

**COMPACTIFICATION DE L'ESPACE DES MODULES DES  
VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES**

[d'après V. Alexeev]

par Michel BRION

**INTRODUCTION**

Classiquement, les variétés abéliennes complexes de dimension  $g$  munies d'une polarisation principale sont paramétrées par le quotient  $A_g$  du demi-espace de Siegel  $\mathcal{H}_g$  sous l'action du groupe symplectique entier  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ . L'espace des modules  $A_g$  est un espace analytique complexe de dimension  $g(g+1)/2$  n'ayant que des singularités quotient par des groupes finis. En fait,  $A_g$  est un ouvert de Zariski d'une variété projective  $\overline{A}_g^{\mathrm{min}}$  (construite par Satake, Baily et Borel dans le cadre plus général des espaces localement symétriques) : la compactification minimale, dont le bord est de codimension  $g$ . La variété  $\overline{A}_g^{\mathrm{min}}$  est en général bien plus singulière que  $A_g$ , mais on en connaît des désingularisations partielles : les compactifications toroidales (construites pour les espaces localement symétriques par Ash, Mumford, Rapoport et Tai) dont le bord est un diviseur, et qui n'ont que des singularités quotient par des groupes finis.

Toutes ces compactifications de  $A_g$  admettent des modèles sur les entiers, les compactifications arithmétiques de Faltings et Chai. Cependant, elles sont construites par des procédés ad hoc qui n'en donnent pas d'interprétation modulaire, à savoir, comme espaces de paramètres d'objets géométriques (ce sens de l'adjectif « modulaire » est sans rapport avec les formes modulaires, qui ont des liens étroits avec la compactification minimale).

Des exemples importants de variétés abéliennes principalement polarisées sont les jacobiniennes des courbes algébriques irréductibles, lisses et complètes de genre  $g \geq 2$ . Ces courbes admettent un espace des modules  $M_g$  dont on connaît cette fois une compactification modulaire  $\overline{M}_g$ , paramétrant les courbes stables de genre arithmétique  $g$ . En associant à chaque courbe sa jacobienne, on obtient un morphisme  $t : M_g \rightarrow A_g$  qui est injectif d'après le théorème de Torelli ; de plus,  $M_g$ ,  $\overline{M}_g$  et  $t$  admettent des modèles entiers. La question se pose alors de construire une compactification modulaire et canonique de  $A_g$ , définie sur les entiers et qui permette de compactifier le morphisme de Torelli  $t$ .

Les travaux [2–4] d’Alexeev apportent une réponse complète à cette question. Sa compactification  $\overline{A}_g^{\text{mod}}$  est un espace des modules de « couples quasi-abéliens stables » ; il s’agit des couples  $(X, D)$  où  $X$  est une variété projective (connexe, mais non nécessairement irréductible) dans laquelle une variété semi-abélienne  $G$  opère avec un nombre fini d’orbites, et  $D$  est un diviseur effectif et ample sur  $X$  qui ne contient aucune de ces orbites. On suppose de plus que  $X$  est équidimensionnelle de dimension  $g$  et semi-normale (c’est une petite restriction sur ses singularités) et que les stabilisateurs de l’action de  $G$  sont des tores.

L’exemple le plus simple d’un tel couple est formé d’une variété abélienne opérant dans elle-même par translations, et d’un diviseur thêta. Un exemple plus singulier est celui où  $X$  est une cubique plane nodale munie de l’action du groupe multiplicatif  $G$  et du diviseur  $D$  formé d’un point distinct du point double ; c’est une dégénérescence des cubiques planes lisses munies d’un point, c’est-à-dire des courbes elliptiques.

À tout couple quasi-abélien stable on peut associer un complexe de polytopes convexes entiers appelé son type. Les couples dont le type est un « pavage périodique par des polytopes convexes entiers » d’un espace vectoriel  $\mathbb{R}^r$ ,  $r \leq g$ , sont paramétrés par la compactification modulaire  $\overline{A}_g^{\text{mod}}$ . Parmi ces couples, on trouve ceux associés comme précédemment aux variétés abéliennes principalement polarisées (c’est le cas où  $r = 0$ ), et aussi les jacobiniennes compactifiées des courbes stables de genre arithmétique  $g$ . Ceci permet d’obtenir un morphisme de Torelli compactifié  $\bar{\tau} : \overline{M}_g \rightarrow \overline{A}_g^{\text{mod}}$  ; son image est contenue dans l’adhérence de  $A_g$ , une composante irréductible de  $\overline{A}_g^{\text{mod}}$  dont la normalisation est une compactification toroïdale particulière, notée  $\overline{A}_g^{\text{Vor}}$ .

En général,  $\overline{A}_g^{\text{mod}}$  contient d’autres composantes irréductibles [2] ; autrement dit, ce n’est pas une compactification de  $A_g$  au sens usuel. Une description modulaire de la « composante principale »  $\overline{A}_g^{\text{Vor}}$  est proposée par Olsson [21] en termes de géométrie logarithmique ; plus généralement, Olsson obtient une compactification canonique des espaces  $A_{g,d}$  qui paramètrent les variétés abéliennes de dimension  $g$  munies d’une polarisation de degré  $d \geq 2$ . Mais la construction d’une compactification modulaire des espaces  $A_{g,d,n}$  (où on se donne aussi une structure de niveau  $n$ ) est une question ouverte.

La définition des couples quasi-abéliens stables semble assez arbitraire : pourquoi faudrait-il s’intéresser à des objets aussi singuliers ? En fait, la construction d’espaces des modules de variétés projectives et lisses fait apparaître des objets très analogues : afin de pouvoir considérer de telles variétés  $X$  dont la classe canonique  $K_X$  n’est pas ample (par exemple, les variétés abéliennes pour lesquelles  $K_X$  est triviale), on est amené à introduire des couples  $(X, D)$  où  $D$  est un diviseur effectif sur  $X$  tel que  $K_X + D$  est ample. Et pour obtenir des espaces des modules complets, il faut autoriser des dégénérescences singulières de ces couples en des « couples stables ».

Les courbes stables pointées forment le premier exemple de tels couples ; d’autres exemples importants sont les surfaces stables de [11]. Dans le manuscrit [1], Alexeev

formule une définition générale des couples stables, et montre que l'existence d'un espace des modules complet pour ceux-ci se déduit d'un ensemble de conjectures dans la classification des variétés algébriques : le programme de Mori logarithmique. Ces conjectures sont toujours ouvertes en grande dimension, et la construction de  $\overline{A}_g^{\text{mod}}$  s'obtient par des méthodes spécifiques liées aux symétries des variétés considérées.

Le but de ce texte est d'exposer une partie des résultats des articles [2–5] avec des prérequis modestes de géométrie algébrique (par exemple, le contenu du manuel [9]), dans l'espoir de rendre plus accessible un sujet où foisonnent les notations, les définitions et les concepts. C'est pourquoi on rassemble dans la première partie des résultats classiques sur les variétés abéliennes et leurs espaces des modules, tirés des ouvrages [8, 13, 15]. La seconde partie est consacrée à une construction de dégénérescences « maximales » de variétés abéliennes, qui fait apparaître beaucoup d'ingrédients de la compactification modulaire. Celle-ci fait l'objet de la troisième partie ; on y décrit la structure des couples stables qu'elle classe et on énonce les résultats principaux la concernant, en général sans démonstration détaillée.

Je remercie R. Bacher, O. Debarre, S. Druel et tout particulièrement V. Alexeev et G. Rémond pour des discussions très utiles et pour leurs commentaires sur les versions successives de ce texte ; il va de soi que je suis seul responsable des erreurs et imprécisions qui pourraient y subsister.

## 1. VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES ET LEURS ESPACES DES MODULES

Dans tout ce texte, on appelle *variété* un schéma réduit, connexe, séparé et de type fini sur un corps algébriquement clos  $k$  ; avec cette convention, les variétés ne sont pas nécessairement intègres. On appelle *courbe* une variété de dimension pure 1. Enfin, on identifie chaque faisceau inversible au fibré en droites dont il est le faisceau des sections locales.

### 1.1. Variétés abéliennes

Une variété complète est dite *abélienne* si elle est munie d'une structure de groupe algébrique. Une telle variété  $A$  est intègre, projective et lisse, et sa loi de groupe est commutative ; on la note additivement. De plus, la structure de groupe sur la variété  $A$  est uniquement déterminée par la donnée de l'élément neutre  $0$ . Pour tout  $a \in A$ , on note

$$\tau_a : A \rightarrow A, \quad x \mapsto x + a$$

la translation par  $a$ .

Le sous-groupe du groupe de Picard de  $A$  formé des classes d'isomorphie des fibrés algébriquement équivalents au fibré trivial est noté  $\text{Pic}^0(A)$  ou  $A^\vee$  ; c'est aussi une variété abélienne, la *duale* de  $A$ . Tout homomorphisme de variétés abéliennes  $f : A \rightarrow B$

définit un homomorphisme dual  $f^\vee : B^\vee \rightarrow A^\vee$ , la restriction de  $f^* : \text{Pic}(B) \rightarrow \text{Pic}(A)$ .

Soit  $L$  un fibré en droites sur  $A$ . Pour tout  $a \in A$ , le fibré en droites  $L^{-1} \otimes \tau_a^*(L)$  est algébriquement trivial; on obtient ainsi un morphisme

$$\lambda_L : A \rightarrow A^\vee, \quad a \mapsto [L^{-1} \otimes \tau_a^*(L)]$$

qui est en fait un homomorphisme de groupes d'après le *théorème du carré*

$$L \otimes \tau_{a+b}^*(L) \simeq \tau_a^*(L) \otimes \tau_b^*(L) \quad \text{pour tous } a, b \in A.$$

Pour que  $\lambda_L$  soit trivial (c'est-à-dire  $\tau_a^*(L) \simeq L$  pour tout  $a \in A$ ), il faut et il suffit que  $[L] \in \text{Pic}^0(A)$ .

Lorsque le fibré en droites  $L$  est ample,  $\lambda_L$  est une *isogénie* (à savoir, un homomorphisme de groupes algébriques, surjectif et de noyau fini) et son degré est le carré de  $h^0(L) := \dim H^0(A, L)$ ; de plus,  $H^i(X, L) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ . En particulier,  $A$  et  $A^\vee$  ont la même dimension, notée  $g$ , et le degré du fibré en droites ample  $L$  est  $g! h^0(L)$ .

Une *polarisation* de  $A$  est une isogénie

$$\lambda : A \rightarrow A^\vee$$

qui s'écrit sous la forme  $\lambda_L$  pour un fibré en droites ample  $L$ ; alors les fibrés en droites  $M$  tels que  $\lambda = \lambda_M$  ne sont autres que les translatés  $\tau_a^*(L)$ ,  $a \in A$ . Les classes de ces fibrés dans  $\text{Pic}(A)$  forment un translaté de  $A^\vee$  noté  $\text{Pic}^\lambda(A)$ ; l'entier positif  $h^0(L) = h^0(\tau_a^*(L))$  est appelé le *degré* de la polarisation  $\lambda$ .

Une polarisation  $\lambda = \lambda_L$  est dite *principale* si c'est un isomorphisme, c'est-à-dire si  $h^0(L) = 1$ ; autrement dit,  $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$  pour un diviseur  $\Theta$  effectif et ample, uniquement déterminé par  $L$ , et déterminé à translation près par  $\lambda$ . On dit alors que le couple  $(A, \lambda)$  est une *variété abélienne principalement polarisée*, qu'on abrège en v.a.p.p.

Les variétés abéliennes de dimension 1 ne sont autres que les courbes de genre 1 munies d'un point, qui définit une polarisation principale. En dimension au moins 2, certaines variétés abéliennes n'admettent aucune polarisation principale; mais toute variété abélienne est isogène à une v.a.p.p.

Étant données deux variétés abéliennes polarisées  $(A, \lambda)$  et  $(B, \mu)$ , un *morphisme*  $f : (A, \lambda) \rightarrow (B, \mu)$  est un homomorphisme  $f : A \rightarrow B$  tel que  $f^\vee \circ \mu \circ f = \lambda$ . Il en résulte que  $f$  est fini, et que c'est un isomorphisme lorsque  $\lambda$  et  $\mu$  ont le même degré. De plus, le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(A, \lambda)$  est fini et non trivial; en fait, il contient toujours l'involution  $[-1] : a \mapsto -a$ .

La classification des v.a.p.p est intimement liée à celles des courbes :

*Exemple 1.1.* — Soit  $C$  une courbe complète et lisse de genre  $g := h^1(\mathcal{O}_C) \geq 1$ . Soit  $J = J(C) := \text{Pic}^0(C)$  sa jacobienne (formée des classes d'équivalence linéaire des

diviseurs de degré 0); c'est une variété abélienne de dimension  $g$ . Le choix d'un point  $P$  de  $C$  définit un morphisme

$$f : C^{g-1} \rightarrow J, \quad (P_1, \dots, P_{g-1}) \mapsto P_1 + \dots + P_{g-1} - (g-1)P$$

dont l'image est un diviseur irréductible  $\Theta$  de  $J$ ; un autre choix de  $P$  fournit un translaté de  $\Theta$ , et ces diviseurs définissent une polarisation principale  $\theta$  de  $J$ . D'après le théorème de Torelli, la classe d'isomorphie de la courbe  $C$  est uniquement déterminée par celle de la v.a.p.p  $(J, \theta)$ .

## 1.2. L'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées

Pour définir précisément cet espace qui paramètre les classes d'isomorphie des v.a.p.p de dimension donnée, on a besoin de quelques notions de nature schématique.

Tous les schémas considérés sont supposés localement noethériens. Un *schéma en groupes* sur un schéma de base  $S$  est un  $S$ -schéma  $\pi : \mathcal{G} \rightarrow S$  muni de  $S$ -morphisms  $\mu : \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  (la multiplication),  $\varepsilon : S \rightarrow \mathcal{G}$  (l'élément neutre) et  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  (l'inverse) qui vérifient les axiomes des groupes.

Un *schéma abélien* sur  $S$  est un schéma en groupes  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow S$  propre, lisse et à fibres géométriques connexes (c'est-à-dire  $\mathcal{A}_{\bar{s}} := \mathcal{A} \times_S \text{Spec } \kappa(\bar{s})$  est connexe pour tout point  $s$  de  $S$ , où  $\kappa(\bar{s})$  désigne une clôture algébrique du corps résiduel  $\kappa(s)$ ). Chaque fibre géométrique  $\mathcal{A}_{\bar{s}}$  est une variété abélienne sur  $\kappa(\bar{s})$ ; on peut voir  $\mathcal{A}$  comme une famille de variétés abéliennes paramétrée par la base  $S$ . La loi de groupe  $\mu$  est commutative et uniquement déterminée par la section nulle  $\varepsilon$ . Lorsque  $S$  est le spectre d'un corps  $K$ , on dit aussi que  $\mathcal{A}$  est une variété abélienne sur  $K$ .

Tout schéma abélien  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow S$  admet un *dual*  $\mathcal{A}^\vee = \mathbf{Pic}^0(\mathcal{A}/S)$ ; c'est un schéma abélien sur  $S$ , dont chaque fibre géométrique est la duale de la fibre géométrique correspondante de  $\mathcal{A}$  [8, Sec.I.1.9]. Une *polarisation* est un morphisme  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\vee$  de schémas en groupes sur  $S$ , qui induit une polarisation  $\lambda_{\bar{s}} : \mathcal{A}_{\bar{s}} \rightarrow \mathcal{A}_{\bar{s}}^\vee$  pour tout point géométrique  $\bar{s}$ . Le degré de  $\lambda_{\bar{s}}$  est constant sur toute composante connexe de  $S$ . La polarisation est *principale* si ce degré est 1, c'est-à-dire si  $\lambda$  est un isomorphisme. On dit alors que le couple  $(\mathcal{A}, \lambda)$  est un *schéma abélien principalement polarisé*, abrégé en s.a.p.p.

Parmi les s.a.p.p de dimension relative  $g \geq 1$  fixée, il n'existe aucun schéma *universel*, dont tout autre s.a.p.p s'obtient par un unique changement de base; en effet, comme on l'a vu, les v.a.p.p admettent des automorphismes non triviaux. On dit que les s.a.p.p n'ont pas d'*espace des modules fin*. Cependant, il existe un schéma  $\mathcal{A}_g$  qui est la meilleure approximation schématique de la base d'un objet universel, et dont les points sur  $k$  ne sont autres que les classes d'isomorphie des v.a.p.p.

Plus précisément, considérons le foncteur contravariant  $\mathcal{A}_g$  de la catégorie des schémas vers celle des ensembles, qui à tout schéma  $S$  associe l'ensemble des classes d'isomorphie (dans un sens évident) des s.a.p.p de dimension relative  $g$  sur  $S$ .

D'après [15, Thm.7.10], ce foncteur admet un *espace des modules grossier*, c'est-à-dire la donnée d'un schéma  $A_g$  et d'un morphisme de foncteurs  $\varphi : \mathcal{A}_g \rightarrow h_{A_g} := \text{Mor}(-, A_g)$  tels que :

(i) L'application induite  $\mathcal{A}_g(\text{Spec } k) \rightarrow h_{A_g}(\text{Spec } k) = A_g(k)$  est bijective pour tout corps algébriquement clos  $k$ .

(ii) Pour tout schéma  $M$  et tout morphisme de foncteurs  $\psi : \mathcal{A}_g \rightarrow h_M$ , il existe un unique morphisme de schémas  $f : A_g \rightarrow M$  tel que  $\psi = f \circ \varphi$ .

(On note encore  $f : h_{A_g} \rightarrow h_M$  la composition par  $f$ .)

La propriété universelle (ii) détermine le schéma  $A_g$  à un unique isomorphisme près. D'après [15, Thm.7.10] et [8, Thm.V.2.3], ce schéma est normal, plat et quasi-projectif sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , de dimension relative  $g(g+1)/2$ .

De même, étant donné un entier  $g \geq 2$ , on considère le foncteur contravariant  $\mathcal{M}_g$  qui à tout schéma  $S$  associe l'ensemble des classes d'isomorphie des *courbes de genre  $g$  sur  $S$* , c'est-à-dire des morphismes  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$  propres, lisses, et dont toute fibre géométrique est une courbe de genre  $g$ . Ce foncteur admet aussi un espace des modules grossier qu'on note  $M_g$ ; c'est un schéma normal, plat et quasi-projectif sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , de dimension relative  $3g-3$ .

À toute courbe  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$  de genre  $g$  on associe sa jacobienne relative  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{C}) := \text{Pic}^0(\mathcal{C}/S)$ . C'est un schéma abélien sur  $S$  dont chaque fibre géométrique  $\mathcal{J}_{\bar{s}}$  est la jacobienne  $J(\mathcal{C}_{\bar{s}})$ ; de plus,  $\mathcal{J}$  est projectif sur  $S$ , et les isomorphismes  $\theta_{\bar{s}} : J(\mathcal{C}_{\bar{s}}) \rightarrow J(\mathcal{C}_{\bar{s}})^\vee$  se globalisent en un isomorphisme  $\theta : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^\vee$ . Grâce à la propriété universelle de  $M_g$ , on obtient donc le *morphisme de Torelli*  $t : M_g \rightarrow A_g$  qui est injectif sur les points géométriques (pour tout cela, voir [15]).

### 1.3. Variétés semi-abéliennes et théorème de réduction semi-stable

Une *variété semi-abélienne* est un groupe algébrique  $G$ , extension d'une variété abélienne  $A$  par un *tore*  $T$  (isomorphe à un produit fini  $\mathbb{G}_m^r$  de groupes multiplicatifs). Un tel groupe  $G$  est connexe et commutatif, et  $T$  est son unique sous-tore maximal; la dimension  $r$  de  $T$  est appelée le *rang* de  $G$ , et  $A = G/T$  est sa *partie abélienne*.

Rappelons la classification des variétés semi-abéliennes. Soient  $\Lambda := \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}^r$  le *groupe des caractères* de  $T$ , et  $\pi : G \rightarrow A$  le quotient par  $T$ . On a une décomposition en espaces propres de  $T$

$$(1) \quad \pi_*(\mathcal{O}_G) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$$

où chaque  $L_\lambda$  est un fibré en droites sur  $A$ . De plus,  $L_0$  est le fibré trivial, et la multiplication de  $\pi_*(\mathcal{O}_G)$  définit des isomorphismes  $L_\lambda \otimes L_\mu \simeq L_{\lambda+\mu}$  pour tous  $\lambda, \mu \in \Lambda$ . Enfin, chaque  $L_\lambda$  est algébriquement trivial, car l'action de  $G$  par multiplication préserve la décomposition (1). On obtient donc un homomorphisme

$$c : \Lambda \rightarrow A^\vee, \quad \lambda \mapsto [L_\lambda]$$

qui classe l'extension  $1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$ .

*Exemple 1.2.* — Soit  $C$  une courbe complète et *nodale* (c'est-à-dire dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires). Le groupe  $\text{Pic}^0(C)$  (formé des classes d'isomorphie des fibrés en droites sur  $C$  dont la restriction à toute composante irréductible est de degré 0) est une variété semi-abélienne de dimension  $g := h^1(\mathcal{O}_C)$ , le *genre arithmétique* de  $C$ , et de rang  $d - n + 1$  où  $d$  désigne le nombre des points doubles de  $C$ , et  $n$  le nombre de ses composantes irréductibles. La partie abélienne de  $\text{Pic}^0(C)$  est la jacobienne de la normalisée  $\tilde{C}$ .

En effet, soit  $f : \tilde{C} \rightarrow C$  la normalisation et soient  $C_1, \dots, C_n$  les composantes irréductibles de  $C$ ; alors  $\tilde{C}$  est la réunion disjointe des normalisées  $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n$ . On a une suite exacte de faisceaux sur  $C$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{F}$  est un faisceau gratte-ciel de fibre  $k$  en chaque point double, et 0 ailleurs. Puisque le morphisme  $f$  est fini, on en déduit une suite exacte longue

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C) = k \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = k^n \rightarrow H^0(\mathcal{F}) = k^d \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) \rightarrow 0$$

d'où  $g = d - n + 1 + \sum_{i=1}^n g(\tilde{C}_i)$ . De même, la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{O}_C^* \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}}^*) \rightarrow \mathcal{F}^* \rightarrow 0$  conduit à une suite exacte longue

$$(2) \quad 1 \rightarrow k^* \rightarrow (k^*)^n \rightarrow (k^*)^d \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C^*) = \text{Pic}(C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}^*) = \text{Pic}(\tilde{C}) \rightarrow 0.$$

D'où une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m^{d-n+1} \rightarrow \text{Pic}^0(C) \rightarrow \prod_{i=1}^n J(\tilde{C}_i) \rightarrow 0$$

ce qui démontre nos assertions.

Le tore maximal de  $\text{Pic}^0(C)$  se lit aussi sur le *graphe dual* de  $C$ . Il s'agit du graphe non orienté, noté  $\Gamma$  ou  $\Gamma(C)$ , dont les sommets sont les composantes irréductibles de  $C$ ; deux sommets distincts  $C_i, C_j$  sont joints par autant d'arêtes que le nombre de leurs points (doubles) communs, et un sommet  $C_i$  porte autant de boucles que le nombre de points doubles de  $C_i$ . Le tore maximal de  $\text{Pic}^0(C)$  est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie  $H^1(\Gamma, k^*)$ ; en effet, dans la suite exacte (2), l'application  $(k^*)^n \rightarrow (k^*)^d$  s'identifie au cobord  $C^0(\Gamma, k^*) \rightarrow C^1(\Gamma, k^*)$ . Par suite, le groupe des caractères de ce tore est le groupe d'homologie  $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ , et le rang de  $\text{Pic}^0(C)$  est le nombre de cycles libres du graphe  $\Gamma$ .

Les variétés semi-abéliennes apparaissent aussi dans les dégénérescences à un paramètre des variétés abéliennes.

Introduisons quelques notations : soit  $R$  un anneau de valuation discrète, complet, de corps des fractions  $K$ , d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel  $k$ . Le schéma  $S := \text{Spec}(R)$  est appelé un *trait* de point générique  $\eta := \text{Spec}(K)$  et de point fermé  $s := \text{Spec}(k)$ . Tout schéma  $\mathcal{X}$  sur  $S$  définit ainsi une fibre générique  $\mathcal{X}_\eta := \mathcal{X} \times_S \eta$  et une fibre spéciale  $\mathcal{X}_s := \mathcal{X} \times_S s$ . On choisit un générateur  $z$  de  $\mathfrak{m}$ , qu'on peut voir comme

une coordonnée locale sur le germe de courbe  $(S, s)$ . Pour tout entier  $n$  strictement positif, le quotient  $R' := R[z']/(z'^n - z)$  est encore un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}' = z'R'$  et de corps résiduel  $k$ ; c'est la clôture intégrale de  $R$  dans le corps  $K' := K[z']/(z'^n - z)$ . On dit que  $S' := \text{Spec } R'$  est obtenu à partir de  $S$  par extension finie ramifiée.

On peut maintenant énoncer le théorème de réduction semi-stable [8, Sec.I.2].

**THÉORÈME 1.3.** — *Soit  $\mathcal{A}_\eta$  un schéma abélien sur  $\eta$  (autrement dit, une variété abélienne sur  $K$ ). Alors, quitte à faire un changement de base fini ramifié  $S' \rightarrow S$ , on peut étendre  $\mathcal{A}_\eta$  en un schéma en groupes lisse  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow S$  dont la fibre spéciale  $\mathcal{A}_s$  est une variété semi-abélienne sur  $k$ ; une telle extension est unique à isomorphisme près.*

L'extension  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow S$  est un *schéma semi-abélien*, c'est-à-dire un schéma en groupes séparé, lisse, et dont toutes les fibres géométriques sont des variétés semi-abéliennes (dont le rang varie en général : un schéma semi-abélien n'est pas nécessairement extension d'un schéma abélien par un tore). D'après [8, p. 35], la donnée d'une polarisation  $\lambda_\eta$  de  $\mathcal{A}_\eta$  induit une polarisation  $\lambda_s$  de la partie abélienne  $A_s$  de la fibre spéciale, et si  $\lambda_\eta$  est principale, alors  $\lambda_s$  l'est aussi.

Le théorème de réduction semi-stable admet un analogue pour les courbes de genre  $g$  : cette fois, la fibre spéciale est une *courbe stable de genre  $g$* , c'est-à-dire une courbe complète, nodale, de genre arithmétique  $g$ , et dont le groupe des automorphismes est fini.

Plus généralement, une *courbe stable de genre  $g$*  sur un schéma  $S$  est un morphisme propre et plat  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$  dont toutes les fibres géométriques sont des courbes stables de genre  $g$ ; le théorème de réduction semi-stable reste valable [23]. Les courbes stables de genre  $g$  admettent un espace des modules grossier  $\overline{M}_g$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , qui vérifie les critères valuatifs de séparation et de propreté d'après ce même théorème. En fait,  $\overline{M}_g$  est projectif sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  (voir [15]) et les courbes stables de genre  $g$  sont les objets d'un *champ de Deligne–Mumford propre* qui compactifie le champ des courbes de genre  $g$  (pour ces notions, voir [12]).

#### 1.4. Compactifications des espaces des modules des v.a.p.p.

D'après [8, Thm.V.2.3],  $A_g$  admet une compactification  $\overline{A}_g^{\min}$  dite *minimale*; c'est un schéma normal, plat et projectif sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , qui contient  $A_g$  comme ouvert dense et dont le bord  $\overline{A}_g^{\min} \setminus A_g$  est réunion disjointe de  $g$  sous-schémas localement fermés, isomorphes respectivement à  $A_{g-1}, \dots, A_1, A_0$ . De plus, l'adhérence de chaque  $A_a$  dans  $\overline{A}_g^{\min}$  est isomorphe à la compactification minimale  $\overline{A}_a^{\min}$ .

Soit  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow S$  une dégénérescence à un paramètre comme dans le théorème 1.3. D'après la définition de  $A_g$  et le critère valuatif de propreté, il existe un unique morphisme  $\varphi : S \rightarrow \overline{A}_g^{\min}$  tel que  $\varphi(\eta)$  est la classe d'isomorphie de  $(A_\eta, \lambda_\eta)$  (vue



comme un point de  $A_g$ ). Et d'après [8, Thm.V.2.3],  $\varphi(s)$  est la classe de  $(A_s, \lambda_s)$ , un point géométrique de  $A_a$  où  $a$  est la dimension de la partie abélienne  $A_s$  de la fibre spéciale. Ainsi, la compactification minimale ne rend compte que très partiellement des dégénérescences.

On connaît une famille d'autres compactifications de  $A_g$ , les *compactifications toroïdales* [6, 8] qui dépendent de données combinatoires qu'on va préciser. Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension  $g$  muni d'un réseau  $\Lambda$ . L'espace vectoriel réel  $\mathcal{Q}$  des formes quadratiques sur  $V$  est alors muni du réseau  $\Gamma$  des formes *entières*, c'est-à-dire dont la forme bilinéaire symétrique associée est à valeurs entières sur  $\Lambda \times \Lambda$ . (On convient que la forme bilinéaire  $B$  associée à une forme quadratique  $Q$  est donnée par  $B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ ). On note  $\mathcal{Q}^+$  le cône convexe de  $\mathcal{Q}$  engendré par les formes quadratiques entières et positives; les points de  $\mathcal{Q}^+$  ne sont autres que les formes quadratiques positives sur  $V$  à noyau rationnel. Le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(\Lambda) \simeq \text{GL}_g(\mathbb{Z})$  opère dans  $\mathcal{Q}$  par changement de variables; cette opération préserve  $\Gamma$  et  $\mathcal{Q}^+$ .

Une *subdivision admissible* de  $\mathcal{Q}^+$  est une famille  $\Sigma$  de parties de  $\mathcal{Q}^+$  telles que :

- (i) Chaque  $\sigma \in \Sigma$  est un cône convexe polyédral rationnel (pour le réseau  $\Gamma$ ), et ces cônes recouvrent  $\mathcal{Q}^+$ .
- (ii) Toute face d'un cône de  $\Sigma$  appartient à  $\Sigma$ .
- (iii) L'intersection de deux cônes de  $\Sigma$  est une face commune de ces cônes.
- (iv)  $\Sigma$  est invariant par l'action de  $\text{Aut}(\Lambda)$  et ne contient qu'un nombre fini d'orbites pour cette action.

Une subdivision admissible  $\Sigma$  est dite *lisse* lorsque tous ses cônes maximaux sont engendrés par des bases de  $\Gamma$ ; elle est dite *projective* s'il existe une fonction continue et convexe  $h : \mathcal{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- (a)  $h(Q) > 0$  pour toute forme quadratique  $Q$  définie positive.
- (b) La restriction de  $h$  à chaque cône maximal de  $\Sigma$  s'étend en une (unique) forme linéaire sur  $\mathcal{Q}$ , à valeurs entières sur  $\Gamma$ .
- (c) Les formes linéaires associées à deux cônes maximaux distincts sont distinctes.

Il existe des subdivisions admissibles, et chacune d'elles peut être raffinée en une subdivision admissible, projective et lisse. De plus, deux subdivisions admissibles ont toujours un raffinement commun.

À toute subdivision admissible  $\Sigma$  on associe une compactification  $\overline{A}_{g, \mathbb{C}}^\Sigma$  de l'espace analytique complexe  $A_{g, \mathbb{C}}$ . En général,  $\overline{A}_{g, \mathbb{C}}^\Sigma$  n'est pas un schéma sur  $\text{Spec } \mathbb{C}$ , mais un espace analytique complexe compact qui admet une stratification indexée par les orbites de  $\text{Aut}(\Lambda)$  dans  $\Sigma$ . La strate associée au cône nul n'est autre que  $A_{g, \mathbb{C}}$ , et l'identité de  $A_{g, \mathbb{C}}$  s'étend en un morphisme  $\overline{A}_{g, \mathbb{C}}^\Sigma \rightarrow \overline{A}_{g, \mathbb{C}}^{\min}$ . Pour tout raffinement  $\Sigma'$  de  $\Sigma$ , on a aussi un morphisme  $\overline{A}_{g, \mathbb{C}}^{\Sigma'} \rightarrow \overline{A}_{g, \mathbb{C}}^\Sigma$  qui étend l'identité de  $A_{g, \mathbb{C}}$ .

Lorsque  $\Sigma$  est projective,  $\overline{A}_{g,\mathbb{C}}^\Sigma$  s'obtient à partir de  $\overline{A}_{g,\mathbb{C}}^{\min}$  en éclatant un certain faisceau d'idéaux («critère de Tai», voir [6, Sec.IV.2]); en particulier,  $\overline{A}_{g,\mathbb{C}}^\Sigma$  est une variété projective. Le critère de Tai reste valable sur les entiers grâce aux résultats de [8]; on obtient ainsi un schéma  $\overline{A}_g^\Sigma$ , projectif et plat sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , qui est un modèle entier de  $\overline{A}_{g,\mathbb{C}}^\Sigma$ . Un tel modèle entier existe aussi lorsque  $\Sigma$  est lisse [8, Thm.IV.5.7]; c'est une *espace algébrique* propre et plat sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ . En fait,  $\overline{A}_g^\Sigma$  est l'espace des modules grossiers d'un champ de Deligne–Mumford propre qui compactifie le champ des s.a.p.p.

Parmi les subdivisions admissibles, on distingue la *deuxième subdivision de Voronoi* dont l'intérieur relatif de chaque cône est l'ensemble des formes quadratiques positives qui donnent une décomposition de Delaunay fixée de  $V$  (la définition de la décomposition de Delaunay est rappelée en 2.1). Cette subdivision, notée  $\text{Vor}$ , est toujours projective [3, Cor.5.12.8], mais elle n'est lisse qu'en dimension  $g \leq 4$  (voir [5, Sec.1.14] et ses références). De plus, le morphisme de Torelli  $t : M_g \rightarrow A_g$  se prolonge en un morphisme

$$\bar{t}_{\mathbb{C}} : \overline{M}_{g,\mathbb{C}} \rightarrow \overline{A}_{g,\mathbb{C}}^{\text{Vor}}$$

qui est un isomorphisme lorsque  $g = 2$ , mais qui n'est pas injectif dès que  $g \geq 3$  (voir [19] et ses références).

## 2. CONSTRUCTION DE DÉGÉNÉRESCENCES MAXIMALES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES

Les dégénérescences à un paramètre des variétés abéliennes  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow S$  obtenues grâce au théorème de réduction semi-stable (1.3) ont l'inconvénient de ne pas être propres en général : il existe de telles dégénérescences, dites *maximales*, dont la fibre spéciale est un tore. Mais on peut obtenir des dégénérescences propres  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$  de la fibre générique  $\mathcal{A}_\eta$  grâce à une construction de Mumford [14], reprise et développée par Faltings et Chai [8], puis par Alexeev et Nakamura [5]. Dans cette partie, on expose l'approche de [5] dans le cas particulier des dégénérescences maximales des v.a.p.p. (le cas général n'en est pas très éloigné, mais nécessite beaucoup plus de notations).

L'idée, due à Tate, est de voir  $\mathcal{A}_\eta$  comme le quotient d'un tore  $(K^*)^g$  par un sous-groupe  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^g$  de périodes. On construit des compactifications partielles  $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow S$  de  $(K^*)^g = \tilde{\mathcal{X}}_\eta$  qui sont munies d'une action propre de  $\Lambda$  prolongeant son action dans  $(K^*)^g$  par multiplication, et dont la fibre spéciale  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  est la réunion des translatés par  $\Lambda$  d'une variété torique sous le tore  $(k^*)^g$ . Le quotient  $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}}/\Lambda$  est alors une dégénérescence de  $\mathcal{A}_\eta$ , propre sur  $S$  et dont la fibre spéciale admet une action de  $(k^*)^g$  avec un nombre fini d'orbites.

## 2.1. Décompositions de Delaunay et de Voronoi

On commence par présenter des objets de géométrie des nombres qui apparaîtront comme données combinatoires des dégénérescences.

Soit  $\Lambda$  un réseau d'un espace vectoriel réel  $V$  de dimension  $g$ . Soit  $Q$  une forme quadratique définie positive sur  $V$ . Étant donné  $v \in V$ , un point  $\lambda \in \Lambda$  est dit à *distance minimale de  $v$*  si  $Q(v - \lambda) = \min_{\mu \in \Lambda} Q(v - \mu)$ . Il existe de tels points, et ils sont en nombre fini ; leur enveloppe convexe dans  $V$  est la *cellule de Delaunay de  $v$* , notée  $D(v)$ . On a  $D(v + \lambda) = D(v) + \lambda$  pour tous  $v \in V$  et  $\lambda \in \Lambda$ .

Chaque cellule est un polytope convexe dont l'intersection avec  $\Lambda$  est formée de ses sommets ; les cellules minimales ne sont autres que les points de  $\Lambda$ . De plus, chaque face d'une cellule est une cellule, et l'intersection de deux cellules est une face de chacune d'elles. Enfin, les cellules recouvrent  $V$  et ne forment qu'un nombre fini d'orbites pour l'action de  $\Lambda$  par translation. On dit que les cellules de Delaunay forment un *pavage périodique* de  $V$  par des polytopes convexes entiers, la *décomposition de Delaunay*  $\text{Del}_Q$ . Pour une forme quadratique générale, la décomposition est une triangulation, c'est-à-dire les cellules sont des simplexes.

Pour toute cellule de Delaunay  $\sigma$ , l'ensemble des  $v \in V$  tels que  $D(v) = \sigma$  est l'intérieur relatif d'un polytope convexe noté  $\sigma^\vee$  ou encore  $V(\sigma)$ , et appelé la *cellule de Voronoi duale de  $\sigma$* . Lorsque  $\sigma$  est maximale,  $\sigma^\vee$  est formée d'un point unique : le centre de la sphère circonscrite aux sommets de  $\sigma$ , noté  $v(\sigma)$  et appelé le *centre de  $\sigma$* . En notant  $B$  la forme bilinéaire symétrique associée à  $Q$  (de sorte que  $Q(v) = \frac{1}{2}B(v, v)$ ), le centre de  $\sigma$  est l'unique solution du système d'équations linéaires

$$(3) \quad B(v(\sigma) - \lambda, \mu - \lambda) = Q(\mu - \lambda)$$

où  $\lambda$  est un sommet fixé de  $\sigma$ , et  $\mu$  décrit les autres sommets.

Les cellules de Voronoi forment aussi un pavage périodique de  $V$  par des polytopes convexes (en général non entiers) ; c'est la *décomposition de Voronoi*  $\text{Vor}_Q$ . Les cellules de Voronoi sont en bijection décroissante avec celles de Delaunay *via*  $\sigma \mapsto \sigma^\vee$  ; de plus,  $\dim(\sigma) = \text{codim}(\sigma^\vee)$ .

*Exemple 2.1.* — Lorsque  $g = 1$ , la décomposition de Delaunay de  $V \simeq \mathbb{R}$  est formée des intervalles entiers  $[n, n + 1]$ , et celle de Voronoi, des intervalles  $[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ .

Lorsque  $g = 2$ , on obtient deux décompositions de Delaunay de  $V \simeq \mathbb{R}^2$ , associées aux réseaux carré et hexagonal. Dans le premier cas, les cellules de Delaunay maximales sont le carré unité et ses translatés par  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$  ; les cellules de Voronoi maximales sont les translatés de ces carrés par le vecteur  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Dans le deuxième cas, les cellules de Delaunay maximales sont des triangles équilatéraux ; elles forment deux orbites sous  $\Lambda$ . Les cellules de Voronoi maximales sont des hexagones réguliers.

Considérons maintenant l'application quadratique

$$(4) \quad F : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto Q(v) + L(v)$$

où  $L$  est une forme linéaire sur  $V$ . Soit  $P$  l'enveloppe convexe dans  $V \times \mathbb{R}$  des points  $(\lambda, F(\lambda))$  où  $\lambda \in \Lambda$ . On obtient alors facilement :

LEMME 2.2. — *Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , le cône tangent à  $P$  en le point  $(\lambda, F(\lambda))$  (c'est-à-dire le cône convexe de  $V \times \mathbb{R}$  engendré par  $-(\lambda, F(\lambda)) + P$ ) est l'ensemble des  $(v, t) \in V \times \mathbb{R}$  tels que*

$$t \geq B(v(\sigma), v) + L(v) = dF_{v(\sigma)}(v)$$

où  $\sigma$  parcourt les cellules de Delaunay maximales contenant  $\lambda$ . De plus, l'intersection de  $P$  avec l'hyperplan d'équation  $t - F(\lambda) = dF_{v(\sigma)}(v - \lambda)$  est l'enveloppe convexe des  $(\mu, F(\mu))$  où  $\mu$  décrit les sommets de  $\sigma$ .

Il en résulte que chaque  $(\lambda, F(\lambda))$  est un sommet de  $P$ ; plus généralement, le bord de  $P$  admet un pavage par des polytopes convexes  $P(\sigma)$  dont les projections sur  $V$  ne sont autres que les cellules de Delaunay  $\sigma$ . De plus, l'éventail normal de  $P$  (formé des cônes duaux aux cônes tangents aux sommets, ainsi que des faces de ces cônes duaux) est formé de l'origine et des cônes engendrés par les images des cellules de Voronoi via l'application affine injective

$$(-dF, 1) : V \rightarrow V \times \mathbb{R}, \quad v \mapsto (-dF_v, 1).$$

Pour tous  $\lambda \in \Lambda$  et  $v \in V$ , on pose

$$h(\lambda; v) := \max_{\sigma \ni \lambda} dF_{v(\sigma)}(v)$$

où  $\sigma$  décrit les cellules de Delaunay maximales qui contiennent  $\lambda$ . La fonction  $h(\lambda; -)$  est linéaire sur chaque cône engendré par  $-\lambda + \sigma$ , ou encore par les vecteurs  $\mu - \lambda$  où  $\mu$  décrit les sommets de  $\sigma$ . Ces vecteurs sont appelés les *vecteurs de Delaunay* de la cellule maximale  $\sigma$  en son sommet  $\lambda$ .

Comme les vecteurs de Delaunay appartiennent à  $\Lambda$  et engendrent l'espace vectoriel  $V$ , il existe un entier positif  $n$  tel que le réseau qu'ils engendrent contient  $n\Lambda$ . Le plus petit tel entier  $n$  est appelé l'*indice de nilpotence* de  $\sigma$  en  $\lambda$ . Quand  $\sigma$  et  $\lambda$  varient, les indices de nilpotence sont en nombre fini, et leur ppcm est appelé l'indice de nilpotence de la décomposition de Delaunay. Cet indice vaut toujours 1 en dimension  $g \leq 4$ , car les vecteurs de Delaunay engendrent alors  $\Lambda$ . Mais ceci ne s'étend pas aux dimensions  $g \geq 5$ ; voir [5, Sec.1.14,1.15].

## 2.2. Construction de compactifications partielles

On conserve les notations de 2.1 et on suppose que  $F$  est à valeurs entières sur  $\Lambda$ , si bien que  $Q$  et  $L$  sont rationnelles. Les polytopes  $P(\sigma)$  sont alors entiers, et les centres  $v(\sigma)$  sont rationnels d'après (3); par suite, l'éventail normal à  $P$  est rationnel. On va associer à cet éventail une compactification partielle du tore  $\text{Hom}(\Lambda, K^*) \simeq (K^*)^g$ , avec les notations de 1.3.

Soit  $R[\Lambda]$  l'algèbre du groupe  $\Lambda$  sur  $R$ , c'est-à-dire le  $R$ -module libre sur les  $e^\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , muni du produit défini par  $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ . Dans la  $R$ -algèbre graduée

$$R[\Lambda][\theta] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda, n \in \mathbb{N}} R e^\lambda \theta^n$$

où  $\theta$  est une indéterminée de degré 1, on considère la sous- $R$ -algèbre  $\mathcal{S}$  engendrée par les monômes

$$\zeta_\lambda := z^{F(\lambda)} e^\lambda \theta \quad (\lambda \in \Lambda)$$

ainsi que le sous- $R$ -module  $\mathcal{R}$  engendré par les monômes  $z^m e^\lambda \theta^n$  tels que  $(\lambda, m) \in nP$ . Alors  $\mathcal{R}$  est une sous- $R$ -algèbre graduée de  $R[\Lambda][\theta]$ , entière sur sa sous-algèbre graduée  $\mathcal{S}$ . De plus,  $\mathcal{S}$  est engendrée par ses éléments de degré 1, et  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{S}_0 = R$ . On obtient donc un schéma

$$\tilde{\mathcal{X}} := \text{Proj}(\mathcal{R})$$

sur  $S$ , muni d'un fibré en droites

$$\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(1).$$

Soit enfin

$$T := \text{Spec } R[\Lambda]$$

le tore scindé sur  $S$  dont le groupe des caractères est  $\Lambda$ ; ce tore opère dans le schéma  $\tilde{\mathcal{X}}$ , et le fibré en  $\tilde{\mathcal{L}}$  est  $T$ -linéarisé (c'est-à-dire l'action de  $T$  dans  $\tilde{\mathcal{X}}$  se relève en une action dans l'espace total de  $\tilde{\mathcal{L}}$ , linéaire dans les fibres).

Des propriétés des décompositions de Delaunay et de Voronoi énoncées ci-dessus, on déduit facilement :

### PROPOSITION 2.3

(i) Le schéma  $\tilde{\mathcal{X}}$  est recouvert par les ouverts affines  $\tilde{\mathcal{X}}_\lambda := \text{Spec } \mathcal{R}_\lambda$ , où  $\lambda \in \Lambda$  et  $\mathcal{R}_\lambda := \tilde{\mathcal{R}}[\frac{1}{\zeta_\lambda}]_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{R}}_n \zeta_\lambda^{-n}$  est la sous- $R$ -algèbre de  $R[\Lambda]$  engendrée par les monômes  $z^m e^\mu$  tels que  $m \geq h(\lambda; \mu)$ . Les monômes

$$\zeta_{\lambda; \mu} = z^{\lceil h(\lambda; \mu) \rceil} e^\mu$$

(où  $\lceil x \rceil$  désigne le plus petit entier  $\leq x$ ) forment une base du  $R$ -module  $\mathcal{R}_\lambda$ .

(ii) Toutes les  $R$ -algèbres  $\mathcal{R}_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , sont isomorphes et de type fini sur  $S$ . En particulier,  $\tilde{\mathcal{X}}$  est plat et localement de type fini sur  $S$ .

(iii) Le fibré en droites  $\tilde{\mathcal{L}}$  est ample sur  $\tilde{\mathcal{X}}$  (c'est-à-dire les ouverts associés aux sections des puissances positives  $\tilde{\mathcal{L}}^n$  forment une base de la topologie de  $\tilde{\mathcal{X}}$ ).

- (iv) La fibre générique  $\tilde{\mathcal{X}}_\eta$  n'est autre que le tore  $\mathrm{Hom}(\Lambda, K^*) = T_\eta$ .
- (v) La fibre spéciale  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  est un schéma localement de type fini sur  $k$ , muni d'une action du tore  $T_s = \mathrm{Hom}(\Lambda, k^*)$  dont les orbites sont en bijection avec les cellules de Delaunay. Cette bijection  $\sigma \mapsto \mathcal{O}_\sigma$  vérifie  $\dim \mathcal{O}_\sigma = \dim \sigma$  et  $\overline{\mathcal{O}_\sigma} \cap \overline{\mathcal{O}_\tau} = \overline{\mathcal{O}_{\sigma \cap \tau}}$ . En particulier,  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  est connexe.
- (vi) Les composantes irréductibles de  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  sont les adhérences  $\overline{\mathcal{O}_\sigma}$  où  $\sigma$  décrit les cellules de Delaunay maximales. La multiplicité du schéma  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  le long de  $\overline{\mathcal{O}_\sigma}$  est le dénominateur de  $dF_{v(\sigma)}$  (vu comme un point de l'espace vectoriel dual  $V^*$ , rationnel par rapport au réseau dual  $\Lambda^*$ ).

En particulier,  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  est génériquement réduite lorsque chaque  $dF_{v(\sigma)}$  est entier, autrement dit, lorsque chaque  $B(v(\sigma), -)$  est à valeurs entières sur  $\Lambda$ . D'après [5, Lem.3.12], cette condition est vérifiée si  $F$  est à valeurs dans  $n\mathbb{Z}$  où  $n$  désigne l'indice de nilpotence de la décomposition de Delaunay. Le changement de base  $S' \rightarrow S$ ,  $z = z'^n$  permet de remplacer  $F$  par  $nF$ ; quitte à effectuer ce changement de base, on suppose désormais que tous les  $dF_{v(\sigma)}$  sont entiers. Alors chaque fonction  $h(\lambda; -)$  est à valeurs entières sur  $\Lambda$ . De plus,  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  est recouvert par les ouverts affines  $\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda,s} := \mathrm{Spec} \bar{\mathcal{R}}_\lambda$  où le  $k$ -espace vectoriel  $\bar{\mathcal{R}}_\lambda := \mathcal{R}_\lambda / \mathfrak{m} \mathcal{R}_\lambda$  a une base formée des monômes  $\bar{\zeta}_{\lambda;\mu}$  (les images des  $\zeta_{\lambda;\mu} = z^{h(\lambda;\mu)} e^\mu$ ). La multiplication dans  $\bar{\mathcal{R}}_\lambda$  est donnée par

$$\bar{\zeta}_{\lambda;\mu_1} \cdots \bar{\zeta}_{\lambda;\mu_n} = \bar{\zeta}_{\lambda;\mu_1 + \cdots + \mu_n}$$

si  $\mu_1, \dots, \mu_n$  appartiennent au cône tangent en 0 à une même cellule de Delaunay  $\sigma \ni 0$ ; sinon, le produit est nul.

Il en résulte aussitôt que  $\bar{\mathcal{R}}_\lambda$ , et donc  $\tilde{\mathcal{X}}_s$ , est réduite. En fait, on a un résultat un peu plus précis [3, Sec.2.3] :

PROPOSITION 2.4. — *La fibre spéciale  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  est semi-normale.*

Un schéma réduit  $X$  est dit *semi-normal* si, pour tout schéma réduit  $Y$ , tout morphisme fini et bijectif  $\pi : Y \rightarrow X$  qui induit des isomorphismes sur les corps résiduels  $\kappa(\pi(y)) \subseteq \kappa(y)$  est un isomorphisme. Par exemple, les courbes nodales sont semi-normales, mais non la courbe plane cuspidale d'équation homogène  $y^2 z = x^3$ .

### 2.3. Action du réseau et passage au quotient

On va définir une action de  $\Lambda$  dans le schéma  $\tilde{\mathcal{X}}$ , compatible à l'action de  $T$ . Pour cela, on se donne un homomorphisme de groupes  $\Lambda \rightarrow T_\eta = \mathrm{Hom}(\Lambda, K^*)$ , ou encore une application

$$b : \Lambda \times \Lambda \rightarrow K^*$$

telle que  $b(\lambda + \mu, \nu) = b(\lambda, \nu)b(\mu, \nu)$  et  $b(\lambda, \mu + \nu) = b(\lambda, \mu)b(\lambda, \nu)$  pour tous  $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ ; on dit que  $b$  est *bi-multiplicative*. Ceci définit une action de  $\Lambda$  dans la  $K$ -algèbre  $K[\Lambda]$  via

$$\lambda \cdot e^\mu = b(\lambda, \mu) e^\mu.$$

Pour l'étendre en une action de  $\Lambda$  dans la  $K$ -algèbre graduée  $K[\Lambda][\theta]$ , posons

$$\lambda \cdot \theta := f(\lambda) e^\lambda \theta$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , où  $f(\lambda) \in K^*$ . Ceci définit bien une action pourvu que l'application  $f : \Lambda \rightarrow K^*$  soit *quadratique multiplicative* et que  $b$  soit l'application bi-multiplicative associée, c'est-à-dire

$$f(\lambda + \mu) = f(\lambda) f(\mu) b(\lambda, \mu) \quad \text{pour tous } \lambda, \mu \in \Lambda.$$

En particulier,  $b$  est alors symétrique. Pour que cette action laisse stables les sous-algèbres  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{R}$ , il faut et il suffit que

$$f(\lambda) = u(\lambda) z^{F(\lambda)} \quad \text{où } u(\lambda) \in R^*.$$

Alors  $b(\lambda, \mu) = u(\lambda + \mu) u(\lambda)^{-1} u(\mu)^{-1} z^{B(\lambda, \mu)}$ . Le fait que la forme quadratique  $Q$  est définie positive équivaut donc à

$$(5) \quad b(\lambda, \lambda) \in \mathfrak{m} \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}.$$

On obtient ainsi une action de  $\Lambda$  dans  $\tilde{\mathcal{X}}$  qui commute à l'action de  $T$  et qui se relève en une action dans  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Pour cette dernière action, on a la relation de commutation  $t \circ \lambda = \lambda(t) \lambda \circ t$ . En d'autres termes, l'action de  $T \times \Lambda$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}$  se relève en une action du groupe de Heisenberg  $(\mathbb{G}_{m,S} \times_S T) \times \Lambda$  sur  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Chaque  $\lambda \in \Lambda$  envoie  $\mathcal{R}_\mu$  sur  $\mathcal{R}_{\lambda+\mu}$ , et donc l'ouvert  $\tilde{\mathcal{X}}_\mu$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}_{\mu-\lambda}$ . De plus, l'action induite de  $\lambda$  dans  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  envoie chaque orbite  $\mathcal{O}_\sigma$  sur  $\mathcal{O}_{-\lambda+\sigma}$ . On en déduit :

PROPOSITION 2.5

- (i) Toute orbite de  $\Lambda$  dans  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  rencontre la réunion des  $\mathcal{O}_\sigma$  où  $\sigma$  décrit les cellules de Delaunay maximales qui contiennent 0.
- (ii) Le groupe  $\Lambda$  opère proprement dans  $\tilde{\mathcal{X}}_s$ .
- (iii) Le quotient  $\mathcal{X}_s := \tilde{\mathcal{X}}_s/\Lambda$  est un schéma projectif sur  $k$ , et le fibré en droites  $\tilde{\mathcal{L}}_s$  descend en un fibré en droites ample  $\mathcal{L}_s$  sur  $\mathcal{X}_s$ .

En fait, d'après les propositions 2.3 et 2.4,  $\mathcal{X}_s$  est une variété semi-normale dans laquelle  $T_s$  opère avec un nombre fini d'orbites, indexées par les orbites de  $\Lambda$  dans les cellules de Delaunay. En particulier,  $\mathcal{X}_s$  contient un unique point fixe de  $T_s$ .

Plus généralement, on considère pour tout entier  $n \geq 1$  le point épaissi

$$S_n := \text{Spec } R/\mathfrak{m}^n$$

et la fibre spéciale épaissie

$$\tilde{\mathcal{X}}_n := \tilde{\mathcal{X}} \times_S S_n$$

munie du fibré en droites

$$\tilde{\mathcal{L}}_n := \tilde{\mathcal{L}} \times_S S_n.$$

Les assertions (ii) et (iii) ci-dessus s'étendent à ces fibres [14, Thm.3.10] ; on obtient ainsi un système inductif  $(\mathcal{X}_n, \mathcal{L}_n)$  qui définit un schéma formel  $\mathfrak{X}$  sur le spectre formel de  $R$ , muni d'un fibré en droites ample  $\mathfrak{L}$ . Le couple  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$  est donc algébrisable en un unique schéma  $\mathcal{X}$ , propre et plat sur  $S$ , muni d'un fibré en droites ample  $\mathcal{L}$ . De plus,  $\mathcal{X}_\eta$  est une variété abélienne d'après [14, Cor.4.9].

On va construire une section globale non nulle de  $\mathcal{L}$ . Pour cela, on va algébriser la série formelle

$$\tilde{\theta} := \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot \theta$$

vue comme une section globale de  $\mathfrak{L}$ . Posons

$$\xi_\lambda := \lambda \cdot \theta = f(\lambda) e^\lambda \theta \quad \text{et} \quad \xi_{\lambda;\mu} := \frac{\xi_{\lambda+\mu}}{\xi_\lambda} \quad (\lambda, \mu \in \Lambda)$$

si bien que  $\xi_\lambda \in R^* \zeta_\lambda$  et  $\xi_{\lambda;\mu} \in \mathcal{R}_\lambda$  pour tout  $\mu \in \Lambda$ . On vérifie alors :

LEMME 2.6

- (i) Pour tout entier  $n \geq 1$ , les  $\mu \in \Lambda$  tels que  $\xi_{\lambda;\mu} \notin \mathfrak{m}^n \mathcal{R}_\lambda$  sont en nombre fini.
- (ii)  $\xi_{\lambda;\mu} \notin \mathfrak{m} \mathcal{R}_\lambda$  si et seulement si  $\mu$  est un vecteur de Delaunay en 0 (autrement dit,  $\mu$  appartient à une cellule de Delaunay contenant 0).

Le quotient

$$\theta_\lambda := \frac{\tilde{\theta}}{\xi_\lambda} = \sum_{\mu \in \Lambda} \xi_{\lambda;\mu}$$

donne donc une somme finie dans chaque  $\mathcal{R}_\lambda \otimes_R R/\mathfrak{m}^n$ , et la famille des  $\theta_\lambda$  définit une section  $\Lambda$ -invariante de  $\tilde{\mathcal{L}}_n$  qui s'algébrise comme précédemment en la section cherchée, notée  $\theta$ . De plus,  $\theta_s$  ne s'annule identiquement sur aucune orbite de  $T_s$ , car l'image de  $\theta_\lambda$  dans  $\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda/\mathfrak{m} \mathcal{R}_\lambda$  ne s'annule pas en l'unique point fixe de  $T_s$  dans  $\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda,s}$ . Enfin,  $\theta$  engendre  $\pi_*(\mathcal{L})$  ; il en résulte que  $\mathcal{L}_\eta$  définit une polarisation principale de  $\mathcal{X}_\eta$ .

En conclusion, on a obtenu :

THÉORÈME 2.7. — À la donnée d'une application quadratique multiplicative  $f : \Lambda \rightarrow K^*$  telle que l'application bi-multiplicative associée vérifie (5), on associe un schéma  $\mathcal{X}$  propre et plat sur  $S$ , de dimension relative  $g$ , et un diviseur de Cartier effectif et ample  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{X}$  tels que :

- (i) La fibre générique  $\mathcal{X}_\eta$  est une variété abélienne dont  $\mathcal{D}_\eta$  définit une polarisation principale.
- (ii) La fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$  est une variété projective et semi-normale dans laquelle le tore  $T_s = \text{Hom}(\Lambda, k^*)$  opère avec un nombre fini d'orbites et un unique point fixe. Le diviseur  $\mathcal{D}_s$  ne contient aucune de ces orbites.



Mais on notera que  $\mathcal{X}$  n'est pas toujours une compactification de la dégénérescence semi-stable de  $\mathcal{X}_\eta$  donnée par le théorème 1.3. En effet, l'adhérence dans  $\mathcal{X}$  de la section nulle de  $\mathcal{X}_\eta$  rencontre la fibre spéciale en un point dont l'orbite n'est pas nécessairement de dimension maximale [5, Sec.3.25]. Il faut plutôt voir  $\mathcal{X}$  comme une compactification d'un *torseur* (ou espace principal homogène) sous une variété abélienne; ce point de vue sera développé dans la troisième partie.

*Exemple 2.8.* — Comme dans l'exemple 2.1, considérons les cas où  $g \leq 2$ .

Lorsque  $\Lambda = \mathbb{Z}$ , la fibre spéciale  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  est une chaîne infinie de courbes  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , où chaque  $C_n$  est isomorphe à la droite projective  $\mathbb{P}^1$ , et le point  $\infty$  de  $C_n$  est identifié au point 0 de  $C_{n+1}$ . Ainsi,  $C_n$  rencontre transversalement  $C_{n-1}$  et  $C_{n+1}$ , et ne rencontre aucun autre  $C_m$ . Le groupe  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}$  opère dans  $\tilde{\mathcal{X}}_s$  par translations : son générateur 1 envoie isomorphiquement chaque  $(C_n, 0, \infty)$  sur  $(C_{n+1}, 0, \infty)$ . Le quotient  $\mathcal{X}_s = \tilde{\mathcal{X}}_s/\Lambda$  est une courbe nodale obtenue à partir de  $\mathbb{P}^1$  en identifiant les points 0 et  $\infty$ , et le diviseur  $\mathcal{D}_s$  est un point distinct du point double. Ainsi,  $(\pi : \mathcal{X} \rightarrow S, \mathcal{D})$  réalise la dégénérescence d'une courbe de genre 1 munie d'un point, en une courbe rationnelle nodale munie d'un point lisse.

Lorsque  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$  est le réseau carré,  $\mathcal{X}_s$  s'obtient à partir de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  en identifiant chaque point  $(x, 0)$  avec  $(tx, \infty)$ , et chaque point  $(0, y)$  avec  $(\infty, ty)$  où  $t$  est un paramètre non nul. Le diviseur  $\mathcal{D}_s$  est l'image d'une section du fibré  $\mathcal{O}(1, 1)$ ; c'est une courbe rationnelle avec deux points doubles, ou la réunion de deux courbes rationnelles avec un point double chacune, qui se coupent transversalement en un point.

Enfin, lorsque  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$  est le réseau hexagonal,  $\mathcal{X}_s$  s'obtient à partir de la réunion disjointe de deux plans projectifs (associés aux deux types de triangles) en identifiant deux à deux les droites de coordonnées. Le diviseur  $\mathcal{D}_s$  est l'image de la réunion disjointe de deux droites en position générale; il est formé de deux courbes rationnelles lisses qui se coupent transversalement en trois points.

### 3. COMPACTIFICATION MODULAIRE DE $A_g$ ET DU MORPHISME DE TORELLI

Dans cette partie, on présente une partie des résultats de [2–4]. On commence par définir les couples quasi-abéliens stables, dont on donne plusieurs classes d'exemples. On décrit la structure de ces couples et on leur associe un invariant de nature combinatoire : le type, sous une hypothèse supplémentaire de linéarisation d'un fibré en droites. Puis on explique comment lever cette hypothèse et définir le type en toute généralité. Enfin, on énonce les résultats principaux concernant la compactification modulaire  $\overline{A}_g^{\text{mod}}$  qui paramètre les couples quasi-abéliens stables de type dit périodique de degré 1, et le morphisme de Torelli compactifié qui à chaque courbe stable associe un couple quasi-abélien stable de ce type.

### 3.1. Variétés et couples quasi-abéliens stables

DÉFINITION 3.1. — Une variété quasi-abélienne stable est une variété  $X$  munie d'une action d'une variété semi-abélienne  $G$  telle que :

- (i)  $X$  ne contient qu'un nombre fini d'orbites de  $G$ .
- (ii) Pour tout point  $x \in X$ , le stabilisateur  $G_x$  est un tore (en particulier, le schéma  $G_x$  est réduit).
- (iii)  $X$  est équidimensionnelle de dimension  $g = \dim G$ .
- (iv)  $X$  est semi-normale.

Lorsque  $X$  est normale (et donc intègre), on dit que c'est une variété quasi-abélienne.

On utilisera aussi les abréviations v.q.-a.s et v.q.-a. (Bien avant que cette définition ne soit formulée dans [3], Nakamura [16] et Namikawa [18] avaient introduit une notion voisine, mais différente, de variété quasi-abélienne stable ; pour eux, il s'agit des fibres, éventuellement non réduites, d'une certaine famille sur  $\overline{A}_{g,\mathbb{C}}^{\text{Vor}}$ .)

Les conditions (ii) et (iii) entraînent que chaque composante irréductible d'une v.q.-a.s est une compactification équivariante de la variété semi-abélienne associée. En particulier, les v.q.-a.s sous une variété abélienne  $A$  ne sont autres que les torseurs sous  $A$ . Et les v.q.-a sous un tore  $T$  ne sont autres que les *variétés toriques*, c'est-à-dire les variétés normales dans lesquelles  $T$  opère avec une orbite ouverte dont le stabilisateur est trivial (les conditions (i) et (ii) sont alors bien connues).

Les v.q.-a.s sous un tore sont appelées *variétés toriques stables*. Des exemples de telles variétés sont les fibres spéciales des dégénérescences maximales construites dans la deuxième partie.

DÉFINITION 3.2. — Un couple quasi-abélien stable est formé d'une v.q.-a.s projective  $X$  (sous une variété semi-abélienne  $G$ ) et d'un diviseur de Cartier  $D$  sur  $X$ , effectif, ample et ne contenant aucune orbite de  $G$ .

La variété  $X$  est dite polarisée par le fibré en droites  $L := \mathcal{O}_X(D)$ . On note  $s$  la section canonique de  $L$  dont le diviseur des zéros est  $D$ , si bien que la donnée du couple  $(X, D)$  est équivalente à celle du triplet  $(X, L, s)$ . Le degré de ce couple est  $h^0(L)$ .

Exemple 3.3. — En particulier, on a la notion de *couple abélien*  $(X, D)$  où  $X$  est un torseur sous une variété abélienne  $A$ , et  $D$  est un diviseur effectif et ample sur  $X$ .

Les couples abéliens de degré 1 sont en correspondance biunivoque avec les variétés abéliennes principalement polarisées. En effet, à toute v.a.p.p  $(A, \lambda)$  on associe la variété  $X := \text{Pic}^\lambda(A)$  (vue comme un ensemble de diviseurs de  $X$ ) et sa sous-variété  $D$  formée des diviseurs  $\Theta$  qui contiennent 0. Alors  $X$  est un torseur sous  $A$  via l'isomorphisme  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  et l'action de  $A^\vee$  par translations, et  $D$  s'identifie

à un diviseur  $\Theta$ . Réciproquement, à tout couple abélien  $(X, D)$  de degré 1, on associe la variété abélienne  $A$  sous-jacente à  $X$ , munie de la polarisation définie par les translatés de  $D$ .

*Exemple 3.4.* — Toute courbe complète et lisse  $C$  de genre  $g$  définit un couple abélien de degré 1, formé de la variété  $\text{Pic}^{g-1}(C)$  des classes de diviseurs de degré  $g-1$  (un torseur sous  $\text{Pic}^0(C)$ ) et de la sous-variété des classes des diviseurs effectifs.

Plus généralement, à toute courbe complète et nodale  $C$  de genre arithmétique  $g$ , on associe d'abord la variété semi-abélienne  $\text{Pic}^0(C)$  (décrite dans l'exemple 1.2), puis la *jacobiennne compactifiée*  $\text{Jac}^{g-1}(C)$ ; c'est l'espace des modules des *faisceaux semi-stables de degré  $g-1$  sur  $C$* , c'est-à-dire des faisceaux cohérents  $\mathcal{F}$  sur  $C$  qui sont de rang 1 en chaque point générique et qui vérifient  $h^0(\mathcal{F}) = h^1(\mathcal{F})$  et  $h^0(\mathcal{G}) \leq h^1(\mathcal{G})$  pour tout sous-faisceau  $\mathcal{G}$  (en particulier, un faisceau semi-stable ne contient aucun faisceau gratte-ciel). Le groupe  $\text{Pic}^0(C)$  opère dans  $\text{Jac}^{g-1}(C)$  par produit tensoriel. Enfin, on note  $\Theta$  le sous-schéma réduit de  $\text{Jac}^{g-1}(C)$  formé des classes des faisceaux  $\mathcal{F}$  tels que  $h^0(\mathcal{F}) \neq 0$ . D'après [20] et [4], le couple  $(\text{Jac}^{g-1}(C), \Theta)$  est quasi-abélien stable sous  $\text{Pic}^0(C)$ ; lorsque  $C$  est une courbe stable, le degré de ce couple est 1.

On renvoie à [20] pour l'étude détaillée d'une famille de jacobiniennes compactifiées  $\text{Jac}^\phi(C)$  qui contient  $\text{Jac}^{g-1}(C)$ ; chaque  $\text{Jac}^\phi(C)$  est munie d'une action naturelle de  $\text{Pic}^0(C)$  qui en fait une v.q.-a.s [4, Thm.5.1].

**DÉFINITION 3.5.** — *La v.q.-a.s polarisée  $(X, L)$  sous  $G$  est dite linéarisée si  $L$  est muni d'une linéarisation pour le tore maximal  $T$  de  $G$ .*

On rappelle qu'une linéarisation de  $L$  est la donnée d'une action de  $T$  dans l'espace total de ce fibré en droites, qui relève l'action de  $T$  dans  $X$ , et qui est linéaire dans les fibres. Puisque  $X$  est une variété complète, les linéarisations du fibré trivial s'identifient au groupe des caractères de  $T$ ; ce groupe opère donc simplement transitivement dans l'ensemble des linéarisations de  $L$ . Rappelons aussi que tout fibré en droites sur une variété normale est linéarisable; en particulier, toute v.q.-a polarisée est linéarisable.

*Exemple 3.6.* — Les couples  $(\mathcal{X}_s, \mathcal{D}_s)$  du théorème 2.7 sont des couples quasi-abéliens stables; aucun d'eux n'est linéarisable.

En effet, lorsque  $X$  est une variété projective munie d'une action d'un tore  $T$  et d'un fibré en droites  $L$  ample et  $T$ -linéarisé, les sections d'une grande puissance  $L^n$  donnent une immersion  $T$ -équivariante  $i : X \rightarrow \mathbb{P}(V)$  où  $V$  est un  $T$ -module (rationnel, de dimension finie), et  $\mathbb{P}(V)$  désigne son projectivisé. Il en résulte que  $X$  est recouvert par des ouverts affines et invariants par  $T$ ; en particulier, toute courbe de  $X$  qui est invariante par  $T$  contient au moins deux points fixes. Mais on a vu que  $\mathcal{X}_s$  contient un seul point fixe de  $T_s$ .

*Exemple 3.7.* — Rappelons la classification des variétés toriques linéarisées  $(X, L)$  sous un tore  $T$  : en notant  $\Lambda$  le groupe des caractères de  $T$ , et  $V$  l'espace vectoriel réel associé à  $\Lambda$ , on a une correspondance biunivoque entre ces variétés et les polytopes convexes  $P$  dans  $V$ , entiers par rapport au réseau  $\Lambda$ , et d'intérieur non vide.

La classification des couples toriques s'en déduit aisément : pour tout entier  $n \geq 0$ , le  $T$ -module  $H^0(X, L^n)$  est somme directe de droites propres dont les poids ne sont autres que les  $\lambda \in \Lambda \cap nP$ . En particulier, tout  $s \in H^0(X, L)$  se décompose en somme de vecteurs propres  $s_\lambda$ . Pour que le diviseur des zéros  $D$  de  $s$  définisse un couple torique, il faut et il suffit que  $s_\lambda \neq 0$  pour chaque sommet  $\lambda$  de  $P$  ; en effet, cette condition signifie que  $s$  ne s'annule en aucun point fixe de  $T$  dans  $X$ .

Enfin, les variétés toriques polarisées correspondent aux classes des polytopes convexes entiers modulo les translations entières.

**DÉFINITION 3.8.** — *Un morphisme du couple quasi-abélien stable  $(X, D)$  sous  $G$ , vers le couple quasi-abélien stable  $(Y, E)$  sous  $H$ , est la donnée d'un homomorphisme de groupes  $f : G \rightarrow H$  et d'un morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  tels que  $\varphi$  est  $G$ -équivariant (pour l'action de  $G$  dans  $Y$  via  $f$ ), et  $\varphi^*(E) = D$ .*

Pour un tel couple  $(f, \varphi)$ , le morphisme  $\varphi$  est fini, car  $D$  et  $E$  sont amples ; lorsque  $X$  et  $Y$  ont la même dimension,  $f$  est une isogénie. On montre que le groupe des automorphismes de tout couple quasi-abélien stable est fini.

Voici des versions schématiques des définitions précédentes :

**DÉFINITION 3.9.** — *Un schéma quasi-abélien stable sur un schéma  $S$  est la donnée d'un couple  $(\mathcal{G}, \mathcal{X})$  où*

- (i)  $\mathcal{G}$  est un schéma en groupes semi-abélien sur  $S$ .
- (ii)  $\mathcal{X}$  est un schéma plat, séparé et de type fini sur  $S$ , muni d'une action de  $\mathcal{G}$ .
- (iii) Chaque fibre géométrique  $\mathcal{X}_{\bar{s}}$  est une v.q.-a.s sous  $\mathcal{G}_{\bar{s}}$ .

Lorsque le morphisme  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$  est propre et que  $\mathcal{X}$  est muni d'un diviseur de Cartier effectif et relativement ample  $\mathcal{D}$  tel que chaque  $(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mathcal{D}_{\bar{s}})$  est un couple quasi-abélien stable, on dit que  $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$  est un couple quasi-abélien stable sur  $S$ . Un tel couple est polarisé par le fibré en droites  $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D})$  ; il est dit de degré  $d$  si  $h^0(\mathcal{L}_{\bar{s}}) = d$  pour tout point  $s$ .

*Exemple 3.10.* — Les couples  $(\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow S$  du théorème 2.7 sont quasi-abéliens stables de degré 1.

D'autres exemples sont issus des courbes stables  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$  de genre  $g$  : d'après les résultats de [7, Chap. VIII], il existe en effet un schéma de Picard relatif  $\mathbf{Pic}^0(\mathcal{C}/S)$  qui est un schéma en groupes semi-abélien ayant pour fibres géométriques les  $\mathbf{Pic}^0(\mathcal{C}_{\bar{s}})$ . Les jacobiniennes compactifiées des fibres géométriques se globalisent aussi en une jacobienne compactifiée relative  $\mathbf{Jac}^{g-1}(\mathcal{C}/S)$  ; elle est munie d'une action du schéma en

groupes  $\mathbf{Pic}^0(\mathcal{C}/S)$  et d'un diviseur  $\Theta$  qui définissent un couple quasi-abélien stable de degré 1 [4, Sec.5].

Pour tout couple quasi-abélien stable  $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$  sur  $S$ , le diviseur  $\mathcal{D}_{\bar{s}}$  ne contient aucune composante irréductible de  $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ . Il en résulte que  $\mathcal{D}$  est plat sur  $S$ ; autrement dit,  $\mathcal{D}$  est un *diviseur de Cartier relatif*.

On a une notion évidente de morphisme entre couples quasi-abéliens stables; de plus, tout morphisme entre couples abéliens de même degré sur un même schéma est un isomorphisme. L'exemple 3.3 admet une version schématique [3, Cor.3.0.7] :

**THÉORÈME 3.11.** — *Les couples abéliens de degré 1 forment un champ isomorphe au champ des schémas abéliens principalement polarisés.*

### 3.2. Variétés quasi-abéliennes stables linéarisées

On se donne une variété semi-abélienne  $G$  de tore maximal  $T$  et de partie abélienne  $A$ . On commence par présenter une construction de v.q.-a.s sous  $G$  qui s'avéreront être des modèles locaux des v.q.-a.s linéarisées.

Soit  $Y$  une variété torique stable sous  $T$ . Ce dernier opère dans  $G \times Y$  via  $t \cdot (g, y) = (gt^{-1}, t \cdot y)$  et cette action commute à celle de  $G$  par multiplication sur le premier facteur. Notons

$$X = G \times^T Y$$

le quotient; la projection  $G \times Y \rightarrow G$  passe au quotient en un morphisme  $p : X \rightarrow A$  qui est une fibration localement triviale de fibre  $Y$ . Il en résulte que  $X$  est une v.q.-a.s sous  $G$ , qu'on appelle l'*induite* de  $Y$ .

**PROPOSITION 3.12.** — *Soit  $(X, L)$  une v.q.-a.s linéarisée sous  $G$ .*

- (i)  *$X$  est recouvert par des ouverts invariants par  $G$  et induits de variétés toriques stables affines.*
- (ii) *L'adhérence de toute orbite de  $G$  dans  $X$  est normale.*
- (iii) *Toute composante irréductible de  $X$  est induite d'une variété torique.*

**PREUVE.** — Soit  $Z$  une orbite fermée de  $G$  dans  $X$ . Comme  $X$  est projective,  $Z$  est formée de points fixes de  $T$ , d'où  $Z \simeq G/T \simeq A$ . Comme  $X$  ne contient qu'un nombre fini d'orbites, la réunion de ces orbites qui contiennent  $Z$  dans leur adhérence est un ouvert invariant par  $G$ . En remplaçant  $X$  par cet ouvert, on peut donc supposer que  $Z$  est l'unique orbite fermée; c'est l'ensemble des points fixes de  $T$ . Pour tout  $x \in X$ , on a  $Z \subseteq \overline{G \cdot x} = G \cdot \overline{T \cdot x}$  (car  $G/T$  est complet), c'est-à-dire  $\overline{T \cdot x}$  rencontre  $Z$  en ses points fixes de  $T$ . Il en résulte qu'il existe un sous-groupe à un paramètre  $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow T$  (dépendant de  $x$ ) tel que  $\lambda(0) \cdot x \in Z$ , c'est-à-dire le morphisme  $\mathbb{G}_m \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \lambda(t) \cdot x$  s'étend en un morphisme  $\mathbb{A}^1 \rightarrow X$  qui envoie 0 sur un point de  $Z$ .

Puisque  $X$  est munie d'un fibré en droites ample et  $T$ -linéarisé, elle est isomorphe à une sous-variété localement fermée et invariante par  $T$  du projectivisé d'un  $T$ -module,

$\mathbb{P}(V)$ ; on peut supposer que  $Z$  est contenue dans  $\mathbb{P}(V_0)$  où  $V_0$  désigne le sous-espace des points fixes de  $T$ . La projection  $T$ -invariante  $V \rightarrow V_0$  donne une application rationnelle  $p : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V_0)$  qui est définie en chaque  $x \in X$  et l'envoie sur  $\lambda(0) \cdot x$ . On vérifie que le morphisme  $p : X \rightarrow Z$  obtenu ainsi est affine et  $G$ -équivariant, ce qui démontre l'assertion (i).

Comme l'assertion (ii) est de nature locale, on peut d'après (i) supposer que  $G = T$ , d'où  $X$  est torique stable et affine. Soit  $Y$  l'adhérence d'une orbite de  $T$  dans  $X$ , et  $\nu_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$  la normalisation. Alors  $\tilde{Y}$  est une variété torique affine sous un quotient de  $T$ , et  $\nu_Y$  induit une bijection entre les ensembles de  $T$ -orbites dans  $\tilde{Y}$  et dans  $Y$ . Grâce à la connexité des stabilisateurs  $T_y$ ,  $y \in Y$ , il en résulte que  $\nu_Y$  induit des isomorphismes entre les corps résiduels. De plus, les  $\nu_Y$  se recollent en  $\nu : \lim \tilde{Y} \rightarrow X$  où  $\lim$  désigne la limite inductive sur l'ensemble partiellement ordonné des adhérences des orbites. Comme  $X$  est semi-normale,  $\nu$  est un isomorphisme, ce qui entraîne (ii).

Soit  $X'$  une composante irréductible de  $X$ . En identifiant l'orbite ouverte de  $X'$  à  $G$  et en notant  $Y'$  l'adhérence de  $T$  dans  $X'$ , on obtient un morphisme birationnel propre et  $G$ -équivariant  $\varphi : G \times^T Y' \rightarrow X'$ . Montrons que  $\varphi$  est bijectif. Dans le cas contraire, comme la restriction de  $\varphi$  à chaque fibre de  $p : G \times^T Y' \rightarrow G/T$  est injective, il existe  $g \in G \setminus T$  tel que  $g \cdot Y'$  rencontre  $Y'$ . L'intersection  $Y' \cap g \cdot Y'$  contient alors un point fixe  $x$  de  $T$ . Soient  $x = x_1, \dots, x_n$  les points fixes de  $T$  dans  $Y'$ . Puisque  $L$  est ample et  $T$ -linéarisé, les poids de l'action linéaire de  $T$  dans les fibres  $L_{x_1}, \dots, L_{x_n}$  sont deux à deux distincts. Puisque  $G$  est connexe, ces poids sont constants sur chacune des orbites  $G \cdot x_1, \dots, G \cdot x_n$ . On a donc  $x_1 = g \cdot x_1$  d'où  $g \in T$ , ce qui est absurde. Puisque  $X'$  est normale,  $\varphi$  est un isomorphisme, ce qui démontre (iii).

*Exemple 3.13.* — Il existe des v.q.-a.s non induites : soit  $G := E \times \mathbb{G}_m$  où  $E$  est une courbe elliptique, et soit  $X_1$  la variété obtenue à partir de  $E \times \mathbb{P}^1$  en identifiant  $E \times \{0\}$  à  $E \times \{\infty\}$  via  $(x, 0) = (x + e, \infty)$ , où  $e$  est un point de  $E$  distinct de l'origine. On vérifie que  $X_1$  est une variété quasi-abélienne stable sous  $G$ , qui n'admet aucun morphisme équivariant vers  $E$ .

On construit de même des exemples de v.q.-a.s linéarisées qui ne sont pas induites : soit  $X_2$  la variété obtenue à partir de la réunion disjointe de deux exemplaires de  $E \times \mathbb{P}^1$  via les identifications  $(x_1, 0) = (x_2, 0)$  et  $(x_1, \infty) = (x_2 + e, \infty)$  où  $e$  est un point de 2-torsion de  $E$ . Alors  $X_2$  est une v.q.-a.s sous  $G$ , qui n'admet aucun morphisme équivariant vers  $E$ . Mais  $X_2$  est linéarisée par le fibré en droites  $L$  obtenu en identifiant deux exemplaires de  $M \otimes \mathcal{O}(1)$  où  $M$  est un fibré en droites de degré 2 sur  $E$  (si bien que  $\tau_e^*(M) \simeq M$ ).

On va déduire de la proposition 3.12 un résultat de structure des v.q.-a linéarisées. Fixons les notations : soient  $\pi : G \rightarrow G/T = A$  la projection,  $\Lambda$  le groupe des caractères de  $T$ ,  $V = \Lambda \otimes \mathbb{R}$ , et  $L_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  les fibrés en droites sur  $A$  tels que  $\pi_*(\mathcal{O}_G) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ .

PROPOSITION 3.14. — Soit  $(X, L)$  une v.q.-a linéarisée.

(i) Il existe un unique polytope convexe entier  $P$  d'intérieur non vide dans  $V$ , et un unique fibré en droites ample  $M$  sur  $A$  tels que

$$(6) \quad X \simeq \text{Proj}_A \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} M^n \otimes L_\lambda \quad \text{et} \quad L \simeq \mathcal{O}(1).$$

Toute adhérence d'une orbite de  $G$  dans  $X$  s'obtient en remplaçant  $P$  par une face  $F$  dans (6), et ceci définit une bijection croissante entre adhérences d'orbites et faces.

(ii) On a  $H^i(X, L^n) = 0$  pour tous  $i \geq 1$  et  $n \geq 1$ , et

$$H^0(X, L^n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} H^0(A, M^n \otimes L_\lambda)$$

pour tout  $n \geq 0$ .

(iii) Soit  $D$  le diviseur des zéros de  $s \in H^0(X, L)$ . Écrivons  $s = \sum_{\lambda \in \Lambda \cap P} s_\lambda$  où  $s_\lambda \in H^0(A, M \otimes L_\lambda)$ . Pour que  $D$  ne contienne aucune orbite de  $G$  dans  $X$ , il faut et il suffit que  $s_\lambda \neq 0$  pour tout sommet  $\lambda$  de  $P$ .

PREUVE. — D'après la proposition 3.12,  $X \simeq G \times^T Y$  où  $Y$  est une variété torique projective sous  $T$ ; on note  $p : X \rightarrow A$  la projection. Et d'après les résultats rappelés dans l'exemple 3.7, il existe un unique polytope convexe entier  $P$  dans  $V$ , d'intérieur non vide, tel que

$$H^0(Y, L^n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} k_\lambda$$

comme  $T$ -modules, où  $k_\lambda$  désigne le  $T$ -module de dimension 1 et de poids  $\lambda$ . De plus,  $H^i(Y, L^n) = 0$  pour tous  $i \geq 1$  et  $n \geq 0$ . D'après le théorème de cohomologie et changement de base, ceci entraîne la décomposition en espaces propres de  $T$

$$p_*(L^n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} L_{n,\lambda}$$

où chaque  $L_{n,\lambda}$  est un fibré en droites sur  $A$ , ainsi que l'annulation des  $R^i p_*(L^n)$  lorsque  $i \geq 1$  et  $n \geq 0$ . La multiplication de l'algèbre  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} p_*(L^n)$  se restreint en des isomorphismes

$$L_{n,\lambda} \otimes L_{p,\mu} \simeq L_{n+p,\lambda+\mu}.$$

Il existe donc des fibrés en droites  $L_{0,\lambda}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) et  $L_{1,0}$  sur  $A$ , tels que  $L_{n,\lambda} \simeq L_{1,0}^n \otimes L_{0,\lambda}$  chaque fois que  $\lambda \in nP$ . En considérant les restrictions à l'orbite ouverte  $G \simeq G \times^T T$ , on obtient des isomorphismes  $L_{0,\lambda} \simeq L_\lambda$ . D'où, en posant  $M := L_{1,0}$  :

$$H^i(X, L^n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \cap nP} H^i(A, M^n \otimes L_\lambda)$$

pour tout  $i \geq 0$ . Comme  $L$  est ample et chaque  $L_\lambda$  est algébriquement trivial, on en déduit que  $M$  est gros (c'est-à-dire  $h^0(M^n)$  croît comme  $n^g$ ); et comme  $A$  est une variété abélienne, il en résulte que  $M$  est ample. Ceci entraîne les autres assertions.

Ainsi, les v.q.-a linéarisées  $(X, L)$  (sous une variété semi-abélienne  $G$  non spécifiée) sont classifiées par les quadruplets

$$(A, c, [M], P)$$

où  $A$  est une variété abélienne,  $c : \Lambda \rightarrow A^\vee$  est l'homomorphisme associé à l'extension  $1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$ ,  $[M] \in \text{Pic}(A)$  est une classe ample, et  $P$  est un polytope convexe entier dans  $V$ , d'intérieur non vide. Les adhérences des orbites de  $G$  dans  $X$  sont en bijection croissante avec les faces de  $P$ .

Plus généralement, à toute v.q.-a.s linéarisée  $(X, L)$  on associe la famille  $\Delta(X, L)$  des polytopes associés aux adhérences de ses orbites sous  $G$ . Grâce aux propositions 3.12 et 3.14,  $\Delta(X, L)$  vérifie les conditions de la

**DÉFINITION 3.15.** — *Un complexe de polytopes convexes entiers au-dessus de  $V$  est un espace topologique  $|\Delta|$  muni d'un recouvrement  $\Delta$  par des fermés, et d'une application de référence  $\rho : |\Delta| \rightarrow V$  telles que :*

- (i) *La restriction de  $\rho$  à chaque  $P \in \Delta$  est un homéomorphisme de  $P$  sur un polytope convexe entier dans  $V$ .*
- (ii) *Toute face d'un  $P \in \Delta$  appartient à  $\Delta$ .*
- (iii) *Pour tous  $P, Q \in \Delta$ , l'intersection  $P \cap Q$  (considérée dans  $|\Delta|$ ) est une réunion de faces de  $P$  et de  $Q$ .*

**DÉFINITION 3.16.** — *Le complexe (fini)  $\Delta(X, L)$  est le type de la v.q.-a.s linéarisée  $(X, L)$ .*

L'application de référence n'est pas nécessairement injective : pour la v.q.-a.s linéarisée  $(X_2, L)$  de l'exemple 3.8, le type est formé de deux intervalles  $[0, 1]$  recollés en leurs extrémités.

### 3.3. Linéarisation de l'action d'un tore

Dans la deuxième partie, on a construit des exemples de variétés complètes  $X$  munies d'une action d'un tore  $T$  et d'un fibré en droites ample  $L$ , telles que  $L$  n'est pas  $T$ -linéarisable mais le devient après un revêtement infini étale dont le groupe est celui des caractères de  $T$ . En fait, ce phénomène est bien plus général, comme le montrent les résultats de [3, Sec.4] qu'on va présenter brièvement.

Soit  $X$  une variété complète. Le foncteur contravariant qui à tout schéma  $S$  associe le groupe  $\text{Pic}(X \times S)/p_2^* \text{Pic}(S)$  est représentable par un schéma en groupes  $\mathbf{Pic}(X)$ , localement de type fini sur  $\text{Spec } k$ . La composante neutre  $\mathbf{Pic}^0(X)$  est un schéma en groupes de type fini ; son sous-schéma réduit  $\mathbf{Pic}^0(X)_{\text{red}}$  est un groupe algébrique commutatif qu'on peut identifier au groupe  $\text{Pic}^0(X)$  des classes d'isomorphie des fibrés en droites algébriquement triviaux.

