inverse $u^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{\Delta}$. De plus, la catégorie des préfaisceaux sur A admet une structure de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences. Les cofibrations sont engendrées par les morphismes

$$u_!(\partial\Delta_n) \longrightarrow u_!(\Delta_n) \quad , \qquad n \geqslant 0 \ ,$$

et les cofibrations triviales sont engendrées par les morphismes

$$u_!(\Lambda^k_n) \longrightarrow u_!(\Delta_n) \quad , \qquad n \geqslant 1,\ 0 \leqslant k \leqslant n \ .$$

Si en outre A est une catégorie squelettique[(2)]*, alors la classe des cofibrations de cette structure de catégorie de modèles fermée coïncide avec celle des monomorphismes normaux.*

Démonstration. — Le lemme 2.1.10 implique que le foncteur $u_!$ respecte les monomorphismes. Les propositions 8.5.9 et 8.5.12 impliquent ainsi que A est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale. D'autre part, en vertu de la proposition 8.5.10, un morphisme de $\widehat{A}$ est une ∞-équivalence si et seulement si son image par le foncteur u^* est une ∞-équivalence de $\widehat{\Delta}$. La proposition 1.4.23 appliquée au couple de foncteurs adjoints $(u_!, u^*)$ nous donne la structure de catégorie de modèles fermée escomptée. La propreté résulte du fait que A est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale et du fait que que $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental propre (car en vertu de la proposition 4.4.30, cela implique que la catégorie des préfaisceaux sur A admet une stucture de catégorie de modèles fermée propre dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les ∞-équivalences), et d'une double application du corollaire 1.5.21. Si on suppose qu'en outre A est une catégorie squelettique, alors pour tout entier $n \geqslant 0$, en posant $a = u(\Delta_n)$, on a un isomorphisme canonique $u_!(\partial\Delta_n) \simeq \partial a$. En effet, le foncteur $u_!$ respectant les monomorphismes, la flèche canonique $v : u_!(\partial\Delta_n) \longrightarrow \partial a$ est un monomorphisme. On vérifie d'autre part grâce au lemme 8.5.5 l'égalité $\partial a = \cup_{0\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Im} u(\delta^i_n)$, ce qui implique que v est un épimorphisme. La proposition 8.1.35 permet alors d'identifier les cofibrations de la structure de catégorie de modèles fermée ci-dessus avec les monomorphismes normaux. □

8.5.14. — On vérifie sans difficutés que les foncteurs $i : \Delta \longrightarrow \mathbf{L}$ et $j : \Delta \longrightarrow \mathbf{\Lambda}$ sont des épaississements vérifiant la condition du théorème 8.5.13. Les catégories $\mathbf{L}$

(2) Tous les monomorphismes de A admettant des rétractions, A est alors nécessairement une catégorie squelettique prérégulière.

et $\mathbf{\Lambda}$ sont donc des $\mathcal{W}_\infty$-catégories test locales. Comme $\mathbf{L}$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont des catégories squeletiques prérégulières, on a sur les catégories des ensembles périodiques et des ensembles cycliques des structures de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et les cofibrations, les monomorphismes normaux. Ces structures de catégories de modèles fermées sont celles construites par Dwyer, Hopkins et Kan dans [**49**]. Les foncteurs i et j sont aussi des exemples de foncteurs $\mathcal{W}_\infty$-excellents (6.3.41).

Proposition 8.5.15. — *Le foncteur $i : \Delta \longrightarrow \mathbf{L}$ est ∞-asphérique. En particulier, la catégorie des simplexes périodiques $\mathbf{L}$ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test.*

Démonstration. — Montrons que l'ensemble simplicial $X = i^*(L_m)$ est ∞-asphérique pour $m \geqslant 0$. Si a et b sont deux entiers vérifiant $b - a \geqslant m$, on note $X^{[a,b]}$ le sous-ensemble simplicial de X dont les n-simplexes sont les éléments u de $\mathbf{L}(n,m)$ tels que $a \leqslant u(0)$ et $u(n) \leqslant b$. On remarque que lorsque $b - a = m$, $X^{[a,b]} \simeq \Delta_m$ est Δ_1-contractile. Il suffit donc de prouver que l'inclusion $x : X^{[a,b]} \longrightarrow X^{[a,b+1]}$ est un rétracte par déformation fort. On définit une rétraction $r : X^{[a,b+1]} \longrightarrow X^{[a,b]}$ de x en associant à tout élément u de $X_n^{[a,b+1]}$ l'élément $r(u)$ de $\mathbf{L}(n,m)$ défini par

$$r(u)(k) = \begin{cases} u(k) & \text{si } u(k) \leqslant b, \\ b & \text{si } u(k) = b+1, \end{cases}$$

pour $0 \leqslant k \leqslant n$. On définit un morphisme

$$h : \Delta_1 \times X^{[a,b+1]} \longrightarrow X^{[a,b+1]}$$

en associant à tout morphisme $\chi : \Delta_n \longrightarrow \Delta_1$ et à tout élément u de $X_n^{[a,b+1]}$ l'élément $h(\chi,u)$ de $\mathbf{L}(n,m)$ défini par

$$h(\chi,u)(k) = \begin{cases} r(u)(k) & \text{si } \chi(k) = 0, \\ u(k) & \text{si } \chi(k) = 1, \end{cases}$$

pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Le morphisme h est une homotopie de xr vers l'identité de $X^{[a,b+1]}$, si bien que r et h font de x un rétracte par déformation fort. On en déduit que $X^{[a,b]}$ est Δ_1-contractile pour tous $a < b$. Les ∞-équivalences étant stables par limites inductives filtrantes, et vu que X est la réunion filtrante de ses sous-objets de la forme $X^{[a,b]}$, cela prouve que X est ∞-asphérique. Le foncteur i est donc ∞-asphérique. La catégorie Δ étant ∞-asphérique, il en résulte que $\mathbf{L}$ est ∞-asphérique. Vu que l'on sait déjà que $\mathbf{L}$ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test locale, cela prouve que $\mathbf{L}$ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test. □

Corollaire 8.5.16. — *Le foncteur $i_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\mathbf{L}}$ est une équivalence de Quillen à gauche.*

8.5.17. — Il résulte formellement du corollaire 4.4.20 et de la proposition 4.4.28 que le foncteur

$$N\,j_{\mathbf{\Lambda}} : \widehat{\mathbf{\Lambda}} \longrightarrow \widehat{\Delta}/\,N\,\mathbf{\Lambda} \quad , \qquad X \longmapsto (N\,\mathbf{\Lambda}/X, N\,\mathbf{\Lambda}/X \longrightarrow N\,\mathbf{\Lambda})$$

est une équivalence de Quillen. On peut calculer facilement le type d'homotopie de la catégorie $\mathbf{\Lambda}$ comme suit (nous renvoyons le lecteur à [**64, 99**] pour la notion d'espace d'Eilenberg-MacLane).

Lemme 8.5.18. — *La projection $\pi : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{\Lambda}$ est à la fois une fibration et une cofibration. En particulier, ce foncteur est $\mathcal{W}_\infty$-propre et $\mathcal{W}_\infty$-lisse, ce qui implique qu'il est une $\mathcal{W}_\infty$-fibration faible. En outre, pour tout entier $n \geqslant 0$, la fibre de π en Λ_n est isomorphe au groupe abélien $\mathbb{Z}$ (vu comme une catégorie avec un unique objet).*

Démonstration. — Il résulte aussitôt du lemme 8.5.5 que tout morphisme de $\mathbf{L}$ est cartésien (relativement à π). Comme π est surjectif sur les objets et plein, cela prouve que π est une fibration (cf. 3.3.10). Étant donné que π est isomorphe à π^{op} par les foncteurs de dualité D (cf. 8.5.3), cela implique que π est aussi une cofibration. On en déduit donc que π est propre et lisse (cf. 5.3.2), ce qui implique que π est une $\mathcal{W}_\infty$-fibration faible en vertu des corollaires 6.4.8 et 6.4.16. Soit $n \geqslant 0$ un entier. Le foncteur π étant par construction bijectif sur les objets, il est clair que la fibre $\mathbf{L}_{\Lambda_n}$ de π au-dessus de Λ_n n'a qu'un objet, à savoir L_n. Les endomorphismes de L_n qui sont envoyés sur l'identité de Λ_n sont les automorphismes de la forme $\beta_n^{k(n+1)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Le foncteur $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{L}_{\Lambda_n}$ défini par $1 \longmapsto \beta_n^{n+1}$ est donc un isomorphisme. □

Proposition 8.5.19 **(Connes [38])**. — *Le nerf de $\mathbf{\Lambda}$ est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 2)$.*

Démonstration. — Il résulte du lemme précédent qu'en prenant la fibre de π au-dessus de Λ_0, on a un carré homotopiquement cartésien d'ensembles simpliciaux de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccc} N\,\mathbb{Z} & \longrightarrow & N\,\mathbf{L} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N\,\pi} \\ \Delta_0 & \xrightarrow[\Lambda_0]{} & N\,\mathbf{\Lambda} \end{array}$$

Vu que la catégorie $\mathbf{L}$ est ∞-asphérique, cela implique que $N\,\mathbb{Z}$ a le type d'homotopie de l'espace des lacets de $N\,\mathbf{\Lambda}$. Comme $N\,\mathbb{Z}$ est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 1)$, cela implique que $N\,\mathbf{\Lambda}$ est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 2)$. □

Remarque 8.5.20. — On définit le *cercle simplicial* S^1 par le carré cocartésien suivant dans la catégorie des ensembles simpliciaux.

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_1 & \longrightarrow & \Delta_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_0 & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Soit $a : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_0$ le morphisme de $\mathbf{\Lambda}$ défini par $a = j(p_1)\tau_1$, où p_n désigne l'unique morphisme de Δ_n vers Δ_0 dans Δ ($n \geqslant 0$). Cela définit un morphisme d'ensembles simpliciaux $\Delta_1 \longrightarrow j^*\Lambda_0$, et comme $j^*\Lambda_0$ n'a qu'un seul 0-simplexe, cela détermine un morphisme

$$\alpha : S^1 \longrightarrow j^*\Lambda_0 .$$

On peut vérifier que α est un isomorphisme comme suit. Soit $n \geqslant 0$. On désigne par I_n l'ensemble des applications croissantes $f : \Delta_n \longrightarrow \Delta_1$ telles que $f(0) \neq 1$, et on vérifie que l'application évidente de I_n vers $(S^1)_n = \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_n, S^1)$ est bijective. L'application α_n correspond alors à l'application de I_n dans $(j^*\Lambda_0)_n$ qui envoie f sur $j(p_n)\tau_n^{n-k}$, où $k = \max f^{-1}(0)$. La bijectivité de cette application résulte du lemme 8.5.5 et du fait trivial qu'un élément f de I_n est totalement déterminé par l'entier $\max f^{-1}(0)$. Ce calcul fournit une alternative à la preuve de la proposition 8.5.19 (ou bien est une démonstration amusante du fait que le cercle simplicial est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 1)$).