**PROPOSITION 3.17.** — *Lorsque  $X$  est semi-normale, tout morphisme  $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbf{Pic}(X)$  est constant. De plus,  $\text{Pic}^0(X)$  est une variété semi-abélienne.*



PREUVE. — La première assertion se déduit de l'isomorphisme  $\mathrm{Pic}(X \times \mathbb{A}^1) \simeq p_1^* \mathrm{Pic}(X)$  vérifié pour toute variété semi-normale  $X$  (voir [24, Thm.3.6] pour le cas affine, et [3, Lem.4.1.10] pour le cas général).

D'après un théorème de Chevalley, le groupe algébrique connexe  $\mathrm{Pic}^0(X)$  est extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique linéaire connexe  $G$ , qui est ici commutatif et connexe. Mais on a vu que  $G$  ne contient aucun sous-groupe fermé isomorphe au groupe additif  $\mathbb{G}_a$ , donc  $G$  est un tore.

(Dans cet énoncé, l'hypothèse de semi-normalité est essentielle comme le montre l'exemple de la cubique plane cuspidale munie de l'action du groupe additif.)

Soit  $G$  un groupe algébrique opérant dans la variété complète  $X$ . Pour tout fibré en droites  $L$  sur  $X$ , on dispose d'un *morphisme de polarisation*

$$\lambda_L : G \rightarrow \mathbf{Pic}(X), \quad g \mapsto [L^{-1} \otimes g^*(L)].$$

C'est un morphisme de schémas, qui est constant si  $L$  admet une  $G$ -linéarisation. Lorsque  $G$  est connexe et réduct, l'image de  $\lambda_L$  est contenue dans  $\mathrm{Pic}^0(X)$ .

PROPOSITION 3.18

(i) *Lorsque  $X$  est munie d'une action d'une variété semi-abélienne  $G$ , le morphisme de polarisation  $\lambda_L$  est un homomorphisme de groupes pour tout fibré en droites  $L$  sur  $X$ . Autrement dit, le théorème du carré est vérifié pour l'action naturelle de  $G$  dans  $\mathbf{Pic}(X)$ .*

(ii) *Étant donné un tore  $T$  de groupe des caractères  $\Lambda$ , on a une correspondance biunivoque entre les homomorphismes  $T \rightarrow \mathbf{Pic}(X)$  et les classes d'isomorphie des  $\Lambda$ -torseurs sur  $X$ , c'est-à-dire des schémas  $\tilde{X}$  munis d'une action propre de  $\Lambda$  telle que  $\tilde{X}/\Lambda \simeq X$ .*

PREUVE

(i) Pour tout entier  $m \geq 1$ , soit  ${}_m\mathrm{Pic}^0(X)$  le noyau (ensembliste) de l'endomorphisme  $[L] \mapsto [L^m]$  du groupe  $\mathrm{Pic}^0(X)$ . Les  ${}_m\mathrm{Pic}^0(X)$  forment une suite croissante de sous-groupes finis dont la réunion est dense dans  $\mathrm{Pic}^0(X)$ . L'action naturelle de  $G$  dans  $\mathbf{Pic}(X)$  préserve chaque  ${}_m\mathrm{Pic}^0(X)$ ; puisque  $G$  est connexe, il opère trivialement dans chaque  ${}_m\mathrm{Pic}^0(X)$  et donc dans  $\mathrm{Pic}^0(X)$ . Ceci entraîne l'isomorphisme

$$g_1^*(L^{-1} \otimes g_2^*(L)) \simeq L^{-1} \otimes g_2^*(L)$$

pour tous  $g_1, g_2 \in G$ , et donc le théorème du carré.

(ii) s'obtient en adaptant celle de l'énoncé analogue pour les homomorphismes d'un schéma en groupes finis vers  $\mathbf{Pic}(X)$  [23, Prop.6.2.1].

Dans [3, Sec.4.1.4.2], la proposition 3.18 est généralisée aux schémas  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$  propres, plats et à fibres géométriques connexes et semi-normales. Cette généralisation permet d'établir un résultat clé [3, Thm.4.3] :

THÉORÈME 3.19. — *Étant donné un tore scindé  $T$  sur un schéma  $S$ , de groupe des caractères  $\Lambda$ , on a une équivalence de catégories entre :*

(a) *Les couples  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ , où*

(i)  *$\mathcal{X}$  est un schéma propre sur  $S$ , à fibres géométriquement connexes, réduites et semi-normales, muni d'une action de  $T$ .*

(ii)  *$\mathcal{L}$  est un fibré en droites relativement ample sur  $\mathcal{X}$ .*

(b) *Les couples  $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{L}})$ , où*

(i)  *$\tilde{\mathcal{X}}$  est un schéma localement de type fini sur  $S$ , à fibres géométriquement réduites et semi-normales, muni d'une action de  $T \times \Lambda$ .*

(ii)  *$\tilde{\mathcal{L}}$  est un fibré en droites relativement ample sur  $\tilde{\mathcal{X}}$ , muni d'actions de  $T$  et de  $\Lambda$  qui relèvent leurs actions dans  $\tilde{\mathcal{X}}$ .*

(iii)  *$\Lambda$  opère proprement dans  $\tilde{\mathcal{X}}$  et le quotient  $\tilde{\mathcal{X}}/\Lambda$  est propre sur  $S$ , à fibres géométriquement connexes.*

(iv) *Pour les actions de  $T$  et  $\Lambda$  dans  $\tilde{\mathcal{L}}$ , on a la relation de commutation  $t \circ \lambda = \lambda(t)\lambda \circ t$  pour tout point fonctoriel  $t$  de  $T$  et tout  $\lambda \in \Lambda$ .*

*Lorsque  $S$  est connexe, les composantes connexes de  $\tilde{\mathcal{X}}$  sont paramétrées par le groupe des caractères du noyau de l'homomorphisme de polarisation  $\lambda_L : T \rightarrow \mathbf{Pic}(\mathcal{X}/S)$ .*

En particulier, à toute v.q.-a.s polarisée  $(X, L)$  sous la variété semi-abélienne  $G$  de tore maximal  $T$ , on associe un revêtement étale infini  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  de groupe  $\Lambda$ , où  $\tilde{X}$  est un schéma localement de type fini muni d'une action de  $G$  qui relève l'action dans  $X$  et commute à celle de  $\Lambda$ . Par suite,  $\tilde{X}$  est semi-normale et toute réunion finie de ses composantes irréductibles est une v.q.-a.s linéarisée relativement au fibré en droites linéarisé  $\tilde{L} := \pi^*(L)$ . À l'aide des propositions 3.12 et 3.14, on peut donc définir le *type*

$$\tilde{\Delta} := \Delta(\tilde{X}, \tilde{L}).$$

C'est un complexe *localement fini* de polytopes convexes entiers, muni d'une action de  $\Lambda$  telle que l'application de référence  $\tilde{\rho} : |\tilde{\Delta}| \rightarrow V$  est équivariante pour l'action de  $\Lambda$  par translations sur  $V$ . Le quotient  $\Delta := \tilde{\Delta}/\Lambda$  peut être vu comme un complexe de polytopes convexes entiers muni d'une application de référence à valeurs dans le tore réel  $V/\Lambda$ .

Passons en revue quelques classes d'exemples, en commençant par les plus simples.

*Exemple 3.20.* — Les couples abéliens sont ceux dont le type est un point.

*Exemple 3.21.* — Lorsque le fibré en droites  $L$  est linéarisé, le schéma  $\tilde{X}$  est réunion disjointe d'exemplaires de  $X$  notés  $X_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . L'action de chaque  $\lambda \in \Lambda$  dans  $\tilde{X}$  est donnée par les identifications  $X_\mu \rightarrow X_{\lambda+\mu}$ . La restriction à  $X_\lambda$  du fibré en droites  $\tilde{L}$  est le fibré  $L$  muni de sa linéarisation tordue par le caractère  $\lambda$ .

*Exemple 3.22.* — Pour la dégénérescence maximale  $(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s)$  du théorème 2.7, l'espace topologique  $|\tilde{\Delta}|$  est identifié à  $V$  par l'application de référence, qui identifie  $\tilde{\Delta}$  à la décomposition de Delaunay  $\text{Del}_Q$ .

*Exemple 3.23.* — On va décrire le type du couple  $(\text{Jac}^{g-1}(C), \Theta)$  associé dans l'exemple 3.4 à une courbe complète et nodale  $C$  de genre arithmétique  $g$ . Avec les notations de cet exemple et de l'exemple 1.2, on obtient  $\Lambda = H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \subseteq C_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^d$ , d'où  $V = H_1(\Gamma, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^d$ . D'après [4, Sec.2], on a encore  $|\tilde{\Delta}| \simeq V$  via l'application de référence, et  $\tilde{\Delta}$  n'est autre que la décomposition de Delaunay de  $V$  relative à la restriction de la forme quadratique standard sur  $\mathbb{R}^d$ . Ainsi, le type est la trace sur  $V$  du pavage entier de  $\mathbb{R}^d$  en « cubes » découpés par les hyperplans de coordonnées et leurs translatés entiers.

Ces deux derniers exemples motivent la

**DÉFINITION 3.24.** — *Le type  $\tilde{\Delta}$  d'une v.q.-a.s polarisée est dit périodique de degré 1 si son application de référence est un homéomorphisme qui identifie  $\tilde{\Delta}$  à un pavage périodique de  $V$  par des polytopes convexes entiers (au sens défini en 2.1).*

En particulier, pour une v.q.-a.s polarisée  $(X, L)$  dont le type  $\tilde{\Delta}$  est périodique de degré 1, l'ensemble des sommets des polytopes de  $\tilde{\Delta}$  n'est autre que  $\Lambda$ . Autrement dit,  $X$  contient une unique orbite fermée de  $G$ , qui est alors un  $A$ -torseur.

### 3.4. Espaces des modules de couples stables

La classification des variétés et des couples quasi-abéliens stables peut se déduire des résultats de 3.2 et 3.3 : grâce au théorème 3.19, on se ramène au cas linéarisé, où les objets considérés s'obtiennent par recollement de fermés irréductibles qu'on a déterminés dans la proposition 3.14(i). On ne détaille pas ici cette classification, pour laquelle on renvoie à [3, Sec.1.2], mais on en énonce deux conséquences importantes :

**PROPOSITION 3.25.** — *Pour toute v.q.-a.s polarisée  $(X, L)$ , on a  $H^i(X, L^n) = 0$  lorsque  $i \geq 1$  et  $n \geq 1$ .*

Pour une v.q.-a linéarisée, c'est la proposition 3.14(ii) ; le cas général en est déduit dans [3, Thm.2.5.1, Thm.5.4.1].

Il en résulte que pour tout couple quasi-abélien stable  $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$  sur  $S$ , le degré de  $(\mathcal{X}_s, \mathcal{D}_s)$  est constant sur chaque composante connexe de  $S$ .

THÉORÈME 3.26. — Soit  $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{D}_\eta)$  un couple quasi-abélien stable sur le point générique d'un trait  $S$ . Alors, quitte à faire un changement de base fini ramifié, on peut étendre  $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{D}_\eta)$  en un couple quasi-abélien stable  $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$  sur  $S$ ; une telle extension est unique à isomorphisme près. Lorsque le type de  $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{D}_\eta)$  est périodique de degré 1, il en est de même du type de la fibre spéciale.

Cet analogue du théorème de réduction semi-stable est d'abord établi pour les couples toriques stables [3, Sec.2.8]. Le cas général est déduit dans [3, Sec.5.7] du cas torique stable et de la construction de dégénérescences des couples abéliens obtenue dans [5] (voir le théorème 2.7 pour les dégénérescences maximales).

Le théorème 3.26 est l'un des principaux ingrédients dans la preuve du résultat principal de ce texte [3, Sec.1.2.H] :

THÉORÈME 3.27

(i) Les couples quasi-abéliens stables de dimension  $g$  et de type périodique de degré 1 forment un champ algébrique propre  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{mod}}$  dont le morphisme diagonal est fini. Les couples de type fixé forment un sous-champ localement fermé.

(ii) Le champ  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{mod}}$  admet un espace des modules grossier  $\overline{\mathbb{A}}_g^{\text{mod}}$ . C'est un espace algébrique propre muni d'une stratification par le type, indexée par les classes d'isomorphie des pavages périodiques des  $\mathbb{R}^r$ ,  $r = 0, 1, \dots, g$ , par des polytopes convexes entiers.

(iii) La strate de  $\overline{\mathbb{A}}_g^{\text{mod}}$  associée à  $r = 0$  n'est autre que  $\mathbb{A}_g$ ; son adhérence dans  $\overline{\mathbb{A}}_g^{\text{mod}}$  en est une composante irréductible dite principale, dont la normalisation est la compactification toroïdale  $\overline{\mathbb{A}}_g^{\text{Vor}}$  associée à la deuxième subdivision de Voronoi (voir 1.4).

Indiquons les grandes lignes de la démonstration. On commence par obtenir un résultat similaire pour les couples toriques stables linéarisés dont le type est une subdivision d'un polytope convexe entier donné; dans ce cas, on construit directement le champ des modules par des méthodes de géométrie torique [3, Sec.2]. Ces méthodes ne se transposent pas telles quelles au cas périodique de degré 1, mais elles permettent de décrire les déformations infinitésimales des couples stables (car tout schéma semi-abélien sur un anneau local artinien est extension d'un schéma abélien par un tore). L'algébricité du champ  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{mod}}$  se déduit alors d'un critère d'Artin [12, Thm.10.10]. Et sa propriété résulte du critère valuatif et du théorème 3.26; l'existence de son espace des modules grossier s'obtient en appliquant le résultat principal de [10].

Remarque 3.28. — L'énoncé (iii) ci-dessus apparaît dans [3, Thm.5.11.6] sous une forme beaucoup plus simple : la composante principale de  $\overline{\mathbb{A}}_g^{\text{mod}}$  est isomorphe à  $\overline{\mathbb{A}}_g^{\text{Vor}}$ . Mais la preuve de ce résultat, qui équivaut bien sûr à la normalité de la composante principale, n'est pas tout à fait complète.

Le théorème 3.27 et les propriétés des jacobiniennes compactifiées relatives énoncées dans l'exemple 3.10 entraînent aussitôt l'existence d'une version modulaire du morphisme  $\bar{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}} : \bar{\mathcal{M}}_{g,\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_{g,\mathbb{C}}^{\text{Vor}}$ .

THÉORÈME 3.29. — *En associant à toute courbe stable  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$  de genre  $g$  le couple quasi-abélien stable  $(\mathbf{Jac}^{g-1}(\mathcal{C}/S), \Theta) \rightarrow S$ , on définit un morphisme de Torelli compactifié*

$$\bar{\mathfrak{t}} : \bar{\mathcal{M}}_g \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_g^{\text{mod}}$$

dont l'image est contenue dans la composante principale.

Remarque 3.30. — Rappelons que les strates de  $\bar{\mathcal{A}}_g^{\text{Vor}}$  sont paramétrées par les classes d'isomorphie des décompositions de Delaunay des  $\mathbb{R}^r$  où  $r = 0, 1, \dots, g$ . On montre que lorsque  $g \leq 3$ , tout pavage périodique de  $\mathbb{R}^g$  par des polytopes convexes entiers est une décomposition de Delaunay, mais qu'il n'en est plus ainsi dès que  $g \geq 4$ ; dans ce dernier cas, il en résulte que  $\bar{\mathcal{A}}_g^{\text{mod}}$  admet des composantes irréductibles autres que la composante principale.

Ces composantes sont analysées plus en détail dans [2] à l'aide d'une formule calculant la dimension de la strate associée à un type donné. Il y est montré en particulier que  $\bar{\mathcal{A}}_g^{\text{mod}}$  est irréductible lorsque  $g \leq 3$ , mais que la dimension de  $\bar{\mathcal{A}}_g^{\text{mod}}$  croît au moins comme  $2^g$ , bien plus vite que la dimension  $g(g+1)/2$  de la composante principale.

Ainsi,  $\bar{\mathcal{A}}_g$  est loin d'être dense dans  $\bar{\mathcal{A}}_g^{\text{mod}}$  lorsque  $g$  est grand. En fait, il n'est pas rare qu'une compactification modulaire d'un espace de paramètres introduise de nouvelles composantes irréductibles; c'est le cas, par exemple, du schéma de Hilbert ponctuel  $X^{[n]}$  qui compactifie les  $n$ -uplets de points non ordonnés, deux à deux distincts, d'une variété  $X$  de dimension au moins 3.

Remarque 3.31. — Les résultats de [3] concernent, plus généralement, les couples abéliens stables de dimension  $g$  et degré  $d$  arbitraire; on y montre qu'ils admettent un espace des modules grossier, noté  $\text{AP}_{g,d}$ . En associant à chaque couple la variété abélienne polarisée sous-jacente, on définit un morphisme

$$\text{AP}_{g,d} \rightarrow \mathcal{A}_{g,d}$$

qui est projectif de dimension relative  $d-1$ ; ici  $\mathcal{A}_{g,d}$  désigne l'espace des modules grossier des variétés abéliennes de dimension  $g$  munies d'une polarisation de degré  $d$ . Et  $\text{AP}_{g,d}$  admet aussi une compactification modulaire  $\bar{\text{AP}}_{g,d}^{\text{mod}}$  paramétrant les couples quasi-abéliens stables dont le type est *périodique de degré  $d$* , c'est-à-dire possède exactement  $d$  composantes connexes, chacune étant identifiée par l'application de référence à un pavage de  $V$ , périodique pour un sous-groupe d'indice  $d$  de  $\Lambda$ .

Cependant, la construction d'une compactification modulaire de  $\mathcal{A}_{g,d}$  nécessite d'autres idées lorsque  $d \geq 2$ , voir [21].

De même, on dispose d'espaces des modules grossiers  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  qui paramètrent les variétés abéliennes de dimension  $g$  munies d'une polarisation de degré  $d$  et d'une

structure de niveau  $n$ , c'est-à-dire d'un isomorphisme de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$  sur leur sous-groupe de  $n$ -torsion. Lorsque  $n \geq 3$ , il s'agit même d'espaces des modules fins (voir [15]).

Mais on ne connaît pas de compactification des espaces  $A_{g,d,n}$  qui soit modulaire au sens du théorème 3.27 (voir cependant [17, 18] pour des compactifications de certains  $A_{g,d,n}$ , modulaires en un sens plus faible). On ignore aussi comment définir des structures de niveau  $n$  pour les couples quasi-abéliens stables.

## RÉFÉRENCES

- [1] V. ALEXEEV – «Log canonical singularities and complete moduli of stable pairs», arXiv : alg-geom/9608013.
- [2] ———, «On extra components in the functorial compactification of  $A_g$ », in *Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999)*, Progr. Math., vol. 195, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 1–9.
- [3] ———, «Complete moduli in the presence of semiabelian group action», *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), no. 3, p. 611–708.
- [4] ———, «Compactified Jacobians and Torelli map», *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40** (2004), no. 4, p. 1241–1265.
- [5] V. ALEXEEV & I. NAKAMURA – «On Mumford's construction of degenerating abelian varieties», *Tohoku Math. J. (2)* **51** (1999), no. 3, p. 399–420.
- [6] A. ASH, D. MUMFORD, M. RAPOPORT & Y. TAI – *Smooth compactification of locally symmetric varieties*, Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975, Lie Groups: History, Frontiers and Applications, vol. IV.
- [7] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT & M. RAYNAUD – *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [8] G. FALTINGS & C.-L. CHAI – *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990, avec un appendice de D. Mumford.
- [9] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [10] S. KEEL & S. MORI – «Quotients by groupoids», *Ann. of Math. (2)* **145** (1997), no. 1, p. 193–213.
- [11] J. KOLLÁR & N. I. SHEPHERD-BARRON – «Threefolds and deformations of surface singularities», *Invent. Math.* **91** (1988), no. 2, p. 299–338.
- [12] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [13] D. MUMFORD – *Abelian varieties*, Oxford University Press, Oxford, 1970.
- [14] ———, «An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings», *Compositio Math.* **24** (1972), p. 239–272.
- [15] D. MUMFORD, J. FOGARTY & F. KIRWAN – *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 3<sup>e</sup> édition.

- [16] I. NAKAMURA – «On moduli of stable quasi abelian varieties», *Nagoya Math. J.* **58** (1975), p. 149–214.
- [17] ———, «Stability of degenerate abelian varieties», *Invent. Math.* **136** (1999), no. 3, p. 659–715.
- [18] Y. NAMIKAWA – «A new compactification of the Siegel space and degeneration of Abelian varieties I& II», *Math. Ann.* **221** (1976), no. 2, p. 97–141, pp. 201–241.
- [19] ———, *Toroidal compactification of Siegel spaces*, Lect. Notes in Math., vol. 812, Springer, Berlin, 1980.
- [20] T. ODA & C. S. SESHADRI – «Compactifications of the generalized Jacobian variety», *Trans. Amer. Math. Soc.* **253** (1979), p. 1–90.
- [21] M. C. OLSSON – «Canonical compactifications of moduli spaces for abelian varieties», <http://www.ma.utexas.edu/~molsson/>.
- [22] M. RAYNAUD – «Spécialisation du foncteur de Picard», *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1970), no. 38, p. 27–76.
- [23] ———, «Compactification du module des courbes», in *Séminaire Bourbaki (1970/1971)*, Lect. Notes in Math., vol. 244, Springer, Berlin, 1971, exp. no. 385, p. 47–61.
- [24] C. TRAVERSO – «Seminormality and Picard group», *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **24** (1970), p. 585–595.

Michel BRION

Université Grenoble I  
Institut Joseph Fourier  
UMR 5582 du CNRS  
B.P. 74

F-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex

*E-mail* : Michel.Brion@ujf-grenoble.fr





**EXPLOSION POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER AU  
RÉGIME DU « LOG LOG »**  
[d'après Merle-Raphael]

par Nicolas BURQ

**INTRODUCTION**

On se propose dans cet exposé de présenter quelques résultats récents sur l'explosion pour l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$(1) \quad i \frac{\partial}{\partial t} u + \Delta u + |u|^{\frac{d}{2}} u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}, \quad \Delta u = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Cette équation apparaît dans plusieurs modèles mathématiques de phénomènes physiques : la propagation d'ondes dans un milieu non linéaire, la propagation dans les fibres optiques ou la condensation de Bose-Einstein (équation de Gross-Pitaevskii). Elle possède (au moins formellement) trois lois de conservation :

– Conservation de la masse

$$(2) \quad \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

– Conservation de l'énergie

$$(3) \quad E(u)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{1}{2} |\nabla_x u|^2 - \frac{d}{2d+4} |u|^{\frac{2d+4}{d}} \right) dx = E(u)(0).$$

– Conservation du moment cinétique

$$(4) \quad \mathbf{Im} \left( \int \nabla_x u \bar{u}(t, x) dx \right) = \mathbf{Im} \left( \int \nabla_x u \bar{u}(0, x) dx \right).$$

Ces invariants sont reliés aux invariances de l'équation dans l'espace d'énergie  $H^1$  : si  $u(t, x)$  est solution de (1) alors

- $u(t_0 + t, x_0 + x)$  aussi (invariance par translation),
- $u(t, x)e^{i\gamma}$  aussi (invariance de phase),
- $\lambda^{\frac{d}{2}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$  aussi (invariance d'échelle),
- $u(t, x - \beta t)e^{i\frac{\beta}{2} \cdot (x - \frac{\beta}{2} t)}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^d$  aussi (invariance galiléenne).

Une quatrième symétrie peut-être moins évidente (et qui n'agit pas sur  $H^1$ ) est l'invariance conforme : si  $u(t, x)$  est solution de (1) alors il en est de même de

$$(5) \quad v(t, x) = \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}} \bar{u}\left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right) e^{i\frac{x^2}{4t}}.$$

On peut remarquer que l'application

$$u \mapsto u_\lambda, \quad u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{d}{2}} u(\lambda x)$$

préserve la norme  $L^2$  : l'équation (1) est dite  $L^2$ -critique (un autre choix de puissance dans la non-linéarité donnerait une autre puissance de  $\lambda$  pour l'invariance d'échelle).

L'équation (1) est un système hamiltonien de dimension infinie. La partie *linéaire* de l'équation,  $i\partial_t + \Delta$ , possède des propriétés dispersives et un des points importants de l'étude de (1) consiste à comprendre l'interaction entre ces propriétés de dispersion et l'effet de focalisation dû à la non-linéarité. Dans ce contexte des équations dispersives, l'équation de Schrödinger non linéaire est, avec l'équation de Korteweg–de Vries critique (voir les travaux de Martel et Merle [MM00, MM02a, MM02b, MM04] qui ont inspiré le travail de Merle et Raphael et l'exposé au séminaire Bourbaki de Tzvetkov [Tzv05] sur le sujet), un modèle important pour lequel on est capable d'exhiber des solutions *explosives*.

Les questions auxquelles on va s'intéresser dans cet exposé sont les suivantes :

- Existe-t-il des solutions explosives autres que celles (explicites) qui sont connues depuis les années 60 ?
- Peut-on classifier les types d'explosion possibles ?
- Quels types d'explosion sont stables ?

**Remerciements.** — Je remercie P. Gérard pour les discussions que j'ai eues avec lui sur le sujet de cet exposé et P. Raphael qui a passé du temps à m'expliquer de nombreux points de leur preuve et dont les notes de cours sur le sujet [Rap04] ont été une source d'inspiration.

## 1. LE CARACTÈRE BIEN POSÉ DANS $H^1$ , CRITÈRES D'EXPLOSION ET DE NON-EXPLOSION

### 1.1. Non-explosion : normes $L^2$ petites

Le caractère localement bien posé de (1) pour des données initiales  $L^2$  ou  $H^1$  (norme quelconque) est connu depuis les travaux de Ginibre et Velo [GV79] :

**THÉORÈME 1.1.** — *Pour tout  $C > 0$  il existe  $T > 0$  tel que pour toute donnée initiale  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\|u_0\|_{H^1} \leq C$ , il existe une unique solution  $u \in C([0, T[; H^1)$  de l'équation (1) vérifiant  $u|_{t=0} = u_0$ .*

On peut remarquer que le temps d'existence de la solution est minoré par une fonction de la norme  $H^1$  de la donnée initiale. Si on note  $T$  le temps maximal d'existence on a ainsi, si  $T < +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty.$$

On dit qu'on a *explosion* en temps fini de la solution. On peut aussi avoir explosion en temps infini si

$$T = +\infty \text{ et } \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty.$$

Pour des données initiales petites dans  $L^2$ , la solution est globale en temps : ceci est une conséquence facile de l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg suivante :

PROPOSITION 1.2. — *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ , on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{4}{d}+2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}}.$$

En effet, on déduit de l'inégalité précédente que si la norme  $L^2$  de la donnée initiale (et donc de la solution d'après (2)) est petite, alors

$$E(u(t)) \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t)|^2 dx$$

donc notre solution reste bornée dans  $H^1$  (compte tenu de la conservation de la norme  $L^2$ ) et  $T = +\infty$ .

On peut préciser la condition « norme  $L^2$  petite » (voir Weinstein [Wei83]).

PROPOSITION 1.3. — *On considère le problème de minimisation suivant :*

$$m = \inf_{0 \neq v \in H^1} \frac{\left( \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}}}{\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{4}{d}+2} dx}.$$

Alors  $m$  est atteint pour la famille à trois paramètres de fonctions

$$\lambda^{\frac{d}{2}} Q(\lambda x + x_0) e^{i\gamma}, \quad (\lambda, x_0, \gamma) \in \mathbb{R}^{*,+} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

où  $Q$  est l'unique solution positive radiale et exponentiellement décroissante à l'infini du système

$$\Delta Q - Q + Q^{\frac{4}{d}+1} = 0, \quad Q(r) \rightarrow 0, r \rightarrow +\infty.$$

(On appelle  $Q$  « l'état fondamental »).

On en déduit l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg précisée :

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 \left( 1 - \left( \frac{\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \right)^{\frac{4}{d}} \right).$$

On voit immédiatement que si  $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ , les deux quantités conservées, énergie et masse, impliquent que la norme  $H^1$  reste bornée et donc que la solution existe globalement (en temps) :

PROPOSITION 1.4. — *Pour tout  $u_0 \in H^1$  telle que  $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ , la solution de (1) de donnée initiale  $u_0$  existe pour tout temps.*

Remarque 1.5. — On peut également montrer en utilisant les estimations de Strichartz dues dans ce contexte à Ginibre et Velo [GV79] que, pour toute donnée initiale  $u_0 \in L^2$ , il existe une solution locale en temps de (1) et que la solution est globale ( $T = +\infty$ ) si la norme de la donnée initiale est petite dans  $L^2$ . La question de savoir si la borne garantissant l'existence globale est  $\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  (comme au niveau  $H^1$ ) est ouverte.

## 1.2. Ondes solitaires et explosion à masse critique

Il est remarquable de constater que non seulement  $Q$  fournit un critère de non-explosion, mais qu'il en établit aussi le caractère optimal. En effet, la fonction  $e^{it}Q(x)$  (le soliton de l'équation de Schrödinger) est clairement solution de (1). En utilisant l'invariance conforme (5), on peut définir

$$S(t) = \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}} Q\left(\frac{x}{t}\right) e^{i\left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{4t}\right)},$$

qui est la solution de (1) de donnée initiale à  $t = -1$  égale à  $Q(x)e^{i\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}$ . Alors  $S(t)$  vérifie

- (1)  $E(S(t)) > 0$ ,
- (2)  $\|S(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ ,
- (3)  $\|\nabla S(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \frac{C}{|t|}$ ,  $t \rightarrow 0$ ,  $t > 0$ ,
- (4)  $S(t)$  se concentre en  $x = 0$  quand  $t$  tend vers 0 : au sens de la convergence faible des mesures,

$$|S(t)|^2 dx \rightarrow \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \delta_{x=0}.$$

En fait ces propriétés caractérisent la fonction  $S(t)$ .

THÉORÈME 1.6 (Merle [Mer93]). — *Soit  $u_0 \in H^1$  telle que  $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ . On suppose que la solution de (1) explose en temps fini. Alors aux symétries de translation, phase, dilatation et invariance conforme près,  $u(t, x) = S(t, x)$ .*

## 1.3. Explosion à énergie négative

Une question naturelle, compte tenu du théorème 1.6 est de savoir si pour  $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  il existe effectivement des solutions explosives de (1) (et éventuellement de les décrire). Grâce à l'identité du viriel due à Zakharov et Shabat [ZS71],

$$(6) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \int |x|^2 |u(t, x)|^2 dx \right) = 4 \frac{d}{dt} \mathbf{Im} \left( \int x \nabla u \bar{u} dx \right) = 16E_0,$$

on a une première réponse très simple. En effet, on peut alors vérifier que si la donnée initiale est dans l'espace du viriel

$$\Sigma = \{u \in H^1; xu \in L^2\},$$

alors la solution reste dans cet espace tant qu'elle existe (en tant que solution dans  $H^1$ ) et vérifie (6). En particulier, si  $E_0 < 0$ , la solution explose en temps fini (le terme de gauche dans (6) est positif mais a une dérivée seconde constante strictement négative). Cet argument a pu être généralisé au cadre de données initiales qui ne sont plus dans  $\Sigma$  mais seulement dans  $H^1$  :

**THÉORÈME 1.7.** — *Soit  $u_0 \in H^1$  telle  $E_0 < 0$ . Alors la solution de (1) de donnée initiale  $u_0$  explose en temps fini si*

- (1)  $d = 1$  (Ogawa, Tsutsumi [OT91]) ou
- (2)  $d \geq 2$  et  $u_0$  est radiale (Nawa [Naw99]).

Un inconvénient majeur de ce résultat est qu'il fournit juste une obstruction à l'existence globale. Il ne dit rien sur l'explosion proprement dite ni sur le comportement de la solution.

#### 1.4. Solutions auto-similaires

Compte tenu de l'invariance par changement d'échelle de l'équation, il est naturel de chercher des solutions sous la forme

$$U_b(t, x) = \frac{1}{(2b(T-t))^{\frac{d}{2}}} Q_b \left( \frac{x}{\sqrt{2b(T-t)}} \right) e^{-i \frac{\log(T-t)}{2b}}$$

avec  $Q_b$  solution de

$$\Delta Q_b - Q_b + ib \left( \frac{d}{2} Q_b + y \cdot \nabla Q_b \right) + Q_b |Q_b|^{\frac{d}{2}} = 0.$$

De telles solutions ne sont jamais dans  $L^2$  à cause d'une divergence de type logarithmique à l'infini :

$$|Q_b(x)| \sim \frac{C(b)}{|x|^{\frac{d}{2}}}, \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

Néanmoins ces solutions joueront un rôle important dans la suite.

Un autre résultat (élémentaire) relié à cette invariance par changement d'échelle est le suivant :

**PROPOSITION 1.8.** — *On considère  $u$  une solution de (1) de donnée initiale  $u_0 \in H^1$  et explosant en temps fini,  $T$ . Alors il existe  $C > 0$  (ne dépendant que de  $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ ) tel que*

$$(7) \quad \forall t \in [0, T[, \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{C}{\sqrt{T-t}}.$$

En effet, fixons  $t \in [0, T[$  et considérons

$$v^t(s, y) = \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-\frac{d}{2}} u(t + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-2} s, \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-1} y).$$

La fonction  $v^t$  est la solution de (1) de donnée initiale (à  $s = 0$ )

$$v_0^t(y) = \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-\frac{d}{2}} u(t, \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-1} y)$$

qui vérifie

$$\|v_0^t\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \|\nabla v_0^t\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1.$$

Donc d'après la théorie locale dans  $H^1$ , il existe  $s_0$  ne dépendant que de  $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ , tel que  $v^t$  existe pour  $s \in [0, s_0]$ . Par conséquent,

$$t + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-2} s_0 \leq T$$

ce qui est (7).

### 1.5. Dynamique à l'explosion

La plupart des résultats sur la dynamique à l'explosion concernent le régime perturbatif :

$$u_0 \in \mathcal{B}_\alpha = \{u_0 \in H^1; \quad \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \alpha\}, \quad 0 < \alpha \ll 1$$

On connaît deux différents types de comportement à l'explosion pour les solutions de (1)

(1) L'explosion en  $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \frac{1}{T-t}$  dont le modèle est  $S(T-t)$  (voir aussi les solutions construites par Bourgain et Wang [BW97]).

(2) Des simulations numériques (voir les travaux de Landman, Papanicolaou, Sulem et Sulem [LPSS88] et la monographie de Sulem-Sulem [SS99]) ont prédit dans les années 80 l'existence de solutions explosant au régime du « log log » :

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \left( \frac{\log |\log(t)|}{T-t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ces solutions apparaissent (numériquement) beaucoup plus stables que les précédentes. Le premier résultat mathématique confirmant l'existence de telles solutions est dû à Perelman [Per01] : elle construit en dimension 1 une telle solution et démontre sa stabilité dans un certain espace strictement inclus dans  $H^1$ .

La situation a été complètement clarifiée dans une série de papiers par Merle et Raphael [MR03, MR04, MR05c, MR05a, Rap05].

**THÉORÈME 1.9.** — *On suppose  $d = 1$ . Il existe des constantes  $\alpha > 0, C_1, C_2, C_3 > 0$  telles que si  $u_0 \in \mathcal{B}_\alpha$  et si  $u(t)$  est la solution de (1) de donnée initiale  $u_0$  (qui*

existe sur un intervalle maximal  $t \in [0, T[, T \leq +\infty)$ , alors :

$$(1) \text{ si } E_0^G = E_0(u_0) - \frac{(\mathbf{Im}(\int \nabla u_0 \overline{u_0} dx))^2}{2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} < 0,$$

alors  $u(t)$  explose en temps fini ( $T < +\infty$ ) et on a la borne suivante sur la vitesse d'explosion :

$$(8) \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \left( \frac{\log |\log(T-t)|}{T-t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) Si  $E_0^G = 0$  et si  $u_0$  n'est pas un soliton (à translation, dilatation et changement d'échelle près) alors  $u(t)$  explose en temps fini.

(3) L'ensemble  $\mathcal{O}$  des données initiales  $u_0 \in \mathcal{B}_\alpha$  telles que  $u(t)$  explose en temps fini avec la borne supérieure (8) est ouvert dans  $H^1$ .

(4) Si  $u$  explose en temps fini et si (8) n'est pas vérifiée, alors

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{C_2}{(T-t)\sqrt{E_0^G}}$$

(5) Si  $u$  explose en temps fini, alors

$$(9) \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq C_3 \left( \frac{\log |\log(T-t)|}{T-t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le résultat précédent se généralise au cas des dimensions d'espace  $d = 2, 3, 4$  sous l'hypothèse (conjecturale) :

HYPOTHÈSE SPECTRALE 1.10. — On considère les deux opérateurs de Schrödinger suivants :

$$\mathcal{L}_1 = -\Delta + \frac{2}{d} \left( \frac{4}{d} + 1 \right) Q^{\frac{4}{d}-1} y \cdot \nabla Q, \quad \mathcal{L}_2 = -\Delta + \frac{2}{d} Q^{\frac{4}{d}-1} y \cdot \nabla Q.$$

On note

$$H(\varepsilon, \varepsilon) = (\mathcal{L}_1 \mathbf{Re} \varepsilon, \mathbf{Re} \varepsilon)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + (\mathcal{L}_2 \mathbf{Im} \varepsilon, \mathbf{Im} \varepsilon)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon \in H^1,$$

et pour toute distribution  $f$ ,

$$f_1 = \frac{d}{2} f + y \cdot \nabla f, \quad f_2 = (f_1)_1.$$

Alors il existe deux constantes  $\delta > 0$  et  $\kappa < 2$  telles que pour toute fonction  $\varepsilon \in H^1$  vérifiant les conditions d'orthogonalité

$$(10) \quad \begin{aligned} (\mathbf{Re} \varepsilon, Q)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= (\mathbf{Re} \varepsilon, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{Re} \varepsilon, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \\ (\mathbf{Im} \varepsilon, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= (\mathbf{Im} \varepsilon, Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{Im} \varepsilon, \nabla Q)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \end{aligned}$$

$$H(\varepsilon, \varepsilon) \geq \delta \left( \int |\nabla \varepsilon|^2 dx + \int |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|x|} dx \right).$$

(On peut remarquer qu'à partir de la dimension 3, le second terme à droite dans l'inégalité précédente est contrôlé par le premier.)

Cette propriété spectrale des opérateurs  $\mathcal{L}_j$  a été démontrée (voir [MR05a]) en dimension  $d = 1$  ( $\kappa = \frac{9}{5}$ ) et vérifiée numériquement par Fibich, Merle et Raphael [FMR04] pour  $d = 2, 3, 4$ . Elle est fautive pour  $d = 5, 6$ .

### 1.6. Instabilité structurelle de la loi du « log log »

Même si, compte tenu des simulations numériques de Landman, Papanicolaou, Sulem et Sulem [LPSS88] et plus récemment des résultats du théorème 1.9, et en particulier du point (3), l'explosion au régime du « log log » présente de manifestes propriétés de stabilité, ce phénomène est lié à une certaine dégénérescence de l'équation de Schrödinger non linéaire (1) et est en fait *structurellement instable* au sens suivant : Considérons en dimension  $d = 2$  le système de Zakharov

$$(11) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - nu = 0, \\ \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 n - \Delta n - \Delta |u|^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation (1) est en fait une approximation de ce système dans la limite  $c_0 \rightarrow +\infty$  (au moins au niveau formel). Le système de Zakharov possède également une loi du viriel similaire à (6) et on peut en déduire l'explosion pour une classe de données initiales (voir les travaux de Merle [Mer96a]). On peut également exhiber une famille de solutions explosives explosant comme  $S(t)$  [GM94b, GM94a]. Cependant, l'analogie avec (1) s'arrête là : Merle [Mer96b] a en effet démontré que toutes les solutions explosives explosent au moins en  $1/(T-t)$  :

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{C}{T-t}.$$

En résumé, le régime du « log log » n'existe pas pour le système de Zakharov et il est donc conséquence d'une certaine dégénérescence dans la limite  $c_0 \rightarrow +\infty$ .

L'objet de cet exposé est de présenter quelques-unes des idées permettant de démontrer les bornes supérieure (8) et inférieure (9) dans le cas d'énergie négative  $E_0^G < 0$ .

## 2. MODULATION AUTOUR DE L'ÉTAT FONDAMENTAL

Une première remarque est que l'hypothèse  $E_0^G < 0$  implique que, quitte à faire une transformation galiléenne, on peut supposer que

$$(12) \quad E(u) < 0, \quad \mathbf{Im} \left( \int \nabla u \bar{u} \right) = 0.$$

En effet, si  $u_0$  vérifie  $E_G(u_0) < 0$ , alors si

$$(u_0)_\beta = u_0 e^{i\frac{\beta}{2} \cdot x}, \quad \beta = -2 \frac{\mathbf{Im} \left( \int \nabla u_0 \bar{u}_0 \right)}{\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2},$$



un calcul direct montre que la solution de (1) de donnée initiale  $(u_0)_\beta$  vérifie (12). D'autre part, l'invariance galiléenne montre que la description de l'explosion de  $u_\beta$  est équivalente à la description de l'explosion de  $u$ . On supposera donc dans la suite que (12) est vérifiée. L'analyse que Merle et Raphael conduisent est de type perturbative (autour de l'état fondamental). La première étape consiste donc à rendre rigoureux le fait que la solution  $u$  est proche d'une certaine modulation de cet état fondamental. Dans le contexte de l'équation de Schrödinger, cette approche remonte aux travaux de Weinstein [Wei83, Wei85] (voir aussi Buslaev et Perelman [BP93, BP95]). Le premier résultat est une propriété de stabilité orbitale de l'état fondamental.

PROPOSITION 2.1. — *Il existe  $\alpha^* > 0$  et une fonction  $\delta : \alpha \in ]0, \alpha^*] \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui tend vers 0 quand  $\alpha$  tend vers 0 et tels que pour toute fonction  $v \in H^1$  vérifiant*

$$(13) \quad \int Q^2 dx \leq \int |v|^2 dx \leq \int Q^2 dx + \alpha,$$

et

$$(14) \quad E(v) \leq \alpha \int |\nabla v|^2 dx,$$

il existe  $(\gamma_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+d}$  tels que

$$\|Q - e^{i\gamma_0} \lambda_0^{\frac{d}{2}} v(\lambda_0 x + x_0)\|_{H^1} \leq \delta(\alpha), \quad \lambda_0 = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}.$$

La preuve de cette proposition est assez classique : on fait un raisonnement par l'absurde, un argument de concentration-compacité [Lio84] permet d'extraire une sous-suite convergente qui est, par passage à la limite, d'énergie négative, de masse critique (égale à celle de l'état fondamental), mais n'est pas une translatée-dilatée de l'état fondamental, ce qui contredit la proposition 1.3

On peut remarquer que l'hypothèse (13) est la plus contraignante, c'est elle qui limite l'analyse à un régime de type « perturbation », tandis que l'hypothèse (14) est automatiquement vérifiée pour tout temps pour  $E_0 < 0$  ou, si on sait *a priori* que la solution explose, pour  $t$  assez proche du temps d'explosion  $T$  (puisqu'alors l'hypothèse est vérifiée car le terme de gauche est constant tandis que celui de droite tend vers  $+\infty$ ). Cette hypothèse (13) peut être relaxée (voir [MR05b]).

On va maintenant préciser cette décomposition. L'idée générale est d'utiliser un profil auto-similaire pour décrire la solution. Cependant, comme ces profils ne sont pas de norme  $L^2$  finie, il est nécessaire de les tronquer au bon endroit. Pour cela, on introduit des profils auto-similaires proches de l'état fondamental  $Q$  : on fixe un paramètre  $0 < \eta < 1$  (qui sera choisi petit par la suite) et pour  $b \neq 0$  on définit

$$R_b = \frac{2}{|b|} \sqrt{1 + \eta}, R_b^- = \sqrt{1 - \eta} \frac{2}{|b|}.$$

On fixe aussi une troncature radiale  $\phi_b$  égale à 0 pour  $|x| \geq R_b$  et à 1 pour  $|x| \leq R_b^-$ .

PROPOSITION 2.2. — *Il existe  $C, \eta^* > 0$  et des fonctions  $\epsilon^*(\eta) > 0, b^*(\eta) > 0$  définies pour  $0 < |\eta| \leq \eta^*$  et tendant vers 0 quand  $\eta$  tend vers 0 tels que pour tout  $b < b^*(\eta)$ , il existe une unique solution radiale de l'équation*

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta Q_b - Q_b + ib \left( \frac{d}{2} Q_b + y \cdot \nabla Q_b \right) + Q + b|Q_b|^{\frac{4}{d}} &= 0, \\ P_b = Q_b e^{i\frac{b|x|^2}{4}} > 0 \text{ si } |x| \leq R_b, \end{aligned}$$

$$Q_b(0) \in [Q(0) - \epsilon^*(\eta), Q(0) + \epsilon^*(\eta)], \quad Q_b(R_b) = 0.$$

De plus, la fonction  $\tilde{Q}_b = Q_b \phi_b(x)$  est solution de

$$(16) \quad \Delta \tilde{Q}_b - \tilde{Q}_b + ib \left( \frac{d}{2} \tilde{Q}_b + y \cdot \nabla \tilde{Q}_b \right) + \tilde{Q}_b + b|\tilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}} = \Psi_b,$$

où  $\Psi_b$  vérifie

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, |\beta| \leq 1, \quad \sup_x |x|^\alpha |\partial_x^\beta \Psi_b(x)| \leq e^{-\frac{C}{b}}.$$

On peut maintenant introduire une décomposition géométrique de la solution prenant en compte sa proximité par rapport à la variété de dimension  $d+3$  des fonctions de la forme

$$e^{i\gamma} \lambda^{\frac{d}{2}} \tilde{Q}_b(\lambda x + x_0),$$

où  $(\gamma, \lambda, b, x)$  sont dans un petit voisinage de  $(\gamma_0, 0, 0, x_0)$ .

PROPOSITION 2.3. — *Il existe des fonctions  $C^1$  :*

$$(\lambda, \gamma, x, b) : [t_0, T[ \rightarrow ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

telles que pour tout  $t_0 \leq t < T$ , si on note

$$\varepsilon(t, y) = e^{i\gamma(t)} \lambda^{\frac{d}{2}}(t) u(t, \lambda(t)y + x(t)) - \tilde{Q}_{b(t)}(y)$$

alors  $\varepsilon(t)$  vérifie les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$(17) \quad \begin{aligned} \left( \mathbf{Re} \varepsilon, |y|^2 \mathbf{Re} \tilde{Q}_b \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left( \mathbf{Im} \varepsilon, |y|^2 \mathbf{Im} \tilde{Q}_b \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 0 \\ \left( \mathbf{Re} \varepsilon, y \mathbf{Re} \tilde{Q}_b \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left( \mathbf{Im} \varepsilon, y \mathbf{Im} \tilde{Q}_b \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 0 \\ \left( \mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_1 \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \left( \mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_1 \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 0 \\ \left( \mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_2 \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \left( \mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_2 \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 0 \end{aligned}$$

et de plus

$$(18) \quad \left| 1 - \lambda(t) \frac{\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \right| + \|\varepsilon(t)\|_{H^1} + |b(t)| \leq \delta(\alpha^*), \quad \lim_{\alpha^* \rightarrow 0} \delta(\alpha^*) = 0.$$

(On rappelle que  $(f)_1 = (\frac{d}{2}f + y \cdot \nabla f)$  et  $(f)_2 = ((f)_1)_1$ .)

Compte tenu de la proposition 2.1, la preuve de ce résultat repose essentiellement sur le théorème des fonctions implicites. On peut remarquer que si on fait tendre  $b$  vers 0 (formellement) dans les conditions d'orthogonalités (17), en utilisant que  $\tilde{Q}_b \rightarrow Q$ , on obtient

$$(\mathbf{Re} \varepsilon, y^2 Q) = (\mathbf{Re} \varepsilon, y^2 Q) = (\mathbf{Im} \varepsilon, Q_1) = (\mathbf{Im} \varepsilon, Q_2) = 0,$$

et que les trois dernières relations qu'on obtient apparaissent dans l'hypothèse spectrale.

### 3. LA BORNE SUPÉRIEURE

#### 3.1. Les équations en variables dilatées

On introduit le changement de variables

$$s = \int_{t(u_0)}^t \frac{dt'}{\lambda^2(t')}.$$

Compte tenu de (7),  $s(T) = +\infty$ .

On peut maintenant écrire les lois de conservation de l'énergie et du moment linéarisées autour de  $\tilde{Q}_b$ . On obtient :

LEMME 3.1

$$(19) \quad \left| 2 (\mathbf{Re} \varepsilon, \mathbf{Re} \tilde{Q}_b) + 2 (\mathbf{Im} \varepsilon, \mathbf{Im} \tilde{Q}_b) \right| \\ \leq C \left( \int |\nabla \varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|} \right) + e^{-\frac{(1-C\eta)\pi}{b}} + C\lambda^2 |E_0| \\ \left| (\mathbf{Im} \varepsilon, \nabla \mathbf{Re} \tilde{Q}_b) \right| \leq C \left( \int |\nabla \varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|} \right)^{1/2}.$$

On remarquera que le facteur exponentiel dans la première équation vient du calcul explicite de l'énergie de  $\tilde{Q}_b$ .

On peut également écrire les équations vérifiées par les paramètres de modulation  $(\lambda, \gamma, x, b)$  et  $\varepsilon$ . En particulier (avec  $\tilde{\gamma} = -s - \gamma$ ),

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial s} b \partial_b (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b) + \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{Re} \varepsilon) - M_-(\varepsilon) + b \left( \frac{d}{2} \mathbf{Re} \varepsilon + y \cdot \nabla \mathbf{Re} \varepsilon \right) \\ = \left( \frac{\frac{\partial}{\partial s} \lambda}{\lambda} + b \right) (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_1 + \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\gamma} \mathbf{Im} \tilde{Q}_b + \frac{\frac{\partial}{\partial s} x}{\lambda} \cdot \nabla (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b) \\ + \left( \frac{\frac{\partial}{\partial s} \lambda}{\lambda} + b \right) \left( \frac{d}{2} \mathbf{Re} \varepsilon + y \cdot \nabla \mathbf{Re} \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\gamma} \mathbf{Im} \varepsilon + \frac{\frac{\partial}{\partial s} x}{\lambda} \cdot \nabla (\mathbf{Re} \varepsilon)_1 + \mathbf{Im} (\Psi_b) - R_1(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
(21) \quad & \frac{\partial}{\partial s} b \partial_b (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b) + \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{Im} \varepsilon) + M_+(\varepsilon) + b \left( \frac{d}{2} \mathbf{Im} \varepsilon + y \cdot \nabla \mathbf{Im} \varepsilon \right) \\
& = \left( \frac{\frac{\partial}{\partial s} \lambda}{\lambda} + b \right) (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_1 - \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\gamma} \mathbf{Re} \tilde{Q}_b + \frac{\frac{\partial}{\partial s} x}{\lambda} \cdot \nabla (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b) \\
& + \left( \frac{\frac{\partial}{\partial s} \lambda}{\lambda} + b \right) \left( \frac{d}{2} \mathbf{Im} \varepsilon + y \cdot \nabla \mathbf{Im} \varepsilon \right) - \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\gamma} \mathbf{Re} \varepsilon + \frac{\frac{\partial}{\partial s} x}{\lambda} \cdot \nabla (\mathbf{Im} \varepsilon)_1 + \mathbf{Im} (\Psi_b) - R_2(\varepsilon)
\end{aligned}$$

où

$$M_+(\varepsilon) = -\Delta \mathbf{Re} \varepsilon + \mathbf{Re} \varepsilon - \left( \frac{4(\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)^2}{d|\tilde{Q}_b|^2} + 1 \right) |\tilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}} \mathbf{Re} \varepsilon - \left( \frac{4(\mathbf{Re} \tilde{Q}_b \mathbf{Im} \tilde{Q}_b)}{d|\tilde{Q}_b|^2} \right) |\tilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}} \mathbf{Im} \varepsilon,$$

$$M_-(\varepsilon) = -\Delta \mathbf{Im} \varepsilon + \mathbf{Im} \varepsilon - \left( \frac{4(\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)^2}{d|\tilde{Q}_b|^2} + 1 \right) |\tilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}} \mathbf{Im} \varepsilon - \left( \frac{4(\mathbf{Re} \tilde{Q}_b \mathbf{Im} \tilde{Q}_b)}{d|\tilde{Q}_b|^2} \right) |\tilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}} \mathbf{Re} \varepsilon,$$

et les termes  $R_{1,2}(\varepsilon)$  sont des termes de reste (d'ordre supérieur en  $\varepsilon$ ). Si on fait le produit scalaire de ces équations avec les diverses quantités apparaissant dans les relations d'orthogonalité (17), on obtient

LEMME 3.2

$$(22) \quad \left| \frac{\frac{\partial}{\partial s} \lambda}{\lambda} + b \right| + \left| \frac{\partial}{\partial s} b \right| \leq C \left( \int |\nabla \varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|} \right) + e^{-\frac{(1-C)\pi}{b}} + C\lambda^2 |E_0|$$

(23)

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\gamma} - \frac{(\mathbf{Re} \varepsilon, L_+ Q_2)}{\|Q_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} \right| + \left| \frac{\frac{\partial}{\partial s} x}{\lambda} \right| & \leq \delta(\alpha^*) \left( \int |\nabla \varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|} \right)^{1/2} \\
& + \int |\nabla \varepsilon|^2 + e^{-\frac{(1-C)\pi}{b}} + C\lambda^2 |E_0|
\end{aligned}$$

où

$$L_+ = -\Delta + 1 - \left(1 + \frac{4}{d}\right) Q^{\frac{4}{d}}, \quad \lim_{\alpha^* \rightarrow 0} \delta(\alpha^*) = 0.$$

### 3.2. L'inégalité du viriel locale

Le point clef de l'analyse de Merle et Raphael consiste à localiser l'inégalité du viriel (6). Le point de départ est la remarque suivante : d'après (6), on a formellement (en intégrant par parties)

$$\begin{aligned}
(24) \quad & 4E_0 t + c_0 = \mathbf{Im} \left( \int x \nabla u \bar{u} dy \right) \\
& = \mathbf{Im} \left( \int x \nabla \tilde{Q}_b \overline{\tilde{Q}_b} dy \right) + \mathbf{Im} \left( \int y \cdot \nabla \varepsilon \bar{\varepsilon} dy \right) \\
& \quad + 2(\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - 2(\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Mais le choix de conditions d'orthogonalité (17) garantit que le terme linéaire en  $\varepsilon$  disparaît. On peut par ailleurs calculer explicitement

$$\mathbf{Im} \left( \int y \cdot \nabla \tilde{Q}_b \overline{\tilde{Q}_b} dy \right) = -\frac{b}{2} \|y \tilde{Q}_b\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim -Cb;$$

on obtient alors

$$4E_0 t + c_0 \sim -Cb + \mathbf{Im} \left( \int y \cdot \nabla \varepsilon \bar{\varepsilon} dy \right).$$

On repasse en variables  $s$  et on dérive l'identité obtenue par rapport à  $s$ . On obtient

$$4\lambda^2 E_0 + C \frac{\partial}{\partial s} b = \frac{d}{ds} \mathbf{Im} \left( \int y \cdot \nabla \varepsilon \bar{\varepsilon} dy \right).$$

En d'autres termes, pour calculer l'expression  $\frac{d}{ds} \mathbf{Im} \left( \int y \cdot \nabla \varepsilon \bar{\varepsilon} dy \right)$  qui n'a aucun sens (car  $\varepsilon$  est seulement dans  $H^1$ ), il suffit de calculer  $4\lambda^2 E_0 + C \frac{\partial}{\partial s} b$ . C'est exactement le calcul que Merle et Raphael font :

PROPOSITION 3.3. — *Il existe  $\delta_0, C > 0$  tels que*

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial s} b \geq \delta_0 \left( \int |\nabla \varepsilon|^2 dy + \int |\varepsilon|^2 e^{-\delta|y|} dy \right) - C\lambda^2 E_0 - e^{-\frac{C}{\delta}}.$$

Pour démontrer cette proposition, on écrit l'équation vérifiée par  $\frac{\partial}{\partial s} b$ , et après quelques calculs algébriques, on obtient

$$(26) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} b \left( (\partial_b(\mathbf{Im} \tilde{Q}_b), (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\partial_b(\mathbf{Re} \tilde{Q}_b), (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right. \\ & \quad \left. - (\mathbf{Im} \varepsilon, (\partial_b(\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)))_{L^2(\mathbb{R}^d)} + (\mathbf{Re} \varepsilon, (\partial_b(\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)))_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \\ & = H(\varepsilon, \varepsilon) - 2\lambda^2 E_0 \\ & \quad - \frac{\frac{\partial}{\partial s} x}{\lambda} \cdot \left( (\mathbf{Im} \varepsilon, \nabla(\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Re} \varepsilon, \nabla(\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \\ & \quad - \left( \frac{\frac{\partial}{\partial s} \lambda}{\lambda} + b \right) \left( (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\gamma} \left( (\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \\ & \quad - (\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Re} \Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Im} \Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + R(\varepsilon) \end{aligned}$$

où  $R(\varepsilon)$  est un terme de reste contenant tous les termes d'ordre supérieur en  $\varepsilon$  qui est contrôlé par

$$|R(\varepsilon)| \leq \delta(\alpha^*) \left( \int |\nabla \varepsilon|^2 dy + \int |\varepsilon|^2 e^{-\delta|y|} dy \right).$$

La contribution de

$$-(\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Re} \Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Im} \Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

est, compte tenu des propriétés de décroissance de la fonction  $\Psi_b$ , bornée par

$$\epsilon \int |\epsilon|^2 e^{-\kappa|y|} dy + C e^{-\frac{c}{b}}.$$

Les conditions d'orthogonalité (17) annulent le terme

$$-\left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} + b\right) \left( (\mathbf{Im} \epsilon, (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Re} \epsilon, (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right).$$

On peut ensuite, en remarquant que  $Q_b = Q + o(1)$  ( $b \rightarrow 0$ ) et en utilisant (23), remplacer le terme

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{\gamma} \left( (\mathbf{Re} \epsilon, (\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + (\mathbf{Im} \epsilon, (\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right)$$

par

$$\frac{(\mathbf{Re} \epsilon, L+Q_2)}{\|Q_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} (\mathbf{Re} \epsilon, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{O} \left( \delta(\alpha^*) \int |\nabla \epsilon|^2 + |\epsilon|^2 e^{-\kappa|y|} + e^{-\frac{c}{b}} \right).$$

D'autre part, en réutilisant (23), on a

$$(27) \quad \left| \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \left( (\mathbf{Im} \epsilon, \nabla(\mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Re} \epsilon, \nabla(\mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \right| \leq \delta(\alpha^*) \left( \int |\nabla \epsilon|^2 dy + \int |\epsilon|^2 e^{-\delta|y|} dy \right).$$

On obtient ainsi

$$(28) \quad \frac{\partial b}{\partial s} \geq H(\epsilon, \epsilon) - \frac{1}{\|Q_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} (\mathbf{Re} \epsilon, L+Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)} (\mathbf{Re} \epsilon, Q_1) - \delta(\alpha^*) \int |\nabla \epsilon|^2 + |\epsilon|^2 e^{-\kappa|y|} - e^{-\frac{c}{b}}.$$

On remarque ensuite que

$$H(\epsilon, \epsilon) - \frac{1}{\|Q_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} (\mathbf{Re} \epsilon, L+Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)} (\mathbf{Re} \epsilon, Q_1) = H(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon})$$

où  $\tilde{\epsilon} = \epsilon - \frac{(\mathbf{Re} \epsilon, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|Q_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} Q_1$ . Mais d'après l'hypothèse spectrale,

$$(29) \quad \begin{aligned} H(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}) &\geq \delta \left( \int |\nabla \tilde{\epsilon}|^2 dy + \int |\tilde{\epsilon}|^2 e^{-\kappa|y|} dy \right) - (\mathbf{Re} \tilde{\epsilon}, Q)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad - (\mathbf{Re} \tilde{\epsilon}, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - (\mathbf{Im} \tilde{\epsilon}, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - (\mathbf{Im} \tilde{\epsilon}, Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - (\mathbf{Im} \tilde{\epsilon}, \nabla Q)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\geq \frac{\delta}{2} \left( \int |\nabla \epsilon|^2 dy + \int |\epsilon|^2 e^{-\kappa|y|} dy \right) - C (\mathbf{Re} \epsilon, Q)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad - (\mathbf{Re} \epsilon, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - (\mathbf{Im} \epsilon, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - (\mathbf{Im} \epsilon, Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - (\mathbf{Im} \epsilon, \nabla Q)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Il reste, pour conclure, à vérifier qu'on contrôle les termes négatifs dans le terme de droite de l'équation précédente. Les directions

$$(\mathbf{Re}\varepsilon, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, (\mathbf{Im}\varepsilon, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \text{ et } (\mathbf{Im}\varepsilon, Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

sont traitées grâce aux conditions d'orthogonalité (17). Par exemple :

$$(30) \quad (\mathbf{Re}\varepsilon, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{Re}\varepsilon, y\mathbf{Re}(\tilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)} + (\mathbf{Im}\varepsilon, y\mathbf{Im}(\tilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ + (\mathbf{Re}\varepsilon, Q_1 - \mathbf{Re}(\tilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - (\mathbf{Im}\varepsilon, y\mathbf{Im}(\tilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

la condition d'orthogonalité annule le premier terme tandis que (puisque  $\tilde{Q}_b$  est proche de  $Q$ ) le second est contrôlé, ce qui donne

$$(31) \quad |(\mathbf{Re}\varepsilon, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \leq \left| (\mathbf{Re}\varepsilon, Q_1 - \mathbf{Re}(\tilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - (\mathbf{Im}\varepsilon, y\mathbf{Im}(\tilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right| \\ \leq \delta(\alpha^*) \left( \int |\nabla\varepsilon|^2 dy + \int |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|x|} dy \right)$$

(rappelons que  $\alpha^*$  petit implique  $b$  petit aussi d'après (18)).

Les deux autres termes,  $(\mathbf{Re}\varepsilon, Q)_{L^2}^2$  et  $(\mathbf{Im}\varepsilon, \nabla Q)_{L^2}^2$ , sont estimés en utilisant (19) (et le fait que  $Q$  est proche de  $\tilde{Q}_b$ ).

### 3.3. Une quasi-fonctionnelle de Lyapunov

On montre dans cette partie comment on déduit de l'inégalité différentielle (25), vérifiée par  $b$ , une information sur la dynamique. On commence par remarquer que la fonction  $b$  ne peut pas passer du signe  $+$  au signe  $-$ . En effet s'il existait un point où  $b(s_0) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial s}b(s_0) \leq 0$ , d'après (25), on aurait  $\varepsilon = 0$  ce qui contredit l'hypothèse d'énergie négative. D'après (22) et en utilisant (25), on obtient

$$\left| \frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda} + b \right| \leq C \frac{\partial}{\partial s}b + e^{-\frac{C}{|b|}}.$$

On intègre (et on utilise que  $b$  est petit et de signe fixe pour  $s \geq s_0$  dans la dernière inégalité)

$$(32) \quad \left| \log\left(\frac{\lambda(s)}{\lambda(s_0)}\right) + \int_{s_0}^s b(s) ds \right| \leq C(b(s) - b(s_0)) + \int_{s_0}^s e^{-\frac{C}{|b|}} ds \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left| \int_{s_0}^s b(s) ds \right|.$$

On en déduit que  $\int_{s_0}^{+\infty} b(s) = +\infty$  (et donc que  $b$  est strictement positive pour  $s$  assez grand). En effet, sinon,  $|\log(\lambda(s))|$  serait borné inférieurement, donc  $\lambda(s)$  serait minoré par une constante  $\lambda_0 > 0$ , ce qui, compte tenu de (25), impliquerait

$$\frac{\partial}{\partial s}b \geq -\lambda^2 E_0 - e^{-\frac{C}{|b|}} \geq -\frac{1}{2}\lambda^2 E_0$$

et donc contredirait que  $b$  est borné (et même petit d'après (18)).

On peut maintenant intégrer l'inéquation

$$\frac{\partial}{\partial s} b \geq e^{-\frac{C}{b}} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial s} \frac{b}{b^2} e^{\frac{C}{b}} \leq 1 \Rightarrow b(s) \geq \frac{C}{\log(s)}.$$

Si on revient à (32), on obtient

$$|\log(\lambda)| \geq C \int_{s_0}^s \frac{ds}{\log(s)} \geq C s^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log |\log(\lambda)| \geq C \log(s).$$

On en déduit d'abord qu'il y a bien explosion en temps fini

$$|\lambda(s)| \leq e^{-s^\alpha} \Rightarrow T = \int_0^{+\infty} \lambda^2(s) ds < +\infty$$

puis en réutilisant (32)

$$\begin{aligned} (33) \quad \frac{T-t(s)}{\lambda^2(s)} &= \int_s^{+\infty} \frac{\lambda^2(\sigma)}{\lambda^2(s)} d\sigma \\ &\leq \int_s^{+\infty} e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \int_s^\sigma b(\tau) d\tau} d\sigma \\ &\leq C \log(s) \leq C \log(|\log(\lambda)|) \end{aligned}$$

où on a utilisé la minoration  $b(\tau) \geq \frac{1}{\log(\tau)}$  pour obtenir l'avant-dernière inégalité. Finalement on a bien obtenu la majoration annoncée

$$\frac{T-t(s)}{\lambda^2(s) \log(|\log(\lambda)|)} \leq C \Rightarrow \|\nabla u(t(s))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \lambda^{-1}(s) \leq C' \sqrt{\frac{\log(|\log(T-t(s))|)}{T-t(s)}}.$$

#### 4. LA BORNE INFÉRIEURE

Nous avons obtenu dans la section précédente une inégalité

$$b(s) \geq \frac{C}{\log(s)}$$

et ceci est la clef pour obtenir la borne supérieure. Nous voulons maintenant obtenir l'inégalité inverse. Curieusement, le point de départ est toujours l'inégalité (25), qu'ici nous allons utiliser pour contrôler des termes dans un calcul de flux que nous ferons plus tard.

##### 4.1. Inégalité du viriel précisée

La présence dans l'inégalité (25) du terme  $e^{-\frac{C}{b}}$  est due à la présence dans (26) du terme induit par le fait que le profil auto-similaire  $Q_b$  a été tronqué pour donner  $\tilde{Q}_b$  :

$$(34) \quad -(\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Re} \Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Im} \Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$



En fait, en raffinant l'analyse précédente, on peut démontrer l'inégalité suivante :

$$(35) \quad \frac{\partial}{\partial s} b \geq \delta_0 \left( \int |\nabla \varepsilon|^2 dy + \int |\varepsilon|^2 e^{-\delta|y|} dy \right) - C\lambda^2 E_0 \\ - e^{-\frac{\pi(1+\epsilon)}{b}} - (\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Re} \Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Im} \Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Pour faire disparaître le terme (34), il faut raffiner le profil de modulation : pour  $|y| \leq 2/|b|$ , le profil  $\tilde{Q}_b$  (un objet non linéaire) modulé modélise bien la solution, tandis que pour  $2/|b| \leq |y| \leq e^{\epsilon/|b|}$  nous allons introduire la radiation pour modéliser la solution :

LEMME 4.1. — *Il existe une unique solution radiale,  $\zeta_b$  de l'équation suivante :*

$$(36) \quad \Delta \zeta_b - \zeta_b + ib(\zeta_b)_1 = \Psi_b \\ \|\nabla \zeta_b\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

Cette solution vérifie

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} |y|^d |\zeta_b(y)|^2 = \Gamma_b, \quad e^{-\frac{(1-C\eta)\pi}{b}} \leq \Gamma_b \leq e^{-\frac{(1+C\eta)\pi}{b}}.$$

On peut remarquer que la fonction  $\zeta_b$  n'est pas dans  $L^2$  à cause d'une divergence de type logarithmique. Il faut donc la tronquer. On fixe donc maintenant  $A = e^{\frac{\epsilon}{b}}$  ( $\epsilon > 0$  sera choisi petit) et pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  égale à 1 pour  $|r| \leq 1$ ,  $\chi_A(r) = \chi(r/A)$ , et à 0 pour  $|r| \geq 2$

$$\tilde{\zeta}_b = \zeta_b \chi_A(r), \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \tilde{\zeta}_b.$$

PROPOSITION 4.2. — *Il existe  $\delta_0, C, c > 0$  tels que*

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial s} f \geq \delta_0 \left( \int |\nabla \tilde{\varepsilon}|^2 dy + \int |\tilde{\varepsilon}|^2 e^{-\delta|y|} dy \right) + c\Gamma_b - C\lambda^2 E_0 - C \int_A^{2A} |\varepsilon|^2$$

avec

$$f(s) = \frac{b}{4} \|y \tilde{Q}_b\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{Im} \left( \int y \cdot \nabla \tilde{\zeta}_b \overline{\tilde{\zeta}_b} \right) \\ + (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Re} \tilde{\zeta}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Im} \tilde{\zeta}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Remarque 4.3. — Si on compare les diverses inégalités de viriel obtenues, on peut remarquer que, dans cette dernière,  $f(s) \sim b(s)$  (car  $\zeta$  est exponentiellement petit en  $b$ ), et d'autre part que le terme exponentiel en  $b$  apparaît maintenant avec le bon signe, le prix à payer étant le terme  $C \int_A^{2A} |\varepsilon|^2$ .

La démonstration de ce résultat est assez proche de celle de la proposition 3.3. Indiquons seulement comment on s'est débarrassé du terme (34). L'introduction de la radiation  $\tilde{\zeta}_b$  l'a remplacé (modulo des termes négligeables) par un terme du type

$$(38) \quad -(\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Re} F)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Im} F)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

où

$$F = [\Delta, \chi_A] \zeta_b + iby \cdot \chi_A \zeta_b$$

est supporté dans  $\{A \leq |y| \leq 2A\}$ , dont on déduit

$$|(\mathbf{Re} \varepsilon, (\mathbf{Re} F)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im} \varepsilon, (\mathbf{Im} F)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \leq \epsilon \Gamma_b + \frac{1}{\epsilon} \int_A^{2A} |\varepsilon|^2.$$

#### 4.2. Dispersion $L^2$ à l'infini

Pour traiter le terme  $-\int_A^{2A} |\varepsilon|^2$ , il est nécessaire de comprendre comment l'excès de masse de la donnée initiale  $u_0$  est évacué et dispersé à l'infini (en d'autres termes comprendre comment croît la norme  $L^2$  de la restriction de  $\varepsilon$  à l'ensemble  $\{|y| \geq Cste\}$ ). On choisit  $\phi$  une fonction positive, croissante, égale à 0 pour  $r \leq 1/2$ , à 1 pour  $r \geq 3$  et telle que  $\phi'(r) \geq 1/4$  pour  $r \in [1, 2]$ . On définit  $\phi_A(x) = \phi(|x|/A)$ . On a alors

PROPOSITION 4.4. — *Il existe  $C > 0$  tel que*

$$(39) \quad \frac{d}{ds} \left( \int \phi_A(x) |\varepsilon|^2 \right) \geq \frac{b}{C} \int_A^{2A} |\varepsilon|^2 - \frac{C}{b^2} \lambda^2 E_0 - \Gamma_b^{1+\epsilon} - \Gamma_b^\epsilon \int |\nabla \varepsilon|^2.$$

Pour démontrer ce résultat, on fait le produit scalaire de (22) avec  $\phi_A(x) \mathbf{Re} \varepsilon$  et de (23) avec  $\phi_A(x) \mathbf{Im} \varepsilon$ ; et on intègre par parties. On obtient

$$(40) \quad \frac{d}{ds} \left( \int \phi_A |\varepsilon|^2 \right) = \int \frac{\partial}{\partial s} (\phi_A) |\varepsilon|^2 + b \int y \cdot \nabla (\phi_A) |\varepsilon|^2 + 2 \mathbf{Im} \left( \int \nabla \phi_A \cdot \nabla \varepsilon \bar{\varepsilon} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial s} \lambda \lambda + b \right) \int y \cdot \nabla \phi_A |\varepsilon|^2 - \frac{\frac{\partial}{\partial s} x}{\lambda} \cdot \int \nabla \phi_A |\varepsilon|^2.$$

Le terme principal est

$$(41) \quad b \int y \cdot \nabla (\phi_A) |\varepsilon|^2 \geq \frac{b}{C} \int \phi' \left( \frac{y}{A} \right) |\varepsilon|^2 \geq \frac{b}{4C} \int_A^{2A} |\varepsilon|^2.$$

Les autres termes sont des termes de reste responsables des termes de reste dans la proposition.

On peut maintenant utiliser la conservation de la norme  $L^2$  :

$$(42) \quad \begin{aligned} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \alpha \\ &= \|\phi_A^{1/2} \varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|(1 - \phi_A)^{1/2} \varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\tilde{Q}_b\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + 2(\mathbf{Re} \varepsilon, \mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2(\mathbf{Im} \varepsilon, \mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

soit

$$(43) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{ds} \left( \int \phi_A(x) |\varepsilon|^2 \right) \\ &= -\frac{d}{ds} \left( \|Q_b\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + 2(\mathbf{Re} \varepsilon, \mathbf{Re} \tilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2(\mathbf{Im} \varepsilon, \mathbf{Im} \tilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right). \end{aligned}$$

Le point important est que

$$\|Q_b\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + 2(\operatorname{Re}\varepsilon, \operatorname{Re}\tilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2(\operatorname{Im}\varepsilon, \operatorname{Im}\tilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim b^2.$$

On peut donc, en additionnant à l'inéquation que nous venons d'obtenir l'inéquation (37) multipliée par  $\epsilon b$  obtenir une inéquation du type (avec  $C_0 > 0$ )

$$\frac{d}{ds}(-C_0 b^2 + \epsilon b^2) \geq Cb \left( \Gamma_b + \int |\nabla \tilde{\varepsilon}|^2 + |\tilde{\varepsilon}|^2 e^{-\delta|y|} + \int_A^{2A} |\varepsilon|^2 - 2\lambda^2 E_0 \right),$$

ce qui donne une inégalité différentielle sur  $b$  du type

$$\frac{d}{ds}(b^2) \leq -Cb \left( \Gamma_b + \int |\nabla \tilde{\varepsilon}|^2 + |\tilde{\varepsilon}|^2 e^{-\delta|y|} + \int_A^{2A} |\varepsilon|^2 - 2\lambda^2 E_0 \right)$$

qui est le point essentiel de la preuve de la borne inférieure (9).

*Remarque 4.5.* — Dans cette dernière étape, nous avons utilisé de manière importante la conservation de la norme  $L^2$ , ce qui *de facto* élimine la possibilité d'adopter cette approche pour une solution auto-similaire (et pour une bonne raison puisque dans ce cas la borne inférieure est fausse).

*Remarque 4.6.* — On remarquera aussi que nous avons utilisé le fait que l'énergie est négative, ce qui permet de ne pas se préoccuper du terme  $-\lambda^2 E_0$  qui a toujours le bon signe. En fait, dans le régime du « log log », ce terme est négligeable car il a pour ordre de grandeur

$$\lambda^2 \ll e^{-\alpha s^\beta} \ll b \sim \frac{1}{\log(s)}.$$

C'est ce fait qui permet de « bootstrapper » le régime du « log log » (voir le point (3) du théorème 1.9), même pour des énergies positives.

## RÉFÉRENCES

- [BP93] V. BUSLAEV & G. PEREL'MAN — « Scattering for the nonlinear Schrödinger equation: States close to a soliton », *St. Petersburg. Math. J.* **4** (1993), no. 6, p. 1111–1142 (Russian, English).
- [BP95] ———, « On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations », *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2* **164** (1995), no. 22, p. 75–98 (English).
- [BW97] J. BOURGAIN & W. WANG — « Construction of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity. », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.* **25** (1997), no. 1-2, p. 197–215 (English).
- [FMR04] G. FIBICH, F. MERLE & P. RAPHAEL — « Numerical proof of a spectral property related to the singularity formation for the  $L^2$  critical non linear Schrödinger equation », preprint, 2004.

- [GM94a] L. GLANGETAS & F. MERLE – « Concentration properties of blow-up solutions and instability results for Zakharov equation in dimension two II », *Comm. Math. Phys.* **160** (1994), no. 2, p. 349–389.
- [GM94b] ———, « Existence of self-similar blow-up solutions for Zakharov equation in dimension two I », *Comm. Math. Phys.* **160** (1994), no. 1, p. 173–215.
- [GV79] J. GINIBRE & G. VELO – « On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case », *J. Funct. Anal.* **32** (1979), no. 1, p. 1–32.
- [JP93] R. JOHNSON & X. B. PAN – « On an elliptic equation related to the blow-up phenomenon in the nonlinear Schrödinger equation », *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **123** (1993), no. 4, p. 763–782.
- [Lio84] P.-L. LIONS – « The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), no. 2, p. 109–145.
- [LPSS88] M. J. LANDMAN, G. C. PAPANICOLAOU, C. SULEM & P.-L. SULEM – « Rate of blowup for solutions of the nonlinear Schrödinger equation at critical dimension », *Phys. Rev. A (3)* **38** (1988), no. 8, p. 3837–3843.
- [Mer93] F. MERLE – « Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power », *Duke Math. J.* **69** (1993), no. 2, p. 427–454.
- [Mer96a] ———, « Blow-up results of virial type for Zakharov equations », *Comm. Math. Phys.* **175** (1996), no. 2, p. 433–455.
- [Mer96b] ———, « Lower bounds for the blowup rate of solutions of the Zakharov equation in dimension two », *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), no. 8, p. 765–794.
- [MM00] Y. MARTEL & F. MERLE – « A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation », *J. Math. Pures Appl. (9)* **79** (2000), no. 4, p. 339–425.
- [MM02a] ———, « Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the  $L^2$ -critical generalized KdV equation », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), no. 3, p. 617–664 (electronic).
- [MM02b] ———, « Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation », *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), no. 1, p. 235–280.
- [MM04] ———, « Review on blow up and asymptotic dynamics for critical and subcritical gKdV equations », in *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, Contemp. Math., vol. 350, Amer. Math. Soc., Providence, 2004, p. 157–177.
- [MR03] F. MERLE & P. RAPHAEL – « Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation », *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 3, p. 591–642.
- [MR04] ———, « On universality of blow-up profile for  $L^2$  critical nonlinear Schrödinger equation », *Invent. Math.* **156** (2004), no. 3, p. 565–672.

- [MR05a] ———, « The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation », *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 1, p. 157–222.
- [MR05b] ———, « On one blow up point solutions to the critical nonlinear Schrödinger equation », *J. Hyperbolic Differ. Equ.* **2** (2005), no. 4, p. 919–962.
- [MR05c] ———, « Profiles and quantization of the blow up mass for critical nonlinear Schrödinger equation », *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), no. 3, p. 675–704.
- [Naw99] H. NAWA – « Asymptotic and limiting profiles of blowup solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power », *Comm. Pure Appl. Math.* **52** (1999), no. 2, p. 193–270.
- [OT91] T. OGAWA & Y. TSUTSUMI – « Blow-up of  $H^1$  solution for the nonlinear Schrödinger equation », *J. Differential Equations* **92** (1991), no. 2, p. 317–330.
- [Per01] G. PERELMAN – « On the formation of singularities in solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation », *Ann. Inst. H. Poincaré* **2** (2001), no. 4, p. 605–673.
- [Rap04] P. RAPHAEL – « On the blow up phenomenon for the  $L^2$  critical non linear Schrödinger equation », preprint, 2004.
- [Rap05] ———, « Stability of the log-log bound for blow up solutions to the critical non linear Schrödinger equation », *Math. Ann.* **331** (2005), no. 3, p. 577–609.
- [SS99] C. SULEM & P.-L. SULEM – *The nonlinear Schrödinger equation*, Applied Mathematical Sciences, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1999, Self-focusing and wave collapse.
- [Tzv05] N. TZVETKOV – « On the long time behaviour of KdV type equations », in *Séminaire Bourbaki, vol. 2003/2004*, Astérisque, vol. 299, 2005, exp. no 933.
- [Wei85] M. I. WEINSTEIN – « Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations », *SIAM J. Math. Anal.* **16** (1985), no. 3, p. 472–491.
- [Wei83] ———, « Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates », *Comm. Math. Phys.* **87** (1982/83), no. 4, p. 567–576.
- [ZS71] V. E. ZAKHAROV & A. B. SHABAT – « Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media », *Ž. Èksper. Teoret. Fiz.* **61** (1971), no. 1, p. 118–134.

Nicolas BURQ

Université Paris XI

UMR 8628 du CNRS

Département de Mathématiques

Bâtiment 425

F-91405 Orsay Cedex

*E-mail* : nicolas.burq@math.u-psud.fr



**PROJECTIVITY OF KÄHLER MANIFOLDS –  
KODAIRA’S PROBLEM**  
[after C. Voisin]

by **Daniel HUYBRECHTS**

There are various geometric structures that can be studied on a topological manifold  $M$ . Depending on one’s geometric taste, it is important to know whether  $M$  can be endowed with a symplectic form, whether (special) Riemannian metrics can be found or whether  $M$  carries an algebraic structure. Often, the existence of a certain geometric structure imposes topological conditions on  $M$ . In other words, it may happen that a given topological manifold does simply not allow one’s favorite geometry. *E.g.* if  $M$  is compact and  $b_2(M) = 0$  the manifold  $M$  cannot be symplectic, or if  $b_1(M) = 1$  no Kähler metrics can exist.

In order to fully understand the relation between two sorts of geometries, it is important to know whether they impose the same topological obstructions. In other words, does the existence of one of the two on a given manifold topological  $M$  imply the existence of the other one? This is a report on the work of Claire Voisin [13, 14] that sheds light on an old question, usually attributed to Kodaira, that asks for the topological relation between Kähler geometry and projective geometry.

In the following we let  $M$  be a compact manifold that can be endowed with the structure of a complex manifold. Once a complex structure is chosen, one studies Riemannian metrics  $g$  that are ‘compatible’ with it. One possible compatibility condition is to require that  $g$  be hermitian, *i.e.*, that the complex structure thought of as an almost complex structure  $I$  is orthogonal with respect to  $g$ . It is not difficult to see that a hermitian structure can always be found. It is, however, a completely different matter to find a hermitian structure  $g$  such that its fundamental form  $\omega := g(I \cdot, \cdot)$  is closed, *i.e.*,  $g$  satisfies the Kähler condition. Indeed, the classical theory of Kähler manifolds shows that the existence of a Kähler metric imposes strong conditions on the topology of  $M$ , which are not satisfied by arbitrary complex or symplectic manifolds. For instance, the odd Betti numbers of a compact Kähler manifold are even, Kähler manifolds are formal and their fundamental groups satisfy further conditions. (In contrast, if only one of the two structures, complex or symplectic, is required, then any finitely presentable group can be realized.)

On the other hand, Kähler manifolds are quite common. Indeed, any complex submanifold of the complex projective space  $\mathbb{P}^n$  admits a Kähler metric - the restriction of the Fubini–Study metric is an example. Conversely, one might wonder whether a compact complex manifold that admits a Kähler structure can always be realized as a complex submanifold of  $\mathbb{P}^n$  or, in other words, whether the complex structure is projective. This is obviously not the case, general complex tori  $\mathbb{C}^n/\Gamma$  ( $n \geq 2$ ) and general K3 surfaces provide counter-examples. In fact, a famous theorem of Kodaira proves that a Kähler manifold is projective if and only if the Kähler metric can be chosen such that the cohomology class of its fundamental form  $\omega$  is integral, *i.e.*,  $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$  (see [6, Thm. 4]).

In these examples one observes that although the given complex structure is not projective, it becomes projective after a small deformation. Kodaira proved that in fact any Kähler surface can be deformed to a projective surface (see [7, Thm. 23] and [8]). Thus, as deforming the complex structure does not change the diffeomorphism type of the manifold, there is no topological difference between compact Kähler surfaces and algebraic surfaces. (Let us also mention that in fact any compact surface  $X$  with even  $b_1(X)$  is Kähler, *i.e.*, for surfaces the condition to be Kähler is a topological condition. This fails in higher dimensions, due to a famous example of Hironaka [5] of a compact Kähler manifold that deforms to complex manifold which is no longer Kähler.) Note in passing that a similar result holds true for symplectic manifolds: clearly, any given symplectic form  $\omega$  can be deformed to a symplectic form with integral cohomology class.

Kodaira’s problem, which apparently has never been stated by himself in this form, asks for the higher-dimensional version of his result: *Can any compact Kähler manifold be deformed to a projective manifold?*

More in the spirit of the general philosophy explained above, one could ask whether the topological manifold underlying a compact Kähler manifold may also be endowed with the structure of a projective manifold. This question had been open for a very long time. As Kodaira’s arguments to prove the two-dimensional case use a great deal of classification theory of surfaces, there was little hope to generalize them to higher dimensions.

Recent work of Claire Voisin fills this gap [11, 13, 14]. She succeeded in showing that topology makes a difference between compact Kähler manifolds and those that are projective. In other words, there exist compact topological manifolds that admit the structure of a Kähler manifold without carrying also the structure of a projective manifold. More precisely, Voisin shows the stronger statement:

**THEOREM 0.1** ([13]). — *In any dimension  $\geq 4$  there exists a compact Kähler manifold  $X$  whose rational cohomology ring  $H^*(X, \mathbb{Q})$  cannot be realized as the rational cohomology ring of a projective manifold.*



Voisin originally worked with the integral cohomology ring  $H^*(X, \mathbb{Z})$ , but Deligne then pointed out the stronger version above.

One could wonder whether the answer to these questions would be different if the topological manifold satisfies further conditions, *e.g.* if it is in addition simply-connected. Some of these questions have been addressed and answered by Voisin in [13, 14] and we will comment on them on the way.

Although the examples are obtained by particular constructions, the principal ideas of [13, 14] are of a more general nature and might be applicable in other situations.

The  $i$ -th cohomology of a compact Kähler manifold is naturally endowed with a Hodge structure of weight  $i$ , which can be polarized (on the primitive part) if the manifold is projective. The idea is to show that there exist compact Kähler manifolds whose cohomology does not admit Hodge structures that are compatible with both, the given cup-product and a polarization. Roughly, there are three steps **A-C**, the first two of which are purely Hodge-theoretical and only the last one has a geometric flavor.

**(A)** Certain algebraic structures on a rational vector space  $A$  are not compatible with any *polarizable* Hodge structure (of weight  $k$ ) on  $A$ .

*Remark 0.2.* — In the examples, the algebraic structure will be a specific endomorphism  $\Phi : A \rightarrow A$ , but others are in principle possible. That the algebraic structure is not compatible with any polarizable Hodge structure means in the case of an endomorphism  $\Phi$  that one cannot find a Hodge structure on  $A$  such that  $\Phi$  becomes an endomorphism of it and such that the Hodge structure can be polarized.

**(B)** Suppose  $\bigoplus H^\ell$  is a graded  $\mathbb{Q}$ -algebra whose direct summands  $H^\ell$  are Hodge structures of weight  $\ell$  and such that the multiplications  $H^{\ell_1} \otimes H^{\ell_2} \rightarrow H^{\ell_1+\ell_2}$  are homomorphisms of Hodge structures. Suppose furthermore that this  $\mathbb{Q}$ -algebra structure allows us to detect a subspace  $A \subset H^k$  such that: i)  $A \subset H^k$  is a Hodge substructure. ii) An algebraic structure as in **(A)** is compatible with this Hodge structure. Then  $H^k$  does not admit a polarization.

*Remark 0.3.* — Subspaces that are defined purely in terms of the  $\mathbb{Q}$ -algebra structure do define Hodge substructures. We shall also need a refined version of this, which is due to Deligne.

The compatibility in ii) is more difficult to check, but relies on the same principle. For an endomorphism  $\Phi$  the idea goes as follows: Firstly, find two Hodge substructures  $A, A' \subset H^k$  and a Hodge substructure  $\Delta \subset A \oplus A' \subset H^k$  which is the graph of an isomorphism  $A \cong A'$ . Secondly, prove that under the induced isomorphism of Hodge structures  $A \oplus A \cong A \oplus A'$  the graph of  $\Phi$  is a Hodge substructure.

(C) Construct compact Kähler manifolds such that the above principles apply to its cohomology ring  $\bigoplus H^\ell(X, \mathbb{Q})$ . Then  $H^*(X, \mathbb{Q})$  should not be realizable by a smooth projective variety.

*Remark 0.4.* — This works best for Hodge structures of weight one ( $k = 1$ ). In this case  $H^1(X, \mathbb{Q})$  of a smooth projective variety  $X$  admits a polarized Hodge structure. For the Hodge structure of weight two on  $H^2(X, \mathbb{Q})$  one needs an extra argument, for only the primitive part of it admits a polarization.

This report roughly follows these three steps. Some of the algebraic structures in Section 2 might seem rather ad hoc, as their geometric origin is only explained in Section 3. However, I found it helpful for my own understanding to completely separate the arguments that explain why certain  $\mathbb{Q}$ -algebras cannot be realized as the cohomology of a projective manifold from the part that contains the construction of compact Kähler manifolds that do realize these  $\mathbb{Q}$ -algebras.

**Acknowledgements.** — I wish to thank Claire Voisin for patiently answering my questions and for her valuable comments on a first draft of these notes. I am grateful to C.-F. Bödigheimer, U. Görtz, M. Lehn, P. Stellari, J. Stix, R. Thomas, B. Totaro, and T. Wedhorn for their help, comments, and suggestions.

## 1. HODGE STRUCTURES (OF WEIGHT ONE AND TWO)

### 1.1. Recollections

A Hodge structure of weight  $k$  on a  $\mathbb{Q}$ -vector space  $A$  is given by a direct sum decomposition

$$(1) \quad A_{\mathbb{C}} := A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q} \quad \text{such that} \quad \overline{A^{p,q}} = A^{q,p}.$$

A direct sum decomposition (1) can also be described in terms of a representation  $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{Gl}(A_{\mathbb{R}})$  such that the  $\mathbb{C}$ -linear extension of  $\rho(z)$  satisfies  $\rho(z)|_{A^{p,q}} = z^p \bar{z}^q \cdot \mathrm{id}$ . The Hodge classes of a Hodge structure of weight  $2k$  on  $A$  are the elements in  $A^{k,k} \cap A$ .

We shall be particularly interested in Hodge structures of weight one and two.

*Remark 1.1.* — Recall that Hodge structures of weight one with  $A^{p,q} = 0$  for  $pq \neq 0$  which are integral, *i.e.*,  $A = \Gamma_{\mathbb{Q}}$  for some lattice  $\Gamma$ , are in bijection with complex tori. Indeed, to a Hodge structure of weight one on  $\Gamma_{\mathbb{Q}}$  given by  $\Gamma_{\mathbb{C}} = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$  one associates the complex torus  $A^{1,0}/\Gamma$ , where  $\Gamma$  is identified with its image under the projection  $A_{\mathbb{C}} \rightarrow A^{1,0}$ .

A  $\mathbb{Q}$ -linear map  $\varphi : A \rightarrow A'$  is a *morphism (of weight  $m$ ) of Hodge structures*

$$A_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q} \quad \text{and} \quad A'_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=\ell} A'^{r,s}$$

of weight  $k$  and  $\ell = k + 2m$ , respectively, if  $\varphi(A^{p,q}) \subset A'^{p+m, q+m}$ . If the two Hodge structures correspond to  $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Gl}(A_{\mathbb{R}})$  and  $\rho' : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Gl}(A'_{\mathbb{R}})$ , respectively, then this condition is equivalently expressed by  $\varphi(\rho(z)v) = |z|^{2m} \rho'(z)\varphi(v)$  for all  $v \in A$  and  $z \in \mathbb{C}^*$ .

A *Hodge substructure* of a Hodge structure of weight  $k$  on  $A$  is given by a subspace  $A' \subset A$  such that  $A'_{\mathbb{C}} = \bigoplus (A^{p,q} \cap A'_{\mathbb{C}})$  or, equivalently, such that  $A'_{\mathbb{C}} \subset A_{\mathbb{C}}$  is invariant under the representation  $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Gl}(A_{\mathbb{R}})$  that corresponds to the given Hodge structure on  $A$ .

The *tensor product*  $A \otimes_{\mathbb{Q}} A'$  of two  $\mathbb{Q}$ -vector spaces  $A$  and  $A'$  endowed with Hodge structures of weight  $k$  and  $\ell$ , respectively, comes with a natural Hodge structure of weight  $(k + \ell)$ :

$$(A \otimes_{\mathbb{Q}} A')^{r,s} := \bigoplus_{p+p'=r, q+q'=s} A^{p,q} \otimes_{\mathbb{C}} A'^{p',q'}.$$

In other words, the Hodge structure is given by  $\rho \otimes \rho'$ .

Note that  $A_2 := \bigwedge^2 A_1$  of a Hodge structure of weight one  $A_1$  is naturally a Hodge structure of weight two with  $A_2^{2,0} := \bigwedge^2 A_1^{1,0}$ ,  $A_2^{1,1} := A_1^{1,0} \otimes A_1^{0,1}$ , and  $A_2^{0,2} := \bigwedge^2 A_1^{0,1}$ .

A *polarization* of a Hodge structure of weight one  $A_{\mathbb{C}} = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$  is a skew-symmetric form  $q \in \bigwedge^2 A^*$  such that

$$(2) \quad A_{\mathbb{C}} \times A_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (v, w) \longmapsto iq(v, \bar{w})$$

(where  $q$  is extended  $\mathbb{C}$ -linearly) satisfies the Hodge–Riemann relations:

- i)  $A^{1,0}$  and  $A^{0,1}$  are orthogonal with respect to (2).
- ii) The restriction of (2) to  $A^{1,0}$  and to  $A^{0,1}$  is positive, respectively negative, definite.

*Remark 1.2.* — With this definition a polarization is always rational. Furthermore, the form  $q$  considered as an element of the induced weight-two Hodge structure on  $\bigwedge^2 A^*$  is of type  $(1, 1)$ . Since it is rational,  $q$  is a Hodge class (of weight two). Note that any Hodge substructure of a weight-one polarized Hodge structure is naturally polarized.

*Example 1.3.* — Let  $X$  be a compact Kähler manifold of dimension  $n$ . The Hodge decomposition

$$H^1(X, \mathbb{C}) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$$

defines a Hodge structure of weight one on  $H^1(X, \mathbb{Q})$ .

Suppose  $X$  is projective and  $\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$  is the class of a hyperplane section, then  $q(\alpha) = \int_X \alpha^2 \omega^{n-1}$  is a polarization of the natural Hodge structure of weight one on  $H^1(X, \mathbb{Q})$ .

If we drop the condition that  $q$  be rational, then any Kähler class on a compact Kähler manifold  $X$  would yield a form on the Hodge structure of weight one on  $H^1(X, \mathbb{Q})$  that satisfies the Hodge–Riemann relations i) and ii).

The notion of a polarization exists for Hodge structures of arbitrary weight, but we shall only need it for weight one, explained above, and for weight two. For a Hodge structure of weight two  $A_{\mathbb{C}} = A^{2,0} \oplus A^{1,1} \oplus A^{0,2}$  a *polarization* is a symmetric bilinear form  $q \in S^2 A^*$  such that:

- i) The  $A^{p,q}$  are pairwise orthogonal with respect to  $(v, w) \mapsto q(v, \bar{w})$ .
- ii) For  $0 \neq v \in A^{p,q}$  one has  $-i^{p-q}q(v, \bar{v}) > 0$ .

*Example 1.4.* — If  $X$  is compact Kähler of dimension  $n$ , then  $H^2(X, \mathbb{Q})$  comes with a natural Hodge structure of weight two  $H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$  given by the Hodge decomposition. If  $X$  is projective and  $\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$  is the class of a hyperplane section, then

$$q(\alpha) = \int_X \alpha^2 \omega^{n-2}$$

defines a polarization on the *primitive cohomology*

$$H^2(X, \mathbb{Q})_{\text{p}} := \{\alpha \in H^2(X, \mathbb{Q}) \mid \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0\}.$$

Note that due to the Hodge–Riemann bilinear relation  $H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \cong H^{1,1}(X, \mathbb{R})_{\text{p}} \oplus \mathbb{R}\omega$  does not contain any  $q$ -isotropic subspace of dimension  $\geq 2$ . Also,  $H^2(X, \mathbb{R})$  does not contain Hodge substructures of dimension  $\geq 2$  which are  $q$ -isotropic.

## 1.2. Detecting Hodge structures algebraically

The following observation is the key to a general principle, due to Deligne, which allows one to identify Hodge substructures algebraically.

LEMMA 1.5. — *Let  $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$  be a Hodge structure of weight  $k$  on a  $\mathbb{Q}$ -vector space  $H$  given by a representation  $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Gl}(H_{\mathbb{R}})$  and let  $Z \subset H_{\mathbb{C}}$  be an algebraic subset which is invariant under  $\rho(\mathbb{C}^*)$ . Suppose the span  $\langle Z' \rangle$  of an irreducible component  $Z' \subset Z$  is of the form  $H' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  with  $H' \subset H$  a  $\mathbb{Q}$ -subspace. Then  $H'$  is a Hodge substructure of  $H$ .*

*Proof.* — Since  $\mathbb{C}^*$  is connected, the  $\mathbb{C}^*$ -action leaves invariant the irreducible components of  $Z$ . Hence, also  $\langle Z' \rangle$  is  $\mathbb{C}^*$ -invariant. For  $\langle Z' \rangle = H' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  this is equivalent to saying that  $H' \subset H$  is a Hodge substructure.  $\square$

In [13, 14] the lemma is applied in various situations. The algebraic set  $Z$  is always defined by algebraic conditions on homomorphisms of Hodge structures and thus automatically invariant under  $\mathbb{C}^*$ . Usually, one starts with several Hodge structures of weight  $\ell$  on  $\mathbb{Q}$ -vector spaces  $H^{\ell}$  and homomorphisms of Hodge structures

$H^{\ell_1} \otimes H^{\ell_2} \rightarrow H^{\ell_1+\ell_2}$ ,  $a \otimes b \mapsto a \cdot b$ . (Think of the cohomology of a smooth projective variety or of a compact Kähler manifold.)

We shall in particular encounter algebraic subsets of the form

$$Z_1 = \{\alpha \in H_{\mathbb{C}}^k \mid \alpha^2 = 0\} \quad \text{or} \quad Z_2 = \left\{ a \in H_{\mathbb{C}}^k \mid \text{rk} \left( H_{\mathbb{C}}^{\ell} \xrightarrow{a} H_{\mathbb{C}}^{k+\ell} \right) \leq m \right\}.$$

Let us sketch the argument that shows that these sets are  $\mathbb{C}^*$ -invariant in the example  $Z = Z_2$ . By definition of the Hodge structure on  $H^{\ell_1} \otimes H^{\ell_2}$  and the hypothesis that the multiplication  $a \otimes b \mapsto a \cdot b$  is a morphism of Hodge structures, one has  $\rho(z)(a) \cdot b = \rho(z)(a \cdot (\rho(z^{-1})(b)))$ . Thus, the endomorphism given by multiplication with  $\rho(z)(a)$  and  $a$ , respectively, differs by automorphisms  $\rho(z) \in \text{Gl}(H_{\mathbb{R}}^{k+\ell})$  and  $\rho(z^{-1}) \in \text{Gl}(H_{\mathbb{R}}^{\ell})$ . In particular,  $\text{rk}(\rho(z)(a) \cdot) = \text{rk}(a \cdot)$  and hence  $a \in Z$  if and only if  $\rho(z)(a) \in Z$ .

Note that it might well happen that  $\langle Z \rangle$  is defined over  $\mathbb{Q}$ , but not  $\langle Z' \rangle$ .

Let us illustrate the use of Deligne's principle in a concrete situation that will be at the heart of the subsequent discussion. Suppose we are given a graded  $\mathbb{Q}$ -algebra  $\bigoplus H^k$ , an integer  $\ell \in \mathbb{Z}$  and a subspace  $0 \neq H' \subset H^{\ell}$ . Then define for  $i \geq 1$  the  $\mathbb{Q}$ -subspace

$$(3) \quad P_i := \left\{ a \in H^2 \mid \left( \bigotimes^i H' \xrightarrow{a} H^{\ell i+2} \right) = 0 \right\}.$$

We shall later fix in addition an integer  $m > 1$  and consider the two subspaces

$$P_1 \subset P_m \subset H^2$$

and the algebraic subset of  $P_{m\mathbb{C}}$ :

$$(4) \quad Z := \left\{ a \in P_{m\mathbb{C}} \mid \text{Ker} \left( H_{\mathbb{C}}^{\ell} \xrightarrow{a} H_{\mathbb{C}}^{\ell+2} \right) \neq 0 \right\}.$$

Then  $Z$  contains  $P_{1\mathbb{C}}$  and we denote its image in  $(P_m/P_1)_{\mathbb{C}}$  by  $\bar{Z}$  (which is again algebraic). Furthermore, let  $e \in Z \cap P_m$  be such that  $\mathbb{C}\bar{e} \subset \bar{Z}$  is an irreducible component of  $\bar{Z}$ .

**COROLLARY 1.6.** — *Suppose each  $H^k$  is endowed with a Hodge structure of weight  $k$  such that the multiplications are morphisms of Hodge structures and such that  $H' \subset H^{\ell}$  is a Hodge substructure. Then*

- i) *the  $P_i \subset H^2$  are Hodge substructures,*
- ii) *the element  $\bar{e} \in P_m/P_1$  is of type  $(1,1)$ , i.e., a Hodge class, and*
- iii)  *$\text{Ker}(H' \xrightarrow{e} H^{\ell+2})$  is a Hodge substructure of  $H^{\ell}$ .*

*Proof.* — The  $P_i$  can be viewed as the kernels of the morphisms of Hodge structures  $H^2 \rightarrow \left( \bigotimes^i H' \right)^* \otimes H^{\ell i+2}$  and are, therefore, Hodge substructures of  $H^2$ .

Deligne's principle shows that  $\mathbb{Q}\bar{e} \subset P_m/P_1$  is a Hodge substructure. Since any weight two Hodge structure of rank one is of pure type, one finds  $\bar{e} \in (P_m/P_1)^{1,1}$ .

In order to prove iii), use the morphism of Hodge structures  $P_m/P_1 \otimes H' \rightarrow H^{\ell+2}$ .

□

*Remark 1.7*

i) The actual description of  $P_m$  is of no importance here. We only used  $P_1 \subset P_m$  and the condition on  $e$ . Note that  $e \in P_m$  itself might be of mixed type, *e.g.* it could be arbitrarily modified by rational classes in  $P_1^{2,0} \oplus P_1^{0,2}$ .

ii) In the applications only the cases  $\ell = 1$  and  $\ell = 2$  will be considered and, moreover, for  $\ell = 1$  we will have  $H' = H^1$ .

## 2. THE IMPOSSIBLE ONES

The aim is to exhibit two specific Hodge structures of weight one respectively two which resist polarization. Section 2.1 explains Step **A** of the program, whereas Section 2.2 corresponds to Step **B**.

### 2.1. Special endomorphisms excluding polarization

Let us start out with an endomorphism  $\Phi \in \text{End}(A)$  of a  $\mathbb{Q}$ -vector space  $A$  of dimension  $2n$ . For any field  $\mathbb{Q} \subset K$  we shall denote by  $\Phi_K$  its  $K$ -linear extension. We also use the naturally induced endomorphisms  $\Phi^*$  and  $\bigwedge^2 \Phi^*$  of  $A^*$  and  $\bigwedge^2 A^*$  respectively.

Denote the set of all eigenvalues of  $\Phi$  by  $EV(\Phi) := \{\mu_1, \dots, \mu_{2n}\}$  and by  $K_\Phi$  the splitting field of the characteristic polynomial of  $\Phi$ , *i.e.*,  $K_\Phi = \mathbb{Q}(\mu_1, \dots, \mu_{2n})$ .

Henceforth, we shall assume that:

**HYPOTHESIS 2.1.** — i)  $\mu_i \notin \mathbb{R}$  for all  $i$ , and ii)  $G := \text{Gal}(K_\Phi/\mathbb{Q})$  acts as the symmetric group  $S_{2n}$  on  $EV(\Phi)$ .

*Example 2.2.* — It is not difficult to find explicit examples of endomorphisms  $\Phi$  satisfying these conditions:

– Let  $A = \mathbb{Q}^2$ , hence  $n = 1$ , and  $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Then  $\{\mu_1, \mu_2\} = \{\pm i\}$ .

– Let  $A = \mathbb{Q}^4$  and  $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . The characteristic polynomial of  $\Phi$  is  $x^4 - x + 1$

whose Galois group is the symmetric group (see [1, Ch.14.6]) and which clearly has no real eigenvalues.

*Remark 2.3.* — Clearly, ii) implies that  $\Phi_{\mathbb{C}} \in \text{End}(A_{\mathbb{C}})$  can be diagonalized. It also yields  $\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k} \neq \mu_{j_1} \cdots \mu_{j_k}$  for any two distinct multi-indices  $i_1 < \cdots < i_k$  and  $j_1 < \cdots < j_k$ .

LEMMA 2.4. — Under the assumptions of 2.1 the induced endomorphism  $\bigwedge^k \Phi \in \text{End}(\bigwedge^k A)$  does not admit any non-trivial invariant subspace.

*Proof.* — Clearly, the eigenvalues of  $\bigwedge^k \Phi$  are  $\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k}$ ,  $i_1 < \cdots < i_k$ . Thus, if  $W \subset \bigwedge^k A$  is invariant under  $\bigwedge^k \Phi$ , then the eigenvalues of  $\psi := \bigwedge^k \Phi|_W$  are also of this form. In particular, also  $\psi$  can be diagonalized over  $K_\Phi$ . Suppose  $W \neq 0$ . Then there exists an eigenvector  $v \in W_{K_\Phi}$  with eigenvalue say  $\mu_1 \cdots \mu_k$ .

Being defined over  $\mathbb{Q}$ , the extension of  $\psi$  (and of  $\bigwedge^k \Phi$ ) to an endomorphism of  $W_{K_\Phi}$  (respectively  $\bigwedge^k A_{K_\Phi}$ ) commutes with the action of the Galois group  $G$  on the scalars  $K_\Phi$ . Hence, with  $\mu_1 \cdots \mu_k$  also  $\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(k)}$  is an eigenvalue of  $\psi$  for any  $\sigma \in G$ .

By Remark 2.3, this shows that all  $\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k}$ ,  $i_1 < \cdots < i_k$ , which are pairwise distinct, occur as eigenvalues of  $\psi$ . Hence,  $\dim(W) = \dim(\bigwedge^k A)$  or, equivalently,  $W = \bigwedge^k A$ .  $\square$

PROPOSITION 2.5. — Suppose  $\bigwedge^2 \Phi$  respects a Hodge structure of weight two on  $A_2 := \bigwedge^2 A$  given by  $\bigwedge^2 A_{\mathbb{C}} = A_2^{2,0} \oplus A_2^{1,1} \oplus A_2^{0,2}$  with  $A_2^{2,0} \neq 0$ . If  $\Phi$  satisfies 2.1, then

$$A_2^{1,1} \cap \bigwedge^2 A = \{0\},$$

which is equivalent to saying that all Hodge classes of  $A_2$  are trivial.

*Proof.* — As  $\bigwedge^2 \Phi_{\mathbb{C}}$  preserves the bidegree  $(p, q)$  of elements in  $\bigwedge^2 A_{\mathbb{C}}$ , the rational subspace  $W := A_2^{1,1} \cap \bigwedge^2 A$  is  $\bigwedge^2 \Phi$ -invariant. Due to the lemma one either has  $W = \bigwedge^2 A$ , which is excluded by  $A_2^{2,0} \neq 0$ , or  $W = 0$ , which proves the assertion.  $\square$

COROLLARY 2.6. — Suppose  $n \geq 2$ . A Hodge structure of weight one  $A_{\mathbb{C}} = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$  that is preserved by  $\Phi_{\mathbb{C}}$  does not admit a polarization.

*Proof.* — A polarization of the Hodge structure  $A_{\mathbb{C}} = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$  would be given by a special Hodge class  $q$  in the induced Hodge structure of weight two on  $\bigwedge^2 A^*$ . However, there are no non-trivial ones due to the proposition. (Use that  $\Phi^*$  as well satisfies 2.1.) The assumption  $n \geq 2$  is needed in order to ensure that  $A_2^{2,0} \neq 0$ .  $\square$

Remark 2.7. — Observe that  $\Phi$  preserves the Hodge structure if and only if its graph  $\Gamma_\Phi \subset A \oplus A$  is a Hodge substructure.

Example 2.8. — If  $\Phi$  satisfies i) and ii) of 2.1, one easily constructs Hodge structures of weight one that are preserved by  $\Phi$ . This will be needed when it actually comes to constructing examples.

Pick  $n$  distinct eigenvalues  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in EV(\Phi)$  such that  $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_j$  for all  $i, j$  (note that due to i) no eigenvalue is real) and let  $A^{1,0} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}v_i$ , where the  $v_i \in A_{\mathbb{C}}$  are eigenvectors with eigenvalue  $\lambda_i$ .

With  $\Phi$  being defined over  $\mathbb{Q}$ , the complex conjugate  $\bar{\lambda}$  of an eigenvalue  $\lambda \in EV(\Phi)$  is again an eigenvalue. Thus, with  $A^{0,1} := \overline{A^{1,0}}$  one has  $A_{\mathbb{C}} = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$ .

## 2.2. Identifying the special endomorphisms algebraically

We continue the discussion of Section 1.2 and combine it with endomorphisms  $\Phi$  of the type studied in Section 2.1.

So, let us consider a  $\mathbb{Q}$ -vector space  $A$  of dimension  $2n \geq 4$  together with an endomorphism  $\Phi$  and let  $H^* = \bigoplus_{k=0}^{4n} H^k$  be a graded  $\mathbb{Q}$ -algebra.

To bring both structures together, we assume that there is a graded inclusion

$$\bigwedge^*(A \oplus A) \subset H^*$$

satisfying the following conditions. (We shall apply Corollary 1.6 with  $\ell = 1$ ,  $m = 4n - 2$ , and  $H' = H^1$ .)

HYPOTHESIS 2.9

- i)  $A \oplus A = H^1$ ,
- ii)  $H^2 = \bigwedge^2(A \oplus A) \oplus P \oplus R$ , where  $P := P_{4n-2}$  is defined as in (3) and  $R$  is some subspace,
- iii)  $P = P_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^4 e_i \mathbb{Q}$ , and
- iv) the kernel of the multiplication  $H^1 \xrightarrow{\cdot e_i} H^3$ , for  $i = 1, \dots, 4$ , equals the subspaces  $A \oplus \{0\}$ ,  $\{0\} \oplus A$ ,  $\Delta := \{(a, a) \mid a \in A\}$ , and the graph  $\Gamma_\Phi$  of  $\Phi$ , respectively. The sum  $\sum \text{Im}(\cdot e_i) \subset H^3$  is direct.

*Remark 2.10.* — Roughly,  $e_1$  and  $e_2$  will be used to detect certain Hodge substructures,  $e_3$  to identify them, and  $e_4$  to view  $\Phi$  as a homomorphism between them. The auxiliary space  $R$  is later only needed in order to construct odd-dimensional examples. Due to Remark 3.4 one could even restrict to the case  $P_1 = 0$ .

PROPOSITION 2.11. — *Suppose  $H^*$  and  $\Phi$  meet the conditions of 2.9 and 2.1, respectively. Then  $H^*$  cannot be realized as the rational cohomology ring  $H^*(X, \mathbb{Q})$  of a projective manifold  $X$ .*

*Proof.* — Suppose  $X$  is a projective manifold that does realize  $H^*$ . In the following we will simply identify  $H^*(X, \mathbb{Q})$  with  $H^*$ . Thus, each  $H^k$  inherits the natural Hodge structure of weight  $k$  from  $H^k(X, \mathbb{Q})$  and the multiplications  $H^{\ell_1} \otimes H^{\ell_2} \rightarrow H^{\ell_1 + \ell_2}$  are morphisms of Hodge structures.

Corollary 1.6 applies and shows that  $A \oplus \{0\}$ ,  $\{0\} \oplus A$ ,  $\Delta$ , and the graph  $\Gamma_\Phi$  are Hodge substructures of  $H^1(X, \mathbb{Q})$ . Indeed, the only thing that needs to be checked is that the  $\mathbb{C}\bar{e}_i$  define irreducible components of  $\bar{Z} \subset (P/P_1)_{\mathbb{C}}$  (the image of  $Z$  as in (4)). This follows from iv): Suppose  $\sum a_i e_i \in Z$ . Then there exists  $0 \neq a \in H^1$  that is annihilated by it. Thus,  $a_i(a \cdot e_i) = 0$  for  $i = 1, \dots, 4$ . If e.g.  $a_i \neq 0 \neq a_j$ , then  $a \in \text{Ker}(\cdot e_i) \cap \text{Ker}(\cdot e_j)$ . The description of the kernels shows that this is impossible.

With the identification of the two Hodge structures on  $A \oplus \{0\}$  and  $\{0\} \oplus A$  via  $\Delta$ , the graph  $\Gamma_\Phi$  allows to view  $\Phi$  as an endomorphism of the Hodge structure on  $A \oplus \{0\}$ .



By Corollary 2.6 this Hodge structure does not admit a polarization. Hence, also the Hodge structure  $H^1(X, \mathbb{Q})$ , of which  $A \oplus \{0\}$  is a Hodge substructure, cannot be polarized. This yields a contradiction to the projectivity of  $X$ .  $\square$

We shall next present a similar result based on an analysis of Hodge structures of weight two.

Let as before  $A$  be a  $\mathbb{Q}$ -vector space of dimension  $2n \geq 4$  together with an endomorphism  $\Phi$  and let  $H^* = \bigoplus_{k=0}^{4n} H^k$  be a graded  $\mathbb{Q}$ -algebra. We assume that there is a graded inclusion  $\bigwedge^{2*}(A \oplus A) \subset H^{2*}$  and consider  $B_1 := \bigwedge^2 A \oplus \{0\}$ ,  $B_2 := \{0\} \oplus \bigwedge^2 A$ , and  $H' := B_1 \oplus B_2$  as subspaces of  $H^2$ . We shall use the notation of Corollary 1.6 with  $\ell = 2$ ,  $m = 2n - 1$ .

**HYPOTHESIS 2.12**

- i)  $H^2 = B_1 \oplus B_2 \oplus P$  with  $P := P_{2n-1}$  as in (3),
- ii)  $P = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \mathbb{Q}e_1 \oplus \mathbb{Q}e_2$  for some vector spaces  $Q_i$  and  $P_1 = 0$ ,
- iii)  $\{\alpha \in H_{\mathbb{C}}^2 \mid \alpha^2 = 0\} = \{\alpha \in B_{1\mathbb{C}} \mid \alpha^2 = 0\} \cup \{\alpha \in B_{2\mathbb{C}} \mid \alpha^2 = 0\}$ ,
- iv)  $\alpha^2 a^{2n-2} = 0$  for all  $\alpha \in B_1$  and  $a \in P$ , and
- v) the kernel of the multiplication  $B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{\cdot e_i} H^4$ ,  $i = 1, 2$ , is the diagonal  $\Delta := \{(a, a)\} \subset \bigwedge^2 A \oplus \bigwedge^2 A$  for  $i = 1$  and the graph  $\Gamma_{\bigwedge^2 \Phi}$  for  $i = 2$ . Similarly,  $\text{Ker}(\cdot a_i) = B_i$  for any  $0 \neq a_i \in Q_i$ . The sum  $Q_1 \cdot B_2 + Q_2 \cdot B_1 + \text{Im}(\cdot e_1) + \text{Im}(\cdot e_2)$  is direct.

**PROPOSITION 2.13.** — *Suppose  $H^*$  and  $\Phi$  meet the requirements of 2.12 and 2.1, respectively. Then  $H^*$  cannot be realized as the rational cohomology ring  $H^*(X, \mathbb{Q})$  of a projective manifold  $X$ .*

*Proof.* — Suppose  $X$  is a projective manifold whose rational cohomology ring  $H^*(X, \mathbb{Q})$  can be identified with  $H^*$ .

Due to iii) and Lemma 1.5,  $B_1$ ,  $B_2$ , and hence  $H'$  are Hodge substructures of  $H^2$ . Thus, Corollary 1.6 applies and shows that  $P$  is a Hodge substructure. (Note that  $\bigwedge^2 A$  is spanned by vectors  $\alpha$  with  $\alpha^2 = 0$ .)

Due to v), the algebraic set  $Z \subset P$  (see notation in Corollary 1.6) contains  $\mathbb{C}e_1$  and  $\mathbb{C}e_2$  as two irreducible components. Indeed, if  $\sum a_i + \sum \eta_i e_i \in Z$  with  $a_i \in Q_i$ , then some  $0 \neq b = b_1 + b_2 \in B_1 \oplus B_2$  is annihilated by it. Since the sum of the multiplications is direct, this yields  $a_2 \cdot b_1 = a_1 \cdot b_2 = \eta_i(b \cdot e_i) = 0$ . In particular,  $a_1 \neq 0$  implies  $b_2 = 0$  and  $a_2 \neq 0$  implies  $b_1 = 0$ . Thus, if  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , then either  $a_1 \neq 0$  or  $a_2 \neq 0$ . Similarly, if  $\eta_1 \neq 0 = \eta_2$ , then  $b_1 = b_2 \neq 0$  and, therefore,  $a_1 = a_2 = 0$ . Finally, the case  $\eta_1 \neq 0 \neq \eta_2$  is excluded by  $\Delta \cap \Gamma_{\bigwedge^2 \Phi} = \{(0, 0)\}$ , which follows from  $\mu_i \cdot \mu_j \neq 1$  for all  $i \neq j$  and  $n \geq 2$ . (The argument shows that the other irreducible components are  $Q_{i\mathbb{C}}$ .)

Thus, by iii) of Corollary 1.6, the diagonal and the graph of  $\bigwedge^2 \Phi$  are Hodge substructures of  $B_1 \oplus B_2$ . In other words,  $\bigwedge^2 \Phi$  is an endomorphism of the Hodge structure of  $\bigwedge^2 A$  induced by  $B_1$  (or, equivalently, by  $B_2$ ).

Clearly,  $\bigwedge^2 A$  contains a subspace  $V$  of dimension at least two such that  $0 = \alpha^2 \in H^4$  for all  $\alpha \in V$ . (For instance, take  $V = \langle v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3 \rangle$  if  $A = \bigoplus \mathbb{Q}v_i$ .)

Hence, by the Hodge–Riemann bilinear relations this excludes  $V \subset H^{1,1}(X)$  (see Example 1.4). Therefore,  $\bigwedge^{2,0} A \neq 0$  and, hence, the Hodge structure  $\bigwedge^2 A$  does not contain any Hodge class (see Proposition 2.5).

This shows that all Hodge classes of  $H^2$  are contained in  $P$ . In particular, any hyperplane class  $[\omega]$  is contained in  $P$ . On the other hand, due to iv) one has  $\alpha^2 \cdot [\omega]^{2n-2} = 0$  for all  $\alpha \in B_1$ , but  $H^2(X, \mathbb{Q})$  can clearly not contain a Hodge substructure of dimension  $\geq 2$  which is isotropic with respect to the polarization (see Example 1.4). This yields the contradiction.  $\square$

### 3. CONSTRUCTION OF EXAMPLES

So far we have explained how Voisin is able to exclude certain Hodge structures on  $\mathbb{Q}$ -algebras from being realized by the cohomology of a projective manifold. It remains to find compact Kähler manifolds which do realize these structures and which, therefore, are topologically different from any projective manifold.

The first two examples are obtained as blow-ups of well-known Kähler manifolds and the following general facts will be used tacitly throughout (see [3, 4, 12]). Let  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  be the blow-up of a compact complex manifold  $X$  along a submanifold  $i : Y \hookrightarrow X$  of codimension  $c \geq 2$ . The exceptional divisor  $j : E = \pi^{-1}(Y) \hookrightarrow \tilde{X}$  is isomorphic to  $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})$  and  $\pi|_E$  equals the projection  $\pi_Y : \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X}) \rightarrow Y$ . In the following, cohomology will be considered with coefficients in  $\mathbb{Q}$ .

- If  $X$  is Kähler, then  $\tilde{X}$  is Kähler.
- If a submanifold  $Z \subset X$  intersects  $Y$  transversally, then the proper transform, which is by definition the closure of  $\pi^{-1}(Z \setminus Y)$ , is the blow-up  $\tilde{Z} \rightarrow Z$  along  $Y \cap Z$ .
- The natural morphisms  $\pi^* : H^k(X) \rightarrow H^k(\tilde{X})$  and

$$H^{k-2(\ell+1)}(Y) \xrightarrow{\pi_Y^*} H^{k-2(\ell+1)}(E) \xrightarrow{\cdot h^\ell} H^{k-2}(E) \xrightarrow{j_*} H^k(\tilde{X}),$$

where  $h := c_1(\mathcal{O}_{\pi_Y}(1))$ , induce isomorphisms

$$H^k(\tilde{X}) \cong H^k(X) \oplus \bigoplus_{i=k-2(c-1)}^{k-2} H^i(Y).$$

In particular,  $H^2(\tilde{X}) \cong H^2(X) \oplus \mathbb{Q}e$  if  $e := [E] \in H^2(\tilde{X})$  and  $Y$  is connected.

- Moreover,

$$\varphi_e : H^k(X) \xrightarrow{\pi^*} H^k(\tilde{X}) \xrightarrow{e} H^{k+2}(\tilde{X})$$

equals

$$H^k(X) \xrightarrow{i^*} H^k(Y) \xrightarrow{\pi_Y^*} H^k(E) \xrightarrow{j_*} H^{k+2}(\tilde{X}).$$

In particular,  $\text{Ker}(H^k(X) \xrightarrow{\varphi_e} H^{k+2}(\tilde{X})) = \text{Ker}(H^k(X) \xrightarrow{i^*} H^k(Y))$ .

• If  $Y = Y_1 \sqcup Y_2$  and accordingly  $E = E_1 \sqcup E_2$ , then for  $k = 1$  the sum  $\sum \text{Im}(\varphi_{e_i}) \subset H^3(\tilde{X}) = H^3(X) \oplus H^1(Y_1) \oplus H^1(Y_2)$  is direct and similar for  $k = 2$  the sum  $\sum \text{Im}(\varphi_{e_i}) \subset H^4(\tilde{X}) \cong H^4(X) \oplus \bigoplus H^2(Y_i) \oplus \bigoplus H^0(Y_i)$  is direct. (Note that the degree zero terms only occur if  $c \geq 3$ .) This principle can be generalized to the case that  $Y_1, Y_2$  intersect transversally and that  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  is obtained from first blowing up along  $Y_1$  and then along the proper transform of  $Y_2$ .

### 3.1. Voisin's first example

Let  $\Phi$  be an endomorphism of a  $\mathbb{Q}$ -vector space  $A$  of dimension  $2n \geq 4$  satisfying Hypothesis 2.1. By passing to  $k\Phi$  for some  $0 \neq k \in \mathbb{Z}$  if necessary, we may assume that  $\Phi^*$  preserves a maximal lattice  $\Gamma \subset A^*$ . Consider the complex torus  $T := A^{1,0^*}/\Gamma$ , where  $A_{\mathbb{C}} = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$  is a Hodge structure as in Example 2.8. Then there exist natural isomorphisms  $H^1(T, \mathbb{Q}) \cong A$  and  $H^{1,0}(T) \cong A^{1,0}$ . The endomorphism  $\Phi^*$  induces an endomorphism of  $T$  which shall also be denoted  $\Phi^*$ .

*Remark 3.1.* — The complex tori  $T$  and  $T \times T$  are not projective due to Corollary 2.6, but they are, as all other complex tori, deformation equivalent and hence homeomorphic to abelian varieties.

Voisin's first example constructed in [13] is a compact Kähler manifold  $X$  obtained as a blow-up of  $T \times T$ .

Consider the following submanifolds of  $T \times T$ :

$$\Delta_1 := \{(x, -x)\}, \quad \Delta_2 := \{(x, -\Phi^*(x))\}, \quad T_1 := \{0\} \times T, \quad T_2 := T \times \{0\},$$

which meet pairwise transversally. (*E.g.*, via the first projection the tangent space of  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  in an intersection point  $z = (x, y)$  is identified with  $\text{Ker}(\text{id} - \Phi^*)$ , but 1 is not an eigenvalue of  $\Phi$ .)

Let  $z_1, \dots, z_M \in T \times T$  be the finitely many intersection points of all the pairwise intersections. Then consider the blow-up  $\pi_1 : \widetilde{T \times T} \rightarrow T \times T$  in these points. The proper transforms of the four submanifolds  $\widetilde{\Delta}_1, \widetilde{\Delta}_2, \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2$  are pairwise disjoint submanifolds of  $\widetilde{T \times T}$ . Thus, the blow-up  $\pi_2 : X \rightarrow \widetilde{T \times T}$  along the union  $\widetilde{\Delta}_1 \cup \widetilde{\Delta}_2 \cup \widetilde{T}_1 \cup \widetilde{T}_2$  is a compact Kähler manifold.

We shall denote by  $F_1, \dots, F_M \subset X$  the proper transform of the exceptional divisors of  $\pi_1$  and by  $E_1 \rightarrow \widetilde{T}_1, E_2 \rightarrow \widetilde{T}_2, E_3 \rightarrow \widetilde{\Delta}_1, E_4 \rightarrow \widetilde{\Delta}_2$  the exceptional divisors of  $\pi_2$ . Their cohomology classes shall be called  $f_1, \dots, f_M, e_1, \dots, e_4 \in H^2(X, \mathbb{Q})$ . It is the

second blow-up  $\pi_2$  and its exceptional classes  $e_1, \dots, e_4$  that are important; the first blow-up  $\pi_1$  is only needed in order to ensure the smoothness of  $X$ .

The composition  $\pi := \pi_1 \circ \pi_2 : X \rightarrow T \times T$  induces a graded inclusion  $\bigwedge^*(A \oplus A) = H^*(T \times T, \mathbb{Q}) \subset H^*(X, \mathbb{Q})$ .

PROPOSITION 3.2. — *The conditions i)-iv) of 2.9 are satisfied.*

*Proof.* — The condition i) is obvious, as  $X$  and  $T \times T$  are homeomorphic away from subsets of real codimension  $\geq 2$ . Since  $H^2(T \times T, \mathbb{Q}) \cong \bigwedge^2 H^1(T \times T, \mathbb{Q})$ , one has  $H^2(X, \mathbb{Q}) \cong \bigwedge^2(A \oplus A) \oplus \bigoplus_{i=1}^M \mathbb{Q}f_i \oplus \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Q}e_i$ .

A class in  $\bigwedge^{4n-2} H^1(X, \mathbb{Q}) = \bigwedge^{4n-2} H^1(T \times T, \mathbb{Q})$  can be thought of as a linear combination of fundamental classes of subsets of real codimension  $4n - 2$  in  $T \times T$  in general position, whose pull-back clearly avoids the exceptional divisors  $F_1, \dots, F_M, E_1, \dots, E_4$  which all live over subsets of real codimension  $> 2$ . This yields ii) with  $P = \langle f_1, \dots, f_M, e_1, \dots, e_4 \rangle$  and  $R = 0$ .

A similar argument yields iii), where  $P_1 = \langle f_1, \dots, f_M \rangle$ . Finally, condition iv) is proved by applying the above general remarks on the cohomology of a blow-up and by using the explicit description of  $\Delta_1, \Delta_2, T_1$ , and  $T_2$ .  $\square$

Together with Proposition 2.11 this yields

COROLLARY 3.3. — *The rational homotopy type of the compact Kähler manifold  $X$  of dimension  $2n \geq 4$  is not realized by any projective manifold.*  $\square$

Note that this time the result has been phrased in terms of the rational homotopy type rather than in terms of the rational cohomology. Both statements are equivalent due to [2] and the fact that the fundamental group is abelian in our situation.

Remark 3.4. — One could also avoid the initial point blow-ups and instead successively blow up  $T_1, T_2, \Delta_1, \Delta_2$ , respectively their proper transforms. The above arguments remain valid, only that in this case  $P_1 = 0$ .

In order to fully prove Theorem 0.1 it remains to construct examples of odd dimension. These are obtained as products  $X' := X \times \mathbb{P}^1$ , where  $X$  is one of the compact Kähler manifolds above. Once more the conditions i)-iv) of 2.9 are satisfied, but this time  $R = H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})$ . The rest of the argument is unaffected by this modification.

Remark 3.5. — In [13] it is first shown that the integral cohomology  $H^*(X, \mathbb{Z})$  of the above constructed Kähler manifold cannot be realized by a projective manifold. The proof of this weaker statement does not rely on Deligne's principle, but uses the Albanese morphism instead.

One finds in [13] also an example, due to Deligne, of a compact Kähler manifold whose complex cohomology  $H^*(X, \mathbb{C})$  cannot be realized by a projective manifold. The manifold  $X$  is again obtained as a blow-up of  $T \times T$ .

### 3.2. Simply-connected examples

One might wonder whether the fundamental group is responsible for the fact that the above constructed compact Kähler manifold is topologically different from any projective manifold. This question leads Voisin to her second example, which is simply-connected. Roughly, the simply-connected Kähler manifold is obtained from the first one by dividing by the  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -action, which is induced by the standard involution on the two factors.

On the one hand, the construction is simpler in the sense that blowing up  $T_1$  and  $T_2$  can be avoided, which was needed before to detect certain Hodge substructures. As it turns out, the analogous Hodge structures in the simply-connected case can be described directly. (As the examples will be simply-connected, one cannot work with Hodge structures of weight one. Therefore, Voisin analyses the weight-two Hodge structure on  $H^2(X, \mathbb{Q})$  instead.) On the other hand, due to the (mild) singularities of  $T/\pm$ , the construction is slightly more involved, as we first have to desingularize.

In [13] Voisin proceeds as follows. Start with a torus  $T = A^{1,0^*}/\Gamma$  as in Section 3.1. In particular,  $T$  comes with an endomorphism  $\Phi^*$ . Next, consider the quotient  $T/\pm$  of  $T$  by the standard involution  $z \mapsto \pm z$  and its desingularization  $K \rightarrow T/\pm$  obtained by a simple blow-up of all the two-torsion points. Equivalently, one may first blow up the two-torsion points  $\tilde{T} \rightarrow T$  and then take the quotient  $K = \tilde{T}/\pm$  by the induced involution. The latter description shows that  $K$  is smooth and Kähler. (Indeed, a general result of Varouchas [10] proves that for a surjection  $\pi : X \rightarrow X'$  whose fibres are all of dimension  $\dim(X) - \dim(X')$  the manifold  $X'$  is Kähler if  $X$  is so.) Viewing  $K$  as the desingularization of  $T/\pm$ , shows that it is simply-connected, for  $T/\pm$  is.

The endomorphism  $-\Phi^*$  of  $T$  descends to an endomorphism  $-\bar{\Phi}^*$  of  $T/\pm$  and we consider its graph  $\Gamma_{-\bar{\Phi}^*} \subset (T/\pm) \times (T/\pm)$ .

In the last step, one first blows up  $K \times K$  along the anti-diagonal  $\Delta_1 := \{(a, -a)\}$  and then along the proper transform  $\Gamma'$  of  $\Gamma_{-\bar{\Phi}^*}$ . (Note that  $\Gamma'$  is smooth. This can be seen by passing via  $\tilde{T} \times \tilde{T} \rightarrow T \times T$ .)

Thus, the resulting variety  $X$  is indeed a Kähler manifold. We let  $\pi : X \rightarrow K \times K$  be the composition of the two blow-ups. The two exceptional divisors  $E_1 \rightarrow \Delta$  and  $E_2 \rightarrow \Gamma'$  yield distinguished cohomology classes  $e_1, e_2 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ .

PROPOSITION 3.6. — *Let  $n \geq 3$ . Then the conditions i)-v) of 2.12 are satisfied.*

*Proof.* — Since the involution of  $T$  acts trivially on  $H^2(T, \mathbb{Q})$ , one has  $H^2(T/\pm, \mathbb{Q}) \cong H^2(T, \mathbb{Q}) = A$  and  $H^2(K, \mathbb{Q}) = A \oplus \bigoplus \mathbb{Q}f_j$ , where  $f_i$  are the classes corresponding to the exceptional divisors  $F_i$  over the two-torsion points.

Thus,  $H^2(X, \mathbb{Q}) = H^2(K \times K, \mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}e_1 \oplus \mathbb{Q}e_2 = H^2((T/\pm) \times (T/\pm), \mathbb{Q}) \oplus Q_1 \oplus Q_2 \oplus \mathbb{Q}e_1 \oplus \mathbb{Q}e_2$ , where  $Q_i$  is the pull-back of  $\bigoplus \mathbb{Q}f_j$  under the  $i$ -th projection onto  $K$ .

It is easy to see that  $P := Q_1 \oplus Q_2 \oplus \mathbb{Q}e_1 \oplus \mathbb{Q}e_2$  is indeed the subspace that is annihilated by  $S^{2n-1}H^2((T/\pm) \times (T/\pm), \mathbb{Q})$ . This proves i).

Since  $\bigwedge^2 A$  is spanned by elements  $a$  with  $a^2 = 0$  and no non-trivial linear combination of  $f_{1j} := \pi_1^* f_j, f_{2j} := \pi_2^* f_j, e_1$ , and  $e_2$  has this property, condition iii) follows. It is here that one needs the assumption  $n \geq 3$ . The verification of condition v) is straightforward; use the explicit description of the classes  $e_1$  and  $e_2$ .

To conclude, we have to verify condition iv). One can show that for all  $\alpha \in B_1$  expressions of the form  $\alpha^2 \cdot P(f_{ij}, e_1, e_2)$  with  $P$  a polynomial of degree  $2n - 2$  are indeed trivial. Here are a few of the necessary arguments. Firstly,  $f_{ij}^k = 0$  for all  $k > n$ . Secondly, the classes  $f_{ij} \cdot e_k$  and  $e_1 \cdot e_2$  are supported over finitely many points in  $(T/\pm) \times (T/\pm)$  and, hence as  $\alpha$  is pulled back from there, one has  $\alpha \cdot (f_{ij} \cdot e_k) = \alpha \cdot (e_1 \cdot e_2) = 0$ . Thirdly,  $\alpha \cdot f_{1j} = 0$ . Thus, the only combinations that need to be checked are  $\alpha^2 \cdot e_i^{2n-2}$ . We may assume that  $E_i = \mathbb{P}(\Omega_T)$  and that  $\pi|_{E_i}$  is the natural projection  $p : E \rightarrow T$ . Then one shows that  $e_i|_{E_i} = c_1(\mathcal{O}_p(-1))$  and thus reduces to  $0 = p^* \alpha_T^2 \cdot c_1(\mathcal{O}_p(-1))^{2n-3}$ , which follows from  $c_1(\mathcal{O}_p(-1))^k = 0$  for  $k \geq n$  and the assumption  $n \geq 3$ .  $\square$

Together with Proposition 2.13 this yields

**COROLLARY 3.7.** — *The rational homotopy type of the compact simply-connected Kähler manifold  $X$  of dimension  $2n \geq 6$  is not realized by any projective manifold.*  $\square$

Odd-dimensional examples can again be produced by taking products with  $\mathbb{P}^1$ . In 2.12 only i) and iii) have to be modified. In i) one has  $H^2 = B_1 \oplus B_2 \oplus P \oplus R$  with  $R = H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})$  and in iii)  $R_{\mathbb{C}}$  will provide another irreducible component. The arguments are not affected by this modification. This yields C. Voisin's second counter-example:

**THEOREM 3.8** ([13]). — *In any dimension  $\geq 6$  there exists a simply-connected compact Kähler manifold which does not have the rational homotopy type of a projective manifold.*

Once more, instead of working with the rational homotopy type one could equivalently say that  $H^*(X, \mathbb{Q})$  is not realized as the cohomology ring of a projective manifold (see [2]).

*Remark 3.9.* — Inspired by Voisin's examples, Oguiso studies in [9] simply-connected compact Kähler manifolds of dimension  $d \geq 4$  which are not projective, but rigid, *i.e.*, which do not allow any deformations at all and, therefore, cannot be deformed to projective ones in particular. In the case of simply-connected examples one can no longer work with Hodge structures of weight one. Thus, K3 surfaces (or, more generally, compact hyperkähler manifolds) with their very special but rich Hodge structures of weight two provide a reservoir of potentially interesting examples. Roughly, the special endomorphisms of tori used by Voisin are in [9] replaced by special automorphisms of K3 surfaces which are described completely by their action on the second cohomology.

However, the methods in [9] fall short of proving that the examples do not have the rational homotopy type of projective manifolds. It seems likely, nevertheless, that four-dimensional simply-connected examples could eventually be produced in this way.

### 3.3. The birational Kodaira problem

Right after [13] had appeared, modifications of the original problem have been proposed. For many problems in complex algebraic geometry it is natural not to restrict to projective or Kähler manifolds, but to allow manifolds that are birational or bimeromorphic to those. Passing to a bimeromorphic model often changes the topology drastically, but in a somewhat controlled manner. So, modifying Kodaira's problem in this sense seems natural also from a topological point of view.

More precisely, the compact Kähler manifolds constructed in [13] are both bimeromorphic to compact Kähler manifolds which do have the homotopy type of projective manifolds. *E.g.* in the first example, described in Section 3.1, the Kähler manifold  $X$  was constructed as a blow-up of a torus whose underlying manifold carries also the structure of a projective manifold. In other words, after a controlled topological modification the original topological manifold underlying  $X$  has been transformed to one that does carry a projective structure. So, one could ask whether this is true for any Kähler manifold. Again, the answer is negative.

**THEOREM 3.10** ([14]). — *There exist compact Kähler manifolds  $X$  of dimension  $2n \geq 10$  such that no complex manifold bimeromorphic to it has the rational homotopy type of a projective manifold.*

The principal ideas in [14] are similar to those in [13]. Roughly, one tries to detect certain Hodge structures in terms of the multiplicative structure of the cohomology ring and to derive a contradiction to the existence of a polarization on the (primitive) second cohomology of a projective manifold. Technically, the arguments are more involved and we only give an idea of the actual construction.

The construction of the birational counter-examples in [14] starts again with the same torus  $T$  of dimension  $n \geq 4$  and an endomorphism  $\Phi$  satisfying 2.1. If  $\mathcal{P}$  denotes the Poincaré bundle on  $T \times \widehat{T}$ , then let  $E := \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{-1}$  and  $E_\Phi := (\Phi, \text{id})^* E$ . In the next step one considers the fibre product  $\mathbb{P}(E) \times_{T \times \widehat{T}} \mathbb{P}(E_\Phi)$  and its quotient  $Q$  by the action of  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  given by natural lifts of  $(-\text{id}, \text{id})$  and  $(\text{id}, -\text{id})$ . Then any Kähler desingularization  $X$  of  $Q$  will work. Note that these examples are bimeromorphic to a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ -bundle over  $K \times \widehat{K}$ , where  $K \rightarrow T/\pm$  is the desingularization considered in the simply-connected case.

The reason that one is able to control in this example all bimeromorphic models by cohomological methods is due to the fact that there exist only few subvarieties of positive dimension.

#### 4. FURTHER COMMENTS

This is still not the end. Why not allowing topological changes that are not obtained by bimeromorphic maps? One could ask whether there always exists another complex structure on  $X$  (*e.g.* one obtained by a deformation) such that a bimeromorphic model of this new one has the rational homotopy type of a projective manifold. So, more formally, if one introduces the equivalence relation between complex manifolds generated by deformations and bimeromorphic correspondences, one might ask whether any compact Kähler manifold is equivalent to a projective manifold.

Continuing in this direction, one could allow singular varieties or certain ramified covers in order to enlarge the equivalence classes. Would the answer to Kodaira's problem be different then? Most of these questions are open for the time being, but see the comments in [11].

In another direction, it could be interesting to see whether the birational geometry does matter in these questions. The above counter-example for the birational Kodaira problem is, by construction, of Kodaira dimension  $-\infty$ . For the time being the techniques do not seem to produce examples of non-negative Kodaira dimension.

As has been mentioned, topologically there is no difference between compact Kähler surfaces and projective surfaces. Due to the examples of Voisin, the situation changes drastically in dimension  $\geq 4$  (or rather  $\geq 6$  if one prefers simply-connected manifolds). What seems open, however, is the three-dimensional case:

*Does there exist a compact Kähler threefold which is not homeomorphic to a projective manifold?*

Since we mentioned fundamental groups in the beginning, let us point out that the following problem is also still open:

*Does there exist a group that is the fundamental group of a compact Kähler manifold, but not of a projective manifold?*

A question of a more general nature is the following:

*Are there topological, cohomological, ... conditions that decide whether a compact Kähler manifold can also be endowed with a complex structure which is projective?*

Nothing seems to be known in this direction and the examples show that if such conditions can be found at all, they cannot be formulated purely in terms of the fundamental group.

#### REFERENCES

- [1] M. ARTIN – *Algebra*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [2] P. DELIGNE, P. GRIFFITHS, J. MORGAN, & D. SULLIVAN – Real homotopy theory of Kähler manifolds, *Invent. Math.* **29** (1975), no. 3, p. 245–274.



- [3] J.-P. DEMAILLY – Complex analytic and algebraic geometry, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>.
- [4] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Pure Appl. Math., John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [5] H. HIRONAKA – An example of a non-Kählerian complex-analytic deformation of Kählerian complex structures, *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), p. 190–208.
- [6] K. KODAIRA – On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties), *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 28–48.
- [7] ———, On compact analytic surfaces, in *Analytic functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960, p. 121–135.
- [8] ———, On compact complex analytic surfaces, I, *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), p. 111–152.
- [9] K. OGUIO – Bimeromorphic automorphism groups of non-projective hyperkähler manifolds – A note inspired by C.T. McMullen, [math.AG/0312515](https://arxiv.org/abs/math/0312515).
- [10] J. VAROUCHAS – Stabilité de la classe des variétés kählériennes par certains morphismes propres, *Invent. Math.* **77** (1984), no. 1, p. 117–127.
- [11] C. VOISIN – Hodge theory and the topology of compact Kähler and complex projective manifolds, Lecture Notes for the Seattle AMS Summer Institute.
- [12] ———, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 2002.
- [13] ———, On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds, *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, p. 329–343.
- [14] ———, On the homotopy types of Kähler manifolds and the birational Kodaira problem, *J. Differential Geom.* **72** (2006), no. 1, p. 43–71.

Daniel HUYBRECHTS

Universität Bonn

Mathematisches Institut

Beringstraße 1

D-53115 Bonn, Germany

*E-mail* : [huybrech@math.uni-bonn.de](mailto:huybrech@math.uni-bonn.de)



**GENRES DE TODD ET VALEURS AUX ENTIERS  
DES DÉRIVÉES DE FONCTIONS  $L$**

par **Christophe SOULÉ**

Le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un fibré holomorphe  $E$  sur une variété complexe  $X$  projective et lisse :

$$(1) \quad \chi(E) = \int_X \text{ch}(E) \text{Td}(TX).$$

Dans cette identité le genre de Todd  $\text{Td}(\cdot)$  est la classe caractéristique multiplicative associée à la série formelle

$$\text{Td}(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \dots,$$

que l'on peut aussi écrire

$$\text{Td}(x) = 1 - \sum_{m \geq 0} \zeta(-m) \frac{x^{m+1}}{m!},$$

où  $\zeta(s)$  est la fonction zêta de Riemann. Ce lien entre le genre de Todd et les valeurs aux entiers de la fonction zêta peut paraître fortuit. Mais l'analogie de l'égalité (1) en géométrie d'Arakelov fait intervenir, en plus du genre de Todd classique, la classe caractéristique additive associée à la série

$$R(x) = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \text{ impair}}} \left( 2\zeta'(-m) + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) \zeta(-m) \right) \frac{x^m}{m!},$$

où  $\zeta'(s)$  est la *dérivée* de la fonction zêta. Et si les nombres rationnels  $\zeta(-m)$  (autrement dit les nombres de Bernoulli) apparaissent dans de nombreux calculs, il est par contre très rare de rencontrer les nombres réels  $\zeta'(-m)$  avec  $m$  impair. Le but de cet exposé est de montrer comment, plus généralement, les avatars du genre de Todd en géométrie d'Arakelov permettent d'obtenir des formules, nouvelles ou déjà connues, impliquant les valeurs aux entiers des dérivées des fonctions  $L$  de la théorie des nombres. Si  $X$  est un schéma régulier, projectif sur un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, muni d'une action du schéma en groupes  $G$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité,  $n \geq 1$ , Köhler et Roessler ont démontré un analogue équivariant du théorème de Riemann-Roch en géométrie d'Arakelov. Ce «théorème

de Lefschetz arithmétique» [23] comporte aussi une correction au genre de Todd équivariant habituel. Ses coefficients sont donnés par les valeurs aux entiers négatifs de la dérivée en  $s$  de la fonction zêta de Lerch définie, si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , par la formule

$$\zeta(z, s) = \sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{m^s}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1.$$

Si  $\chi$  est un caractère de Dirichlet modulo  $n$ , cette fonction est liée à la fonction  $L$  de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{m \geq 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

par une transformée de Fourier sur le groupe  $(\mathbb{Z}/n)^*$ . Par ailleurs, une formule célèbre de Chowla et Selberg (étendue par Gross [19], Anderson [1] et Colmez [12] aux variétés abéliennes de type CM) calcule les périodes d'une courbe elliptique à multiplication complexe à l'aide des dérivées à l'origine des fonctions  $L$  de Dirichlet [11].

Köhler et Roessler ont montré que leur théorème de Lefschetz arithmétique fournit une nouvelle preuve des formules de Chowla-Selberg, Gross, Anderson et Colmez (sans retrouver cependant le calcul complet aux «mauvaises places»). Maillot et Roessler [30] ont abordé le cas d'une variété quelconque sur un corps de nombres, munie d'une action de  $G$ . Outre les résultats précédents, ils obtiennent un calcul des périodes du groupe  $H^2(X)$  quand  $X$  est une surface, et  $H^d(X)$  quand  $X$  est une hypersurface de dimension  $d$ . Leur résultat est la première confirmation, en dehors des variétés abéliennes, d'une conjecture de Gross et Deligne sur les motifs à multiplication complexe [19].

Après avoir introduit la géométrie d'Arakelov (§1) et énoncé les théorèmes de Riemann-Roch (§2, Th. 2.1) et de Lefschetz arithmétiques (§3, Th. 3.1), nous montrons, en suivant [29], que cette formule se simplifie énormément quand on l'applique au complexe de De Rham d'une variété projective et lisse sur un corps de nombres  $X$ , munie d'une action de  $G$ . Le résultat principal (§4, Th. 4.4) est une réécriture de la transformée de Fourier de l'identité initiale. Il affirme qu'une certaine combinaison de logarithmes de périodes de  $X$  est un multiple entier explicite de  $\frac{L'(\chi, 0)}{L(\chi, 0)}$ , où  $\chi$  est un caractère de Dirichlet impair et primitif modulo  $n$ . La section 5 détaille ce calcul, et on discute dans la section 6 le cas d'une variété abélienne. On fait alors le lien avec la conjecture de Gross et Deligne et avec la formule de Chowla-Selberg. Il faut toutefois signaler que les égalités ainsi obtenues ne sont pas aussi précises qu'on le souhaiterait. Elles souffrent en effet d'une ambiguïté, due au fait que le complexe de De Rham ne s'étend pas en général, de façon équivariante, à un modèle entier de  $X$ . L'appendice donne par contre un exemple d'une courbe elliptique de type CM pour laquelle la méthode fournit un résultat sans cette ambiguïté.

Pour terminer, nous évoquerons brièvement d'autres travaux reliant la géométrie d'Arakelov aux valeurs des dérivées de fonctions  $L$ , y compris celles associées aux formes modulaires [30] [25] [26]. C'est un domaine en plein essor.

Je tiens à remercier Maillot et Roessler pour m'avoir beaucoup aidé à préparer cet exposé. L'exemple traité en appendice leur est dû. Je remercie aussi Burgos et Kudla pour leurs commentaires sur ce manuscrit.

*Notation* : si  $M$  est un groupe abélien et si  $K$  est un corps, on notera  $M_K$  le  $K$ -espace vectoriel  $M \otimes_{\mathbb{Z}} K$ .

## 1. GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV

Dans cette section et la suivante nous décrivons les principales notions de la géométrie d'Arakelov. Pour des exposés de synthèse plus détaillés, voir [36] [35] [4] et l'exposé [8] de ce séminaire.

**1.1.** Appelons *variété arithmétique* la donnée d'un schéma  $X$  régulier et projectif sur  $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ . La conjugaison des coordonnées munit l'ensemble  $X(\mathbb{C})$  des points complexes de  $X$  d'une involution  $F_{\infty} : X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ . Pour un entier  $p \geq 0$  on note  $Z^p(X)$  le groupe des cycles algébriques de codimension  $p$  sur  $X$ , i.e. les combinaisons formelles finies  $\sum_{\alpha} n_{\alpha} Z_{\alpha}$ ,  $n_{\alpha} \in \mathbb{Z}$ , où les  $Z_{\alpha} \subset X$  sont des fermés de codimension  $p$  dans  $X$ . On note aussi  $D^{pp}(X_{\mathbb{R}})$  (resp.  $A^{pp}(X_{\mathbb{R}})$ ) l'espace vectoriel réel des courants réels (resp. des formes différentielles réelles) de type  $(p, p)$  sur  $X(\mathbb{C})$  sur lequel(le)s  $F_{\infty}^*$  agit par multiplication par  $(-1)^p$ . Un *courant de Green* pour le cycle  $Z \in Z^p(X)$  est un élément  $g$  de  $D^{p-1, p-1}(X_{\mathbb{R}})$  tel que

$$(2) \quad dd^c g + \delta_Z = \omega,$$

où  $\omega \in A^{pp}(X_{\mathbb{R}})$ ,  $\delta_Z \in D^{pp}(X_{\mathbb{R}})$  est le courant d'intégration sur les points complexes de  $Z$ , et  $dd^c = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial}$ . Le *groupe de Chow arithmétique*  $\widehat{\text{CH}}^p(X)$  est engendré par les couples  $(Z, g)$ , où  $Z \in Z^p(X)$  et  $g$  est un courant de Green de  $Z$ . On a  $(Z, g) + (Z', g') = (Z + Z', g + g')$  et on impose les relations

$$(\text{div}(f), -\log |f|^2 + \partial u + \bar{\partial} v) = 0$$

dans  $\widehat{\text{CH}}^p(X)$ , où  $u$  (resp.  $v$ ) est un courant de type  $(p-2, p-1)$  (resp.  $(p-1, p-2)$ ) et  $f \in k(Y)^*$  est n'importe quelle fonction rationnelle non nulle sur un sous-schéma fermé intègre  $Y \subset X$  de codimension  $p-1$ . Le cycle  $\text{div}(f)$  est le diviseur de  $f$  et  $-\log |f|^2$  est le courant obtenu en associant à toute forme différentielle sur  $X(\mathbb{C})$  l'intégrale sur  $Y(\mathbb{C})$  de son produit avec la fonction intégrable  $-\log |f|^2$ .

À tout morphisme algébrique  $f : X \rightarrow Y$  entre variétés arithmétiques sont associés des morphismes d'image inverse

$$f^* : \widehat{\text{CH}}^p(Y) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^p(X).$$

De plus, il existe un produit d'*intersection arithmétique*

$$\widehat{\text{CH}}^p(X) \otimes \widehat{\text{CH}}^q(X) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}.$$

Ce produit est compatible aux images inverses. On notera qu'au lieu de  $\widehat{\text{CH}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$  on peut aussi considérer, et c'est plus naturel, le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel défini de la même façon que  $\widehat{\text{CH}}^{p+q}(X)$  mais en prenant pour générateurs les couples  $(Z, g)$ , où  $Z \in Z^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$  et  $g \in D^{p+q-1, p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$  est un courant de Green de  $Z$ . De même pour les espaces vectoriels  $\widehat{\text{CH}}^p(X)_K$  utilisés plus loin.

**1.2.** Un *fibré hermitien* sur  $X$  est la donnée d'un couple  $\bar{E} = (E, h)$ , où  $E$  est un fibré algébrique sur  $X$  et  $h$  une métrique hermitienne  $C^\infty$  sur le fibré holomorphe  $E_{\mathbb{C}}$  sur  $X(\mathbb{C})$  associé à  $E$ , cette métrique étant invariante par  $F_\infty$ . On peut associer à tout fibré hermitien  $\bar{E}$  des classes caractéristiques telles que les classes de Chern  $\hat{c}_p(\bar{E}) \in \widehat{\text{CH}}^p(X)$ , le caractère de Chern

$$\widehat{\text{ch}}(\bar{E}) \in \widehat{\text{CH}}(X)_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{\text{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}}$$

et la classe de Todd

$$\widehat{\text{Td}}(\bar{E}) \in \widehat{\text{CH}}(X)_{\mathbb{Q}}.$$

Si par exemple  $\bar{L} = \det(\bar{E})$  est la puissance extérieure maximale de  $E$ , la première classe de Chern

$$\hat{c}_1(\bar{E}) = \hat{c}_1(\bar{L}) \in \widehat{\text{CH}}^1(X)$$

est la classe du couple  $(\text{div}(s), -\log \|s\|^2)$ , où  $s$  est n'importe quelle section rationnelle non nulle de  $s$  sur  $X$  et  $\|s\|$  la norme de cette section.

Ces classes caractéristiques vérifient les propriétés usuelles de functorialité, normalisation et comportement par produit tensoriel. Si  $E = E' \oplus E''$  est la somme directe de deux fibrés algébriques et si la métrique sur  $E_{\mathbb{C}}$  est la somme directe orthogonale des métriques sur  $E'_{\mathbb{C}}$  et  $E''_{\mathbb{C}}$  on a

$$\hat{c}_p(\bar{E}) = \sum_{i+j=p} \hat{c}_i(\bar{E}') \hat{c}_j(\bar{E}''),$$

$$\widehat{\text{ch}}(\bar{E}) = \widehat{\text{ch}}(\bar{E}') \widehat{\text{ch}}(\bar{E}''),$$

et

$$\widehat{\text{Td}}(\bar{E}) = \widehat{\text{Td}}(\bar{E}') \widehat{\text{Td}}(\bar{E}'').$$

Mais ces formules ne sont plus valables en général pour une suite exacte

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0,$$

et ce quel que soit le choix des métriques sur les trois fibrés.

## 2. THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUE

**2.1.** Soit  $X$  une variété arithmétique. On définit comme suit une application  $\mathbb{Q}$ -linéaire d'intégration sur  $X$

$$\int_X : \widehat{\text{CH}}(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'image de la classe  $\alpha$  d'un couple  $(Z, g)$  est nulle sauf si  $Z = \sum_x n_x x$  est un cycle de dimension zéro et  $g$  est un courant de degré maximum sur  $X(\mathbb{C})$ , auquel cas

$$\int_X \alpha = \sum_x n_x \log(\#k(x)) + \frac{1}{2} \int_{X(\mathbb{C})} g.$$

On a noté  $\#k(x)$  le cardinal du corps résiduel au point fermé  $x \in X$  (un corps fini), et défini l'intégrale de  $g$  comme étant celle d'une forme cohomologue à ce courant. Le morphisme

$$\int_S : \widehat{\text{CH}}^1(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

est un isomorphisme.

**2.2.** Soit  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini et  $h$  un produit scalaire hermitien sur  $M_{\mathbb{C}}$ , invariant par la conjugaison complexe. On pose

$$\widehat{\text{deg}}(\bar{M}) = \int_S \hat{c}_1(\det(\bar{M})).$$

Si  $M_{\text{tors}}$  est le sous-groupe de torsion de  $M$  et si  $M_{\mathbb{R}}$  est muni de la mesure euclidienne définie par  $h$ , on a

$$\widehat{\text{deg}}(\bar{M}) = \log(\#M_{\text{tors}}) - \log \text{vol} \left( \frac{M_{\mathbb{R}}}{M} \right).$$

**2.3.** Soit  $X$  une variété arithmétique et  $h_X$  une métrique hermitienne sur le fibré tangent  $TX(\mathbb{C})$ , invariante par  $F_{\infty}$ . Notons  $\omega_0 \in A^{1,1}(X_{\mathbb{R}})$  la forme telle que

$$\omega_0 = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} h_X \left( \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial z_{\beta}} \right) dz_{\alpha} d\bar{z}_{\beta}$$

pour tout choix d'une carte locale  $(z_{\alpha})$  sur  $X(\mathbb{C})$ . On suppose que  $h_X$  est Kähler, c'est-à-dire  $d\omega_0 = 0$ .

Si  $\bar{E}$  est un fibré hermitien sur  $X$ , les groupes de cohomologie  $H^q(X, E)$  sont de type fini. Pour tout entier  $q \geq 0$ , l'espace vectoriel complexe

$$H^q(X, E)_{\mathbb{C}} = H^q(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$$

est canoniquement isomorphe à celui des formes différentielles harmoniques de type  $(0, q)$  sur  $E_{\mathbb{C}}$ . On note  $A^{0,q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$  l'espace vectoriel de toutes les différentielles

$C^\infty$  de type  $(0, q)$  à coefficients dans  $E_{\mathbb{C}}$ . Il est muni du produit scalaire hermitien  $h_{L^2}$  défini par

$$h_{L^2}(\alpha, \beta) = \int_{X(\mathbb{C})} (\alpha, \beta) \frac{\omega_0^d}{d!},$$

où  $d = \dim_{\mathbb{C}} X(\mathbb{C})$  et  $(\alpha, \beta)$  désigne le produit scalaire ponctuel associé au choix des métriques sur  $X(\mathbb{C})$  et  $E_{\mathbb{C}}$ . La restriction de  $h_{L^2}$  aux formes harmoniques définit un produit scalaire hermitien sur  $H^q(X, E)_{\mathbb{C}}$ .

**2.4.** Soient

$$\bar{\partial} : A^{0,q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}}) \rightarrow A^{0,q+1}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$$

l'opérateur de Cauchy-Riemann et  $\bar{\partial}^*$  son adjoint pour la métrique  $L^2$ . L'opérateur de Laplace  $\Delta_q = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$  a un spectre discret formé de nombres réels positifs ou nuls. On note  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  ses valeurs propres strictement positives (répétées selon leur multiplicité) et

$$\zeta_q(s) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-s}$$

sa fonction zêta. Cette série converge si  $\operatorname{Re}(s) > d$ , elle admet un prolongement méromorphe au plan complexe, et n'a pas de pôle à l'origine; on peut donc prendre sa dérivée en zéro. On pose

$$T(\bar{E}_{\mathbb{C}}) = \sum_{q \geq 0} (-1)^{q+1} q \zeta'_q(0)$$

(cf. [31]).

**2.5.** Si  $E_{\mathbb{C}}$  est un fibré holomorphe sur  $X(\mathbb{C})$  invariant par  $F_\infty$ , on note  $\operatorname{ch}(E_{\mathbb{C}})$  et  $\operatorname{Td}(E_{\mathbb{C}})$  ses classes caractéristiques usuelles dans  $\bigoplus_{p \geq 0} H^{pp}(X_{\mathbb{R}})$ , où  $H^{pp}(X_{\mathbb{R}})$  est le sous-espace de la cohomologie réelle de  $X(\mathbb{C})$  de type  $(p, p)$  où  $F_\infty$  agit par  $(-1)^p$ . On définit aussi une classe

$$R(E_{\mathbb{C}}) \in \bigoplus_{p \geq 0} H^{pp}(X_{\mathbb{R}}),$$

compatible aux images inverses et additive :

$$R(E'_{\mathbb{C}} \oplus E''_{\mathbb{C}}) = R(E'_{\mathbb{C}}) + R(E''_{\mathbb{C}}).$$

Si  $L_{\mathbb{C}}$  est un fibré inversible et  $x = c_1(L_{\mathbb{C}}) \in H^{1,1}(X_{\mathbb{R}})$  sa première classe de Chern on a  $R(L_{\mathbb{C}}) = R(x)$ , où  $R(x)$  est la série formelle

$$R(x) = \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \geq 1}} \left( 2\zeta'(-m) + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) \zeta(-m) \right) \frac{x^m}{m!}.$$

**2.6.** Dans la situation de 2.2 on pose

$$\hat{\chi}(\bar{E}) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \widehat{\operatorname{deg}}(H^q(X, E), h_{L^2}).$$



Le théorème de Riemann-Roch arithmétique [18] [8] (dans sa version «à la Hirzebruch») est le suivant :

THÉORÈME 2.1 ([18], Th. 7). — *On a l'égalité entre nombres réels*

$$\hat{\chi}(\bar{E}) - \frac{1}{2} T(\bar{E}_{\mathbb{C}}) = \int_X \widehat{\text{ch}}(\bar{E}) \widehat{\text{Td}}(X) - \frac{1}{2} \int_{X(\mathbb{C})} \text{ch}(E_{\mathbb{C}}) \text{Td}(TX(\mathbb{C})) R(TX(\mathbb{C})).$$

*Remarques*

i) Si  $X$  est lisse sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\widehat{\text{Td}}(X)$  est la classe de Todd  $\widehat{\text{Td}}(TX, h_X)$ . En général on la définit à l'aide du complexe tangent à  $X$  (cf. op. cit.). Elle dépend de la métrique  $h_X$ .

ii) La preuve du théorème 2.1 repose pour une large part sur les travaux d'analyse globale de Bismut et de ses collaborateurs, dont l'article [5].

### 3. THÉORÈME DE LEFSCHETZ ARITHMÉTIQUE

**3.1.** Soient  $n > 1$  un entier et  $G = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1))$  le schéma en groupes des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Supposons donnée une action

$$\mu : G \times X \rightarrow X$$

de  $G$  sur une variété arithmétique  $X$ . On note  $Y = X^G$  le schéma des points fixes de  $G$ . C'est aussi une variété arithmétique. Soit  $\bar{E} = (E, h)$  un fibré hermitien sur  $X$  tel que l'action de  $G$  se prolonge à  $E$  et préserve la métrique  $h$ . L'action de  $G$  sur la restriction de  $E$  à  $Y$  équivaut à la donnée d'une graduation

$$E|_Y = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}/n} E_u$$

([16], Prop. 4.7.3). Si  $V$  est un ouvert de  $Y$ , l'action de  $G$  fournit en effet un morphisme de  $\mathcal{O}_Y(V)$ -modules :

$$\mu^* : E(V) \rightarrow E(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1).$$

Si  $s \in E(V)$  on pose

$$\mu^*(s) = \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} s_u \otimes T^u.$$

Le module  $E_u(V) \subset E(V)$ ,  $u \in \mathbb{Z}/n$ , est celui des composantes  $s_u$  quand  $s$  décrit  $E(V)$ .

Les composantes  $E_{u, \mathbb{C}}$  de la restriction de  $E_{\mathbb{C}}$  à  $Y(\mathbb{C})$  sont orthogonales pour la métrique  $h$ . On les munit de la métrique induite par  $h$ .

**3.2.** On fixe désormais une racine  $n$ -ième primitive de l'unité  $\gamma \in \mathbb{C}^*$  et l'on note  $g \in G(\mathbb{C})$  l'élément correspondant. Fixons une métrique de Kähler  $h_X$  sur  $TX(\mathbb{C})$ ,

invariante par  $G$  et  $F_\infty$ . Pour tout entier  $q \geq 0$ , le  $G$ -module  $H^q(X, E)$  définit une graduation

$$H^q(X, E) = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}/n} H^q(X, E)_u,$$

orthogonale pour la métrique  $L^2$ . On pose

$$\widehat{\deg}_g(H^q(X, E)) = \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} \widehat{\deg}(H^q(X, E)_u, h_{L^2}) \gamma^u$$

et

$$\hat{\chi}_g(\bar{E}) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \widehat{\deg}_g(H^q(X, E)).$$

On a aussi une décomposition orthogonale

$$A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}/n} A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})_u$$

et, si  $\zeta_{q,u}(s)$  est la fonction zêta de la restriction de  $\Delta_q$  à  $A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})_u$ , on pose

$$T_g(\bar{E}_{\mathbb{C}}) = \sum_{q \geq 0} (-1)^{q+1} q \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} \zeta'_{q,u}(0) \gamma^u.$$

Les nombres  $\hat{\chi}_g(\bar{E})$  et cette *torsion analytique équivariante*  $T_g(\bar{E}_{\mathbb{C}})$  sont des nombres complexes.

**3.3.** Soit  $K = \mathbb{Q}(\gamma) \subset \mathbb{C}$  le corps cyclotomique des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Le caractère de Chern équivariant de la restriction de  $\bar{E}$  à  $Y$  est

$$\widehat{\text{ch}}_g(\bar{E}) = \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} \widehat{\text{ch}}(\bar{E}_u) \gamma^u \in \widehat{\text{CH}}(Y)_K.$$

Désignons par  $\Lambda^k(\bar{E})$ ,  $k \geq 0$ , les puissances extérieures de  $\bar{E}$  et posons

$$\lambda_{-1}(\bar{E}) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \Lambda^k(\bar{E}).$$

C'est un fibré hermitien virtuel, c'est-à-dire un élément du groupe abélien associé au monoïde des fibrés hermitiens, muni de la somme directe orthogonale. On note

$$\text{ch}_g(\lambda_{-1}(\bar{E})) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \widehat{\text{ch}}_g(\Lambda^k(\bar{E})).$$

Soit  $\bar{N}^\vee$  le fibré conormal à  $Y$  dans  $X$ , muni de la métrique induite par  $h_X$ . On munit  $TY(\mathbb{C})$  de la métrique  $h_Y$  induite par  $h_X$  et l'on note  $\widehat{\text{Td}}(Y) \in \widehat{\text{CH}}(Y)_{\mathbb{Q}}$  la classe de Todd arithmétique de  $(Y, h_Y)$  (cf. 2.6, Remarque i)). On pose

$$\widehat{\text{Td}}_g(X) = \widehat{\text{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{N}^\vee))^{-1} \widehat{\text{Td}}(Y)$$

dans  $\widehat{\text{CH}}(Y)_K$ .

On définit de même des classes

$$\text{ch}_g(E_{\mathbb{C}}) = \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} \text{ch}(E_{u, \mathbb{C}}) \gamma^u$$

et

$$\text{Td}_g(TX(\mathbb{C})) = \text{ch}_g(\lambda_{-1}(\bar{N}_{\mathbb{C}}^{\vee}))^{-1} \text{Td}(TY(\mathbb{C}))$$

dans  $\bigoplus_{p \geq 0} H^{pp}(Y_{\mathbb{R}})_K$ .

**3.4.** Le genre  $R$  possède également un analogue équivariant. Pour tout nombre complexe  $z$  de module un, considérons la fonction zêta de Lerch

$$\zeta(z, s) = \sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{m^s}.$$

Cette série converge si  $\text{Re}(s) > 1$ , et admet un prolongement méromorphe au plan complexe. Si  $\zeta'(z, s)$  est sa dérivée par rapport à  $s$ , on introduit les séries formelles

$$\tilde{R}(z, x) = \sum_{m \geq 0} \left( 2\zeta'(z, -m) + \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \zeta(z, -m) \right) \frac{x^m}{m!}$$

et

$$R(z, x) = \frac{1}{2} (\tilde{R}(z, x) - \tilde{R}(\bar{z}, -x)).$$

On note  $R(z, \cdot)$  la classe caractéristique additive en cohomologie complexe telle que, si  $L_{\mathbb{C}}$  est un fibré holomorphe inversible on ait

$$R(z, L_{\mathbb{C}}) = R(z, c_1(L_{\mathbb{C}})).$$

La restriction de  $TX(\mathbb{C})$  à  $Y(\mathbb{C})$  admet une graduation

$$TX(\mathbb{C})|_{Y(\mathbb{C})} = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}/n} TX(\mathbb{C})_u,$$

et l'on pose

$$R_g(TX(\mathbb{C})) = \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} R(\gamma^u, TX(\mathbb{C})_u).$$

### 3.5.

THÉORÈME 3.1 ([23], Th. 7.14). — *Sous les hypothèses précédentes, on a l'égalité entre nombres complexes*

$$\hat{\chi}_g(\bar{E}) - \frac{1}{2} T_g(\bar{E}_{\mathbb{C}}) = \int_Y \hat{\text{ch}}_g(\bar{E}) \widehat{\text{Td}}_g(X) - \frac{1}{2} \int_{Y(\mathbb{C})} \text{ch}_g(E_{\mathbb{C}}) \text{Td}_g(TX(\mathbb{C})) R_g(TX(\mathbb{C})).$$

*Remarques*

i) La preuve du théorème 3.1 utilise à nouveau des résultats analytiques difficiles de Bismut et de ses collaborateurs [2] [6].

ii) Les constructions et les résultats précédents restent valables si, au lieu de  $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ , on prend pour base  $S$  des variétés arithmétiques un ouvert dans le spectre des entiers d'un corps de nombres. La seule différence est que les théorèmes 2.1 et 3.1 sont alors des égalités dans les groupes  $\widehat{\text{CH}}^1(S)_{\mathbb{Q}}$  et  $\widehat{\text{CH}}^1(S)_K$  respectivement.

Si par exemple  $F$  est un corps de nombres et que l'on fixe un plongement complexe  $F \subset \mathbb{C}$ , on pourra prendre  $S = \text{Spec}(F)$  et noter  $X(\mathbb{C})$  les points complexes pour le plongement choisi d'une variété  $X$  projective et lisse sur  $F$ . L'involution  $F_{\infty}$  agit trivialement sur  $X(\mathbb{C})$  et l'intégration  $\int_X$  associée à un couple  $(0, g)$  de dimension zéro l'intégrale de  $\frac{1}{2}g$  sur  $X(\mathbb{C})$ . Si  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$  est le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les éléments  $\log |\alpha|$ ,  $\alpha \in F^*$ , le théorème 2.1 est alors une égalité dans

$$\widehat{\text{CH}}^1(S)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}/\mathcal{S}$$

et le théorème 3.1 est une égalité dans

$$\widehat{\text{CH}}^1(S)_K = \mathbb{C}/\mathcal{C},$$

où  $\mathcal{C}$  est le  $K$ -espace vectoriel engendré dans  $\mathbb{C}$  par les éléments  $\log |\alpha|$ ,  $\alpha \in F^*$ .

#### 4. PÉRIODES DES VARIÉTÉS À MULTIPLICATION COMPLEXE

**4.1.** Soient  $n \geq 1$  un entier, et  $F \subset \mathbb{C}$  un corps de nombres plongé dans les complexes. On suppose que  $F$  contient le corps cyclotomique  $K = \mathbb{Q}(\mu_n)$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Posons  $G = \text{Spec}(F[T]/(T^n - 1))$ , choisissons une racine de l'unité  $n$ -ième primitive  $\gamma \in \mathbb{C}^*$  et notons  $g \in G(K)$  l'élément correspondant. Choisissons une métrique de Kähler  $G$ -invariante sur  $X$ ; soit  $\bar{\Omega}$  le fibré hermitien des différentielles sur  $X$ . Maillot et Roessler ont eu l'idée d'appliquer le théorème de Lefschetz arithmétique (Théorème 3.1, Remarque ii) au fibré hermitien virtuel  $\lambda_{-1}(\bar{\Omega})$ . À cause de la proposition suivante, son énoncé se simplifie considérablement :

PROPOSITION 4.1. — *On a*

- i)  $T_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}_{\mathbb{C}})) = 0$
- ii)  $\text{ch}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}_{\mathbb{C}})) \text{Td}_g(TX(\mathbb{C})) = c^{\text{top}}(TY(\mathbb{C}))$
- iii)  $\int_Y \widehat{\text{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega})) \widehat{\text{Td}}_g(X) = 0$ .

La classe  $c^{\text{top}}(TY(\mathbb{C}))$  est celle dont la restriction à toute composante de  $Y(\mathbb{C})$  de dimension  $d$  est égale à  $c_d(TY(\mathbb{C}))$ . On déduit de la proposition 4.1 et du théorème 3.1 l'égalité

$$(3) \quad \hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega})) = -\frac{1}{2} \int_{Y(\mathbb{C})} R_g(TX(\mathbb{C})) c^{\text{top}}(TY(\mathbb{C}))$$

dans  $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ . Seule la composante  $R_g^{(0)}$  de degré zéro de  $R_g$  intervient dans l'intégrale. Cette formule montre que  $\hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}))$  ne dépend pas du choix de la métrique  $h_X$ .

**4.2.** Le groupe de Galois  $G_K = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  est canoniquement isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n)^*$  par l'application qui à  $\sigma \in G_K$  associe l'élément  $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$  tel que

$$\sigma(\gamma) = \gamma^u.$$

Si à  $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$  on associe un des côtés de l'identité (3) où l'on a remplacé  $g$  par  $g^u$ , on obtient une fonction de  $(\mathbb{Z}/n)^*$  à valeurs dans  $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ . Nous allons calculer les transformées de Fourier sur  $(\mathbb{Z}/n)^*$  de ces deux fonctions.

Soit

$$\chi : (\mathbb{Z}/n)^* \rightarrow S^1$$

un caractère de  $G_K$ , que nous supposons primitif et impair. On prolonge  $\chi$  par zéro à l'ensemble  $\mathbb{Z}/n$  et l'on note aussi  $\chi(m)$  l'image par  $\chi$  de la classe modulo  $n$  de l'entier  $m$ . Soit

$$\tau(\chi) = \sum_{\sigma \in G_K} \sigma(\gamma) \chi(\sigma)$$

la somme de Gauss associée à  $\chi$  et  $\gamma$ .

Pour tout  $u \in \mathbb{Z}/n$ , on définit comme suit des périodes

$$P_u(H^k(X)) \in \mathbb{C}^*/F^*.$$

Si  $k \geq 0$  est un entier considérons la cohomologie de De Rham  $H_{dR}^k(X)$ . C'est un  $F$ -espace vectoriel, muni d'une action de  $G$  et donc d'une graduation

$$H_{dR}^k(X) = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}/n} H_{dR}^k(X)_u.$$

Le complexifié

$$H_{dR}^k(X)_u \otimes_F \mathbb{C} = H_B^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})_u$$

admet une autre  $F$ -structure, à savoir la cohomologie de Betti (= cohomologie singulière) à coefficients dans  $F$ , notée  $H_B^k(X(\mathbb{C}), F)_u$ . Si  $v_{dR}$  est un générateur de la droite  $\det_F H_{dR}^k(X)_u$  sur  $F$  et si  $v_B$  est un générateur de la droite  $\det_F H_B^k(X(\mathbb{C}), F)_u$ , l'élément  $P_u(H^k(X)) \in \mathbb{C}^*/F^*$  est la classe du nombre complexe  $\lambda$  tel que

$$(4) \quad v_{dR} = \lambda v_B$$

dans  $\det_{\mathbb{C}} H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})_u$ . C'est une période au sens de [14], auquel on se référera pour la comparaison des cohomologies.

PROPOSITION 4.2. — *Dans  $\mathbb{C}/\mathcal{C}$  on a l'égalité*

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \sum_{p \geq 0, q \geq 0} (-1)^{p+q} \widehat{\text{deg}}_{\sigma(g)} H^q(X, \Lambda^p \Omega) \\ = -\tau(\chi) \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \overline{\chi(u)} \log |P_u(H^k(X))|. \end{aligned}$$

**4.3.** Soit  $L(\chi, s)$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , la fonction  $L$  de Dirichlet de  $\chi$ . Si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , elle est donnée par la série absolument convergente

$$L(\chi, s) = \sum_{m \geq 0} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Posons  $H^{pq}(X(\mathbb{C})) = H^q(X(\mathbb{C}), \Lambda^p \Omega_{\mathbb{C}})$ .