8.5.21. — Le lemme 8.5.18 implique que $\mathbf{L}$ est une gerbe abélienne sur $\mathbf{\Lambda}$ de fibre constante $\mathbb{Z}$. Elle n'est pas neutre, car sinon on aurait un isomorphisme $\mathbf{\Lambda} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbf{L}$, ce qui serait en contradiction avec l'asphéricité de $\mathbf{L}$. D'autre part, il résulte de la proposition 8.5.19 et du théorème de Hurewicz [**64**, chap. III, théorème 3.7] que $H^2(N\,\mathbf{\Lambda}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Or d'après Giraud [**62**], la gerbe $\mathbf{L}$ donne lieu à un 2-cocycle de Čech et donc à un élément de $H^2(N\,\mathbf{\Lambda}, \mathbb{Z})$, lequel est non trivial puisque la gerbe $\mathbf{L}$ n'est pas neutre[(3)]. L'asphéricité de $\mathbf{L}$ implique que ce 2-cocycle donne en fait un générateur de $H^2(N\,\mathbf{\Lambda}, \mathbb{Z})$, ce qui s'interprète simplicialement comme suit.

Notons $K(\mathbb{Z}, 1)$ le groupe simplicial dont l'ensemble simplicial sous-jacent est le nerf de $\mathbb{Z}$ vu comme une catégorie avec un seul objet. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on a donc $K(\mathbb{Z}, 1)_n = \mathbb{Z}^n$, et la loi de groupe de $K(\mathbb{Z}, 1)$ est définie simplement par la structure de groupe produit sur $\mathbb{Z}^n$. Autrement dit, $\mathbb{Z}$ est une catégorie monoïdale symétrique dont le produit tensoriel est défini sur les flèches par $m \otimes n = m + n$, et la structure de groupe de $K(\mathbb{Z}, 1)$ provient de cette structure monoïdale. On définit une action de $K(\mathbb{Z}, 1)$ sur $N\,\mathbf{L}$ de la manière suivante. Il s'agit de définir un morphisme de monoïdes simpliciaux

$$K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow \mathcal{H}om(N\,\mathbf{L}, N\,\mathbf{L}) .$$

Comme $\mathcal{H}om(N\,\mathbf{L}, N\,\mathbf{L}) = N\,\mathcal{H}om(\mathbf{L}, \mathbf{L})$, cela revient en vertu de la pleine fidélité du foncteur nerf à définir un foncteur monoïdal (strict)

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathbf{L}, \mathbf{L}) .$$

(3) Du point de vue de [**62**], on considère plutôt la cohomologie du topos $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, mais cela donne la même chose que de considérer la cohomologie du nerf de $\mathbf{\Lambda}$; voir par exemple [**60**, appendice II] ou [**103**].

On définit un tel foncteur en envoyant l'unique objet de $\mathbb{Z}$ sur l'identité de $\mathbf{L}$ et en envoyant $1 \in \mathbb{Z}$ sur l'automorphisme β de $1_{\mathbf{L}}$ défini par $\beta_{L_n} = \beta_n^{n+1}$. Plus explicitement, pour $n \geqslant 1$, un n-simplexe $(k_1, \dots, k_n)$ de $K(\mathbb{Z}, 1)$ agit sur un n-simplexe de $N\,\mathbf{L}$ de la forme

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbf{L}(m_0, m_1) \times \cdots \times \mathbf{L}(m_{n-1}, m_n)$$

par la formule

$$(k_1, \dots, k_n)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (\beta_{m_1}^{k_1(m_1+1)}\varphi_1, \dots, \beta_{m_n}^{k_n(m_n+1)}\varphi_n)\ .$$

Il résulte immédiatement de la définition de la relation de $\mathbb{Z}$-équivalence sur les morphismes de $\mathbf{L}$ (8.5.1) et du lemme 8.5.5 que le morphisme $N\,\pi$ fait de $N\,\mathbf{L}$ un $K(\mathbb{Z}, 1)$-torseur sur $N\,\mathbf{\Lambda}$. On obtient ainsi un foncteur

$$\Phi : \widehat{\mathbf{\Lambda}} \longrightarrow \mathcal{R}ep(K(\mathbb{Z}, 1)) \tag{8.5.21.1}$$

défini par les carrés cartésiens de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \Phi(X) & \longrightarrow & N\,\mathbf{L} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N\,\pi} \\ N\,\mathbf{\Lambda}/X & \longrightarrow & N\,\mathbf{\Lambda} \end{array}$$

D'après le lemme 3.2.7, pour tout ensemble cyclique X, on a un isomorphisme canonique d'ensembles simpliciaux (en oubliant l'action de $K(\mathbb{Z}, 1)$ sur $\Phi(X)$)

$$\Phi(X) \simeq N\,\mathbf{L}/\pi^*(X)\ . \tag{8.5.21.2}$$

Il en résulte par le corollaire 3.2.10 que le foncteur Φ commute aux limites inductives. D'autre part, le foncteur $i : \Delta \longrightarrow \mathbf{L}$ étant asphérique, on a une équivalence faible naturelle de $N\,\Delta/j^*X$ vers $N\,\mathbf{L}/\pi^*X$, et en vertu de 4.3.16, on a une équivalence faible naturelle de $N\,\Delta/j^*X$ vers j^*X.

Théorème 8.5.22. — *Le foncteur $\Phi : \widehat{\mathbf{\Lambda}} \longrightarrow \mathcal{R}ep(K(\mathbb{Z}, 1))$ respecte les ∞-équivalences et envoie les monomorphismes sur des cofibrations locales. Il est en outre une équivalence de Quillen à gauche.*

Démonstration. — Le foncteur Φ envoie les ensembles cycliques sur des $K(\mathbb{Z}, 1)$-torseurs sur leurs quotients (par définition) et respecte les monomorphismes. Il en résulte que ce foncteur envoie les monomorphismes sur des cofibrations locales (8.1.38). Le foncteur $N\,i_{\mathbf{\Lambda}}$ respecte les ∞-équivalences. Par conséquent, il résulte du corollaire 7.2.8 que le foncteur Φ respecte les ∞-équivalences. Il reste donc à démontrer qu'il induit une équivalence de catégories entre les catégories homotopiques de $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$ et de $\mathcal{R}ep(K(\mathbb{Z}, 1))$. En vertu de la proposition 7.3.8 et du corollaire 7.3.12, les ∞-équivalences de la catégorie des représentations de $K(\mathbb{Z}, 1)$ sont les morphismes qui sont des ∞-équivalences simpliciales après oubli de l'action de $K(\mathbb{Z}, 1)$. Le nerf de $\mathbf{L}$ étant asphérique (8.5.15) et $\mathcal{W}_\infty$ étant un localisateur fondamental propre, on voit

donc qu'en posant $EK(\mathbb{Z},1) = N\,\mathbf{L}$ et $BK(\mathbb{Z},1) = N\,\mathbf{\Lambda}$, le nerf de $\mathbf{\Lambda}$ est un espace classifiant de $K(\mathbb{Z},1)$ au sens défini dans le scholie 7.2.15. Le foncteur Φ est donc le composé du foncteur $N\,j_{\mathbf{\Lambda}}$ et du foncteur de monodromie

$$\mathsf{Mon} : \widehat{\Delta}/\,N\,\mathbf{\Lambda} = \widehat{\Delta}/BK(\mathbb{Z},1) \longrightarrow \mathcal{R}ep(K(\mathbb{Z},1)) \ .$$

Cela achève la démonstration en vertu de 8.5.17 et du scholie 7.2.15. □

Remarque 8.5.23. — On peut définir la réalisation topologique d'un ensemble cyclique (resp. périodique) X comme la réalisation topologique de l'ensemble simplicial j^*X (resp. i^*X). La réalisation de Λ_n (resp. de L_n) est homéomorphe au produit de la réalisation de Δ_n et du cercle topologique S^1 (resp. et de la droite réelle $\mathbb{R}$) ; voir [**40**]. En général, la réalisation topologique d'un ensemble cyclique (resp. périodique) X est canoniquement munie d'une action continue du groupe de Lie S^1 (resp. $\mathbb{R}$). On peut ainsi obtenir une équivalence de Quillen des ensembles cycliques (resp. périodiques) vers les représentations continues de S^1 (resp. de $\mathbb{R}$).

CHAPITRE 9

EXEMPLES DE LOCALISATEURS FONDAMENTAUX

9.1. Troncations de Postnikov et cosquelettes

9.1.1. — Soit $n \geqslant -1$ un entier. On désigne par $\Delta_{\leqslant n}$ la sous-catégorie pleine de Δ dont les objets sont les simplexes Δ_m, $m \leqslant n$, i_n désignant l'inclusion canonique de $\Delta_{\leqslant n}$ dans Δ. On obtient de la sorte un triplet de foncteurs adjoints $(i_{n!}, i_n^*, i_{n*})$, où

$$i_n^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}_{\leqslant n}$$

est le foncteur image inverse associé à i_n. Le n-ème *foncteur squelette*,

$$Sk^n : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad ,$$

est défini par la formule $Sk^n = i_{n!}\, i_n^*$, et le n-ème *foncteur cosquelette*,

$$Cosk^n : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad ,$$

par la formule $Cosk^n = i_{n*}\, i_n^*$. On a en outre deux morphismes d'adjonction

$$\varepsilon^n : Sk^n \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}} \quad \text{et} \quad \eta^n : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Cosk^n \ .$$

Ces derniers induisent des isomorphismes après application du foncteur i_n^*, puisque les foncteurs $i_{n!}$ et i_{n*} sont pleinement fidèles. Il est d'autre part immédiat que le n-ème foncteur squelette est un adjoint à gauche du n-ème foncteur cosquelette.

On remarque qu'en vertu de la proposition 8.1.29, la notation Sk^n ci-dessus est compatible avec la notation introduite au numéro 8.1.17 si on considère la catégorie Δ munie de sa structure canonique de catégorie squelettique (voir l'exemple 8.1.4).

Proposition 9.1.2. — *Soit X un complexe de Kan. Pour tout n, $-1 \leqslant n$, l'ensemble simplicial $Cosk^n\, X$ est un complexe de Kan.*

Démonstration. — Soient $q \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant q$ des entiers, et u un morphisme de Λ^k_q vers $Cosk^n X$. Si $q \leqslant n+1$, alors $Sk^n \Lambda^k_q = \Lambda^k_q$, et donc on a une factorisation de u de la forme

$$\Lambda^k_q \xrightarrow{v} X \xrightarrow{\eta^n_X} Cosk^n X \quad .$$
$$\qquad\qquad u$$

Comme X est un complexe de Kan, v se complète en un morphisme de Δ_q vers X, et donc il en est de même de u. Si $q > n+1$, alors $Sk^n \Lambda^k_q = Sk^n \Delta_q$, et donc u admet une (unique) complétion en un q-simplexe de $Cosk^n X$. □

Proposition 9.1.3. — *Soient X un complexe de Kan, x un 0-simplexe de X, et $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout entier $i \geqslant n$, le groupe d'homotopie $\pi_i(Cosk^n X, x)$ est trivial, et pour tout entier i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, le morphisme η^n_X induit un isomorphisme*

$$\pi_i(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Cosk^n X, x) \ .$$

Démonstration. — Lorsque (X, x) est un complexe de Kan pointé, $\pi_i(X, x)$ est l'ensemble des classes d'homotopie pointée de morphismes pointés d'une i-sphère (pointée) S^i vers (X, x). Dans la catégorie des ensembles simpliciaux, le bord $\partial\Delta_{i+1}$ de Δ_{i+1} a le type d'homotopie d'une i-sphère. Or pour $i \geqslant n$, on a les égalités

$$Sk^n \partial\Delta_{i+1} = Sk^n Sk^i \Delta_{i+1} = Sk^n \Delta_{i+1} \ .$$

Par conséquent, tout morphisme de $\partial\Delta_{i+1}$ vers $Cosk^n X$ se factorise par un ensemble simplicial contractile, ce qui implique la première assertion. Si $i < n$, on a les identifications

$$Sk^n \partial\Delta_{i+1} = \partial\Delta_{i+1} \quad \text{et} \quad Sk^n(\partial\Delta_{i+1} \times \Delta_1) = \partial\Delta_{i+1} \times \Delta_1 \ .$$

Comme l'adjonction entre Sk^n et $Cosk^n$ respecte les points bases éventuels, on en déduit facilement la seconde et dernière assertion. □

9.2. Types d'homotopie tronqués

Dans la suite de cette section, on fixe un entier $n \geqslant -2$.