PROPOSITION 4.3. — *Dans  $\mathbb{C}/\mathbb{C}$  on a l'égalité*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \int_{Y(\mathbb{C})} R_{\sigma(g)}(TX(\mathbb{C})) c^{\operatorname{top}}(TY(\mathbb{C})) \\ &= \tau(\chi) \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{L'(\bar{\chi}, 0)}{L(\bar{\chi}, 0)} \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \sum_{p+q=k} p \dim_{\mathbb{C}} H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u \bar{\chi}(u). \end{aligned}$$

On déduit de l'égalité (3) pour  $\sigma(g)$ ,  $\sigma \in G_K$ , et des propositions 4.1, 4.2 et 4.3 (où l'on remplace  $\chi$  par son conjugué), le théorème suivant :

THÉORÈME 4.4 ([29] Th. 1). — *Dans  $\mathbb{C}/\mathbb{C}$  on a l'égalité*

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \chi(u) \log |P_u(H^k(X))| \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{L'(\chi, 0)}{L(\chi, 0)} \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \sum_{p+q=k} p \dim_{\mathbb{C}}(H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u) \chi(u). \end{aligned}$$

## 5. PREUVE DES PROPOSITIONS 4.1, 4.2 ET 4.3

**5.1.** Pour montrer la proposition 4.1, ii) et iii), on note d'abord que, si  $\bar{E}' \oplus \bar{E}''$  est la somme directe orthogonale de deux fibrés hermitiens  $G$ -invariants sur  $X$ , on a

$$(5) \quad \widehat{\operatorname{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{E}' \oplus \bar{E}'')) = \widehat{\operatorname{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{E}')) \widehat{\operatorname{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{E}'')).$$

Or le fibré  $\bar{\Omega}$  est la somme directe orthogonale de  $\overline{TY}$  et du fibré conormal  $\bar{N}^{\vee}$ . Par conséquent

$$(6) \quad \widehat{\operatorname{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega})) = \widehat{\operatorname{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{N}^{\vee})) \widehat{\operatorname{ch}}_g(\lambda_{-1}(\overline{TY})).$$

Pour tout fibré hermitien  $\bar{E}$  sur  $Y$  on a la formule

$$(7) \quad \widehat{\operatorname{ch}}(\lambda_{-1}(\bar{E})) = \frac{\widehat{c}^{\operatorname{top}}(\bar{E}^{\vee})}{\widehat{\operatorname{Td}}(\bar{E}^{\vee})}.$$

En effet la formule (5) et le principe de scindage (dans sa version arithmétique) ramènent la preuve de cette identité au cas où  $\bar{E}$  est de rang un, qui suit de la formule évidente

$$1 - e^x = \frac{-x}{\operatorname{Td}(-x)}.$$

Il suit du paragraphe 3.3, de (6) et de (7) que

$$(8) \quad \widehat{\text{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega})) \widehat{\text{Td}}_g(X) = \hat{c}^{\text{top}}(\overline{TY}).$$

Sur une composante  $Y_0$  de  $Y$  de dimension  $d$ , la classe  $\hat{c}^{\text{top}}(\overline{TY})$  est dans  $\widehat{\text{CH}}^d(Y_0)_{\mathbb{Q}}$ . L'énoncé iii) de la proposition 4.1 suit donc du fait que l'intégration  $\int_{Y_0}$  est nulle en les degrés autres que  $d + 1$  (cf. 2.1 et 3.5, Remarque ii)). La proposition 4.1, ii) suit de (8).

**5.2.** La proposition 4.1 i) est due à Ray et Singer si  $n = 1$  [31]. Posons

$$A^{p,q} = A^{0,q}(X(\mathbb{C}), \Lambda^p \Omega_{\mathbb{C}}).$$

La décomposition de Hodge

$$A^{p,q} = \mathcal{H}^{p,q} \oplus \partial(A^{p-1,q}) \oplus \partial^*(A^{p+1,q}),$$

où  $\mathcal{H}^{p,q}$  désigne les formes harmoniques, implique que le cobord  $\partial : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q}$  induit des isomorphismes

$$\partial^*(A^{p+1,q}) \rightarrow \partial(A^{p,q}),$$

qui commutent à l'action de  $G$  et à celle du laplacien. Les valeurs propres de celui-ci sur ces deux espaces interviennent avec des signes opposés dans la définition de  $T_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}_{\mathbb{C}}))$ , d'où l'énoncé.

**5.3.** Pour démontrer la proposition 4.2, on utilise d'abord l'identité

$$(9) \quad \sum_{\sigma \in G_K} \sigma(\gamma^u) \chi(\sigma) = \tau(\chi) \overline{\chi(u)}$$

(valable pour tout  $u \in \mathbb{Z}/n$ ), pour en déduire

$$(10) \quad \begin{aligned} & \sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \widehat{\text{deg}}_{\sigma(g)} H^q(X, \Lambda^p \Omega) \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \widehat{\text{deg}}(H_{dR}^k(X)_u) \left( \sum_{\sigma \in G_K} \sigma(\gamma^u) \chi(\sigma) \right) \\ &= \tau(\chi) \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \widehat{\text{deg}}(H_{dR}^k(X)_u) \overline{\chi(u)}. \end{aligned}$$

On compare ensuite  $\widehat{\text{deg}}(H_{dR}^k(X)_u)$  et  $\log |P_u(H^k(X))|$ , pour un choix convenable de  $h_X$  (rappelons que, d'après (3), la somme (10) ne dépend pas de  $h_X$ ). Soit  $[H] \in H_B^2(X(\mathbb{C}), K(1))$  la classe d'une section hyperplane de  $X(\mathbb{C})$  (où  $K(1)$  est le twist à la Tate). On supposera que  $[H]$  est invariante par  $G$  et que  $(2\pi i)^{-1}[H]$  est la classe  $[\omega_0]$  de la forme  $\omega_0$  (cf. 2.3) dans  $H_B^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Le cup-produit par  $[H]$  vérifiant le théorème de Lefschetz vache, on peut définir un opérateur  $*$  :  $H_B^k(X(\mathbb{C}), K) \rightarrow H_B^{2d-k}(X(\mathbb{C}), K(d))$  par les formules habituelles, avec  $d = \dim_F(X)$  (cf. par exemple [21]). Le cup-produit par  $(2\pi i)\omega_0$  sur les formes différentielles  $C^\infty$  complexes sur  $X(\mathbb{C})$  vérifie aussi le théorème de Lefschetz vache,

et l'opérateur  $*$  associé à ce cup-produit vérifie (aux signes près) les mêmes formules que son analogue algébrique [37]. Si  $\text{tr}_B : H_B^{2d}(X(\mathbb{C}), K(d)) \rightarrow K$  est le morphisme trace en cohomologie de Betti [14], et si  $a, b$  sont les classes dans  $H_B^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  de deux formes différentielles  $\alpha$  et  $\beta$ , on a donc

$$\text{tr}_B(a \cup *b) = \int_{X(\mathbb{C})} \alpha \wedge *b = \pm h_{L^2}(\alpha, \beta)(2\pi)^d.$$

Si  $v_{dR}$  et  $v_B$  sont des générateurs de  $\det H_{dR}^k(X)_u$  et  $\det H_B^k(X)_u$  respectivement on a donc, d'après (4),

$$\widehat{\text{deg}}(H_{dR}^k(X), h_{L^2}) = -\log \|v_{dR}\|_{L^2} = -\log \|v_B\|_B - \log |\lambda| - \frac{db_u}{2} \log(2\pi)$$

où  $\|\cdot\|_B$  est la norme sur  $\det H_B^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  définie par  $\text{tr}_B(a \cup *b)$  (métrique de Hodge) et  $b_u = \dim_F H_{dR}^k(X)_u$ . Comme  $\|v_B\|_B$  est dans  $F^*$  et  $|\lambda| = |P_u(H^k(X))|$ , on trouve que

$$(11) \quad \widehat{\text{deg}}(H_{dR}^k(X), h_{L^2}) = -\log |P_u(H^k(X))| - \frac{db_u}{2} \log(2\pi)$$

dans  $\mathbb{R}/\log |F^*|$ . Le nombre  $b_u$  ne dépend pas de  $u$ , comme on le voit en faisant agir  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$  sur les coefficients de  $H_B^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . La transformée de Fourier de la fonction constante  $\frac{db_u}{2} \log(2\pi)$  est donc nulle en  $\chi$  et la proposition 4.2 résulte de (10) et de (11).

**5.4.** Pour montrer la proposition 4.3 on remarque d'abord que, par définition (cf. 3.4),

$$(12) \quad R_g^{(0)}(TX(\mathbb{C})) = \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} r_u(\zeta'(\gamma^u, 0) - \zeta'(\gamma^{-u}, 0)),$$

où  $r_u$  est le rang du fibré  $TX(\mathbb{C})_u$ .

Comme  $\chi$  est impair, on déduit de (6) que, si  $\text{Re}(s) > 1$ ,

$$(13) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in G_K} (\zeta(\sigma(\gamma), s) - \zeta(\sigma(\gamma), s)) \chi(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in G_K} \zeta(\sigma(\gamma), s) \chi(\sigma) \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{\sigma \in G_K} \frac{\sigma(\gamma)^m}{m^s} \chi(\sigma) \\ &= \tau(\chi) \sum_{m \geq 1} \frac{\bar{\chi}^{(m)}}{m^s} \\ &= \tau(\chi) L(\bar{\chi}, s). \end{aligned}$$

Les égalités (12) et (13) impliquent

$$(14) \quad \sum_{\sigma \in G_F} \chi(\sigma) R_{\sigma(g)}^{(0)}(TX(\mathbb{C})) = 2 \tau(\chi) L'(\bar{\chi}, 0) \left( \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} \bar{\chi}(u) r_u \right).$$



LEMME — Dans  $\mathbb{C}/\mathbb{C}$  on a l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{Y(\mathbb{C})} \left( \frac{r_0}{2} + \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}/n \\ u \neq 0}} \frac{\gamma^u}{1 - \gamma^u} r_u \right) e^{\text{top}(TY(\mathbb{C}))} \\ &= \int_{Y(\mathbb{C})} \left( \sum_{p \geq 0} (-1)^p p \text{ch}_g(\Lambda^p \Omega_{\mathbb{C}}) \right) \text{Td}_g(TX(\mathbb{C})). \end{aligned}$$

PREUVE DU LEMME — Pour tout fibré  $G$ -invariant  $E_{\mathbb{C}}$  sur  $Y(\mathbb{C})$ , considérons le polynôme

$$\phi(E_{\mathbb{C}}, t) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \text{ch}_g(\Lambda^p E_{\mathbb{C}}) t^p.$$

On a

$$(15) \quad \phi(E'_{\mathbb{C}} \oplus E''_{\mathbb{C}}, t) = \phi(E'_{\mathbb{C}}, t) \phi(E''_{\mathbb{C}}, t).$$

Si  $E_{\mathbb{C}} = \bigoplus_j L_j$  est une somme directe de fibrés inversibles telle que  $g$  agit sur  $L_j$  par multiplication par  $\gamma_j \in \mathbb{C}^*$ , on a donc, en notant  $\phi'(E_{\mathbb{C}}, t)$  la dérivée de  $\phi(E_{\mathbb{C}}, t)$  par rapport à  $t$ ,

$$(16) \quad \sum_{p \geq 0} (-1)^p p \text{ch}_g(\Lambda^p E_{\mathbb{C}}) = \phi'(E_{\mathbb{C}}, 1) = \phi(E_{\mathbb{C}}, 1) \left( \sum_j \frac{\phi'(L_j, 1)}{\phi(L_j, 1)} \right).$$

Si  $g$  agit sur un fibré inversible  $L$  par multiplication par  $\gamma$  on calcule, en posant  $x = c_1(L)$ ,

$$\phi(L, t) = 1 - \gamma e^x t.$$

Par conséquent le terme de degré 0 de  $\frac{\phi'(L, 1)}{\phi(L, 1)}$  est  $-\frac{\gamma}{1-\gamma}$  si  $\gamma \neq 1$ , et  $-\frac{1}{2}$  si  $\gamma = 1$ . On déduit donc de (16) que

$$\sum_p (-1)^p p \text{ch}_g(\Lambda^p \Omega_{\mathbb{C}}) = -\phi(\Omega_{\mathbb{C}}, 1) \left( \frac{r_0}{2} + \sum_{u \neq 0} \frac{\gamma^u}{1 - \gamma^u} r_u \right).$$

D'après la proposition 4.1, ii), on sait que

$$\phi(\Omega_{\mathbb{C}}, 1) = \text{Td}_g(TX(\mathbb{C}))^{-1} e^{\text{top}(TY(\mathbb{C}))},$$

d'où le résultat.

FIN DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION 4.3 — Si  $z \neq 1$  on a  $\zeta(z, 0) = \frac{z}{1-z}$ . On déduit donc de (13) que

$$(17) \quad \sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \frac{\sigma(\gamma)}{1 - \sigma(\gamma)} = \sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \zeta(\sigma(\gamma), 0) = \tau(\chi) L(\bar{\chi}, 0).$$

D'après un théorème de Dirichlet et l'équation fonctionnelle, ce nombre est non nul puisque  $\chi$  est primitif et non trivial. Par ailleurs, la formule de Lefschetz pour les fibrés holomorphes implique

$$\begin{aligned} & \int_{Y(\mathbb{C})} \left( \sum_{p \geq 0} (-1)^p p \operatorname{ch}_g(\Lambda^p \Omega_{\mathbb{C}}) \right) \operatorname{Td}_g(TX(\mathbb{C})) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} \sum_{p, q} (-1)^{p+q} p \dim_{\mathbb{C}} H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u \gamma^u. \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de cette identité et de celle du lemme montre donc, compte tenu de (17), de (13) et du fait que  $\chi$  est nul en dehors de  $(\mathbb{Z}/n)^*$ ,

$$\begin{aligned} (18) \quad & \int_{Y(\mathbb{C})} \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \bar{\chi}(u) r_u c^{\operatorname{top}}(TY(\mathbb{C})) \\ &= \frac{1}{L(\bar{\chi}, 0)} \sum_{u, p, q} (-1)^{p+q} p \dim_{\mathbb{C}}(H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u) \bar{\chi}(u). \end{aligned}$$

La proposition 4.3 suit de (14) et de (18).

## 6. GÉNÉRALISATIONS DE LA FORMULE DE CHOWLA-SELBERG

**6.1.** Le théorème 4.4 montre que deux sommes alternées sur  $k \geq 0$  sont égales. Maillot et Roessler conjecturent que cette identité est vraie terme à terme ([29], Conjecture A). Ils le démontrent dans certains cas :

**THÉORÈME 6.1** ([29], Th. 1, Th. 2, Cor. 4.2 et Cor. 4.3). — *Si  $k = 1$ , si  $k = 2$  et  $\dim(X) = 2$ , ou si  $X$  est une hypersurface de dimension  $k \geq 1$ , l'égalité suivante est vraie dans  $\mathbb{C}/\mathcal{C}$  :*

$$\begin{aligned} & \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \chi(u) \log |P_u(H^k(X))| \\ &= \frac{L'(\chi, 0)}{L(\chi, 0)} \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \sum_{p+q=k} (-1)^k p \dim_{\mathbb{C}}(H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u) \chi(u). \end{aligned}$$

**6.2.** L'égalité du théorème 6.1 étant compatible à la dualité de Poincaré, et triviale pour  $k = 0$ , il suffit de la montrer pour  $k = 1$ . On pourra alors supposer que  $X$  est une variété abélienne  $A$  sur  $F$  sur laquelle  $G$  agit par multiplication complexe (remplacer  $X$  par sa jacobienne). On sait alors que le cup-produit

$$\Lambda^k H_{dR}^1(A) \rightarrow H_{dR}^k(A)$$

est un isomorphisme. Si l'on choisit sur  $A(\mathbb{C})$  la métrique de Kähler invariante par translation et de volume un, ces isomorphismes sont compatibles à la métrique  $L^2$ .

Sachant que, si  $\bar{M}$  et  $\bar{N}$  sont des  $F$ -espaces vectoriels hermitiens, et si  $r$  est le rang de  $M$ ,

$$\widehat{\deg}_g(\Lambda^k \bar{M}) = \frac{(r-1)!}{(r-k)!(k-1)!} \widehat{\deg}_g(\bar{M}),$$

$$\widehat{\deg}_g(\bar{M} \oplus \bar{N}) = \widehat{\deg}_g(\bar{M}) + \widehat{\deg}_g(\bar{N})$$

et

$$\widehat{\deg}_g(\bar{M}^\vee) = -\widehat{\deg}_{-g}(\bar{M}),$$

on peut calculer le terme gauche de l'égalité (3) quand  $X = A$ . On trouve ([29] Lemma 2.10 et p. 749)

$$(19) \quad \hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega})) = -N \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} \left( \frac{\gamma^u}{1-\gamma^u} \right) \widehat{\deg}(H_{dR}^1(A)_u),$$

où

$$N = \prod_{u \in \mathbb{Z}/n} (1 - \gamma^u)^{b_u}.$$

Les points fixes de l'action de  $G$  sur  $A(\mathbb{C})$  sont en nombre fini, égal à  $N$  par le théorème de Lefschetz pour les fibrés holomorphes. Compte tenu de (12) on a donc

$$(20) \quad \int_{Y(\mathbb{C})} R_g(TX(\mathbb{C})) c^{\text{top}}(TY(\mathbb{C})) = N \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} r_u(\zeta'(\gamma^u, 0) - \zeta'(\gamma^{-u}, 0)).$$

Après transformation de Fourier sur  $(\mathbb{Z}/n)^*$ , il résulte de (3), (14), (19) et (20) que, si  $\chi$  est un caractère primitif impair de  $(\mathbb{Z}/n)^*$ ,

$$-L(\bar{\chi}, 0) \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \bar{\chi}(u) \widehat{\deg}(H_{dR}^1(A)_u) = 2L'(\bar{\chi}, 0) \left( \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \bar{\chi}(u) r_u \right).$$

Comme  $r_u = \dim_{\mathbb{C}} H^{10}(X(\mathbb{C}))_u$ , le théorème 6.1 résulte alors de (11).

**6.3.** Supposons que  $n = p$  est un nombre premier. Soit  $\Gamma(s)$  la fonction Gamma. Si  $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$  et si  $k \geq 0$ , on note  $(p(u), q(u))$  le type de Hodge de la droite  $\det(H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})_u)$ . On peut trouver des nombres rationnels  $\varepsilon(a)$ ,  $a \in (\mathbb{Z}/n)^*$ , tels que

$$p(u) = \sum_{a \in \mathbb{Z}/p} \varepsilon(a) \left[ \frac{au}{p} \right],$$

où  $[\cdot]$  désigne la partie entière ([13, 35], Lemme 6.12).

**COROLLAIRE** ([29]) — Si  $k = 1$ , si  $k = 2 = \dim(X)$ , ou si  $X$  est une hypersurface de dimension  $k$ , pour tout  $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$  on a l'égalité dans  $\mathbb{R}/(\mathbb{R} \cap \mathcal{C})$  :

$$\log |P_u(H^k(X))| = \log \left| \prod_{a \in \mathbb{Z}/p} \Gamma \left( 1 - \frac{a}{p} \right)^{\varepsilon(a/u)} \right|.$$

*Remarques*

i) Pour démontrer ce corollaire, Maillot et Roessler utilisent le théorème 6.1, une formule classique ([12], III.1.2.2) exprimant la dérivée logarithmique de  $L(\chi, s)$  en  $s = 0$  en termes de valeurs de  $\Gamma(s)$  et la relation

$$P_u(H^k(X)) \cdot P_{-u}(H^k(X)) = (2\pi i)^k$$

dans  $\mathbb{C}^*/F^*$ , qui provient de la dualité de Poincaré et du théorème de Lefschetz vache.

ii) Une conjecture de Gross et Deligne ([19], p. 205) affirme que, pour tout entier  $k \geq 0$ , et tout  $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$ , la période  $P_u(H^k(X))$  est le produit de  $\prod_{a \in \mathbb{Z}/p} \Gamma(1 - \frac{a}{p})^{\varepsilon(a/u)}$  par un élément de  $\bar{\mathbb{Q}}^*$ . En dehors du cas des variétés abéliennes de type CM (i.e.  $k = 1$ ), rien n'était connu avant ce corollaire.

iii) Quand  $k = 1$ , cette conjecture de Gross et Deligne est une généralisation démontrée par Gross [19] et Anderson [1] de la formule de Chowla-Selberg [11] concernant les périodes des courbes elliptiques de type CM. Colmez a rendu plus précis ce résultat en calculant la hauteur de Faltings des variétés abéliennes de type CM [12]. Dans [24], Th. 1.3, Köhler et Roessler utilisent leur théorème de Lefschetz arithmétique sur la base  $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_F[1/n])$  pour retrouver la formule de Colmez, à l'addition près d'un élément du  $K$ -espace vectoriel engendré dans  $\mathbb{C}$  par les éléments  $\log(p)$ , où  $p$  est un diviseur premier de  $n$ .

iv) La preuve de [24] utilise un fibré ample hermitien inversible équivariant sur la variété  $A$ . Comme me l'ont fait remarquer Maillot et Roessler, les arguments de [29] présentés ci-dessus permettent aussi de retrouver la proposition 5.1 de [24] et d'éviter ainsi tout calcul de torsion analytique (comparer *loc. cit.* avec (3), (19) et (17)). On donnera en appendice un exemple où cette méthode conduit exactement à la formule de Chowla-Selberg.

## 7. COMPLÉMENTS

**7.1.** Comme  $K \subset \mathbb{C}$ , on peut identifier les éléments  $u \in (\mathbb{Z}/n)^* = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  aux plongements complexes  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$  et réécrire l'égalité du théorème 6.1 sous la forme

$$\sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \chi(\sigma) \log |P_\sigma(H^k(X))| = \frac{L'(\chi, 0)}{L(\chi, 0)} \sum_{\sigma} \sum_{p+q=k} (-1)^k p \dim_{\mathbb{C}}(H^{pq}(X(\mathbb{C}))_{\sigma}) \chi(\sigma)$$

dans  $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ . Maillot et Roessler conjecturent que cette identité reste vraie quand on remplace  $H^k(X)$  par n'importe quel motif défini sur  $F$ , à coefficients dans un corps  $K$  pas nécessairement abélien sur  $\mathbb{Q}$ , dont tous les plongements complexes se factorisent par  $F$  ([29], Conjecture A).

**7.2.** On peut étendre les théorèmes 2.1 et 3.1 à l'image directe par un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  entre deux variétés arithmétiques tel que l'application  $X(\mathbb{C}) \rightarrow Y(\mathbb{C})$  induite par  $f$  soit une submersion ([18], [17], [38]; pour la partie analytique, voir [2]

et [6]). Maillot et Roessler en déduisent dans [30] des formules pour le caractère de Chern arithmétique sur  $Y$  de la cohomologie de De Rham relative. Celles-ci font intervenir la dérivée logarithmique de  $L(\chi, s)$  en un entier  $s$  tel que  $-\dim(Y/S) \leq s \leq 0$ . Dans [22] Köhler étudie aussi cette situation et démontre un analogue arithmétique du principe de proportionnalité d'Hirzebruch.

**7.3.** D'autres travaux portent sur la famille universelle de variétés abéliennes sur une variété de Shimura  $Y$ . Si  $Y$  n'est pas complète, il faut étendre la théorie d'intersection arithmétique en imposant à la forme  $\omega$  de la formule [19] d'avoir des singularités logarithmiques à l'infini [9] [28] [10]. Dans ce contexte, Bost [7] et Kühn [28] ont montré que l'auto-intersection du dualisant relatif de la courbe elliptique universelle sur  $X_0(N)$  est le produit de  $2\zeta'(-1) + \zeta(-1)$  par  $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]/2$ . On ne sait pas pour l'instant interpréter leur formule par un théorème de Riemann-Roch arithmétique.

**7.4.** Des formules telles que celles évoquées en 7.2 et 7.3 résultent aussi des travaux de Kudla et de ses collaborateurs sur la généralisation en rang supérieur de la formule de Gross-Zagier [20] et la valeur au centre de symétrie des dérivées de fonctions  $L$  automorphes (voir [26], [27] et l'exposé [25] de ce séminaire). Gross m'avait signalé il y a longtemps qu'un multiple de  $\zeta'(2)$  (i.e.  $\zeta'(-1)$  par l'équation fonctionnelle) est présent dans ses calculs avec Zagier [20]; on peut espérer qu'une variante du théorème 2.1 permettra d'aborder ces calculs différemment.

## APPENDICE : UN EXEMPLE

Considérons la courbe elliptique  $E$  sur  $\mathbb{Q}$  complétée de la courbe affine plane d'équation

$$y^2 = x^3 + 6.$$

Nous allons calculer la hauteur de Faltings géométrique de  $E$ . Soit  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^2$  le schéma projectif d'équation homogène

$$y^2 z = x^3 + 6 z^3.$$

C'est un modèle de  $E$  sur  $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Le critère jacobien montre qu'il est lisse sur  $S$  en dehors des points fermés  $A$  et  $B$  de coordonnées  $(0, 0, 1)$  dans la fibre de  $X$  sur  $\mathbb{F}_2$  et  $\mathbb{F}_3$  respectivement. On vérifie que  $X$  est un schéma régulier, et que  $x$  et  $y$  fournissent des paramètres locaux aux points  $A$  et  $B$ . L'ouvert  $U = X - \{A, B\}$  est le modèle de Néron de  $E$  sur  $\mathbb{Z}$  ([34], Cor. 9.1). Notons  $i : S \rightarrow U$  sa section nulle et  $i^* \Omega_U$  la restriction à l'origine du fibré des différentielles de  $U$  sur  $S$ . Le complexifié de  $i^* \Omega_U$  est canoniquement isomorphe à l'espace  $H^0(E(\mathbb{C}), \Omega_{\mathbb{C}})$  des différentielles holomorphes sur  $E(\mathbb{C})$ . On le munit du produit scalaire hermitien tel que la norme  $\|\alpha\|$  d'une forme  $\alpha$  soit donnée par la formule

$$(A1) \quad \|\alpha\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{E(\mathbb{C})} |\alpha \wedge \bar{\alpha}|.$$

Par définition ([17], [14] 1.2), la hauteur de Faltings de  $E$  sur  $\mathbb{Q}$  est le degré du  $\mathbb{Z}$ -module inversible hermitien  $\overline{i^*(\Omega_U)}$  :

$$(A2) \quad h(E/\mathbb{Q}) = \widehat{\deg}(\overline{i^*(\Omega_U)}).$$

Si  $\Delta$  est le discriminant minimal de  $E$  sur  $\mathbb{Q}$ , la hauteur géométrique de  $E$  ([14], *loc. cit.*) est donnée par la formule

$$(A3) \quad h_{\text{geom}}(E) = h(E/\mathbb{Q}) - \frac{1}{12} \log(|\Delta|)$$

(on utilise ici [33] et le fait que  $E$  a potentiellement bonne réduction).

Soit  $\omega$  le fibré dualisant relatif de  $X$  sur  $S$ , c'est-à-dire l'unique fibré inversible prolongeant  $\Omega_U$ . Si  $f : X \rightarrow S$  est le morphisme de définition de  $X$  on a

$$\omega = f^* i^* \Omega_U,$$

puisque c'est vrai sur  $U$ , et il suit de (A1), de (A2) et de la formule de projection que

$$(A4) \quad h(E/\mathbb{Q}) = \widehat{\deg}(H^0(X, \omega), h_{L^2})$$

pour tout choix d'une métrique  $h_X$  sur  $TX(\mathbb{C})$ .

Le schéma en groupes  $G = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^6 - 1))$  agit sur  $X$ . On suppose que  $h_X$  est  $F_\infty$  et  $G$ -invariante, on choisit la racine 6-ième primitive  $\gamma = \exp(2\pi i/6)$  dans  $\mathbb{C}^*$  et on note  $g \in G(\mathbb{C})$  l'élément correspondant. Il agit sur le point de coordonnées homogènes  $(x, y, z)$  par la formule

$$g(x, y, z) = (\gamma^2 x, -y, z).$$

Le schéma  $Y$  des points fixes de  $G$  sur  $X$  a trois composantes :  $A, B$  et l'adhérence  $Y_0$  dans  $X$  du point  $(0, 1, 0)$  de  $E$ . On va appliquer le théorème 3.1 au fibré hermitien virtuel  $\lambda_{-1}(\bar{\omega})$ . Puisque la torsion analytique équivariante est nulle (Proposition 4.1, i)), le terme gauche de l'égalité du théorème 3.1 est

$$(A5) \quad \hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega})) - \frac{1}{2} T_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega}_{\mathbb{C}})) = \hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega})) = \hat{\chi}_g(\bar{\mathcal{O}}_X) - \hat{\chi}_g(\bar{\omega}_X).$$

La dualité de Grothendieck montre que  $H^1(X, \omega_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{Z}$  et que  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \omega_X)^\vee$ . Si l'on choisit  $h_X$  pour que  $E(\mathbb{C})$  ait volume 1, ces isomorphismes respectent les métriques. De plus, comme  $\frac{dx}{y}$  est une différentielle invariante sur  $E(\mathbb{C})$ , l'action de  $g$  sur  $H^0(X, \omega)_{\mathbb{C}}$  est la multiplication par  $\gamma^{-1}$ . Par conséquent

$$(A6) \quad \hat{\chi}_g(\bar{\mathcal{O}}_X) - \hat{\chi}_g(\bar{\omega}_X) = (\gamma - \gamma^{-1}) \widehat{\deg}(H^0(X, \omega), h_{L^2}).$$

Calculons maintenant le côté droit de l'identité du théorème 3.1. Puisque  $Y_0 \rightarrow S$  est l'identité on a

$$(A7) \quad \int_{Y_0} \widehat{\text{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega})) \widehat{\text{Td}}_g(X) = 0.$$

Par ailleurs, le fibré tangent à  $A = \text{Spec}(\mathbb{F}_2)$  est trivial, et, puisque  $x$  et  $y$  sont des paramètres de son anneau local dans  $X$ , la restriction à  $A$  du fibré conormal  $N^\vee$  est un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{F}_2$ , où  $g$  agit avec les valeurs propres  $\gamma^2$  et  $\gamma^3$ . On en déduit

$$(A8) \quad \int_A \widehat{\text{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega})) \widehat{\text{Td}}_g(X) = \frac{1 - \gamma^{-1}}{(1 - \gamma^2)(1 - \gamma^3)} \log(2)$$

et, de même,

$$(A9) \quad \int_B \widehat{\text{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega})) \widehat{\text{Td}}_g(X) = \frac{1 - \gamma^{-1}}{(1 - \gamma^2)(1 - \gamma^3)} \log(3).$$

Soit  $\chi$  le caractère quadratique de  $\mathbb{Q}(\mu_6)$ . D'après les propositions 4.1 ii) et 4.3, et la formule de [12], III.1.2.2, on a

$$(A10) \quad -\frac{1}{2} \int_{Y(\mathbb{C})} \text{ch}_g(\lambda_{-1}(\omega_{\mathbb{C}})) \text{Td}_g(TX(\mathbb{C})) R_g(TX(\mathbb{C})) \\ = -i \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \log(\Gamma(1/3)/\Gamma(2/3)) - \frac{\sqrt{3}}{2} \log(3) - \frac{\sqrt{3}}{3} \log(2) \right).$$

Sachant que  $y^2 = x^3 + 6$  est une équation de Weierstrass minimale globale de  $E$  ([32] p. 172), on calcule

$$(A11) \quad \Delta = -2^6 3^5.$$

Il résulte du théorème 3.1 et de (A4) ... (A11) que

$$h_{\text{geom}}(E) = -\frac{3}{2} \log(\Gamma(1/3)/\Gamma(2/3)) + \frac{1}{4} \log(3),$$

conformément à la formule de Chowla-Selberg ([15], 1.5).

## RÉFÉRENCES

- [1] G. W. ANDERSON – «Logarithmic derivatives of Dirichlet  $L$ -functions and the periods of abelian varieties», *Compositio Math.* **45** (1982), no. 3, p. 315–332.
- [2] J.-M. BISMUT – «Equivariant immersions and Quillen metrics», *J. Differential Geom.* **41** (1995), no. 1, p. 53–157.
- [3] ———, *Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms*, Astérisque, vol. 244, Soc. Math. France, Paris, 1997.
- [4] ———, «Local index theory and higher analytic torsion», in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin, 1998)*, vol. I (extra vol.), 1998, p. 143–162.
- [5] J.-M. BISMUT & G. LEBEAU – «Complex immersions and Quillen metrics», *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1991), no. 74, p. 1–298.

- [6] J. M. BISMUT & X. MA – «Holomorphic immersions and equivariant torsion forms», *J. reine angew. Math.* **575** (2004), p. 189–235.
- [7] J.-B. BOST – «Intersection theory on arithmetic surfaces and  $L_1^2$  metrics», lettre du 6/03/1998, non publiée.
- [8] ———, «Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques», in *Séminaire Bourbaki (1990/91)*, Astérisque, vol. 201-203, Soc. Math. France, Paris, 1991, exp. no. 731, p. 43–88.
- [9] ———, «Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces», *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 2, p. 241–312.
- [10] J. BURGOS, J. KRAMER & U. KÜHN – «Cohomological Arithmetic Chow Rings», *J. Inst. Math. Jussieu* **6** (2007), no. 1, p. 1–172.
- [11] S. CHOWLA & A. SELBERG – «On Epstein's zeta-function», *J. reine angew. Math.* **227** (1967), p. 86–110.
- [12] P. COLMEZ – «Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe», *Ann. of Math. (2)* **138** (1993), no. 3, p. 625–683.
- [13] P. DELIGNE – «Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques», in *Séminaire de Géométrie Algébrique 4 1/2 (Bois-Marie)*, Lect. Notes in Math., vol. 569, 1977, p. 168–232.
- [14] ———, «Hodge cycles on abelian varieties (Notes by J.S. Milne)», in *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lect. Notes in Math., vol. 900, 1982, p. 9–100.
- [15] ———, «Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevitch (d'après G. Faltings)», in *Séminaire Bourbaki (1983/84)*, Astérisque, vol. 121-122, Soc. Math. France, Paris, 1985, exp. no. 616, p. 25–41.
- [16] M. DEMAZURE – «Structures algébriques, cohomologie des groupes», in *Séminaire de Géométrie Algébrique 3 (Bois-Marie)*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [17] G. FALTINGS – *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem*, Annals of Mathematics Studies, vol. 127, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [18] H. GILLET & C. SOULÉ – «An arithmetic Riemann-Roch theorem», *Invent. Math.* **110** (1992), no. 3, p. 473–543.
- [19] B. H. GROSS – «On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg», *Invent. Math.* **45** (1978), no. 2, p. 193–211, avec un appendice de D.E. Rohrlich.
- [20] B. H. GROSS & D. B. ZAGIER – «Heegner points and derivatives of  $L$ -series», *Invent. Math.* **84** (1986), no. 2, p. 225–320.
- [21] S. L. KLEIMAN – «Algebraic cycles and the Weil conjectures», in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 359–386.



- [22] K. KÖHLER – «A Hirzebruch proportionality principle in Arakelov geometry», in *Number fields and function fields—two parallel worlds* (G. Van der Geer, B. Moonen & R. Schoof, éd.), Progr. Math., vol. 239, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005, p. 237–268.
- [23] K. KÖHLER & D. ROESSLER – «A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry. I. Statement and proof», *Invent. Math.* **145** (2001), no. 2, p. 333–396.
- [24] ———, «A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry. IV. The modular height of C.M. abelian varieties», *J. reine angew. Math.* **556** (2003), p. 127–148.
- [25] S. S. KUDLA – «Derivatives of Eisenstein series and generating functions for arithmetic cycles», in *Séminaire Bourbaki (1999/2000)*, Astérisque, vol. 276, Soc. Math. France, Paris, 2002, exp. no. 876, p. 341–368.
- [26] S. S. KUDLA & M. RAPOPORT – «Arithmetic Hirzebruch-Zagier cycles», *J. reine angew. Math.* **515** (1999), p. 155–244.
- [27] S. S. KUDLA, M. RAPOPORT & T. YANG – *Modular forms and special cycles on Shimura curves*, Annals of Mathematics Studies, vol. 161, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [28] U. KÜHN – «Generalized arithmetic intersection numbers», *J. reine angew. Math.* **534** (2001), p. 209–236.
- [29] V. MAILLOT & D. ROESSLER – «Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions  $L$  d’Artin aux entiers négatifs», *Math. Res. Lett.* **9** (2002), no. 5-6, p. 715–724.
- [30] ———, «On the periods of motives with complex multiplication and a conjecture of Gross-Deligne», *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), no. 2, p. 727–754.
- [31] D. B. RAY & I. M. SINGER – «Analytic torsion for complex manifolds», *Ann. of Math. (2)* **98** (1973), p. 154–177.
- [32] J. H. SILVERMAN – *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Math., vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [33] ———, «Heights and elliptic curves», in *Arithmetic geometry (Storrs 1984)*, Springer, New York, 1986, p. 253–265.
- [34] ———, *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Math., vol. 151, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [35] C. SOULÉ – «Hermitian vector bundles on arithmetic varieties», in *Algebraic geometry (Santa Cruz 1995)* (J. Kollár, éd.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, p. 383–419.
- [36] C. SOULÉ, D. ABRAMOVICH, J.-F. BURNOL & J. KRAMER – *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

- [37] R. O. WELLS, JR. – *Differential analysis on complex manifolds*, seconde éd., Graduate Texts in Math., vol. 65, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [38] Y. ZHA – «A General Arithmetic Riemann-Roch Theorem», Ph.D. Thesis, Chicago University, 1997, non publiée.

Christophe SOULÉ

I.H.É.S.

35 route de Chartres

F-91440 BURES-sur-YVETTE

*E-mail* : `soule@ihes.fr`

**LA CONJECTURE DE MODULARITÉ DE SERRE :  
LE CAS DE CONDUCTEUR 1**  
[d'après C. Khare]

par **Jean-Pierre WINTENBERGER**

**INTRODUCTION**

Soit  $\overline{\mathbb{Q}}$  la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{C}$ . Notons  $G_{\mathbb{Q}}$  le groupe de Galois de  $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ . Soit  $p$  un nombre premier et soit  $\overline{\mathbb{F}_p}$  une clôture algébrique du corps à  $p$  éléments. Soit  $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$  une représentation continue (donc à image finie), irréductible et impaire ( $\det(\overline{\rho}(c)) = -1$  où  $c$  est la conjugaison complexe). Nous appelons une telle représentation galoisienne une représentation de type  $S$ .

Soit  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  une clôture algébrique du corps des nombres  $p$ -adiques  $\mathbb{Q}_p$ . Eichler, Shimura, Deligne, Deligne et Serre ont associé aux formes modulaires (propres) pour les sous-groupes de congruence de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  des représentations galoisiennes  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ , dont les réductions modulo  $p$ , lorsqu'elles sont irréductibles, sont de type  $S$  ([17, 19] ; pour le poids 2, on pourra voir l'appendice de Conrad dans [44]). La conjecture de Serre, qui apparaît pour la première fois en 1972 (p. 9 de [56]), dit que toute représentation de  $G_{\mathbb{Q}}$  de type  $S$  est *modulaire i.e.* provient comme ceci d'une forme modulaire. Elle est énoncée dans [50] pour les représentations  $\overline{\rho}$  non ramifiées en dehors de  $p$  (cas de niveau  $N = 1$ ). Dans [52], Serre énonce pour tout niveau  $N$  ce que nous appelons la *forme forte* de la conjecture par opposition à sa *forme qualitative*. La forme forte précise le poids  $k$ , le niveau  $N$  et le caractère  $\epsilon$  d'une forme primitive pour  $\Gamma_1(N)$  dont provient  $\overline{\rho}$ .

Tate, en réponse à une lettre de Serre, prouve qu'il n'y a pas de représentation  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_2})$  qui soit irréductible et non ramifiée hors de 2, prouvant ainsi la conjecture pour  $p = 2$  et  $N = 1$  (1973, [57]). La méthode de Tate, qui repose sur une minoration de discriminant, a été étendue par Serre au cas  $p = 3$  et  $N = 1$  (p. 710 de [51]), et, sous l'hypothèse de Riemann généralisée, par Bruuggeman pour  $p = 5$  ([10]).

Grâce aux travaux de Ribet, Mazur, Carayol, Gross, Coleman-Voloch, Edixhoven, Diamond, ..., on sait, pour  $p \neq 2$ , que la forme qualitative entraîne la forme forte. C'est un grand théorème sur lequel on trouvera d'excellents rapports dans [43, 25, 44] : un cas de ce théorème a permis de déduire Fermat de la conjecture de Taniyama-Weil!

La démonstration, à la suite de Wiles, que toute courbe elliptique sur  $\mathbb{Q}$  est modulaire, donne la conjecture de Serre pour les représentations galoisiennes  $\overline{\rho}$  provenant

des points d'ordre  $p$  des courbes elliptiques sur  $\mathbb{Q}$ . Pour ce faire, Wiles prouve des énoncés du type suivant (« MR » : modularité des relèvements; § 3) : si  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  est *géométrique*, i.e. vérifie des propriétés de ramification convenables, et si la réduction de  $\rho$  est du type  $S$  et modulaire, alors  $\rho$  est modulaire ([67, 64]). De plus, Wiles utilise un argument de « changement de nombre premier » : pour prouver que la représentation galoisienne  $\overline{\rho}_5 : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$  sur les points d'ordre 5 de la courbe elliptique  $E$  est modulaire, Wiles prouve l'existence d'une courbe elliptique  $E'$  sur  $\mathbb{Q}$  dont la représentation sur les points d'ordre 5 est isomorphe à  $\overline{\rho}_5$ , et la représentation  $\overline{\rho}_3$  sur les points d'ordre 3 est irréductible. La représentation  $\overline{\rho}_3$ , dont l'image est résoluble, est modulaire d'après Langlands-Tunnell ([66]). Un théorème « MR » entraîne alors que la représentation 3-adique associée à  $E'$  est modulaire, donc aussi  $E'$  et  $\overline{\rho}_5$ .

À l'aide de théorèmes « MR » et d'un argument de « changement de nombre premier », Taylor prouve une version potentielle de la conjecture de Serre : une représentation de type  $S$  provient d'une forme modulaire de Hilbert après restriction à un corps de nombres totalement réel  $F$  ([61, 60]; § 4). On est alors confronté à un problème de changement de base de  $F$  à  $\mathbb{Q}$ . Dans certains cas, on peut s'assurer que  $F/\mathbb{Q}$  est résoluble, et alors le théorème de Langlands et Tunnell permet de prouver la conjecture ([38, 26]). Les théorèmes de Taylor, le théorème de changement de base résoluble d'Arthur-Clozel ([2]), et des arguments de Taylor ([63]) permettent à Dieulefait de prouver que, étant donnée une représentation  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  possédant les propriétés d'une représentation galoisienne associée à une forme modulaire, il existe un système compatible  $(\rho_\lambda)$  de représentations  $\ell$ -adiques de  $G_{\mathbb{Q}}$  dont fait partie  $\rho$  ([23], § 6).

La conjecture de Serre entraîne qu'une représentation  $\overline{\rho}$  de type  $S$  admet des relèvements  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ , qui de plus sont géométriques. Ramakrishna, utilisant des techniques de déformations de représentations galoisiennes, le prouve dans de nombreux cas sans supposer  $\overline{\rho}$  modulaire ([41]). Khare réalise que ces techniques de déformation et en particulier des résultats de Böckle ([6]), la version potentielle de la conjecture de Serre due à Taylor et les théorèmes de type « MR » pour les corps totalement réels, permettent d'obtenir des relèvements de représentations de type  $S$  qui ont des propriétés de ramification plus précises que celles obtenues par Ramakrishna, et qui sont prédites par la forme forte de la conjecture de Serre.

L'existence de relèvements avec ces propriétés de ramification précises et l'existence de systèmes compatibles, permettent d'utiliser la technique de changement de nombre premier de Wiles. Dans [36], la conjecture de Serre pour  $N = 1$  est prouvée pour  $p = 5, 7$ , et pour les poids  $k \leq 14, k \neq 10$ . Des stratégies sont données pour la ramener dans le cas général à des énoncés « MR ». Utilisant des relèvements de poids 2 avec Nebentypus, Khare parvient à déduire des théorèmes « MR » connus le cas général de niveau (conducteur) 1 ([34]; pour un « survey » : [35]).

Enfin signalons que ce cercle d'idées a permis de grands progrès dans la preuve de la conjecture d'Artin pour les représentations impaires  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  ([12, 62]).

Je remercie Böckle de m'avoir communiqué son preprint [7] qui m'a beaucoup aidé pour la rédaction du §5. Je remercie Khare pour ses remarques sur une première version du texte.

## 1. CONJECTURES DE MODULARITÉ DE SERRE ET DE FONTAINE-MAZUR

### 1.1. Représentations galoisiennes associées aux formes modulaires

Pour  $N$  entier  $\geq 1$ , soit  $\Gamma_1(N)$  le groupe des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad c \equiv 0 \pmod{N}, \quad a \equiv d \equiv 1 \pmod{N}.$$

Soit  $k$  un entier  $\geq 1$ . Soit  $S_k(\Gamma_1(N))$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des formes modulaires paraboliques de poids  $k$  et de niveau  $N$ . Une forme  $f \in S_k(\Gamma_1(N))$  a un développement de Fourier à la pointe  $i\infty$  :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

Une forme primitive  $f$  est propre pour les opérateurs de Hecke  $T_n$ ,  $n$  entier  $> 1$ , et pour les opérateurs diamant  $\langle \bar{d} \rangle$ ,  $\bar{d} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ . Elle est normalisée :  $a_1 = 1$ . Pour  $n > 1$ ,  $a_n$  est la valeur propre de  $T_n$ . Notons  $\epsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  le caractère  $\langle \bar{d} \rangle(f) = \epsilon(\bar{d})f$ . On a :

$$(1) : f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \epsilon(\bar{d})(cz+d)^k f(z), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad c \equiv 0 \pmod{N},$$

$\bar{d}$  étant l'image de  $d$  dans  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ . Les  $a_n$  et  $\epsilon(\bar{d})$  engendrent un ordre de l'anneau des entiers d'une extension finie  $E_f$  de  $\mathbb{Q}$  contenue dans  $\mathbb{C}$ ;  $E_f$  est le corps des coefficients de  $f$ .

Eichler, Shimura, Deligne, et Deligne et Serre ont associé à  $f$  et à un plongement  $\iota$  de  $E_f$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  une représentation galoisienne :  $\rho_{f,\iota} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  qui est caractérisée à conjugaison près par les propriétés suivantes :

- $\rho_{f,\iota}$  est non ramifiée en dehors de  $\{p\} \cup S_N$ ,  $S_N$  étant l'ensemble des nombres premiers qui divisent  $N$ ;
- pour  $\ell \notin \{p\} \cup S_N$ , si  $\mathrm{Frob}_{\ell}$  est un élément de  $G_{\mathbb{Q}}$  qui relève le Frobenius, on a :  $\mathrm{tr}(\rho_{f,\iota}(\mathrm{Frob}_{\ell})) = \iota(a_{\ell})$ .

Soit  $\chi_p : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$  le caractère cyclotomique. Le déterminant de  $\rho_{f,\iota}$  est  $\epsilon\chi_p^{k-1}$ , où nous avons identifié de la manière naturelle  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$  avec le groupe de Galois de l'extension cyclotomique  $\mathbb{Q}(\mu_N)/\mathbb{Q}$ .

La représentation  $\rho_{f,\iota}$  est impaire. En effet, il n'existe pas de forme parabolique non nulle de poids  $k$  et de caractère  $\epsilon$  si l'on n'a pas  $\epsilon(-1)(-1)^{k-1} = -1$ , comme on le voit en considérant la matrice  $-\text{id}$  dans (1).

La représentation  $\rho_{f,\iota}$  est irréductible ([19, 42]).

Elle est *géométrique* : elle est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers et sa restriction au groupe de décomposition  $D_p$  est potentiellement semi-stable, au sens de la théorie de Fontaine ([29]). Ceci résulte, si  $k \neq 1$ , de ce que  $\rho_{f,\iota}$  apparaît dans la cohomologie étale d'une variété algébrique et des théorèmes de comparaison  $p$ -adiques ([65]). Pour  $k = 1$ ,  $\bar{\rho}$  a une image finie et est donc aussi géométrique.

### 1.2. La conjecture de Fontaine et Mazur ([31])

CONJECTURE 1.1. — *Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  une représentation  $p$ -adique impaire, irréductible et géométrique. Alors, il existe  $f, \iota$  comme ci-dessus et un entier  $j$  tels que  $\rho$  soit isomorphe à  $\rho_{f,\iota}$  tordue par  $\chi_p^j$ .*

La forme  $f, (N, k, \epsilon)$  et  $j$  sont bien déterminés par  $\rho$  ( $f$  à conjugaison galoisienne près). En effet, les poids de Hodge-Tate de  $\rho$  sont  $(j, j + k - 1)$ . Après torsion par  $\chi_p^{-j}$ , on se ramène au cas  $j = 0$ . Soit, pour nombre premier  $\ell, r_\ell$  la représentation  $F$ -semi-simple du groupe de Weil-Deligne  $\text{WD}_\ell$  à valeurs dans  $\text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  qui est associée à la restriction de  $\rho$  au groupe de décomposition  $D_\ell$ . Pour  $\ell \neq p, r_\ell$  a été définie par Grothendieck et Deligne (§ 8 de [18]). Pour  $\ell = p$ , elle a été définie par Fontaine à partir de l'action de  $D_p$  sur le module de Dieudonné filtré associé à la représentation potentiellement semi-stable  $\rho|_{D_p}$  ([27]).

À  $r_\ell$  est associée la partie  $\ell$  primaire  $N_\ell$  du conducteur. On a  $N_\ell = 1$  si et seulement si, soit  $\ell \neq p$  et  $\rho$  est non ramifiée en  $\ell$ , soit  $\ell = p$  et  $\rho|_{D_p}$  est cristalline. Le conducteur  $N$  est le produit des  $N_\ell$ . Le caractère  $\epsilon$  est défini par la formule  $\det(\rho) = \epsilon \chi_p^{k-1}$ .

Enfin  $f$  est déterminée par  $\rho$  par la formule  $\text{tr}(\rho(\text{Frob}_\ell)) = \iota(a_\ell)$  pour  $\ell$  premier à  $N$  et  $p$ , puisque l'on a pris soin de choisir  $f$  primitive. On peut aussi dire que la correspondance de Langlands locale associée à  $r_\ell$  une représentation  $\pi_\ell$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ . La représentation automorphe associée à  $f$  a pour composantes locales les  $\pi_\ell, \pi_\infty$  étant la représentation de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  correspondant aux formes modulaires de poids  $k$ .

### 1.3. La conjecture de Serre

Soient  $f$  et  $\iota$  comme au 1.1. Notons  $\overline{\mathbb{Z}_p}$  l'anneau des entiers de  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  et fixons un isomorphisme du corps résiduel de  $\overline{\mathbb{Z}_p}$  avec  $\overline{\mathbb{F}_p}$ .

On peut conjuguer  $\rho_{f,\iota}$  de sorte que  $\rho_{f,\iota}$  soit à valeurs dans  $\text{GL}_2(\overline{\mathbb{Z}_p})$ . Par l'homomorphisme de réduction  $\overline{\mathbb{Z}_p} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$ , on en déduit une représentation  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ . La semi-simplifiée de cette représentation est bien déterminée à isomorphisme près. On la note  $\overline{\rho_{f,\iota}}$ . Elle est bien sûr impaire.

On dit qu'une représentation irréductible  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  est *modulaire* si elle est isomorphe à  $\overline{\rho_{f,\iota}}$ , pour  $f$  et  $\iota$  comme ci-dessus. La forme qualitative de la conjecture de Serre est :

CONJECTURE 1.2. — Soit  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation de type  $S$ , i.e. irréductible et impaire. Alors  $\bar{\rho}$  est modulaire.

C'est un fait central dans le sujet qu'une représentation  $\bar{\rho}$  peut provenir de formes  $f$  de niveaux et de poids différents. La forme forte de la conjecture définit  $(k(\bar{\rho}), N(\bar{\rho}), \epsilon(\bar{\rho}))$  minimal, en un sens précisé, tel que  $\bar{\rho}$  provienne de  $f$  de poids  $k(\bar{\rho})$ , de niveau  $N(\bar{\rho})$ . Si l'on exclut certaines représentations diédrales pour  $p = 2$  ou  $3$ , on peut de plus imposer que le caractère de  $f$  soit  $\epsilon(\bar{\rho})$ .

On peut formuler une version de la forme forte de la conjecture, en terme de formes modulaires modulo  $p$  de Katz, qui de plus prédit quand  $\bar{\rho}$  provient d'une forme modulaire de Katz de poids 1. Si  $p \neq 2$ , la version qualitative de la conjecture entraîne la version forte (sous l'une ou l'autre de ses deux formes). On renvoie pour ceci au rapport d'Edixhoven ([25]).

Le niveau  $N(\bar{\rho})$  est défini par la formule usuelle pour le conducteur d'une représentation, sauf que l'on ne tient compte que de la ramification en dehors de  $p$ . En particulier, on a  $N(\bar{\rho}) = 1$  si et seulement si  $\bar{\rho}$  est non ramifiée en dehors de  $p$ .

Le poids  $k(\bar{\rho})$  ne dépend que de l'action de la ramification en  $p$ . Notons  $I_p \subset G_{\mathbb{Q}}$  le sous-groupe d'inertie pour une valuation  $p$ -adique de  $\overline{\mathbb{Q}}$ . La définition de  $k(\bar{\rho})$  repose sur les propriétés que l'on connaît de l'action de  $I_p$  dans les représentations  $p$ -adiques associées aux formes modulaires ([52, 24]). Rappelons en quelques propriétés, pour  $p \neq 2$ .

Soit  $\overline{\chi}_p : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{F}_p^*$  la réduction modulo  $p$  du caractère cyclotomique, et notons encore  $\overline{\chi}_p$  sa restriction à  $I_p$ . Soit  $\Psi$  un caractère fondamental de niveau 2 de  $I_p$  : on peut prendre pour  $\Psi$  la restriction à  $I_p$  du caractère de Kummer pour l'extension  $K(p^{\frac{1}{p^2-1}})/K$ ,  $K$  étant l'extension quadratique non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ .

On a :  $2 \leq k(\bar{\rho}) \leq p^2 - 1$ . Il existe  $j$  entier tel que l'on ait :  $2 \leq k(\overline{\chi}_p^j \otimes \bar{\rho}) \leq p + 1$ . On a  $2 \leq k(\bar{\rho}) \leq p + 1$  si et seulement si l'on est dans l'un des deux cas suivants :

– il existe une droite  $D$  dans l'espace  $V$  de  $\bar{\rho}$  telle que  $I_p$  opère trivialement sur  $V/D$ . L'action de  $I_p$  s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi}_p^b & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

avec  $1 \leq b \leq p - 1$ . Si  $b \neq 1$ , on a :  $k(\bar{\rho}) = 1 + b$ . Si  $b = 1$ ,  $\eta$  est un 1-cocycle de  $Z^1(I_p, \overline{\mathbb{F}}_p(\overline{\chi}_p))$ . Sa classe de cohomologie  $c(\eta)$  provient par la théorie de Kummer d'un élément de  $\mathbb{Q}_{p,\mathrm{nr}}^* \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ ,  $\mathbb{Q}_{p,\mathrm{nr}}$  désignant l'extension maximale non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $v : \mathbb{Q}_{p,\mathrm{nr}}^* \otimes \overline{\mathbb{F}}_p \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$  l'homomorphisme défini par la valuation. On a  $k(\bar{\rho}) = 2$  si  $v(c(\eta)) = 0$  (cas peu ramifié) et  $k(\bar{\rho}) = p + 1$  sinon (cas très ramifié). Dans le cas peu ramifié, la restriction de  $\bar{\rho}$  à  $D_p$  provient d'un schéma en groupes fini et plat sur  $\mathbb{Z}_p$ .

– on a un caractère fondamental  $\Psi$  de niveau 2 de  $I_p$  tel que l'action de  $I_p$  sur  $V$  soit semi-simple de caractères  $\Psi^b$  et  $\Psi^{pb}$  avec  $1 \leq b \leq p-1$ . On a :  $k(\bar{\rho}) = b+1$ .

Le caractère  $\det(\bar{\rho})\overline{\chi}_p^{1-k(\bar{\rho})}$  se factorise à travers  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_N)/\mathbb{Q})$ . Il s'identifie donc à un caractère de  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ , que l'on note  $\epsilon(\bar{\rho})$ .

La forme forte de la conjecture de Serre s'énonce :

CONJECTURE 1.3. — *Soit  $\bar{\rho}$  une représentation de type  $S$ . Alors,  $\bar{\rho}$  provient d'une forme primitive de  $S_{k(\bar{\rho})}(\Gamma_1(N(\bar{\rho})))$ .*

Supposons de plus que si  $p=2$  (resp.  $p=3$ ),  $\bar{\rho}$  n'est pas induite de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  (resp.  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ). Alors, la conjecture dit que l'on peut supposer de plus que le caractère de la forme soit  $\epsilon(\bar{\rho})$ .

## 2. LE THÉORÈME DE KHARE

Khare prouve la conjecture de Serre pour le niveau 1 :

THÉORÈME 2.1. — *Soit  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation irréductible impaire et non ramifiée en dehors de  $p$ . Alors,  $\bar{\rho}$  provient d'une forme propre de  $S_{k(\bar{\rho})}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ .*

Remarque 2.2. — La condition de parité entraîne que  $S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$  est trivial si  $k$  n'est pas pair. Le théorème de Kronecker-Weber entraîne que, pour  $\bar{\rho}$  non ramifiée hors de  $p$ ,  $\det(\bar{\rho})$  est une puissance de  $\overline{\chi}_p$ . La définition de  $k(\bar{\rho})$  entraîne  $\det(\bar{\rho}) = \overline{\chi}_p^{k(\bar{\rho})-1}$ . On voit donc que la condition  $\bar{\rho}$  impaire est équivalente à  $k(\bar{\rho})$  pair.

Explicitons l'énoncé pour  $k \leq 12$  (qui est prouvé dans [36] pour  $k(\bar{\rho}) \neq 10$ ). Pour  $0 < k < 12$ ,  $S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$  est trivial et  $S_{12}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$  est de dimension 1, engendré par  $\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$ . Swinnerton-Dyer a prouvé que, pour  $p \neq 2, 3, 5, 7, 691$ , la représentation  $\bar{\rho}(\Delta)$  est irréductible et qu'elle est réductible pour  $p = 2, 3, 5, 7, 691$ . Par torsion, on voit qu'il n'existe pas de  $\bar{\rho}$  de type  $S$  non ramifiée hors de  $p$  si  $p < 11$ . Il n'existe pas de  $\bar{\rho}$  de type  $S$  non ramifiée hors de  $p$  avec  $k(\bar{\rho}) < 12$ , ou si  $k(\bar{\rho}) = 12$  et  $p = 691$ . Si  $p \geq 11$  et  $k(\bar{\rho}) = 12$ , une telle  $\bar{\rho}$  provient de  $\Delta$ .

L'énoncé pour  $k=2$  entraîne qu'il n'existe pas de schéma en groupes sur  $\mathbb{Z}$  de hauteur 2 tel que la représentation galoisienne associée soit irréductible.

COROLLAIRE 1. — *On suppose  $p \neq 2$ . Soit  $\bar{\rho}$  de type  $S$ , avec  $k(\bar{\rho}) = 2$ ,  $N(\bar{\rho}) = q$ ,  $q$  premier; alors  $\bar{\rho}$  est modulaire.*

On a le cas particulier de la conjecture de Fontaine-Mazur :

COROLLAIRE 2. — *On suppose  $p \neq 2$ . Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$  une représentation continue irréductible géométrique et impaire de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$*



avec  $k \geq 2$ . On suppose  $\rho$  non ramifiée hors de  $p$ . On suppose de plus que la restriction  $\rho|_{D_p}$  de  $\rho$  au groupe de décomposition  $D_p$  est :

- soit cristalline de poids  $2 \leq k \leq p + 1$  ;
- soit ordinaire (voir 3).

Alors  $\rho$  provient d'une forme modulaire  $f$ .

### 3. MODULARITÉ DES RELÈVEMENTS DE REPRÉSENTATIONS MODULAIRES

La démonstration du théorème 2.1 nécessite des théorèmes « MR » pour des représentations du groupe de Galois des corps totalement réels.

Soit  $F$  un corps totalement réel de degré  $d$  sur  $\mathbb{Q}$ . Le groupe  $\mathrm{GL}_2(F)$  agit sur le produit de  $d$  copies du demi-plan de Poincaré, ce qui permet de généraliser à  $\mathrm{GL}_2(F)$  la théorie des formes modulaires pour  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ . On définit ainsi les formes modulaires de Hilbert. Le poids d'une telle forme est une collection de  $d$  entiers  $(k_1, \dots, k_d)$  indexés par les plongements de  $F$  dans  $\mathbb{R}$ . Nous considérons ici les formes de poids parallèle  $k = k_1 = \dots = k_d$ ,  $k \geq 2$ .

Pour  $f$  forme propre, les valeurs propres des opérateurs de Hecke engendrent une extension finie  $E_f$  de  $\mathbb{Q}$ . Pour  $f$  parabolique primitive et  $\iota$  un plongement du corps  $E_f$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ , on sait associer une représentation  $\rho_{f,\iota}$  du groupe de Galois  $G_F$  de  $\overline{\mathbb{Q}}/F$  ([58]). Elle est *impaire*, i.e. pour tout  $g \in G_{\mathbb{Q}}$ , on a  $\det(\rho_{f,\iota}(g\epsilon g^{-1})) = -1$ , irréductible, non ramifiée en dehors d'un ensemble fini d'idéaux premiers de  $F$ . Sous différentes hypothèses, on sait que sa restriction aux groupes de décompositions  $D_{\wp}$  pour  $\wp$  idéal premier au-dessus de  $p$  est potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate  $(0, k - 1)$  ([5, 59, 8]).

Soit  $\rho : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  une représentation irréductible impaire, géométrique de poids de Hodge-Tate  $(0, k - 1)$  pour les idéaux premiers de  $F$  au-dessus de  $p$ . On dit que  $\rho$  est *quasi ordinaire* si pour tout premier  $\wp$  de  $F$  au-dessus de  $p$ ,  $\rho|_{D_{\wp}}$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & * \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}$$

avec  $\psi_2(I_{\wp})$  finie,  $I_{\wp}$  désignant le sous-groupe d'inertie;  $\rho$  est *ordinaire* si  $\psi_2$  est de plus non ramifié. On a la notion de forme  $f$  quasi ordinaire (relativement à un plongement  $\iota$  de son corps des coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ), et pour une telle  $f$ ,  $\rho_{f,\iota}$  est quasi ordinaire.

Si  $\rho$  est quasi ordinaire, on dit que  $\rho$  est  $D_{\wp}$ -*distinguée* si les réductions  $\overline{\psi_1}$  et  $\overline{\psi_2}$  des caractères  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont distinctes pour tout  $\wp$ . Si  $\rho$  est  $D_{\wp}$ -distinguée et si  $\rho'$  est un relèvement quasi ordinaire de  $\overline{\rho}$ , de caractères  $\psi'_1$  et  $\psi'_2$ , on dit que  $\rho'$  est un  $\overline{\psi_2}$ -relèvement de  $\overline{\rho}$  si les caractères  $\overline{\psi_2}$  et  $\overline{\psi'_2}$  coïncident pour tout  $\wp$ .

On a :

THÉORÈME 3.1. — *Supposons  $p \neq 2$ . Soit  $k$  un entier  $\geq 2$ . Soit  $F$  un corps de nombres totalement réel. Soit  $\rho : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  une représentation irréductible impaire, géométrique et dont les poids de Hodge-Tate sont  $(0, k-1)$  pour tout premier  $\wp$  de  $F$  au-dessus de  $p$ . Soit  $\overline{\rho}$  la réduction de  $\rho$  (1.3).*

*On suppose que l'on a l'une des hypothèses suivantes :*

- i)  $F = \mathbb{Q}$ ,  $\overline{\rho}$  réductible,  $\rho$  quasi ordinaire et  $D_p$ -distinguée;
- ii)  $\overline{\rho}$  est irréductible,  $\rho$  est quasi ordinaire et  $D_\wp$  distinguée,  $\overline{\rho}$  provient par réduction modulo  $p$  d'une forme  $f$  et d'un plongement  $\iota$  de son corps des coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ,  $f$  quasi ordinaire relativement à  $\iota$ , telle que  $\rho_{f,\iota}$  soit un  $\overline{\psi}_2$  relèvement de  $\overline{\rho}$ ;
- iii) le commutant de  $\overline{\rho}_{D_p}$  est réduit aux homothéties,  $2 \leq k \leq 2p-1$ ,  $p$  est complètement décomposé dans  $F$ , pour tout idéal premier  $\wp$  de  $F$  au-dessus de  $p$ ,  $\rho_{|D_\wp}$  est cristalline de poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ , la restriction de  $\overline{\rho}$  à  $F(\mu_p)$  est irréductible, et  $\overline{\rho}$  provient d'une forme de Hilbert  $f$  de poids parallèle  $k$ ;
- iv)  $F = \mathbb{Q}$ ,  $k = 2$ ,  $\rho_{|D_\wp}$  est potentiellement cristalline,  $\overline{\rho}$  provient d'une forme modulaire, et la restriction de  $\overline{\rho}$  à  $\mathbb{Q}(\mu_p)$  est irréductible.

*Alors  $\rho$  provient d'une forme modulaire de poids parallèle  $k$ .*

Les i) et ii) sont des théorèmes de Skinner-Wiles ([53, 55]). Les iii) et iv) sont dus à Kisin ([37]). Pour  $F \neq \mathbb{Q}$  et  $k > 2$ , le iii) nécessite la généralisation de [54] au cas  $k > 2$ , qui n'est pas écrite (mais ce cas n'est pas nécessaire à la démonstration du théorème de Khare). Pour un cas particulier de iii), voir Taylor ([60]). Il y a une difficulté technique pour  $p = 3$  ([34]). On trouvera une excellente introduction aux théorèmes « MR » dans [16].

#### 4. VERSION POTENTIELLE DE LA CONJECTURE DE SERRE

Le théorème suivant de Taylor ([61, 60]) est fondamental :

THÉORÈME 4.1. — *On suppose  $p \neq 2$ . Soit  $\overline{\rho}$  une représentation de type  $S$  à image non résoluble. Supposons  $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1$  et  $k(\overline{\rho}) \neq p$ . Alors, il existe une extension finie galoisienne de  $\mathbb{Q}$ , totalement réelle, non ramifiée en  $p$ , telle que  $\overline{\rho}_{|G_F}$  provienne d'une forme modulaire de Hilbert  $f$  pour  $F$ , vérifiant l'une ou l'autre propriété suivante :*

- $f$  est de poids parallèle  $k(\overline{\rho})$  et de conducteur 1;
- $f$  est de poids parallèle 2 et de conducteur divisant  $p$ .

*Remarque 4.2.* — Soit  $H$  un sous-groupe fini de  $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ . Rappelons le théorème de Dickson :  $H$  est conjugué

- soit à un sous-groupe des matrices triangulaires supérieures ;
- soit à  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$  ou à  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ , pour un entier  $r > 0$  ;
- soit à  $A_4$ ,  $S_4$  (si  $p \neq 2$ ),  $A_5$  ou au groupe diédral d'ordre  $2r$  pour un entier  $r > 1$  non divisible par  $p$ .

Il en résulte facilement que, si  $\bar{\rho}$  est de type  $S$  et d'image non résoluble, pour toute extension galoisienne totalement réelle de  $\mathbb{Q}$ ,  $\bar{\rho}(G_F)$  n'est pas résoluble.

Donnons une idée de la preuve du théorème. Taylor considère un problème de modules classifiant les données  $(A, i, j, \alpha)$ , où :

- $A$  est une variété abélienne de dimension  $d$  ;
- $i$  est un plongement de l'anneau des entiers  $O_M$  d'un corps de nombres  $M$  de degré  $d$  dans  $\mathrm{End}(A)$  ;
- $j$  est une donnée de polarisation de  $A$  ;
- $\alpha$  est une structure de niveau  $\lambda\mathcal{L}_1$  ou  $\lambda\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$  selon les cas. On a un idéal premier  $\lambda$  de  $O_M$  au-dessus de  $p$  tel que  $\alpha$  définisse un isomorphisme des points de  $\lambda$ -torsion  $A[\lambda]$  avec  $\bar{\rho}$ . On a  $\mathcal{L}_1$  de caractéristique résiduelle  $\ell_1 \neq p$  tel que  $\alpha$  induise un isomorphisme de  $A[\mathcal{L}_1]$  avec un module induit irréductible  $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}}^L(\theta)$ ,  $L$  corps quadratique imaginaire.

Ce problème de modules est représentable par un schéma  $X$  sur  $\mathbb{Q}$ , qui est lisse, géométriquement irréductible et quasi projectif. Les ensembles  $X(\mathbb{R})$ ,  $X(\mathbb{Q}_p)$  et  $X(\mathbb{Q}_{\ell_i})$  sont non vides. Il résulte alors d'un théorème de Moret-Bailly que  $X$  a un point dans une extension  $F_0$  de  $\mathbb{Q}$  qui est galoisienne finie et totalement décomposée aux places  $\infty$ ,  $p$  et  $\ell_i$  ([40]).

On sait, d'après Hecke (Math. Werke, pp. 442-447 et p. 703), que  $\mathrm{ind}_{\mathbb{Q}}^L(\theta)$  est modulaire (voir aussi 5.1 de [52]). Ce module induit ind reste irréductible après restriction au groupe de Galois de  $F_0(\mu_{\ell_1})$  et, avec la représentation  $\ell_1$ -adique associée à  $A$ , il satisfait aux hypothèses du ii) du théorème 3.1. Il en résulte que  $A_{F_0}$  provient d'une forme modulaire de Hilbert  $f_0$  de poids 2.

Un théorème de Skinner-Wiles donne l'existence de  $F_1 \supset F_0$  tel que  $\bar{\rho}|_{G_{F_1}}$  provienne d'une forme  $f_1$  non ramifiée hors de  $p$  ([54]). Taylor prouve par une analyse de la réduction de  $A$  modulo les idéaux premiers de  $F_1$  au-dessus de  $p$  et par la théorie des congruences entre formes modulaires que l'on peut trouver  $F \supset F_1$  et  $f$  vérifiant de plus les conditions en  $p$  du théorème.

## 5. RELÈVEMENTS AVEC CONDITIONS DE RAMIFICATION

On suppose  $p \neq 2$ . Soit  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation de type  $S$  à image non résoluble.

La conjecture de Serre entraîne l'existence d'un relèvement géométrique de  $\bar{\rho}$ . Ceci a été prouvé dans de nombreux cas par Ramakrishna sans supposer  $\bar{\rho}$  modulaire ([41]). En fait, on s'attend à pouvoir être plus précis sur la ramification des relèvements. En effet, Diamond et Taylor prouvent dans beaucoup de cas le résultat suivant ([21, 22]). Supposons  $\bar{\rho}$  modulaire. Soit  $S$  un ensemble fini de nombres premiers  $\neq p$ , pour tout  $\ell \in S$  une représentation  $\tau_\ell : D_\ell \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  qui relève la restriction de  $\bar{\rho}$  au groupe de décomposition  $D_\ell$ . Alors, il existe un relèvement modulaire  $\rho$  de  $\bar{\rho}$  tel que, pour tout  $\ell \in S$ , la restriction de  $\rho$  au groupe d'inertie  $I_\ell$  soit isomorphe à la restriction de  $\tau_\ell$  à  $I_\ell$ .

Les théorèmes suivants prouvent dans certains cas l'existence de relèvement avec conditions de ramification sans supposer que  $\bar{\rho}$  est modulaire, et en incluant le cas  $\ell = p$ .

### 5.1. Relèvements minimaux

Soit  $\ell$  un nombre premier  $\neq p$ . On sait que la restriction de  $\bar{\rho}$  à  $I_\ell$  est soit de l'un des types suivants :

$$\xi \otimes \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}, \mathrm{Ind}_{I_M}^{I_p}(\xi),$$

$M$  étant une extension quadratique ramifiée de  $\mathbb{Q}_\ell$ , soit  $\ell = 2$  et l'image de  $I_2$  dans la représentation projective  $\bar{\rho}_{\mathrm{proj}}$  associée à  $\bar{\rho}$  est un sous-groupe de  $A_4$  ([20]).

Soit  $\rho$  un relèvement de  $\bar{\rho}$ . Si  $\ell \neq p$ , on dit que  $\rho$  est *minimal* en  $\ell$  si la restriction de  $\rho$  à  $I_\ell$  est soit :

$$\tilde{\xi} \otimes \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix}, \mathrm{Ind}_{I_M}^{I_p}(\tilde{\xi}),$$

$\tilde{*}$  désignant le représentant de Teichmüller de  $*$ , soit, si on est dans le cas  $\ell = 2$  et  $\bar{\rho}_{\mathrm{proj}}(I_2) \subset A_4$ , que  $\bar{\rho}(I_2)$  et  $\rho(I_2)$  soient isomorphes.

Si  $2 \leq k(\bar{\rho}) < p + 1$ , on dit que  $\rho$  est *minimal* en  $p$  si la restriction de  $\rho$  à  $I_p$  est cristalline de poids de Hodge-Tate  $(0, k(\bar{\rho}) - 1)$ . Si  $k(\bar{\rho}) = p + 1$ , on dit que  $\rho$  est en *minimal de type cristallin* si la restriction de  $\rho$  à  $I_p$  est cristalline de poids de Hodge-Tate  $(0, p)$ , et *minimal de type semi-stable* si la restriction de  $\rho$  à  $I_p$  est semi-stable de poids de Hodge-Tate  $(0, 1)$ .

**THÉORÈME 5.1** ([36]). — *Soit  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$  une représentation de type  $S$  à image non résoluble. On suppose que  $2 \leq k(\bar{\rho}) \leq p + 1$  et que  $k(\bar{\rho}) \neq p$ . Alors,  $\bar{\rho}$  a un relèvement qui est minimal pour tout  $\ell$  et si  $k(\bar{\rho}) = p + 1$ , on peut imposer en  $p$  soit que  $\rho$  soit minimal de type cristallin, soit que  $\rho$  soit minimal de type semi-stable.*

## 5.2. Relèvements de poids 2

Le théorème suivant correspond au fait que toute forme modulaire de poids  $k$ ,  $2 \leq k \leq p+1$ , et de niveau  $N$  premier à  $p$ , est congruente modulo  $p$  à une forme de poids 2 pour  $\Gamma_1(pN)$  (§ 3 de [49], prop. 9.3 de [32]).

On suppose que  $\bar{\rho}|_{I_p}$  est ordinaire, *i.e.* du type :

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi}_p^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour un entier  $k$  avec  $2 \leq k \leq p$ . Soit  $\omega_p$  le relèvement de Teichmüller de  $\overline{\chi}_p$ . On dit qu'un relèvement  $\rho$  de  $\bar{\rho}$  est *minimal en  $p$  de poids 2* si  $\rho|_{I_p}$  est du type :

$$\begin{pmatrix} \omega_p^{k-2} \chi_p & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et, pour  $k(\bar{\rho}) = 2$ , si de plus  $\rho|_{D_p}$  est finie, *i.e.* provient d'un schéma en groupes fini et plat sur  $\mathbb{Z}_p$  (le cocycle  $\eta$  provient via la théorie de Kummer d'une unité).

**THÉORÈME 5.2** ([34]). — *Soit  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation de type  $S$  à image non résoluble avec  $k(\bar{\rho}) \neq p$  et  $\bar{\rho}$  ordinaire. Alors  $\bar{\rho}$  a un relèvement qui est minimal en tout  $\ell \neq p$  et minimal de poids 2 en  $p$ .*

*Remarque 5.3.* — On devrait pouvoir étendre le théorème aux cas où  $k(\bar{\rho}) = p$  et  $\bar{\rho}|_{D_p}$  non ordinaire.

## 5.3. Relèvements avec Nebentypus

Le théorème suivant correspond à un théorème de Carayol qui dit que, pour  $p \geq 5$  ou pour  $p = 3$  (resp.  $p = 2$ ) et  $\bar{\rho}$  non induite de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  (resp.  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ), si  $\bar{\rho}$  provient par réduction d'une forme propre normalisée de  $S_2(\Gamma_0(N), \chi)$ , et si  $\chi$  et  $\chi'$  ont même réduction modulo  $p$ ,  $\bar{\rho}$  provient aussi d'une forme propre normalisée de  $S_2(\Gamma_0(N), \chi')$  ([14]).

On suppose que l'on a un nombre premier  $q$  tel que  $p$  divise  $q-1$ , que  $\bar{\rho}$  soit ramifiée en  $q$ , et que  $\bar{\rho}|_{I_q}$  soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \gamma & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\gamma$  est un caractère  $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q(\mu_q)/\mathbb{Q}_q) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^*$ .

Soit  $\omega_q : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q(\mu_q)/\mathbb{Q}_q) \rightarrow \mu_{q-1}(\overline{\mathbb{Q}}_q)$  le relèvement de Teichmüller du caractère cyclotomique. On choisit un isomorphisme de  $\mu_{q-1}(\overline{\mathbb{Q}}_q)$  sur  $\mu_{q-1}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ , de sorte que l'on puisse voir  $\omega_q$  comme un caractère de  $I_q$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p^*$ . Soit  $p^r$  l'exacte puissance de  $p$  qui divise  $q-1$  et posons  $\eta_q = \omega_q^{\frac{q-1}{p^r}}$ , de sorte que  $\eta_q$  est un caractère d'ordre  $p^r$  et donc que sa réduction modulo  $p$  est triviale.

THÉORÈME 5.4 ([34]). — *Mêmes hypothèses que pour le théorème 5.1. Soit  $i$  un entier. Soit  $\hat{\gamma}$  le relèvement de Teichmüller de  $\gamma$ . Alors  $\bar{\rho}$  a un relèvement  $\rho$  qui est minimal en tout nombre premier  $\ell \neq q$  et est tel que  $\rho|_{I_q}$  soit de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}\eta_q^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 5.4. Esquisse de la preuve des théorèmes

Commençons par quelques rappels sur la théorie des déformations des représentations galoisiennes ([39]).

Soit  $\mathbb{F}$  un corps fini tel que l'image de  $\bar{\rho}$  soit contenue dans  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ . Notons  $W$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\mathbb{F}$  et soit  $O = W$  pour les deux premiers théorèmes et  $O = W(\mu_{p^r}(\overline{\mathbb{Q}_p}))$  pour le théorème 5.4. Notons  $\mathcal{C}_O$  la catégorie des  $O$ -algèbres  $R$  noethériennes locales séparées et complètes avec un isomorphisme  $i_R$  du corps résiduel  $R/\mathcal{M}_R$  avec  $\mathbb{F}$ . Les morphismes dans  $\mathcal{C}_O$  sont les morphismes  $f : R \rightarrow R'$  de  $O$ -algèbres tels que  $i_{R'} \circ f \simeq i_R$ . Un relèvement de  $\bar{\rho}$  est un morphisme :  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(R)$  avec un isomorphisme de  $\rho \bmod \mathcal{M}_R$  sur  $\bar{\rho}$ . Les déformations de  $\bar{\rho}$  sont les classes d'isomorphisme de tels relèvements : deux relèvements  $\rho$  et  $\rho'$  sont donc isomorphes s'il existe  $g \in \mathrm{GL}_2(R)$ ,  $g \equiv \mathrm{id} \bmod \mathcal{M}_R$  tel que  $\rho = \mathrm{int}(g)(\rho')$ .

Pour chacun des théorèmes, on a un ensemble fini  $S$  de places de  $\mathbb{Q}$  contenant  $p$ ,  $\infty$  et les nombres premiers ramifiés dans  $\bar{\rho}$  tel que les relèvements  $\rho$  cherchés soient ceux qui sont non ramifiés hors de  $S$  et qui sont tels que, pour tout  $v \in S$ , la restriction de  $\rho$  à  $I_v$  vérifie une condition que l'on notera  $\mathcal{L}_v$ . On dira que les relèvements cherchés sont ceux qui vérifient  $\mathcal{L}$ .

Soit  $G_S$  le groupe de Galois de l'extension maximale de  $\mathbb{Q}$  qui est non ramifiée hors de  $S$ . Le groupe  $G_S$  vérifie la condition : pour tout sous-groupe ouvert  $H$  de  $G_S$ , si  $H(p)$  est le plus grand quotient de  $H$  qui est un pro- $p$ -groupe,  $H(p)$  est engendré topologiquement par un ensemble fini. Il en résulte que le foncteur des déformations de  $\bar{\rho}$  qui sont non ramifiées hors de  $S$  a une enveloppe, et même est représentable puisque les endomorphismes de  $\bar{\rho}$  sont réduits aux homothéties. On note  $\rho_{\mathrm{univ}} : G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(R_{\mathrm{univ}})$  la déformation universelle. Pour toute  $O$ -algèbre  $R$  de  $\mathcal{C}_O$ , on a donc une bijection de l'ensemble  $\mathrm{specf}(R_{\mathrm{univ}})(R)$  sur l'ensemble des déformations de  $\bar{\rho}$  à valeurs dans  $R$ .

De même, pour chaque  $v \in S$ , on a une déformation verselle  $\rho_{v,\mathrm{vers}} : D_v \rightarrow \mathrm{GL}_2(R_{v,\mathrm{vers}})$  de  $\bar{\rho}|_{D_v}$ . Il n'est pas difficile de voir que l'on a un quotient  $R_{\mathcal{L}_v}$  de  $R_{v,\mathrm{vers}}$  tel que les déformations de  $\bar{\rho}|_{D_v}$  qui satisfont à la condition  $\mathcal{L}_v$  sont exactement celles qui proviennent d'un point de  $\mathrm{specf}(R_{\mathcal{L}_v})$ . On note  $J_{\mathrm{vers}/\mathcal{L}_v}$  le noyau de  $R_{v,\mathrm{vers}} \rightarrow R_{\mathcal{L}_v}$ .

Pour  $v \in S$ , la restriction de  $\rho_{\mathrm{univ}}$  au groupe de décomposition  $D_v$  induit un morphisme  $r_v : R_{v,\mathrm{vers}} \rightarrow R_{\mathrm{univ}}$ . On voit que le quotient  $R_{\mathcal{L}}$  de  $R_{\mathrm{univ}}$  par l'idéal engendré par les  $r_v(J_{\mathrm{vers}/\mathcal{L}_v})$  représente les déformations de  $\bar{\rho}$  qui satisfont à la condition  $\mathcal{L}$ .

L'énoncé suivant et son corollaire rassemblent des résultats dus essentiellement à Böckle, Ramakrishna et Taylor ([6, 41, 62]).

THÉORÈME 5.5. — *On a une présentation  $R_{\mathcal{L}} = O[[T_1, \dots, T_h]]/(f_1, \dots, f_r)$ , avec moins de relations que de générateurs :  $r \leq h$ .*

COROLLAIRE 3. — *Si  $R_{\mathcal{L}}$  est, en tant que  $O$ -module, de type fini, alors  $R_{\mathcal{L}}$  est une  $O$ -algèbre plate d'intersection complète, en particulier  $\bar{\rho}$  a un relèvement  $\rho$  qui vérifie la condition  $\mathcal{L}$  cherchée.*

Esquisons la démonstration du théorème 5.5.

Remarquons tout d'abord que le déterminant des déformations qui satisfont à  $\mathcal{L}$  est fixé. En effet, la condition  $\mathcal{L}_v$  définit un morphisme  $\tilde{\eta}_v : I_v \rightarrow O^*$  tel que, si  $\rho_v$  satisfait à  $\mathcal{L}_v$ , la restriction du déterminant de  $\rho_v$  à  $I_v$  a pour déterminant  $\tilde{\eta}_v$ . Pour  $v \notin S$ , on pose  $\tilde{\eta}_v = 1$ . Comme le groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{ab}}/\mathbb{Q})$  de l'extension maximale abélienne de  $\mathbb{Q}$  est isomorphe au produit de ses sous-groupes d'inertie pour  $\ell$  décrivant les nombres premiers, on voit que les  $\eta_\ell$  définissent un caractère  $\eta : \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{ab}}/\mathbb{Q}) \rightarrow O^*$  tel que les déformations qui vérifient  $\mathcal{L}$  sont de déterminant  $\eta$  (la condition de parité  $\det(\eta(c)) = -1$  est vérifiée car elle l'est pour  $\bar{\rho}$  et que  $p \neq 2$ ). On note  $\eta_v$  la restriction de  $\eta$  au groupe de décomposition  $D_v$ . La condition  $\det(\rho) = \eta$  définit un sous-foncteur qui est une immersion fermée de celui des déformations qui sont non ramifiées hors de  $S$ . On note  $\rho_\eta : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(R_\eta)$  la déformation universelle de  $\bar{\rho}$  de déterminant  $\eta$ . De même, pour tout  $v \in S$ , on note  $\rho_{\eta_v} : D_v \rightarrow \text{GL}_2(R_{\eta_v})$  la déformation verselle de déterminant  $\eta_v$  de  $\bar{\rho}|_{D_v}$ .

Pour  $R_\gamma$  dans  $\mathcal{C}_O$ , on note  $t_\gamma$  le  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel tangent relatif et  $t_\gamma^*$  son dual. On a donc  $t_\gamma^* \simeq \mathcal{M}_{R_\gamma}/(\mathcal{M}_{R_\gamma})^2 + \mathcal{M}_O R_\gamma$ ,  $\mathcal{M}_O$  désignant l'idéal maximal de  $O$ . Le choix de relèvements des éléments d'une base de  $t_\gamma^*$  dans  $\mathcal{M}_{R_\gamma}$  permet d'écrire  $R_\gamma$  comme quotient d'un anneau de séries formelles  $S_\gamma$  sur  $O$  qui identifie les espaces tangents  $t_{R_\gamma}$  et  $t_{S_\gamma}$ . Il est facile de voir que deux telles présentations sont isomorphes. Si  $J$  est le noyau de  $S_\gamma \rightarrow R_\gamma$ , on pose  $\text{rel}(R_\gamma) = \dim_{\mathbb{F}}(J/\mathcal{M}_{R_\gamma}J)$ . Elle ne dépend pas de la présentation : c'est le nombre minimal de générateurs de  $J$ .

Les espaces tangents s'identifient à des groupes de cohomologie galoisienne. En effet,  $t_\eta$  s'identifie à l'ensemble des déformations de  $\bar{\rho}$  à valeurs dans  $\mathbb{F}[\epsilon]/\epsilon^2$  qui sont non ramifiées hors de  $S$  et de déterminant égal à celui de  $\bar{\rho}$ , et  $t_{\mathcal{L}}$  sont celles qui vérifient les conditions  $\mathcal{L}_v$ . On a un isomorphisme  $t_\eta = H_0^1 := H^1(G_S, \text{ad}_0(\bar{\rho}))$ , où  $\text{ad}_0(\bar{\rho})$  est le  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel des matrices de trace nulle,  $G_S$  agissant par la conjugaison.

Pour tout  $v \in S$ , les déformations de  $\bar{\rho}|_{D_v}$  à valeurs dans  $\mathbb{F}[\epsilon]/\epsilon^2$  qui sont de déterminant  $\eta_v$  forment un espace vectoriel qui s'identifie à  $H^1(D_v, \text{ad}^0(\bar{\rho}))$ . On le note  $H_{v,0}^1$ . Celles qui vérifient  $\mathcal{L}_v$  forment un sous-espace vectoriel de  $H_{v,0}^1$  que l'on note  $L_v$ . Le sous-espace  $t_{\mathcal{L}} \subset t_\eta$  s'identifie au sous-espace vectoriel des  $c \in H^1(G_S, \text{ad}^0(\bar{\rho}))$  tels que, pour tout  $v \in S$ , l'image  $c_v$  de  $c$  dans  $H^1(D_v, \text{ad}^0(\bar{\rho}))$  appartienne à  $L_v$ .

On le note  $H_{\mathcal{L}}^1$ . On note  $h_0^1$ ,  $h_{\mathcal{L}}^1$ ,  $h_{v,0}^1$ , et  $l_v$  les dimensions des  $\mathbb{F}$ -espaces vectoriels correspondants.

Soit, pour tout  $v \in S$ ,  $L_v^\perp$  le dual de  $L_v$  dans la dualité :

$$H^1(D_p, \text{ad}_0) \times H^1(D_p, \text{ad}_0(1)) \rightarrow \mathbb{F},$$

où (1) est la torsion par le caractère cyclotomique.

On note  $H_{\mathcal{L}^\perp}^1$  le sous-espace vectoriel de  $H^1(G_{\mathbb{Q}}, \text{ad}_0(1))$  formés des  $c$  dont les images  $c_v$  dans  $H^1(D_p, \text{ad}_0(1))$  appartiennent à  $L_v^\perp$ .

Le théorème suivant est dû à Böckle ([6]).