9.2.1. — On note $\mathcal{W}_n$ le plus petit localisateur fondamental tel que la catégorie $\Delta/\partial\Delta_{n+2}$ soit asphérique. Il résulte du corollaire 4.3.28 que $\mathcal{W}_n$ est un localisateur fondamental propre (et donc en particulier accessible). On parlera de *n-équivalences*, de foncteurs *n-asphériques*, *etc.*, au lieu de $\mathcal{W}_n$-équivalences, de foncteurs $\mathcal{W}_n$-asphériques, *etc.* On remarque qu'il résulte aussitôt de 3.3.6 que $\mathcal{W}_{-2}$ est le localisateur fondamental trivial formé de toutes les flèches de $\mathbf{Cat}$. De même, 3.3.6 implique que $\mathcal{W}_{-1}$ est le localisateur grossier non trivial $\mathcal{W}_{gr}$ (voir exemple 3.3.5).

Vu que la catégorie des simplexes Δ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test, elle est aussi une $\mathcal{W}_n$-catégorie test. Le théorème 4.2.15 et la remarque qui le suit permettent une description explicite des n-équivalences dans $\widehat{\Delta}$: il s'agit du plus petit Δ-localisateur test (*i.e.* en l'occurrence contenant les projections $\Delta_q \times \Delta_1 \longrightarrow \Delta_q$, pour $q \geqslant 0$)

tel que l'inclusion $\partial\Delta_{n+2} \longrightarrow \Delta_{n+2}$ soit une équivalence faible (car Δ_{n+2} est Δ_1-contractile). Si on note Δ_1 la donnée homotopique élémentaire sur Δ définie par le segment Δ_1, la classe des n-équivalences peut donc être caractérisée comme la classe des équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée associée à la donnée homotopique sur Δ

$$(\Delta_1, \{\partial\Delta_{n+2} \longrightarrow \Delta_{n+2}\}) .$$

On appellera *n-extensions anodines* les extensions anodines définies par cette donnée homotopique, et objets *n-fibrants* les objets fibrants au sens de cette structure. Un ensemble simplicial X est donc n-fibrant si et seulement si la flèche de X vers l'objet final de $\widehat{\Delta}$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux n-extensions anodines (voir la proposition 1.3.36).

Lemme 9.2.2. — *La catégorie $\Delta_{\leqslant n+1}$ est une catégorie squelettique régulière. En outre, pour $0 \leqslant m \leqslant n+1$, on a une identification canonique dans $\widehat{\Delta}$: $i_{n+1!}\partial\Delta_m \simeq \partial\Delta_m$. En particulier, le foncteur $i_{n+1!}$ respecte les monomorphismes.*

Démonstration. — La structure de catégorie squelettique sur $\Delta_{\leqslant n+1}$ est induite de celle de Δ (8.2.5) de manière évidente. On en déduit immédiatement l'assertion. □

9.2.3. — Pour chaque m, $0 \leqslant m \leqslant n+1$, on a un foncteur évident de $\Delta_{\leqslant n+1}/\Delta_m$ vers Δ/Δ_m, et comme les foncteurs $i_{\Delta_{\leqslant n+1}}$ et i_Δ commutent aux petites limites inductives (3.2.13), cela définit un morphisme de foncteurs

$$i_{\Delta_{\leqslant n+1}} \longrightarrow i_\Delta\, i_{n+1!} .$$

Lemme 9.2.4. — *Pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$, le morphisme de foncteurs ci-dessus est une $\mathcal{W}$-équivalence. En particulier, un morphisme de préfaisceaux sur $\Delta_{\leqslant n+1}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si son image par le foncteur $i_{n+1!}$ en est une dans $\widehat{\Delta}$.*

Démonstration. — Comme l'inclusion canonique de Δ dans ***Cat*** est un $\mathcal{W}$-foncteur test (4.1.29), une flèche de ***Cat*** est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si son image dans $\widehat{\Delta}$ par le foncteur nerf en est une. Il suffit donc de montrer que pour tout préfaisceau X sur $\Delta_{\leqslant n+1}$, le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$N\, i_{\Delta_{\leqslant n+1}} X \longrightarrow N\, i_\Delta\, i_{n+1!} X$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence dans $\widehat{\Delta}$. Lorsque X est représentable, la source et le but sont contractiles, ce qui rend l'assertion évidente. Le cas général résulte donc du lemme 8.2.14 (qu'on peut appliquer ici grâce au corollaire 3.2.10 et au lemme 9.2.2). □

Lemme 9.2.5. — *Pour tout entier $m \geqslant n+2$, l'inclusion canonique*

$$\partial\Delta_m \longrightarrow \Delta_m$$

est une n-équivalence dans $\widehat{\Delta}$.

Démonstration. — On procède par récurrence sur m. Lorsque $m = n+2$, l'assertion est vérifiée par définition des n-équivalences. Soit $m > n+2$, et supposons l'assertion démontrée pour $m-1$. On remarque qu'on a un carré cocartésien de la forme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_{m-1} & \longrightarrow & \Lambda^m_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{m-1} & \xrightarrow[\delta^m_m]{} & \partial\Delta_m \end{array} \quad ,$$

dont toutes les flèches sont des monomorphismes. Les ensembles simpliciaux $\partial\Delta_{m-1}$, Δ_{m-1} et Λ^m_m étant n-asphériques, il résulte de [**96**, proposition 1.1.27] qu'il en est de même de $\partial\Delta_m$. □

Proposition 9.2.6. — *Pour tout entier $m \geqslant n+1$, le morphisme de foncteurs*

$$i_{m!}\, i_m^* \simeq Sk^m \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$$

est une n-équivalence.

Démonstration. — Comme l'identité de $\widehat{\Delta}$ est la réunion des foncteurs Sk^m, et comme les n-équivalences sont stables par compositions dénombrables, il suffit de montrer que pour $m \geqslant n+1$, les inclusions $Sk^m \longrightarrow Sk^{m+1}$ sont des n-équivalences. Or en vertu du lemme 8.1.34, pour tout ensemble simplicial X, on a un carré cocartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc} \amalg \partial\Delta_{m+1} & \longrightarrow & Sk^m X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \amalg \Delta_{m+1} & \longrightarrow & Sk^{m+1} X \end{array} \quad ,$$

et donc le lemme précédent implique l'assertion. □

Corollaire 9.2.7. — *La catégorie $\Delta_{\leqslant n+1}$ est une $\mathcal{W}_n$-catégorie test stricte, le foncteur $i_{n+1} : \Delta_{\leqslant n+1} \longrightarrow \Delta$ est n-asphérique, et les deux couples de foncteurs adjoints (i_{n+1}^*, i_{n+1*}) et $(i_{n+1!}, i_{n+1}^*)$ sont des équivalences de Quillen (pour les structures de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\Delta}$ et sur $\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1}$ associées aux n-équivalences). En outre, les foncteurs $i_{n+1!}$, i_{n+1}^* et i_{n+1*} respectent les n-équivalences, et les morphismes d'adjonction sont des n-équivalences.*

Démonstration. — Montrons que l'inclusion i_{n+1} est un foncteur n-asphérique. Soit Δ_m un objet de Δ. En vertu du lemme 9.2.4, on a une n-équivalence dans ***Cat*** :

$$\Delta_{\leqslant n+1}/\Delta_m = \Delta_{\leqslant n+1}/i_{n+1}^*\Delta_m \longrightarrow \Delta/i_{n+1!}\, i_{n+1}^*\Delta_m = \Delta/\, Sk^{n+1}\, \Delta_m \ .$$

Or la proposition 9.2.6 implique que le but de celle-ci est n-asphérique, ce qui prouve l'assertion.

Comme le foncteur i_{n+1} est n-asphérique et pleinement fidèle, on s'aperçoit aussitôt qu'il est localement n-asphérique. Comme Δ est une $\mathcal{W}_n$-catégorie test stricte et il résulte de [**96**, corollaire 1.7.15] que $\Delta_{\leqslant n+1}$ est une $\mathcal{W}_n$-catégorie test stricte.

La première équivalence de Quillen résulte de la proposition 4.2.24. La seconde est justifiée par les lemmes 9.2.2 et 9.2.4. La dernière assertion est conséquence immédiate de la n-asphéricité de i_{n+1}, de la proposition 4.2.23, et de la pleine fidélité des foncteurs $i_{n+1!}$ et i_{n+1*}. □

Remarque 9.2.8. — Il résulte aussitôt de ce corollaire que le couple de foncteurs (i_{n+1}^*, i_{n+1*}) est une adjonction de Quillen de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\Delta}$ correspondant aux ∞-équivalences vers celle sur $\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1}$ correspondant aux n-équivalences. En outre, le foncteur dérivé à droite

$$\mathbf{R}i_{n+1*} : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_n}\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{\Delta}$$

est pleinement fidèle : en effet, il suffit de vérifier que si X est un objet n-fibrant de $\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1}$ (*i.e.* fibrant au sens de $\mathcal{W}_n$), le morphisme $i_{n+1}^* i_{n+1*}X \longrightarrow X$ est une n-équivalence, et comme i_{n+1*} est pleinement fidèle, c'est un isomorphisme. Autrement dit, le foncteur

$$i_{n+1}^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_n}\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1}$$

fournit une description explicite de la localisation $\mathbf{Hot}_n$ de $\mathbf{Hot}_\infty$ par les n-équivalences.