THÉORÈME 5.6. — *On a :*

$$\text{rel}(R_{\mathcal{L}}) \leq h_{\mathcal{L}^\perp}^1 + \sum_{v \in S} \text{rel}(R_{\mathcal{L}_v}).$$

Donnons quelques indications sur la preuve. On peut écrire pour chaque  $v$ , la  $O$ -algèbre  $R_{\eta_v}$  comme un quotient d'une algèbre de séries formelles  $S_{\eta_v}$  à  $h_{v,0}^1$  variables. Soit  $J_{\eta_v}$  le noyau. La théorie des déformations nous dit que l'on a un morphisme surjectif  $(H^2(G_S, \text{ad}_0))^* \rightarrow J_\eta / \mathcal{M}_\eta J_\eta$  et de même pour les  $J_{\eta_v}$ . Il en résulte que le noyau  $J_\eta$  d'une présentation de  $R_\eta$  est engendré topologiquement par les  $J_{\eta_v}$  et par  $\text{sh}^2 := \dim(\text{III}_S^2(\text{ad}_0))$  éléments. On a donc :

$$\text{rel}(R_\eta) \leq \text{sh}^2 + \sum_{v \in S} \text{rel}(R_{\eta_v}).$$

Pour  $s \in S$ , notons  $\tilde{J}_v$  le noyau de  $S_{\eta_v} \rightarrow R_{\eta_v} \rightarrow R_{\mathcal{L}_v}$ . Alors,  $R_{\mathcal{L}}$  est le quotient de  $S_\eta$  par l'idéal engendré par  $J_\eta$  et les  $\tilde{J}_v$ . Une chasse au diagramme permet d'en déduire que :

$$\text{rel}(R_{\mathcal{L}}) \leq \sum_{v \in S} \text{rel}(R_{\mathcal{L}_v}) + \text{sh}^2 + \sum_{v \in S} (h_{\eta_v}^1 - l_v) - h_\eta^1 + h_{\mathcal{L}}^1.$$

La suite exacte de Poitou-Tate donne alors le théorème 5.6.

L'énoncé suivant rassemble des calculs locaux faits dans ([6, 41, 62]).

THÉORÈME 5.7. — *Pour nombre premier  $\ell \in S$ , la  $O$ -algèbre  $R_{\mathcal{L}_\ell}$  est lisse de dimension relative  $h^0(D_\ell, \text{ad}_0)$  si  $\ell \neq p$ , et  $h^0(D_p, \text{ad}_0) + 1$  si  $\ell = p$ .*

Notons  $d_\ell$  la dimension de  $R_{\mathcal{L}_\ell}$  et  $d_\infty = 0$ . Le théorème 5.6 donne alors, puisque  $R_{\mathcal{L}_v}$  est d'intersection complète :

$$\text{rel}(R_{\mathcal{L}}) \leq h_{\mathcal{L}^\perp}^1 + \sum_{v \in S} (l_v - d_v).$$

On a la formule de Wiles ([67]) :

$$h_{\mathcal{L}}^1 - h_{\mathcal{L}^\perp}^1 = h^0(G_{\mathbb{Q}}, \text{ad}_0) - h^0(G_{\mathbb{Q}}, \text{ad}_0(1)) + \sum_{v \in S} (l_v - h^0(D_v, \text{ad}_0)).$$



Les  $h^0$  globaux sont nuls. La contribution de  $\infty$  est  $-1$ . On en déduit :

$$h_{\mathcal{L}}^1 - \text{rel}(R_{\mathcal{L}}) \geq -1 + \sum_{\ell \in S} (d_{\ell} - h^0(D_{\ell}, \text{ad}_0)).$$

Le théorème 5.5 résulte alors du théorème 5.7.

Prouvons les théorèmes 5.1, 5.2 et 5.4.

D'après le corollaire 3, il suffit de prouver que  $R_{\mathcal{L}}/p$  est finie. Comme  $\bar{\rho}$  est absolument irréductible,  $R_{\mathcal{L}}/p$  est engendrée par les traces des images des éléments de  $G_{\mathbb{Q}}$  ([15]). Par un lemme simple d'algèbre commutative, on voit alors qu'il suffit de prouver que l'image de  $G_{\mathbb{Q}}$  dans  $\text{GL}_2(R_{\mathcal{L}}/p)$  est finie ([36]).

Soit  $F$  un corps totalement réel comme dans le théorème 4.1. On considère alors dans chacun des cas la déformation universelle  $G_F \rightarrow \text{GL}_2(R_F)$  de la représentation irréductible  $\bar{\rho}|_{G_F}$ , de déterminant  $\eta|_{G_F}$  et satisfaisant à certaines conditions locales. Rappelons que  $\eta$  est le déterminant des déformations satisfaisant  $\mathcal{L}$ . Ces conditions locales sont choisies de sorte qu'elles sont satisfaites par la restriction à  $G_F$  de tout relèvement  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}(R)$  de  $\bar{\rho}$ ,  $R$  étant une  $O$ -algèbre de  $\mathcal{C}_O$  telle que  $pR = 0$ . Par exemple, dans le cas des relèvements minimaux pour  $k(\bar{\rho}) \neq p+1$ , ces conditions locales sont d'être non ramifiées pour tout idéal premier de  $F$  qui n'est pas au-dessus de  $p$ , et pour  $\wp$  au-dessus de  $p$ , la condition est d'être un quotient d'une représentation cristalline de  $D_{\wp}$  de poids de Hodge-Tate  $(0, k(\bar{\rho})-1)$ , et donc de provenir d'un module de Fontaine-Laffaille de poids 0 et  $k-1$  ([30]).

Ainsi, on a un morphisme  $R_F \rightarrow R_{\mathcal{L}}$  tel que  $G_F \rightarrow \text{GL}_2(R_{\mathcal{L}}/p)$  se factorise à travers  $G_F \rightarrow \text{GL}_2(R_F)$ . Pour prouver que l'image de  $G_{\mathbb{Q}}$  dans  $\text{GL}_2(R_{\mathcal{L}}/p)$  est finie, il suffit donc de prouver que celle de  $G_F$  dans  $\text{GL}_2(R_F/p)$  l'est. Pour ceci, il suffit de prouver que  $R_F$  est de type fini en tant que  $O$ -module. Pour ceci, on considère l'algèbre de Hecke  $\mathbb{T}$  des formes modulaires de Hilbert relatives à  $F$  de poids et niveau convenables. Par exemple, dans le cas des relèvements minimaux, le poids est  $k(\bar{\rho})$  et le niveau 1. La représentation  $\bar{\rho}|_{G_F}$  étant modulaire, elle définit un idéal maximal de  $\mathbb{T}$ ; soit  $\widehat{\mathbb{T}}$  le complété de  $\mathbb{T}$  en cet idéal. On a un morphisme  $R_F \rightarrow \widehat{\mathbb{T}}$ . Dans le cas où  $\bar{\rho}|_{D_p}$  est irréductible, le iii) du théorème 3.1 entraîne que  $R_F \simeq \widehat{\mathbb{T}}$ , et donc que  $R_F$  est un  $O$ -module de type fini puisque  $\widehat{\mathbb{T}}$  l'est. Dans le cas ordinaire, comme, dans le cas ii) du théorème 3.1, on utilise [55] qui n'implique pas que  $R_F \simeq \widehat{\mathbb{T}}$ , il faut vérifier que [55] entraîne bien que  $R_F$  est un  $O$ -module de type fini, ce qui est fait dans [34], utilisant la théorie de Hida ([33]).

## 6. SYSTÈMES COMPATIBLES

Soit, comme dans le paragraphe précédent,  $\bar{\rho}$  une représentation de type  $S$  à image non résoluble ( $p \neq 2$ ). Soit  $\rho$  un relèvement de  $\bar{\rho}$  comme dans l'un des théorèmes 5.1, 5.2, 5.4. Pour tout  $\ell$ , on note  $r_{\ell}$  la représentation du groupe de Weil-Deligne

$WD_\ell \rightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$  associée à la représentation géométrique  $\rho$  (1.2). La conjecture de Fontaine-Mazur entraîne que  $\rho$  devrait être membre d'un système compatible de représentations  $\ell$ -adiques  $(\rho_\ell)$ . Le théorème suivant, moins fort, suffit pour prouver le théorème 2.1. Il est essentiellement dû à Dieulefait ([23]; voir aussi [68]) :

THÉORÈME 6.1. — *Il existe un corps de nombres  $E$  et, pour tout nombre premier  $q$  et tout plongement  $\iota_q : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_q}$ , une représentation  $\rho_\iota : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}_q})$  qui est impaire, irréductible. De plus :*

- i) *il existe  $\iota_p : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$  tel que  $\rho_{\iota_p}$  soit isomorphe à  $\rho$ ;*
- ii) *pour  $\ell$  et  $q$  nombres premiers avec  $\ell \neq p, q$ , et pour  $\iota_q$  plongement de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_q}$ , les représentations du groupe de Weil-Deligne  $WD_\ell$  associées à  $\rho$  et à  $\rho_{\iota_q}$  sont isomorphes, via  $\iota$  et  $\iota_q$ ;*
- iii) *on suppose que dans le cas de relèvement avec Nebentypus (5.4) on a  $k(\overline{\rho}) = 2$ . Soit  $\iota_q$  de caractéristique  $q \neq 2, p$ . La restriction à  $I_p$  de  $\rho_{\iota_q}$  est celle définie par  $r_p$ . Si  $\rho$  n'est pas ramifiée en  $q$ , la restriction de  $\rho_{\iota_q}$  à  $D_q$  est cristalline de même poids que  $\rho$ . Si  $\rho|_{I_q}$  est comme dans 5.3,  $\rho|_{D_q}$  est soit semi-stable de poids  $(0, 1)$ , soit cristalline après restriction à  $\mathbb{Q}_q(\mu_q)$  et de poids de Hodge-Tate  $(0, 1)$ .*

La preuve utilise des idées de Taylor ([63]). La version potentielle de la conjecture de Serre (th. 4.1) donne qu'il existe  $F$  corps totalement réel galoisien sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $\rho|_{G_F}$  provienne d'une forme modulaire de Hilbert  $f$  pour  $F$ . Par [2], pour tout sous-corps  $F'$  de  $F$  tel que  $F/F'$  soit un groupe résoluble,  $\rho|_{G_{F'}}$  provient d'une forme modulaire de Hilbert  $f_{F'}$  pour  $F'$ . L'existence de  $E$  et de  $\iota_p$  provient alors de l'existence des corps des coefficients pour les formes  $f_{F'}$ . Grâce au théorème de Brauer, on écrit  $\rho$  comme une somme virtuelle de tordues de représentations associées aux  $f_{F'}$  et à  $\iota_p$ . On définit  $\rho_\iota$  comme la somme virtuelle correspondante,  $\iota_p$  étant remplacé par  $\iota$ . On prouve que c'est une vraie représentation. Les propriétés de compatibilité résultent d'un théorème de Carayol et Taylor ([13, 58]), de Saito ([46, 45]), Breuil ([8]) et Berger ([3]).

## 7. PREUVE DU THÉORÈME

Pour  $p$  un nombre premier, soit  $S(p)$  l'énoncé : une représentation  $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}_p})$  de type  $S$  non ramifiée hors de  $p$  provient d'une forme modulaire. Pour  $p$  nombre premier  $\neq 2$  et  $k$  entier avec  $2 \leq k \leq p+1$ , soit  $S(k, p)$  l'énoncé : une représentation  $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}_p})$  de type  $S$  non ramifiée hors de  $p$  avec  $k(\overline{\rho}) = k$  provient d'une forme modulaire. Par torsion par une puissance du caractère cyclotomique, on voit que  $S(p)$  est la conjonction des énoncés  $S(k, p)$ . Comme  $k(\overline{\rho})$  est pair pour toute représentation de type  $S$  qui est non ramifiée hors de  $p$ , on voit que l'on n'a à considérer  $S(k, p)$  que pour  $k$  pair.

L'énoncé S(2) est un théorème de Tate. La démonstration utilise la structure des groupes de décompositions et les minorations de discriminants. Serre a prouvé S(3) par un argument analogue.

THÉORÈME 7.1 (Tate, Serre). — Soit  $\bar{\rho}$  une représentation continue de  $G_{\mathbb{Q}}$  dans  $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_2)$  (resp.  $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_3)$ ) qui est non ramifiée hors de 2 (resp. 3). Alors  $\bar{\rho}$  est réductible.

Comme S(2) est vrai, on suppose désormais  $p$  impair.

La stratégie pour prouver S( $p$ ) pour tout  $p$  est une récurrence sur  $p$  (on peut aussi la présenter comme une récurrence sur le poids  $k$ ). Soit  $\bar{\rho}$  une représentation de type S de poids  $k(\bar{\rho}) = k$  et de conducteur 1. Si  $\bar{\rho}$  a une image résoluble,  $\bar{\rho}$  est modulaire grâce au théorème de Langlands et Tunnell. Sinon, on relève  $\bar{\rho}$  en une représentation  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$  grâce à l'un des théorèmes du § 5. On obtient grâce au théorème 6.1 un système compatible  $(\rho_{\iota})$  dont  $\rho$  fait partie. On choisit un  $\iota_q$  de caractéristique  $q$  et on considère la réduction  $\overline{\rho_{\iota_q}}$  modulo  $q$  de  $\rho_{\iota_q}$ . Si elle est irréductible, l'hypothèse de récurrence entraîne qu'elle est modulaire. On vérifie que l'on peut appliquer le théorème 3.1 et  $\rho_{\iota_q}$  est modulaire (si  $\overline{\rho_{\iota_q}}$  est réductible, on doit vérifier les hypothèses du i) du théorème 3.1). Il en résulte que  $(\rho_{\iota})$  est modulaire, et donc  $\bar{\rho}$ .

PROPOSITION 7.2. — i) S(2,  $p$ ) et S(4,  $p$ ) sont vrais.

ii) On suppose S( $k$ ,  $p$ ) (donc  $k \leq p + 1$ ). Alors S( $k$ ,  $q$ ) est vrai pour tout nombre premier  $q$  (tel que  $k \leq q + 1$ ).

En particulier, si S( $p$ ) est vrai, S( $k$ ,  $q$ ) l'est pour  $k \leq p + 1$ . Il en résulte que S( $q$ ) l'est si  $q < p$  et, pour prouver le théorème de Khare, il suffit de prouver S( $p$ ) pour une infinité de premiers.

*Preuve de la proposition.* — Prouvons S(2,  $p$ ). Soit  $\bar{\rho}$  une représentation modulo  $p$  de type S, de poids 2 et de conducteur 1 et dont l'image est non résoluble. On relève en un système compatible  $(\rho_{\iota})$  de poids 2 non ramifié partout. On considère la réduction modulo 3 de  $\rho_{\iota_3}$ , pour  $\iota_3$  de caractéristique 3. On sait par la proposition précédente que cette réduction n'est pas irréductible. Comme son déterminant est  $\overline{\chi}_3$ , on voit qu'elle est isomorphe à  $1 \oplus \overline{\chi}_3$ . Alors comme  $\rho$  a poids  $2 \leq 3 - 1$ , il résulte facilement de la théorie des schémas en groupes finis et plats que la restriction de  $\rho_{\iota_3}$  à  $D_3$  est ordinaire. Il résulte alors du i) du théorème 3.1 que  $\rho_{\iota_3}$  provient d'une forme modulaire. Il en est de même de  $(\rho_{\lambda})$  et par suite de  $\bar{\rho}$ .

Prouvons le ii). On relève  $\bar{\rho}$  de caractéristique  $q$  en  $\rho$  minimal de type cristallin, puis on met  $\rho$  dans un système compatible  $(\rho_{\iota})$ . On choisit  $\iota_p$  de caractéristique  $p$  et on considère la réduction  $\overline{\rho_{\iota_p}}$  de  $\rho_{\iota_p}$ . La restriction de  $\rho_{\iota_p}$  à  $D_p$  est cristalline de poids de Hodge-Tate 0 et  $k - 1$ . Il résulte de [30] que si  $k \leq p - 1$ , on a  $k(\overline{\rho_{\iota_p}}) = k$  et que, si la restriction de  $\overline{\rho_{\iota_p}}$  à  $D_p$  est réductible, alors  $\rho_{\iota_p|D_p}$  est ordinaire. Si  $k = p + 1$ , il résulte de [4] que soit  $\rho_{\iota_p|D_p}$  est ordinaire, soit  $k(\overline{\rho_{\iota_p}}) = 2$  et la restriction à  $D_p$  de

$\overline{\rho}_{\iota_p}$  est irréductible. Le i) entraîne que si  $k(\overline{\rho}_{\iota_p}) = 2$ ,  $\overline{\rho}_{\iota_p}$  est réductible, sa restriction à  $D_p$  l'est donc aussi. On voit que l'on est dans l'un des cas :

- $\overline{\rho}_{\iota_p}$  est irréductible, et si  $k = p + 1$ ,  $(\rho_{\iota_p})|_{D_p}$  est ordinaire ;
- $\overline{\rho}_{\iota_p}$  est réductible et  $\rho_{\iota_p|_{D_p}}$  est ordinaire.

Dans le premier cas,  $\overline{\rho}_{\iota_p}$  est modulaire par hypothèse. Un lemme facile prouve que si la restriction de  $\overline{\rho}_{\iota_p}$  à  $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p})$  est réductible,  $\rho_{\iota_p|_{D_p}}$  est ordinaire. On voit que les hypothèses du ii) ou du iii) du théorème 3.1 sont vérifiées et  $\rho_{\iota_p}$  est modulaire. Dans le cas  $\overline{\rho}_{\iota_p}$  réductible, le i) de 3.1 donne la modularité de  $\rho_{\iota_p}$ . On en déduit celle de  $\overline{\rho}$ . Le ii) est prouvé.

L'énoncé S(4,  $p$ ) résulte du ii) et du fait que S(3) est vraie.

PROPOSITION 7.3. — S(6,  $p$ ) est vrai pour tout  $p \geq 5$  ; S(5) est vraie.

*Preuve.* — La proposition précédente entraîne qu'il suffit de prouver S(6, 5) *i.e.* qu'il n'existe pas de représentation de type  $S$  de poids 6 et de caractéristique 5 qui soit non ramifiée hors de 5. Soit donc  $\overline{\rho}_5$  une telle représentation. On la relève en une représentation  $\rho$  irréductible qui est minimale de type semi-stable. Elle est donc de poids 2 semi-stable en 5. La version potentielle de la conjecture de Serre (th. 4.1) et le ii) du théorème 3.1 entraînent qu'il existe un corps totalement réel  $F$  galoisien sur  $\mathbb{Q}$  tel que la restriction de  $\rho$  à  $G_F$  provienne d'une forme modulaire de Hilbert pour  $F$  qui est de poids 2 et Steinberg en 5. La représentation  $\rho_{G_F}$  provient alors d'une variété abélienne. Un argument de descente donne que  $\rho$  provient d'une variété abélienne sur  $\mathbb{Q}$  qui a bonne réduction hors de 5 et est semi-stable en 5 ([36]). Mais Brumer et Kramer ont prouvé qu'une telle variété abélienne n'existe pas ([11], voir aussi Schoof [48]). Les résultats de Brumer-Kramer et Schoof utilisent des minoration de discriminants comme pour le théorème 7.1. L'étude de la ramification en  $p$  est beaucoup plus délicate ; ces résultats généralisent des théorèmes de Fontaine et Abrashkin ([28, 1]).

7.0.1. *Le cas général de conducteur 1.* — On a donc prouvé S( $p$ ) pour  $p \leq 5$ . Avec la proposition 7.2, on voit qu'il suffit de prouver que, si  $p \geq 5$  et si S( $p$ ) est vrai, il existe  $P > p$  tel que S( $P$ ) soit vrai. On prend pour  $P$  le plus petit premier  $> p$  qui n'est pas de Fermat :  $P - 1$  est divisible par un nombre premier  $\ell$  impair, et on note  $\ell^r$  la plus grande puissance de  $\ell$  qui divise  $P - 1$ .

La théorie analytique des nombres premiers donne que l'on peut choisir  $\ell$  tel que :

LEMME 1 ([34]). — Posons  $\ell^r = 2m + 1$ . On a :

$$\frac{P}{p} \leq \frac{2m+1}{m+1} - \frac{m}{p(m+1)}, \quad p+1 \geq \frac{m+1}{2m+1}(P-1) + 2 = (P+1) - \frac{m}{2m+1}(P-1).$$

Soit donc  $\bar{\rho}$  une représentation de type  $S$  de caractéristique  $P$ , de poids  $k$ ,  $2 \leq k \leq P+1$ , non ramifiée hors de  $P$ . Par la proposition 7.1, on connaît  $S(k, P)$  pour  $k \leq p+1$ .

Si la restriction au groupe de décomposition  $D_P$  est irréductible, la représentation obtenue en tordant  $\bar{\rho}$  par une puissance du caractère cyclotomique convenable est de poids  $P+3-k$ . Il résulte de la première inégalité du lemme 1 que, soit  $k$ , soit  $P+3-k$  est  $\leq p+1$ , et on conclut.

Supposons donc  $\bar{\rho}$  ordinaire. On la relève en un système compatible  $(\rho_\iota)$  de poids 2 grâce aux théorèmes 5.2 et 6.1. Soit  $\iota_\ell$  un plongement de caractéristique  $\ell$  et soit  $\overline{\rho_{\iota_\ell}}$  la réduction de  $\rho_{\iota_\ell}$ . Si la restriction de  $\overline{\rho_{\iota_\ell}}$  à  $\mathbb{Q}(\mu_\ell)$  est réductible, ou si  $\overline{\rho_{\iota_\ell}}$  est irréductible à image résoluble donc modulaire par Langlands-Tunnell, on vérifie, de manière similaire à la proposition 7.2, que le théorème 3.1 s'applique, et  $\rho_{\iota_\ell}$  est modulaire, donc aussi  $\bar{\rho}$ . Sinon, on choisit un relèvement avec Nebentypus  $\rho'$  de  $\overline{\rho_{\iota_\ell}}$  grâce au théorème 5.4. On choisit dans le théorème 5.4 l'entier  $i$  de sorte que le caractère  $\hat{\gamma}\eta_q^i$  soit égal à  $\omega_P^j$  avec :

$$j \in \left[ \frac{m}{2m+1}(P-1), \frac{m+1}{2m+1}(P-1) \right],$$

où  $\omega_P$  est le représentant de Teichmüller du caractère cyclotomique  $\text{Gal}(\mathbb{Q}_P(\mu_P)/\mathbb{Q}_P) \rightarrow \mathbb{F}_P^*$  (rappelons que l'on choisit un isomorphisme de  $\mu_{P-1}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$  sur  $\mu_{P-1}(\overline{\mathbb{Q}_P})$ ). On prolonge  $\rho'$  en un système compatible  $(\rho'_{\iota'})$  tel qu'il existe  $\iota'_\ell$  de caractéristique  $\ell$  avec  $\rho'_{\iota'_\ell}$  isomorphe à  $\rho'$  grâce à 6.1. On choisit  $\iota'_P$  de caractéristique  $P$  de sorte que  $\iota'_\ell$  et  $\iota'_P$  soient compatibles à l'identification  $\mu_{P-1}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \simeq \mu_{P-1}(\overline{\mathbb{Q}_P})$ . Il résulte alors de [47] et [9] que la réduction  $\overline{\rho'_{\iota'_P}}$ , tordue par une puissance convenable du caractère cyclotomique  $\overline{\chi_P}$ , est de poids  $j+2$  ou  $P+1-j$ . Le choix de  $j$  et le lemme 1 font que  $j+2$  et  $P+1-j$  sont  $\leq p+1$ . On a donc que  $\overline{\rho'_{\iota'_P}}$  est soit modulaire soit réductible. On s'assure que les théorèmes « MR » permettent d'en déduire que  $(\rho'_{\iota'})$ , puis que  $(\rho_\iota)$  sont modulaires, donc aussi  $\bar{\rho}$ . Ceci achève la preuve du théorème 2.1.

Le corollaire 1 résulte alors de la technique qui consiste à « tuer la ramification » ([36]). Si  $q \neq 2$ , on relève  $\bar{\rho}$  de poids 2 et de niveau  $q$  en un système compatible  $(\rho_\iota)$  qui est minimal de poids 2. On considère  $\overline{\rho_{\iota_q}}$  pour  $\iota_q$  de caractéristique  $q$ . On la relève en un système compatible qui est minimal, donc n'est pas ramifié en  $q$  (mais n'est plus en général de poids 2). On déduit du théorème 2.1 qu'il est modulaire.

Le corollaire 2 résulte du théorème et des théorèmes « MR » ([35]).

## RÉFÉRENCES

- [1] V. A. ABRASHKIN – « Ramification in étale cohomology », *Invent. Math.* **101** (1990), no. 3, p. 631–640.

- [2] J. ARTHUR & L. CLOZEL – *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies, vol. 120, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [3] L. BERGER – « Limites de représentations cristallines », *Compos. Math.* **140** (2004), no. 6, p. 1473–1498.
- [4] L. BERGER, H. LI & H. J. ZHU – « Construction of some families of 2-dimensional crystalline representations », *Math. Ann.* **329** (2004), no. 2, p. 365–377.
- [5] D. BLASIUŞ & J. D. ROGAWSKI – « Motives for Hilbert modular forms », *Invent. Math.* **114** (1993), no. 1, p. 55–87.
- [6] G. BÖCKLE – « A local-to-global principle for deformations of Galois representations », *J. reine angew. Math.* **509** (1999), p. 199–236.
- [7] ———, « Presentations of universal deformation rings », preprint, p. 1–27, 2005.
- [8] C. BREUIL – « Une remarque sur les représentations locales  $p$ -adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert », *Bull. Soc. Math. France* **127** (1999), no. 3, p. 459–472.
- [9] C. BREUIL & A. MÉZARD – « Multiplicités modulaires et représentations de  $GL_2(\mathbf{Z}_p)$  et de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  en  $l = p$  », *Duke Math. J.* **115** (2002), no. 2, p. 205–310, avec un appendice de Guy Henniart.
- [10] S. BRUEGGEMAN – « The nonexistence of certain Galois extensions unramified outside 5 », *J. Number Theory* **75** (1999), no. 1, p. 47–52.
- [11] A. BRUMER & K. KRAMER – « Non-existence of certain semistable abelian varieties », *Manuscripta Math.* **106** (2001), no. 3, p. 291–304.
- [12] K. BUZZARD & R. TAYLOR – « Companion forms and weight one forms », *Ann. of Math. (2)* **149** (1999), no. 3, p. 905–919.
- [13] H. CARAYOL – « Sur les représentations  $l$ -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), no. 3, p. 409–468.
- [14] ———, « Sur les représentations galoisiennes modulo  $l$  attachées aux formes modulaires », *Duke Math. J.* **59** (1989), no. 3, p. 785–801.
- [15] ———, « Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet », in  *$p$ -adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, p. 213–237.
- [16] H. DARMON, F. DIAMOND & R. TAYLOR – « Fermat’s last theorem », in *Current developments in mathematics*, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, p. 1–154.
- [17] P. DELIGNE – « Formes modulaires et représentations  $l$ -adiques », in *Séminaire Bourbaki*, Lect. Notes in Math., vol. 179, Springer, Berlin, 1971, exp. no 355, p. 139–172.
- [18] ———, « Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions  $L$  », in *Modular functions of one variable, II (Antwerp 1972)*, Lect. Notes in Math., vol. 349, Springer, Berlin, 1973, p. 501–597.
- [19] P. DELIGNE & J.-P. SERRE – « Formes modulaires de poids 1 », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), p. 507–530 (1975).

- [20] F. DIAMOND – « An extension of Wiles' results », in *Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995)*, Springer, New York, 1997, p. 475–489.
- [21] F. DIAMOND & R. TAYLOR – « Lifting modular mod  $l$  representations », *Duke Math. J.* **74** (1994), no. 2, p. 253–269.
- [22] ———, « Nonoptimal levels of mod  $l$  modular representations », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 435–462.
- [23] L. V. DIEULEFAIT – « Existence of families of Galois representations and new cases of the Fontaine-Mazur conjecture », *J. reine angew. Math.* **577** (2004), p. 147–151.
- [24] B. EDIXHOVEN – « The weight in Serre's conjectures on modular forms », *Invent. Math.* **109** (1992), no. 3, p. 563–594.
- [25] ———, « Serre's conjecture », in *Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995)*, Springer, New York, 1997, p. 209–242.
- [26] J. S. ELLENBERG – « Serre's conjecture over  $\mathbb{F}_9$  », *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 3, p. 1111–1142.
- [27] J.-M. FONTAINE – « Représentations  $l$ -adiques potentiellement semi-stables », in [29], p. 321–347.
- [28] ———, « Il n'y a pas de variété abélienne sur  $\mathbf{Z}$  », *Invent. Math.* **81** (1985), no. 3, p. 515–538.
- [29] ——— (éd.) – *Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette 1988)*, Astérisque, vol. 223, Soc. Math. France, Paris, 1994.
- [30] J.-M. FONTAINE & G. LAFFAILLE – « Construction de représentations  $p$ -adiques », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **15** (1982), no. 4, p. 547–608.
- [31] J.-M. FONTAINE & B. MAZUR – « Geometric Galois representations », in *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong 1993)*, Ser. Number Theory, vol. I, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, p. 41–78.
- [32] B. H. GROSS – « A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod  $p$ ) », *Duke Math. J.* **61** (1990), no. 2, p. 445–517.
- [33] H. HIDA – « On  $p$ -adic Hecke algebras for  $GL_2$  over totally real fields », *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 2, p. 295–384.
- [34] C. KHARE – « Serre's modularity conjecture: the level one case », *Duke Math. J.* **134** (2006), no. 3, p. 557–589.
- [35] ———, « Serre's modularity conjecture: a survey of the level one case ». Preprint 2006, <http://www.math.utah.edu/~shekhar/papers.html>, à paraître dans les Actes de «  $L$ -functions and Galois representations » (Durham 2004).
- [36] C. KHARE & J.-P. WINTENBERGER – « On Serre's reciprocity conjecture for 2-dimensional mod  $p$  representations of the Galois group  $G_{\mathbb{Q}}$  », arXiv : math.NT/0412076, 2004.
- [37] M. KISIN – « Modularity of some geometric Galois representations ». Preprint 2005, <http://www.math.uchicago.edu/~kisin/preprints.html>, à paraître dans les Actes de «  $L$ -functions and Galois representations » (Durham 2004).

- [38] J. MANOHARMAYUM – « Serre’s conjecture for mod 7 Galois representations », in *Modular curves and abelian varieties*, Progr. Math., vol. 224, Birkhäuser, Basel, 2004, p. 141–149.
- [39] B. MAZUR – « An introduction to the deformation theory of Galois representations », in *Modular forms and Fermat’s last theorem (Boston, MA, 1995)*, Springer, New York, 1997, p. 243–311.
- [40] L. MORET-BAILLY – « Groupes de Picard et problèmes de Skolem. I, II », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989), no. 2, p. 161–179, 181–194.
- [41] R. RAMAKRISHNA – « Deforming Galois representations and the conjectures of Serre and Fontaine-Mazur », *Ann. of Math. (2)* **156** (2002), no. 1, p. 115–154.
- [42] K. A. RIBET – « Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus », in *Modular functions of one variable, V (Bonn 1976)*, Lect. Notes in Math., vol. 601, Springer, Berlin, 1977, p. 17–51.
- [43] ———, « Report on mod  $l$  representations of  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  », in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, p. 639–676.
- [44] K. A. RIBET & W. A. STEIN – « Lectures on Serre’s conjectures », in *Arithmetic algebraic geometry (Park City 1999)*, IAS/Park City Math. Ser., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, 2001, p. 143–232.
- [45] T. SAITO – « Hilbert modular forms and  $p$ -adic Hodge theory ». Preprint 2004, arXiv : math/0612077.
- [46] ———, « Modular forms and  $p$ -adic Hodge theory », *Invent. Math.* **129** (1997), no. 3, p. 607–620.
- [47] D. SAVITT – « On a conjecture of Conrad, Diamond, and Taylor », *Duke Math. J.* **128** (2005), no. 1, p. 141–197.
- [48] R. SCHOOF – « Abelian varieties over  $\mathbf{Q}$  with bad reduction in one prime only », *Compos. Math.* **141** (2005), no. 4, p. 847–868.
- [49] J.-P. SERRE – « Formes modulaires et fonctions zêta  $p$ -adiques », in *Modular functions of one variable, III (Antwerp 1972)*, Lect. Notes in Math., vol. 350, Springer, Berlin, 1973, p. 191–268.
- [50] ———, « Valeurs propres des opérateurs de Hecke modulo  $l$  », in *Journées Arithmétiques (Bordeaux 1974)*, Astérisque, vol. 24-25, Soc. Math. France, Paris, 1975, p. 109–117.
- [51] ———, *Œuvres. Vol. III*, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 1972–1984.
- [52] ———, « Sur les représentations modulaires de degré 2 de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  », *Duke Math. J.* **54** (1987), no. 1, p. 179–230.
- [53] C. M. SKINNER & A. J. WILES – « Residually reducible representations and modular forms », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **89** (2000), p. 5–126.
- [54] ———, « Base change and a problem of Serre », *Duke Math. J.* **107** (2001), no. 1, p. 15–25.
- [55] ———, « Nearly ordinary deformations of irreducible residual representations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **10** (2001), no. 1, p. 185–215.



- [56] H. P. F. SWINNERTON-DYER – « On  $l$ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms », in *Modular functions of one variable, III (Antwerp 1972)*, Lect. Notes in Math., vol. 350, Springer, Berlin, 1973, p. 1–55.
- [57] J. TATE – « The non-existence of certain Galois extensions of  $\mathbf{Q}$  unramified outside 2 », in *Arithmetic geometry (Tempe, AZ, 1993)*, Contemp. Math., vol. 174, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, p. 153–156.
- [58] R. TAYLOR – « On Galois representations associated to Hilbert modular forms, I », *Invent. Math.* **98** (1989), no. 2, p. 265–280.
- [59] ———, « On Galois representations associated to Hilbert modular forms, II », in *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong 1993)*, Ser. Number Theory, vol. I, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, p. 41–78.
- [60] ———, « On the meromorphic continuation of degree two L-functions », *Doc. Math.*, extra volume: John H. Coates' Sixtieth Birthday (2006), p. 729–779.
- [61] ———, « Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), no. 1, p. 125–143.
- [62] ———, « On icosahedral Artin representations. II », *Amer. J. Math.* **125** (2003), no. 3, p. 549–566.
- [63] ———, « Galois representations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **13** (2004), no. 1, p. 73–119.
- [64] R. TAYLOR & A. WILES – « Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras », *Ann. of Math. (2)* **141** (1995), no. 3, p. 553–572.
- [65] T. TSUJI – *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: a survey*, Astérisque, vol. 279, Soc. Math. France, Paris, 2002, Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques, II.
- [66] J. TUNNELL – « Artin's conjecture for representations of octahedral type », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **5** (1981), no. 2, p. 173–175.
- [67] A. WILES – « Modular elliptic curves and Fermat's last theorem », *Ann. of Math. (2)* **141** (1995), no. 3, p. 443–551.
- [68] J.-P. WINTENBERGER – « On  $p$ -Adic Representations of  $G_Q$  », *Doc. Math.*, extra volume: John H. Coates' Sixtieth Birthday (2006), p. 819–827.

Jean-Pierre WINTENBERGER  
 Université Louis Pasteur et CNRS  
 I.R.M.A.  
 7, rue René Descartes  
 F-67084 Strasbourg Cedex  
 E-mail : wintenb@math.u-strasbg.fr

---

La conjecture de Serre (conjecture 1.2) est maintenant prouvée dans sa généralité, voir <http://www-irma.u-strasbg.fr/~wintenb/> : C. Khare et J.-P. Wintenberger, Serre's modularity conjecture (1)(2).



## LE THÉORÈME FORT DES GRAPHERS PARFAITS

par Gérard CORNUÉJOLS

### INTRODUCTION

Au début des années 1960, Claude Berge [1] a proposé deux conjectures sur les graphes parfaits. La première a été démontrée en 1972 par Laci Lovász [22]. La deuxième a fait couler beaucoup d'encre dans les 30 années qui ont suivi. Elle a été démontrée en 2002 par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas dans un article très impressionnant de 179 pages paru récemment dans les *Annals of Mathematics* [5]. Cet exposé présente cette conjecture célèbre et donne une idée de sa démonstration.

### 1. GRAPHERS PARFAITS

Un *graphe*  $G$  consiste en un ensemble fini  $V(G)$  de *sommets* et un ensemble  $A(G)$  de paires non ordonnées  $uv$  où  $u, v \in V(G)$  et  $u \neq v$ , appelées *arêtes*. (Pour le lecteur habitué à une définition plus générale de la notion de graphe, nous considérons ici des graphes finis sans boucles ni arêtes multiples.) Si  $uv$  est une arête, on dit que les sommets  $u$  et  $v$  sont *adjacents*, qu'ils sont les *extrémités* de l'arête  $uv$  et que l'arête  $uv$  est *incidente* à  $u$  et à  $v$ .

Dans un graphe  $G$ , un *stable* est un ensemble de sommets non adjacents deux à deux. Une *clique* est un ensemble de sommets adjacents deux à deux. On note  $\omega(G)$  la cardinalité d'une plus grande clique dans  $G$ , et  $\alpha(G)$  la cardinalité d'un plus grand stable. Une *k-coloration* de  $G$  est une partition des sommets de  $G$  en  $k$  stables (on appelle ces stables les *classes de couleur* de la *k-coloration*). Autrement dit, un graphe a une *k-coloration* s'il est possible de colorier ses sommets avec  $k$  couleurs distinctes de façon que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur. Le *nombre chromatique*  $\chi(G)$  est la plus petite valeur de  $k$  pour laquelle il existe une *k-coloration*. Il est clair que  $\omega(G) \leq \chi(G)$  puisque chaque sommet d'une clique doit être dans une classe de couleur différente. Un graphe  $H$  est un *sous-graphe induit* de

$G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  et  $A(H)$  est l'ensemble des arêtes de  $G$  dont les deux extrémités sont dans  $V(H)$ . Pour  $S \subseteq V(G)$ , on note  $G(S)$  le sous-graphe induit de  $G$  dont  $S$  est l'ensemble des sommets. On note  $G \setminus S$  le graphe  $G(V(G) - S)$ .

DÉFINITION 1.1. — *Un graphe  $G$  est parfait si  $\omega(H) = \chi(H)$  pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ .*

## 2. LES CONJECTURES DE CLAUDE BERGE

Un graphe est *minimalement imparfait* s'il n'est pas parfait, mais tous ses sous-graphes induits propres le sont. Évidemment, un graphe est parfait si et seulement si il ne contient pas de graphe minimalement imparfait comme sous-graphe induit. Quels sont les graphes minimalement imparfaits connus ? Un *trou* est un graphe avec  $k \geq 4$  sommets distincts  $v_1, \dots, v_k$  et  $k$  arêtes  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_kv_1$ . Un trou est *impair* si  $k$  est impair. Les trous impairs ne sont pas parfaits puisque leur nombre chromatique est égal à 3 et la plus grande clique a cardinalité 2. Il est facile de vérifier que les trous impairs sont minimalement imparfaits. Le *complément* d'un graphe  $G$  est le graphe  $\overline{G}$  qui a le même ensemble de sommets et où  $uv$  est une arête de  $\overline{G}$  si et seulement si  $uv$  n'est pas une arête de  $G$ . Il n'est pas très difficile de vérifier que les compléments des trous impairs sont aussi minimalement imparfaits.

Au début des années 1960, Claude Berge [1] a formulé la *Conjecture Forte des Graphes Parfaits* : les seuls graphes minimalement imparfaits sont les trous impairs et leurs compléments. Cette conjecture a suscité un très grand intérêt pendant quarante ans, jusqu'à sa résolution en mai 2002 par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas dans un article très impressionnant de 179 pages [5]. Claude Berge s'est éteint en juin 2002 sachant que sa conjecture célèbre est correcte.

THÉORÈME 2.1 (**Théorème Fort des Graphes Parfaits** (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas* [5]))

*Les seuls graphes minimalement imparfaits sont les trous impairs et leurs compléments.*

Nous allons présenter les idées principales de la démonstration de ce théorème. Il sera commode d'appeler *graphe de Berge* un graphe qui ne contient ni trou impair ni son complément comme sous-graphe induit. Tout graphe parfait est bien évidemment un graphe de Berge. Le Théorème Fort des Graphes Parfaits affirme que la réciproque est vraie : tout graphe de Berge est parfait.

Pour augmenter l'intérêt pour cette conjecture difficile, Claude Berge [1] avait formulé une deuxième conjecture, très jolie mais plus faible, disant qu'un graphe  $G$  est parfait si et seulement si son complément  $\overline{G}$  est parfait. Ray Fulkerson [18] s'est cassé les dents sur cette conjecture (mais a développé pour l'attaquer la belle théorie des

polyèdres antibloquants) et c'est Laci Lovász [22] qui l'a démontrée en 1972. Nous en donnons une démonstration courte et élégante proposée par Grigor Gasparyan [19] en 1996.

**THÉORÈME 2.2 (Théorème des Graphes Parfaits (Lovász [22]))**

*Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si son complément  $\overline{G}$  est parfait.*

*Démonstration.* — Nous allons démontrer le résultat suivant, dû à Lovász [21], et qui est plus fort.

**Assertion :** Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si, pour tout sous-graphe induit  $H$ , le nombre des sommets de  $H$  est au plus égal à  $\alpha(H)\omega(H)$ .

Cette assertion implique le théorème 2.2 puisque  $\alpha(H) = \omega(\overline{H})$  et  $\omega(H) = \alpha(\overline{H})$ .

*Démonstration de l'assertion.* — Si le graphe  $G$  est parfait, on a  $\omega(H) = \chi(H)$  pour tout sous-graphe induit  $H$  et l'inégalité de l'assertion découle directement du fait que le nombre des sommets de  $H$  est au plus égal à  $\alpha(H)\chi(H)$ .

Il suffit donc de démontrer la réciproque. Nous présentons la démonstration de Gasparyan [19]. Supposons que le graphe  $G$  ne soit pas parfait. Soit  $H$  un sous-graphe induit minimalement imparfait. Nous noterons  $n$  le nombre des sommets de  $H$ ,  $\alpha := \alpha(H)$  et  $\omega := \omega(H)$ . Le graphe  $H$  satisfait aux relations suivantes :

$$\omega = \chi(H \setminus v) \text{ pour tout } v \in V(H), \text{ et}$$

$$\omega = \omega(H \setminus S) \text{ pour tout stable } S \subseteq V(H).$$

Soit  $A_0$  un  $\alpha$ -stable de  $H$  (le terme  $\alpha$ -stable est un raccourci pour dire un stable de cardinalité  $\alpha$ ). On fixe une  $\omega$ -coloration dans chacun des  $\alpha$  graphes  $H \setminus s$  où  $s \in A_0$ . Soient  $A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$  les stables qui apparaissent comme classe de couleur dans l'un de ces coloriage. Soit  $\mathcal{A} := \{A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}\}$ . On définit la matrice d'incidence  $\mathbf{A}$  entre ces stables et les sommets de  $H$ . Donc  $a_{ij} = 1$  dans la matrice  $\mathbf{A}$  si et seulement si  $v_j \in A_i$ . Soit  $\mathcal{B} := \{B_0, B_1, \dots, B_{\alpha\omega}\}$  où  $B_i$  est une  $\omega$ -clique de  $H \setminus A_i$ . Soit  $\mathbf{B}$  la matrice d'incidence correspondante cliques-sommets.

Nous allons démontrer que  $\mathbf{A}\mathbf{B}^T = J - I$ , où  $J$  est la matrice remplie de uns et  $I$  est la matrice identité.

Considérons une  $\omega$ -coloration  $S_1, \dots, S_\omega$  de  $H \setminus s$ . Une  $\omega$ -clique  $B_i$  intersecte tous les  $S_j$  si  $s \notin B_i$  (puisque  $|B_i \cap S_j| \leq 1$  pour tout  $j$  et  $|B_i| = \omega$ ), et tous les  $S_j$  sauf un si  $s \in B_i$ . Comme chaque  $B_i$  a au plus un sommet dans  $A_0$ , il en découle que  $\mathbf{A}\mathbf{B}^T = J - I$ .

On fait maintenant appel à un argument d'algèbre linéaire. Puisque la matrice  $J - I$  a rang plein, on en déduit que les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ont chacune au moins autant de colonnes que de lignes, c'est-à-dire  $n \geq \alpha\omega + 1$ .  $\square$

Ayant démontré la Conjecture Faible des Graphes Parfaits (Théorème 2.2), nous allons maintenant nous attaquer à la Conjecture Forte (Théorème 2.1). Rappelez-vous qu'il suffit de démontrer que tout graphe de Berge est parfait. L'idée de la démonstration est que tout graphe de Berge ou bien fait partie d'une classe de graphes parfaits parmi quatre classes élémentaires connues, ou bien a un type de séparation qui ne peut pas se produire dans un graphe minimalement imparfait. Un tel résultat structurel démontre la Conjecture Forte puisqu'il implique qu'un graphe de Berge minimalement imparfait n'existe pas. Une petite remarque : on peut se contenter de séparations qui ne peuvent pas se produire dans un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets : cela implique aussi qu'un graphe de Berge minimalement imparfait n'existe pas. C'est un tel résultat structurel qu'ont démontré Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas [5].

### 3. QUATRE CLASSES ÉLÉMENTAIRES DE GRAPHES PARFAITS

Un graphe  $G$  est *biparti* si ses sommets peuvent se partitionner en deux ensembles  $V_1, V_2$  de façon que toutes les arêtes de  $G$  aient une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ . Les graphes bipartis sont parfaits puisque la bipartition induit deux classes de couleur et par conséquent  $\omega(H) = \chi(H)$  dans tout sous-graphe induit  $H$ .

Un graphe  $L$  est le *graphe lignes* du graphe  $G$  si  $V(L) = A(G)$  et deux sommets de  $L$  sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes de  $G$  ont un sommet en commun.

PROPOSITION 3.1. — *Le graphe lignes d'un graphe biparti est parfait.*

*Démonstration.* — L'indice chromatique  $\chi'(G)$  d'un graphe  $G$  est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier ses arêtes avec  $k$  couleurs distinctes de façon que deux arêtes ayant un sommet en commun ne soient pas de la même couleur. König [20] a démontré que l'indice chromatique d'un graphe biparti est égal au degré maximum  $\Delta(G)$  (le degré d'un sommet  $u$  est le nombre d'arêtes incidentes à  $u$ ).

Si  $L$  est le graphe lignes d'un graphe biparti  $G$ , on a  $\chi(L) = \chi'(G)$  et  $\omega(L) = \Delta(G)$ . Le théorème de König implique donc que  $\chi(L) = \omega(L)$ . La proposition découle maintenant du fait que les sous-graphes induits de  $L$  sont aussi des graphes lignes de graphes bipartis.  $\square$

Puisque les graphes bipartis et les graphes lignes de graphes bipartis sont parfaits, il découle du Théorème des Graphes Parfaits de Lovász (Théorème 2.2) que les compléments des graphes bipartis et des graphes lignes de graphes bipartis sont parfaits.

On peut aussi le vérifier directement, sans faire appel au Théorème des Graphes Parfaits. Pour résumer, nous avons introduit dans cette section quatre classes de graphes parfaits :

- les graphes bipartis et leurs compléments, et
- les graphes lignes de graphes bipartis et leurs compléments.

Nous appellerons ces classes de graphes les *classes élémentaires de graphes parfaits*.

#### 4. 2-JOINT, PAIRE HOMOGENÈME ET PARTITION ANTISYMMÉTRIQUE

Dans cette section, nous introduisons trois types de séparations qui ne peuvent pas se produire dans un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets.

##### 4.1. 2-joint

Un graphe  $G$  a un *2-joint* si ses sommets peuvent se partitionner en deux ensembles  $V_1, V_2$ , chacun de cardinalité au moins trois, contenant des sous-ensembles non vides disjoints  $A_1, B_1 \subseteq V_1$  et  $A_2, B_2 \subseteq V_2$ , tels que tous les sommets de  $A_1$  soient adjacents à tous les sommets de  $A_2$ , tous les sommets de  $B_1$  soient adjacents à tous les sommets de  $B_2$  et ces adjacences soient les seules entre  $V_1$  et  $V_2$ . Les 2-joints ont été introduits en 1985 par Cornuéjols et Cunningham [16].

Lorsqu'un graphe  $G$  a un 2-joint, on peut décomposer  $G$  en deux blocs  $G_1$  et  $G_2$ .

Pour définir ces blocs, nous avons besoin d'introduire les notions de chemin et de composante connexe. Un *chemin* dans un graphe  $G$  est une suite de sommets distincts  $u_1, \dots, u_k$  tels que  $u_i u_{i+1} \in A(G)$  pour  $i = 1, \dots, k-1$ . La *longueur* du chemin est égale à  $k-1$ . Les sommets  $u_1$  et  $u_k$  sont les *extrémités* du chemin et les autres sommets sont *intérieurs*. Un chemin est *induit* s'il n'existe pas d'arête  $u_i u_j$  pour  $i \geq 1$  et  $i+1 < j \leq k$ . Une *composante connexe* de  $G$  est un sous-graphe induit par un ensemble maximal de sommets tels qu'il existe un chemin entre chaque paire d'entre eux.

Nous pouvons maintenant définir les blocs  $G_1$  et  $G_2$ . Si  $A_2$  et  $B_2$  sont dans des composantes connexes différentes de  $G(V_2)$ , définir le *bloc*  $G_1$  comme étant  $G(V_1 \cup \{p_1, q_1\})$ , où  $p_1 \in A_2$  et  $q_1 \in B_2$ . Sinon, soit  $P_1$  un plus court chemin avec une extrémité dans  $A_2$  et l'autre dans  $B_2$ , et définir le *bloc*  $G_1$  comme étant  $G(V_1 \cup P_1)$ . Le bloc  $G_2$  est défini de façon similaire.

**THÉORÈME 4.1 (Théorème de Décomposition par 2-Joint (Cornuéjols et Cunningham [16]))**

*Soit  $G$  un graphe qui a un 2-joint. Le graphe  $G$  est parfait si et seulement si ses blocs  $G_1$  et  $G_2$  sont parfaits.*

COROLLAIRE 4.2. — *Si un graphe  $G$  minimalement imparfait a un 2-joint, alors  $G$  est un trou impair.*

*Démonstration.* — Puisque  $G$  n'est pas parfait, le théorème 4.1 implique que le bloc  $G_1$  ou  $G_2$  n'est pas parfait ; prenons le cas  $G_1$ . Puisque  $G_1$  est un sous-graphe induit de  $G$  et que  $G$  est minimalement imparfait, il en découle que  $G = G_1$ . Puisque  $|V_2| \geq 3$ , ces sommets forment un chemin induit de  $G$  et par conséquent  $G$  est un graphe minimalement imparfait avec un sommet de degré deux. Un tel graphe est un trou impair [24].  $\square$

#### 4.2. Paire homogène

La notion de paire homogène a été introduite en 1987 par Chvátal et Sbihi [11]. Un graphe  $G$  a une *paire homogène* si  $V(G)$  peut être partitionné en sous-ensembles  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B$  tels que :

- $|A_1| + |A_2| \geq 3$  et  $|B| \geq 2$ .
- Si un sommet de  $B$  est adjacent à un sommet de  $A_i$ , alors il est adjacent à tous les sommets de  $A_i$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ .

THÉORÈME 4.3 (**Théorème de la Paire Homogène** (Chvátal et Sbihi [11]))

*Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir de paire homogène.*

#### 4.3. Partition antisymétrique

Un graphe  $G$  a une *partition antisymétrique* si ses sommets peuvent se partitionner en quatre ensembles non vides  $A, B, C, D$  tels que  $V(G)$  contienne toutes les arêtes possibles entre  $A$  et  $B$  et aucune arête entre  $C$  et  $D$ . Chvátal [8] a introduit cette notion en 1985 et il a conjecturé qu'aucun graphe minimalement imparfait ne peut avoir de partition antisymétrique. Il a remarqué que la conjecture est vraie dans le cas où  $|A| = 1$ , qu'il appelle *étoile d'articulation*.

LEMME 4.4 (**Lemme de l'Étoile d'Articulation** (Chvátal [8]))

*Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir d'étoile d'articulation.*

*Démonstration.* — Supposons qu'un graphe  $G$  minimalement imparfait ait une étoile d'articulation  $A, B, C, D$ . Soient  $G_1$  le graphe induit par  $A \cup B \cup C$  et  $G_2$  le graphe induit par  $A \cup B \cup D$ . Les graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont parfaits. Dans une  $\omega(G)$ -coloration de  $G_i$ , soit  $S_i$  la classe de couleur qui contient le sommet unique de  $A$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ . Le stable  $S_i$  intersecte toutes les  $\omega(G)$ -cliques de  $G_i$ , i.e.  $\omega(G \setminus (S_1 \cup S_2)) < \omega(G)$ . Il en découle que le graphe  $G \setminus (S_1 \cup S_2)$  peut être colorié avec moins d' $\omega(G)$  couleurs, puisque c'est un graphe parfait. Comme  $S_1 \cup S_2$  est un stable,  $G$  peut être colorié avec  $\omega(G)$  couleurs, une contradiction.  $\square$

C'est Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [5] qui sont venus à bout de la conjecture de Chvátal sur les partitions antisymétriques.



THÉORÈME 4.5 (**Théorème de la Partition Antisymétrique** (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas* [5]))

*Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir de partition antisymétrique.*

Malheureusement, pour démontrer ce résultat, ils utilisent le Théorème Fort des Graphes Parfaits! C'est bien dommage car on aurait besoin d'un résultat de ce genre pour démontrer le Théorème Fort des Graphes Parfaits. Que faire? Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas commencent par démontrer un résultat intermédiaire plus faible que le théorème 4.5.

Une partition antisymétrique est *équilibrée* si

(i) tout chemin induit de longueur au moins 2 dans  $G$  avec ses extrémités dans  $A \cup B$  et ses sommets intérieurs dans  $C \cup D$  est pair, et

(ii) tout chemin induit de longueur au moins 2 dans  $\overline{G}$  avec ses extrémités dans  $C \cup D$  et ses sommets intérieurs dans  $A \cup B$  est pair.

THÉORÈME 4.6 (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas* [4])

*Un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets ne peut pas avoir de partition antisymétrique équilibrée.*

Nous allons démontrer le théorème 4.6. Nous aurons besoin du Lemme de Duplication de Lovász [22]. Pour l'anecdote, ce lemme était la seule pièce qui manquait à Fulkerson pour démontrer le Théorème des Graphes Parfaits. Fulkerson s'était convaincu que ce lemme était sans doute faux, et il n'avait donc pas essayé très sérieusement de le démontrer. Fulkerson [18] dit : « In the Spring of 1971, I received a postcard from Berge saying that he had just heard that Lovász had a proof of the perfect graph conjecture. This immediately rekindled my interest, naturally, and so I sat down at my desk and thought again about the replication lemma. Some four or five hours later, I saw a simple proof of it ».

LEMME 4.7 (**Lemme de Duplication** (*Lovász* [22])). — *Soient  $G$  un graphe parfait et  $v \in V(G)$ . Créer un nouveau sommet  $v'$  et le joindre à  $v$  et à tous les voisins de  $v$ . Le graphe  $G'$  qui en résulte est parfait.*

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer que  $\chi(G') = \omega(G')$  puisque, pour les sous-graphes induits, la démonstration est identique. Nous distinguons deux cas.

**Cas 1.** Le sommet  $v$  est contenu dans une clique maximum de  $G$ . Alors  $\omega(G') = \omega(G) + 1$ . Ceci implique que  $\chi(G') = \omega(G')$ , puisqu'une nouvelle couleur est nécessaire dans  $G'$ .

**Cas 2.** Le sommet  $v$  n'est contenu dans aucune clique maximum de  $G$ . Dans une  $\omega(G)$ -coloration de  $G$ , considérons la classe  $S$  de couleur contenant  $v$ . On a  $\omega(G \setminus (S - \{v\})) = \omega(G) - 1$ , puisque toutes les cliques maximums de  $G$  intersectent  $S - \{v\}$ . La perfection du graphe  $G$  implique que le graphe  $G \setminus (S - \{v\})$  peut être colorié

avec  $\omega(G) - 1$  couleurs. En utilisant une couleur supplémentaire pour les sommets de  $(S - \{v\}) \cup \{v'\}$ , on obtient une  $\omega(G)$ -coloration de  $G'$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 4.6.* — Soit  $G$  un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets. Supposons que  $G$  ait une partition antisymétrique équilibrée  $A, B, C, D$ . Le Lemme de l'Étoile d'Articulation 4.4 implique que chacun des ensembles  $A, B, C, D$  a cardinalité au moins deux. Soit  $G'$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un sommet  $v$  adjacent à tous les sommets de  $A$  et à aucun autre sommet de  $G$ . Si  $G'$  contient un trou impair, alors  $G$  a un chemin impair qui contredit (i) dans la définition d'une partition antisymétrique équilibrée. De la même façon, si  $\overline{G'}$  contient un trou impair, cela contredit (ii). Donc  $G'$  est un graphe de Berge. Considérons maintenant  $G_1 = G' \setminus D$  et  $G_2 = G' \setminus C$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , le graphe  $G_i$  est parfait puisque c'est un graphe de Berge avec moins de sommets que  $G$ . On duplique le sommet  $v$  dans  $G_i$  jusqu'à ce que  $v$  appartienne à une clique de cardinalité  $\omega(G)$ . Le Lemme de Duplication 4.7 implique que le graphe  $R_i$  qui en résulte est parfait. Donc  $R_1$  admet une  $\omega(G)$ -coloration et de même  $R_2$  admet une  $\omega(G)$ -coloration. Ces deux colorations ont le même nombre de couleurs dans  $A$ . On suppose sans perte de généralité que ces couleurs sont numérotées  $1, 2, \dots, k$ . Soit  $K$  le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets de couleurs  $1, 2, \dots, k$  et soit  $H$  le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets coloriés avec les autres couleurs. Puisque toutes les cliques de  $G$  sont dans  $G \setminus D$  ou  $G \setminus C$ , la plus grande clique dans  $K$  a cardinalité  $k$  et la plus grande clique dans  $H$  a cardinalité  $\omega(G) - k$ . Les graphes  $H$  et  $K$  sont parfaits puisque ce sont des sous-graphes propres de  $G$ . Colorier  $K$  avec  $k$  couleurs et  $H$  avec  $\omega(G) - k$  couleurs. On a ainsi colorié le graphe  $G$  avec  $\omega(G)$  couleurs, ce qui contredit l'hypothèse que  $G$  est minimalement imparfait.  $\square$

Le théorème 4.6 a été annoncé pour la première fois par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas en septembre 2001 à un atelier à Princeton [4]. Ce résultat clé justifie l'usage des partitions antisymétriques équilibrées dans un théorème structurel sur les graphes de Berge, dans le but de démontrer la Conjecture Forte des Graphes Parfaits. Et c'est bien cette structure que Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [5] utilisent à fond dans leur article. Ils sont cependant parvenus à se débarrasser de la condition d'équilibrage en janvier 2002 (Chudnovsky et Seymour [6]) :

THÉORÈME 4.8 (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas* [5])

*Un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets ne peut pas avoir de partition antisymétrique.*

## 5. DÉCOMPOSITION DES GRAPHES DE BERGE

Conforti, Cornuéjols et Vušković avaient proposé l'approche suivante pour résoudre la Conjecture Forte des Graphes Parfaits.

CONJECTURE 5.1 (**Conjecture de Décomposition** (*Conforti, Cornuéjols et Vušković*, février 2001))

*Tout graphe de Berge  $G$  est un graphe parfait élémentaire ou a une partition antisymétrique, ou  $G$  ou  $\overline{G}$  a un 2-joint.*

Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas ont démontré la variation suivante de cette conjecture en juin 2002.

THÉORÈME 5.2 (**Théorème de Décomposition** (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas* [5]))

*Tout graphe de Berge  $G$  est un graphe parfait élémentaire ou a une partition antisymétrique, ou a une paire homogène, ou  $G$  ou  $\overline{G}$  a un 2-joint.*

Ce théorème implique le Théorème Fort des Graphes Parfaits. En effet, supposons que le Théorème de Décomposition soit vrai et qu'il existe un graphe  $G$  minimalement imparfait distinct d'un trou impair ou de son complément. Choisissons  $G$  avec le plus petit nombre de sommets.  $G$  ne peut pas avoir de partition antisymétrique par le théorème 4.8.  $G$  ne peut pas avoir de paire homogène par le théorème 4.3. Ni  $G$  ni  $\overline{G}$  ne peuvent avoir de 2-joint par le corollaire 4.2. Puisque  $G$  est un graphe de Berge, le Théorème de Décomposition implique que  $G$  est un graphe parfait élémentaire, ce qui contredit l'hypothèse que  $G$  est minimalement imparfait.

Le théorème 5.2 était déjà connu dans plusieurs cas particuliers, par exemple lorsque  $G$  est un graphe de Meyniel (Burlet et Fonlupt [2] en 1984), lorsque  $G$  est sans griffe (Chvátal et Sbihi [10] en 1988 et Maffray et Reed [23] en 1999), sans diamant (Fonlupt et Zemirline [17] en 1987), sans taureau (Chvátal et Sbihi [11] en 1987), ou sans fléchette (Chvátal, Fonlupt, Sun et Zemirline [9] en 2000). Ces résultats font intervenir des partitions antisymétriques très particulières (telles que les étoiles d'articulation) et, plus exceptionnellement, des paires homogènes [11] ou des 2-joints très particuliers [23]. En 1999, Conforti et Cornuéjols [12] utilisent des 2-joints plus généraux pour démontrer la conjecture 5.1 pour une classe de graphes de Berge qui contient tous les graphes bipartis et tous les graphes lignes de graphes bipartis. [12] est le précurseur d'une série de résultats faisant intervenir les 2-joints, tels que celui-ci, obtenu en février 2001 :

THÉORÈME 5.3 (*Conforti, Cornuéjols et Vušković* [14]). — *Tout graphe de Berge sans carré est biparti ou le graphe lignes d'un graphe biparti, ou a un 2-joint ou une étoile d'articulation.*

La démonstration du théorème 5.2 s'est faite en trois étapes, l'une plus impressionnante que l'autre, chacune nécessitant une cinquantaine de pages très denses. Le premier résultat a été annoncé en septembre 2001.

THÉORÈME 5.4 (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [4]*)

*Si  $G$  est un graphe de Berge qui contient le graphe lignes d'une sous-division bipartite d'un graphe 3-connexe, alors  $G$  a une partition antisymétrique équilibrée, ou  $G$  ou  $\overline{G}$  a un 2-joint ou est le graphe lignes d'un graphe biparti.*

Étant donnés deux triangles disjoints  $a_1, a_2, a_3$  et  $b_1, b_2, b_3$ , un *prisme subdivisé* est un graphe induit par trois chemins disjoints,  $P^1 = a_1, \dots, b_1$ ,  $P^2 = a_2, \dots, b_2$  et  $P^3 = a_3, \dots, b_3$ , dont l'un au moins a une longueur plus grande que un, et tels que les seules adjacences entre sommets de chemins distincts  $P^1, P^2, P^3$  sont les arêtes des deux triangles. Le deuxième résultat, obtenu en janvier 2002 (Chudnovsky et Seymour [6]), est un réel tour de force et une étape clé dans la démonstration du Théorème Fort des Graphes Parfaits. Ce résultat est utilisé en particulier pour démontrer le théorème 4.8.

THÉORÈME 5.5 (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [5]*)

*Si  $G$  est un graphe de Berge qui contient un prisme subdivisé, alors  $G$  est le graphe lignes d'un graphe biparti, ou  $G$  a une partition antisymétrique équilibrée ou une paire homogène, ou  $G$  ou  $\overline{G}$  a un 2-joint.*

La dernière étape est le théorème difficile suivant, démontré en mai 2002 (Chudnovsky et Seymour [7]).

THÉORÈME 5.6 (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [5]*)

*Si  $G$  est un graphe de Berge qui ne contient ni prisme subdivisé ni son complément, alors  $G$  est un graphe parfait élémentaire, ou a une partition antisymétrique, ou  $G$  ou  $\overline{G}$  a un 2-joint.*

Les théorèmes 5.5 et 5.6 impliquent le Théorème de Décomposition 5.2, et par conséquent le Théorème Fort des Graphes Parfaits.

En mars 2001, Conforti, Cornuéjols et Vušković [13] avaient démontré une version plus faible de la Conjecture de Décomposition où l'expression « partition antisymétrique » est remplacée par « étoile double d'articulation ». Une *étoile double* est un ensemble  $S$  de sommets dont deux sont adjacents, disons  $u$  et  $v$ , et tous les autres sommets de  $S$  sont adjacents à  $u$  ou  $v$ .  $S \subseteq V(G)$  est un ensemble *d'articulation* si  $G \setminus S$  a au moins deux composantes connexes. Il est clair que si  $G$  a une partition antisymétrique, alors  $G$  a une étoile double d'articulation : choisir  $S = A \cup B$ ,  $u \in A$  et  $v \in B$ . Bien que le résultat de décomposition [13] soit plus faible que la conjecture 5.1 pour les graphes de Berge, il s'applique à une classe de graphes plus grande : tous les graphes sans trou impair.

THÉORÈME 5.7 (*Conforti, Cornuéjols et Vušković [13]*). — *Si  $G$  est un graphe sans trou impair, alors  $G$  est un graphe biparti ou le graphe lignes d'un graphe biparti*

ou le complément du graphe lignes d'un graphe biparti, ou  $G$  a une étoile double d'articulation ou un 2-joint.

## 6. LE LEMME MERVEILLEUX

Un résultat de Roussel et Rubio [25] s'avère être un outil très utile dans l'étude des graphes de Berge. Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [4] l'ont popularisé sous le nom de *Lemme Merveilleux*. Il est utilisé de façon répétée dans les démonstrations des théorèmes 5.4-5.6.

LEMME 6.1 (**Le Lemme Merveilleux** (Roussel et Rubio [25]))

Soit  $G$  un graphe de Berge dont  $V(G)$  peut être partitionné en un ensemble  $S$  et un chemin induit  $P = u, u', \dots, v', v$  de longueur impaire au moins 3 tel que  $u, v$  soient tous les deux adjacents à tous les sommets de  $S$  et  $\overline{G}(S)$  soit connexe. Alors on a l'une des alternatives suivantes :

(i) Un nombre impair d'arêtes de  $P$  ont leurs deux extrémités adjacentes à tous les sommets de  $S$ .

(ii)  $P$  a longueur 3 et  $\overline{G}(S \cup \{u', v'\})$  contient un chemin induit impair entre  $u'$  et  $v'$ .

(iii)  $P$  a longueur au moins 5 et il existe deux sommets non adjacents  $x, x'$  dans  $S$  tels que  $(P \setminus \{u, v\}) \cup \{x, x'\}$  induise un chemin.

## 7. RECONNAISSANCE DES GRAPHERS PARFAITS

L'autre grande question sur les graphes parfaits qui est restée ouverte pendant des décennies était leur reconnaissance en temps polynomial. Cette question a été résolue récemment par Maria Chudnovsky, Gérard Cornuéjols, Xinming Liu, Paul Seymour et Kristina Vušković [3].

## RÉFÉRENCES

- [1] C. BERGE – « Färbung von Graphen deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind (Zusammenfassung) », *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturwiss. Reihe* **10** (1961), p. 114–115.
- [2] M. BURLET & J. FONLUPT – « Polynomial algorithm to recognize a Meyniel graph », *Ann. Discrete Math.* **21** (1984), p. 225–252.
- [3] M. CHUDNOVSKY, G. CORNUÉJOLS, X. LIU, P. SEYMOUR & K. VUŠKOVIĆ – « Recognizing Berge graphs », *Combinatorica* **25** (2005), no. 2, p. 143–186.

- [4] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. SEYMOUR & R. THOMAS – « Workshop on Graph Colouring and Decomposition », exposé oral, Princeton, septembre 2001.
- [5] ———, « The strong perfect graph theorem », *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), no. 1, p. 51–229.
- [6] M. CHUDNOVSKY & P. SEYMOUR – communication personnelle, janvier 2002.
- [7] ———, communication personnelle, mai 2002.
- [8] V. CHVÁTAL – « Star-cutsets and perfect graphs », *J. Combin. Theory Ser. B* **39** (1985), no. 3, p. 189–199.
- [9] V. CHVÁTAL, J. FONLUPT, L. SUN & A. ZEMIRLINE – « Recognizing dart-free perfect graphs », *SIAM J. Comput.* **31** (2002), no. 5, p. 1315–1338.
- [10] V. CHVÁTAL & N. SBIHI – « Recognizing claw-free perfect graphs », *J. Combin. Theory Ser. B* **44** (1988), no. 2, p. 154–176.
- [11] ———, « Bull-free Berge graphs are perfect », *Graphs Combin.* **3** (1987), no. 2, p. 127–139.
- [12] M. CONFORTI & G. CORNUÉJOLS – « Graphs without odd holes, parachutes or proper wheels: a generalization of Meyniel graphs and of line graphs of bipartite graphs », *J. Combin. Theory Ser. B* **87** (2003), no. 2, p. 300–330.
- [13] M. CONFORTI, G. CORNUÉJOLS & K. VUŠKOVIĆ – « Decomposition of odd-hole-free graphs by double star cutsets and 2-joins », *Discrete Appl. Math.* **141** (2004), no. 1-3, p. 41–91.
- [14] ———, « Square-free perfect graphs », *J. Combin. Theory Ser. B* **90** (2004), no. 2, p. 257–307.
- [15] M. CONFORTI, G. CORNUÉJOLS & G. ZAMBELLI – « Decomposing Berge graphs containing no proper wheel, subdivided prism or their complements », *Combinatorica* **26** (2006), p. 533–558.
- [16] G. CORNUÉJOLS & W. H. CUNNINGHAM – « Compositions for perfect graphs », *Discrete Math.* **55** (1985), no. 3, p. 245–254.
- [17] J. FONLUPT & A. ZEMIRLINE – « A polynomial recognition algorithm for perfect  $K_4$ -free graphs », 1986, rapport technique RT-16, Artemis, IMAG, Grenoble, France.
- [18] D. R. FULKERSON – « On the perfect graph theorem », in *Mathematical programming (Madison 1972)*, Math. Res. Center Publ., vol. 30, Academic Press, New York, 1973, p. 69–76.
- [19] G. S. GASPARIAN – « Minimal imperfect graphs: a simple approach », *Combinatorica* **16** (1996), no. 2, p. 209–212.
- [20] D. KÖNIG – « Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre », *Math. Ann.* **77** (1916), no. 4, p. 453–465.
- [21] L. LOVÁSZ – « A characterization of perfect graphs », *J. Combinatorial Theory Ser. B* **13** (1972), p. 95–98.

- [22] ———, « Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture », *Discrete Math.* **2** (1972), no. 3, p. 253–267.
- [23] F. MAFFRAY & B. A. REED – « A description of claw-free perfect graphs », *J. Combin. Theory Ser. B* **75** (1999), no. 1, p. 134–156.
- [24] M. W. PADBERG – « Perfect zero-one matrices », *Math. Programming* **6** (1974), p. 180–196.
- [25] F. ROUSSEL & P. RUBIO – « About skew partitions in minimal imperfect graphs », *J. Combin. Theory Ser. B* **83** (2001), no. 2, p. 171–190.

Gérard CORNUÉJOLS

Laboratoire d'Informatique Fondamentale  
Faculté des Sciences de Luminy  
F-13288 Marseille, France  
et  
Tepper School of Business and  
Department of Mathematical Sciences  
Carnegie Mellon University  
Pittsburgh, PA 15213 – U.S.A.  
*E-mail* : gc0v@andrew.cmu.edu





## ESPACES ANALYTIQUES $p$ -ADIQUES AU SENS DE BERKOVICH

par **Antoine DUCROS**

### INTRODUCTION

Le but de ce texte est de présenter les fondements, ainsi qu'un certain nombre d'applications, d'une théorie qu'a proposée voici quinze ans Vladimir Berkovich ([6], [7], cf. aussi [12]), et qui a constitué un nouveau point de vue sur la *géométrie analytique ultramétrique*. Commençons par expliquer succinctement en quoi consiste cette dernière, par évoquer les problèmes qui surgissent naturellement lorsqu'on l'aborde, et par décrire dans les grandes lignes différentes approches (celle de Tate, celle de Raynaud, et plus récemment donc celle de Berkovich) qui permettent de les contourner.

Une valeur absolue  $|\cdot|$  sur un corps  $k$  est dite *ultramétrique* si  $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$  pour tout couple  $(a, b)$  d'éléments de  $k$ ; dans ce cas  $|a + b| = \max(|a|, |b|)$  dès que  $|a|$  et  $|b|$  diffèrent. Un *corps ultramétrique* est un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique. Les boules fermées de rayon non nul sont des parties ouvertes d'un tel corps; la topologie dont il hérite est donc totalement discontinue, et ce indépendamment de son éventuelle complétude. Si  $k$  est un corps ultramétrique, on désignera par  $k^o$  (resp.  $k^{oo}$ ) le sous-ensemble de  $k$  formé des éléments de valeur absolue inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à 1. Il est immédiat que  $k^o$  est un sous-anneau de  $k$  dont  $k^{oo}$  est l'unique idéal maximal. Le quotient, souvent appelé *corps résiduel de  $k$* , sera noté  $\tilde{k}$ .

Dans toute la suite on s'intéressera la plupart du temps à des corps ultramétriques *complets*. Le prototype d'un tel objet est le corps  $\mathbb{Q}_p$  des nombres  $p$ -adiques, où  $p$  est un nombre premier donné. Rappelons brièvement sa construction : pour tout rationnel  $r$  non nul, il existe un unique entier relatif  $v_p(r)$  tel que  $r$  puisse s'écrire  $p^{v_p(r)}a/b$  avec  $a$  et  $b$  premiers à  $p$ . On choisit<sup>(1)</sup> un réel  $\varepsilon$  dans l'intervalle  $]0; 1[$ , et l'on munit  $\mathbb{Q}$  de

---

<sup>(1)</sup>Rien de ce qui suit ne dépend de ce choix. Il est fréquent de prendre  $\varepsilon$  égal à  $1/p$ ; cette normalisation a l'avantage d'être compatible avec l'effet de la multiplication sur la mesure de Haar de  $\mathbb{Z}_p$ , et de donner lieu, lorsqu'on l'adopte pour *chacun* des nombres premiers, à la « formule du produit » : si  $x$  appartient à  $\mathbb{Q}^*$  le produit de toutes ses valeurs absolues (les  $p$ -adiques et la traditionnelle) est alors égal à 1.

la valeur absolue qui envoie tout élément  $r$  de  $\mathbb{Q}^*$  sur  $\varepsilon^{v_p(r)}$ . Elle est ultramétrique, et on appelle  $\mathbb{Q}_p$  le complété correspondant de  $\mathbb{Q}$ . Un élément de  $\mathbb{Q}_p$  a une unique écriture de la forme  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i p^i$  où les  $a_i$  appartiennent à  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  et sont nuls *en dessous* d'un certain rang ; les opérations se font à l'aide de l'algorithme habituel, avec retenues. L'anneau  $\mathbb{Q}_p^o$  est simplement noté  $\mathbb{Z}_p$  et s'identifie à  $\{\sum_{i \geq 0} a_i p^i\}$  ; son idéal maximal est  $\{\sum_{i > 0} a_i p^i\}$  et le corps résiduel  $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$  est naturellement isomorphe à  $\mathbb{F}_p$ . Le groupe  $|\mathbb{Q}_p^*|$  est égal à  $\varepsilon^{\mathbb{Z}}$ . L'anneau  $\mathbb{Z}_p$  est compact par un argument séquentiel élémentaire ; il en découle que  $\mathbb{Q}_p$  est localement compact.

Soit  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ . La valeur absolue de ce dernier s'y prolonge de manière unique, mais  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  n'est pas complet, comme on peut (par exemple) le déduire du théorème de Baire ; son complété  $\mathbb{C}_p$  reste par contre algébriquement clos. C'est en quelque sorte l'analogue  $p$ -adique du corps  $\mathbb{C}$  auquel il est d'ailleurs abstraitement isomorphe, puisque tous deux ont même degré de transcendance sur  $\mathbb{Q}$ , à savoir la puissance du continu. Le groupe  $|\mathbb{C}_p^*|$  est égal à  $\varepsilon^{\mathbb{Q}}$ , et  $\widetilde{\mathbb{C}}_p$  est une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{F}}_p$  de  $\mathbb{F}_p$ . Notons que  $\mathbb{C}_p$  n'est pas localement compact. Pour le voir, il suffit de montrer que  $\mathbb{C}_p^o$  n'est pas compact. Or il est la réunion disjointe des  $\pi^{-1}(\lambda)$ , où  $\lambda$  parcourt  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et où  $\pi$  est la flèche quotient ; et pour tout  $\lambda$  appartenant à  $\overline{\mathbb{F}}_p$  le sous-ensemble  $\pi^{-1}(\lambda)$  de  $\mathbb{C}_p^o$  est une boule unité ouverte (dont n'importe quel élément de  $\pi^{-1}(\lambda)$  est un centre), d'où la conclusion.

Le rôle majeur joué en théorie des nombres et en géométrie arithmétique par les corps  $p$ -adiques a incité à développer sur ces derniers, autant que faire se pouvait, une théorie analogue à celle des espaces analytiques complexes. Partons plus généralement d'un corps ultramétrique complet  $k$ . Les notions classiques de fonction développable en série entière ou de rayon de convergence gardent un sens sur  $k$  et s'y comportent bien, voire d'une certaine manière mieux que sur  $\mathbb{C}$  : en effet une série à valeurs dans  $k$  converge *si et seulement si son terme général tend vers zéro*. On peut dès lors donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément  $\sum a_I \mathbf{T}^I$  de  $k[[\mathbf{T}]]$ , où  $\mathbf{T}$  désigne une famille finie d'indéterminées, converge sur le polydisque unité *fermé*  $\mathbf{D}$  de dimension correspondante : il faut et il suffit que  $|a_I|$  tende vers zéro lorsque la longueur  $|I|$  du multi-indice  $I$  tend vers l'infini. Cette remarque explique le rôle central que jouent en géométrie analytique ultramétrique, et ce quel que soit le point de vue adopté, les lieux de zéros de fonctions analytiques sur un polydisque fermé ; un espace isomorphe à un tel lieu sera qualifié d'*affinoïde*.

Malgré ces débuts plutôt favorables, le bât blesse très rapidement en raison de la totale discontinuité de  $k$ . Ainsi sa boule unité fermée étant ouverte, la fonction indicatrice correspondante est localement constante, et *a fortiori* localement développable en série entière sur  $k$  ; or il est clair qu'elle ne saurait, en aucun sens raisonnable, être considérée comme globalement analytique.

*L'approche de Tate : la géométrie rigide* ([62], cf. aussi [16]). — Sur un espace analytique complexe, on considère une propriété comme étant de nature locale lorsqu'il

suffit de la tester sur un recouvrement ouvert. La transposition telle quelle de cette définition au cadre ultramétrique conduit, comme on vient de le signaler, à des aberrations ; l'idée de Tate a consisté à la modifier, en se restreignant à une classe particulière de recouvrements ouverts qu'il qualifie d'*admissibles*. Le cadre théorique utilisé pour ce faire est celui des *topologies de Grothendieck*, qui reposent précisément sur l'axiomatisation de la notion de recouvrement. Sans entrer dans les détails techniques, indiquons qu'un recouvrement est admissible lorsque, moralement, il y a suffisamment de chevauchement entre les ouverts qui le constituent pour que les conditions de coïncidence sur les intersections soient significativement contraignantes ; l'écriture de  $k$  comme réunion disjointe de  $k^\circ$  et de son complémentaire est l'exemple typique à exclure.

Les objets de la théorie de Tate, appelés *espaces analytiques rigides sur le corps  $k$* , sont ainsi des espaces topologiques totalement discontinus sur lesquels on distingue certaines familles d'ouverts, dont on dit qu'elles forment un recouvrement admissible de leur réunion. On sait définir les fonctions analytiques sur ces espaces, et elles se recollent parfaitement pourvu qu'on se limite aux recouvrements admissibles. Par ailleurs tout espace analytique rigide possède un recouvrement admissible par des espaces affinoïdes<sup>(2)</sup> : ces derniers sont en quelque sorte les « briques élémentaires » de la géométrie rigide, celles sur lesquelles tout est modelé.

*L'approche de Raynaud : les schémas formels à éclatement près* ([19]–[22], [56])

Indépendamment de sa nature précise, un espace analytique rigide est d'après ce qui précède défini localement par des équations analytiques à coefficients dans  $k$ . Raynaud part quant à lui d'un système d'équations analytiques (comprenant d'éventuelles données de recollement) à coefficients dans  $k^\circ$ . On peut les réduire modulo  $k^{\circ\circ}$ , et en raison de leur convergence on obtient ainsi des *polynômes* sur le corps  $\tilde{k}$ . Bien entendu, pour que cette opération présente quelque intérêt, le système de départ doit être choisi convenablement : si par exemple on multiplie toutes les équations par un élément de  $k^{\circ\circ}$ , leurs réductions deviennent nulles et on ne pourra pas espérer en tirer quoi que ce soit.

Techniquement, la notion de « système convenable d'équations analytiques à coefficients dans  $k^\circ$  » se traduit par *schéma formel plat et topologiquement de présentation finie sur  $k^\circ$* . Un tel schéma formel possède une *fibre spéciale*, à savoir la variété algébrique sur  $\tilde{k}$  obtenue par réduction modulo  $k^{\circ\circ}$  des équations qui le définissent, et une *fibre générique* qui n'est autre que l'espace analytique rigide sur  $k$  donné par les équations en question. Tout espace analytique rigide qui est réunion d'un nombre fini

<sup>(2)</sup> Un tel espace, on l'a vu, est défini par un système d'équations analytiques  $S$  à coefficients dans  $k$  ; dans l'approche de Tate il consiste précisément en l'ensemble des solutions de  $S$  dans une clôture algébrique  $\tilde{k}$  de  $k$  quotienté par l'action de Galois.

d'espaces affinoïdes<sup>(3)</sup> est isomorphe à la fibre générique d'un schéma formel convenue, et les fibres génériques de deux schémas formels donnés sont isomorphes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite d'éclatements et de contractions formels; le remplacement sur  $\mathbb{Z}_p$  d'une indéterminée  $x$  par  $x/p$  est un exemple de telle transformation. C'est sur ces théorèmes que se fonde le point de vue de Raynaud; il consiste à travailler dans la catégorie des schémas formels plats et de présentation finie sur  $k^\circ$  en décrétant inversibles les éclatements formels<sup>(4)</sup>. Les recouvrements admissibles de Tate se retrouvent naturellement dans le cadre proposé par Raynaud, où ils correspondent *grosso modo* aux recouvrements de Zariski des fibres spéciales.

*L'approche de Berkovich.* — On peut la décrire sommairement en disant qu'il « rajoute des points » aux espaces rigides classiques, et qu'il obtient de ce fait de bien meilleures propriétés topologiques. En un sens, ce changement de point de vue s'apparente à celui opéré lorsqu'on adjoint à l'ensemble des points « classiques » d'une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos un point générique par fermé irréductible de dimension strictement positive : la complication apparente initiale est compensée par la souplesse et les commodités qu'offre le nouveau cadre.

Les espaces de Berkovich présentent ainsi l'avantage d'être localement compacts et localement connexes par arcs, et les fonctions analytiques s'y recollent sans qu'il y ait besoin de se limiter à des recouvrements particuliers. Par ailleurs ils vérifient toutes les propriétés qui doivent « moralement » l'être : dans cette théorie les polydisques fermés, et plus généralement les affinoïdes, sont compacts; les objets qui ont *intuitivement* « un bord », tels là encore les polydisques fermés, en ont *effectivement* un dans ce cadre, mais dans un sens à préciser et qui n'est pas purement topologique; l'espace analytique  $\mathcal{X}^{an}$  associé à une variété algébrique  $\mathcal{X}$  est sans bord, et il est connexe (resp. séparé, resp. compact) si et seulement si  $\mathcal{X}$  est connexe (resp. séparée, resp. propre). Signalons que contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe, la dimension topologique de  $\mathcal{X}^{an}$  est égale à la dimension de Krull de  $\mathcal{X}$ , et non à son double. Si  $\mathcal{X}$  est propre le type d'homotopie de  $\mathcal{X}^{an}$  reflète en partie les propriétés de la « réduction modulo  $k^{\circ\circ}$  » de  $\mathcal{X}$ ; par exemple, si  $k$  est algébriquement clos et si  $\mathcal{X}$  est une courbe elliptique alors  $\mathcal{X}^{an}$  est contractile (resp. homotope à un cercle) si et seulement si  $\mathcal{X}$  a bonne (resp. mauvaise) réduction.

Inventée à l'origine pour des motivations liées à la théorie spectrale, la théorie de Berkovich s'est révélée extrêmement féconde; on lui doit un grand nombre d'applications dans des domaines variés. Elle a ainsi notamment permis :

- de démontrer une conjecture de Deligne sur les cycles évanescents;

<sup>(3)</sup> Il faut en outre le supposer *quasi-séparé*.

<sup>(4)</sup> Un sens rigoureux peut être donné à cette expression à l'aide de la notion de localisation d'une catégorie par une famille de flèches.

- de démontrer une conjecture de Carayol et Drinfeld sur les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales ;
- de développer une variante  $p$ -adique de la théorie des « dessins d'enfants » ;
- de développer une théorie de l'intégration  $p$ -adique des 1-formes fermées sur de vrais chemins ;
- de faire de l'analyse harmonique et des systèmes dynamiques sur les corps  $p$ -adiques, et d'y formuler et démontrer des théorèmes d'équidistribution ;
- d'exhiber des analogues  $p$ -adiques de résultats connus de géométrie réelle, telles les propriétés de base des parties semi-algébriques ou la description purement topologique de certains groupes de cohomologie étale.

Avant d'entamer une présentation détaillée de la théorie de Berkovich et un survol de ses applications, mentionnons l'existence de deux autres approches de la géométrie analytique ultramétrique, sur lesquelles nous ne nous étendrons malheureusement guère, faute de connaissances et de compétences suffisantes. La première est due à Huber (cf. [48]) ; ses espaces ont « encore plus de points » que ceux de Berkovich puisqu'il prend en compte toutes les valuations et pas seulement celles de hauteur 1 ; le plus grand quotient séparé d'un espace affinoïde au sens de Huber est ainsi l'espace de Berkovich correspondant. La seconde est en cours de développement : un ouvrage de Fumiharu Kato et Kazuhiro Fujiwara sur le sujet est en préparation<sup>(5)</sup>.

*Je tiens à remercier Antoine Chambert-Loir pour ses remarques, conseils et suggestions concernant une première version de ce texte.*

## 1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

### 1.1. Algèbres affinoïdes

*Les énoncés de ce paragraphe et du suivant sont dus à Berkovich. Les démonstrations se trouvent pour l'essentiel (dans un ordre qui n'est pas forcément celui adopté ici) dans les chapitres 2 et 3 de [6] ; elles utilisent fréquemment certains résultats de [16].*

Dans ce texte, les normes d'algèbres seront sous-multiplicatives. Si une application  $\alpha$  pour source une algèbre normée et est majorée sur sa boule unité (son but étant tel que l'adjectif « majoré » ait un sens), on la qualifiera de *bornée*.

On fixe pour tout le reste du texte un corps ultramétrique complet  $k$  (la valeur absolue peut être triviale) ; le sens des notations  $k^o$ ,  $k^{oo}$  et  $\tilde{k}$  a été rappelé dans l'introduction. On va travailler avec la catégorie dont les objets sont les  $k$ -algèbres de Banach, et les flèches les applications  $k$ -linéaires bornées. Deux normes de Banach sur

<sup>(5)</sup>Indiquons à ce propos que A. Abbes rédige également en ce moment un livre de géométrie rigide selon le point de vue de Raynaud sur une base quelconque.

la même  $k$ -algèbre définissent donc des objets isomorphes de la catégorie en question si et seulement si elles sont équivalentes. Une surjection (bornée) entre deux  $k$ -algèbres de Banach sera dite *admissible* si la norme du but est équivalente à la norme quotient. Une *extension complète* d'un corps ultramétrique complet  $L$  désignera dans ce qui suit une extension de  $L$  munie d'une valeur absolue ultramétrique prolongeant celle de  $k$  et pour laquelle elle est complète.

Si  $\mathcal{A}$  est une  $k$ -algèbre, on appellera *semi-norme multiplicative* sur  $\mathcal{A}$  toute application multiplicative de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathbb{R}_+$  qui satisfait à l'inégalité ultramétrique et étend la valeur absolue de  $k$ . Lorsque  $\mathcal{A}$  est normée, une telle semi-norme est bornée si et seulement si elle est majorée par 1 sur la boule unité de  $\mathcal{A}$ .

Les briques de base en théorie de Berkovich sont comme en géométrie rigide les espaces affinoïdes, c'est-à-dire moralement les « lieux de zéros de familles de fonctions analytiques sur un polydisque fermé<sup>(6)</sup> ». Fixons un tel polydisque  $\mathbf{D}$  de polyrayon  $(r_1, \dots, r_n)$ , où les  $r_i$  sont des réels strictement positifs. Pour qu'une série formelle  $\sum a_I \mathbf{T}^I$  converge en tout point de  $\mathbf{D}$  à coordonnées dans n'importe quelle extension complète de  $k$ , il faut et il suffit que  $|a_I| \mathbf{r}^I$  tende vers zéro lorsque  $|I|$  tend vers l'infini. L'ensemble des séries satisfaisant à cette condition est une  $k$ -algèbre, qui est de Banach lorsqu'on la munit de la norme  $\sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I| \mathbf{r}^I$ . On la note  $k\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$  ou encore  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$ . Si  $\mathcal{A}$  est une  $k$ -algèbre de Banach, on écrira  $\mathcal{A}\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$  pour  $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$ .

PROPOSITION 1.1. — *L'algèbre  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$  est noethérienne et ses idéaux sont fermés.*

Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$ . Le candidat naturel pour être l'anneau des fonctions analytiques sur le « lieu des zéros de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathbf{D}$  » (et ce, indépendamment de l'objet précis que désignera cette expression) est le quotient de  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$  par  $\mathcal{I}$ . Comme  $\mathcal{I}$  est fermé ce quotient hérite d'une structure d'algèbre de Banach.

DÉFINITION 1.2. — *Une  $k$ -algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  est dite  $k$ -affinoïde s'il existe un polyrayon  $\mathbf{r}$  et un idéal  $\mathcal{I}$  de  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$  tels que  $\mathcal{A}$  soit isomorphe (en tant que  $k$ -algèbre de Banach) à  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}/\mathcal{I}$ . Lorsqu'un tel isomorphisme existe avec un polyrayon unité, on dit que  $\mathcal{A}$  est strictement  $k$ -affinoïde<sup>(7)</sup>.*

Indiquons quelques propriétés des algèbres affinoïdes. Il est immédiat d'après ce qu'il précède qu'elles sont noethériennes et que leurs idéaux sont fermés. Un quotient d'une algèbre  $k$ -affinoïde est  $k$ -affinoïde ; si  $L$  est une extension complète de  $k$  et si  $\mathcal{A}$

<sup>(6)</sup>Tate ne considérait que des polydisques unité, Berkovich accepte les polyrayons quelconques. Il lui arrive toutefois fréquemment de se ramener au cas du polyrayon unité antérieurement traité en théorie rigide ; il le fait grâce à des changements judicieux de corps de base consistant, pour l'essentiel, à adjoindre à  $k$  de manière générique des éléments dont les valeurs absolues sont préalablement fixées.

<sup>(7)</sup>Cette terminologie est celle de Berkovich ; les algèbres qu'il appelle strictement affinoïdes sont celles qui étaient classiquement qualifiées d'affinoïdes.

est une algèbre  $k$ -affinoïde alors le produit tensoriel complété  $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L$  est  $L$ -affinoïde ; le produit tensoriel complété de deux algèbres  $k$ -affinoïdes au-dessus d'une troisième est  $k$ -affinoïde ; ces assertions restent valables en remplaçant partout «  $k$ -affinoïde » par « strictement  $k$ -affinoïde ». De plus pour toute algèbre affinoïde  $\mathcal{A}$ , il existe une extension complète  $L$  de  $k$  telle que  $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L$  soit strictement  $L$ -affinoïde.

Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde et  $L$  une extension complète de  $k$  telles que  $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L$  soit strictement  $L$ -affinoïde. La dimension de Krull de  $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L$  est indépendante de  $L$  ; on l'appelle la *dimension  $k$ -analytique* de  $\mathcal{A}$  et on la note  $\dim_k \mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  est non nulle,  $\dim_k \mathcal{A}$  est finie et supérieure ou égale à la dimension de Krull de  $\mathcal{A}$ . Si  $L$  est une extension complète quelconque de  $\mathcal{A}$  alors  $\dim_L \mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L = \dim_k \mathcal{A}$ .

*Exemple 1.3.* — Soit  $r$  un réel strictement positif. L'algèbre  $k \{rS, r^{-1}T\} / (ST - 1)$  est  $k$ -affinoïde par sa forme même. On la note  $k_r$ , et elle peut se décrire comme l'ensemble des séries  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i$  telles que  $|a_i| r^i$  tende vers zéro lorsque  $|i|$  tend vers l'infini, muni de la norme qui envoie une telle série sur  $\max |a_i| r^i$ . Supposons que  $r$  n'est pas de torsion modulo  $|k^*|$ . Il est alors facile de voir que  $k_r$  est un corps (ultramétrique complet). Sa dimension de Krull est donc nulle ; par contre sa dimension  $k$ -analytique vaut 1 : en effet  $k_r \widehat{\otimes}_k k_r$  est isomorphe à  $k_r \{U, V\} / (UV - 1)$ , qui est strictement  $k_r$ -affinoïde<sup>(8)</sup> et de dimension de Krull égale à 1.

## 1.2. Espaces affinoïdes

Reprenons les notations  $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{r}$  et  $\mathcal{S}$  du paragraphe précédent et désignons par  $\mathcal{A}$  l'algèbre quotient  $k \{r^{-1}\mathbf{T}\} / \mathcal{S}$ . Nous allons maintenant construire l'objet qui, dans la théorie de Berkovich, joue le rôle du « lieu des zéros de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathbf{D}$  ». Remarquons au préalable que si  $L$  est une extension complète de  $k$ , l'évaluation des fonctions induit une bijection entre l'ensemble des zéros de  $\mathcal{S}$  à coordonnées dans  $L$  et celui des morphismes (bornés de  $k$ -algèbres) de  $\mathcal{A}$  vers  $L$  ; pour cette raison on appellera *évaluation* tout morphisme de  $\mathcal{A}$  vers une extension complète de  $k$ .

L'idée dont on part est très simple : on ne se limite pas aux points dont les coordonnées appartiennent à  $k$ , ni même à une extension finie de celui-ci (comme c'est le cas en géométrie rigide) ; on prend en compte les solutions du système dans *toutes les extensions complètes* de  $k$ . À toute évaluation correspondra donc un point de l'espace que l'on cherche à construire. Par ailleurs si  $\mathcal{A} \rightarrow L$  est une évaluation et si  $M$  est une extension complète de  $L$ , il est raisonnable de décréter que  $\mathcal{A} \rightarrow L \hookrightarrow M$  définit le même point que  $\mathcal{A} \rightarrow L$  : il s'agit simplement de dire qu'un point à coordonnées dans  $L$  peut être vu comme à coordonnées dans  $M$ . On est ainsi amené à considérer l'ensemble des « classes d'équivalence » d'évaluations modulo la relation engendrée

<sup>(8)</sup>Voici une interprétation « géométrique » de ce qui se passe : l'algèbre  $k_r$  est l'anneau des fonctions de la couronne d'équation  $|T| = r$  sur le corps  $k$  ; lorsqu'on étend ce dernier de sorte que  $r$  soit la valeur absolue d'un scalaire la couronne en question devient isomorphe à celle d'équation  $|U| = 1$ .

par les identifications que l'on vient de mentionner. Cette description n'est certes pas très explicite; il en existe une autre, plus tangible, que nous allons présenter.

Soit  $\mathcal{A} \rightarrow L$  une évaluation. En la composant avec la valeur absolue de  $L$  on obtient une semi-norme multiplicative bornée sur  $\mathcal{A}$ .

Réciproquement, si  $x$  est une semi-norme multiplicative bornée sur  $\mathcal{A}$ , son noyau  $\mathfrak{p}_x$  est un idéal premier de  $\mathcal{A}$  par lequel elle passe au quotient. Elle induit ainsi une valeur absolue sur le corps des fractions de  $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$ . Le complété correspondant est noté  $\mathcal{H}(x)$  et est appelé le *corps résiduel complété de  $x$* . C'est une extension complète de  $k$ ; la flèche naturelle  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$  est une évaluation qui est « minimale » au sein de sa classe d'équivalence.

Il n'est pas très difficile de voir que les deux procédés décrits ci-dessus mettent en bijection l'ensemble des « classes d'équivalence » d'évaluations avec celui des semi-normes multiplicatives bornées sur  $\mathcal{A}$ , ce qui justifie la définition qui suit.

**DÉFINITION 1.4.** — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde. On appelle espace  $k$ -affinoïde associé à  $\mathcal{A}$  et l'on note  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur  $\mathcal{A}$ , muni de la topologie induite par la topologie produit de  $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ .

*Commentaires.* — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde et soit  $x$  un point de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Si  $f$  appartient à  $\mathcal{A}$  on désignera par  $f(x)$  l'image de  $f$  dans le corps résiduel complété  $\mathcal{H}(x)$  de  $x$ ; le réel  $x(f)$  peut alors s'écrire  $|f(x)|$ , et c'est cette dernière notation que l'on utilisera désormais pour des raisons psychologiques évidentes. L'application de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  vers  $\text{Spec } \mathcal{A}$  qui envoie  $x$  sur son noyau, c'est-à-dire encore sur l'ensemble des  $f$  telles que  $f(x)$  soit nul, est *continue*.

L'une des caractéristiques les plus frappantes des espaces  $k$ -affinoïdes ainsi construits réside dans leurs bonnes propriétés topologiques, que résume le théorème ci-dessous (pour la notion de *dimension topologique* on pourra se reporter à la démonstration du lemme 3.2.5 de [6]); l'exemple qui le suit montre comment immerger un *pavé réel* dans un polydisque fermé.

**THÉORÈME 1.5.** — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde. L'espace  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est compact et localement connexe par arcs. La flèche  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$  est surjective et induit une bijection  $\pi_0(\mathcal{M}(\mathcal{A})) \simeq \pi_0(\text{Spec } \mathcal{A})$ ; en particulier  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est non vide dès que  $\mathcal{A}$  est non nulle. La dimension topologique de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est inférieure ou égale à la dimension  $k$ -analytique de  $\mathcal{A}$ , avec égalité si  $\mathcal{A}$  est strictement  $k$ -affinoïde.

*Exemple 1.6.* — Soit  $n$  un entier et soit  $\mathbf{r}$  un  $n$ -uplet  $(r_1, \dots, r_n)$  de réels strictement positifs. L'espace  $\mathcal{M}(k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\})$  est appelé le  *$k$ -polydisque fermé de polyrayon  $\mathbf{r}$*  (son ouvert formé des points  $x$  tels que  $|T_i(x)|$  soit *strictement* inférieur à  $r_i$  pour tout  $i$  est quant à lui le polydisque *ouvert* correspondant). Soit  $\Delta$  le pavé  $\prod[0; r_i]$ . Pour tout  $\mathbf{s}$  appartenant à  $\Delta$ , l'application  $\eta_{\mathbf{s}} : \sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I| \mathbf{s}^I$  est une semi-norme multiplicative bornée sur  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$ , et  $\mathbf{s} \mapsto \eta_{\mathbf{s}}$  définit un plongement de  $\Delta$  dans



$\mathcal{M}(k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\})$ . Notons que  $\eta_{(0,\dots,0)}$  est l'origine « classique » du polydisque, mais que pour tout  $\mathbf{s}$  non nul  $\eta_{\mathbf{s}}$  est un point « nouveau », autrement dit qui n'existait pas dans les théories antérieures.

*Remarque 1.7.* — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde isomorphe à  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}/\mathcal{I}$  pour  $\mathbf{r}$  et  $\mathcal{I}$  convenables et soit  $X$  l'espace  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . L'ensemble des zéros de  $\mathcal{I}$  à coordonnées dans  $k$  est un espace topologique totalement discontinu (et compact lorsque  $k$  est localement compact), en bijection naturelle avec l'ensemble  $X(k)$  des points  $x$  de  $X$  tels que  $\mathcal{H}(x)$  soit égal à  $k$ ; lorsqu'on munit  $X(k)$  de la topologie induite par celle de  $X$  cette bijection est un homéomorphisme. Plus généralement notons  $X_0$  l'ensemble des points de  $X$  dont le corps résiduel complété est une extension finie de  $k$ ; un tel point sera qualifié de *rigide*. Le sous-ensemble  $X_0$  de  $X$  est totalement discontinu; si la valeur absolue de  $k$  n'est pas triviale et si  $\mathcal{A}$  est strictement  $k$ -affinoïde,  $X_0$  est dense dans  $X$  et est homéomorphe à l'espace analytique rigide associé à  $\mathcal{A}$ .

*Fonctorialité.* — Tout morphisme  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre algèbres  $k$ -affinoïdes induit une application continue  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ; si  $x$  est un point de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  la fibre en  $x$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$  est naturellement homéomorphe à  $\mathcal{M}(\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x))$ . Si  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est une surjection admissible dont on note  $\mathcal{I}$  le noyau (auquel cas  $\mathcal{B}$  s'identifie à  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ) alors  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$  induit un homéomorphisme entre  $\mathcal{M}(\mathcal{B})$  et l'ensemble des  $x$  appartenant à  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  tels que  $f(x)$  soit nul pour tout  $f$  dans  $\mathcal{I}$ ; ledit ensemble sera appelé le *lieu des zéros de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$* . On qualifiera d'*immersion fermée* toute application continue entre espaces affinoïdes induite par une surjection admissible. Si  $X$  est un espace  $k$ -affinoïde, il existe *par définition* une immersion fermée de  $X$  dans un  $k$ -polydisque fermé convenable.

Si  $L$  est une extension complète de  $k$ , on dispose pour toute algèbre  $k$ -affinoïde  $\mathcal{A}$  d'une surjection continue canonique  $\mathcal{M}(\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ .

**DÉFINITION 1.8.** — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde et soit  $V$  un sous-ensemble de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . On dit que  $V$  est un *domaine affinoïde* de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  s'il existe une  $\mathcal{A}$ -algèbre  $k$ -affinoïde  $\mathcal{A}_V$  possédant les deux propriétés suivantes<sup>(9)</sup> :

- i) l'image de  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$  dans  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est égale à  $V$  ;
- ii) tout morphisme  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre algèbres  $k$ -affinoïdes tel que l'image de  $\mathcal{M}(\mathcal{B})$  dans  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  soit contenue dans  $V$  se factorise de manière unique par  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_V$ .

Soit  $V$  un domaine affinoïde de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . La  $\mathcal{A}$ -algèbre  $\mathcal{A}_V$  est unique à unique isomorphisme près. On peut montrer qu'elle est plate, et que  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \rightarrow V$  est un homéomorphisme ( $V$  est donc compact). Soit  $W$  une partie de  $V$  (identifié à  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ ) ; il est tautologique que  $W$  est un domaine affinoïde de  $V$  si et seulement si c'est un domaine affinoïde de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , et le cas échéant la  $k$ -algèbre  $\mathcal{A}_W$  ne dépend pas de

<sup>(9)</sup>Cette définition est due à Temkin ([65], §3) ; elle est équivalente à celle de Berkovich ([7], def. 2.2.1) d'après le corollaire 3.2 de [65]

l'espace ambiant dans lequel on considère  $W$ . Si  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un morphisme entre algèbres  $k$ -affinoïdes, l'image réciproque de  $V$  sur  $\mathcal{M}(\mathcal{B})$  est un domaine affinoïde d'algèbre associée  $\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_V$ ; on en déduit que l'intersection de deux domaines affinoïdes de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est un domaine affinoïde. Si  $L$  est une extension complète de  $k$  l'image réciproque de  $V$  sur  $\mathcal{M}(\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L)$  est un domaine affinoïde, d'algèbre associée  $\mathcal{A}_V \widehat{\otimes}_k L$ .

Soit  $(V_i)$  un recouvrement fini de  $V$  par des domaines affinoïdes; le théorème d'acyclicité de Tate (cf. [16], 8.2.1/1 et [6], prop. 2.2.5) affirme entre autres que la suite

$$\mathcal{A}_V \longrightarrow \prod \mathcal{A}_{V_i} \rightrightarrows \prod \mathcal{A}_{V_i \cap V_j}$$

est exacte.

Si  $U$  et  $W$  sont deux parties compactes et disjointes de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  alors  $U \cup W$  est un domaine affinoïde de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  si et seulement si  $U$  et  $W$  sont des domaines affinoïdes de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , et dans cette situation  $\mathcal{A}_{U \cup W}$  s'identifie à  $\mathcal{A}_U \times \mathcal{A}_W$ . En particulier, toute réunion de composantes connexes de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  en est un domaine affinoïde.

*Exemple 1.9.* — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde et soit  $X$  l'espace associé. Soient  $f_1, \dots, f_n$  et  $g$  des éléments de  $\mathcal{A}$  qui sont sans zéro commun sur  $X$  (autrement dit l'idéal qu'ils engendrent est  $\mathcal{A}$ ), et soient  $r_1, \dots, r_n$  des réels strictement positifs. Le sous-ensemble de  $X$  formé des points en lesquels  $|f_i| \leq r_i |g_i|$  pour tout  $i$  en est un domaine affinoïde; l'algèbre correspondante est  $\mathcal{A} \{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\} / (gT_1 - f_1, \dots, gT_n - f_n)$ . On en déduit facilement que tout point de  $X$  a une base de voisinages qui sont des domaines affinoïdes (on parlera plus simplement de *voisinages affinoïdes*). Un domaine affinoïde de la forme décrite ci-dessus est dit *rationnel*, et par le théorème de Gerritzen-Grauert ([16], 7.3.5/3 ou [36], lemme 2.4 ou encore [65], §3) tout domaine affinoïde de  $X$  est réunion d'un nombre fini de domaines rationnels.

*Remarque 1.10.* — Si  $\mathcal{A}$  est une algèbre  $k$ -affinoïde et si  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$ , le lieu des zéros de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  (qui est naturellement homéomorphe à  $\mathcal{M}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ ) n'est pas en général un domaine affinoïde<sup>(10)</sup>, les phénomènes de nilpotence empêchant l'existence d'un théorème de factorisation par une  $\mathcal{A}$ -algèbre fixée.

*Remarque 1.11.* — Soit  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme entre algèbres  $k$ -affinoïdes, soit  $y$  appartenant à  $\mathcal{M}(\mathcal{B})$  et soit  $x$  son image sur  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Ces données fournissent une injection isométrique naturelle  $\mathcal{H}(x) \hookrightarrow \mathcal{H}(y)$ ; le corps  $\mathcal{H}(y)$  apparaît ainsi comme une extension complète de  $\mathcal{H}(x)$ , qui correspond d'ailleurs aussi au corps résiduel complété de  $y$  vu comme appartenant à  $\mathcal{M}(\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x))$ . Si  $\mathcal{B}$  est un quotient de  $\mathcal{A}$  ou bien l'algèbre associée à un domaine affinoïde de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  alors  $\mathcal{H}(x) \hookrightarrow \mathcal{H}(y)$  est un isomorphisme.

<sup>(10)</sup>C'en est un si et seulement si le lieu en question est ouvert dans  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , c'est-à-dire si et seulement s'il est réunion de composantes connexes de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre *strictement*  $k$ -affinoïde<sup>(11)</sup>. Notons  $\mathcal{A}^\circ$  (resp.  $\mathcal{A}^{\circ\circ}$ ) l'ensemble des éléments  $f$  de  $\mathcal{A}$  tels que  $|f(x)|$  soit inférieur ou égal (resp. strictement inférieur) à 1 pour tout  $x$  appartenant à  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ; on voit aussitôt que  $\mathcal{A}^\circ$  est un sous-anneau de  $\mathcal{A}$  et que  $\mathcal{A}^{\circ\circ}$  est un idéal de  $\mathcal{A}^\circ$ . Le quotient  $\mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$  est une  $\tilde{k}$ -algèbre que l'on notera  $\tilde{\mathcal{A}}$ ; elle est de type fini et de dimension de Krull égale à celle de  $\mathcal{A}$ . On désigne par  $X$  l'espace  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  et par  $\tilde{X}$  le spectre de  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Si  $x$  est un point de  $X$ , l'évaluation  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$  induit une flèche  $\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(x)$  dont le noyau est un élément de  $\tilde{X}$ . On a ainsi défini une application  $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$  dite de *réduction*. Soit  $f$  appartenant à  $\mathcal{A}^\circ$ ; notons  $\tilde{f}$  son image dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ . L'image réciproque par  $\pi$  du lieu des zéros (resp. du lieu d'inversibilité) de  $\tilde{f}$  est l'ensemble des  $x$  appartenant à  $X$  tels que  $|f(x)| < 1$  (resp.  $|f(x)| = 1$ ). On en déduit que  $\pi$  est anticontinue (l'image réciproque d'un ouvert est fermée, celle d'un fermé est ouverte). Elle est par ailleurs *surjective*<sup>(12)</sup> et envoie tout  $k$ -point de  $X$  sur un  $\tilde{k}$ -point de  $\tilde{X}$ . Si  $\xi$  est un élément de l'ensemble  $\tilde{X}_{\text{gén}}$  des points génériques des composantes irréductibles de  $\tilde{X}$  alors  $\pi^{-1}(\xi)$  est un singleton; lorsque  $\mathcal{A}$  est non nulle  $\{\pi^{-1}(\xi)\}_{\xi \in \tilde{X}_{\text{gén}}}$  est le *bord de Shilov* de  $X$ , c'est-à-dire que c'est le plus petit fermé de  $X$  sur lequel tout élément de  $\mathcal{A}$  atteint son maximum en norme. Par un changement adéquat de corps de base permettant de se ramener au cas strictement affinoïde, on peut montrer que pour toute algèbre  $k$ -affinoïde non nulle  $\mathcal{A}$  l'espace  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  possède un bord de Shilov, et que celui-ci est fini.

*Exemple 1.12.* — Si  $\mathcal{A}$  est l'algèbre  $k\{T\}$  alors  $\tilde{\mathcal{A}}$  est l'algèbre de polynômes  $\tilde{k}[\tilde{T}]$  et  $\text{Spec } \tilde{\mathcal{A}}$  est donc la droite affine sur  $\tilde{k}$ . Au niveau des  $k$ -points,  $\pi$  est la réduction naïve  $k^\circ \rightarrow \tilde{k}$ .

*Exemple 1.13.* — Lorsque  $\mathcal{A}$  est une algèbre  $k$ -affinoïde non nulle dont la norme  $\eta$  est multiplicative, le bord de Shilov de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est clairement égal à  $\{\eta\}$ . C'est par exemple le cas si  $\mathcal{A}$  est de la forme  $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$ ; le bord de Shilov de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est alors réduit à la semi-norme  $\sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I| \mathbf{r}^i$ .

*Exemple 1.14.* — Soit  $\alpha$  un élément de  $k$  de valeur absolue strictement inférieure à 1 et soit  $\mathcal{A}$  l'algèbre strictement  $k$ -affinoïde  $k\{S, T\}/(ST - \alpha)$ ; elle est associée au domaine affinoïde du disque unité défini par l'inégalité  $|\alpha| \leq |T| \leq 1$ , et elle peut également se décrire comme l'ensemble des séries  $\sum_{\mathbb{Z}} a_i T^i$  vérifiant les conditions de convergence que l'on devine. L'algèbre  $\tilde{\mathcal{A}}$  s'identifie à  $\tilde{k}[\tilde{T}, \tilde{S}]/\tilde{T}\tilde{S}$ . Son spectre a donc deux points génériques  $\xi_{\tilde{S}}$  et  $\xi_{\tilde{T}}$ , chacun correspondant au lieu des zéros de la fonction coordonnée indiquée en indice. L'unique antécédent de  $\xi_{\tilde{S}}$  (resp.  $\xi_{\tilde{T}}$ ) par la flèche de réduction est la semi-norme qui envoie  $\sum a_i T^i$  sur  $\max |a_i|$  (resp.  $\max |a_i| \alpha^i$ ).

<sup>(11)</sup>Temkin a développé dans [64] une théorie de la réduction plus sophistiquée que celle esquissée ici, et qui est adaptée à toutes les algèbres affinoïdes.

<sup>(12)</sup>En géométrie rigide l'image de  $\pi$  est l'ensemble des points *fermés* de  $\tilde{X}$ .

DÉFINITION 1.15. — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde et soit  $X$  l'espace  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Soit  $x$  appartenant à  $X$ . On dira que  $x$  est un point intérieur de  $X$  s'il existe une immersion fermée de  $X$  dans un  $k$ -polydisque fermé telle que l'image de  $x$  soit située dans le polydisque ouvert correspondant. Le bord de  $X$  est le fermé constitué des points qui ne sont pas intérieurs.

PROPOSITION 1.16. — Si  $\mathcal{A}$  est strictement  $k$ -affinoïde alors un point de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est intérieur si et seulement si son image par la réduction est un point fermé de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{A}}$ .

En se ramenant au cas strictement  $k$ -affinoïde par extension des scalaires, on montre le corollaire qui vient.

COROLLAIRE 1.17. — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde. Tout point rigide de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est intérieur. Si la dimension  $k$ -analytique de  $\mathcal{A}$  est strictement positive alors le bord de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est non vide ; il contient en particulier le bord de Shilov de chacune des composantes connexes de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  qui n'est pas un point rigide isolé.

Remarque 1.18. — Cette présence « tangible » du bord apparaît comme une spécificité de la théorie de Berkovich.

Remarque 1.19. — Les espaces de semi-normes d'algèbres de Banach ultramétriques et certaines de leurs propriétés topologiques ont été étudiés, indépendamment de Berkovich, par des auteurs comme Escassut, Guennebaud ou Mainetti ([37], [54], [55], [44]).

### 1.3. Espaces analytiques généraux

La référence pour ce qui suit est le chapitre 1 de [7] ; la définition d'espace  $k$ -analytique qui y est donnée est plus générale que celle de [6]. Pour être plus précis les espaces de [6] correspondent aux bons espaces de [7] ; ces derniers constituent une classe insuffisante dès qu'on souhaite travailler avec des fibres génériques de schémas formels.

Il s'agit maintenant de « recoller » les espaces  $k$ -affinoïdes construits au paragraphe précédent. La procédure est relativement technique ; le problème vient du fait que contrairement à ce qui se passe en géométrie différentielle, analytique complexe ou algébrique, les objets de base sur lesquels tout est modelé ne sont pas ici ouverts mais compacts. Aussi n'allons-nous pas donner le détail de la construction de Berkovich à base d'atlas, d'inversions formelles des raffinements de ces derniers, etc. Nous nous contenterons d'énoncer un certain nombre de faits.

Un espace  $k$ -analytique est un espace topologique localement compact et localement connexe par arcs  $X$ , dans lequel certaines parties compactes sont distinguées : ce sont les *domaines affinoïdes* ; avec chaque domaine affinoïde  $V$  de  $X$  sont fournis une algèbre  $k$ -affinoïde  $\mathcal{A}_V$  et un homéomorphisme  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \simeq V$ . Ces données sont sujettes à des conditions de *compatibilité*, de *maximalité* et de *recouvrement*.

*Conditions de compatibilité* : à toute inclusion  $U \subset V$  entre deux domaines affinoïdes de  $X$  est associé un morphisme  $\mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{A}_U$  dit de *restriction* tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathcal{A}_U) & \xrightarrow{\sim} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(\mathcal{A}_V) & \xrightarrow{\sim} & V \end{array}$$

commute et identifie  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$  à un domaine affinoïde de  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$  au sens de la définition 1.8.

*Conditions de maximalité* : nous n'allons pas les énoncer toutes. Indiquons simplement que si  $U$  est un domaine affinoïde de  $X$ , et si  $V$  est un domaine affinoïde de  $U$  modulo l'identification de celui-ci avec  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$  et au sens de la définition 1.8, alors  $V$  est un domaine affinoïde de  $X$ .

*Conditions de recouvrement* : commençons par quelques définitions. Si  $U$  est un sous-ensemble de  $X$ , on dit qu'une famille  $(U_i)$  de parties de  $U$  en constitue un *G-recouvrement*<sup>(13)</sup> si tout point  $u$  de  $U$  a un voisinage dans  $U$  qui est de la forme  $\bigcup_{\mathcal{I}} U_i$ , où  $\mathcal{I}$  est fini et où  $u$  appartient à  $\bigcap_{\mathcal{I}} U_i$ ; un *domaine analytique* de  $X$  est une partie  $U$  de  $X$  qui est  $G$ -recouverte par les domaines affinoïdes de  $X$  qu'elle contient. Les conditions évoquées peuvent alors s'exprimer en disant que  $X$  lui-même est un domaine analytique, et que l'intersection de deux domaines affinoïdes de  $X$  est un domaine analytique.

*Remarque 1.20.* — Pour définir une structure d'espace  $k$ -analytique sur un espace topologique  $X$ , il n'est pas nécessaire de décrire tous les domaines affinoïdes de  $X$ ; il suffit de se donner un *atlas affinoïde* sur  $X$  ([7], def. 1.2.3; voir l'exemple 1.23 *infra*).

*Exemple 1.21.* — Un espace  $k$ -affinoïde a une structure naturelle d'espace  $k$ -analytique; ses domaines affinoïdes pour cette structure sont exactement ceux de la définition 1.8.

*Exemple 1.22.* — Un domaine analytique d'un espace  $k$ -analytique  $X$  hérite d'une structure canonique d'espace  $k$ -analytique. Donnons des exemples de tels domaines :

- un ouvert de  $X$  en est un domaine analytique, en vertu du fait que tout point d'un espace  $k$ -affinoïde a une base de voisinages affinoïdes;
- si  $V$  est une partie compacte de  $X$  qui est la réunion d'une famille finie  $(V_i)$  de domaines affinoïdes alors les  $V_i$  forment un  $G$ -recouvrement de  $V$ , qui est donc un domaine analytique de  $X$ .

<sup>(13)</sup>Le  $G$  fait référence à Grothendieck.

*Exemple 1.23.* — Soit  $E$  l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur  $k[T]$ , muni de la topologie induite par la topologie produit de  $\mathbb{R}^{k[T]}$ . Pour tout réel strictement positif  $r$ , notons  $E_r$  le sous-ensemble de  $E$  formé des  $\varphi$  telles que  $|\varphi(T)|$  soit inférieure ou égal à  $r$ ; la restriction à  $k[T]$  induit pour tout  $r$  un homéomorphisme  $\iota_r : \mathcal{M}(k\{r^{-1}T\}) \simeq E_r$ . La famille  $(E_r, \iota_r)$  est un atlas affinoïde sur  $E$ ; l'espace  $k$ -analytique défini par ce biais s'appelle la *droite affine analytique sur  $k$*  et est notée  $\mathbb{A}_k^{1,an}$ .

Soit  $X$  un espace  $k$ -analytique; on désignera par  $X_G$  la catégorie de ses domaines analytiques, les flèches étant simplement les inclusions. On la munit de la topologie de Grothendieck définie par les  $G$ -recouvrements; on l'appelle la  *$G$ -topologie*. Si  $U$  est un ouvert de  $X$  alors tout recouvrement ouvert de  $U$  en est un  $G$ -recouvrement : la  $G$ -topologie est plus fine que la topologie « naturelle » de  $X$ .

*Définition des morphismes.* — Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces  $k$ -analytiques un *morphisme*  $f$  entre  $X$  et  $Y$  est la donnée :

- d'une application continue (notée encore  $f$ ) entre  $X$  et  $Y$ , telle que la famille des domaines affinoïdes de  $X$  dont l'image est contenue dans un domaine affinoïde de  $Y$  constitue un  $G$ -recouvrement de  $X$ ;
- d'une famille de morphismes  $\mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{A}_U$  indexée par les couples formés d'un domaine affinoïde  $U$  de  $X$  et d'un domaine affinoïde  $V$  de  $Y$  tels que  $f(U)$  soit inclus dans  $V$ ; on demande que pour un tel  $(U, V)$  l'application  $U \rightarrow V$  induite par  $\mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{A}_U$  via les homéomorphismes  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U) \simeq U$  et  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \simeq V$  coïncide avec  $f$ , et que le système des  $\mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{A}_U$  soit compatible aux restrictions.

Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux algèbres  $k$ -affinoïdes alors  $\text{Hom}(\mathcal{M}(\mathcal{A}), \mathcal{M}(\mathcal{B}))$  s'identifie naturellement à  $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ . Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces  $k$ -analytiques le préfaisceau  $U \mapsto \text{Hom}(U, Y)$  sur  $X_G$  est un faisceau; on le déduit essentiellement du théorème d'acyclicité de Tate rappelé plus haut juste avant l'exemple 1.9. Par ailleurs on vérifie sans peine que  $\mathbb{A}_k^{1,an}$  est un *objet en anneaux* dans la catégorie des espaces  $k$ -analytiques. Si  $X$  est un espace  $k$ -analytique, le faisceau  $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{A}_k^{1,an})$  sur  $X_G$  est ainsi un faisceau en anneaux qui est appelé le *faisceau structural* de  $X$  et est noté  $\mathcal{O}_{X_G}$ ; on désignera par  $\mathcal{O}_X$  sa restriction à la catégorie des ouverts de  $X$ . Si  $U$  est un domaine analytique de  $X$  les éléments de  $\mathcal{O}_{X_G}(U)$  sont appelés *fonctions analytiques sur  $U$* ; si  $U$  est un domaine affinoïde de  $X$ , la flèche naturelle  $\mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{O}_{X_G}(U)$  est un isomorphisme.

Soient  $x$  un point de  $X$  et  $V$  un domaine affinoïde de  $X$  contenant  $x$ ; le corps résiduel complété de  $x$  dans  $V$  ne dépend pas de  $V$  et est noté  $\mathcal{H}(x)$ . Pour tout domaine analytique  $U$  de  $X$  contenant  $x$  on dispose d'un morphisme d'évaluation  $f \mapsto f(x)$  de  $\mathcal{O}_{X_G}(U)$  vers  $\mathcal{H}(x)$ . Si  $Y \rightarrow X$  est un morphisme entre espaces  $k$ -analytiques, la fibre de  $Y$  en un point  $x$  de  $X$  a une structure naturelle d'espace  $\mathcal{H}(x)$ -analytique.

La *dimension  $k$ -analytique* d'un espace  $k$ -analytique  $X$  est la borne supérieure de l'ensemble des dimensions  $k$ -analytiques des  $\mathcal{O}_{X_G}(U)$ , où  $U$  parcourt la famille des domaines affinoïdes de  $X$  ; si  $X$  est paracompact sa dimension topologique est inférieure ou égale à sa dimension  $k$ -analytique, avec égalité lorsque  $X$  possède un  $G$ -recouvrement par des domaines *strictement* affinoïdes.

On sait définir le bord et l'intérieur d'un espace  $k$ -analytique, et plus généralement d'un morphisme entre deux tels espaces. Un morphisme entre deux espaces  *$k$ -affinoïdes* est sans bord si et seulement si le morphisme correspondant entre algèbres de Banach est fini ; si  $Y \rightarrow X$  est une inclusion de domaine analytique, son bord en tant que morphisme coïncide avec le bord topologique de  $Y$  dans  $X$ .

Soit  $L$  une extension complète de  $k$ . On peut définir un *foncteur de changement de base*  $X \mapsto X_L$  de la catégorie des espaces  $k$ -analytiques vers celle des espaces  $L$ -analytiques ; il consiste  $G$ -localement à remplacer  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  par  $\mathcal{M}(\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L)$ . Si  $X$  est un espace  $k$ -analytique, on dispose d'une application continue surjective  $X_L \rightarrow X$  ; la dimension  $L$ -analytique de  $X_L$  est égale à la dimension  $k$ -analytique de  $X$ .

Enfin les produits fibrés existent dans la catégorie des espaces  $k$ -analytiques, l'opération  $G$ -locale correspondante consistant à faire le produit tensoriel complété de deux algèbres  $k$ -affinoïdes au-dessus d'une troisième.

**DÉFINITION 1.24.** — *Un bon espace  $k$ -analytique est un espace analytique dont tout point possède une base de voisinages affinoïdes.*

Donnons un exemple et un contre-exemple : un espace affinoïde est bon. Le lieu de validité  $\Omega$  sur le polydisque unité de dimension 2 de la condition «  $|T| = 1$  ou  $|S| = 1$  » (où  $S$  et  $T$  sont les deux fonctions coordonnées) est un domaine analytique qui n'est pas bon : le point  $\sum a_{i,j} T^i S^j \mapsto \max |a_{i,j}|$  n'a en effet pas de voisinage affinoïde<sup>(14)</sup> dans  $\Omega$ .

Indiquons quelques propriétés spécifiques aux bons espaces  $k$ -analytiques ; soient  $X$  un tel espace et  $x$  l'un de ses points. L'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est noethérien et hensélien ; son corps résiduel  $\kappa(x)$  s'identifie naturellement à un sous-corps dense de  $\mathcal{H}(x)$  et il est hensélien (pour la restriction de la valeur absolue de  $\mathcal{H}(x)$ ).

#### 1.4. Deux constructions d'espaces analytiques

*L'analytification d'une variété algébrique* ([6], 3.4.1 et [7], 2.6). — On peut associer de manière fonctorielle à toute  $k$ -variété algébrique  $\mathcal{X}$  un espace  $k$ -analytique  $\mathcal{X}^{an}$ . Lorsque  $\mathcal{X}$  est affine d'anneau  $A$ , l'espace topologique sous-jacent à  $\mathcal{X}^{an}$  est l'ensemble des semi-normes multiplicatives de  $A$  dans  $\mathbb{R}_+$  ; si  $\mathcal{X}$  est la droite affine on retrouve ainsi l'espace  $\mathbb{A}_k^{1,an}$  introduit plus haut.

<sup>(14)</sup>On peut déduire ce résultat de la théorie de Temkin sur la réduction des germes d'espaces  $k$ -analytiques ([64], Th. 5.1).

Soit  $\mathcal{X}$  une variété algébrique sur  $k$ . L'espace  $\mathcal{X}^{an}$  est bon et sans bord. Sa dimension  $k$ -analytique, sa dimension topologique et la dimension de Krull de  $\mathcal{X}$  coïncident. Le morphisme d'espaces annelés  $\mathcal{X}^{an} \rightarrow \mathcal{X}$  est plat et surjectif; il induit une bijection  $\pi_0(\mathcal{X}^{an}) \simeq \pi_0(\mathcal{X})$ , et identifie l'ensemble des points *rigides* de  $\mathcal{X}^{an}$  à celui des points *fermés* de  $\mathcal{X}$ . L'espace *topologique*  $\mathcal{X}^{an}$  est séparé si et seulement si  $\mathcal{X}$  est séparée; il est compact si et seulement si  $\mathcal{X}$  est propre, et dans ce dernier cas les théorèmes de type GAGA s'appliquent.

*La fibre générique d'un schéma formel* ([8], §1). — Soit  $\mathfrak{X}$  un  $k^\circ$ -schéma formel localement topologiquement de présentation finie. On peut là encore lui associer de manière fonctorielle un espace  $k$ -analytique  $\mathfrak{X}_\eta$  appelé sa *fibre générique*; si  $\mathfrak{X}$  est le spectre formel d'une  $k^\circ$ -algèbre  $\mathfrak{A}$  topologiquement de présentation finie,  $\mathfrak{X}_\eta$  est simplement l'espace  $k$ -affinoïde  $\mathcal{M}(\mathfrak{A} \otimes_{k^\circ} k)$ ; si  $\mathfrak{X}$  est quasi-compact  $\mathfrak{X}_\eta$  est compact. Si  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathfrak{X}$  alors  $\mathcal{U}_\eta$  est un domaine analytique fermé de  $\mathfrak{X}_\eta$ , et tout recouvrement ouvert de  $\mathcal{U}$  induit un  $G$ -recouvrement de  $\mathcal{U}_\eta$ . Il existe une flèche de réduction<sup>(15)</sup> de  $\mathfrak{X}_\eta$  vers la fibre spéciale  $\mathfrak{X}_s$  de  $\mathfrak{X}$  qui est anticontinue<sup>(16)</sup>; son image est fermée.

Lorsque  $\mathfrak{X}$  est plat la réduction  $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_s$  est surjective, les dimensions  $k$ -analytique et topologique de  $\mathfrak{X}_\eta$  coïncident avec la dimension de Krull de  $\mathfrak{X}_s$ , et si  $\mathfrak{X}$  est de plus quasi-compact,  $\mathfrak{X}_\eta$  est sans bord si et seulement si  $\mathfrak{X}$  est propre ([63], cor. 4.4).

*Remarque 1.25.* — L'espace  $\mathfrak{X}_\eta$  est bon si  $\mathfrak{X}$  est propre ou affine *mais il ne l'est pas en général*: par exemple, si  $\mathfrak{X}$  désigne l'ouvert complémentaire de l'origine dans le plan affine formel,  $\mathfrak{X}_\eta$  est l'espace  $\Omega$  introduit immédiatement après la définition 1.24.

## 2. LE TYPE D'HOMOTOPIE DE CERTAINS ESPACES ANALYTIQUES

### 2.1. Les courbes analytiques

*Les résultats présentés dans ce paragraphe sont extraits du chapitre 4 de [6].*

Une *courbe  $k$ -analytique* est un espace  $k$ -analytique séparé<sup>(17)</sup> dont toutes les composantes connexes sont de dimension  $k$ -analytique égale à 1; ceci entraîne que sa

<sup>(15)</sup>La réduction d'une algèbre strictement  $k$ -affinoïde évoquée plus haut n'entre dans ce cadre que lorsque l'algèbre en question est *distinguée* ([16], 6.4.3); c'est toujours le cas si elle est réduite et si  $k$  est algébriquement clos.

<sup>(16)</sup>Cela signifie, rappelons-le, que l'image réciproque d'un ouvert est fermée.

<sup>(17)</sup>C'est-à-dire tel que la diagonale soit une immersion fermée. On peut montrer qu'une courbe  $k$ -analytique au sens ci-dessus est *automatiquement* paracompacte (cf. [50]).



dimension topologique est inférieure ou égale à 1<sup>(18)</sup>. Le théorème de réduction semi-stable de Bosch et Lütkebohmert ([18]) et l'étude explicite des disques de dimension 1 ([6], 1.4.4 et th. 4.2.1) permettent d'obtenir une bonne compréhension, et de l'allure locale des courbes  $k$ -analytiques, et de leur type d'homotopie. Commençons par l'allure locale; on peut dire grossièrement qu'elle est celle d'un *arbre réel*, autrement dit d'un arbre en chaque point duquel peuvent aboutir une infinité de branches; sa topologie est toutefois moins fine que la topologie d'arbre, un voisinage d'un point devant contenir *presque toutes* les branches y aboutissant. On démontre plus précisément la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. — *Soit  $X$  une courbe  $k$ -analytique connexe et non vide. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) *l'espace topologique  $X$  est contractile;*
- ii) *l'espace topologique  $X$  est simplement connexe;*
- iii) *pour tout couple  $(x, y)$  de points de  $X$  il existe un unique fermé de  $X$  homéomorphe à un intervalle réel compact d'extrémités  $x$  et  $y$ .*

*De plus tout point d'une courbe  $k$ -analytique a une base de voisinages possédant les trois propriétés ci-dessus.*

Soit  $X$  une courbe possédant ces trois propriétés. Chacun de ses domaines analytiques connexes et non vides les possède aussi, comme on le voit à l'aide de l'assertion *iii*). Par ailleurs il existe une compactification *topologique* canonique de  $X$  les vérifiant également. Les points de cette compactification qui n'appartiennent pas à  $X$  sont appelés les *bouts* de  $X$ .

*Exemple 2.2.* — La droite projective analytique  $\mathbb{P}_k^{1,an}$  possède ces trois propriétés; on va décrire à titre d'exemple l'unique chemin reliant deux  $k$ -points donnés de  $\mathbb{P}_k^{1,an}$ . Pour tout élément  $a$  de  $k$  le point correspondant de  $\mathbb{A}_k^{1,an}$  (défini par l'égalité  $T = a$ ) sera encore noté  $a$ , et  $\infty$  désignera le point à l'infini. Pour tout réel positif  $r$  et pour tout  $a$  appartenant à  $k$ , soit  $\eta_{a,r}$  le point  $\sum a_i(T - a)^i \mapsto \max |a_i|r^i$  de  $\mathbb{A}_k^{1,an}$ ; remarquons que  $\eta_{a,0}$  est simplement le  $k$ -point  $a$ , et décidons par convention que  $\eta_{a,+\infty}$  n'est autre que  $\infty$ . L'unique intervalle tracé sur  $\mathbb{P}_k^{1,an}$  reliant  $a$  à  $\infty$  est alors  $\{\eta_{a,r}\}_{r \in [0; +\infty]}$ . Soient  $a$  et  $b$  deux éléments distincts de  $k$  et soit  $R$  le réel  $|a - b|$ ; les points  $\eta_{a,R}$  et  $\eta_{b,R}$  coïncident. L'image de l'application de  $[0; 2R]$  vers  $\mathbb{P}_k^{1,an}$  qui envoie  $r$  sur  $\eta_{a,r}$  s'il est inférieur ou égal à  $R$ , et sur  $\eta_{b,2R-r}$  sinon, est l'unique intervalle tracé sur  $\mathbb{P}_k^{1,an}$  reliant les deux  $k$ -points  $a$  et  $b$ . Notons que dans ces exemples les seuls points rigides des chemins construits sont leurs extrémités.

<sup>(18)</sup> Donnons un exemple où elle est nulle. Soit  $r$  un réel strictement positif qui n'est pas de torsion modulo  $|k^*|$  et soit  $k_r$  l'algèbre  $k$ -affinoïde de l'exemple 1.3. Alors  $\mathcal{M}(k_r)$  est une courbe  $k$ -analytique mais est un singleton puisque  $k_r$  est une extension complète de  $k$ .

Si  $x$  est un  $k$ -point, ou plus généralement un point rigide de  $\mathbb{P}_k^{1,an}$ , alors  $\mathbb{P}_k^{1,an} - \{x\}$  est connexe. Soient  $r$  un réel strictement positif et  $a$  un élément de  $k$ . Si  $r$  n'est pas de torsion modulo  $|k^*|$  alors  $\mathbb{P}_k^{1,an} - \{\eta_{a,r}\}$  a exactement deux composantes connexes, respectivement définies par les inégalités  $|T-a| < r$  et  $|T-a| > r$ . Dans le cas contraire  $\mathbb{P}_k^{1,an} - \{\eta_{a,r}\}$  a une infinité de composantes connexes. Décrivons-les en supposant, pour simplifier, que  $r$  est égal à 1, que  $a$  est égal à 0 et que  $k$  est algébriquement clos. Soit  $S$  un système de représentants de  $\tilde{k}$  dans  $k^o$ . Pour tout  $s$  dans  $S$  notons  $U_s$  l'ouvert de  $\mathbb{P}_k^{1,an}$  défini par l'inégalité  $|T-s| < 1$ ; notons  $U_\infty$  celui donné par la condition  $|T| > 1$ . Les composantes connexes de  $\mathbb{P}_k^{1,an} - \{\eta_{0,1}\}$  sont alors les  $U_t$ , où  $t$  parcourt  $S \cup \{\infty\}$ .

Décrivons maintenant le type d'homotopie d'une courbe  $k$ -analytique.

PROPOSITION 2.3. — *Soit  $X$  une courbe  $k$ -analytique. L'ensemble des points de  $X$  possédant un voisinage simplement connexe ayant au plus un bout est un ouvert de  $X$ ; son complémentaire est noté  $S(X)$ , est appelé le squelette de  $X$  et est localement un graphe fini. Si  $Y$  est une composante connexe de  $X$  ne rencontrant pas  $S(X)$  elle est contractile, sinon elle admet une rétraction compacte par déformation sur  $S(X) \cap Y$ .*

Le squelette de l'analytification  $\mathcal{X}^{an}$  d'une  $k$ -courbe algébrique  $\mathcal{X}$  a un nombre fini de sommets. Lorsqu'elle est projective, il est relié comme on le verra plus bas aux propriétés de sa « réduction modulo  $k^{oo}$  ». Considérons par exemple une courbe elliptique  $\mathcal{X}$  à réduction semi-stable déployée. Si  $\mathcal{X}$  a bonne réduction alors  $S(\mathcal{X}^{an})$  est vide et  $\mathcal{X}^{an}$  est contractile; si  $\mathcal{X}$  a mauvaise réduction alors  $S(\mathcal{X}^{an})$  est homéomorphe à un cercle et  $S(\mathcal{X}^{an}) \subset \mathcal{X}^{an}$  est une équivalence homotopique.

Soit  $X$  une courbe  $k$ -analytique. Qualifions d'*extrémal* tout point  $x$  de  $X$  possédant la propriété suivante : *pour tout ouvert connexe  $U$  de  $X$  contenant  $x$  l'ouvert  $U - \{x\}$  est encore connexe.*

PROPOSITION 2.4. — *Soit  $X$  une courbe  $k$ -analytique normale et sans bord et soit  $x$  un point de  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $x$  est extrémal;
- ii)  $|\mathcal{H}(x)^*|/|k^*|$  est de torsion et  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  est algébrique sur  $\tilde{k}$ .

*En particulier tout point rigide de  $X$  est extrémal.*

## 2.2. Tout espace analytique à réduction raisonnable se rétracte par déformation sur un polyèdre

Les liens dont on peut pressentir l'existence entre les géométries analytique ultramétrique et linéaire par morceaux (liens dont le rôle joué par les polygones de Newton est une première manifestation) prennent une forme particulièrement tangible dans la théorie de Berkovich. On a montré plus haut comment immerger un pavé réel dans un polydisque (exemple 1.6). On va voir ci-dessous que si  $\mathfrak{X}$  est un schéma formel

sur  $k^\circ$  dont la fibre spéciale a des singularités « raisonnables », sa fibre générique  $\mathfrak{X}_\eta$  se rétracte par déformation naturellement sur l'un de ses fermés  $S(\mathfrak{X})$ , qui est canoniquement un espace linéaire par morceaux ; l'inclusion  $S(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{X}_\eta$  et la rétraction  $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow S(\mathfrak{X})$  jouissent de bonnes propriétés vis-à-vis des deux structures en jeu, la structure analytique sur  $\mathfrak{X}_\eta$  et la structure polyédrale sur  $S(\mathfrak{X})$ .

Nous allons commencer par décrire explicitement une telle rétraction, dans un cas élémentaire qui a deux vertus : il est représentatif d'un certain nombre de techniques couramment utilisées dans la théorie, et il sert d'amorce à la construction des rétractions dans le cadre le plus général.

Soit  $a$  un élément non nul de  $k^\circ$  et soit  $n$  un entier. Notons  $\mathfrak{Y}$  le spectre formel de  $k^\circ\{T_0, \dots, T_n\}/(T_0T_1 \dots T_n - a)$ . Sa fibre générique  $\mathfrak{Y}_\eta$  est l'espace  $k$ -affinoïde  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , où  $\mathcal{A}$  désigne l'algèbre  $k\{T_0, \dots, T_n\}/(T_0T_1 \dots T_n - a)$ . Tout élément de  $\mathcal{A}$  a une unique écriture, que l'on qualifiera de *réduite*, sous la forme d'une série  $\sum a_I \mathbf{T}^I$  où chaque terme ne fait intervenir que  $n$  indéterminées parmi les  $T_i$ . Soit  $\Delta$  le compact de  $]0; 1]^{n+1}$  défini comme l'ensemble des  $(n+1)$ -uplets  $(t_0, \dots, t_n)$  tels que le produit des  $t_i$  soit égal à  $|a|$ . Si  $\mathbf{r}$  appartient à  $\Delta$  on vérifie que l'application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{R}_+$ , qui envoie un élément  $a$  d'écriture réduite  $\sum a_I \mathbf{T}^I$  sur  $\max |a_I| \mathbf{r}^I$ , est une seminorme multiplicative bornée que l'on notera  $\omega_{\mathbf{r}}$ . Désignons par  $\mathbf{S}$  l'image dans  $\mathfrak{Y}_\eta$  du polytope compact  $\Delta$  par le plongement  $\mathbf{r} \mapsto \omega_{\mathbf{r}}$  ; on va construire une rétraction par déformation de  $\mathfrak{Y}_\eta$  vers  $\mathbf{S}$ .

Soit  $\mathcal{G}$  l'espace  $\mathcal{M}(k\{T, S\}/(TS - 1))$  ; il a une structure naturelle de groupe  $k$ -analytique (c'est le « groupe multiplicatif des éléments de norme 1 »). Notons  $\mathbf{G}$  le noyau de la multiplication  $\mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$  ; c'est un groupe  $k$ -analytique qui est *non canoniquement* isomorphe à  $\mathcal{G}^n$ . Désignons par  $\chi_0, \dots, \chi_n$  les fonctions coordonnées de  $\mathcal{G}^{n+1}$  ainsi que leurs restrictions à  $\mathbf{G}$ . Pour tout réel  $t$  compris entre 0 et 1 et toute extension complète  $L$  de  $k$ , soit  $\mathbf{G}_{L,t}$  le sous-groupe de  $\mathbf{G}_L$  défini comme le lieu de validité simultanée des inégalités  $|\chi_i - 1| \leq t$ . Le bord de Shilov de  $\mathbf{G}_{L,t}$  est réduit à un élément. En effet  $\mathbf{G}_{L,0}$  est simplement le groupe trivial. On remarque ensuite que  $\mathbf{G}_{L,1}$  n'est autre que  $\mathbf{G}_L$  lui-même qui est isomorphe à  $\mathcal{G}_L^n$  ; or ce dernier est un espace strictement  $L$ -affinoïde dont la réduction est le schéma *intègre*  $\mathbb{G}_{m, \tilde{L}}^n$ , d'où la conclusion. Enfin si  $t$  appartient à  $]0, 1[$  alors  $\mathbf{G}_{L,t}$  est isomorphe au  $L$ -polydisque de dimension  $n$  de centre  $(1, \dots, 1)$  et de polyrayon  $(t, \dots, t)$ , et son bord de Shilov est un singleton d'après l'exemple 1.13.

Le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur  $\mathfrak{Y}_\eta$  par multiplication sur les coordonnées ; on a ainsi une flèche  $m : \mathbf{G} \times \mathfrak{Y}_\eta \rightarrow \mathfrak{Y}_\eta$ . Soit  $x$  appartenant à  $\mathfrak{Y}_\eta$ . La fibre en  $x$  de la projection  $\mathbf{G} \times \mathfrak{Y}_\eta \rightarrow \mathfrak{Y}_\eta$  s'identifie à  $\mathbf{G}_{\mathcal{H}(x)}$  ; pour tout  $t$  appartenant à  $[0, 1]$  l'unique élément du bord de Shilov de  $\mathbf{G}_{\mathcal{H}(x),t}$  peut par ce biais être vu comme un point de  $\mathbf{G} \times \mathfrak{Y}_\eta$ , que l'on notera  $\sigma_t(x)$ .

PROPOSITION 2.5 ([13], dém. des th. 5.2 et 5.4, étapes 1 et 2)

Soit  $x$  appartenant à  $\mathfrak{Y}_\eta$ . L'élément  $m(\sigma_0(x))$  (resp.  $m(\sigma_1(x))$ ) de  $\mathfrak{Y}_\eta$  n'est autre que  $x$  (resp.  $\omega_{(|T_0(x)|, \dots, |T_n(x)|)}$ ). L'application  $(t, x) \mapsto m(\sigma_t(x))$  définit une rétraction par déformation de  $\mathfrak{Y}_\eta$  sur  $\mathbf{S}$ .

Berkovich qualifie de *pluristable non dégénéré* tout  $k^\circ$ -schéma formel localement de présentation finie  $\mathfrak{X}$  tel que le morphisme  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathrm{Spf} k^\circ$  admette, localement pour la topologie étale sur  $\mathfrak{X}$ , un dévissage en des flèches ou bien étales, ou bien de la forme  $\mathrm{Spf} \mathfrak{A}\{T_0, \dots, T_n\}/(T_0 \dots T_n - a) \rightarrow \mathrm{Spf} \mathfrak{A}$  où  $a$  est un élément de  $\mathfrak{A}$  non diviseur de zéro dans  $\mathfrak{A} \otimes_{k^\circ} k$ ; la fibre générique d'un tel schéma formel est normale. Donnons trois exemples de schémas formels pluristables non dégénérés : le schéma  $\mathfrak{Y}$  considéré ci-dessus ; un schéma formel lisse, et en particulier la complétion formelle le long de sa fibre spéciale d'un  $k^\circ$ -schéma lisse ; la complétion formelle le long de sa fibre spéciale d'une  $k^\circ$ -courbe semi-stable à fibre générique lisse.

Soit  $\mathfrak{X}$  un  $k^\circ$ -schéma formel pluristable non dégénéré ; on stratifie  $\mathfrak{X}_s$  de manière évidente en sous-schémas localement fermés irréductibles et normaux, que l'on appellera ses *strates normales*. Berkovich consruuit, par un procédé long et délicat utilisant entre autres la proposition 2.5 de manière répétée, une rétraction par déformation  $\tau$  de  $\mathfrak{X}$  sur l'un de ses sous-ensembles fermés qu'il note  $S(\mathfrak{X})$  et appelle le *squelette*<sup>(19)</sup> de  $\mathfrak{X}$ . Il munit  $S(\mathfrak{X})$  d'une structure naturelle d'espace  $\mathbb{Z}$ -linéaire par morceaux de dimension inférieure ou égale à celle de  $\mathfrak{X}_s$  qui satisfait aux conditions suivantes ([13], th. 8.1 et [14], §4 et §5) :

- $S(\mathfrak{X})$  possède une décomposition cellulaire compatible avec la structure en question, dont l'ensemble ordonné des cellules est en bijection *décroissante* avec celui des strates normales de  $\mathfrak{X}_s$  (la dimension d'une cellule est égale à la codimension de la strate correspondante) ;
- si  $f$  est une fonction analytique sur  $\mathfrak{X}_\eta$  dont le lieu des zéros est d'intérieur vide alors  $f$  est inversible au voisinage de  $S(\mathfrak{X})$ , et  $\log |f|_{|S(\mathfrak{X})}$  est  $\mathbb{Z}$ -linéaire par morceaux ;
- si  $V$  est un domaine analytique de  $\mathfrak{X}_\eta$  alors  $V \cap S(\mathfrak{X})$  est un sous-espace  $\mathbb{Z}$ -linéaire par morceaux de  $S(\mathfrak{X})$  ;
- si  $D$  est un sous-espace  $\mathbb{Z}$ -linéaire par morceaux de  $S(\mathfrak{X})$  alors  $\tau^{-1}(D)$  est un domaine analytique de  $\mathfrak{X}_\eta$ .

*Exemple 2.6.* — En reprenant les notations du début du paragraphe, le squelette de  $\mathfrak{Y}$  est exactement le fermé  $\mathbf{S}$  de  $\mathfrak{Y}_\eta$ .

<sup>(19)</sup>Ce squelette dépend effectivement de  $\mathfrak{X}$  et pas seulement de  $\mathfrak{X}_\eta$ . Supposons que  $\mathfrak{X}$  est une courbe ; dans ce cas  $S(\mathfrak{X})$  ne coïncide pas forcément avec le squelette  $S(\mathfrak{X}_\eta)$  décrit plus haut mais si  $Z$  est une composante connexe de  $\mathfrak{X}_\eta$  alors  $S(\mathfrak{X}) \cap Z$  se rétracte sur  $S(\mathfrak{X}_\eta) \cap Z$  lorsque celui-ci est non vide, et est contractile sinon.

*Exemple 2.7.* — Si  $\mathfrak{X}$  est un  $k^o$ -schéma formel connexe, lisse et non vide alors  $S(\mathfrak{X})$  est un singleton et  $\mathfrak{X}_\eta$  est contractile. En particulier si  $\mathcal{X}$  est une  $k$ -variété algébrique intègre, propre et lisse ayant bonne réduction,  $\mathcal{X}^{an}$  est contractile.

*Exemple 2.8.* — Si  $\mathfrak{X}$  est une  $k^o$ -courbe formelle, pluristable et non dégénérée alors  $\mathfrak{X}_s$  est à singularités ordinaires, et si celles-ci sont déployées  $S(\mathfrak{X})$  s'identifie au graphe dual de celui de  $\mathfrak{X}_s$ , graphe dual que l'on décrit comme suit : à chaque composante irréductible de  $\mathfrak{X}_s$  correspond un sommet, et à chaque point singulier une arête qui relie les deux sommets correspondants (resp. se recolle en un cercle sur le sommet correspondant) si ce point singulier appartient à deux composantes (resp. n'appartient qu'à une composante). Par exemple, si  $\mathfrak{X}_s$  est une cubique nodale ou une chaîne polygonale de droites projectives alors  $S(\mathfrak{X})$  est un cercle.

*Remarque 2.9.* — Le type d'homotopie de  $\mathcal{X}^{an}$  a été décrit plus haut sans justification lorsque  $\mathcal{X}$  est une courbe elliptique à réduction semi-stable déployée ; il peut se déduire des exemples 2.7 et 2.8.

*Remarque 2.10.* — Si  $\varphi : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  est un morphisme étale entre schémas formels pluristables non dégénérés alors  $\varphi_\eta^{-1}(S(\mathfrak{X}))$  est égal à  $S(\mathfrak{Z})$ , et la flèche  $S(\mathfrak{Z}) \rightarrow S(\mathfrak{X})$  ainsi induite est  $\mathbb{Z}$ -linéaire par morceaux ; c'est même une « immersion par morceaux » ([14], cor. 4.3.2 et th. 6.1.1). Plus généralement, soit  $\mathfrak{X}$  un  $k^o$ -schéma formel pluristable non dégénéré et purement de dimension  $n$  pour un certain  $n$ , soit  $Z$  un espace  $k$ -analytique topologiquement séparé de dimension inférieure ou égale à  $n$  et soit  $\psi$  un morphisme de  $Z$  vers  $\mathfrak{X}_\eta$  ; notons  $\mathbf{T}$  le fermé  $\psi^{-1}(S(\mathfrak{X}))$ . Il existe *une et une seule* structure  $\mathbb{Q}$ -linéaire par morceaux sur  $\mathbf{T}$  faisant de  $\psi|_{\mathbf{T}}$  une application  $\mathbb{Q}$ -linéaire par morceaux, qui est alors une immersion par morceaux ([35], th. 3.1).

La fibre générique d'un schéma formel pluristable non dégénéré a d'après ce qui précède le type d'homotopie d'un CW-complexe, et est de ce fait localement contractile. En se ramenant à l'aide des altérations de De Jong ([51], th. 5.9) au cas d'une telle fibre, Berkovich a démontré le théorème suivant, qui permet d'appliquer à un espace  $k$ -analytique lisse l'arsenal usuel de la topologie algébrique, et qui joue par ailleurs un rôle crucial dans sa théorie de l'intégration  $p$ -adique :

**THÉORÈME 2.11** ([13], th. 9.1). — *Si la valeur absolue de  $k$  n'est pas triviale, tout espace  $k$ -analytique lisse est localement contractile.*

### 2.3. Les variétés abéliennes

*On présente ici certains des résultats des paragraphes 6.3 et 6.5 de [6].*

*Le type d'homotopie d'un tore analytique.* — Soit  $\mathbb{G}_m$  le groupe multiplicatif analytique sur  $k$  et soit  $n$  un entier. L'application  $\mathbf{r} \mapsto (\sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I| \mathbf{r}^I)$  établit un homéomorphisme entre  $(\mathbb{R}_+^*)^n$  et un fermé  $\Sigma$  de  $\mathbb{G}_m^n$ . Par un procédé analogue à celui que décrit la proposition 2.5, on construit une rétraction par déformation  $\sigma$

de  $\mathbb{G}_m^n$  sur  $\Sigma$  qui envoie n'importe quel point  $x$  sur l'élément de  $\Sigma$  correspondant au  $n$ -uplet  $|\mathbf{T}(x)|$ . Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbb{G}_m^n$ , autrement dit un sous-groupe de  $(k^*)^n$  isomorphe *via* la valeur absolue à un réseau  $\Lambda$  de  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ . Le groupe  $\Gamma$  agit proprement et discontinûment sur  $\mathbb{G}_m^n$ , et le quotient *topologique*  $\mathbb{G}_m^n/\Gamma$  hérite d'une structure de groupe  $k$ -analytique connexe, lisse et *propre*, c'est-à-dire compact et sans bord. L'action de  $\Gamma$  commute à  $\sigma$  et sa restriction à  $\Sigma$  s'identifie à l'opération de  $\Lambda$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ . On en déduit que  $\mathbb{G}_m^n/\Gamma$  se rétracte par déformation sur  $\Sigma/\Gamma$ , et que ce dernier est homéomorphe au tore réel  $(\mathbb{R}_+^*)^n/\Lambda$ . En combinant ce résultat avec le théorème d'uniformisation ([17]) on obtient la proposition suivante, qui généralise ce qui a été vu pour les courbes elliptiques.

**PROPOSITION 2.12.** — *Soient  $\mathcal{J}$  une variété abélienne sur  $k$  et  $g$  sa dimension. Il existe une extension finie  $L$  de  $k$  et un entier  $d$  compris entre 0 et  $g$ , tels que pour toute extension complète  $M$  de  $L$  le groupe  $M$ -analytique  $\mathcal{J}_M^{an}$  ait le type d'homotopie du tore réel  $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ .*

*Remarque 2.13.* — Le cas où  $d$  est nul est celui où  $\mathcal{J}_L$  a bonne réduction; le cas où il vaut  $g$  est celui où  $\mathcal{J}_L^{an}$  est isomorphe au quotient de  $\mathbb{G}_{m,L}^g$  par un réseau. Si  $|k^*|$  est libre de rang 1 il suffit de prendre pour  $L$  une extension telle que  $\mathcal{J}_L$  soit à réduction semi-abélienne déployée; l'entier  $d$  est alors la dimension de la partie torique de  $(\mathcal{N} \times_{L^\circ} \tilde{L})^\circ$ , où  $\mathcal{N}$  est le modèle de Néron de  $\mathcal{J}_L$ .

### 3. APPLICATIONS DIVERSES ET VARIÉES

#### 3.1. Comment remédier à un « défaut » de la théorie spectrale $p$ -adique

Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach non nulle le spectre d'un élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  est une partie compacte *non vide* de  $\mathbb{C}$ . La démonstration de cette assertion repose de manière essentielle sur le fait qu'une fonction localement développable en série entière sur  $\mathbb{C}$  l'est globalement, ce qui permet d'utiliser ensuite le théorème de Liouville; elle ne se transpose donc pas au cas ultramétrique, et de fait la proposition correspondante dans ce cadre est fautive. Donnons un contre-exemple; soit  $k$  un corps ultramétrique complet et soit  $r$  un réel strictement positif qui n'est pas de torsion modulo  $|k^*|$ . La  $k$ -algèbre de Banach  $k_r$  de l'exemple 1.3 est un corps; en particulier  $T - \lambda$  est un élément inversible de  $k_r$  pour tout  $\lambda$  dans  $k$ , même lorsque ce dernier est algébriquement clos: le spectre « naïf » de  $T$  est donc vide.

C'est pour pallier cette lacune que fut développée à l'origine la théorie de Berkovich et elle y parvint fort bien ([6], chap. 7). Si  $k$  est un corps ultramétrique complet, elle associe en effet à tout élément  $a$  d'une  $k$ -algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  une partie non pas de  $k$ , mais de la *droite affine analytique sur  $k$* . On note cette partie  $\mathrm{Sp} a$  et on l'appelle le spectre de  $a$ ; elle est compacte, non vide lorsque  $\mathcal{A}$  est non nulle, et sa

trace sur  $k$  est le spectre traditionnel. Dans l'exemple mentionné ci-dessus  $\mathrm{Sp} T$  est le singleton  $\{\sum a_i T^i \mapsto \max |a_i| r^i\}$ . Les résultats de base de la théorie spectrale complexe s'étendent ici, tel par exemple le calcul fonctionnel holomorphe : toute fonction analytique définie sur un voisinage de  $\mathrm{Sp} a$  dans  $\mathbb{A}_k^{1,an}$  peut être évaluée en  $a$ .

### 3.2. Fécondité de la topologie étale analytique

C'est sans doute une conjecture de Carayol et Drinfeld ([24]) qui fit apparaître pour la première fois la nécessité de disposer d'une théorie de la cohomologie étale en géométrie analytique ultramétrique. Cette conjecture prédisait, *grosso modo*, qu'une partie des correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales devait se réaliser dans la cohomologie étale de certains revêtements finis galoisiens (introduits par Drinfeld) des « demi-plans de Poincaré  $p$ -adiques de dimension supérieure », pourvu que l'expression « cohomologie étale » eût un sens dans ce contexte, celui de la géométrie rigide ; et à l'époque elle n'en avait pas.

Berkovich s'est attelé à la tâche ; c'est l'objet essentiel de l'article [7]. Nous n'en dirons pratiquement rien. Indiquons simplement qu'il qualifie d'*étale* un morphisme qui satisfait à la condition jacobienne usuelle *et qui est sans bord* : une immersion ouverte est étale, celle du disque unité fermé dans la droite affine ne l'est pas. Il définit à partir de cette notion une topologie de Grothendieck puis étudie systématiquement la cohomologie correspondante ainsi que ses variantes à support, et démontre à leur sujet les résultats fondamentaux attendus : changements de base, dualité de Poincaré... Il établit également des théorèmes de comparaison entre les cohomologies étales algébrique et analytique, pour les faisceaux de torsion première à la caractéristique résiduelle<sup>(20)</sup>.

Signalons immédiatement qu'en ce qui concerne la motivation « automorphe » mentionnée en introduction, la cohomologie étale de Berkovich a rendu les services attendus : elle a effectivement permis de donner un sens précis à la conjecture de Carayol-Drinfeld (et de la démontrer !). Le lecteur intéressé pourra se reporter aux travaux de Boyer, Harris et Taylor pour le cas  $p$ -adique ([23], [45], [46]), et à ceux de Hausberger pour celui d'égale caractéristique ([47]).

Toutefois la théorie obtint son premier gros succès à propos d'une autre conjecture, due à Deligne, sur les *cycles évanescents*. Dans le cadre *transcendant* ces objets interviennent dans l'étude du problème suivant : on se donne une famille continue d'espaces topologiques au-dessus d'un disque complexe qui est localement constante sur un voisinage épointé du centre  $O$ , et on cherche à comparer la cohomologie de la fibre en  $O$  à celle de la « fibre générale » de la famille.

Disons quelques mots au sujet des cycles évanescents *algébriques*. Soit  $k$  un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle il est hensélien. Soient  $L$  une

<sup>(20)</sup>Il a ensuite étendu ([9]) ces théorèmes au cas de la torsion première à la caractéristique *du corps de base*.

clôture séparable de  $k$  et  $G$  le groupe de Galois correspondant. La valeur absolue de  $k$  se prolonge d'une unique manière à  $L$ , et le corps résiduel  $\tilde{L}$  est une clôture algébrique de  $\tilde{k}$ . Soit  $\mathcal{X}$  un  $k^\circ$ -schéma de présentation finie. On note  $\mathcal{X}_\eta$  sa fibre générique,  $\mathcal{X}_{\bar{\eta}}$  sa fibre générique géométrique  $\mathcal{X}_\eta \times_k L$ , et  $\mathcal{X}_{\bar{s}}$  sa fibre spéciale géométrique  $\mathcal{X} \times_{k^\circ} \tilde{L}$ . Désignons par  $\mathbf{Ab}(\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}})$  (resp.  $\mathbf{Ab}_G(\mathcal{X}_{\bar{s}, \text{ét}})$ ) la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur  $\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}}$  (resp. des faisceaux en groupes abéliens sur  $\mathcal{X}_{\bar{s}, \text{ét}}$  munis d'une action continue de  $G$  compatible avec celle sur  $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ ). On définit un *foncteur des cycles évanescents*  $\Psi_\eta$  de  $\mathbf{Ab}(\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}})$  vers  $\mathbf{Ab}_G(\mathcal{X}_{\bar{s}, \text{ét}})$  qui est exact à gauche. Pour tout  $\mathcal{F}$  appartenant à  $\mathbf{Ab}(\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}})$  les  $R^q\Psi_\eta\mathcal{F}$  seront appelés les *faisceaux de cycles évanescents associés à  $\mathcal{F}$* . Ils mesurent en un sens le « degré d'irrégularité de la fibration  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } k^\circ$  », et sont par exemple nuls pour  $q$  strictement positif lorsque  $\mathcal{X}$  est lisse sur  $k^\circ$ , et  $\mathcal{F}$  localement constant et annulé par un entier inversible dans  $k^\circ$ ; si  $\mathcal{X}$  est *propre* on dispose, pour tout  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{Ab}(\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}})$ , d'une suite spectrale naturelle  $H^p(\mathcal{X}_{\bar{s}, \text{ét}}, R^q\Psi_\eta\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}, \text{ét}}, \overline{\mathcal{F}})$ , où  $\overline{\mathcal{F}}$  désigne l'image inverse de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{X}_{\bar{\eta}, \text{ét}}$ .

Berkovich a démontré dans [8] les conjectures de Deligne sur la question; elles affirmaient entre autres que lorsque  $k$  est complet les constructions ci-dessus « ne dépendent que de la complétion formelle  $\widehat{\mathcal{X}}$  de  $\mathcal{X}$  le long de sa fibre spéciale ». Supposons donc  $k$  complet et soit  $\mathfrak{X}$  un  $k^\circ$ -schéma formel topologiquement de présentation finie. Berkovich définit un *foncteur des cycles évanescents*  $\Psi_\eta : \mathbf{Ab}(\mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Ab}_G(\mathfrak{X}_{\bar{s}, \text{ét}})$  qui est exact à gauche; le site  $\mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}}$  est bien entendu celui qu'il a introduit et étudié dans [7], et les notations  $\mathbf{Ab}$  et  $\mathbf{Ab}_G$  ont le même sens que plus haut. Il montre l'existence pour tout  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{Ab}(\mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}})$  d'une suite spectrale naturelle  $H^p(\mathfrak{X}_{\bar{s}, \text{ét}}, R^q\Psi_\eta\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\bar{\eta}, \text{ét}}, \overline{\mathcal{F}})$ , où  $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}$  est l'espace déduit de  $\mathfrak{X}_\eta$  par extension des scalaires au *complété* de  $L$ , et où  $\overline{\mathcal{F}}$  est l'image inverse de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}, \text{ét}}$ .

Soit  $\mathcal{X}$  un  $k^\circ$ -schéma de présentation finie; si  $\mathcal{F}$  est un objet de  $\mathbf{Ab}(\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}})$  on notera  $\widehat{\mathcal{F}}$  son image réciproque dans  $\mathbf{Ab}(\widehat{\mathcal{X}}_{\eta, \text{ét}})$ .

**THÉORÈME 3.1** ([8], cor. 5.3). — *Si  $\mathcal{F}$  est un objet de  $\mathbf{Ab}(\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}})$  il existe pour tout entier  $q$  une flèche naturelle  $R^q\Psi_\eta\mathcal{F} \rightarrow R^q\Psi_\eta\widehat{\mathcal{F}}$ , et lorsque  $\mathcal{F}$  est de torsion cette flèche est un isomorphisme.*

Signalons que Berkovich a étendu ses résultats à une classe plus large de schémas formels ([10]), et a par ailleurs étudié les cycles évanescents sur ses propres espaces ([11]).

*Dessins d'enfants  $p$ -adiques.* — Dans un tout autre ordre d'idées, Yves André a utilisé dans [1] la topologie étale sur un espace de Berkovich pour jeter les bases d'une variante  $p$ -adique de la théorie des « dessins d'enfants »; elle comprend entre autres une description « géométrique » de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ , que nous allons maintenant présenter.



Un revêtement étale entre espaces analytiques (au sens de Berkovich) est un morphisme qui est localement sur le but somme disjointe de morphismes finis étales. Donnons deux exemples :

*Exemple 3.2.* — Si  $X$  est un espace analytique et si  $Y \rightarrow X$  est un revêtement topologique alors  $Y$  hérite d'une structure naturelle d'espace analytique, pour laquelle  $Y \rightarrow X$  est en particulier un revêtement étale (il est localement sur  $X$  somme disjointe d'isomorphismes).

*Exemple 3.3.* — Si l'on travaille en inégale caractéristique, le logarithme donné par la série usuelle définit un revêtement étale de la droite affine analytique par le disque unité ouvert de centre 1.

Soit  $Y$  un espace analytique. Un revêtement étale  $Z \rightarrow Y$  est dit *tempéré* s'il est quotient d'un revêtement de la forme  $T \rightarrow T_0 \rightarrow Y$ , où  $T \rightarrow T_0$  est un revêtement topologique quelconque et où  $T_0 \rightarrow Y$  est fini étale. Supposons  $Y$  connexe; à tout « point géométrique<sup>(21)</sup> »  $y$  de  $Y$  est associé un groupe topologique  $\pi_1^{\text{temp}}(Y, y)$  qui est appelé le *groupe fondamental tempéré* de  $(Y, y)$ , qui classe les revêtements tempérés de  $Y$ , et qui n'est en général ni discret ni profini. Si par exemple le corps de base est algébriquement clos et si  $Y$  est l'analytifiée (supposée pointée en un certain  $y$ ) d'une courbe elliptique  $\mathcal{Y}$ , alors  $\pi_1^{\text{temp}}(Y, y)$  est isomorphe à  $\widehat{\mathbb{Z}}^2$  si  $\mathcal{Y}$  a bonne réduction et à  $\widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$  sinon<sup>(22)</sup> (le facteur  $\mathbb{Z}$  correspond au groupe fondamental topologique de  $Y$ , qui est dans ce cas homotope à un cercle).

Désignons par  $X$  la droite projective sur  $\mathbb{Q}$  privée de  $\{0, 1, \infty\}$ . Soit  $\overline{\mathbb{Q}}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ . On dispose d'une flèche naturelle  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Out} \pi_1^{\text{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}})$  (lorsqu'on travaille à automorphisme intérieur près on peut oublier le point-base); par un célèbre résultat de Belyi elle est injective.

Choisissons un plongement de  $\overline{\mathbb{Q}}$  dans  $\mathbb{C}$  et identifions ainsi  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  à un sous-groupe  $G_{\mathbb{R}}$  de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Soit  $x$  un  $\mathbb{C}$ -point de  $X$ . Le groupe  $\pi_1^{\text{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, x)$  est canoniquement isomorphe au complété profini de  $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), x)$ . Il en résulte l'existence d'une flèche naturelle  $\text{Out} \pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C})) \rightarrow \text{Out} \pi_1^{\text{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}})$  qui est injective.

Soit  $p$  un nombre premier et soit  $\mathbb{C}_p$  le complété d'une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  de  $\mathbb{Q}_p$ . Plongeons  $\overline{\mathbb{Q}}$  dans  $\mathbb{C}_p$  et identifions ainsi  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  à un sous-groupe  $G_p$  de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Soit  $z$  un  $\mathbb{C}_p$ -point de  $X$ . Le groupe  $\pi_1^{\text{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, z)$  est canoniquement isomorphe au complété profini de  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, z)$ . Il en résulte l'existence d'une flèche naturelle  $\text{Out} \pi_1^{\text{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}) \rightarrow \text{Out} \pi_1^{\text{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}})$  qui est injective.

<sup>(21)</sup>Un tel point consiste en la donnée d'un vrai point  $x$  de  $Y$  et d'une extension complète algébriquement close de  $\mathcal{H}(x)$ .

<sup>(22)</sup>Cette distinction entre les groupes des courbes elliptiques à bonne et à mauvaise réduction joue un rôle crucial dans la démonstration d'André, qui fait intervenir l'action de Galois sur l'espace des  $j$ -invariants.

Par le biais des différents morphismes évoqués ci-dessus on considère  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ,  $\text{Out } \pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}))$  et  $\text{Out } \pi_1^{\text{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}})$  comme trois sous-groupes de  $\text{Out } \pi_1^{\text{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}})$ . Un résultat classique assure que  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cap \text{Out } \pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}))$  est exactement  $G_{\mathbb{R}}$ ; Yves André démontre ([1], th. 7.2.1) que  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cap \text{Out } \pi_1^{\text{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}})$  est exactement  $G_p$ .

### 3.3. Intégration de 1-formes $p$ -adiques sur de vrais chemins

Soit  $p$  un nombre premier, soit  $\mathbb{C}_p$  le complété d'une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  et soit  $k$  un sous-corps complet de  $\mathbb{C}_p$ . Ayant notamment en vue d'éventuelles applications à la théorie de Hodge  $p$ -adique, Berkovich a développé dans [5] une théorie de l'intégration des 1-formes différentielles fermées sur les espaces  $k$ -analytiques lisses. On va la présenter succinctement en se plaçant pour simplifier sur  $\mathbb{C}_p$ , dont le corps résiduel sera noté  $\overline{\mathbb{F}_p}$ .

*Le logarithme  $p$ -adique.* — Fixons un système compatible  $(p^r)$  de puissances rationnelles de  $p$  dans  $\mathbb{C}_p$ . Soit  $l$  le logarithme analytique usuel sur le disque unité ouvert de centre 1 et soit  $L$  un logarithme « naïf » sur  $\mathbb{C}_p^*$ , c'est-à-dire un homomorphisme de groupes de  $(\mathbb{C}_p^*, \times)$  vers  $(\mathbb{C}_p, +)$  tel que  $L(z)$  soit égal à  $l(z)$  pour tout  $z$  vérifiant l'inégalité  $|z - 1| < 1$ . Soit  $\alpha$  appartenant à  $\mathbb{C}_p^*$ . Le groupe  $\overline{\mathbb{F}_p}^*$  est de torsion première à  $p$ ; on en déduit que  $\alpha$  possède une unique écriture de la forme  $p^r \mu z$  où  $r$  est un rationnel, où  $\mu$  est une racine de l'unité d'ordre premier à  $p$  et où  $z$  vérifie l'inégalité  $|z - 1| < 1$ . L'élément  $L(\alpha)$  est alors nécessairement égal à  $rL(p) + l(z)$ ; ainsi  $L(p)$  suffit à déterminer  $L$ . Réciproquement on vérifie que pour tout  $\lambda$  appartenant à  $\mathbb{C}_p$  il existe un (unique) logarithme naïf sur  $\mathbb{C}_p^*$  prenant en  $p$  la valeur  $\lambda$ : on le définit par la formule ci-dessus et on le note  $L_\lambda$ .

*Remarque 3.4.* — Soit  $\mathbb{G}_m$  le groupe multiplicatif analytique sur  $\mathbb{C}_p$  et soit  $\Sigma$  le fermé  $\{\sum a_i t^i \mapsto \max |a_i| r^i\}_{r \in \mathbb{R}_+^*}$  de  $\mathbb{G}_m$ . On notera  $U$  l'ouvert  $\mathbb{G}_m - \Sigma$ . Il a une infinité de composantes connexes, qui sont exactement les disques ouverts dont le module du centre est égal au rayon. Donnons-nous  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}_p$ . Le logarithme  $L_\lambda$  provient par construction d'une fonction analytique sur  $U$  dont la différentielle est la forme  $dt/t$ . Celle-ci a donc une primitive analytique sur  $U$ ; on voit facilement que l'on ne peut espérer mieux: tout domaine analytique de  $\mathbb{G}_m$  sur lequel  $dt/t$  a une primitive est contenu dans  $U$ .

Pour intégrer Berkovich a besoin, comme dans le cas classique, de l'existence locale de primitives des formes fermées. Cette existence est assurée au voisinage des  $\mathbb{C}_p$ -points: sur un espace lisse un tel point possède toujours un voisinage qui est isomorphe à un polydisque ouvert, et il n'y a plus qu'à appliquer le lemme de Poincaré. Mais elle ne l'est pas ailleurs: il résulte par exemple de la remarque 3.4 que si  $\eta$  appartient à  $\Sigma$  alors  $dt/t$  n'est intégrable sur aucun voisinage de  $\eta$  dans  $\mathbb{G}_m$ .

La stratégie adoptée pour remédier à ce problème est la suivante. Soit  $X$  un espace  $\mathbb{C}_p$ -analytique lisse. Un *gros ouvert*<sup>(23)</sup> de  $X$  est un ouvert contenant tous les points  $x$  de  $X$  tels que  $\mathcal{H}(x)$  ait même groupe des valeurs et même corps résiduel que  $\mathbb{C}_p$ . Un gros ouvert de  $X$  contient  $X(\mathbb{C}_p)$  et est donc dense ; l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{G}_m$  est gros. Appelons *anneau des fonctions analytiques naïves* sur  $X$ , et notons  $\mathfrak{N}(X)$ , la limite inductive des  $\mathcal{O}_X(V)$  où  $V$  parcourt l'ensemble des gros ouverts de  $X$  ; les logarithmes  $L_\lambda$  sont par exemple des fonctions naïves sur  $\mathbb{G}_m$ .

*C'est au sein de  $\mathfrak{N}(X)$  que vont être choisies les primitives.* — Cette pétition de principe se heurte aussitôt à une difficulté majeure : l'anneau  $\mathfrak{N}(X)$  est (en dimension strictement positive...) gigantesque ; il contient par exemple « énormément » de fonctions localement constantes, un gros ouvert de  $X$  pouvant avoir une infinité de composantes connexes même lorsque  $X$  est connexe (c'est ainsi le cas de l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{G}_m$ ). Or pour avoir une théorie un tant soit peu raisonnable, il est évidemment nécessaire que *toute fonction à différentielle nulle soit constante sur chaque composante connexe de  $X$* . Pour que cette dernière condition soit vérifiée il va falloir astreindre les primitives considérées à vivre dans un sous-anneau suffisamment petit  $\mathcal{S}(X)$  de  $\mathfrak{N}(X)$  ; par exemple  $\mathcal{S}(\mathbb{G}_m)$  ne pourra contenir  $L_\lambda$  que pour *un seul*  $\lambda$ . C'est la construction d'un système convenable d'anneaux  $(\mathcal{S}(X))$  (où  $X$  varie) qui constitue la majeure partie du travail de Berkovich.

*Remarque 3.5.* — Aucun choix ne s'impose *a priori* pour le logarithme de  $p$ . Il peut par conséquent être souhaitable d'en faire une indéterminée, c'est-à-dire de travailler avec l'algèbre de polynômes  $\mathbb{C}_p[\log p]$ . Berkovich part plus généralement d'une  $\mathbb{C}_p$ -algèbre commutative  $K$  *quelconque*<sup>(24)</sup> dans laquelle ses intégrales seront destinées à prendre leurs valeurs et se donne un élément  $\lambda$  de  $K$ . On peut encore définir  $L_\lambda$  dans ce cadre, par la même formule que ci-dessus ; l'on obtient un élément de  $(\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} \otimes_k K)(U)$  dont la différentielle dans  $(\Omega_{\mathbb{G}_m}^1 \otimes_k K)(U)$  est  $dt/t$ .

On considère pour la suite  $K$  et  $\lambda$  comme fixés. Soit  $\mathbf{L}$  le site dont les objets sont les espaces  $\mathbb{C}_p$ -analytiques *lisses*, dont les flèches sont les morphismes analytiques quelconques et dont la topologie est celle engendrée par les familles couvrantes *étales*. Soit  $\mathcal{O}$  le faisceau structural de  $\mathbf{L}$  et soit  $\mathcal{O}^K$  le produit tensoriel  $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}_p} K$ . Notons  $\mathfrak{N}^K$  la  $\mathcal{O}^K$ -algèbre (c'est-à-dire le faisceau en  $\mathcal{O}^K$ -algèbres sur  $\mathbf{L}$ ) dite des « fonctions analytiques naïves à valeurs dans  $K$  », qui *par définition* associe à un espace lisse  $X$  la limite inductive des  $\mathcal{O}^K(V)$ , où  $V$  parcourt la famille des gros ouverts de  $X$ .

<sup>(23)</sup> On peut se contenter de penser à un gros ouvert comme à un ouvert contenant tous les  $\mathbb{C}_p$ -points de  $X$  ; les raisons qui ont conduit à en corser la définition sont purement techniques.