Corollaire 9.2.9. — *Pour tout $m \geqslant n+1$, la catégorie $\Delta_{\leqslant m}$ est une $\mathcal{W}_n$-catégorie test stricte, et l'inclusion $i_m : \Delta_{\leqslant m} \longrightarrow \Delta$ est un foncteur n-asphérique.*

Démonstration. — Le lemme 9.2.5 implique que pour $m \geqslant n+1$, on a l'inclusion $\mathcal{W}_{m-1} \subset \mathcal{W}_n$, ce qui prouve l'assertion en vertu du corollaire 9.2.7. □

Corollaire 9.2.10. — *Un morphisme de $\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1}$ est une n-fibration si et seulement si son image par i_{n+1*} est une n-fibration de $\widehat{\Delta}$.*

Démonstration. — Comme en vertu du corollaire 9.2.7 les foncteurs $i_{n+1!}$ et i_{n+1}^* sont des foncteurs de Quillen à gauche (pour les structures de catégorie de modèles fermée associées aux n-équivalences), et comme $i_{n+1!}$ est pleinement fidèle, les n-cofibrations triviales de $\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1}$ sont exactement les flèches de la forme $i_{n+1}^*K \longrightarrow i_{n+1}^*L$, pour $K \longrightarrow L$ n-cofibration triviale de $\widehat{\Delta}$. L'assertion résulte donc d'un argument standard d'adjonction. □

Lemme 9.2.11. — *Un complexe de Kan X est n-fibrant si et seulement si l'unique flèche de X vers l'ensemble simplicial final vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions du type*

$$\partial\Delta_m \times \Delta_{n+2} \cup \Delta_m \times \partial\Delta_{n+2} \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_{n+2}\ , \quad m \geqslant 0\ .$$

Démonstration. — En vertu du corollaire 1.1.8, ou de [**74**, lemme 4.2.4], si X vérifie cette propriété, alors pour tout monomorphisme $K \longrightarrow L$ dans $\widehat{\Delta}$, la flèche $X \longrightarrow \Delta_0$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à l'inclusion

$$K \times \Delta_{n+2} \cup L \times \partial\Delta_{n+2} \longrightarrow L \times \Delta_{n+2} \ .$$

La construction de l'ensemble générateur des n-extensions anodines (voir le numéro 1.3.12) implique alors que $X \longrightarrow \Delta_0$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à tout élément d'icelui. Par conséquent, $X \longrightarrow \Delta_0$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à toute n-extension anodine, ce qui montre bien que X est n-fibrant (1.3.36). Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que les inclusions invoquées dans l'énoncé sont des n-équivalences. Or comme Δ est une catégorie test stricte, les n-équivalences sont stables par produits finis dans $\widehat{\Delta}$. Par conséquent, si $K \longrightarrow L$ est un monomorphisme, on a un carré cartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc} K \times \partial\Delta_{n+2} & \longrightarrow & L \times \partial\Delta_{n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \times \Delta_{n+2} & \longrightarrow & L \times \Delta_{n+2} \end{array} \ ,$$

dont toutes les flèches sont des monomorphismes, et dont les flèches verticales sont des n-équivalences. Les n-cofibrations triviales étant stables par images directes, on en déduit que le morphisme canonique de $L \times \partial\Delta_{n+2}$ vers $K \times \Delta_{n+2} \cup L \times \partial\Delta_{n+2}$ est une n-équivalence, et donc le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} L \times \partial\Delta_{n+2} & \longrightarrow & K \times \Delta_{n+2} \cup L \times \partial\Delta_{n+2} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & L \times \Delta_{n+2} & \end{array}$$

permet de conclure. □

Lemme 9.2.12. — *Soient $m \geqslant -1$ un entier, et $j : K \longrightarrow L$ un morphisme d'ensembles simpliciaux tels que le morphisme induit $i_m^* j : i_m^* K \longrightarrow i_m^* L$ soit un isomorphisme. Alors pour tout préfaisceau X sur $\Delta_{\leqslant m}$, l'unique flèche $i_{m*}X \longrightarrow \Delta_0$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à j.*

Démonstration. — Vu que toute flèche vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à tout isomorphisme, cela résulte du fait que le foncteur i_{m*} est un adjoint à droite du foncteur i_m^*. □

Proposition 9.2.13. — *Un préfaisceau sur $\Delta_{\leqslant n+1}$ est n-fibrant si et seulement si son image par le foncteur i_{n+1*} est un complexe de Kan.*

Démonstration. — Si X est un préfaisceau n-fibrant sur $\Delta_{\leqslant n+1}$, alors ${i_{n+1}}_* X$ est n-fibrant dans $\widehat{\Delta}$ (9.2.7), et donc est un complexe de Kan. On remarque que pour $m \geqslant 0$, l'image de l'inclusion

$$\partial\Delta_m \times \Delta_{n+2} \cup \Delta_m \times \partial\Delta_{n+2} \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_{n+2}$$

par le foncteur i_{n+1}^* est un isomorphisme : comme le foncteur i_{n+1}^* commute aux images directes, cela résulte du fait que c'est le cas pour les inclusions de la forme

$$K \times \partial\Delta_{n+2} \longrightarrow K \times \Delta_{n+2} \quad , \quad K \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta}\ .$$

La réciproque résulte donc du corollaire 9.2.10 et des lemmes 9.2.11 et 9.2.12. □

Corollaire 9.2.14. — *Pour tout complexe de Kan X, $Cosk^{n+1} X$ est n-fibrant.*

Démonstration. — Cela résulte des propositions 9.1.2 et 9.2.13. □

Corollaire 9.2.15. — *On suppose ici que $n \geqslant 0$. Un morphisme d'ensembles simpliciaux $u : X \longrightarrow Y$ est une n-équivalence si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

1) *Le morphisme u induit une bijection*

$$\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)\ .$$

2) *Pour tout $x \in X_0$, et tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, u induit un isomorphisme de groupes*

$$\pi_i(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Y, u(x))\ .$$

Démonstration. — Quitte à remplacer u par exemple par $Ex^\infty u$, on peut supposer que X et Y sont des complexes de Kan. Or le corollaire 9.2.7 implique aussitôt que u est une n-équivalence si et seulement si $Cosk^{n+1} u$ en est une. Comme $Cosk^{n+1} u$ est un morphisme entre ensembles simpliciaux n-fibrants (9.2.14), c'est une équivalence d'homotopie, ou encore, de manière équivalente (les objets n-fibrants de $\widehat{\Delta}$ étant en particulier des complexes de Kan), si et seulement si c'est une ∞-équivalence. Le corollaire résulte donc de la proposition 9.1.3 et de la caractérisation analogue des ∞-équivalences (corollaire 2.2.13). □

Corollaire 9.2.16. — *On a l'égalité $\mathcal{W}_\infty = \cap_{n \geqslant 0} \mathcal{W}_n$.*

Proposition 9.2.17. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *La catégorie $\Delta/\partial\Delta_{n+2}$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*
(b) *Toute n-équivalence est une $\mathcal{W}$-équivalence.*
(c) *Le foncteur $i_{n+1} : \Delta_{\leqslant n+1} \longrightarrow \Delta$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*
(d) *La catégorie $\Delta_{\leqslant n+1}$ est une $\mathcal{W}$-catégorie test stricte.*
(d′) *La catégorie $\Delta_{\leqslant n+1}$ est une $\mathcal{W}$-catégorie test.*

En particulier, $\mathcal{W}_n$ est le plus petit localisateur fondamental modelable par $\Delta_{\leqslant n+1}$.

Démonstration. — L'équivalence entre (a) et (b) est triviale. Le corollaire 9.2.7 montre que (b) implique (c), et que (b) implique (d). Le lemme 9.2.4 permet quant à lui de s'assurer que (c) implique (a). Comme l'implication $(d) \Rightarrow (d')$ est triviale, il reste donc à montrer que (d') implique (a), ce qui revient encore à montrer la dernière assertion.

Soit $\mathcal{W}$ le plus petit localisateur fondamental modelable par $\Delta_{\leqslant n+1}$. Le corollaire 9.2.7 implique que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_n$, et en vertu du théorème 4.2.15, $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental accessible. Le couple $(i_{n+1!}, i_{n+1}^*)$ définit une équivalence de Quillen de $\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1}$ vers $\widehat{\Delta}$ pour les structures de catégorie de modèles fermée associées aux $\mathcal{W}$-équivalences : les lemmes 9.2.2 et 9.2.4 montrent qu'il définit une adjonction de Quillen, que le foncteur $i_{n+1!}$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences, et que le triangle suivant est commutatif à isomorphisme de foncteurs près

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1} & \xrightarrow{i_{n+1!}=\mathbf{L}i_{n+1!}} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{\Delta} \\ & {\scriptstyle i_{\Delta_{\leqslant n+1}}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle i_{\Delta}} & \\ & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} & \end{array} \quad ;$$

les deux foncteurs obliques étant des équivalences de catégories, il en est donc de même de l'horizontal. Soit X un préfaisceau n-asphérique sur $\Delta_{\leqslant n+1}$. On va montrer que X est $\mathcal{W}$-asphérique. Considérons $j : i_{n+1!}X \longrightarrow X'$ une $\mathcal{W}$-équivalence de but $\mathcal{W}$-fibrant dans $\widehat{\Delta}$. Le morphisme $i_{n+1}^* j$ est donc une $\mathcal{W}$-équivalence (c'est le morphisme d'adjonction de X vers $\mathbf{R}i_{n+1}^* \mathbf{L}i_{n+1!}X$). Or la flèche j est en particulier une n-équivalence, et X' un complexe de Kan. Par conséquent, en vertu du corollaire 9.2.14, $Cosk^{n+1} X'$ est un ensemble simplicial n-fibrant, isomorphe dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_n}\widehat{\Delta}$ à $i_{n+1!}X$. La forte saturation de $\mathcal{W}_n$ implique donc que $Cosk^{n+1} X'$ est un objet injectif de $\widehat{\Delta}$. Comme le foncteur $i_{n+1!}$ respecte les monomorphismes, $i_{n+1}^* Cosk^{n+1} X'$ est un objet injectif (et par suite $\mathcal{W}$-asphérique) de $\widehat{\Delta}_{\leqslant n+1}$. Or on a un isomorphisme canonique de $i_{n+1}^* Cosk^{n+1} X'$ vers $i_{n+1}^* X'$, ce qui prouve bien que X est $\mathcal{W}$-asphérique. En particulier, $i_{n+1}^* \Delta_{n+2}$ est $\mathcal{W}$-asphérique, et le lemme 9.2.4 implique que

$$Sk^{n+1} \Delta_{n+2} = i_{n+1!} i_{n+1}^* \Delta_{n+2} = \partial \Delta_{n+2}$$

est $\mathcal{W}$-asphérique, ce qui achève la démonstration. □

Scholie 9.2.18. — Soit $n \geqslant 0$. On appelle *n-équivalence forte* un morphisme d'ensembles simpliciaux $u : X \longrightarrow Y$ tel que :

1) le morphisme u induit une bijection

$$\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y) \ ;$$

2) pour tout $x \in X_0$, et tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, u induit un isomorphisme de groupes

$$\pi_i(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Y, u(x)) \ ;$$

3) pour tout $x \in X_0$, le morphisme

$$\pi_{n+1}(X, x) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y, u(x)) ,$$

induit par u, est surjectif ;

(les conditions (2) et (3) exprimant que les fibres homotopiques de u (au sens $\mathcal{W}_\infty$) sont n-asphériques). On vérifie que si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ sont deux morphismes composables d'ensembles simpliciaux, et si u et v (resp. vu et u) sont des n-équivalences fortes, alors il en est de même de vu (resp. de v). Cependant, il est faux en général que si vu et v sont des n-équivalences fortes, u en est une. La classe des n-équivalences est en fait la plus petite classe de flèches de $\widehat{\Delta}$ satisfaisant à l'axiome du « deux sur trois » (L1) et contenant les n-équivalences fortes. En effet, si $u : X \longrightarrow Y$ est une n-équivalence, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Cosk^{n+1}\, Ex^\infty X \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Cosk^{n+1}\, Ex^\infty u} \\ Y & \longrightarrow & Cosk^{n+1}\, Ex^\infty Y \end{array} ,$$

dont les flèches horizontales sont des n-équivalences fortes (en vertu de la proposition 9.1.3). Or $Cosk^{n+1}\, Ex^\infty u$ est une n-équivalence entre objets n-fibrants (9.2.7, 9.2.14), et par suite, est une ∞-équivalence (1.6.5, (v)). Toute ∞-équivalence étant une n-équivalence forte, cela prouve bien l'assertion.