<sup>(24)</sup> Ce pourrait notamment être le corps  $B_{dR}$  ; signalons par ailleurs que  $K$  est de surcroît supposée filtrée, mais nous n'évoquerons pas cet aspect des choses ici.

Le théorème principal de Berkovich ([5], th. 1.6.1 et 1.6.2) assure l'existence d'une « plus petite » sous- $\mathcal{O}^K$ -algèbre  $\mathcal{S}^{K,\lambda}$  de  $\mathfrak{N}^K$  possédant les propriétés suivantes<sup>(25)</sup> :  $\mathcal{S}^{K,\lambda}$  est « stable par différentiation », ce qui signifie précisément que la différentielle induit un morphisme  $\mathcal{S}^{K,\lambda} \rightarrow \mathcal{S}^{K,\lambda} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1$  entre faisceaux sur  $\mathbf{L}$  ; le noyau de cette flèche est le faisceau constant  $K$  et le complexe de de Rham qu'elle induit est exact au rang 1 (une forme fermée sur un espace lisse  $X$  a localement des primitives sur  $X_{\text{ét}}$ ) ; le logarithme  $L_\lambda$  appartient à  $\mathcal{S}^{K,\lambda}(\mathbb{G}_m)$ . La construction de  $\mathcal{S}^{K,\lambda}$  est extrêmement technique et utilise de manière cruciale les relèvements du morphisme de Frobenius ; elle est en partie inspirée par les travaux antérieurs de Coleman sur les courbes ([31]).

*Remarque 3.6.* — Soit  $X$  un espace  $\mathbb{C}_p$ -analytique. La flèche  $H^1(X_{\text{top}}, K) \rightarrow H^1(X_{\text{ét}}, K)$  est un isomorphisme pour des raisons essentiellement formelles. Si  $X$  est contractile le groupe  $H^1(X_{\text{ét}}, K)$  est donc nul ; si de plus  $X$  est lisse ceci entraîne que toute forme fermée appartenant à  $(\mathcal{S}^{K,\lambda} \otimes \Omega^1)(X)$  a une primitive dans  $\mathcal{S}^{K,\lambda}(X)$ . La locale contractibilité des espaces lisses assure ainsi que le complexe de de Rham évoqué ci-dessus est déjà exact en rang 1 pour la vraie topologie.

*Remarque 3.7.* — Il résulte de ce qui précède et de l'exemple 2.7 que si  $\mathcal{X}$  est une  $\mathbb{C}_p$ -variété algébrique propre et lisse ayant bonne réduction alors toute forme fermée de  $(\mathcal{S}^{K,\lambda} \otimes \Omega_1)(\mathcal{X}^{an})$  a une primitive dans  $\mathcal{S}^{K,\lambda}(\mathcal{X}^{an})$ .

Nanti du faisceau  $\mathcal{S}^{K,\lambda}$ , Berkovich est en mesure d'intégrer des 1-formes fermées sur des chemins exactement comme on le fait en géométrie analytique complexe, à savoir en calculant des différences de primitives. Soit  $X$  un espace  $\mathbb{C}_p$ -analytique lisse et soit  $\gamma$  une application continue de  $[0; 1]$  vers  $X$  telle que  $\gamma(0)$  et  $\gamma(1)$  appartiennent à  $X(\mathbb{C}_p)$ . À toute forme fermée  $\omega$  vivant dans  $(\mathcal{S}^{K,\lambda} \otimes \Omega_1)(X)$  est associé un élément de  $K$  noté  $\int_\gamma \omega$  qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ . Pour toute fonction  $f$  appartenant à  $\mathcal{S}^{K,\lambda}(X)$  on a bien entendu l'égalité  $\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$ .

Donnons deux exemples. Plaçons-nous pour commencer sur  $\mathbb{G}_m$  et fixons un chemin  $\gamma$  de 1 à  $p$  (rappelons que  $\mathbb{G}_m$  est contractile ; par conséquent le résultat obtenu ne va pas dépendre du choix de  $\gamma$ ). L'intégrale  $\int_\gamma dt/t$  peut se réécrire  $\int_\gamma dL_\lambda$  et vaut donc  $L_\lambda(p) - L_\lambda(1)$ , soit encore  $\lambda$ . Intéressons-nous maintenant au quotient  $\mathbb{T}$  de  $\mathbb{G}_m$  par  $p^\mathbb{Z}$ . On déduit de ce qui précède que pour n'importe quel lacet  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{T}$  qui commence et aboutit à 1, l'intégrale  $\int_\gamma dt/t$  est égale à  $\lambda \iota(\gamma)$  où  $\iota(\gamma)$  désigne la classe de  $\gamma$  dans  $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{T}, 1)$  convenablement identifié à  $\mathbb{Z}$ . Ceci entraîne que  $dt/t$  n'a pas de primitive dans  $\mathcal{S}^{K,\lambda}(\mathbb{T})$  dès que  $\lambda$  est non nul ; elle en possède par contre une dans

<sup>(25)</sup> Les anneaux de sections globales de  $\mathcal{S}^{K,\lambda}$  ne sont pas en général aisés à appréhender. Même sur la droite projective on n'en connaît pas de description explicite ; on sait toutefois que  $\mathcal{S}^{K,\lambda}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an})$  est « très gros » : il existe ([5], lemme 8.5.2) un sous- $\mathbb{C}_p$ -espace vectoriel de dimension infinie de  $\mathfrak{N}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an})$  qui est inclus dans  $\mathcal{S}^{K,\lambda}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an})$  pour tout couple  $(K, \lambda)$  (les fonctions qui le constituent sont donc construites sans utiliser le logarithme).

$\mathcal{S}^{K,0}(\mathbb{T})$  déduite de  $L_0$  (qui est invariant sous la multiplication par  $p$ ) par passage au quotient.

Signalons pour conclure que si  $X$  est un espace  $\mathbb{C}_p$ -analytique lisse, et si  $\mathcal{D}$  est un système différentiel linéaire sur  $X$  qui est localement unipotent pour la topologie étale, les solutions de  $\mathcal{D}$  sur  $X_{\text{ét}}$  et à valeurs dans  $\mathcal{S}^{K,\lambda}$  forment un système local de  $K$ -espaces vectoriels de dimension égale au rang de  $\mathcal{D}$ ; dans ce contexte une théorie du transport parallèle (le long de vrais chemins dans certains cas, de « chemins étales » en général) a été développée par Berkovich ([5], 9.3 – 9.5; pour d'autres applications des espaces de Berkovich aux équations différentielles  $p$ -adiques, on pourra se reporter à la note [30] de B. Chiarellotto).

### 3.4. Les espaces de Berkovich : un cadre naturel pour l'analyse harmonique, l'équidistribution et les systèmes dynamiques

Ce paragraphe est consacré à l'évocation succincte de trois domaines de recherche (largement liés) qui ont fait et font encore l'objet d'une profusion de travaux dans le cadre de la géométrie complexe, mais dont le versant  $p$ -adique n'a commencé que récemment à être défriché. Il se trouve que sur ce dernier nombre des objets en jeu (fonctions harmoniques, mesures, sous-ensembles compacts particuliers...) ont une forte tendance à vivre « naturellement » sur les espaces de Berkovich, et qu'on perd beaucoup en compréhension à ne travailler qu'avec des ensembles de  $\mathbb{C}_p$ -points.

*L'analyse harmonique.* — Depuis quelques années plusieurs auteurs ont indépendamment entrepris de la développer sur les *courbes analytiques*. Citons par exemple Baker et Rumely qui, motivés par des problèmes de dynamique et d'équidistribution, en ont jeté les bases sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$  ([4], [2]). Ou encore Favre et Jonsson : afin d'appréhender la dynamique de certaines transformations holomorphes du germe  $(\mathbb{C}^2, 0)$  ils ont construit ([38]) un *arbre des valuations* qui peut essentiellement s'interpréter comme une courbe de Berkovich. Ils ont mis au point sur cet arbre divers outils de théorie du potentiel<sup>(26)</sup>; Favre et Rivera-Letelier en ont depuis appliqué certains à un problème d'équidistribution  $p$ -adique ([40]).

Les résultats les plus aboutis et les plus systématiques dans cette branche sont dus à Amaury Thuillier. Dans sa thèse ([66]) il introduit les analogues adéquats, dans le cadre des courbes  $k$ -analytiques lisses *quelconques* sur *n'importe quel* corps ultramétrique complet (à valeur absolue non triviale), des objets usuels de l'analyse harmonique sur les surfaces de Riemann (fonctions harmoniques et sous-harmoniques, courants, potentiels, opérateur  $dd^c$ ...) et démontre dans ce contexte les théorèmes attendus. Il applique ensuite ces outils à la géométrie d'Arakelov.

<sup>(26)</sup>La théorie du potentiel sur cet arbre leur a aussi servi récemment à l'étude des singularités des fonctions pluri-sous-harmoniques sur le plan ([39]).

On va expliquer ici les bases de sa construction, en en donnant une présentation qui diffère de la sienne mais lui est équivalente. Soit  $X$  une courbe  $k$ -analytique lisse connexe telle que  $S(X)$  soit non vide ; notons  $\tau$  la rétraction compacte naturelle de  $X$  sur  $S(X)$ . Le théorème de réduction semi-stable, combiné à des arguments de descente galoisienne, permet de munir naturellement  $S(X)$  d'une métrique, ou si l'on préfère d'une structure  $\mathbb{Z}$ -linéaire par morceaux. On dit qu'une fonction continue à valeurs réelles sur  $S(X)$  est harmonique si elle est  $\mathbb{Z}$ -linéaire par morceaux et si sa dérivée vérifie la « loi des nœuds » usuelle ; on définit  $H(X)$  comme l'ensemble des fonctions réelles sur  $X$  qui sont de la forme  $h \circ \tau$ , où  $h$  est harmonique sur  $S(X)$  ; si  $h$  appartient à  $H(X)$  alors  $h$  est continue et localement constante en dehors de  $S(X)$ .

Soit maintenant  $X$  une courbe  $k$ -analytique lisse quelconque. On note  $H(X)$  l'ensemble des applications de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  telles que pour toute composante connexe  $Z$  de  $X$ , la restriction de  $h$  à  $Z$  appartienne à l'espace  $H(Z)$  défini ci-dessus si  $S(Z)$  est non vide, et soit constante sinon. On démontre que  $U \mapsto H(U)$ , où  $U$  parcourt la famille des ouverts de  $X$ , est un sous-faisceau de  $C^0(\cdot, \mathbb{R})$ , dit des *fonctions harmoniques*. Si  $U$  est un ouvert de  $X$  et  $f$  une fonction analytique inversible sur  $U$  alors  $\log |f|$  est harmonique<sup>(27)</sup>.

Thuillier définit ensuite les fonctions lisses comme celles qui sont continues et  $G$ -localement « harmoniques en dehors du bord », construit un opérateur  $dd^c$  qui envoie une fonction lisse sur une mesure à support discret codant l'écart à la « loi des nœuds » et qui est nulle si et seulement si la fonction de départ est harmonique... viennent ensuite les courants, les distributions, les fonctions de Green, les fonctions sous-harmoniques, les potentiels et capacités, *etc.* ; nous n'en dirons pas plus sur ces sujets et renvoyons le lecteur intéressé à sa thèse.

Indiquons toutefois comment le formalisme qu'il a développé lui permet de proposer une nouvelle formulation de la *théorie de l'intersection en géométrie d'Arakelov*. Soit  $\mathcal{X}$  une courbe algébrique propre et lisse sur  $\mathbb{Q}$  (pour fixer les idées). Les *diviseurs d'Arakelov* traditionnels sont des couples  $(D, g)$  où  $D$  est un diviseur sur un modèle entier convenable de  $\mathcal{X}$ , et  $g$  un courant d'un certain type sur  $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ . L'approche de Thuillier est en un sens plus satisfaisante, dans la mesure où elle évite le choix d'un modèle entier et où elle fait jouer exactement le même rôle à toutes les places, finies ou non : « ses » diviseurs d'Arakelov sont des couples  $(D, g)$  où  $D$  est un diviseur sur  $\mathcal{X}$ , et où  $g$  est la donnée *pour toute place*  $v$  (avec une condition de compatibilité « adélique ») d'un courant  $g_v$  qui vit sur la courbe  $\mathbb{Q}_v$ -analytique  $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_v}^{an}$  si  $v$  est finie, et sur la surface de Riemann  $\mathcal{X}(\mathbb{C})$  si  $v$  est la place réelle.

<sup>(27)</sup> En général les fonctions de la forme  $\log |f|$  n'engendrent pas  $H$  comme faisceau en  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Le quotient  $\mathcal{Q}$  correspondant est un faisceau gratte-ciel : son support est inclus dans l'ensemble  $E$  des points  $x$  de  $X$  tels que  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  soit le corps des fonctions d'une courbe normale et projective  $\mathcal{C}_x$  sur  $\tilde{k}$  ; sa fibre  $\mathcal{Q}_x$  en un tel  $x$  est isomorphe à  $(\text{Pic}^0 \mathcal{C}_x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  ; et l'ensemble des  $x$  appartenant à  $E$  tels que le genre de  $\mathcal{C}_x$  soit strictement positif est une partie discrète de  $X$ .

Signalons pour terminer qu'une première variante ultramétrique du formalisme d'Arakelov fut mise au point, il y a une dizaine d'années, par Bloch, Gillet et Soulé ([15], [42]); c'est à Gubler que l'on doit l'introduction dans ce contexte de la théorie de Berkovich ([43]).

*L'équidistribution.* — C'est le terme générique sous lequel on englobe, en géométrie complexe, un certain nombre de résultats relatifs à des problèmes du type suivant : pour tout entier  $n$  on suppose donnée une famille finie  $(x_{i,n})_i$  de points sur une variété analytique  $X$ , et l'on note  $\mu_n$  la moyenne des masses de Dirac en les  $x_{i,n}$ ; on se demande alors si la suite  $(\mu_n)$  converge (faiblement) vers une certaine mesure de probabilité  $\mu$ . Ces questions se sont jusqu'ici essentiellement rencontrées d'une part en dynamique, où l'on s'intéresse à la suite des images directes ou réciproques d'un point par les itérées d'une transformation donnée, d'autre part en arithmétique où l'on considère les suites de points de « petite hauteur ». Elles connaissent depuis quelque temps un véritable essor sur les corps  $p$ -adiques avec les travaux de Baker, Chambert-Loir, Favre, Rivera-Letelier, Rumely... ([3], [25], [40], [41]).

Donnons un exemple de « théorème d'équidistribution » complexe dont le pendant  $p$ -adique, établi par Chambert-Loir dans [25], se formule naturellement dans le cadre des espaces de Berkovich. Soit  $\mathcal{X}$  une variété algébrique propre et géométriquement irréductible sur un corps de nombres  $K$ ; soit  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . Soit  $L$  un fibré ample sur  $\mathcal{X}$  muni d'une métrique adélique satisfaisant à certaines conditions techniques dont la « semi-positivité » (cf. [25], §2.2). Cette donnée permet de définir la hauteur<sup>(28)</sup> de n'importe quelle sous-variété irréductible de  $\mathcal{X} \times_K \overline{K}$  et l'on notera  $h$  celle de  $\mathcal{X} \times_K \overline{K}$ . Soit  $(x_n)$  une suite de points de  $\mathcal{X}(\overline{K})$ . Supposons que chaque fermé de Zariski strict de  $\mathcal{X} \times_K \overline{K}$  ne contient qu'un nombre fini de  $x_n$  et que  $h(x_n)$  tend vers  $h$  quand  $n$  tend vers l'infini. Choisissons un plongement de  $\overline{K}$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $n$  notons  $\mu_n$  la moyenne (vue comme mesure sur  $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ ) des masses de Dirac en les conjugués de  $x_n$  sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ . Szpiro, Ullmo et Zhang ont démontré dans [61] que la suite  $(\mu_n)$  converge faiblement vers une certaine mesure de probabilité sur  $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ , qui ne dépend pas de  $(x_n)$ .

Soit maintenant  $v$  une place finie de  $K$  en laquelle la métrique de  $L$  est donnée par un fibré ample  $\mathcal{L}$  sur un modèle normal, propre et plat  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{X}$  sur l'anneau des entiers correspondants<sup>(29)</sup>. Notons  $K_v$  le complété de  $K$  pour  $v$  et  $\mathbb{C}_v$  celui de  $\overline{K}$  pour un prolongement fixé de  $v$ . Soit  $\{\eta_i\}$  l'ensemble des points génériques de  $\mathcal{Y}_s$ ; il existe pour tout  $i$  un et un seul point  $\xi_i$  de  $\mathcal{X}_{K_v}^{an}$  se spécialisant en  $\eta_i$ . Pour tout  $n$  désignons par  $\mu_{v,n}$  l'image directe sur  $\mathcal{X}_{K_v}^{an}$  de la moyenne sur  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}_v}^{an}$  des masses de Dirac en les conjugués de  $x_n$  sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ . Chambert-Loir a alors établi ([25],

<sup>(28)</sup>Plusieurs normalisations sont possibles; celle qu'utilise Chambert-Loir est décrite dans l'introduction de [25].

<sup>(29)</sup>En vertu des hypothèses faites sur la métrique de  $L$  c'est le cas pour presque toutes les places de  $K$ .

th. 3.1) que  $(\mu_{v,n})$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu_v$  sur  $\mathcal{X}_{K_v}^{an}$ , qui ne dépend pas de  $(x_n)$  et est de la forme  $\sum \nu_i \delta_{\xi_i}$  où les  $\nu_i$  sont explicitement déterminés en fonction de  $\mathcal{L}$ . Le support de  $\mu_v$  est donc disjoint de l'espace rigide  $\mathcal{X}_{K_v}^{rig}$  dès que  $\mathcal{X}$  n'est pas réduite à un point.

*Les systèmes dynamiques.* — Soit  $p$  un nombre premier, soit  $\mathbb{C}_p$  le complété d'une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  et soit  $\overline{\mathbb{F}_p}$  le corps résiduel de  $\mathbb{C}_p$ . Depuis quelques années l'étude de la dynamique des fractions rationnelles à une indéterminée sur  $\mathbb{C}_p$  a fait l'objet de nombreuses investigations<sup>(30)</sup> ; on peut notamment citer à ce sujet les travaux fondateurs de Juan Rivera-Letelier ([59], [58], [60]). Ceux-ci ont bien mis en évidence l'intérêt qu'il y avait à considérer l'action d'une telle fraction sur la droite projective de Berkovich : même pour démontrer des théorèmes concernant uniquement  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  (tels ceux qui portent sur les ensembles de points périodiques attractifs ou répulsifs...), Rivera-Letelier étudie la dynamique de la transformation concernée sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$  ; il s'appuie de manière déterminante sur la structure d'arbre réel de ce dernier, et travaille la plupart du temps avec une « topologie d'arbre » plus fine que celle de Berkovich (et pour laquelle  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$  n'est plus compact).

Montrons, sur un exemple, en quoi les espaces de Berkovich constituent également un cadre très naturel lorsqu'il s'agit de comprendre les analogues  $p$ -adiques de notions complexes traditionnelles tels les ensembles de Julia ou certaines mesures limites. Soit  $R$  un endomorphisme de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^1$  dont le degré  $d$  est au moins égal à 2, et soit  $z$  un  $\mathbb{C}_p$ -point de  $\mathbb{P}^1$  possédant un antécédent pour  $R^2$  distinct de lui-même (cette dernière hypothèse n'est violée que par au plus deux points). Pour tout entier  $n$  notons  $\mu_n$  la mesure  $\sum e_i \delta_{z_i}$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$ , où  $\sum e_i [z_i]$  est l'image réciproque du diviseur  $[z]$  par  $R^n$ .

Favre et Rivera-Letelier ont démontré dans [40] que la suite  $(\mu_n/d^n)$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu_R$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$  ; le support de  $\mu_R$  coïncide avec l'ensemble de Julia qu'a défini Rivera-Letelier ([57]). Il peut être disjoint de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . Ainsi si  $R$  s'étend en un endomorphisme de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^1$  (on dit dans ce cas que  $R$  a bonne réduction) alors  $\mu_R$  est la masse de Dirac en le point  $\eta$  défini par la semi-norme  $\sum a_i T^i \mapsto \max |a_i|$  ; on peut également voir  $\eta$  comme l'unique antécédent du point générique de  $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{F}_p}}^1$  par la réduction  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an} \rightarrow \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{F}_p}}^1$ .

*Remarque 3.8.* — Citons pour conclure ce paragraphe une autre grande classe de résultats en géométrie complexe dont les déclinaisons  $p$ -adiques connues à ce jour, si elles ne nécessitent pas *stricto sensu* la théorie de Berkovich pour être énoncées, ont néanmoins été démontrées par son biais : celle qui concerne, au sens large, l'hyperbolicité de Kobayashi, les courbes entières, ou encore la théorie de Nevanlinna. Berkovich

<sup>(30)</sup> Comme  $\overline{\mathbb{F}_p}$  est réunion de corps finis, tout élément de  $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}_p})$  est quasi-périodique sous l'action de n'importe quelle fraction rationnelle à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}_p}$  ; ce fait est absolument essentiel pour toute la théorie, qui ne peut donc être étendue telle quelle à des corps ultramétriques complets quelconques.



lui-même a ainsi établi que sur un corps ultramétrique complet tout morphisme analytique de la droite affine vers l'analytifiée d'une courbe projective de genre au moins égal à 1 est constant ([6], th. 4.5.1); de substantielles avancées ont été depuis réalisées sur ces questions, notamment par William Cherry : on peut ainsi citer [27], [28], [26] ou encore son papier le plus récent, en collaboration avec Min Ru ([29]).

### 3.5. Analogies entre les mondes réel et $p$ -adique

On a vu tout au long de ce qui précède les services signalés que rendent les espaces de Berkovich, dès lors qu'on souhaite transposer les objets et outils de la géométrie analytique *complexe* à l'univers  $p$ -adique; mais ils constituent aussi un cadre particulièrement propice à l'expression de l'analogie entre celui-ci et le monde *réel*. Illustrons-le par deux résultats dus à l'auteur.

*Les parties semi-algébriques.* — Si  $\mathcal{X}$  est une variété algébrique réelle affine et  $A$  son anneau des fonctions polynomiales, on dit qu'une partie de  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$  est *semi-algébrique* si elle peut être définie par une combinaison booléenne d'inégalités entre éléments de  $A$ . Il est bien connu que les composantes connexes d'une telle partie sont en nombre fini et sont elles-mêmes semi-algébriques; par ailleurs si  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est un morphisme entre deux variétés algébriques réelles affines alors l'image par  $\varphi$  de toute partie semi-algébrique de  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$  est une partie semi-algébrique de  $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ .

Soit maintenant  $k$  un corps ultramétrique complet et soit  $\mathcal{X}$  une variété algébrique sur  $k$ ; notons  $A$  l'anneau des fonctions polynomiales de  $\mathcal{X}$ . On dit qu'une partie de l'espace de Berkovich  $\mathcal{X}^{an}$  est *semi-algébrique* si elle peut être définie par une combinaison booléenne d'inégalités de la forme  $|f| \bowtie \lambda|g|$ , où  $f$  et  $g$  appartiennent à  $A$ , où  $\lambda$  est un réel positif et où  $\bowtie$  est l'un des quatre symboles d'inégalité. Les deux théorèmes de géométrie réelle évoqués ci-dessus se réénoncent *mutatis mutandis* dans ce cadre ([36], prop. 2.5 et th. 3.2) : une partie semi-algébrique de  $\mathcal{X}^{an}$  a un nombre fini de composantes connexes qui sont elles-mêmes semi-algébriques, et si  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est un morphisme entre  $k$ -variétés algébriques affines alors l'image par  $\varphi^{an}$  d'une partie semi-algébrique de  $\mathcal{X}^{an}$  est une partie semi-algébrique de  $\mathcal{Y}^{an}$ .

*Cohomologie étale et topologie transcendante.* — Sur un schéma aussi bien que sur un espace de Berkovich, on notera  $\pi$  le morphisme canonique entre les sites étale et topologique. Soient  $\mathcal{X}$  une variété algébrique réelle et  $q$  un entier. L'évaluation permet d'associer à toute classe de cohomologie appartenant à  $H^0(\mathcal{X}_{Zar}, R^q\pi_*\mathbb{Z}/2)$  une application de  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{Z}/2$  (identifié à  $H^q(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ ); elle est localement constante. Colliot-Thélène et Parimala ont démontré ([32]) que la flèche  $H^0(\mathcal{X}_{Zar}, R^q\pi_*\mathbb{Z}/2) \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^{\pi_0(\mathcal{X}(\mathbb{R}))}$  ainsi définie est un isomorphisme pour tout  $q$  strictement supérieur à  $\dim \mathcal{X}$  lorsque  $\mathcal{X}$  est intègre et lisse; dans le cas des courbes c'était un théorème déjà connu et dû à Witt. Nous allons présenter un résultat qui en constitue un analogue  $p$ -adique, dans la mesure où il décrit *via* l'évaluation ponctuelle des classes un groupe

de cohomologie étale d'une courbe en termes de la *topologie* de l'espace de Berkovich associé.

Soit  $k$  un corps local, c'est-à-dire complet pour une valuation discrète et à corps résiduel fini. Soit  $n$  un entier premier à la caractéristique de  $\tilde{k}$ . Soit  $Y$  une  $k$ -courbe analytique lisse ; orientons arbitrairement son squelette  $S(Y)$ , ce qui permet de définir le groupe  $\text{Harm}(S(Y), \mathbb{Z}/n)$  des *cochaînes harmoniques sur  $S(Y)$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/n$*  par la « loi des nœuds » usuelle. À l'aide de l'évaluation ponctuelle des classes de cohomologie on construit ([34], th. 4.2) un isomorphisme  $H^0(Y_{\text{top}}, R^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \simeq \text{Harm}(S(Y), \mathbb{Z}/n)$ .

Soit maintenant  $\mathcal{X}$  une  $k$ -courbe *algébrique* lisse. Il y a une application naturelle de  $H^0(\mathcal{X}_{\text{zar}}, R^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$  vers  $H^0(\mathcal{X}_{\text{top}}^{\text{an}}, R^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$  ; elle est bijective ([34], th. 5.2). Ainsi obtient-on, une fois  $S(\mathcal{X}^{\text{an}})$  orienté, un isomorphisme<sup>(31)</sup> entre  $H^0(\mathcal{X}_{\text{zar}}, R^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$  et  $\text{Harm}(S(\mathcal{X}^{\text{an}}), \mathbb{Z}/n)$  qui fournit la description topologique attendue.

*Remarque 3.9.* — L'évaluation ponctuelle ne peut rien apporter d'intéressant si l'on s'en tient au cadre rigide : si  $x$  est un point rigide de  $\mathcal{X}^{\text{an}}$  et si  $h$  est un élément de  $H^0(\mathcal{X}_{\text{top}}^{\text{an}}, R^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$  alors  $h(x)$  appartient à  $H^3(\mathcal{H}(x), \mu_n^{\otimes 2})$  qui est nul pour des raisons de dimension cohomologique, le corps  $\mathcal{H}(x)$  étant local.

*Remarque 3.10.* — Ces résultats ont été depuis largement étendus dans l'article [33]. Les groupes de la forme  $H^0(X_{\text{top}}, R^q\pi_*\mathcal{F})$ , où  $X$  est une courbe analytique sur un corps ultramétrique complet quelconque et  $\mathcal{F}$  un faisceau étale « raisonnable », y font l'objet d'une étude systématique : comparaison avec leurs analogues algébriques, dualité de type Poincaré... On la mène en *triangulant* les courbes analytiques ([33], §4) et en utilisant de manière intensive la cohomologie étale analytique à support.

*Remarque 3.11.* — Mentionnons pour terminer ce paragraphe une vague impression de l'auteur, qui est vraisemblablement assez largement partagée mais qu'aucun énoncé précis n'étaye à l'heure qu'il est : celle que de solides liens existent certainement entre la théorie de Berkovich et la *géométrie tropicale* (sur ce dernier sujet, on pourra consulter l'exposé [49] de ce séminaire). Les courbes tropicales, par exemple, doivent pouvoir s'interpréter comme des squelettes de courbes analytiques convenables.

### 3.6. Espaces de Berkovich, effondrements de variétés riemanniennes et structures affines entières

Dans un article récent ([53]), Kontsevich et Soibelman ont peint une vaste fresque, en grande partie conjecturale, qui met en scène des objets de natures *a priori* très

<sup>(31)</sup>Lorsque  $\mathcal{X}$  est projective c'est une réinterprétation, avec une démonstration en partie différente, d'un résultat de Kato ([52], cor. 2.9) qui décrit  $H^0(\mathcal{X}_{\text{zar}}, R^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$  en fonction de la fibre spéciale d'un modèle entier convenable de  $\mathcal{X}$ .

différentes entre lesquels semblent exister des liens profonds ; nous allons en donner un aperçu.

Soit  $K$  le corps des fonctions méromorphes au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$  et soit  $\mathcal{X}$  une  $K$ -variété de Calabi-Yau, c'est-à-dire une  $K$ -variété projective, lisse, et géométriquement connexe dont le fibré canonique est trivial ; fixons une section non nulle  $\Omega$  de ce dernier. Pour tout  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}^*$  et de module suffisamment petit, la fibre  $\mathcal{X}_z$  de  $\mathcal{X}$  est bien définie ; c'est une variété de Calabi-Yau sur  $\mathbb{C}$ . Le choix d'une classe convenable dans  $H_{\text{dR}}^2(\mathcal{X})$  permet de munir chacune des  $\mathcal{X}_z(\mathbb{C})$  d'une métrique de Calabi-Yau  $g_z$ . On la normalise en une nouvelle métrique  $g_z^{\text{norm}}$  pour laquelle le diamètre de  $\mathcal{X}_z(\mathbb{C})$  est égal à 1. Kontsevich et Soibelman définissent la notion de *dégénérescence maximale* de  $\mathcal{X}$  en terme du comportement asymptotique, lorsque  $z$  tend vers zéro, du volume de  $\mathcal{X}_z(\mathbb{C})$  relatif à la forme  $\Omega_z \wedge \overline{\Omega}_z$ .

**Tout ce qui suit jusqu'à la fin du paragraphe est une reformulation de certaines des conjectures de Kontsevich et Soibelman.**

On suppose à partir de maintenant que l'on est dans une situation de dégénérescence maximale. La famille d'espaces métriques  $(\mathcal{X}_z(\mathbb{C}), g_z^{\text{norm}})$  a lorsque  $z$  tend vers zéro une limite au sens de Gromov-Hausdorff que l'on note  $B(\mathcal{X})$ , qui est de dimension topologique égale à  $n$  et dont un ouvert dense  $B(\mathcal{X})_{\text{lisse}}$  possède une structure affine entière naturelle ; ce qu'on appelle ici *structure affine entière* est la donnée d'un atlas avec changements de cartes dans  $\mathbb{R} \times \text{Gl}_n(\mathbb{Z})$ . Notons que la dimension topologique des  $\mathcal{X}_z(\mathbb{C})$  est égale à  $2n$ , et qu'elle est donc divisée par 2 à la limite : on assiste à un « effondrement » des  $\mathcal{X}_z(\mathbb{C})$  sur  $B(\mathcal{X})$ .

Soit  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$  et soit  $x$  appartenant à  $\mathcal{X}(\overline{K})$ . Il vit dans une extension finie  $L$  de  $K$ , nécessairement engendrée par une racine  $n$ -ième de la fonction coordonnée de  $K$  pour un certain entier  $n$ . On peut identifier  $L$  au corps des fonctions méromorphes au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$ , de sorte que l'inclusion de  $K$  dans  $L$  corresponde au morphisme  $z \mapsto z^n$  de  $(\mathbb{C}, 0)$  vers  $(\mathbb{C}, 0)$ . Le produit fibré  $\mathcal{X}_L$  donne ainsi naissance à une famille de variétés algébriques complexes paramétrée par un voisinage épointé de l'origine et dont la fibre en  $z$  est  $\mathcal{X}_{z^n}$  pour tout  $z$  ; le point  $x$  qui provient d'un morphisme de  $\text{Spec } L$  vers  $\mathcal{X}$  définit donc de manière naturelle, pour  $z$  suffisamment petit en module, un point  $x_z$  de  $\mathcal{X}_{z^n}(\mathbb{C})$ . Lorsque  $z$  tend vers zéro  $x_z$  « tend » vers un point de  $B(\mathcal{X})$  qui ne dépend pas du choix de  $L$  et est noté  $b(x)$ .

Plongeons par complétion  $K$  dans le corps  $\mathbb{C}((\tau))$  des séries de Laurent. Pour tout  $x$  appartenant à  $\mathcal{X}(\overline{K})$ , on notera  $x^{an}$  le point rigide correspondant de  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}((\tau))}^{an}$ . Il existe un modèle pluristable non dégénéré de  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}((\tau))}$  sur  $\mathbb{C}[[\tau]]$ , et un homéomorphisme  $\iota$  entre le squelette correspondant  $\mathbf{S}$  et  $B(\mathcal{X})$  vérifiant les assertions suivantes :

*i*)  $\mathbf{S}$  possède un ouvert dense  $\mathbf{S}_{\text{lisse}}$  muni d'une structure affine entière qui est compatible avec la structure  $\mathbb{Z}$ -linéaire par morceaux de  $\mathbf{S}$ , et qui est telle que  $\iota$  induise un isomorphisme affine entier  $\mathbf{S}_{\text{lisse}} \simeq B(\mathcal{X})_{\text{lisse}}$  ;

*ii*) pour tout  $x$  appartenant à  $\mathcal{X}(\overline{K})$  on a l'égalité  $\iota(\tau(x^{an})) = b(x)$ , où  $\tau$  est la rétraction de  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}((\tau))}^{an}$  vers  $\mathbf{S}$ .

*Remarque 3.12.* — Outre l'énoncé de ces conjectures, l'article de Kontsevich et Soibelman comprend la démonstration, longue et très subtile, d'un théorème ([53], Th. 5) que l'on peut résumer en substance comme suit : *il fournit, partant d'une structure de variété affine entière à 24 singularités d'un certain type sur la sphère  $S^2$ , une façon de construire une surface K3 sur  $\mathbb{C}((\tau))$  dont le squelette (relatif à un modèle convenable) hérite naturellement de cette structure.*

## RÉFÉRENCES

- [1] Y. ANDRÉ – « On a geometric description of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  and a  $p$ -adic avatar of  $\widehat{GT}$  », *Duke Math. J.* **119** (2003), no. 1, p. 1–39.
- [2] M. BAKER & R. RUMELY – « Analysis and dynamics on the Berkovich projective line », prépublication.
- [3] ———, « Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory », prépublication.
- [4] ———, « Harmonic Analysis on Metrized graphs », prépublication.
- [5] V. G. BERKOVICH – « Integration of one-forms on  $p$ -adic analytic spaces », prépublication.
- [6] ———, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, 1990.
- [7] ———, « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), p. 5–161.
- [8] ———, « Vanishing cycles for formal schemes », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 539–571.
- [9] ———, « On the comparison theorem for étale cohomology of non-Archimedean analytic spaces », *Israel J. Math.* **92** (1995), no. 1-3, p. 45–59.
- [10] ———, « Vanishing cycles for formal schemes. II », *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 367–390.
- [11] ———, « Vanishing cycles for non-Archimedean analytic spaces », *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no. 4, p. 1187–1209.
- [12] ———, «  $p$ -adic analytic spaces », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin 1998)*, vol. II (extra vol.), 1998, p. 141–151 (electronic).

- [13] ———, « Smooth  $p$ -adic analytic spaces are locally contractible I », *Invent. Math.* **137** (1999), no. 1, p. 1–84.
- [14] ———, « Smooth  $p$ -adic analytic spaces are locally contractible II », in *Geometric aspects of Dwork theory*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 293–370 (vols. I, II).
- [15] S. BLOCH, H. GILLET & C. SOULÉ – « Non-Archimedean Arakelov theory », *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), no. 3, p. 427–485.
- [16] S. BOSCH, U. GÜNTZER & R. REMMERT – *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [17] S. BOSCH & W. LÜTKEBOHMERT – « Stable reduction and uniformization of abelian varieties. II », *Invent. Math.* **78** (1984), no. 2, p. 257–297.
- [18] ———, « Stable reduction and uniformization of abelian varieties. I », *Math. Ann.* **270** (1985), no. 3, p. 349–379.
- [19] ———, « Formal and rigid geometry I. Rigid spaces », *Math. Ann.* **295** (1993), no. 2, p. 291–317.
- [20] ———, « Formal and rigid geometry II. Flattening techniques », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 3, p. 403–429.
- [21] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT & M. RAYNAUD – « Formal and rigid geometry III. The relative maximum principle », *Math. Ann.* **302** (1995), no. 1, p. 1–29.
- [22] ———, « Formal and rigid geometry IV. The reduced fibre theorem », *Invent. Math.* **119** (1995), no. 2, p. 361–398.
- [23] P. BOYER – « Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Invent. Math.* **138** (1999), no. 3, p. 573–629.
- [24] H. CARAYOL – « Nonabelian Lubin-Tate theory », in *Automorphic forms, Shimura varieties, and  $L$ -functions (Ann Arbor 1988)*, *Perspect. Math.*, vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990, p. 15–39 (vol. II).
- [25] A. CHAMBERT-LOIR – « Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich », *J. reine angew. Math.* **595** (2006), p. 215–235.
- [26] W. CHERRY – « Non-Archimedean big Picard theorems », prépublication sur ArXiv, [math.AG/0207081](https://arxiv.org/abs/math/0207081).
- [27] ———, « Non-Archimedean analytic curves in abelian varieties », *Math. Ann.* **300** (1994), no. 3, p. 393–404.
- [28] ———, « A survey of Nevanlinna theory over non-Archimedean fields », *Bull. Hong Kong Math. Soc.* **1** (1997), no. 2, p. 235–249.
- [29] W. CHERRY & M. RU – « Rigid analytic Picard theorems », *Amer. J. Math.* **126** (2004), no. 4, p. 873–889.
- [30] B. CHIARELLOTTO – « Espaces de Berkovich et équations différentielles  $p$ -adiques. Une note », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **103** (2000), p. 193–209.

- [31] R. F. COLEMAN – « Dilogarithms, regulators and  $p$ -adic  $L$ -functions », *Invent. Math.* **69** (1982), no. 2, p. 171–208.
- [32] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & R. PARIMALA – « Real components of algebraic varieties and étale cohomology », *Invent. Math.* **101** (1990), no. 1, p. 81–99.
- [33] A. DUCROS – « Triangulations et cohomologie étale sur une courbe analytique », article actuellement soumis.
- [34] ———, « Cohomologie non ramifiée sur une courbe  $p$ -adique lisse », *Compositio Math.* **130** (2002), no. 1, p. 89–117.
- [35] ———, « Image réciproque du squelette par un morphisme entre espaces de Berkovich de même dimension », *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), no. 4, p. 483–506.
- [36] ———, « Parties semi-algébriques d'une variété algébrique  $p$ -adique », *Manuscripta Math.* **111** (2003), no. 4, p. 513–528.
- [37] A. ESCASSUT & N. MAI NETTI – « Shilov boundary for normed algebras », in *Topics in analysis and its applications*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 147, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, p. 1–10.
- [38] C. FAVRE & M. JONSSON – *The valuative tree*, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1853, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [39] ———, « Valuative analysis of planar plurisubharmonic functions », *Invent. Math.* **162** (2005), no. 2, p. 271–311.
- [40] C. FAVRE & J. RIVERA-LETELIER – « Théorème d'équidistribution de Brodin en dynamique  $p$ -adique », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), no. 4, p. 271–276.
- [41] ———, « Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective », *Math. Ann.* **335** (2006), no. 2, p. 311–361.
- [42] H. GILLET & C. SOULÉ – « Direct images in non-Archimedean Arakelov theory », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 2, p. 363–399.
- [43] W. GUBLER – « Local heights of subvarieties over non-Archimedean fields », *J. reine angew. Math.* **498** (1998), p. 61–113.
- [44] B. GUENNEBAUD – « Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques », Thèse, Université de Poitiers, 1973.
- [45] M. HARRIS – « Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld upper half spaces; elaboration of Carayol's program », *Invent. Math.* **129** (1997), p. 75–119.
- [46] M. HARRIS & R. TAYLOR – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, avec un appendice de V.G. Berkovich.
- [47] T. HAUSBERGER – « Uniformisation des variétés de Laumon-Rapoport-Stuhler et conjecture de Drinfeld-Carayol », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), no. 4, p. 1285–1371.

- [48] R. HUBER – *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, E30, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.
- [49] I. ITENBERG – « Amibes de variétés algébriques et dénombrement de courbes (d’après G. Mikhalkin) », in *Séminaire Bourbaki (2003/2004)*, Astérisque, vol. 294, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 335–361.
- [50] A. J. DE JONG – « Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces », *Compositio Math.* **97** (1995), no. 1-2, p. 89–118, Special issue in honour of Frans Oort.
- [51] ———, « Families of curves and alterations », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **47** (1997), no. 2, p. 599–621.
- [52] K. KATO – « A Hasse principle for two-dimensional global fields », *J. reine angew. Math.* **366** (1986), p. 142–183, avec un appendice de Jean-Louis Colliot-Thélène.
- [53] M. KONTSEVICH & Y. SOIBELMAN – « Affine structures and non-Archimedean analytic spaces », in *The unity of mathematics*, Progr. Math., vol. 244, Birkhäuser, Boston, 2006, p. 321–385.
- [54] N. MAÏNETTI – « Sequential compactness of some analytic spaces », *J. Anal.* **8** (2000), p. 39–54.
- [55] ———, « Metrizable of some analytic affine spaces », in *p-adic functional analysis (Ioannina, 2000)*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., vol. 222, Dekker, New York, 2001, p. 219–225.
- [56] M. RAYNAUD – « Géométrie analytique rigide d’après Tate, Kiehl, ... », in *Table Ronde d’Analyse non archimédienne (Paris 1972)*, Mém. Soc. Math. France, vol. 39–40, Soc. Math. France, Paris, 1974, p. 319–327.
- [57] J. RIVERA-LETELIER – « Théorie de Julia et Fatou sur la droite hyperbolique  $p$ -adique », en préparation.
- [58] ———, « Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux », in *Geometric methods in dynamics II*, Astérisque, vol. 287, Soc. Math. France, Paris, 2003, p. 147–230.
- [59] ———, « Espace hyperbolique  $p$ -adique et dynamique des fonctions rationnelles », *Compositio Math.* **138** (2003), no. 2, p. 199–231.
- [60] ———, « Points périodiques des fonctions rationnelles dans l’espace hyperbolique  $p$ -adique », *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), no. 3, p. 593–629.
- [61] L. SZPIRO, E. ULLMO & S. ZHANG – « Équirépartition des petits points », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 337–347.
- [62] J. TATE – « Rigid analytic spaces », *Invent. Math.* **12** (1971), p. 257–289.
- [63] M. TEMKIN – « On local properties of non-Archimedean analytic spaces », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 3, p. 585–607.
- [64] ———, « On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II », *Israel J. Math.* **140** (2004), p. 1–27.

- [65] ———, « A new proof of the Gerritzen-Grauert theorem », *Math. Ann.* **333** (2005), no. 2, p. 261–269.
- [66] A. THUILLIER – « Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d’Arakelov », Thèse, IRMAR, Université Rennes 1, 2005.

Antoine DUCROS  
Université de Rennes I  
IRMAR  
UMR 6625 du CNRS  
Campus de Beaulieu  
F-35402 RENNES Cedex  
*E-mail* : `ducros@math.univ-rennes1.fr`



**ÉCARTS ENTRE NOMBRES PREMIERS SUCCESSIFS**  
[d'après Goldston, Pintz, Yıldırım, ...]

par Emmanuel KOWALSKI

**1. INTRODUCTION**

Rien n'est plus commun que de remarquer l'importance de la suite infinie

$$2 = p_1 < 3 = p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$$

des nombres premiers dans l'imaginaire des mathématiciens et des arithméticiens tout particulièrement. Parmi les belles questions qui restent complètement ouvertes concernant les nombres premiers, celles qui ont trait aux *écarts* entre nombres premiers consécutifs

$$\gamma(n) = p_{n+1} - p_n \text{ pour } n \geq 1$$

ont exercé depuis longtemps une fascination particulière.

Le point de départ d'une analyse rigoureuse de la répartition des valeurs de  $\gamma(n)$  est forcément le théorème des nombres premiers. Notons  $\pi(X)$ , comme d'habitude, le nombre de nombres premiers  $p \leq X$  ; on a alors

$$\pi(X) \sim \frac{X}{\ln X}, \text{ quand } X \rightarrow +\infty.$$

De manière équivalente, le  $n$ -ième nombre premier  $p_n$  vérifie

$$p_n \sim n \ln n, \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

et, « en moyenne », la distance  $\gamma(n)$  entre nombres premiers consécutifs est de l'ordre de  $\ln n$  : on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{2 \leq n \leq N} \frac{\gamma(n)}{\ln n} = 1,$$

d'où en particulier :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(n)}{\ln n} \leq 1.$$

L'autre source de conjectures – qui n'a pas attendu la preuve du théorème des nombres premiers – consiste à « regarder » ce qui se passe dans des tables de nombres

premiers. Il avait été observé<sup>(1)</sup> qu'un nombre relativement grand de paires  $(p_n, p_{n+1})$  vérifie  $p_{n+1} - p_n = 2$ . En conséquence il a été conjecturé qu'une infinité de telles paires existe. C'est la conjecture des nombres premiers jumeaux : avec la notation ci-dessus, elle affirme que

$$(1) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \gamma(n) = 2.$$

Le thème particulier de ce rapport est celui de l'existence de petits écarts entre nombres premiers (par opposition, par exemple, avec la question de borner  $\gamma(n)$  pour tout  $n$ ). Après des progrès sporadiques, dus à Erdős, Rankin, Bombieri-Davenport [2], Huxley, Maier, en particulier, l'étude des petits écarts entre nombres premiers a été bouleversée durant l'année 2005. Goldston, Pintz et Yıldırım [11, 12, 14] ont en effet démontré :

THÉORÈME 1.1 (Goldston, Pintz, Yıldırım). — *On a*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(n)}{\ln n} = 0.$$

Le meilleur résultat précédemment connu était dû à Maier :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(n)}{\ln n} \leq 0,2484\dots$$

De plus, en admettant certaines hypothèses usuelles concernant la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, on a des résultats vraiment spectaculaires :

THÉORÈME 1.2 (Goldston, Pintz, Yıldırım)

(1) *Si l'exposant de répartition  $\theta$  au sens fort de la suite des nombres premiers vérifie  $\theta > 1/2$ , on a*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \gamma(n) < +\infty.$$

(2) *Si  $\theta = 1$ , alors*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \gamma(n) \leq 16.$$

L'exposant de répartition  $\theta$  est défini ci-dessous (Définition 2.2). On sait que  $\theta \geq 1/2$  : c'est le célèbre théorème de Bombieri-Vinogradov.

Dans la section 7, nous présenterons des énoncés plus forts et d'autres résultats annoncés, concernant par exemple les écarts entre nombres de la forme  $p_1 p_2$  avec  $p_1 \neq p_2$  (c'est-à-dire, ayant exactement deux facteurs premiers).

Mais, pour commencer, nous allons expliquer la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2, après avoir présenté la base de la méthode telle qu'elle apparaît à l'heure actuelle.

---

<sup>(1)</sup>Dickson attribue cela à Polignac.

Il faut signaler que le sujet est en pleine ébullition : tous les résultats sont encore sous forme de prépublications, et différentes variantes de la méthode apparaissent dans chacun d'entre eux. Malgré la malencontreuse aventure de 2003, aucun doute ne subsiste cependant quant à la validité des deux énoncés ci-dessus.

**Notations.** — Rappelons quelques notations de théorie analytique des nombres.

- $p$  désignera toujours un nombre premier, et  $n, m$  des entiers  $\geq 1$ .
- $\Lambda(n)$  désigne la fonction de von Mangoldt ;  $\Lambda(n) = 0$  si  $n$  n'est pas une puissance d'un nombre premier  $p$  et  $\Lambda(p^k) = \ln p$ . De plus,

$$\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n).$$

- $\mu(n)$  désigne la fonction de Möbius,  $\tau(n)$  la fonction « nombre de diviseurs » et  $\varphi(n)$  la fonction d'Euler. Pour  $n = p^k$ ,  $k \geq 1$ , on a  $\mu(p^k) = -1$  si  $k = 1$ , 0 sinon,  $\tau(p^k) = k + 1$  et  $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ .
- $f \star g$  désigne la convolution arithmétique de  $f$  et  $g$  :

$$f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{ab=n} f(a)g(b).$$

- $\sum^b$  désigne une somme restreinte aux entiers  $n$  sans facteurs carrés.
- Les notations de Landau  $f = O(g)$  et de Vinogradov  $f \ll g$  sont considérées comme synonymes :  $f(x) = O(g(x))$  pour tout  $x \in D$  signifie qu'il existe une constante « implicite »  $C \geq 0$  (le plus souvent, fonction d'autres paramètres explicitement mentionnés) telle que  $|f(x)| \leq Cg(x)$  pour tout  $x \in D$ . Cette définition *diffère* de celle, topologique, de Bourbaki [4, Chap. V]. Par contre, nous utilisons les notations  $f(x) \sim g(x)$  et  $f = o(g)$  dans le sens asymptotique de *loc. cit.*

**Remerciements.** — Je remercie D. Goldston, J. Pintz, C. Yıldırım, J. Sivak, R. de la Bretèche et É. Fouvry pour leurs remarques et corrections concernant les différents brouillons de ce texte.

## 2. RAPPELS DE QUELQUES NOTIONS DE CRIBLE

Cette section rappelle quelques définitions relatives aux méthodes de crible (voir par exemple [15] pour un traitement classique très complet, [18, Ch. 6], [19, Ch. 4] pour des exposés assez courts comportant les preuves des assertions de base, et [5, 20] pour deux survols dans ce séminaire).

Soit  $\mathcal{A} = (a_n)$ ,  $n \geq 1$ , une suite de nombres réels positifs. On note

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

sa fonction sommatoire.

Soit  $P$  un entier, qui sera le plus souvent le produit de certains nombres premiers bien choisis, par exemple le produit des nombres premiers  $p < z$ . Les *sommes criblées* correspondantes sont

$$\mathcal{A}(x, P) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P) = 1}} a_n.$$

L'objectif général du crible est d'estimer  $\mathcal{A}(x, P)$  avec la plus grande généralité possible.

Pour aborder l'étude des sommes criblées  $\mathcal{A}(x, P)$ , les méthodes de « petit » crible sont inspirées par la formule de Legendre<sup>(2)</sup> : on a

$$\mathcal{A}(x, P) = \sum_{d|P} \mu(d) \mathcal{A}_d(x), \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_d(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} a_n.$$

Bien qu'elle ne soit pas exploitable directement en général car le nombre de termes (i.e., le nombre de diviseurs de  $P$ ) est trop grand, cette formule suggère d'étudier les suites  $\mathcal{A}_d = (a_{nd})$ . Dans beaucoup de cas intéressants du point de vue de la théorie multiplicative des nombres, il se dégage naturellement une approximation de  $\mathcal{A}_d(x)$  de la forme

$$(2) \quad \mathcal{A}_d(x) = g(d)X + r_d(\mathcal{A}; x)$$

où  $X \geq 0$  est une fonction de  $x$ ,  $d \mapsto g(d)$  est une fonction arithmétique que l'on suppose multiplicative<sup>(3)</sup> et  $r_d(\mathcal{A}; x)$  est un « reste ».

En pratique, cette approximation est assez précise pour des valeurs de  $d$  assez grandes, disons  $d < D$ , c'est-à-dire que le reste total

$$\sum_{d < D} |r_d(\mathcal{A}; x)|$$

peut être estimé « suffisamment bien ». Plus précisément, la notion d'*exposant de répartition* est classiquement définie :

DÉFINITION 2.1. — *La suite  $\mathcal{A}$  a un exposant de répartition au sens faible  $\geq \theta$  si, pour tout  $A > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$(3) \quad \sum_{d < D} |r_d(\mathcal{A}; x)| \ll \frac{X}{(\ln X)^A}$$

pour  $x \geq 2$  et  $D \leq x^{\theta - \varepsilon}$ , la constante implicite dépendant au plus de  $A$ ,  $\varepsilon$  et  $\mathcal{A}$ .

<sup>(2)</sup> Que l'on peut voir, au choix, comme l'expression du principe d'inclusion-exclusion, ou de la formule  $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$  si  $n \neq 1$ .

<sup>(3)</sup> Au sens où  $g(nm) = g(n)g(m)$  si  $(n, m) = 1$ .

La méthode de Goldston, Pintz et Yıldırım requiert cruciallement des informations, non seulement pour une suite  $\mathcal{A} = (a_n)$ , mais pour les suites « décalées »  $(a_{n+t})$ , où  $t \geq 0$  est un entier quelconque. Cela mène à un renforcement naturel de la notion d'exposant de répartition.

Pour la définir, on généralise donc (2) en écrivant

$$(4) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv t \pmod{d}}} a_n = g_t(d)X + r_d(\mathcal{A}; x, t)$$

où  $X$  est encore une fonction de  $x$  et  $d \mapsto g_t(d)$  est pour tout  $t$  une fonction multiplicative dont la valeur ne dépend que de  $t$  modulo  $d$ .

DÉFINITION 2.2. — Une suite  $\mathcal{A} = (a_n)$  de réels positifs a un exposant de répartition au sens fort  $\geq \theta$  si pour tout  $A > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$(5) \quad \sum_{d \leq D} \max_{t \pmod{d}} \max_{y \leq x} |r_d(\mathcal{A}; y, t)| \ll \frac{X}{(\ln X)^A},$$

pour  $x \geq 2$  et  $D \leq x^{\theta - \varepsilon}$ , la constante implicite pouvant dépendre de  $A$ ,  $\varepsilon$  et  $\mathcal{A}$ .

Pour le théorème 1.2, la suite concernée est la suite  $(\Lambda(n))$ , ou bien la fonction caractéristique des nombres premiers.

On va voir dans la preuve du théorème 1.2 qu'une notion plus faible se dégage. Comme cela pourrait fournir une voie plus accessible à la preuve inconditionnelle de ce résultat, il semble utile de l'isoler.

DÉFINITION 2.3. — Une suite  $\mathcal{A} = (a_n)$  de réels positifs a un  $P$ -exposant de répartition  $\geq \theta$  si pour tout  $A > 0$ , tout  $\varepsilon > 0$  et tout polynôme primitif  $F \in \mathbf{Z}[X]$  de degré  $\geq 1$  on a

$$\sum_{d \leq D}^b \sum_{\substack{\nu \pmod{d} \\ F(\nu)=0}} \max_{y \leq x} |r_d(\mathcal{A}; y, \nu)| \ll \frac{X}{(\ln X)^A},$$

pour  $x \geq 2$  et  $D \leq x^{\theta - \varepsilon}$ , la constante implicite pouvant dépendre de  $A$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mathcal{A}$  et  $F$ .

Remarque 2.4. — Une prépublication de Pintz et Motohashi [21], parue après la première version de ce survol, introduit explicitement une variante de cette dernière notion dans le cas de la suite des nombres premiers, avec une plus grande flexibilité potentiellement intéressante.

Le cas le plus important pour notre propos est celui de la suite  $a_n = \Lambda(n)$ . Dans ce cas on a pour  $t \geq 0$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv t \pmod{d}}} a_n = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv t \pmod{d}}} \Lambda(n) = \psi(x; d, t),$$

et si  $(d, t) = 1$  on a l'approximation

$$(6) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv t \pmod{d}}} a_n = \frac{x}{\varphi(d)} + r_d(\mathcal{A}; x, t)$$

avec la borne

$$r_d(\mathcal{A}; x, t) \ll x(\ln x)^{-A}$$

valide pour tout  $x \geq 2$ ,  $d \geq 1$ ,  $t$  modulo  $d$  (tel que  $(d, t) = 1$ ) et tout  $A > 0$ , la constante implicite (ineffective) dépendant seulement de  $A$ ; c'est le théorème de la progression arithmétique sous la forme donnée par Siegel-Walfisz ([18, Cor. 5.29] par exemple).

Tenant compte des cas  $(d, t) \neq 1$ , on peut définir

$$X = x, \quad g_t(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } (d, t) \neq 1, \\ \frac{1}{\varphi(d)} & \text{si } (d, t) = 1, \end{cases}$$

pour avoir (4) avec

$$r_d(\mathcal{A}; x, t) \ll x(\ln x)^{-A}$$

dans tous les cas.

Tel quel, cela ne donne qu'un exposant de répartition nul. L'ingrédient crucial pour cribler efficacement une telle suite est le théorème de Bombieri-Vinogradov (voir par exemple [18, Ch. 17]) :

THÉORÈME 2.5. — *Pour tout  $A > 0$ , il existe  $B > 0$  tel que*

$$\sum_{d \leq D} \max_{\substack{(a, d) = 1 \\ a \pmod{d}}} \max_{y \leq x} \left| \psi(y; d, a) - \frac{y}{\varphi(d)} \right| \ll \frac{x}{(\ln x)^A}$$

pour  $x \geq 2$  et  $D \leq x^{1/2}(\ln x)^{-B}$ , la constante implicite dépendant uniquement de  $A$ .

La restriction à  $(a, d) = 1$  étant inoffensive, cela implique que la suite  $(\Lambda(n))$  a un exposant de répartition  $\geq 1/2$ . La limite à  $1/2$  est bien comprise : c'est ce que donnerait trivialement l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour les fonctions  $L$  de Dirichlet. Aller au-delà revient donc, d'une manière ou d'une autre, à obtenir des informations sur la répartition des zéros de  $L(\chi, s)$  par rapport à  $\chi$  variable (voir la section 8). Dit d'une autre manière, analytiquement, il faut aller au-delà de l'inégalité générale du Grand Crible qui est l'un des ingrédients cruciaux de la preuve (un autre étant (6)).

*Remarque 2.6*

(1) On appellera, suivant l'usage, *Conjecture d'Elliott-Halberstam* la conjecture qui énonce<sup>(4)</sup> que  $(\Lambda(n))$  a un exposant de répartition (au sens fort<sup>(5)</sup>) égal à 1.

(2) Voir la dernière section de ce rapport pour quelques remarques concernant des suites pour lesquelles on connaît un exposant de répartition  $> 1/2$  (faible ou fort).

(3) Le  $P$ -exposant de répartition semble être une notion nouvelle. Bien entendu, si une suite a un exposant de répartition  $\geq \theta$  au sens fort, il en est de même pour le  $P$ -exposant. Trouver des suites non triviales pour lesquelles le  $P$ -exposant de répartition dépasse la limite (universelle) du grand crible semble un problème intéressant.

L'exemple de crible qui est sous-jacent à la méthode de Goldston, Pintz et Yıldırım est lié à la « conjecture des  $k$ -uplets » de Hardy et Littlewood. Soit  $k \geq 2$  et  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers  $\geq 0$  distincts. Le problème est de trouver les entiers  $n$  tels que  $n + h_1, \dots, n + h_k$  soient tous premiers, autrement dit de trouver les entiers  $n \geq 1$  tels que

$$F_{\mathbf{h}}(n) = (n + h_1) \cdots (n + h_k)$$

possède  $k$  facteurs premiers exactement. On notera  $\pi(X, \mathbf{h})$  le nombre des  $n \leq X$  vérifiant cette condition.

Puisque tout entier de ce type assez grand (en fonction de  $\varepsilon > 0$ ) a tous ses facteurs premiers  $> n > F_{\mathbf{h}}(n)^{1/k-\varepsilon}$ , les méthodes de crible fournissent aisément une borne supérieure (voir par exemple [18, Th. 6.7], [15, Th. 5.7]) :

THÉORÈME 2.7. — *On a*

$$\pi(X, \mathbf{h}) \leq 2^k k! \mathfrak{S}(\mathbf{h}) X (\ln X)^{-k} \left( 1 + O\left(\frac{\ln \ln X}{\ln X}\right) \right)$$

pour  $X \geq 3$ , où

$$(7) \quad \mathfrak{S}(\mathbf{h}) = \prod_p \left( 1 - \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p} \right) \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{-k},$$

avec  $\nu_{\mathbf{h}}(p)$  la cardinalité de l'ensemble  $\{h_1 \pmod{p}, \dots, h_k \pmod{p}\}$  des réductions modulo  $p$  des composantes de  $\mathbf{h}$ , ce produit étant absolument convergent.

Comme dans [11, 13, 14], on dira que  $\mathbf{h}$  est *admissible* si les composantes de  $\mathbf{h}$  sont distinctes et si  $\mathfrak{S}(\mathbf{h}) \neq 0$ . Cela signifie qu'il n'existe pas de nombre premier  $p$  avec  $\nu_{\mathbf{h}}(p) = p$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre premier  $p$  qui divise toujours l'un au moins des entiers  $n + h_1, \dots, n + h_k$ . Des raisonnements heuristiques (effectués, dans ce cas, par Hardy et Littlewood, voir [18, 13.1] ou [20, 2], par exemple, pour une

<sup>(4)</sup>Ce n'est pas la version originale de Elliott et Halberstam, qui est fautive, comme l'ont démontré Friedlander et Granville.

<sup>(5)</sup>Dans la suite, on omettra parfois de préciser « au sens fort », qui sera sous-entendu.

présentation moderne) suggèrent que la borne supérieure obtenue est du bon ordre de grandeur<sup>(6)</sup> si  $\mathbf{h}$  est admissible, et plus précisément :

CONJECTURE 2.8 (Hardy–Littlewood). — *Si  $\mathbf{h}$  est admissible, on a*

$$\pi(X, \mathbf{h}) \sim \mathfrak{S}(\mathbf{h})X(\ln X)^{-k} \text{ quand } X \rightarrow +\infty.$$

Bien entendu, le cas  $\mathbf{h} = (0, 2)$  correspond à la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Le facteur<sup>(7)</sup>  $\mathfrak{S}(\mathbf{h})$  joue un rôle important dans la partie inconditionnelle des travaux de Goldston, Pintz et Yıldırım (le théorème 1.1). Plus précisément, il est nécessaire de connaître sa valeur moyenne lorsque  $\mathbf{h}$  parcourt les  $k$ -uplets admissibles  $\mathbf{h} = (h_i)$  avec  $1 \leq h_i \leq h$  pour  $k$  fixé. Celle-ci a été calculée par Gallagher [9].

PROPOSITION 2.9. — *Pour  $h \geq 1$  et  $k \geq 1$  des entiers, soit*

$$(8) \quad \mathfrak{S}(h, k) = \frac{1}{h^k} \sum_{\substack{\mathbf{h}=(h_1, \dots, h_k) \\ 1 \leq h_i \leq h}}^* \mathfrak{S}(\mathbf{h})$$

où  $\sum^*$  signifie que la somme est restreinte aux  $k$ -uplets admissibles<sup>(8)</sup>.

Pour tout  $k$  fixé, on a

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \mathfrak{S}(h, k) = 1.$$

Cela veut dire que la valeur moyenne de  $\mathfrak{S}(\mathbf{h})$  est 1, ce qui est cohérent avec ce qu'on attend d'un produit eulérien. L'estimation uniforme suivante est également utile : il existe une constante  $b_k \geq 0$  telle que

$$(9) \quad \mathfrak{S}(\mathbf{h}) \ll (\ln \ln 10h)^{b_k},$$

pour tout  $k$ -uplet  $\mathbf{h}$  tel que  $1 \leq h_i \leq h$  pour tout  $i$ , la constante implicite ne dépendant que de  $k$  (voir par exemple [11, Lemma 6]).

Remarque 2.10. — Ce résultat de Gallagher est lié à une conjecture concernant la répartition de  $\gamma(n)$ , à savoir que la suite  $(\gamma(n)/\ln n)$  est, pour  $n \rightarrow +\infty$ , équirépartie pour la mesure  $e^{-t}dt$  sur  $[0, +\infty[$  (« distribution de Poisson », correspondant à des nombres purement aléatoires et sans corrélations). On s'attend donc à avoir

$$(10) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} |\{n \leq N \mid \alpha \leq \frac{\gamma(n)}{\ln n} \leq \beta\}| = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t} dt$$

<sup>(6)</sup> Cela peut se « deviner » en disant que chaque  $n + h_i$  a une « probabilité »  $1/(\ln n)$  d'être premier et en supposant les différentes conditions indépendantes.

<sup>(7)</sup> Appelé parfois la « série singulière » par référence à la terminologie employée dans la méthode du cercle de Hardy et Littlewood.

<sup>(8)</sup> En particulier, dont les composantes  $h_i$  sont distinctes ; par contre, les composantes ne sont pas ordonnées.



pour tout  $0 \leq \alpha < \beta$ . Le lien avec la proposition 2.9 est que celle-ci permet de démontrer qu'une forme forte et uniforme de la conjecture des  $k$ -uplets implique (10), en calculant les moments nécessaires.

La loi de Poisson est aussi la répartition que l'on attend pour la suite des écarts normalisés entre valeurs propres du laplacien sur la courbe modulaire  $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}$ ; rappelons [20] que la répartition des écarts normalisés des zéros de  $\zeta(s)$  est (conjecturalement) très différente<sup>(9)</sup>.

### 3. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Dans cette section, nous allons présenter – comme l'auteur de ce rapport est parvenu à le comprendre – le principe de base de la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2. La description tente de présenter le raisonnement le plus naturellement du monde, mais n'en respecte pas nécessairement la chronologie exacte. Le preprint [13] fournit plus de détails à ce sujet.

La première chose à faire est de considérer que la conjecture des  $k$ -uplets est « plus fondamentale » que l'énoncé du théorème 1.1 par exemple. On va donc chercher à aborder des formes plus faibles de cette conjecture. Il est classique d'essayer de le faire en cherchant des  $k$ -uplets « presque premiers ». La première idée nouvelle est *d'affaiblir différemment la conjecture*. Soit donc  $\mathbf{h}$  un  $k$ -uplet admissible. On cherchera des  $n$  tels que le  $k$ -uplet  $(n+h_1, \dots, n+h_k)$  contienne *au moins* deux nombres premiers. Lorsque c'est le cas, on a évidemment « trouvé » deux nombres premiers tels que  $p < p'$  et  $p' - p \leq \max(h_i - h_j)$ . Le théorème 1.2 en sera une conséquence; quant au théorème 1.1, un seul  $k$ -uplet ne suffisant pas, on combinera à l'aide de la proposition 2.9 l'effet de tous ceux tels que  $h_i \leq h$ , avec  $h = \delta \ln n \dots$

Un intérêt de cet affaiblissement (qui n'en est un que si  $k \geq 3$ , d'ailleurs) est qu'un « détecteur » manipulable de la condition voulue peut se décrire assez facilement. Notons  $n \triangleleft \mathbf{h}$  la relation

« Il y a au moins deux (puissances de) nombres premiers parmi  $n + h_1, \dots, n + h_k$  », et posons

$$\vartheta_{\mathbf{h}}(n) = \sum_{1 \leq i \leq k} \Lambda(n + h_i).$$

On a alors, si  $h_i \leq n$  :

$$(11) \quad \vartheta_{\mathbf{h}}(n) > \ln 2n \text{ implique } n \triangleleft \mathbf{h}.$$

<sup>(9)</sup>L'analogie du théorème 1.1 pour l'espacement moyen des parties imaginaires des zéros de  $\zeta(s)$  n'est pas connu; d'après un résultat – en fait beaucoup plus fort – de Conrey et Iwaniec, cela impliquerait qu'il n'existe pas de zéros de Landau-Siegel pour les fonctions  $L$  de Dirichlet.

On va tenter de comparer<sup>(10)</sup> deux sommes, à savoir

$$Q_g = \sum_{N < n \leq 2N} \vartheta_{\mathbf{h}}(n)E(n) \quad \text{et} \quad Q_p = (\ln 3N) \sum_{N < n \leq 2N} E(n)$$

où  $N \geq 1$  et les poids  $E(n) \geq 0$  sont à notre disposition. Le détecteur ci-dessus fournit la minoration :

$$(k-1)(\ln 3N) \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ n < \mathbf{h}}} E(n) \geq (Q_g - Q_p),$$

en particulier, si  $Q_g > Q_p$ , il existe au moins une valeur de  $n$  qui convient dans l'intervalle  $N < n \leq 2N$ .

*C'est dans le choix des coefficients  $E(n)$  que se trouve la clé du succès des travaux de Goldston, Pintz et Yıldırım.* Il n'y a rien d'évident à ce qu'il existe un choix impliquant un résultat aussi fort que le théorème 1.2, et cette méthode de détection, suivant le problème, est plus ou moins efficace<sup>(11)</sup>. *A posteriori*, l'approche peut sembler « évidente » (si le rédacteur de ce rapport a bien fait son travail...), mais comme souvent en théorie analytique des nombres, il faut combiner deux ou trois idées significatives pour obtenir un nouveau résultat vraiment convaincant.

On cherche donc alors à minorer  $Q_g$  et majorer  $Q_p$ . On ne peut réellement espérer qu'une chose : que  $Q_g$  et  $Q_p$  soient du même ordre de grandeur, mais avec

$$\rho = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{Q_g}{Q_p} > 1.$$

Autrement dit : *la réussite dépendra d'une inégalité numérique*<sup>(12)</sup>. Même si, avec le type de coefficients  $E(n)$  discutés ci-dessous, il est assez aisé de deviner la valeur de  $\rho$  (sous la conjecture 2.8, et éventuellement d'autres) et donc de justifier de manière plausible le choix effectué, la difficulté est de parvenir à démontrer rigoureusement que  $\rho > 1$ .

*Remarque 3.1.* — La méthode de Bombieri et Davenport [2] (réinterprétée par Goldston [10]) peut essentiellement se ramener à ce cadre, en changeant le détecteur et avec  $E(n) = \Lambda(n)$  : il s'agit grosso modo de démontrer que

$$Q_1 = \sum_{N < n \leq 2N} \left( \sum_{k=1}^{\mathbf{h}} \alpha(k) \Lambda(n+2k) \right) \Lambda(n),$$

<sup>(10)</sup>Sous la forme plus précise qui sera abordée ci-dessous, Goldston, Pintz et Yıldırım attribuent cette formulation de leur méthode à Granville et Soundararajan.

<sup>(11)</sup>Par exemple, l'analogie du théorème 1.1 pour les écarts  $p_{n+2} - p_n$ , que l'on est tenté d'aborder en considérant  $\vartheta_{\mathbf{h}}(n) - 2 \ln 3N$ , n'est pas connu inconditionnellement ; il l'est cependant sous la conjecture d'Elliott-Halberstam, voir théorème 7.3.

<sup>(12)</sup>Cela peut être contrasté avec la méthode de « mollification » utilisée, par exemple, par Selberg pour minorer le nombre de zéros critiques de  $\zeta(s)$ . Le succès ne dépend alors que d'avoir le bon ordre de grandeur du second moment mollifié.

pour certains coefficients  $\alpha(k)$  bien choisis, est suffisamment proche de sa valeur attendue

$$Q_2 = \sum_{N < n \leq 2n} \left( \sum_{k=1}^h \alpha(k) \mathfrak{S}(0, 2k) \right) \Lambda(n) \sim \left( \sum_{k=1}^h \alpha(k) \mathfrak{S}(0, 2k) \right) N$$

(donnée par la conjecture de Hardy-Littlewood) pour impliquer l'existence de nombres premiers à distance  $\leq 2h$ , lorsque  $h$  est de l'ordre de  $\frac{1}{4} \log N$ . Il faut noter qu'ici les deux sommes  $Q_1$  et  $Q_2$  sont asymptotiquement égales (conjecturalement), c'est-à-dire que  $\rho = 1$ .

Le coefficient  $1/4$  est lié à l'exposant de répartition (au sens fort) des suites de nombres premiers décalés, et est donné par le théorème de Bombieri-Vinogradov. En particulier, comme l'observe Goldston [10], cette méthode démontrait déjà qu'une certaine forme de la conjecture d'Elliott-Halberstam implique le théorème 1.1 (*pas* le théorème 1.2).

La somme  $Q_g$  porte sur un support limité aux entiers  $n$  tels que  $\{n+h_1, \dots, n+h_k\}$  contienne un nombre premier (ou une puissance...) au moins, alors que  $Q_p$  n'a pas cette restriction *a priori*. Il est donc naturel de demander à  $E(n)$  d'imposer une restriction similaire, afin d'ajuster la « densité » relative espérée pour  $Q_p$  à celle de  $Q_g$ .

Bien entendu, prendre

$$E'(n) = \Lambda(n+h_1) \cdots \Lambda(n+h_k)$$

est le meilleur choix en principe : conjecturalement, la somme  $Q_g$  construite avec  $E'(n)$  compte exactement (avec multiplicité  $k$ ) les  $k$ -uplets de nombres premiers. Mais – c'est toute la question que l'on cherche à résoudre – on ne saurait pas démontrer rigoureusement les estimations nécessaires. On va donc introduire des approximations de  $E'(n)$  qui seront plus manipulables<sup>(13)</sup>.

La recherche de la bonne approximation a procédé par tâtonnements. Il est classique d'approcher la fonction  $\Lambda$  en écrivant

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left( \ln \frac{n}{d} \right)$$

et en utilisant une convolution tronquée

$$\Lambda(n, x) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq x}} \mu(d) \left( \ln \frac{x}{d} \right),$$

où  $x \geq 1$  est un paramètre, que l'on souhaite pouvoir prendre le plus grand possible.

La tentation est grande de choisir comme coefficients

$$E_0(n) = \Lambda(n+h_1, x) \cdots \Lambda(n+h_k, x).$$

<sup>(13)</sup>Là aussi, on peut penser à la méthode de mollification pour l'étude des zéros de fonctions  $L$ .

Un premier obstacle apparaît : il n'est plus vrai que  $E_0(n) \geq 0$  ; cela rend impossible de déduire d'une inégalité  $Q_g > Q_p$  qu'il existe  $n$  tel que  $n \ll \mathbf{h}$ . On peut vouloir contourner le problème en prenant  $E_0(n)^2$  ; c'est en effet la précédente approche de Goldston et Yıldırım. Elle s'avère insuffisante pour démontrer le théorème 1.1<sup>(14)</sup>.

Il s'avère que trouver une bonne approximation nécessite de considérer le problème plus globalement en rapport avec l'objectif recherché par la méthode considérée : puisqu'on se contente (maintenant) d'avoir au moins deux nombres premiers dans les  $k$ -uplets considérés, il peut être (et il est) préférable de faire appel à un poids qui tienne compte de ce relâchement. Plutôt que  $E'(n)$ , qui « compte » des  $k$ -uplets d'entiers tous premiers, on utilise donc comme référence un poids qui sélectionne les  $k$ -uplets  $(n+h_1, \dots, n+h_k)$  d'entiers dont le produit n'a que peu de facteurs premiers, mais éventuellement plus que  $k$ .

Précisément, l'innovation critique de Goldston, Pintz et Yıldırım est donc d'utiliser un poids (de type « crible ») que l'on utiliserait plutôt pour sélectionner les entiers  $n$  tels que  $F_{\mathbf{h}}(n)$  ait au plus  $k + \ell$  facteurs premiers, où

$$F_{\mathbf{h}}(n) = (n + h_1) \cdots (n + h_k)$$

et où le paramètre  $\ell \geq 1$  est également disponible pour être optimisé. Si  $\ell$  reste suffisamment petit par rapport à  $k$ , une grande proportion des  $k$ -uplets ainsi sélectionnés vérifieront la relation  $n \ll \mathbf{h}$  (même s'ils ont bien entendu davantage que  $k + \ell$  facteurs premiers, puisque le crible n'est pas parfait). L'interprétation exacte de ce paramètre reste mystérieuse ; peut-être peut-on y voir une forme de « lissage » des  $k$ -uplets presque premiers.

Pour concrétiser cela, [14] utilise le poids

$$E(n) = \Lambda_{k+\ell}(F_{\mathbf{h}}(n), x)$$

où  $\Lambda_m(n, x)$ , pour tout entier  $m \geq 1$ , est une troncature de la  $m$ -ième fonction de von Mangoldt  $\Lambda_m$ , par analogie avec le cas  $\Lambda = \Lambda_1$  :

$$\Lambda_m(n) = (\mu \star \ln^m)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left( \ln \frac{n}{d} \right)^m \quad \text{et} \quad \Lambda_m(n, x) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq x}} \mu(d) \left( \ln \frac{x}{d} \right)^m.$$

Le choix de  $\Lambda_m(n)$  dans l'étude de la répartition des nombres « presque premiers » dans une suite est largement justifié par la théorie du crible, en particulier par le « crible asymptotique » de Bombieri où ces fonctions ont fait leur apparition. Il est facile de voir que  $\Lambda_m$  est supportée sur les entiers ayant au plus  $m$  facteurs premiers (sans multiplicité)<sup>(15)</sup>, et Bombieri est parvenu à démontrer (entre

<sup>(14)</sup>Mais c'est un des outils arithmétiques de la preuve du théorème de Green-Tao [17].

<sup>(15)</sup>Cela découle par récurrence de  $\Lambda_1 = \Lambda$  et  $\Lambda_{m+1} = (\ln)\Lambda_m + \Lambda \star \Lambda_m$ .

autres) que la conjecture d'Elliott-Halberstam implique la formule asymptotique

$$\sum_{n \leq X} \Lambda(n) \Lambda_m(n+2) \sim m \mathfrak{S}(0, 2) X (\log X)^{m-1} \quad \text{quand } X \rightarrow +\infty,$$

pour tout  $m \geq 2$ <sup>(16)</sup>.

*Remarque 3.2.* — La remarque qui suit est assez gratuite, mais puisque l'arithmétique est une science expérimentale, il serait dommage de s'en passer. Considérons le 6-uplet admissible  $\mathbf{h} = (7, 11, 13, 17, 19, 23)$ . Pour  $X = 10,000,000$ , et  $1 \leq k \leq 6$ , voici le nombre  $N_k$  d'entiers  $n \leq X$  tels que  $\{n+7, \dots, n+23\}$  contienne au moins  $k$  nombres premiers, et pour  $6 \leq \omega \leq 11$ , le nombre  $M_\omega$  d'entiers  $n \leq X$  tels que  $F_{\mathbf{h}}(n)$  ait  $\omega$  facteurs premiers (*sans* multiplicité) :

$k$	$N_k$	$k$	$N_k$	$\omega$	$M_\omega$	$\omega$	$M_\omega$
1	2,917,127	2	890,130	6	19	7	381
3	160,592	4	18,479	8	3281	9	16955
5	1,092	6	17	10	58947	11	150090

*Remarque 3.3.* — Concernant l'introduction cruciale du paramètre  $\ell$ , un travail de Heath-Brown [16], lui-même inspiré par des idées de Selberg [22, §18, §23], est cité comme influence dans [13, 14].

Peut-être une raison de l'efficacité de ce paramètre, même petit – sous la conjecture d'Elliott-Halberstam, on prendra  $\ell = 1 -$ , est-elle à chercher dans le fait que demander que  $F_{\mathbf{h}}(n)$  ait  $k + \ell$  facteurs premiers avec  $\ell \neq 0$  n'impose plus, en particulier, que la parité du nombre de facteurs premiers soit constante.

Dans [14], Goldston, Pintz et Yıldırım évaluent donc

$$Q_g = \sum_{N < n \leq 2N} \vartheta_{\mathbf{h}}(n) \Lambda_{k+\ell}(F_{\mathbf{h}}(n), x)^2$$

et

$$Q_p = (\ln 3N) \sum_{N < n \leq 2N} \Lambda_{k+\ell}(F_{\mathbf{h}}(n), x)^2.$$

Plutôt que de présenter ces calculs<sup>(17)</sup>, nous allons utiliser un poids différent qu'ils emploient avec Graham dans [11]. Son avantage est de permettre une évaluation *élémentaire* de  $Q_g$  et  $Q_p$  alors que, dans [14], il est nécessaire de faire appel à des intégrales multiples de fractions rationnelles en la fonction zéta de Riemann et conséquemment à la zone sans zéro de celle-ci, ce qui est relativement délicat.

<sup>(16)</sup>Friedlander et Iwaniec ont considérablement développé ce crible asymptotique, en fournissant des variantes qui peuvent traiter le cas  $m = 1$  en ajoutant des hypothèses bilinéaires aux conditions classiques, voir [20].

<sup>(17)</sup>Les résultats sont asymptotiquement identiques à ceux qui sont obtenus ci-dessous.

L'idée dans [11] est de voir le problème de maximiser  $Q_g/Q_p$  comme proche du type de problème d'optimisation caractéristique du crible de Selberg, et c'est d'ailleurs – pour un problème relativement similaire – ce qu'avait fait Selberg lui-même. On cherche alors

$$E(n) = \lambda(F_{\mathbf{h}}(n))^2 \quad \text{où} \quad \lambda(n) = \sum_{d|n} \lambda_d,$$

les coefficients  $\lambda_d$  étant à notre disposition, avec la seule contrainte que  $\lambda_d = 0$  pour  $d > x$ , où  $x$  (le « niveau », dans le langage du crible) est un paramètre jouant évidemment le même rôle que dans  $\Lambda_m(n, x)$  – qui est de la forme postulée ici.

On voit que  $Q_g$  et  $Q_p$  deviennent des formes quadratiques :

$$(12) \quad Q_g = \sum_{N < n \leq 2N} \vartheta_{\mathbf{h}}(n) \left( \sum_{d|F_{\mathbf{h}}(n)} \lambda_d \right)^2,$$

$$(13) \quad Q_p = (\ln 3N) \sum_{N < n \leq 2N} \left( \sum_{d|F_{\mathbf{h}}(n)} \lambda_d \right)^2.$$

La situation typique du crible de Selberg est de minimiser une forme quadratique avec une contrainte linéaire. Ici, le problème de maximiser une forme quadratique par rapport à une autre est différent et n'admet pas de solution « formelle » aussi générale.

*Remarque 3.4.* — Il est amusant de noter que cette méthode de comparaison de formes quadratiques se trouve dans les travaux de Selberg et Heath-Brown déjà mentionnés, et qu'une variante a aussi été introduite récemment par Soundararajan pour le problème de trouver des grandes valeurs de  $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$  ou de  $|L(f, \frac{1}{2})|$  lorsque  $f$  parcourt une famille de fonctions  $L$ .

Il y a aussi un goût de la méthode d'amplification de Duke, Friedlander et Iwaniec. Puisqu'il est important de donner un nom aux choses, on peut suggérer « méthode de résonance »<sup>(18)</sup>, ou – plus poétiquement – « méthode d'écémage »<sup>(19)</sup> pour ce procédé de détection de valeurs extrêmes.

Dans son cas, Selberg avait procédé en minimisant la « petite » forme quadratique sous la contrainte  $\lambda_1 = 1$ , puis avait évalué la « grande » forme quadratique pour ce choix de valeurs. La stratégie dans [11] est légèrement différente; précisément, on obtient un  $\lambda_{d,0}$  de cette manière, mais ensuite il est modifié « brutalement » pour incorporer la souplesse du paramètre  $\ell$ . (Le choix initial correspondant en effet à  $\ell = 0$ .) Il est utile de préciser que ce paramètre est spécifique à la situation des écarts entre nombres premiers, et n'a pas d'analogue dans les autres cas mentionnés.

<sup>(18)</sup>Où les coefficients formeraient un résonateur; Soundararajan utilise ce nom.

<sup>(19)</sup>Où les coefficients formeraient un écémair.

#### 4. CHOIX ET ESTIMATION DES DEUX FORMES QUADRATIQUES

Considérons d'abord de manière assez générale une suite  $\mathcal{A} = (a_n)$  de réels positifs tels que la série  $\sum a_n$  converge, et un  $k$ -uplet admissible  $\mathbf{h}$ . On va étudier l'expression

$$(14) \quad Q = \sum_n a_n \left( \sum_{d|F_{\mathbf{h}}(n)} \lambda_d \right)^2,$$

vue comme forme quadratique en les variables  $\lambda_d$ ,  $d < x$ .

On fait l'hypothèse que  $\lambda_d$  soit supportée sur les entiers  $d < x$  sans facteurs carrés. Cette restriction est justifiée par l'expérience du crible de Selberg, et simplifie techniquement les manipulations qui vont suivre<sup>(20)</sup>.

Dans cette section, on suppose qu'un analogue de (15) est valide, sous la forme suivante :

$$(15) \quad \sum_{n \equiv t \pmod{d}} a_n = g_t(d)X + r_d(\mathcal{A}, t),$$

pour  $d \geq 1$  et  $t$  modulo  $d$ , où les fonctions arithmétiques  $d \mapsto g_t(d)$  sont multiplicatives et de plus  $g_t(d)$  ne dépend que de  $t$  modulo  $d$ . Pour commencer, cette décomposition est formelle, mais on verra plus bas quelles hypothèses sont faites sur les restes  $r_d(\mathcal{A}, t)$  pour les contrôler.

*Exemple 4.1.* — Pour les applications en vue, on considérera essentiellement deux cas de suites  $(a_n)$ , supportées sur  $N < n \leq 2N$  où  $N \geq 1$  est un entier :

$$a_n = 1, \quad X = N, \quad g_t(d) = \frac{1}{d},$$

$$a_n = \Lambda(n+j), \quad X = N, \quad g_t(d) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(d)} & \text{si } (d, t+j) = 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(avec  $j$  fixé).

*Remarque 4.2.* — Dans ce qui suit, on peut considérer le  $k$ -uplet  $\mathbf{h}$  fixé pour le besoin du théorème 1.2; autrement dit, les « constantes implicites » peuvent alors dépendre de  $\mathbf{h}$  (et le théorème A.1 de l'appendice peut remplacer le théorème A.2). Pour le

<sup>(20)</sup> En particulier, une fonction arithmétique  $f$  multiplicative supportée sur les entiers sans facteurs carrés est caractérisée par  $f(p)$  pour  $p$  premier, avec

$$f(d) = \mu^2(d) \prod_{p|d} f(p)$$

et l'inverse de  $f$  pour la convolution arithmétique vérifie  $f^{*(-1)}(d) = \mu(d)f(d)$  pour  $d$  sans facteur carré.

théorème 1.1, inconditionnel, les termes de reste doivent être *uniformes* par rapport à  $\mathbf{h}$ , pour  $k$  et  $\ell$  fixés; on supposera que  $\mathbf{h}$  vérifie

$$(16) \quad 0 \leq h_i \leq h$$

et ces estimations uniformes seront exprimées en fonction du paramètre  $h$ , que l'on supposera être  $\geq 10$  (pour que  $\log \log h > 0$ ).

On commence par une transformation formelle de la forme quadratique.

LEMME 4.3. — *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on a*

$$Q = XH + R$$

où

$$H = \sum_{d,e < x} g_{\mathbf{h}}([d, e]) \lambda_d \lambda_e, \quad R = \sum_{d,e < x} \lambda_d \lambda_e R_{[d,e]}(\mathcal{A}, \mathbf{h}),$$

avec

$$g_{\mathbf{h}}(d) = \sum_{\substack{\nu \pmod{d} \\ F_{\mathbf{h}}(\nu)=0}} g_{\nu}(d), \quad R_d(\mathcal{A}, \mathbf{h}) = \sum_{\substack{\nu \pmod{d} \\ F_{\mathbf{h}}(\nu)=0}} r_d(\mathcal{A}, \nu)$$

pour tout  $d$  sans facteurs carrés.

*Démonstration.* — Il suffit de développer le carré et d'inverser l'ordre de sommation, ce qui fait apparaître la somme intérieure

$$\sum_{\substack{n \\ F_{\mathbf{h}}(n)=0}} a_n = \sum_{\substack{\nu \pmod{d} \\ F_{\mathbf{h}}(\nu)=0}} \sum_{n \equiv \nu \pmod{[d,e]}} a_n,$$

et il ne reste plus qu'à appliquer (15) à la somme sur  $n$ . □

Puisque  $g_{\nu}(d)$  ne dépend que de  $\nu$  modulo  $d$ , le théorème chinois implique que  $d \mapsto g_{\mathbf{h}}(d)$  est encore multiplicative. La forme quadratique  $H$  est typique dans le crible de Selberg. Le reste  $R$ , pour sa part, fait intervenir les quantités  $r_d(\mathcal{A}, \nu)$  et pas seulement  $r_d(\mathcal{A})$ ; pour le contrôler il est donc nécessaire de comprendre la répartition de  $\mathcal{A}$  dans des progressions arithmétiques de module  $[d, e] < x^2$  pour des classes de congruence non fixées, et c'est de là que vient l'insuffisance de l'exposant de répartition au sens faible.