9.3. Localisateurs fondamentaux triviaux

9.3.1. — Un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est *géométrique* si toute $\mathcal{W}$-équivalence induit un isomorphisme après application du foncteur π_0 (*i.e.* s'il est contenu dans $\mathcal{W}_0$). Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une telle hypothèse est anodine, *i.e.* de démontrer l'énoncé suivant.

Proposition 9.3.2. — *Les seuls localisateurs fondamentaux qui ne sont pas géométriques sont les localisateurs fondamentaux grossiers.*

Remarque 9.3.3. — On rappelle qu'un localisateur fondamental est grossier si et seulement s'il contient $\mathcal{W}_{-1} = \mathcal{W}_{gr}$, et que les seuls localisateurs fondamentaux grossiers sont $\mathcal{W}_{gr}$ et $\mathrm{Fl}\, \mathcal{C}at$ (cf. 3.3.5).

9.3.4. — On fixe à présent un localisateur fondamental non géométrique $\mathcal{W}$, puis on se place dans la catégorie des ensembles simpliciaux. Dans ce qui suit, on identifiera par le foncteur pleinement fidèle $p_\Delta^* : \mathcal{E}ns \longrightarrow \widehat{\Delta}$, un ensemble E à l'ensemble simplicial constant $p_\Delta^*(E) = \amalg_E \Delta_0$. En particulier, pour tout ensemble simplicial X, on a un épimorphisme $X \twoheadrightarrow \pi_0(X)$, fonctoriel en X, défini par le morphisme d'adjonction correspondant au couple de foncteurs adjoints (π_0, p_Δ^*) (cf. 2.2.1).

Lemme 9.3.5. — *Si $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, il existe une $\mathcal{W}$-équivalence d'ensembles simpliciaux $u : X \longrightarrow Y$ telle que X et Y soient non vides, Y soit 0-asphérique, et X ne soit pas 0-asphérique.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{W}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{W}_0$, il existe une $\mathcal{W}$-équivalence $u : X \longrightarrow Y$ qui n'est pas une 0-équivalence. Cela implique en particulier que Y n'est pas vide. On peut écrire $Y = \amalg_{i\in I} Y_i$, ou chaque Y_i est un ensemble simplicial 0-connexe. On obtient donc des morphismes

$$u_i : X_i = u^{-1}Y_i \longrightarrow Y_i \quad , \qquad i \in I \ .$$

Montrons que X est non vide. Si X était vide, alors le choix d'un point de Y ferait de l'inclusion de l'ensemble simplicial vide dans l'ensemble simplicial final un rétracte de u, et donc cela impliquerait que $\varnothing = \partial\Delta_0$ serait $\mathcal{W}$-asphérique, et on aurait donc l'égalité $\mathcal{W} = \mathrm{Fl}\,\boldsymbol{Cat}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que $\mathcal{W}$ n'est pas grossier. Il existe donc un élément i de I tel que X_i soit non vide, et on vérifie aussitôt que le morphisme u_i est alors un rétracte de u, ce qui en fait une $\mathcal{W}$-équivalence. Montrons qu'il existe un i tel que X_i ne soit pas 0-connexe tout en étant non vide. Si ce n'était pas le cas, l'application $\pi_0(u) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ serait injective et un rétracte de u. Comme $\pi_0(u)$ n'est pas une bijection, en choisissant une composante connexe de X et une composante connexe de Y n'appartenant pas à l'image de $\pi_0(u)$, on exhiberait une inclusion de la forme $\Delta_0 \longrightarrow \partial\Delta_1$ qui serait un rétracte de $\pi_0(u)$. Mais cela impliquerait que $\mathcal{W}_{-1} \subset \mathcal{W}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

Lemme 9.3.6. — *Si $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, il existe un ensemble E ayant au moins deux éléments, un complexe de Kan 0-asphérique K, et une $\mathcal{W}$-équivalence de la forme*

$$j : E = \amalg_E \Delta_0 \longrightarrow K \ .$$

Démonstration. — Soit $u : X \longrightarrow Y$ une $\mathcal{W}$-équivalence vérifiant les conditions énoncées dans le lemme 9.3.5. Quitte à la factoriser en une cofibration suivie d'une fibration triviale, on peut supposer que u est un monomorphisme. On pose $E = \pi_0(X)$, et on forme le carré cocartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow[v]{} & Z \end{array}$$

Alors v est une $\mathcal{W}$-cofibration triviale, et comme u est une cofibration, et $X \longrightarrow E$ une 0-équivalence, la flèche $Y \longrightarrow Z$ est encore une 0-équivalence, et par suite Z est 0-asphérique. Pour conclure, on choisit une ∞-équivalence de but un complexe de Kan $f : Z \longrightarrow K$, et on pose $j = fv$. □

Démonstration de la proposition 9.3.2. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental qui n'est pas géométrique. Supposons qu'il ne soit pas grossier. Alors il existe une

$\mathcal{W}$-équivalence d'ensembles simpliciaux $j : E \longrightarrow K$, vérifiant les conditions du lemme 9.3.6. On a alors les bijections suivantes.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{\Delta}}(E,K) \simeq \prod_E \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty}\widehat{\Delta}}(\Delta_0,K) \simeq \prod_E \pi_0(K) \simeq *$$

Par conséquent pour tout choix d'un 0-simplexe k de K, j est homotope au morphisme constant induit par k,

$$j_k : E \longrightarrow \Delta_0 \longrightarrow K \ .$$

On en déduit que j_k est une $\mathcal{W}$-équivalence. Or le morphisme $E \longrightarrow \Delta_0$ est un rétracte de j_k, et par suite, E est $\mathcal{W}$-asphérique. Comme $\partial\Delta_1 = \Delta_0 \amalg \Delta_0$ est un rétracte de E, on en déduit aussitôt que $\mathcal{W}_{-1}$ est contenu dans $\mathcal{W}$. Par conséquent, $\mathcal{W}$ est grossier (3.3.5), ce qui est contraire à l'hypothèse, et prouve la proposition. □

9.4. Homologies, torsions et impropretés

9.4.1. — Si E est un spectre, on note E_* la théorie homologique correspondante, définie sur $\widehat{\Delta}$, et W_E la classe des *E-équivalences*, *i.e.* des morphismes d'ensembles simpliciaux $X \longrightarrow Y$ induisant un isomorphisme de groupes

$$E_n X \xrightarrow{\sim} E_n Y \ ,$$

pour tout entier n.

Théorème 9.4.2 **(Bousfield)**. — *Pour tout spectre E, les E-équivalences forment un Δ-localisateur accessible.*

Démonstration. — En vertu de [**16**, théorème 10.2], la catégorie des ensembles simpliciaux admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les E-équivalences. Il s'agit donc d'une simple traduction *via* le théorème 1.4.3. □

Corollaire 9.4.3. — *Tout spectre définit canoniquement un localisateur fondamental accessible.*

Démonstration. — Si E est un spectre, les E-équivalences forment un Δ-localisateur accessible contenant $i_{\widehat{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}_\infty$. L'assertion résulte donc du théorème 4.2.15, puique Δ est une $\mathcal{W}_\infty$-catégorie test. □

9.4.4. — Le corollaire ci-dessus permet de construire des variantes de localisateurs fondamentaux. Si E est un spectre, on note $\mathcal{W}_E$ le localisateur fondamental accessible correspondant. On appelera encore *E-équivalences* les éléments de $\mathcal{W}_E$.

On peut par exemple considérer le spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{Q}$ correspondant à l'homologie singulière rationnelle, ce qui définit en vertu du corollaire ci-dessus un localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$. Si $n \geqslant 0$, le localisateur fondamental $\mathcal{W}_n$ des n-équivalences permet de définir le localisateur fondamental $\mathcal{W}_{\mathbb{Q},n} = \mathcal{W}_n \cap \mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$.

Celui-ci est accessible en vertu du théorème 4.2.15 et du corollaire 1.4.21. On appellera $(\mathbb{Q}, n)$-*équivalences* les éléments de $\mathcal{W}_{\mathbb{Q},n}$. On a bien sûr l'égalité $\mathcal{W}_{\mathbb{Q},0} = \mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$.

Lemme 9.4.5. — *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et n un entier, $n \geqslant 0$, tels que toute $\mathcal{W}$-équivalence soit une n-équivalence. Si $\mathcal{W}$ est propre, alors toute $\mathcal{W}$-équivalence d'ensembles simpliciaux de but $\mathcal{W}$-fibrant est une n-équivalence forte.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme 1.5.22, appliqué à l'inclusion des localisateurs fondamentaux propres $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$. □

Proposition 9.4.6. — *Le localisateur fondamental des $H\mathbb{Q}$-équivalences (resp. des $(\mathbb{Q}, n)$-équivalences, $n \geqslant 1$) n'est pas propre.*

Démonstration. — Soit $n \geqslant 0$. On considère un ensemble simplicial S^{n+1} ayant le type d'homotopie de la $n+1$-ème sphère. On choisit une résolution $\mathcal{W}_{\mathbb{Q},n}$-fibrante $j : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}_{\mathbb{Q}}$. On peut montrer que le morphisme induit par j sur les groupes d'homotopie est en l'occurrence le morphisme canonique ($i \geqslant 1$) :

$$\pi_i(S^{n+1}) \longrightarrow \pi_i(S^{n+1}) \otimes \mathbb{Q} = \pi_i(S^{n+1}_{\mathbb{Q}}) \ .$$

Lorsque $n = 0$, il s'agit d'un corollaire du théorème de Hurewicz [**64**, chap. III, théorème 3.7] et du fait que le type d'homotopie du cercle est celui de l'espace classifiant du groupe $\mathbb{Z}$. Pour $n \geqslant 1$, on choisit une résolution $\mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$-fibrante $u : S^{n+1} \longrightarrow X$ de S^{n+1}. Il résulte de la nilpotence de la sphère S^{n+1} et de [**16**, proposition 4.3 (i)] que $\pi_i(X) = \pi_i(S^{n+1}) \otimes \mathbb{Q}$. Comme $\pi_i(S^{n+1}) = 0$ pour $0 < i < n+1$, on en déduit que u est une n-équivalence et que X est $\mathcal{W}_{\mathbb{Q},n}$-fibrant, ce qui prouve la propriété voulue en posant $X = S^{n+1}_{\mathbb{Q}}$ et $j = u$.

Si F désigne une fibre homotopique de j au sens de $\mathcal{W}_\infty$, la longue suite exacte de Serre associée montre que $\pi_n(F)$ est le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Autrement dit, le morphisme j n'est pas une n-équivalence forte. Le lemme ci-dessus implique donc l'assertion. □

Scholie 9.4.7. — On peut aussi voir que les $H\mathbb{Z}$-équivalences forment un localisateur fondamental qui n'est pas propre (où $H\mathbb{Z}$ désigne le spectre qui représente la cohomologie singulière à coefficients entiers). En effet, désignons par $\mathcal{W}^+$ le localisateur fondamental qui trivialise les catégories dont l'homologie singulère à coefficients entiers est réduite à celle du point. La proposition 6.1.8 appliquée au localisateur fondamental des $H\mathbb{Z}$-équivalences montre que $\mathcal{W}^+$ est propre. On peut encore caractériser $\mathcal{W}^+$ comme le plus grand localisateur fondamental propre tel que toute équivalence faible soit une $H\mathbb{Z}$-équivalence (en vertu du théorème 6.1.11). Or d'après Bousfield (voir [**18, 13, 14**]), $\mathcal{W}^+$ correspond à la construction + de Quillen. Autrement dit : un morphisme d'ensembles simpliciaux $X \longrightarrow Y$ est une $\mathcal{W}^+$-équivalence si et seulement si $X^+ \longrightarrow Y^+$ est une ∞-équivalence (où K^+ est un modèle de la construction + de

Quillen appliquée à K pour $K = X, Y$). La différence entre la localisation par la classe des $\mathcal{W}^+$-équivalences et celle des $H\mathbb{Z}$-équivalences est étudiée plus en détail dans [**18, 114**].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Adámek & J. Rosický – *Locally Presentable and Accessible Categories*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 189, Cambridge University Press, 1994.

[2] D. W. Anderson – « Fibrations and geometric realizations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), no. 5, p. 765–788.

[3] M. Artin & B. Mazur – *Étale Homotopy*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 100, Springer-Verlag, 1969.

[4] M. Batanin – « Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n-categories », *Adv. Math.* **136** (1998), no. 1, p. 39–103.

[5] M. Batanin & R. Street – « The universal property of the multitude of trees », *J. Pure Appl. Alg.* **154** (2000), no. 1-3, p. 3–13.

[6] T. Beke – « Sheafifiable homotopy model categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **129** (2000), p. 447–475.

[7] ———, « Sheafifiable homotopy model categories, Part II », *J. Pure Appl. Algebra* **164** (2001), p. 307–324.

[8] ———, « Simplicial torsors », *Theory Appl. Categories* **9** (2001), no. 3, p. 43–60.

[9] ———, « Higher Čech theory », *K–Theory* **32** (2004), no. 4, p. 293–322.

[10] J. Bénabou – « Introduction to bicategories », in *Reports of the Midwest Category Seminar*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 47, Springer-Verlag, 1968, p. 1–71.

[11] C. Berger – « A cellular nerve for higher categories », *Adv. Math.* **169** (2002), p. 118–175.

[12] ———, « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », prépublication, 2005.

[13] A. J. Berrick – « The plus-construction as a localization », in *Algebraic K-Theory and its applications,* Proc. ICTP 1997, World Scientific, Singapour, 1999, p. 313–336.

[14] A. J. Berrick & C. Casacuberta – « A universal space for plus-construction », *Topology* **38** (1999), p. 467–477.

[15] B. Blander – « Local projective model structures on simplicial presheaves », *K-Theory* **24** (2003), no. 3, p. 283–301.

[16] A. K. Bousfield – « The localization of spaces with respect to homology », *Topology* **14** (1975), p. 133–150.

[17] ———, « Constructions of factorization systems in categories », *J. Pure Appl. Algebra* **9** (1976/77), no. 2, p. 207–220.

[18] ———, « Homotopical localization of spaces », *Amer. J. Math.* **119** (1997), no. 6, p. 1321–1354.

[19] A. K. Bousfield & E. M. Friedlander – « Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets », in *Geometric Applications of Homotopy Theory II,* (Proc. Conf. Evanston, Ill., 1977, M. G. Barrat and M. E. Mahowald eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 658, Springer-Verlag, 1978, p. 80–130.

[20] A. K. Bousfield & D. M. Kan – *Homotopy limits, completions, and localization*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 304, Springer-Verlag, 1972.

[21] L. Breen – *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, Astérisque, vol. 225, Soc. Math. France, 1994.

[22] K. S. Brown – « Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology », *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), p. 419–458.

[23] R. Brown & P. J. Higgins – « On the algebra of cubes », *J. Pure Appl. Algebra* **21** (1981), p. 233–260.

[24] J. G. Cabello & A. R. Garzon – « Closed model structures for algebraic models of n-types », *J. Pure Appl. Algebra* **103** (1995), p. 287–302.

[25] C. Casacuberta – « Recent advances in unstable localization », in *The Hilton Symposium (1993)*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 6, Amer. Math. Soc., 1994, p. 1–22.

[26] C. Casacuberta & B. Chorny – « The orthogonal subcategory problem in homotopy theory », in An Alpine Anthology of Homotopy Theory. *Proceedings of the Second Arolla conference on Algebraic Topology*, Contemporary Mathematics, vol. 399, Amer. Math. Soc., 2006, p. 41–53.

[27] C. Casacuberta, D. Scevenels & J. H. Smith – « Implications of large-cardinal principles in homotopical localizations », *Adv. Math.* **197** (2005), p. 120–139.

[28] W. Chachólski, P. E. Parent & S. Donald – « Cellular generators », *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), no. 11, p. 3397–3409.

[29] W. Chachólski & J. Scherer – « Homotopy theory of diagrams », *Mem. Amer. Math. Soc.* **155** (2002), no. 736.

[30] D.-C. Cisinski – « Faisceaux localement asphériques », en préparation.

[31] ———, « Les morphismes de Dwyer ne sont pas stables par rétractes », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **XL-3** (1999), p. 227–231.

[32] ———, « Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées », prépublication, 2002.

[33] ———, « Théories homotopiques dans les topos », *J. Pure Appl. Algebra* **174** (2002), p. 43–82.

[34] ———, « Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles », *Ann. Math. Blaise Pascal* **10** (2003), p. 195–244.

[35] ———, « Le localisateur fondamental minimal », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **XLV-2** (2004), p. 109–140.

[36] ———, « Batanin higher groupoids and homotopy types », prépublication, 2005.

[37] D.-C. Cisinski & A. Neeman – « Additivity for derivator K-theory », prépublication de l'université Paris 13, 2005.

[38] A. Connes – « Cyclic homology and functor Ext^n », *C. R. Acad. Sci. Paris* **296** (1983), p. 953–958.

[39] S. E. Crans – « Quillen closed model structures for sheaves », *J. Pure Appl. Algebra* **101** (1995), p. 35–57.

[40] V. Drinfeld – « On the notion of geometric realization », *Moscow Math. J.* **4** (2004), no. 3, p. 619–626.

[41] E. Dror Farjoun – *Cellular spaces, nullspaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1622, Springer-Verlag, 1995.

[42] E. Dror Farjoun, K. Orr & S. Shelah – « Bousfield localization as algebraic closure of groups », *Israel J. Math.* **66** (1989), p. 143–153.

[43] E. Dror Farjoun & J. H. Smith – « Homotopy localization nearly preserves fibrations », *Topology* **34** (1995), p. 359–375.

[44] D. Dugger – « Combinatorial model categories have presentations », *Adv. Math.* **164** (2001), no. 1, p. 177–201.

[45] ———, « Replacing model categories with simplicial ones », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no. 12, p. 5003–5027.

[46] ———, « Universal homotopy theories », *Adv. Math.* **164** (2001), no. 1, p. 144–176.

[47] W. G. Dwyer – « Localizations », in *Axiomatic, enriched, and motivic homotopy theory*, Proceedings of the NATO ASI, Kluwer, 2004, p. 3–28.

[48] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan & J. H. Smith – *Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories*, Math. surveys and monographs, vol. 113, Amer. Math. Soc., 2004.

[49] W. G. Dwyer, M. J. Hopkins & D. M. Kan – « The homotopy theory of cyclic sets », *Trans. Amer. Math. Soc.* **291** (1985), p. 281–289.

[50] W. G. Dwyer & D. M. Kan – « Function complexes in homotopical algebra », *Topology* **19** (1980), p. 427–440.

[51] ———, « A classification theorem for diagrams of simplicial sets », *Topology* **23** (1984), p. 139–155.

[52] ———, « Homotopy theory and simplicial groupoids », *Indag. Math.* **46** (1984), p. 379–385.

[53] ———, « Equivariant homotopy classification », *J. Pure Appl. Algebra* **35** (1985), p. 269–285.

[54] ———, « Equivalences between homotopy theories of diagrams », in *Algebraic Topology and Algebraic K-theory*, Annals of Math. Studies, vol. 113, Princeton Univ. Press, 1987, p. 180–205.

[55] W. G. Dwyer, D. M. Kan & J. H. Smith – « Homotopy commutative diagrams and their realizations », *J. Pure Appl. Algebra* **57** (1989), p. 5–24.

[56] W. G. Dwyer & J. Spalinski – « Homotopy theories and model categories », p. 73–126, North-Holland, 1995.

[57] A. D. Elmendorf – « A simple formula for cyclic duality », *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no. 3, p. 709–711.

[58] C. Elvira & L. J. Hernandez – « Closed model categories for the n-type of spaces and simplicial sets », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **118** (1995), p. 93–103.

[59] R. Fritsch & D. Latch – « Homotopy inverses for nerve », *Math. Z.* **177** (1981), p. 147–179.

[60] P. Gabriel & M. Zisman – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik, vol. 35, Springer-Verlag, 1967.

[61] J. Giraud – « Méthode de la descente », *Bull. Soc. Math. France* **2** (1964).

[62] ———, *Cohomologie non abélienne*, Die Grundlegen der mathematischen Wissenschaften, vol. 179, Springer-Verlag, 1971.

[63] P. F. GOERSS & J. F. JARDINE – « Localization theories for simplicial presheaves », *Can. J. Math.* **50** (1998), no. 5, p. 1048–1089.

[64] ———, *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser, 1999.

[65] T. G. GOODWILLIE – « Cyclic homology, derivations, and the free loop space », *Topology* **24** (1985), no. 2, p. 187–215.

[66] M. GRANDIS & L. MAURI – « Cubical sets and their site », *Theory Appl. Categories* **11** (2003), no. 8, p. 185–211.

[67] A. GROTHENDIECK – *Pursuing stacks*, 1983, manuscrit. À paraître dans la série Documents Mathématiques, Soc. Math. France.

[68] ———, *Dérivateurs*, 1983-1990, manuscrit.

[69] ———, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques, vol. 3, Soc. Math. France, 2003, édition recomposée et annotée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics publié en 1971 par Springer-Verlag.

[70] A. GROTHENDIECK, M. ARTIN & J.-L. VERDIER – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-1973.

[71] A. HELLER – « Homotopy theories », *Mem. Amer. Math. Soc.* **71** (1988), no. 383.

[72] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Math. surveys and monographs, vol. 99, Amer. Math. Soc., 2003.

[73] A. HIRSCHOWITZ & C. SIMPSON – « Descente pour les n-champs », prépublication.

[74] M. HOVEY – *Model categories*, Math. surveys and monographs, vol. 63, Amer. Math. Soc., 1999.

[75] M. HOVEY, B. SHIPLEY & J. SMITH – « Symmetric spectra », *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), p. 149–208.

[76] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformation I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 239, Springer-Verlag, 1971.

[77] ———, *Complexe cotangent et déformation II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 283, Springer-Verlag, 1972.

[78] J. F. JARDINE – « Simplicial objects in a Grothendieck topos », *Contemporary Math.* **55** (1986), no. 1, p. 193–239.

[79] ———, « Simplicial presheaves », *J. Pure Appl. Algebra* **47** (1987), p. 35–87.

[80] ———, « Boolean localization in practice », *Doc. Math.* **1** (1996), no. 13, p. 245–275.

[81] ———, « Motivic symmetric spectra », *Doc. Math.* **5** (2000), p. 445–552.

[82] ———, « Stacks and the homotopy theory of simplicial sheaves », *Homology, Homotopy and Applications* **3** (2001), no. 2, p. 361–384.

[83] ———, « Categorical homotopy theory », *Homology, Homotopy and Applications* **8** (2006), no. 1, p. 71–144.

[84] A. Joyal – « Quasi-categories and Kan complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **175** (2002), no. 1-3, p. 207–222.

[85] A. Joyal & I. Moerdijk – « Toposes are cohomologically equivalent to spaces », *Amer. J. Math.* **112** (1990), no. 1, p. 87–95.

[86] ———, « Toposes as homotopy groupoids », *Adv. Math.* **80** (1990), no. 1, p. 22–38.

[87] A. Joyal & M. Tierney – « Universal bundles in simplicial sheaves », *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **12** (1990), no. 5, p. 167–172.

[88] ———, « Classifying spaces for sheaves of simplicial groupoids », *J. Pure Appl. Algebra* **89** (1993), no. 1-2, p. 135–161.

[89] ———, « On the theory of path groupoids », *J. Pure Appl. Algebra* **149** (2000), no. 1, p. 69–100.

[90] ———, « Quasi-categories vs Segal spaces », prépublication, 2006.

[91] D. M. Kan – « On c.s.s. complexes », *Amer. J. Math.* **179** (1959), p. 449–476.

[92] O. Leroy – *Groupoïde fondamental et théorème de Van Kampen en théorie des topos*, Cahiers Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, U.E.R. de Mathématiques, 1979.

[93] S. MacLane – *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1998, second edition.

[94] S. MacLane & I. Moerdijk – *Sheaves in geometry and logic*, Universitext, Springer-Verlag, 1994.

[95] G. Maltsiniotis – « Introduction à la théorie des dérivateurs (d'après Grothendieck) », prépublication, 2001.

[96] ———, *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, vol. 301, Soc. Math. France, 2005.

[97] ———, « Structures d'asphéricité », *Ann. Math. Blaise Pascal* **12** (2005), no. 1, p. 1–39.

[98] H. R. MARGOLIS – *Spectra and the Steenrod algebra*, vol. 29, North-Holland Math. Lib., 1983.

[99] J. P. MAY – *Simplicial objects in algebraic topology*, D. Van Nostrand, 1967.

[100] D. MCDUFF & G. SEGAL – « Homology fibrations and the group-completion theorem », *Invent. Math.* **31** (1976), p. 279–287.

[101] I. MOERDIJK – « Bisimplicial sets and the group-completion theorem », in *Algebraic K-theory : Connexions with Geometry and Topology*, NATO ASI Series C, vol. 279, Kluwer, Dordrecht, 1989, p. 225–240.

[102] ———, « Prodiscrete groups and Galois toposes », *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen* **A 92 (2)** (1989), p. 219–234.

[103] ———, *Classifying spaces and classifying topoi*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1616, Springer-Verlag, 1995.

[104] I. MOERDIJK & J.-A. SVENSSON – « Algebraic classification of equivariant homotopy 2-types », *J. Pure Appl. Algebra* **89** (1993), no. 1-2, p. 187–216.

[105] ———, « The equivariant Serre spectral sequence », *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no. 1, p. 263–278.

[106] F. MOREL – *Théorie homotopique des schémas*, Astérisque, vol. 256, Soc. Math. France, 1999.

[107] F. MOREL & V. VOEVODSKY – « $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes », *Publ. Math. I.H.É.S.* **90** (1999), p. 45–143.

[108] W. PITSCH & J. SCHERER – « Homology fibrations and "group completion" revisited », *Homology, Homotopy and Applications* **6** (2004), no. 1, p. 153–166.

[109] D. QUILLEN – *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[110] ———, « The geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration », *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), p. 1499–1500.

[111] ———, « Rational homotopy theory », *Ann. of Math.* **90** (1969), p. 205–295.

[112] ———, « Higher algebraic K-theory », in *Higher K-theories I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85–147.

[113] C. REZK – « Fibrations and homotopy colimits of simplicial sheaves », prépublication.

[114] J. L. RODRIGUEZ & D. SCEVENELS – « Homology equivalences inducing an epimorphism on the fundamental group and Quillen plus construction », *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2003), no. 3, p. 891–898.

[115] J. ROSICKÝ & W. THOLEN – « Left-determined model categories and universal homotopy theories », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), no. 9, p. 3611–3623.

[116] G. SEGAL – « Classifying spaces and spectral sequences », *Publ. Math. I.H.É.S.* **34** (1968), p. 105–112.

[117] ———, « Categories and cohomology theories », *Topology* **13** (1974), p. 293–312.

[118] J.-P. SERRE – « Homologie singulière des espaces fibrés », *Ann. of Math.* **54** (1951), p. 425–505.

[119] ———, « Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens », *Ann. of Math.* **58** (1953), p. 258–294.

[120] R. STEINER – « Simple omega-categories and chain complexes », prépublication, 2006.

[121] R. STREET – « The algebra of oriented simplexes », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), p. 283–335.

[122] R. THOMASON – « Homotopy colimits in the category of small categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85** (1979), p. 91–109.

[123] ———, « Algebraic K-theory and étale cohomology », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13** (1980), p. 437–552.

[124] ———, « *Cat* as a closed model category », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **XXI-3** (1980), p. 305–324.

[125] ———, « Symmetric monoidal categories model all connective spectra », *Theory Appl. Categories* **1** (1995), p. 78–118.

[126] B. TOËN – « Dualité de Tannaka supérieure I : Structures monoïdales », prépublication de l'Institut Max Planck, MPI-2000-57, 2000.

[127] ———, « Vers une interprétation galoisienne de la théorie de l'homotopie », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **XLIII-3** (2002), p. 257–312.

[128] A. TONKS – « Cubical groups which are Kan », *J. Pure Appl. Algebra* **81** (1992), p. 83–87.

[129] V. VOEVODSKY – « Δ-closed classes », prépublication, 2000.

[130] ———, « Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies », prépublication, 2000.

[131] ———, « Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topologies », prépublication, 2000.

[132] R. M. VOGT – « Homotopy limits and colimits », *Math. Z.* **134** (1973), p. 11–52.

[133] K. Worytkiewicz, K. Hess, P. E. Parent & A. Tonks – « A Model Structure à la Thomason on 2-*Cat* », *J. Pure Appl. Algebra*, à paraître.

INDEX

∞-asphérique, 187
∞-coasphérique, 187
∞-équivalence (dans *Cat*), 187
∞-équivalence (simpliciale), 84
0-équivalence (catégorique), 273
0-équivalence (simpliciale), 100
A-localisateur, 52
A-localisateur accessible, 52
A-localisateur engendré par une classe de flèches, 52
A-localisateur minimal, 52
A-localisateur propre, 65
A-localisateur régulier, 154
A-localisateur régulier engendré par une classe de flèches, 154
A-localisateur régulier minimal, 154
A-localisateur test, 185
A-prélocalisateur, 325
argument du petit objet (l'), 16
argument du petit objet (permettre l'), 15
augmentation, 338
bord, 320
carré absolument cartésien, 85
carré homotopiquement cartésien, 71
carré homotopiquement cocartésien, 72
carré homotopiquement cocartésien absolu, 214
carré $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien, 243
carré $\mathcal{W}$-homotopiquement cocartésien, 214
catégorie asphérique, 144
catégorie classifiante, 284
catégorie de modèles de Thomason sur *Cat*, 225
catégorie de modèles fermée, 31
catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, 32
catégorie de modèles fermée définie par une structure homotopique, 33
catégorie de modèles fermée engendrée par un couple, 32
catégorie de modèles fermée engendrée par une donnée homotopique, 33
catégorie de modèles fermée exponentielle, 124
catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, 124
catégorie de modèles fermée exponentielle à gauche, 124
catégorie de modèles fermée propre, 65
catégorie de modèles fermée propre à droite, 65
catégorie de modèles fermée propre à gauche, 65
catégorie des cubes, 335
catégorie des simplexes, 83
catégorie des simplexes cycliques, 351
catégorie des simplexes périodiques, 351
catégorie squelettique, 311
catégorie squelettique normale, 322
catégorie squelettique prérégulière, 324
catégorie squelettique régulière, 324
catégorie test, 178
catégorie test faible, 177
catégorie test locale, 178
catégorie test stricte, 190
catégorie totalement asphérique, 190
catégorie totalement $\mathcal{W}$-asphérique, 190
catégorie $\mathcal{W}$-asphérique, 144

catégorie $\mathcal{W}$-fibrante, 225
changement de base, 249
classe d'extensions anodines, 27
classe d'extensions anodines complète, 46
classe d'objets saturée par monomorphismes, 9
classe de flèches faiblement saturée, 56
classe de flèches fortement saturée, 32
classe de flèches saturée par monomorphismes, 10
classe de flèches stable par compositions transfinies, 3
classe de flèches stable par images directes, 3
classe de flèches stable par rétractes, 3
cocrible, 179
cocrible complémentaire, 179
cofibration (catégorique), 146
cofibration (d'une catégorie de modèles fermée), 31
cofibration de préfaisceaux, 33
cofibration de Thomason, 224
cofibration formelle, 217
cofibration formelle $\mathcal{W}$-triviale, 221
cofibration géométrique, 300
cofibration locale, 286
cofibration triviale au sens de $\mathcal{W}$, 187
cofibration triviale (d'une catégorie de modèles fermée), 32
cointégrale, 203
colimite homotopique, 126
complémentaire d'une immersion ouverte, 179
complétion régulière, 154
complétion simpliciale d'un A-localisateur, 118
complexe de Kan, 84
crible, 179
cylindre (d'un préfaisceau), 23
cylindre (morphisme de), 23
cylindre de Lawvere, 27
cylindre fonctoriel, 24
dégénérescence, 313
dérivateur, 282
descente, 294
discret ($A \times \Delta$-localisateur), 121
donnée homotopique, 29
donnée homotopique complète, 46
donnée homotopique élémentaire, 25
dual d'un rétracte par déformation fort, 34
ensemble cubique, 341
ensemble cyclique, 351
ensemble ordonné α-filtrant, 11
ensemble simplicial, 83
ensemble simplicial symétrique, 312
ensemble périodique, 351
épaississement, 353
équivalence faible absolue, 49
équivalence faible colocalement au-dessus d'une catégorie, 146
équivalence faible (d'une catégorie de modèles fermée), 31
équivalence faible localement au-dessus d'une catégorie, 144
équivalence faible propre à droite, 65
équivalence faible (relativement à un localisateur fondamental), 144
espace classifiant, 293
extension anodine, 33
faiblement W-fibrant (préfaisceau de groupes), 286
fibration au sens de $\mathcal{W}$, 187
fibration au sens de W, 54
fibration (catégorique), 146
fibration (d'une catégorie de modèles fermée), 31
fibration de Kan, 84
fibration de Thomason triviale, 224
fibration géométrique triviale, 300
fibration naïve, 33
fibration triviale (d'une catégorie de modèles fermée), 32
fibration triviale de préfaisceaux, 15, 33
fibré, 305
foncteur α-accessible, 12
foncteur accessible, 12
foncteur asphérique, 144
foncteur coasphérique, 145
foncteur d'extension de Kan, 92
foncteur de descente, 294
foncteur de localisation, 32
foncteur de monodromie, 294
foncteur de subdivision barycentrique, 92
foncteur ensemble des composantes connexes, 100, 273
foncteur fortement lisse, 230
foncteur fortement propre, 230
foncteur fortement $\mathcal{W}$-localement constant, 251
foncteur lisse, 227
foncteur localement asphérique, 264
foncteur localement $\mathcal{W}$-asphérique, 264
foncteur nerf, 88
foncteur propre, 227
foncteur test, 181
foncteur test local, 181
foncteur $\mathcal{W}$-asphérique, 144
foncteur $\mathcal{W}$-coasphérique, 145

foncteur $\mathcal{W}$-excellent, 266
foncteur $\mathcal{W}$-lisse, 227
foncteur $\mathcal{W}$-localement constant, 267
foncteur $\mathcal{W}$-propre, 227
foncteur $\mathcal{W}$-transverse à un autre, 251
foncteur W-asphérique, 152
foncteur W-coasphérique, 152
foncteur W-parfait, 155
foncteur W-régulier, 152
Galois, 295
grossier, 144
homotopie, 24
I-cofibration, 74
$\mathfrak{I}$-équivalence d'homotopie, 24
I-fibration, 74
$\mathfrak{I}$-homotopie, 24
$\mathfrak{I}$-homotope de façon élémentaire, 24
immersion fermée, 179
immersion ouverte, 179
intégrale, 147
lemme du rétracte, 15
limite homotopique, 126
limite inductive α-filtrante, 63
localisateur fondamental, 143
localisateur fondamental à engendrement asphérique, 199
localisateur fondamental accessible, 185
localisateur fondamental engendré par une classe de flèches, 185
localisateur fondamental faible, 240
localisateur fondamental géométrique, 371
localisateur fondamental grossier, 144
localisateur fondamental minimal, 145, 185
localisateur fondamental modelable par une petite catégorie, 185
localisateur fondamental propre, 195
localisateur fondamental trivial, 144
localisation, 32
modèle cellulaire, 17
monodromie, 294
monomorphisme normal, 320
morphisme cartésien, 146
morphisme de changement de base, 249
morphisme de Dwyer, 222
morphisme globalement trivial, 305
morphisme localement trivial, 305
morphisme W-localement constant, 101
n-asphérique, 364
n-équivalence, 364
n-équivalence forte, 370
n-extension anodine, 365
nerf, 88
objet α-accessible, 12
objet accessible, 12
objet de Lawvere, 26
objet de présentation finie, 12
objet dégénéré, 313
objet I-cofibrant, 74
objet n-fibrant, 365
permettre l'argument du petit objet, 15
précofibration, 146
précylindre fonctoriel, 338
précylindre fonctoriel augmenté, 338
préfaisceau asphérique, 176
préfaisceau de taille $\leqslant \alpha$, 13
préfaisceau faiblement $\mathcal{W}$-fibrant, 295
préfaisceau $\mathfrak{I}$-contractile, 24
préfaisceau localement asphérique, 176
préfaisceau localement $\mathcal{W}$-asphérique, 176
préfaisceau normal, 317
préfaisceau régulier, 324
préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique, 176
préfibration, 146
principe de Vopěnka, 54
propriété de relèvement à droite, 15
propriété de relèvement à gauche, 15
régulier (A-localisateur), 154
représentation, 283
représentation localement cofibrante, 286
représentation monogène, 300
rétracte, 3
rétracte par déformation, 217
rétracte par déformation fort, 34
rétracte (lemme du), 15
section dégénérée, 313
section dominante, 317
section non dégénérée, 313
section normale, 317
segment de Lawvere, 27
segment séparant, 26
structure de catégorie de modèles fermée injective, 292
structure de catégorie de modèles fermée locale, 292
structure homotopique, 29
structure homotopique complète, 46
structure homotopique engendrée par une donnée homotopique, 29
structure homotopique induite, 48
subdivision barycentrique, 92
torseur, 288
torseur sur son quotient, 288
trivialiser une classe de catégories, 199
$\mathcal{W}$-bifibration de Thomason, 226
$\mathcal{W}$-catégorie test, 178
$\mathcal{W}$-catégorie test faible, 177

$\mathcal{W}$-catégorie test locale, 178
$\mathcal{W}$-catégorie test stricte, 190
$\mathcal{W}$-cofibration triviale, 187
$\mathcal{W}$-équivalence, 144
$\mathcal{W}$-équivalence argument par argument, 149
$\mathcal{W}$-équivalence colocalement au-dessus d'une catégorie, 146
$\mathcal{W}$-équivalence (de préfaisceaux), 176
$\mathcal{W}$-équivalence locale, 176
$\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus d'une catégorie, 144
$\mathcal{W}$-équivalence sur A, 204
$\mathcal{W}$-excellent (foncteur), 266
$\mathcal{W}$-excellent (préfaisceau de groupes), 297
$\mathcal{W}$-fibrant (préfaisceau), 295
$\mathcal{W}$-fibration, 187
$\mathcal{W}$-fibration de Thomason, 225
$\mathcal{W}$-fibration faible, 241
$\mathcal{W}$-foncteur test, 181
$\mathcal{W}$-foncteur test local, 181
$\mathcal{W}$-transverse, 251
$\mathcal{W}$-type d'homotopie localement constant, 204
$\mathcal{W}/A$-équivalence, 204
W-cofibration triviale, 54
W-cylindre, 56
W-équivalence, 52
W-équivalence argument par argument, 130
W-équivalence (dans $\mathcal{C}at$), 151
W-équivalence universelle, 101
W-fibration, 54
W-fibration faible, 101
W-régulier (préfaisceau), 153
W-résolution cosimpliciale, 112
W-résolution cosimpliciale contractile, 112
W-résolution cosimpliciale normalisée, 112
W-segment, 112
X-équivalences faibles, 49

INDEX DES NOTATIONS

$|E|$ 1.2.1
$l(\mathcal{F})$ 1.2.19
$r(\mathcal{F})$ 1.2.19
$\mathsf{Cell}(\mathcal{F})$ 1.2.20
$(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X)$ 1.3.1
$Cyl(A)$ 1.3.1
$(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ 1.3.1
$I \otimes X$ 1.3.2
$\partial I \otimes X$ 1.3.2
$h_{\mathfrak{I}}(A)$ 1.3.4
Q 1.3.4
$I \otimes K \cup \{\varepsilon\} \otimes L$ 1.3.7
L 1.3.9
$\mathbb{L} = (L, \lambda^0, \lambda^1)$ 1.3.9
$\mathfrak{L}$ 1.3.9
An 1.3.10
$\mathbf{\Lambda}(T)$ 1.3.12
$\Lambda_{\mathfrak{I}}(S, \mathcal{M})$ 1.3.12
$\mathsf{An}_{\mathfrak{I}}(S)$ 1.3.14
$\mathsf{An}_{\mathfrak{I}}$ 1.3.14
$\Lambda'_I(\mathcal{M})$ 1.3.15
$(C, \mathsf{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ 1.3.18
W 1.3.18,1.3.21
Fib 1.3.18,1.3.21
Cof 1.3.18,1.3.21
$\mathbf{Ho}(C)$ 1.3.19
$\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ 1.3.19
FibN 1.3.21
$\mathfrak{I}/X = (I/X, \partial^0/X, \partial^1/X, \sigma/X)$ 1.3.50
$\mathcal{F}/X$ 1.3.51
An_X 1.3.54
FibN_X 1.3.54
Cof_X 1.3.54
Fib_X 1.3.54
W_X 1.3.54
W^a 1.3.55
$C(p)$, $C(\mathcal{F})$ 1.5.8
Δ 2.1.1
Δ_n 2.1.1
$\partial\Delta_n$ 2.1.1
Inv 2.1.1
$\boldsymbol{\Delta}_1$ 2.1.3
W_∞ 2.1.3
Λ^k_n 2.1.3
N 2.1.14
ξ 2.1.26, 8.2.21
Sd 2.1.26, 8.2.21
Ex 2.1.26, 8.2.21
Ex^∞ 2.1.31
κ^* 2.1.33
$Real_D$ 2.3.8
$Sing_D$ 2.3.8
W_Δ 2.3.22
$\widetilde{D}_!$ 2.3.26
I/j, u/j 3.1.1
$j\backslash I$, $j\backslash u$ 3.1.1
C^I 3.1.2
u^* 3.1.2
$u_!$ 3.1.2, 3.3.18
u_* 3.1.2
W^I 3.1.7, 3.1.23
$\mathbf{L}u_!$ 3.1.10, 3.1.26, 3.3.18
$\mathbf{R}u_*$ 3.1.11
$\mathbf{L}\varinjlim F$ 3.1.11, 3.1.27, 3.3.18
$\mathbf{R}\varprojlim F$ 3.1.11
$\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}$ 3.1.23
$\mathbf{Ho}_{\mathsf{W}}\,\widehat{A}(I)$ 3.1.23
i_C 3.2.1

C/X 3.2.1
j_C 3.2.1
i^* 3.2.4
i^*/C 3.2.6
cat 3.2.11
i^*_C 3.2.13
$\mathcal{W}$ 3.3.2
$\int F = \int_I F$ 3.3.13
θ_F 3.3.13
$\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ 3.3.17
$\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$ 3.3.17
Θ_I, Θ'_I 3.3.18
W_{Cat} 3.4.1
$\overline{\mathsf{W}}$ 3.4.14
$\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ 4.1.3
$\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}$ 4.1.4
$\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\,\widehat{A}(I)$ 4.2.5
$\mathcal{W}_\infty$ 4.2.20
$\mathbf{Hot}_\infty$ 4.2.20
$\nabla F = \nabla_A F$ 4.4.11
ζ_F 4.4.11
$\mathcal{W}/A$ 4.4.14
$\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}/\!\!/A$ 4.4.14
$\mathcal{W}_{asph}$ 6.1.7
$\mathcal{R}ep(\mathbb{A})$ 7.1.1
$\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ 7.1.2
$\mathcal{B}\mathbb{G}$ 7.1.2
$E\mathbb{G}$, $B\mathbb{G}$ 7.2.15
Desc, Mon 7.2.15
$H^1(X, \mathbb{G})$ 7.4.6
A_+, A_-, λ_A 8.1.1
Υ 8.1.5
Υ_n 8.1.5
$Sk^n\,A$ 8.1.15
$Sk^n\,X$ 8.1.17
∂a 8.1.30
$\square_n$ 8.4.1
$\square$ 8.4.1
$\blacktriangle$ 8.4.14
$\partial\square_n$ 8.4.20
$\sqcap_n^{i,\epsilon}$ 8.4.34
$\mathbf{L}$ 8.5.1
L_n 8.5.1
$\mathbf{L}(m,n)$ 8.5.1
$\mathbf{\Lambda}$ 8.5.1
Λ_n 8.5.1
$\mathbf{\Lambda}(m,n)$ 8.5.1
$\Delta_{\leqslant n}$ 9.1.1
$Cosk^n$ 9.1.1
$\mathcal{W}_n$ 9.2.1
W_E 9.4.1
$\mathcal{W}_E$ 9.4.4
$H\mathbb{Q}$ 9.4.4
$\mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$ 9.4.4
$\mathcal{W}_{\mathbb{Q},n}$ 9.4.4
$H\mathbb{Z}$ 9.4.7
$\mathcal{W}^+$ 9.4.7