Quoi qu'il en soit, suivant le synopsis du crible de Selberg, on procède à la diagonalisation de  $H$ .

LEMME 4.4. — *Pour toute fonction multiplicative  $d \mapsto g(d)$ , on a*

$$\sum_{d,e < x} g([d, e]) \lambda_d \lambda_e = \sum_r^b t(r) y_r^2$$

où on a, pour tout  $r$  sans facteurs carrés,

$$t(r) = \sum_{ab=r} g(a) \mu(b) g(b)^2 = g(r) \prod_{p|r} (1 - g(p)), \quad \text{et} \quad y_r = \sum_d g(d) \lambda_{rd}.$$



De plus, on a la formule d'inversion

$$(17) \quad \lambda_d = \sum_r \mu(r)g(r)y_{rd}.$$

*Démonstration.* — On pose  $a = (d, e)$ , donc  $[d, e] = a \frac{d}{a} \frac{e}{a}$ . Pour  $d, e$  sans facteurs carrés on a  $(a, d/a) = (a, e/a) = 1$ . On somme sur  $a$  d'abord, puis sur  $d$  et  $e$  divisibles par  $a$  et premiers entre eux. Cette condition  $(d, e) = 1$  est détectée à l'aide de la fonction de Möbius

$$\sum_{b|(d,e)} \mu(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } (d, e) = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et il vient

$$\begin{aligned} \sum_{d,e < x} g([d, e])\lambda_d\lambda_e &= \sum_a g(a) \sum_{\substack{d,e < x/a \\ (d,e)=1}} g(d)g(e)\lambda_{ad}\lambda_{ae} \\ &= \sum_a g(a) \sum_b \mu(b)g(b)^2 \sum_{d,e < x/ab} g(d)g(e)\lambda_{abd}\lambda_{abe} \\ &= \sum_r^b t(r)y_r^2. \end{aligned}$$

Par inversion de Möbius on retrouve  $\lambda_d$  en fonction des variables  $y_r$  à l'aide de l'inverse de convolution  $j$  de  $g$ , à savoir

$$\lambda_d = \sum_r^b j(r)y_{rd} = \sum_r \mu(r)g(r)y_{rd}$$

puisque  $j(r) = \mu(r)g(r)$  pour  $r$  sans facteurs carrés.  $\square$

Il est facile de minimiser  $H$  sous une contrainte linéaire. Ici, nous le faisons pour le cas  $a_n = 1$  pour  $N < n \leq 2N$ . Dans ce cas,  $X = N$ ,  $g(d) = 1/d$  et  $g_{\mathbf{h}}(d) = \nu_{\mathbf{h}}(d)/d$  où  $\nu_{\mathbf{h}}(d)$  est le nombre de racines de  $F_{\mathbf{h}}$  modulo  $d$ , ce qui coïncide avec la description de  $\nu_{\mathbf{h}}(p)$  dans le théorème 2.7. On note  $t_{\mathbf{h}}(r)$  la fonction apparaissant dans le changement de variable  $(\lambda_d) \mapsto (y_r)$  :

$$(18) \quad t_{\mathbf{h}}(r) = g_{\mathbf{h}}(r) \prod_{p|r} (1 - g_{\mathbf{h}}(p)) = \frac{\nu_{\mathbf{h}}(r)}{r} \prod_{p|r} \left(1 - \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p}\right).$$

La contrainte linéaire la plus simple est  $\lambda_1 = 1$ . On déduit alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que si  $\sum \mu(r)g_{\mathbf{h}}(r)y_r = \lambda_1 = 1$ , on a

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_r \mu(r)g_{\mathbf{h}}(r)y_r\right)^2 \leq \left(\sum_r^b \frac{g_{\mathbf{h}}(r)^2}{t_{\mathbf{h}}(r)}\right) \left(\sum_r^b t_{\mathbf{h}}(r)y_r^2\right) \\ &= \tilde{H}H(\lambda), \quad \text{avec } \tilde{H} = \sum_r^b \frac{g_{\mathbf{h}}(r)^2}{t_{\mathbf{h}}(r)}, \end{aligned}$$

l'égalité étant obtenue, et donc  $H$  minimale, lorsque

$$y_r = \frac{1}{\tilde{H}} \frac{\mu(r)g_{\mathbf{h}}(r)}{t_{\mathbf{h}}(r)}, \text{ pour } 1 \leq r < x.$$

Comme expliqué dans la précédente section, on modifie ce choix en insérant un facteur logarithme visant à « mimer » la  $(k + \ell)$ -ième fonction de von Mangoldt. On pose

$$(19) \quad y_{r,\ell} = \frac{\mu(r)g_{\mathbf{h}}(r)}{t_{\mathbf{h}}(r)} \left(\ln \frac{x}{r}\right)^\ell = \mu(r) \prod_{p|r} \left(1 - \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p}\right)^{-1} \left(\ln \frac{x}{r}\right)^\ell$$

pour  $r < x$ ,  $\ell \geq 1$ ; on a pu omettre le facteur  $1/\tilde{H}$  pour simplifier, en raison de l'homogénéité des formules considérées. Les deux formes quadratiques  $Q_g$  et  $Q_p$  vont maintenant être évaluées asymptotiquement pour ce choix des variables  $y_r$  (et le choix correspondant de  $\lambda_d$ ).

Commençons par le terme « principal »  $H_p$  correspondant à  $Q_p$ .

THÉORÈME 4.5. — Soit  $h \geq 3$  un entier,  $\mathbf{h}$  un  $k$ -uplet admissible vérifiant (16),  $\ell \geq 0$  un entier. Soit

$$H_p = \sum_{d,e < x} g_{\mathbf{h}}([d,e]) \lambda_d \lambda_e = \sum_{d,e < x} \frac{\nu_{\mathbf{h}}([d,e])}{[d,e]} \lambda_d \lambda_e = \sum_r^b t_{\mathbf{h}}(r) y_r^2$$

la forme quadratique ci-dessus. Lorsque  $(\lambda_d)$  est donné par (19), on a

$$H_p(y_{r,\ell}) = \frac{(2\ell)!}{(k+2\ell)! \mathfrak{S}(\mathbf{h})} \frac{1}{(\log x)^{k+2\ell}} \left(1 + O\left(\frac{\mathfrak{S}(\mathbf{h})(\ln \ln h)}{\ln x}\right)\right),$$

pour  $x \geq 2$ , la constante implicite ne dépendant que de  $k$  et  $\ell$ .

Démonstration. — Il s'agit d'évaluer

$$(20) \quad H_p(y_{r,\ell}) = \sum_{r < x}^b t_{\mathbf{h}}(r) y_{r,\ell}^2 = \sum_{r < x}^b \frac{g_{\mathbf{h}}(r)^2}{t_{\mathbf{h}}(r)} \left(\ln \frac{x}{r}\right)^{2\ell}.$$

Pour  $\ell = 0$ , il s'agit de la moyenne d'une fonction multiplicative sur  $r < x$ , qui est un sujet bien balisé, et le facteur lisse  $(\ln x/r)^{2\ell}$  peut être traité par sommation par parties.

Plus précisément, on a pour  $r$  sans facteurs carrés

$$(21) \quad \frac{g_{\mathbf{h}}(r)^2}{t_{\mathbf{h}}(r)} = \frac{\nu_{\mathbf{h}}(r)}{r} \prod_{p|r} \left(1 - \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p}\right)^{-1} = \prod_{p|r} \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p - \nu_{\mathbf{h}}(p)}.$$

On a

$$\sum_{p < x} \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p} \ln p = k \ln x + O(1)$$

et comme  $\nu_{\mathbf{h}}(p) < p$ , on en déduit

$$\sum_{p < x} \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p - \nu_{\mathbf{h}}(p)} \ln p = k \ln x + O(1),$$

pour  $x \geq 2$ , la constante implicite dépendant de  $k$ . Cela permet d'appliquer le théorème A.2 de l'appendice ; après avoir vérifié que l'on peut prendre  $L \ll \ln \ln h$  dans (31), on termine la preuve en vérifiant que la constante  $c$  de *loc. cit.* est bien égale à  $1/\mathfrak{S}(\mathbf{h})$ .  $\square$

Passons à l'évaluation du terme principal de  $Q_g$ . Il s'agit donc de calculer

$$\sum_{i=1}^k \sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n + h_i) \left( \sum_{d|F_{\mathbf{h}}(n)} \lambda_d \right)^2,$$

et on le fait pour chaque  $i$  séparément. Pour la suite  $a_n = \Lambda(n + h_i)$ ,  $i$  fixé,  $N < n \leq 2N$ , on a (15) avec  $X = N$  ; dans le lemme 4.3, on a

$$\sum_{F_{\mathbf{h}}(\nu) \equiv 0 \pmod{p}} g_{\nu}(p) = \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p) - 1}{p - 1},$$

pour  $p$  premier (voir exemple 4.1), et donc le rôle de  $g_{\mathbf{h}}(d)$  est joué ici par

$$(22) \quad g_{\mathbf{h}}^{\sharp}(d) = \frac{1}{\varphi(d)} \prod_{p|d} (\nu_{\mathbf{h}}(p) - 1),$$

pour  $d$  sans facteurs carrés.

THÉORÈME 4.6. — Avec les notations et hypothèses ci-dessus, et avec  $H_g$  la forme quadratique du lemme 4.3 pour la suite  $a_n = \Lambda(n + h_i)$  pour  $N < n \leq 2N$ , on a

$$H_g(y_{r,\ell}) = \frac{1}{(\ell + 1)^2} \frac{(2\ell + 2)!}{(k + 2\ell + 1)!} \frac{1}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})} (\ln x)^{k+2\ell+1} \left( 1 + O\left(\frac{\mathfrak{S}(\mathbf{h})(\ln \ln h)}{\ln x}\right) \right),$$

pour  $x \geq 2$ , où la constante implicite ne dépend que de  $k$  et  $\ell$ .

*Démonstration.* — L'idée est d'appliquer le lemme 4.4 à  $H_g$ , et d'exprimer les nouvelles variables, disons  $z_r$ , qui y apparaissent, en fonction des variables  $y_r$  qui interviennent dans la diagonalisation de  $H_p$ . Cela permet d'abord d'évaluer  $z_r$ , puis ensuite  $H_g$ . Certaines simplifications viennent faciliter le travail, mais c'est essentiellement un exercice (tant que  $\mathbf{h}$  est fixé).

Tout d'abord, on a la diagonalisation

$$H_g = \sum_r^b t_{\mathbf{h}}^{\sharp}(r) z_r^2$$

avec

$$z_r = \sum_d g_{\mathbf{h}}^{\sharp}(d) \lambda_{rd} \quad \text{et} \quad t_{\mathbf{h}}^{\sharp}(r) = g_{\mathbf{h}}^{\sharp}(r) \prod_{p|r} (1 - g_{\mathbf{h}}^{\sharp}(p)).$$

D'après l'expression (17) qui fournit  $\lambda_d$  en fonction des  $y_r$ , on a donc

$$z_r = \sum_b \left( \sum_{de=b} g_{\mathbf{h}}^{\#}(d) \mu(e) g_{\mathbf{h}}(e) \right) y_{br}.$$

Pour  $b = p$ , la fonction multiplicative qui apparaît est égale à

$$g_{\mathbf{h}}^{\#}(p) - g_{\mathbf{h}}(p) = \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p) - 1}{p - 1} - \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p} = -\frac{p - \nu_{\mathbf{h}}(p)}{p(p - 1)}.$$

D'après (19) on trouve pour  $(y_r) = (y_{r,\ell})$  :

$$z_r = \sum_{b < x/r} \frac{\mu(b)}{\varphi(b)} \prod_{p|b} \left( 1 - \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p} \right) \frac{\mu(br) g_{\mathbf{h}}(br)}{t_{\mathbf{h}}(br)} \left( \ln \frac{x}{br} \right)^{\ell}.$$

Les termes qui contribuent vérifient  $(b, r) = 1$ , ce qui permet de séparer le produit  $br$ . En utilisant (18) on trouve

$$z_r = \frac{\mu(r) g_{\mathbf{h}}(r)}{t_{\mathbf{h}}(r)} \sum_{\substack{b < x/r \\ (r,b)=1}} \frac{1}{\varphi(b)} \left( \ln \frac{x}{br} \right)^{\ell}.$$

Une application très simple du théorème A.2 (avec  $\kappa = 1$ ) donne

$$z_r = \frac{1}{\ell + 1} \frac{\mu(r) g_{\mathbf{h}}(r)}{t_{\mathbf{h}}(r)} \frac{\varphi(r)}{r} \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{\ell+1} + O\left( (\ln \ln r) \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{\ell} \right).$$

Le calcul de  $H_g(y_{r,\ell})$  est de nouveau une application de ce même résultat. On a

$$t_{\mathbf{h}}^{\#}(r) z_r^2 = \frac{1}{(\ell + 1)^2} t_{\mathbf{h}}^{\#}(r) \frac{g_{\mathbf{h}}(r)^2}{t_{\mathbf{h}}(r)^2} \left( \frac{\varphi(r)}{r} \right)^2 \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{2\ell+2} + (\text{reste}).$$

Pour  $r = p$  premier, il vient

$$\begin{aligned} t_{\mathbf{h}}^{\#}(p) \frac{g_{\mathbf{h}}(p)^2}{t_{\mathbf{h}}(p)^2} \left( \frac{\varphi(p)}{p} \right)^2 &= \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p) - 1}{p - 1} \left( 1 - \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p) - 1}{p - 1} \right) \left( 1 - \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p)}{p} \right)^{-2} \left( \frac{p - 1}{p} \right)^2 \\ &= \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p) - 1}{p - \nu_{\mathbf{h}}(p)}. \end{aligned}$$

Le théorème A.1 (avec  $\kappa = k - 1$  maintenant) et de nouvelles estimations, longues mais élémentaires, de la contribution du reste donnent

$$H_g(y_{r,\ell}) = \frac{1}{(\ell + 1)^2} \frac{(2\ell + 2)!}{(k + 2\ell + 1)!} \frac{1}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})} (\ln x)^{k+2\ell+1} \left( 1 + O\left( \frac{\mathfrak{S}(\mathbf{h})(\ln \ln h)}{\ln x} \right) \right),$$

car la constante  $c$  de *loc. cit.* est (encore !)

$$(23) \quad c = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{k-1} \left( 1 + \frac{\nu_{\mathbf{h}}(p) - 1}{p - \nu_{\mathbf{h}}(p)} \right) = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{k-1} \frac{p - 1}{p - \nu_{\mathbf{h}}(p)} = \frac{1}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})}.$$

□

Pour être prêt à démontrer le théorème 1.2, il ne reste qu'à contrôler les termes de reste provenant du lemme 4.3. On suppose pour cela que  $\mathcal{A}$  s'obtient par « localisation dyadique » d'une suite infinie  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire que pour une suite  $\mathbf{A} = (a_n)$  vérifiant (4), on pose  $\mathcal{A} = (a_n)_{N < n \leq 2N}$  pour un certain  $N \geq 1$ . On écrit alors (15) avec les choix « évidents » des paramètres, provenant de (4), en particulier :

$$(24) \quad r_d(\mathcal{A}, t) = r_d(\mathcal{A}; 2N, t) - r_d(\mathcal{A}; N, t).$$

LEMME 4.7. — Soit  $\mathbf{h}$  un  $k$ -uplet. Soit  $\mathbf{A} = (a_n)$  une suite de réels positifs telle que  $\mathbf{A}$  ait un  $P$ -exposant de répartition  $\geq \theta$ , par exemple telle que  $\mathbf{A}$  ait un exposant de répartition au sens fort  $\geq \theta$ . Supposons de plus que  $(\lambda_d)$  vérifie

$$(25) \quad |\lambda_d| \leq \tau(d)^{C_1} (\ln 2x)^{C_2}$$

pour tout  $d < x$ , et que

$$(26) \quad |r_d(\mathbf{A}; N, \nu)| \leq d^{-1} \tau(d)^{C_3} N (\ln 2N)^{C_4}$$

pour  $N \geq 1$ ,  $d$  sans facteurs carrés et  $\nu$  modulo  $d$ ,  $C_1, \dots, C_4$  étant des constantes  $\geq 0$ .

Alors pour  $\mathcal{A} = (a_n)_{N < n \leq 2N}$ , et avec  $r_d(\mathcal{A}, t)$  défini comme ci-dessus, on a

$$R = \sum_{d, e < x} \lambda_d \lambda_e R_{[d, e]}(\mathcal{A}, \mathbf{h}) \ll N (\ln N)^{-A}$$

pour tout  $x \geq 2$  tel que  $x^2 < N^{\theta - \varepsilon}$  avec  $\varepsilon > 0$ , et tout  $A \geq 1$ . La constante implicite dépend de  $(\mathbf{A}, \varepsilon, A, C_1, C_2, C_3, C_4)$ .

Démonstration. — On a

$$|R| \leq \sum_{d < x^2}^b \tau_x(d) \sum_{\substack{\nu \pmod{d} \\ F_{\mathbf{h}}(\nu) = 0}} |r_d(\mathcal{A}, \nu)|$$

où

$$(27) \quad \tau_x(d) = \sum_{[a, b] = d} |\lambda_a \lambda_b| \ll \tau(d)^{2+2C_1} (\ln 2x)^{2C_2}.$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$|R|^2 \leq \left( \sum_{d < x^2}^b \tau_x(d)^2 \sum_{\substack{\nu \pmod{d} \\ F_{\mathbf{h}}(\nu) = 0}} |r_d(\mathcal{A}, \nu)| \right) \left( \sum_{d < x^2}^b \sum_{\substack{\nu \pmod{d} \\ F_{\mathbf{h}}(\nu) = 0}} |r_d(\mathcal{A}, \nu)| \right).$$

On borne  $|r_d(\mathcal{A}, \nu)|$  à l'aide de (24) ; pour le premier facteur, on applique (26) et (27) ; la somme avec des fonctions diviseurs et des logarithmes fait « perdre » un facteur de type  $(\ln N)^{C_5}$  avec  $C_5$  une constante assez grande. L'hypothèse  $x^2 < N^{\theta - \varepsilon}$  permet d'appliquer au second facteur la borne (5) définissant le  $P$ -exposant de répartition, et cette puissance de logarithme égarée est « récupérée » avec toute la marge nécessaire.  $\square$

Noter que (26) n'est pas une condition onéreuse ; par exemple si  $g_\nu(p) \leq kp^{-1}$  et  $a_n$  est bornée par une puissance de logarithme, elle sera aussitôt vérifiée. De même pour l'estimation individuelle (25). Pour les  $\lambda_d$  discutés précédemment, on a

LEMME 4.8. — Soit  $\mathbf{h}$  un  $k$ -uplet admissible,  $\ell \geq 0$  et  $(\lambda_d)$  donné par (19) et (17) pour  $d < x$ . On a alors

$$\lambda_d \ll \frac{1}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})} (\ln x)^{k+\ell}$$

pour tout  $x \geq 2$  et  $d \geq 2$  sans facteurs carrés, la constante implicite ne dépendant que de  $k$  et  $\ell$ .

Voir [11, Lemma 9] ; pour  $\mathbf{h}$  fixé, c'est à peu près évident.

Les lecteurs sont encouragés à passer à la section suivante où les résultats ci-dessus sont appliqués à la preuve du théorème 1.2. Mais pour celle (inconditionnelle) du théorème 1.1, un ingrédient supplémentaire similaire à ce qui précède est requis ; il s'agit de considérer la forme quadratique (14) avec  $a_n = \Lambda(n + j)$  pour  $N < n \leq 2N$  et  $j \geq 0$ , mais cette fois sous l'hypothèse que  $j$  n'est pas une composante de  $\mathbf{h}$ . On note  $Q_i$  cette somme. Comme il s'agit de la même suite  $a_n$  que pour  $Q_g$  on a la même forme de (15) que dans ce cas. On écrit donc

$$Q_i = NH_i + R_i$$

selon le lemme 4.3. Si l'on note  $\mathbf{j}$  le  $(k + 1)$ -uplet  $(\mathbf{h}, j)$ , on s'aperçoit alors que  $H_i$  est donnée par

$$H_i = \sum_{d, e < x} g_{\mathbf{j}}^\sharp([d, e]) \lambda_d \lambda_e,$$

où la fonction  $d \mapsto g_{\mathbf{j}}^\sharp(d)$  est définie par (22), pour  $\mathbf{j}$  au lieu de  $\mathbf{h}$ .

THÉORÈME 4.9. — Soient  $h \geq 3$ ,  $\mathbf{h}$  un  $k$ -uplet admissible,  $j \geq 0$  un entier qui n'est pas une composante de  $h$  tel que  $\mathbf{j} = (\mathbf{h}, j)$  soit admissible et vérifie (16). Soient  $\ell \geq 1$  un entier et  $(\lambda_d)$  donné par (19), appliqué à  $\mathbf{h}$  toujours. On a alors

$$H_i(y_{r, \ell}) = \frac{(2\ell)!}{(k + 2\ell)!} \frac{\mathfrak{S}(\mathbf{j})}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})^2} (\ln x)^{k+2\ell} \left( 1 + O\left(\frac{\mathfrak{S}(\mathbf{h})(\ln \ln h)}{\ln x}\right) \right),$$

pour  $x \geq 2$ , la constante implicite ne dépendant que de  $k$  et  $\ell$ .

Démonstration. — Formellement, cela ressemble beaucoup à ce qui précède. Le lemme 4.4 permet de diagonaliser

$$H_i = \sum_r^b t_{\mathbf{j}}^\sharp(r) w_r^2$$

avec

$$w_r = \sum_d g_{\mathbf{j}}^\sharp(d) \lambda_{rd} = \sum_b \left( \sum_{de=b} g_{\mathbf{j}}^\sharp(d) \mu(e) g_{\mathbf{h}}(d) \right) y_{br}.$$

En insérant la valeur de  $y_{r,\ell}$ , on trouve

$$w_r = \frac{\mu(r)g_{\mathbf{h}}(r)}{t_{\mathbf{h}}(r)} \sum_{\substack{b < x/r \\ (r,b)=1}} \frac{\mu(b)g_{\mathbf{h}}(b)}{t_{\mathbf{h}}(b)} \left( \sum_{d=b} g_{\mathbf{j}}^{\#}(d)\mu(e)g_{\mathbf{h}}(d) \right) \left( \ln \frac{x}{br} \right)^{\ell}.$$

Le point où le calcul diffère du précédent est que la série

$$\sum_{\substack{b \geq 1 \\ (r,b)=1}} \frac{\mu(b)g_{\mathbf{h}}(b)}{t_{\mathbf{h}}(b)} \left( \sum_{d=b} g_{\mathbf{j}}^{\#}(d)\mu(e)g_{\mathbf{h}}(d) \right)$$

converge; en effet, en calculant formellement (puis en justifiant sans peine), elle est égale à

$$\prod_{p \nmid r} \left( 1 - \frac{1}{1 - g_{\mathbf{h}}(p)} (g_{\mathbf{j}}^{\#}(p) - g_{\mathbf{h}}(p)) \right) = \prod_{p \nmid r} \frac{1 - g_{\mathbf{j}}^{\#}(p)}{1 - g_{\mathbf{h}}(p)},$$

dont la convergence provient du fait que  $g_{\mathbf{j}}^{\#}(p)$  et  $g_{\mathbf{h}}(p)$  sont toutes deux de l'ordre de  $k/p$  en moyenne.

Il n'est pas très difficile de déduire de cela que

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{\mu(r)g_{\mathbf{h}}(r)}{t_{\mathbf{h}}(r)} \prod_{p \nmid r} \frac{1 - g_{\mathbf{j}}^{\#}(p)}{1 - g_{\mathbf{h}}(p)} \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{\ell} + (\text{reste}), \\ &= \mu(r) \prod_{p \nmid r} \frac{1}{1 - g_{\mathbf{h}}(p)} \prod_{p \nmid r} \frac{1 - g_{\mathbf{j}}^{\#}(p)}{1 - g_{\mathbf{h}}(p)} \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{\ell} + (\text{reste}), \\ &= \mu(r) \prod_{p \nmid r} (1 - g_{\mathbf{j}}^{\#}(p))^{-1} \frac{\mathfrak{S}(\mathbf{j})}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})} \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{\ell} + (\text{reste}) \\ &= \frac{\mu(r)g_{\mathbf{j}}^{\#}(r)}{t_{\mathbf{j}}^{\#}(r)} \frac{\mathfrak{S}(\mathbf{j})}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})} \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{\ell} + (\text{reste}). \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\sum_r^b t_{\mathbf{j}}^{\#}(r)w_r^2 = \frac{\mathfrak{S}(\mathbf{j})^2}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})^2} \sum_{r < x}^b \frac{g_{\mathbf{j}}^{\#}(r)^2}{t_{\mathbf{j}}^{\#}(r)} \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{2\ell} + (\text{reste}).$$

Comme dans le théorème 4.5 (voir (20) et (21)), on a d'après le théorème A.2

$$\sum_r^b t_{\mathbf{j}}^{\#}(r)w_r^2 = \frac{\mathfrak{S}(\mathbf{j})^2}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})^2} \frac{1}{\mathfrak{S}(\mathbf{j})} \frac{(2\ell)!}{(k+2\ell)!} \left( \ln \frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} + (\text{reste})$$

(pour le calcul de la constante  $c$ , voir (23) appliqué à  $\mathbf{j}$ ), ce qui donne le résultat, au terme de reste près dont il faut s'assurer qu'il est tel que décrit (c'est relativement long mais pas du tout difficile).  $\square$

## 5. PREUVE DU THÉORÈME 1.2

Pour démontrer le théorème 1.2, il ne reste qu'à combiner les informations obtenues dans la section précédente. Fixons un  $k$ -uplet admissible  $\mathbf{h}$ , avec  $k \geq 2$ , et supposons que le  $P$ -exposant de répartition de la suite des nombres premiers (donc de ses translatées) soit  $\geq \theta$ . Prenons de plus  $\ell \geq 1$ .

Pour  $x = N^\beta$  avec  $2\beta < \theta - \varepsilon$ , la combinaison des théorèmes 4.5 et 4.6 (appliqué pour chaque  $\Lambda(n + h_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ ) et du lemme 4.7 permet d'affirmer qu'il existe  $(\lambda_d)$  tels que les formes quadratiques  $Q_g$  et  $Q_p$  définies par (12) et (13) vérifient

$$Q_p = \frac{(2\ell)!}{(k+2\ell)!} \frac{\beta^{k+2\ell}}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})} N(\ln N)^{k+2\ell+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln N}\right)\right),$$

$$Q_g = \frac{k}{(\ell+1)^2} \frac{(2\ell+2)!}{(k+2\ell+1)!} \frac{\beta^{k+2\ell+1}}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})} N(\ln N)^{k+2\ell+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln N}\right)\right)$$

pour tout  $N \geq 2$ , les constantes implicites dépendant ici de  $k$  et  $\mathbf{h}$ . Donc

$$(28) \quad Q_g - Q_p \geq \frac{1}{2} \left\{ \frac{2k\beta(2\ell+1)}{(\ell+1)(k+2\ell+1)} - 1 \right\} \frac{\beta^{k+2\ell}}{\mathfrak{S}(\mathbf{h})} \frac{(2\ell)!}{(k+2\ell)!} N(\ln N)^{k+2\ell+1},$$

pour  $N$  assez grand.

Déjà lorsque  $k = 7$ ,  $\ell = 1$ , le terme de droite est  $> 0$  si  $2\beta > 20/21$ , ce qui démontre que la conjecture d'Elliott-Halberstam implique que pour tout 7-uplet admissible  $\mathbf{h}$ , il existe une infinité de  $n$  tels que  $n \triangleleft \mathbf{h}$ . Puisque  $\mathbf{h} = (11, 13, 17, 19, 23, 29, 31)$  est admissible, on a<sup>(21)</sup>  $\liminf \gamma(n) \leq 20$ . Pour obtenir la première partie du théorème 1.2 (où 16 remplace 20), une astuce supplémentaire est requise (on crée une combinaison des cas  $\ell = 0$  et  $\ell = 1$ ); voir [11, p. 44]. Noter aussi que  $\ell = 0$  est toujours insuffisant.

De plus la fraction rationnelle entre accolades dans (28) tend vers  $2\theta - 1$  si  $k, \ell \rightarrow +\infty$  avec  $\ell = o(k)$  (par exemple,  $\ell = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ ). Si  $\theta > 1/2$ , on peut choisir  $k$  et  $\ell$  tels que  $Q_g > Q_p$  pour tout  $N$  assez grand, ce qui démontre la première partie du théorème 1.2<sup>(22)</sup>.

## 6. PREUVE DU THÉORÈME 1.1

Inconditionnellement, on peut appliquer (28) pour tout  $\beta < 1/4$ , mais on échoue alors tout juste. Il faut une autre idée, pas du tout évidente non plus, pour passer la difficulté. Il s'agit de donner un petit coup de pouce à  $Q_g$  en rajoutant les sommes du type

$$Q_i = \sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n+j) \left( \sum_{d|F_{\mathbf{h}}(n)} \lambda_d \right)^2$$

<sup>(21)</sup>On doit aussi remarquer que la contribution à  $Q_g - Q_p$  des puissances de nombres premiers également détectées par  $\vartheta_{\mathbf{h}}(n)$  est  $\ll N^{1/2+\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

<sup>(22)</sup>Même remarque que ci-dessus.



considérées à la fin de la section 4, où cette fois  $j$  n'apparaît pas dans  $\mathbf{h}$ . Il n'y a aucune corrélation alors à espérer entre le fait que  $n + j$  soit premier et que  $F_{\mathbf{h}}(n)$  soit presque premier ; cela signifie, comme on l'a constaté, que le terme principal dans  $Q_i$  est plus petit par un facteur logarithmique de celui dans  $Q_g$ . Mais toute somme de type  $Q_i$  apporte une contribution « infinitésimale » telle que la combinaison d'un grand nombre d'entre elles finit par faire déborder le vase...

Voici le fonctionnement précis de cette idée. On considère  $h \geq 1$  et on pose

$$\vartheta'(n, h) = \sum_{1 \leq j \leq h} \Lambda(n + j),$$

puis on définit les quantités

$$Q'_g = \frac{1}{h^k} \sum_{\substack{\mathbf{h}=(h_1, \dots, h_k) \\ h_i \leq h}}^* \sum_{N < n \leq 2n} \vartheta'(n, h) \left( \sum_{d|F_{\mathbf{h}}(n)} \lambda_{d, \mathbf{h}} \right)^2,$$

$$Q'_p = \frac{(\ln 3N)}{h^k} \sum_{\substack{\mathbf{h}=(h_1, \dots, h_k) \\ h_i \leq h}}^* \sum_{N < n \leq 2N} \left( \sum_{d|F_{\mathbf{h}}(n)} \lambda_{d, \mathbf{h}} \right)^2,$$

le symbole  $\sum^*$  signifiant que la somme est restreinte aux  $k$ -uplets admissibles. Noter que l'on peut s'autoriser à choisir des coefficients dépendant de  $\mathbf{h}$ , ce qui est important puisque ceux définis dans la section précédente en dépendent effectivement. Précisément, pour tout  $\mathbf{h}$  on va prendre

$$(29) \quad \lambda_{d, \mathbf{h}} = \mathfrak{S}(\mathbf{h}) \lambda_d$$

où  $\lambda_d$  est donné par (17) et (19) ; l'insertion du facteur  $\mathfrak{S}(\mathbf{h})$  permet par homogénéité de simplifier la moyenne sur  $\mathbf{h}$  en la ramenant à celle considérée par Gallagher (Proposition 2.9).

On note encore que si  $Q'_g > Q'_p$ , il existe  $n$  tel que  $\vartheta'(n, h) > \ln 2N$ , et alors (si  $h \leq N$ ) il existe deux (puissances de) nombres premiers  $p < p'$ ,  $N < p \leq 2N$ , tels que  $p' - p \leq h$ .

THÉORÈME 6.1. — Soient  $h \geq 1$ ,  $k \geq 1$  et  $\ell \geq 1$  des entiers. Pour chaque  $\mathbf{h}$ , soit  $\lambda_{d, \mathbf{h}}$  défini par (29). On a alors pour tout  $\varepsilon > 0$

$$Q'_p = \frac{(2\ell)!}{(k+2\ell)!} N (\ln x)^{k+2\ell} (\ln 3N) S(h, k) + O(N (\ln x)^{k+2\ell-1+\varepsilon})$$

et

$$Q'_g = \frac{(2\ell)!}{(k+2\ell)!} N (\ln x)^{k+2\ell+1} \left\{ \frac{2kS(h, k)}{(\ell+1)(k+2\ell+1)} + \frac{hS(h, k+1)}{\ln x} \right\} + O(N (\ln x)^{k+2\ell+\varepsilon})$$

où  $S(h, k)$  est défini par (8), pour tout  $N \geq 2$ ,  $x \geq 2$  tel que  $h \leq \ln x \leq \ln N$ , la constante implicite dépendant de  $k$ ,  $\ell$  et  $\varepsilon$  seulement.

*Démonstration.* — Le calcul de chaque terme dans  $Q'_p$  provient directement du théorème 4.5; la somme sur  $\mathbf{h}$  fait apparaître exactement le terme  $S(h, k)$  d'après sa définition.

Si l'on développe  $\vartheta'(n, h)$  dans  $Q'_g$ , la contribution de chacun des  $k$ -uplets  $\mathbf{h}$  dans lesquels  $j$  apparaît est donnée par le théorème 4.6, et il apparaît le coefficient

$$\frac{1}{h^k} \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\mathbf{h}=(h_1, \dots, h_k) \\ 1 \leq h_i \leq h \\ h_i \neq j}}^* \mathfrak{S}(\mathbf{h}) = kS(h, k)$$

en inversant l'ordre de sommation.

La dernière contribution est celle des  $k$ -uplets  $\mathbf{h}$  et des  $j$  tels que  $j$  n'apparaît pas dans  $\mathbf{h}$ . Chaque terme relève du théorème 4.9, et il apparaît le facteur

$$\frac{1}{h^k} \sum_{1 \leq j \leq k} \sum_{\substack{\mathbf{h}=(h_1, \dots, h_k) \\ j \neq h_i \leq h}}^* \mathfrak{S}(\mathbf{h}, j) = \frac{1}{h^k} \sum_{\substack{\mathbf{j}=(h_1, \dots, h_k, h_{k+1}) \\ h_i \leq h}}^* \mathfrak{S}(\mathbf{j}) = S(h, k + 1). \quad \square$$

On conclut alors de la manière suivante : en faisant la différence de  $Q'_g - Q'_p$  avec  $x = N^\beta$  le terme principal est maintenant

$$\Xi - \frac{(2\ell)!}{(k + 2\ell)!} \beta^{k+2\ell} N (\ln N)^{k+2\ell+1},$$

où

$$\Xi = \frac{2k\beta(2\ell + 1)S(h, k)}{(\ell + 1)(k + 2\ell + 1)} + \frac{hS(h, k + 1)}{\ln N} - 1.$$

Puisque pour  $k$  fixé on a  $S(h, k) \rightarrow 1$  et  $S(h, k + 1) \rightarrow 1$ , d'après le résultat de Gallagher (Proposition 2.9), on a approximativement<sup>(23)</sup>

$$\Xi \approx \Xi' = \frac{2k\beta(2\ell + 1)}{(\ell + 1)(k + 2\ell + 1)} + \frac{h}{\ln N} - 1,$$

et lorsque  $h$  est grand, cela montre qu'on a gagné un facteur  $h/\ln N$  par rapport au cas précédent (voir (28)). Puisque ce dernier argument échouait tout juste, il suffit que  $h/\ln N$  soit strictement positif pour tout  $N$  assez grand (mais éventuellement arbitrairement petit) pour pouvoir conclure.

Précisément, fixons  $\delta > 0$  arbitrairement petit et posons  $h = \delta \ln N$ , pour  $N \geq \exp(\delta^{-1})$ . La limite de  $\Xi'$  quand  $k, \ell \rightarrow +\infty$  avec  $\ell^2 \leq k$  est alors égale à  $4\beta - 1 + \delta$ . On peut trouver  $\beta < 1/4$  tel que  $4\beta + \delta > 1$  et, cela fait, il existe  $k$  et  $\ell$  (dépendant seulement de  $\delta$  et  $\beta$ ) tels que  $\Xi' > 0$  pour tout  $N$  suffisamment grand ( $N$  est maintenant la seule variable). On en déduit par la proposition 2.9 que  $\Xi > 0$  également pour tout  $N$  assez grand puisque  $h \rightarrow +\infty$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

---

<sup>(23)</sup>Le symbole  $\approx$  est heuristique seulement.

Faisant finalement appel au théorème de Bombieri-Vinogradov pour estimer comme précédemment les termes de reste, on peut donc conclure que, pour tout  $N$  assez grand, on a

$$Q'_g - Q'_p \geq \frac{1}{2} \Xi \frac{(2\ell)!}{(k+2\ell)!} \beta^{k+2\ell} N (\ln N)^{k+2\ell+1} > 0.$$

Par conséquent, il existe une infinité d'entiers tels que  $\gamma(n) \leq h \leq \delta \ln N$ , ce qui signifie que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(n)}{\ln n} \leq \delta.$$

Finalement, le théorème 1.1 est obtenu puisque  $\delta$  est arbitrairement petit.

*Remarque 6.2.* — Il est à remarquer que dans cette preuve *l'uniformité* des estimations de  $Q'_p$  et  $Q'_g$  par rapport au  $k$ -uplet  $\mathbf{h}$  est absolument essentielle.

## 7. AUTRES RÉSULTATS

La méthode utilisée par Goldston, Pintz et Yıldırım est robuste et a un fort potentiel d'applications au-delà de la preuve des théorèmes 1.1 et 1.2. Nous allons ici simplement mentionner quelques-uns des résultats annoncés, référant aux prépublications disponibles et à venir pour plus de détails.

En premier lieu, dans [11], Goldston, Graham, Pintz et Yıldırım démontrent que l'exposant de répartition  $1/2$  n'est pas nécessairement une barrière intrinsèque : concernant les écarts entre entiers  $n = p_1 p_2$  avec  $p_i$  des nombres premiers distincts<sup>(24)</sup>, ils démontrent :

THÉORÈME 7.1. — *Soient*

$$e_1 = 6 < e_2 = 10 < e_3 = 15 < \dots < e_{278} = 7 \cdot 137 < \dots < e_n < \dots$$

*la suite des entiers qui sont produits de deux facteurs premiers distincts. Alors on a*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (e_{n+1} - e_n) \leq 26 < +\infty.$$

Pour mettre ce résultat en contexte, on peut remarquer que la suite  $(e_n)$  est plus dense que celle des nombres premiers : on a

$$e_n \sim \frac{n \ln n}{\ln \ln n} \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

<sup>(24)</sup> À ne pas confondre avec les nombres «  $P_2$  » du crible classique, qui *incluent* les nombres premiers et leurs carrés.

ce qui suggère que l'espacement entre les  $e_n$  est généralement moindre qu'entre nombres premiers<sup>(25)</sup>. Pour ce théorème, l'analogie du théorème de Bombieri-Vinogradov pour la répartition des  $e_n$  dans les progressions arithmétiques est suffisant.

Le résultat suivant est annoncé dans [11] et [14] :

THÉORÈME 7.2. — *On a*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(n)}{\sqrt{\ln n} (\ln \ln n)^2} < +\infty.$$

Au vu de la preuve du théorème 1.1, il est naturel d'essayer d'obtenir un tel raffinement, car tous les paramètres disponibles n'ont pas été employés optimalement ; autrement dit, il s'agit de préciser toutes les estimations pour les rendre *uniformes par rapport à  $k$* . Il s'agit d'une tâche extrêmement délicate, et nous n'en dirons pas plus.

Finalement, il est naturel de s'enquérir des espacements  $\gamma_r(n) = p_{n+r} - p_n$  pour tout  $r \geq 1$ . La méthode, avec des adaptations, fournit des résultats, mais pas l'analogie du théorème 1.1. Goldston, Pintz et Yıldırım [14] démontrent :

THÉORÈME 7.3. — *Soit  $\theta \geq 0$  tel que la suite  $(\Lambda(n))$  ait un exposant de répartition  $\geq \theta$  ; alors on a*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_r(n)}{\ln n} \leq (\sqrt{r} - \sqrt{2\theta})^2,$$

pour  $r \geq 1$ , et en particulier

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_r(n)}{\ln n} \leq (\sqrt{r} - 1)^2.$$

Pour  $r \geq 11$ , ce n'est cependant pas le meilleur résultat connu, qui est

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_r(n)}{\ln n} \leq e^{-\gamma} \left( r - \frac{\sqrt{r}}{2} \right)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler. Ce résultat de J. Sivak [23] est basé sur la combinaison de la méthode de Goldston-Yıldırım et de celle de Maier qui fournit des intervalles (clairement) d'entiers contenant plus de nombres premiers qu'attendu. Goldston, Pintz et Yıldırım [14] ont annoncé pouvoir incorporer les idées de Maier à leurs arguments, ce qui devrait mener à

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_r(n)}{\ln n} \leq e^{-\gamma} (\sqrt{r} - 1)^2.$$

<sup>(25)</sup>Toujours afin de préciser le contexte, rappelons que la plupart des nombres  $P_2$  obtenus par les méthodes de crible vérifient une propriété additionnelle plus forte : ils n'ont « pas de petits facteurs premiers », ce qui ramène leur densité moyenne à celle des nombres premiers.

## 8. QUEL EST L'EXPOSANT DE RÉPARTITION DES NOMBRES PREMIERS ?

Dès la preuve du théorème de Bombieri-Vinogradov et de ses généralisations à d'autres suites, l'importance potentielle d'une amélioration de l'exposant de répartition d'une suite au-delà de la limite du grand crible avait été reconnue. Depuis environ 1980 (le premier exemple est l'article [8] de Fouvry et Iwaniec, puis la thèse d'É. Fouvry est une étape importante), la recherche de telles améliorations pour diverses suites naturelles a fait l'objet d'un effort concerté de grande ampleur de la part essentiellement de Fouvry, Iwaniec, Friedlander et Bombieri.

Au vu du théorème 1.2, la question se pose de nouveau de manière particulièrement brûlante, et nous allons faire ici rapidement un survol de ce qui est connu concernant ce problème.

La première remarque essentielle est de bien distinguer entre exposant de répartition *au sens faible* et *au sens fort* (ce n'est pas toujours le cas dans la littérature). En effet, rappelons que pour un problème de crible classique, c'est l'exposant de répartition au sens faible qui intervient naturellement, alors que pour la méthode de Goldston, Pintz et Yıldırım, il ne peut suffire.

Dans le cas important des nombres premiers, bien que l'exposant au sens fort soit celui le plus discuté dans la littérature, la notion de  $P$ -exposant de répartition mérite peut-être l'attention car, en limitant le problème d'uniformité à un ensemble de classes modulo  $q$  assez spécial – et, en particulier, de taille raisonnable puisque de l'ordre de  $(\ln q)^{k-1}$  en moyenne –, il ne paraît pas impossible qu'il soit plus accessible.

Voici déjà quelques bonnes raisons de croire que l'exposant de répartition des nombres premiers puisse être  $> 1/2$  :

– D'une part, l'exposant  $1/2$  découle, comme on l'a dit, de l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour les fonctions  $L$  de Dirichlet *de manière triviale* : on part d'une « formule explicite » (voir par exemple [18, 5.66]) telle que

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + \frac{\sqrt{x}}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(a) \sum_{|\gamma_\chi| \leq T} \frac{x^{i\gamma_\chi}}{\frac{1}{2} + i\gamma_\chi} + O\left(\frac{x(\ln qx)^2}{T}\right),$$

pour  $1 \leq T \leq x \leq X$ ,  $q \geq 1$ , la constante implicite étant absolue ( $\frac{1}{2} + i\gamma_\chi$  parcourt les zéros non triviaux de  $L(\chi, s)$ ), et on estime « trivialement » la somme sur les zéros avec  $T = x$ . Il ne semble pas déraisonnable de penser que la somme sur  $\chi$  donne lieu à des compensations significatives permettant d'obtenir un exposant de répartition des nombres premiers  $> 1/2$  <sup>(26)</sup>.

– À l'heure actuelle, le premier point relève du « wishful thinking ». Il semble beaucoup plus convaincant à l'auteur qu'il soit *connu* (essentiellement) que l'exposant

<sup>(26)</sup>Dans le monde des fonctions  $L$  sur les corps finis, des résultats (relativement) similaires sont connus.

de répartition *au sens faible* de la suite des nombres premiers est  $> 1/2$ . Précisément, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 8.1. — *Il existe  $\theta_0 > 1/2$  tel que pour tout  $X \geq 2$ , tout  $x \leq X$ , tout  $A > 0$  et tout  $B > 0$  on ait*

$$\sum_{\substack{d \leq D \\ (a,d)=1}} \gamma_d \left\{ \psi(x; d, a) - \frac{x}{\varphi(d)} \right\} \ll \frac{X}{(\ln X)^A}$$

*uniformément pour tout  $D \leq X^{\theta_0 - \varepsilon}$  avec  $\varepsilon > 0$ , tout  $a$  tel que  $1 \leq |a| \leq (\ln X)^B$ , et toute fonction arithmétique bien factorisable  $\gamma_d$  de niveau  $D$  et d'ordre fixé. La constante implicite dépend au plus de  $A$ ,  $B$  et  $\varepsilon$ .*

Avec  $\theta_0 = 9/17$ , cela est dû à Fouvry et Iwaniec, et le meilleur résultat connu,  $\theta_0 = 4/7$ , est dû à Bombieri, Friedlander et Iwaniec [3]. Dans les deux cas, un ingrédient crucial est la théorie spectrale des formes automorphes et ses applications à l'estimation des sommes de sommes de Kloosterman, développées par Deshouillers et Iwaniec<sup>(27)</sup>.

La notion de fonction bien factorisable<sup>(28)</sup> est due à Iwaniec ; bien que l'énoncé ne permette pas *a priori* de prendre pour  $\gamma_d$  le signe de  $\psi(x; d, a) - \frac{x}{\varphi(d)}$ , Iwaniec a démontré que ces fonctions permettent d'exprimer le terme d'erreur du crible « linéaire ». Il en résulte que cet énoncé est – du point de vue des applications usuelles – équivalent à dire que l'exposant de répartition au sens faible (pour  $a$  fixé) est  $\geq \theta_0 > 1/2$ .

Voici une liste (sans doute incomplète) de fonctions dont l'exposant de répartition  $\theta$  au sens faible est  $> 1/2$ . Un survol du crible qui met en valeur cet aspect et ses applications a été écrit par Fouvry [7], auquel nous renvoyons pour les références.

- Pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, la fonction caractéristique des  $n \geq 1$  tels que  $p \mid n$  implique  $p > n^{1/6 - \varepsilon}$  (Fouvry).
- La multiplicité de représentation de  $n$  sous la forme  $n = a^2 + b^2$ ,  $a$  appartenant à n'importe quelle suite d'entiers « assez dense » (Fouvry et Iwaniec) ou  $n = a^2 + b^4$  (Friedlander et Iwaniec) ; ici l'exposant de répartition au sens faible est optimal.
- La multiplicité de représentation de  $n$  sous la forme  $n = a^3 + 2b^3$  (Heath-Brown).

Concernant l'exposant de répartition au sens fort, on a :

- La fonction diviseur  $\tau(n)$ , avec  $\theta \geq 2/3$  (Selberg, Linnik, Hooley)<sup>(29)</sup>.

<sup>(27)</sup>L'uniformité pour  $|a| \leq (\ln X)^B$  n'est pas énoncée explicitement. Il est aussi possible de remplacer la classe fixée  $a$  par la classe racine d'une équation linéaire donnée  $ma + n = 0 \pmod{d}$ , où  $m \geq 1$  et  $n$  est un entier tel que  $(m, n) = 1$  ; cela peut se voir comme un premier pas vers un  $P$ -exposant de répartition. Je dois ces remarques à É. Fouvry.

<sup>(28)</sup>Une fonction arithmétique  $f$  est bien factorisable de niveau  $D$  entier et d'ordre  $k$  si  $f(d) = 0$  pour  $d > D$ ,  $0 \leq f(d) \leq \tau(d)^k$ , et si pour toute factorisation  $D = D_1 D_2$ , il existe  $f_1, f_2$  d'ordre  $k$  et de niveau  $D_1$  et  $D_2$  respectivement telles que  $f = f_1 \star f_2$ .

<sup>(29)</sup>Les termes de reste sont même majorés individuellement ici.

- La fonction  $\tau_3(n)$ , nombre d'écritures  $n = abc$  avec  $a, b, c \geq 1$  (Friedlander–Iwaniec)<sup>(30)</sup>.
- Finalement, le seul (?) exemple connu de « fonction caractéristique » dont l'exposant de répartition *au sens fort* soit  $> 1/2$  est la suite  $(a_n)$ , fonction caractéristique des entiers dont la somme des chiffres en base 2 est paire, et ses variantes évidentes en d'autres bases (Fouvry–Mauduit).

## 9. QUESTIONS

Comme tout progrès significatif, les idées de Goldston, Pintz et Yıldırım soulèvent un certain nombre de nouvelles questions ; nous terminons en indiquant les plus évidentes.

- Peut-on prouver le théorème 1.2 inconditionnellement ? Ce serait un progrès spectaculaire, et cela semble moins inimaginable qu'il y a quelques mois. Une raison d'espérer est que l'essentiel de la méthode décrite jusqu'à présent se situe au niveau des « termes principaux », et ne procède à aucun travail nouveau au niveau des termes de reste dans (4). Cela semble laisser un grand potentiel.
- Conditionnellement, quelle est la limite de la méthode ? Peut-on démontrer la conjecture des nombres premiers jumeaux (sous la forme (1)) en supposant valide la conjecture d'Elliott-Halberstam ?
- La méthode peut-elle s'étendre aux écarts entre nombres premiers vérifiant des propriétés supplémentaires ? Comme cela n'a de sens que si l'on sait qu'il existe une infinité de tels nombres premiers, le cas le plus naturel est celui des  $p$  vérifiant  $p \equiv a \pmod{q}$  (avec  $q$  et  $a$  fixés) ; cela peut se traiter (c'est annoncé dans [13]) en considérant  $G_{\mathbf{h}}(n) = (qn + a + h_1) \cdots (qn + a + h_k)$  au lieu de  $F_{\mathbf{h}}(n)$ . En particulier, il ne semble pas évident *a priori* de considérer les écarts entre nombres premiers vérifiant une condition galoisienne (par exemple,  $p$  totalement scindé dans une extension galoisienne  $K/\mathbf{Q}$  fixée), ce qui serait pourtant tout à fait intéressant.

## APPENDICE A : SOMMES DE FONCTIONS MULTIPLICATIVES

Voici un des théorèmes standard permettant d'évaluer asymptotiquement une somme de fonction multiplicative.

THÉORÈME A.1. — *Soient  $g$  une fonction multiplicative positive,  $\kappa \geq 0$  un entier tel que*

$$\sum_{p < x} g(p) \ln p = \kappa \ln x + O(1).$$

---

<sup>(30)</sup>Même remarque.

Alors pour tout entier  $\ell \geq 0$  et tout  $x \geq 2$  on a

$$\sum_{d < x}^b g(d) \left( \ln \frac{x}{d} \right)^\ell = c \frac{\ell!}{(\ell + \kappa)!} (\ln x)^{\kappa + \ell} + O((\ln x)^{\ell + \kappa - 1})$$

avec

$$c = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^\kappa (1 + g(p)),$$

la constante implicite dépendant seulement de  $g$  et  $\ell$ .

Expliquons en quelques mots d'où vient la constante  $c$ , et pourquoi elle est naturelle. On peut essayer de démontrer ce résultat en procédant par intégration complexe, en écrivant

$$\sum_{d < x}^b g(d) \left( \ln \frac{x}{d} \right)^\ell = \frac{\ell!}{2i\pi} \int_{(1)} D_g^b(s) x^s \frac{ds}{s^{\ell+1}}$$

où l'intégrale complexe est prise sur la droite verticale  $\operatorname{Re}(s) = 1$  et

$$D_g^b(s) = \sum_{n \geq 1}^b g(n) n^{-s} = \prod_p (1 + g(p) p^{-s}).$$

L'hypothèse peut s'interpréter en disant que  $g(p)$  est égal à  $\kappa/p$  « en moyenne », ce qui suggère de comparer  $D_g^b(s)$  à  $\zeta(s+1)^\kappa$ , et de définir une fonction  $E_g(s)$  en posant

$$D_g^b(s) = \zeta(s+1)^\kappa E_g(s).$$

C'est effectivement possible pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ; si  $E_g(s)$  se prolonge analytiquement légèrement à gauche de  $\operatorname{Re}(s) = 0$  avec une croissance modérée, on peut déplacer le contour d'intégration vers la droite verticale  $\operatorname{Re}(s) = \delta < 0$ , faisant apparaître un pôle d'ordre  $\ell + \kappa + 1$  en  $s = 0$ . Le résidu se calcule alors facilement :

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=0} \left( \zeta(s+1)^\kappa E_g(s) \frac{x^s}{s^{\ell+1}} \right) &= \frac{1}{(\kappa + \ell)!} E_g(0) (\ln x)^{\kappa + \ell} + O((\ln x)^{\kappa + \ell - 1}) \\ &= \frac{c}{(\kappa + \ell)!} (\ln x)^{\kappa + \ell} + O((\ln x)^{\kappa + \ell - 1}), \end{aligned}$$

ce qui explique la forme du terme principal ci-dessus.

En pratique, le prolongement de  $E_g(s)$  n'est pas si évident, et il est en fait possible de démontrer l'estimation annoncée élémentairement, suivant des idées de Wirsing. Voir [18, Th. 1.1] ou [15, Lemma 5.4] pour les détails dans le cas  $\ell = 0$  et [11, p. 11–12] pour le cas général.

Terminons enfin avec une version de ce théorème uniforme par rapport à  $g$ ; elle est nécessaire pour l'uniformité des estimations par rapport à  $\mathbf{h}$  dans la section 4.

**THÉORÈME A.2.** — *Soit  $g$  une fonction multiplicative,  $\kappa \geq 0$  un entier. On note*

$$\rho(p) = \frac{g(p)}{1 + g(p)}$$



et on suppose qu'il existe  $A_1 > 0$ ,  $A_2 \geq 1$ ,  $L \geq 1$  tels que

$$(30) \quad 0 \leq g(p) \leq A_1$$

$$(31) \quad -L \leq \sum_{w < p \leq z} \rho(p) \ln p - \kappa \ln \frac{z}{w} \leq A_2.$$

Alors on a

$$\sum_{d < x}^b g(d) \left( \ln \frac{x}{d} \right)^\ell = c \frac{\ell!}{(\ell + \kappa)!} (\ln x)^{\kappa + \ell} \left\{ 1 + O\left( \frac{L}{\ln x} \right) \right\}$$

pour tout entier  $\ell \geq 0$  et tout  $x \geq 2$ , avec

$$c = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^\kappa (1 + g(p)),$$

la constante implicite dépendant seulement de  $\kappa$ ,  $\ell$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $L$ .

C'est en fait ce qui est démontré (à des changements de notation près) dans [15, Lemma 5.4] et [11, Lemma 5].

## RÉFÉRENCES

- [1] E. BOMBIERI – « On twin almost primes », *Acta Arith.* **28** (1975/76), p. 177–193, Correction, *id.*, p. 457–461.
- [2] E. BOMBIERI & H. DAVENPORT – « Small differences between prime numbers », *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **293** (1966), p. 1–18.
- [3] E. BOMBIERI, J. B. FRIEDLANDER & H. IWANIEC – « Primes in arithmetic progressions to large moduli », *Acta Math.* **156** (1986), no. 3-4, p. 203–251.
- [4] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle, Théorie élémentaire*, Hermann, Paris, 1976.
- [5] J.-M. DESHOUILERS – « Progrès récents des petits cribles arithmétiques [d'après Jing Run Chen, Henryk Iwaniec, ...] », in *Séminaire Bourbaki (1977/78)*, Lect. Notes in Math., vol. 710, Springer, Berlin, 1979, exp. no. 520, p. 248–262.
- [6] É. FOUVRY – « Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov », *Acta Math.* **152** (1984), no. 3-4, p. 219–244.
- [7] ———, « Cinquante ans de théorie analytique des nombres. Un point de vue parmi d'autres : celui des méthodes de crible », in *Development of mathematics 1950–2000*, Birkhäuser, Basel, 2000, p. 485–514.
- [8] E. FOUVRY & H. IWANIEC – « On a theorem of Bombieri-Vinogradov type », *Mathematika* **27** (1980), no. 2, p. 135–152.
- [9] P. X. GALLAGHER – « On the distribution of primes in short intervals », *Mathematika* **23** (1976), no. 1, p. 4–9.
- [10] D. A. GOLDSTON – « On Bombieri and Davenport's theorem concerning small gaps between primes », *Mathematika* **39** (1992), no. 1, p. 10–17.

- [11] D. A. GOLDSTON, S. W. GRAHAM, J. PINTZ & C. Y. YILDIRIM – « Small gaps between primes or almost primes », prépublication arXiv : [math.NT/0506067](https://arxiv.org/abs/math.NT/0506067).
- [12] D. A. GOLDSTON, Y. MOTOHASHI, J. PINTZ & C. Y. YILDIRIM – « Small gaps between primes exist », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **82** (2006), no. 4, p. 61–65.
- [13] D. A. GOLDSTON, J. PINTZ & C. Y. YILDIRIM – « The Path to Recent Progress on Small Gaps Between Primes », prépublication arXiv : [math.NT/0512436](https://arxiv.org/abs/math.NT/0512436).
- [14] ———, « Primes in tuples, I », prépublication arXiv : [math.NT/0508185](https://arxiv.org/abs/math.NT/0508185).
- [15] H. HALBERSTAM & H. RICHERT – *Sieve methods*, Academic Press, 1974.
- [16] D. HEATH-BROWN – « Almost-prime  $k$ -tuples », *Mathematika* **44** (1997), no. 2, p. 245–266.
- [17] B. HOST – « Progressions arithmétiques dans les nombres premiers », in *Sém. Bourbaki (2004/2005)*, Astérisque, vol. 307, Soc. Math. France, Paris, 2006, Exp. 944 (mars 2005).
- [18] H. IWANIEC & E. KOWALSKI – *Analytic number theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, 2004.
- [19] E. KOWALSKI – *Un cours de théorie analytique des nombres*, Cours Spécialisés, vol. 13, Soc. Math. France, Paris, 2004.
- [20] P. MICHEL – « Progrès récents du crible et applications [d’après Duke, Fouvry, Friedlander, Iwaniec] », in *Séminaire Bourbaki (1997/98)*, Astérisque, vol. 252, Soc. Math. France, Paris, 1998, Exp. no. 842, p. 185–209.
- [21] J. PINTZ & Y. MOTOHASHI – « A smoothed GPY sieve », prépublication arXiv : [math.NT/0602599](https://arxiv.org/abs/math.NT/0602599).
- [22] A. SELBERG – « Lectures on sieves », in *Collected papers II*, Springer-Verlag, Berlin, 1991, p. 65–247.
- [23] J. SIVAK – « Méthodes de crible appliquées aux sommes de Kloosterman et aux petits écarts entre nombres premiers », Thèse, Université Paris-Sud, décembre 2005.

Emmanuel KOWALSKI

Université Bordeaux I

Laboratoire d’algorithmique arithmétique  
et expérimentale (A2X)

UMR 5465 du CNRS

351, Cours de la Libération

F-33405 TALENCE

*E-mail* : [kowalski@math.u-bordeaux1.fr](mailto:kowalski@math.u-bordeaux1.fr)

## THE VERIFICATION OF THE NIRENBERG-TREVES CONJECTURE

by Nicolas LERNER

*Abstract.* — In a series of recent papers, Nils Dencker proves that condition  $(\psi)$  implies the local solvability of principal type pseudodifferential operators (with loss of  $\frac{3}{2} + \epsilon$  derivatives for all positive  $\epsilon$ ), verifying the last part of the Nirenberg-Treves conjecture, formulated in 1971. The origin of this question goes back to the Hans Lewy counterexample, published in 1957. In this text, we follow the pattern of Dencker's papers, and we provide a proof of local solvability with a loss of  $\frac{3}{2}$  derivatives.

### INTRODUCTION

**The Hans Lewy counterexample.** — In 1957, Hans Lewy stunned the mathematical world by showing that very simple and natural linear PDE could fail to have solutions. The Hans Lewy operator  $L_0$ , introduced in [30], is the following complex vector field in  $\mathbb{R}^3$

$$(0.1) \quad L_0 = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} + i(x_1 + ix_2) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

There exists  $f \in C^\infty$  such that the equation  $L_0 u = f$  has no distribution solution, even locally. This discovery came as a great shock for several reasons. First of all,  $L_0$  has a very simple expression and is natural as the Cauchy-Riemann operator on the boundary of the pseudo-convex domain

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + 2\Im z_2 < 0\}.$$

Moreover  $L_0$  is a non-vanishing vector field so that no pathological behaviour related to multiple characteristics is to be expected. In the fifties, it was certainly the conventional wisdom that any “reasonable” operator should be locally solvable, and obviously (0.1) was indeed very reasonable, so the conclusion was that the CW should be revisited<sup>(1)</sup>. One of the questions posed by such a counterexample was to find some geometric explanation for this phenomenon. This was done in 1960 by L. Hörmander

---

<sup>(1)</sup>Gaston Bachelard did not use the words conventional wisdom, but wrote in [1] “La science, dans son besoin d’achèvement comme dans son principe, s’oppose absolument à l’opinion. S’il lui arrive, sur un point particulier, de légitimer l’opinion, c’est pour d’autres raisons que celles qui fondent l’opinion ; de sorte que l’opinion a, en droit, toujours tort. L’opinion pense mal ; elle ne pense pas : elle traduit des besoins en connaissances. En désignant les objets par leur utilité, elle s’interdit de les connaître.”

in [15] who proved that if  $p$  is the symbol of a differential operator such that, at some point  $(x, \xi)$  in the cotangent bundle,

$$(0.2) \quad p(x, \xi) = 0 \quad \text{and} \quad \{\Re p, \Im p\}(x, \xi) > 0,$$

then the operator  $P$  with principal symbol  $p$  is not locally solvable at  $x$ ; in fact, there exists  $f \in C^\infty$  such that, for any neighborhood  $V$  of  $x$  the equation  $Pu = f$  has no solution  $u \in \mathcal{D}'(V)$ . Of course, in the case of differential operators, the sign  $> 0$  in (0.2) can be replaced by  $\neq 0$  since the Poisson bracket  $\{\Re p, \Im p\}$  is then an homogeneous polynomial with odd degree in the variable  $\xi$ . Nevertheless, it appeared later (in [16]) that the same statement is true for pseudodifferential operators, so we keep it that way. Since the symbol of  $-iL_0$  is  $\xi_1 - x_2\xi_3 + i(\xi_2 + x_1\xi_3)$ , and the Poisson bracket  $\{\xi_1 - x_2\xi_3, \xi_2 + x_1\xi_3\} = 2\xi_3$ , the assumption (0.2) is fulfilled for  $L_0$  at any point  $x$  in the base and the nonsolvability property follows. This gives a necessary condition for local solvability of pseudodifferential equations: a locally solvable operator  $P$  with principal symbol  $p$  must satisfy

$$(0.3) \quad \{\Re p, \Im p\}(x, \xi) \leq 0 \quad \text{at} \quad p(x, \xi) = 0.$$

Naturally, condition (0.3) is far from being sufficient for solvability (see e.g. the nonsolvable  $M_3$  below in (0.4)). After the papers [30], [15], the curiosity of the mathematical community was aroused in search of a geometric condition on the principal symbol, characterizing local solvability of principal type operators. It is important to note that for principal type operators with a real principal symbol, such as a non-vanishing real vector field, or the wave equation, local solvability was known after the 1955 paper of L. Hörmander [14]. In fact these results extend quite easily to the pseudodifferential real principal type case. As shown by the Hans Lewy counterexample and the necessary condition (0.3), the matters are quite different for complex-valued symbols.

**Some examples.** — It is certainly helpful to take a look now at some simple models. For  $t, x \in \mathbb{R}$ , with the usual notations

$$D_t = -i\partial_t, \quad (\widehat{|D_x|u})(\xi) = |\xi|\hat{u}(\xi),$$

where  $\hat{u}$  is the  $x$ -Fourier transform of  $u$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , let us consider the operators defined by

$$(0.4) \quad M_l = D_t + it^l D_x, \quad N_l = D_t + it^l |D_x|.$$

It is indeed rather easy to prove that, for  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M_{2k}, N_{2k}, N_{2k+1}^*$  are solvable whereas  $M_{2k+1}, N_{2k+1}$  are nonsolvable. In particular, the operators  $M_1, N_1$  satisfy (0.2). On the other hand, the operator  $N_1^* = D_t - it|D_x|$  is indeed solvable since its adjoint operator  $N_1$  verifies the *a priori* estimate

$$T\|N_1 u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

for a smooth compactly supported  $u$  vanishing for  $|t| \geq T/2$ . No such estimate is satisfied by  $N_1^*u$  since its  $x$ -Fourier transform is

$$-i\partial_t v - it|\xi|v = (-i)(\partial_t v + t|\xi|v),$$

where  $v$  is the  $x$ -Fourier transform of  $u$ . A solution of  $N_1^*u = 0$  is thus given by the inverse Fourier transform of  $e^{-t^2|\xi|/2}$ , ruining solvability for the operator  $N_1$ . A complete study of solvability properties of the models  $M_l$  was done in [33] by L. Nirenberg and F. Treves, who also provided a sufficient condition of solvability for vector fields; the analytic-hypoellipticity properties of these operators were also studied in a paper by S. Mizohata [31]. The simplicity of the two-dimensional models (0.4) is somewhat misleading, since they can be reduced via the Fourier transform, to the study of an ODE. It is not the case of the following examples, which are genuinely three-dimensional. The operators

$$(0.5) \quad P_{klm} = D_{x_1} - ix_1^{2k}(D_{x_2} + x_1^{2l+1}x_2^{2m}|D_x|), \quad x \in \mathbb{R}^3, k, l, m \in \mathbb{N},$$

are locally solvable since their adjoints are subelliptic (see chapter 27 in the fourth volume of [19]). On the other hand the operators

$$(0.6) \quad D_{x_1} + ia(x)(D_{x_2} + x_1^{2l+1}x_2^{2m}|D_x|), \quad a \in C^\infty(\mathbb{R}^3; (-\infty, 0]), l, m \in \mathbb{N},$$

are also locally solvable, but the proof is not elementary.

**The expression of the Nirenberg-Treves conjecture.** — Let us look first at the operator

$$(0.7) \quad L = D_t + iq(t, x, D_x),$$

where  $q$  is a real-valued first-order symbol. The symbol of  $L$  is thus  $\tau + iq(t, x, \xi)$ . The bicharacteristic curves of the real part are oriented straight lines with direction  $\partial/\partial t$ ; now we examine the variations of the imaginary part  $q(t, x, \xi)$  along these lines. It amounts only to check the functions  $t \mapsto q(t, x, \xi)$  for fixed  $(x, \xi)$ . The good cases in (0.4) (when solvability holds) are  $t^{2k}\xi, -t^{2k+1}|\xi|$ : when  $t$  increases these functions do not change sign from  $-$  to  $+$ . The bad cases are  $t^{2k+1}|\xi|$ : when  $t$  increases these functions do change sign from  $-$  to  $+$ ; in particular, the nonsolvable case (0.2), tackled in [15], corresponds to a change of sign of  $\Im p$  from  $-$  to  $+$  at a simple zero. The general formulation of condition  $(\psi)$  for a principal type operator with principal symbol  $p$  is as follows: for all  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\Im(zp)$  does not change sign from  $-$  to  $+$  along the oriented bicharacteristic curves of  $\Re(zp)$ . It is a remarkable and non-trivial fact (due to the articles [3] of J.-M. Bony and [6] of H. Brézis) that this condition is invariant by multiplication by an elliptic factor. The *Nirenberg-Treves conjecture*, proved in several cases in [33], [34], [35], such as for differential operators with analytic coefficients, states that, *for a principal type pseudodifferential equation, condition  $(\psi)$  is equivalent to local solvability*. Using the Malgrange-Weierstrass theorem on normal forms of complex-valued non-degenerate  $C^\infty$  functions and the Egorov theorem on

quantization of homogeneous canonical transformations, there is no loss of generality considering only first order operators of type (0.7). The expression of condition  $(\psi)$  for  $L$  is then very simple since it reads

$$(0.8) \quad q(t, x, \xi) < 0 \quad \text{and} \quad s > t \implies q(s, x, \xi) \leq 0.$$

**The necessity of condition  $(\psi)$  for local solvability.** — In 1981, following an idea given by R.D. Moyer [32] for a result in two dimensions, L. Hörmander proved in [18] that condition  $(\psi)$  is necessary for local solvability: assuming that condition  $(\psi)$  is not satisfied for a principal type operator  $P$ , he was able to construct some approximate non-trivial solutions  $u$  for the adjoint equation  $P^*u = 0$ , which implies that  $P$  is not solvable. Although the construction is elementary for the model operators  $N_{2k+1}$  in (0.4) (as sketched above for  $N_1$ ), the multidimensional proof is rather involved and based upon a geometrical optics method adapted to the complex case. The details can be found in the proof of theorem 26.4.7' of [19].

**The proof of the conjecture for differential operators and in 2D.** — For differential operators, condition  $(\psi)$  is equivalent to ruling out any change of sign of  $\Im p$  along the bicharacteristics of  $\Re p$  (the latter condition is called condition  $(P)$ ); this fact is due to the identity  $p(x, -\xi) = (-1)^m p(x, \xi)$ , valid for an homogeneous polynomial of degree  $m$  in the variable  $\xi$ . Note that the expression of condition  $(P)$  for  $L$  in (0.7) is simply  $q(t, x, \xi)q(s, x, \xi) \geq 0$ . In 1973, R. Beals and C. Fefferman [2] took as a starting point the aforementioned results of L. Nirenberg and F. Trèves on differential operators with analytic coefficients and, removing that analyticity assumption, were able to prove the sufficiency of condition  $(P)$  for local solvability, obtaining thus the sufficiency of condition  $(\psi)$  for local solvability of differential equations. The key ingredient was a drastically new vision of the pseudodifferential calculus, devised to obtain a factorization of the function  $q$  in (0.7) of the type

$$(0.9) \quad q(t, x, \xi) = a(t, x, \xi)b(x, \xi), \quad a \leq 0 \text{ of order } 0 \text{ and } b \text{ of order } 1,$$

in regions of the phase space much smaller than cones or semi-classical “boxes”  $\{(x, \xi), |x| \leq 1, |\xi| \leq h^{-1}\}$ . Considering the family  $\{q(t, x, \xi)\}_{t \in [-1, 1]}$  of classical homogeneous symbols of order 1, they define, via a Calderón-Zygmund decomposition, a pseudodifferential calculus depending on the family  $\{q(t, \cdot)\}$ , in which all these symbols are first order but also such that, at some level  $t_0$ , some ellipticity property of  $q(t_0, \cdot)$  or  $\nabla_{x, \xi} q(t_0, \cdot)$  is satisfied. Although a factorization (0.9) can be obtained for differential operators with analytic regularity satisfying condition  $(\psi)$ , such a factorization is not true in the  $C^\infty$  case, even microlocally in the standard sense<sup>(2)</sup>. This is why R. Beals and C. Fefferman had to resort to a much finer microlocalization scheme

---

<sup>(2)</sup>Consider the  $C^\infty$  function  $q$  defined on  $\mathbb{R}^3$  by  $q(t, x, \xi) = \begin{cases} (\xi - te^{-1/x})^2 & \text{if } x > 0, \\ \xi(\xi - e^{1/x}) & \text{if } x < 0. \end{cases}$  For every fixed  $(x, \xi)$ , the function  $t \mapsto q(t, x, \xi)$  does not change sign since  $q(t, x, \xi)q(s, x, \xi) \geq 0$ . Nevertheless

than the classical one. In fact, the proof of R. Beals and C. Fefferman marked the day when microlocal analysis stopped being only homogeneous or semi-classical, thanks to methods of harmonic analysis such as Calderón-Zygmund decomposition made compatible with the Heisenberg uncertainty principle. In 1988, N. Lerner [23] proved the sufficiency of condition  $(\psi)$  for local solvability of pseudodifferential equations in two dimensions and as well for the classical oblique-derivative problem [24]. The method of proof of these results is also based upon a factorization analogous to (0.9) but where  $b(x, \xi)$  is replaced by  $\beta(t, x)|\xi|$  and  $\beta$  is a smooth function such that  $t \mapsto \beta(t, x)$  does not change sign from  $+$  to  $-$  when  $t$  increases. Then a properly defined sign of  $\beta(t, x)$  appears as a non-decreasing operator and the Nirenberg-Treves energy method can be adapted to this situation. The Beals-Fefferman result mentioned above proved the local existence of  $H_{\text{loc}}^{s+m-1}$  solutions  $u$  to the equation  $Lu = f$  with a source  $f$  in  $H_{\text{loc}}^s$ , whenever  $L$  is an operator of order  $m$  satisfying condition  $(P)$ ; since the size of the neighbourhood where the equation is satisfied may depend on the index  $s$ , this is not enough to get  $C^\infty$  solutions whenever  $f$  is smooth. The existence of  $C^\infty$  solutions for  $C^\infty$  sources was proved by L. Hörmander in [17] for pseudodifferential equations satisfying condition  $(P)$ . We refer the reader to the paper [21] for a more detailed historical overview of this problem. On the other hand, it is clear that our interest is focused on solvability in the  $C^\infty$  category. Let us nevertheless recall that the sufficiency of condition  $(\psi)$  in the analytic category (for microdifferential operators acting on microfunctions) was proved by J.-M. Trépreau [37] (see also [20], chapter VII).

**Counting the loss of derivatives.** — Let us consider a principal-type pseudodifferential operator  $L$  of order  $m$ . We shall say that  $L$  is locally solvable with a loss of  $\mu$  derivatives whenever the equation  $Lu = f$  has a local solution  $u$  in the Sobolev space  $H_{\text{loc}}^{s+m-\mu}$  for a source  $f$  in  $H_{\text{loc}}^s$ . Note that the loss is zero if and only if  $L$  is elliptic. Since for the simplest principal type equation  $\partial/\partial x_1$ , the loss of derivatives is 1, we shall consider that 1 is the “ordinary” loss of derivatives. When  $L$  satisfies condition  $(P)$  (e.g. if  $L$  is a differential operator satisfying condition  $(\psi)$ ), or when  $L$  satisfies condition  $(\psi)$  in two dimensions, the estimates

$$(0.10) \quad C\|L^*u\|_{H^s} \geq \|u\|_{H^{s+m-1}},$$

valid for smooth compactly supported  $u$  with a small enough support, imply local solvability with loss of 1 derivative, the ordinary loss referred to above. For many years, repeated claims were made that condition  $(\psi)$  for  $L$  implies (0.10), that is solvability with loss of 1 derivative. It turned out that these claims were wrong, as shown by N. Lerner in [25] by the following result (see also section 6 in the survey article [21] by L. Hörmander). *There exists a principal type first-order pseudodifferential operator  $L$*

---

one can show that it is not possible to find some  $C^\infty$  functions  $a, b$  such that  $a$  is nonnegative and  $b$  independent of  $t$  such that  $q = ab$ .

in three dimensions, satisfying condition  $(\psi)$ , a sequence  $u_k$  of  $C_c^\infty$  functions with  $\text{supp } u_k \subset \{x \in \mathbb{R}^3, |x| \leq 1/k\}$  such that

$$(0.11) \quad \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|L^* u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

As a consequence, for this  $L$ , there exists  $f \in L^2$  such that the equation  $Lu = f$  has no local solution  $u$  in  $L^2$ . Thus condition  $(\psi)$  does not imply local solvability with loss of one derivative for pseudodifferential equations in three or more dimensions. The main result of Dencker discussed in this report is that, although local solvability with loss of one derivative does not follow from condition  $(\psi)$ , that condition implies solvability with a larger loss. Namely the estimate

$$(0.12) \quad C\|L^*u\|_{H^s} \geq \|u\|_{H^{s+m-\mu}},$$

holds (with  $\mu = \epsilon + 3/2$  for all positive  $\epsilon$ ) for smooth compactly supported  $u$  with a small enough support, provided that  $L$  is a principal-type operator satisfying condition  $(\psi)$ . Following the pattern of Dencker's paper, we show in fact ([22]) that it is possible to get rid of the  $\epsilon$  and obtain  $\mu = 3/2$  in (0.12). This proves that condition  $(\psi)$  implies local solvability with a loss of  $3/2$  derivatives.

**Preliminary comments.** — The known counterexamples of [25], [21] do not rule out a loss of  $1 + \epsilon$  derivatives for any  $\epsilon > 0$ , so the loss  $3/2$  may be not optimal under condition  $(\psi)$ . One of the difficulties related to the handling of (0.12) when the loss  $\mu$  is  $> 1$  is the following: condition  $(\psi)$  is only concerned with the principal symbol of  $L^*$ , so that solvability and the estimate (0.12) should be preserved when the principal-type  $L^*$  is perturbed by a pseudodifferential operator of order  $m - 1$ . However, the estimate (0.12) is too weak to absorb directly a perturbation of order  $m - 1$  and there is no way to avoid this situation under the sole condition  $(\psi)$  since (0.10) is not a consequence of  $(\psi)$  (it could be possible that the analyticity of the symbol and  $(\psi)$  imply (0.10)). The method of proof used by N. Dencker is based upon an energy method, rather classical in its principles, which was introduced by L. Nirenberg and F. Trèves and developed by R. Beals and C. Fefferman. But although these authors were able to separate sharply the forward and backward regions of propagation for operators satisfying condition  $(P)$ , N. Dencker defines these regions in the more general case of condition  $(\psi)$  and construct a multiplier smoother than a sign function. Although that smoothness forces a loss of derivatives larger than one, he can take advantage of it to handle some calculus of pseudodifferential operators. A version of one of his most striking arguments appears below as Lemma 2.10 and shows that the rigidity of condition  $(\psi)$  entails strong regularity properties for the set where the key change of sign occurs.



## 1. RESULTS AND NOTATIONS

### 1.1. Statement of the results

Let  $P$  be a properly supported principal-type pseudodifferential operator in a  $C^\infty$  manifold  $\mathcal{M}$ , with principal symbol  $p$ . The symbol  $p$  is assumed to be a  $C^\infty$  positively homogeneous function of degree  $m$  on  $\dot{T}^*(\mathcal{M})$ , the cotangent bundle minus the zero section. The principal type assumption that we shall use here is that

$$(1.1) \quad (x, \xi) \in \dot{T}^*(\mathcal{M}), \quad p(x, \xi) = 0 \implies \partial_\xi p(x, \xi) \neq 0.$$

Also, the operator  $P$  will be assumed of polyhomogeneous type, which means that its total symbol is equivalent to  $p + \sum_{j \geq 1} p_{m-j}$ , where  $p_k$  is a smooth positively homogeneous function of degree  $k$  on  $\dot{T}^*(\mathcal{M})$ .

**DEFINITION 1.1** (Condition  $(\psi)$ ). — *Let  $p$  be a  $C^\infty$  homogeneous function on  $\dot{T}^*(\mathcal{M})$ . The function  $p$  is said to satisfy condition  $(\psi)$  if, for  $z = 1$  or  $i$ ,  $\Im(zp)$  does not change sign from  $-$  to  $+$  along an oriented bicharacteristic of  $\Re(zp)$ .*

For more properties of symbols satisfying this condition, we refer the reader to section 26.4 in [19].

**THEOREM 1.2.** — *Let  $P$  be as above, such that its principal symbol  $p$  satisfies condition  $(\psi)$ . Let  $s$  be a real number. Then, for all  $x \in \mathcal{M}$ , there exists a neighborhood  $V$  such that for all  $f \in H_{loc}^s$ , there exists  $u \in H_{loc}^{s+m-\frac{3}{2}}$  such that*

$$Pu = f \text{ in } V.$$

*Remark 1.3.* — Theorem 1.2 will be proved by a multiplier method, involving the computation of

$$\langle Pu, Mu \rangle$$

with a suitably chosen operator  $M$ . It is interesting to notice that, the greater is the loss of derivatives, the more regular should be the multiplier in the energy method. As a matter of fact, the Nirenberg-Treves multiplier of [35] is not even a pseudodifferential operator in the  $S_{1/2,1/2}^0$  class, since it could be as singular as the operator  $\text{sign}D_{x_1}$ ; this does not create any difficulty, since the loss of derivatives is only 1. On the other hand, in [9], [28], where estimates with loss of 2 derivatives are handled, the regularity of the multiplier is much better than  $S_{1/2,1/2}^0$ , since we need to consider it as an operator of order 0 in an asymptotic class defined by an admissible metric on the phase space.

**1.2. Some notations**

First of all, we recall the definition of the Weyl quantization  $a^w$  of a function  $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ : for  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(a^w u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Our definition of the Fourier transform  $\hat{u}$  of  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  is  $\hat{u}(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} u(x) dx$  and the usual quantization  $a(x, D_x)$  of  $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  is  $(a(x, D_x)u)(x) = \int e^{2i\pi x\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$ . The phase space  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$  is a symplectic vector space with the standard symplectic form

$$(1.2) \quad [(x, \xi), (y, \eta)] = \langle \xi, y \rangle - \langle \eta, x \rangle.$$

DEFINITION 1.4. — Let  $g$  be a metric on  $\mathbb{R}^{2n}$ , i.e. a mapping  $X \mapsto g_X$  from  $\mathbb{R}^{2n}$  to the cone of positive definite quadratic forms on  $\mathbb{R}^{2n}$ . Let  $M$  be a positive function defined on  $\mathbb{R}^{2n}$ .

(i) The metric  $g$  is said to be slowly varying whenever  $\exists C > 0, \exists r > 0, \forall X, Y, T \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$g_X(Y - X) \leq r^2 \implies C^{-1} g_Y(T) \leq g_X(T) \leq C g_Y(T).$$

(ii) The symplectic dual metric  $g^\sigma$  is defined as  $g_X^\sigma(T) = \sup_{g_X(U)=1} [T, U]^2$ . The parameter of  $g$  is defined as  $\lambda_g(X) = \inf_{T \neq 0} (g_X^\sigma(T)/g_X(T))^{1/2}$  and we shall say that  $g$  satisfies the uncertainty principle if  $\inf_X \lambda_g(X) \geq 1$ .

(iii) The metric  $g$  is said to be temperate when  $\exists C > 0, \exists N \geq 0, \forall X, Y, T \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$g_X^\sigma(T) \leq C g_Y^\sigma(T) (1 + g_X^\sigma(X - Y))^N.$$

When the three properties above are satisfied, we shall say that  $g$  is admissible. The constants appearing in (i) and (iii) will be called the structure constants of the metric  $g$ .

(iv) The function  $M$  is said to be  $g$ -slowly varying if  $\exists C > 0, \exists r > 0, \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$g_X(Y - X) \leq r^2 \implies C^{-1} \leq \frac{M(X)}{M(Y)} \leq C.$$

(v) The function  $M$  is said to be  $g$ -temperate if  $\exists C > 0, \exists N \geq 0, \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$\frac{M(X)}{M(Y)} \leq C (1 + g_X^\sigma(X - Y))^N.$$

When  $M$  satisfies (iv) and (v), we shall say that  $M$  is a  $g$ -weight.

DEFINITION 1.5. — Let  $g$  be a metric on  $\mathbb{R}^{2n}$  and  $M$  be a positive function defined on  $\mathbb{R}^{2n}$ . The set  $S(M, g)$  is defined as the set of functions  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  such that, for all  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\sup_X \|a^{(l)}(X)\|_{g_X} M(X)^{-1} < \infty$ , where  $a^{(l)}$  is the  $l$ -th derivative. It means that  $\forall l \in \mathbb{N}, \exists C_l, \forall X \in \mathbb{R}^{2n}, \forall T_1, \dots, T_l \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$|a^{(l)}(X)(T_1, \dots, T_l)| \leq C_l M(X) \prod_{1 \leq j \leq l} g_X(T_j)^{1/2}.$$

We discuss now some basic facts about partitions of unity. We refer the reader to the chapter 18 in [19] for the basic properties of admissible metrics as well as for the following lemma.

LEMMA 1.6. — *Let  $g$  be an admissible metric on  $\mathbb{R}^{2n}$ . There exist a sequence  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  of points in the phase space  $\mathbb{R}^{2n}$  and positive numbers  $r_0, N_0$ , such that the following properties are satisfied. We define  $U_k, U_k^*, U_k^{**}$  as the  $g_k = g_{X_k}$  balls with center  $X_k$  and radius  $r_0, 2r_0, 4r_0$ . There exist two families of non-negative smooth functions on  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  such that*

$$\sum_k \chi_k(X) = 1, \text{ supp } \chi_k \subset U_k, \psi_k \equiv 1 \text{ on } U_k^*, \text{ supp } \psi_k \subset U_k^{**}.$$

Moreover,  $\chi_k, \psi_k \in S(1, g_k)$  with semi-norms bounded independently of  $k$ . The overlap of the balls  $U_k^{**}$  is bounded, i.e.

$$\bigcap_{k \in \mathcal{N}} U_k^{**} \neq \emptyset \implies \#\mathcal{N} \leq N_0.$$

Also we have  $g_X \sim g_k$  all over  $U_k^{**}$  (i.e. the ratios  $g_X(T)/g_k(T)$  are bounded above and below by a fixed constant, provided that  $X \in U_k^{**}$ ).

The next lemma is proved in [4] (see also Lemma 6.3 in [27]).

LEMMA 1.7. — *Let  $g$  be an admissible metric on  $\mathbb{R}^{2n}$  and  $\sum_k \chi_k(x, \xi) = 1$  be a partition of unity related to  $g$  as in the previous lemma. There exists a positive constant  $C$  such that for all  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$*

$$C^{-1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \sum_k \|\chi_k^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

where  $a^w$  stands for the Weyl quantization of the symbol  $a$ .

The following lemma is proved in [5].

LEMMA 1.8. — *Let  $g$  be an admissible metric on  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $m$  be a weight for  $g$ ,  $U_k$  and  $g_k$  as in Lemma 1.6. Let  $(a_k)$  be a sequence of bounded symbols in  $S(m(X_k), g_k)$  such that, for all non-negative integers  $l, N$*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{R}^{2n}} |m(X_k)^{-1} a_k^{(l)}(X) T^l (1 + g_k^\sigma(X - U_k))^N g_k(T)^{-l/2}| < +\infty.$$

Then the symbol  $a = \sum_k a_k$  makes sense and belongs to  $S(m, g)$ . The important point here is that no support condition is required for the  $a_k$ , but instead some decay estimates with respect to  $g^\sigma$ . The sequence  $(a_k)$  will be called a confined sequence in  $S(m, g)$ .

**2. THE GEOMETRY OF CONDITION  $(\psi)$**

In this section and also in section 3, we shall consider that the phase space is equipped with a *symplectic quadratic form*  $\Gamma$  ( $\Gamma$  is a positive definite quadratic form such that  $\Gamma = \Gamma^\sigma$ , see the definition 1.4(ii) above). It is possible to find some linear symplectic coordinates  $(x, \xi)$  in  $\mathbb{R}^{2n}$  such that  $\Gamma(x, \xi) = |(x, \xi)|^2 = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j^2 + \xi_j^2$ . The running point of our Euclidean symplectic  $\mathbb{R}^{2n}$  will be usually denoted by  $X$  or by an upper-case letter such as  $Y, Z$ . The open  $\Gamma$ -ball with center  $X$  and radius  $r$  will be denoted by  $B(X, r)$ .

**2.1. The basic structure**

Let  $q(t, X, \Lambda)$  be a smooth real-valued function defined on  $\Xi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times [1, +\infty)$ , vanishing for  $|t| \geq 1$  and satisfying<sup>(3)</sup>

$$(2.1) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \sup_{\Xi} \|\partial_X^k q\|_{\Gamma} \Lambda^{-1 + \frac{k}{2}} = \gamma_k < +\infty, \text{ i.e. } q(t, \cdot) \in S(\Lambda, \Lambda^{-1}\Gamma),$$

$$(2.2) \quad s > t \text{ and } q(t, X, \Lambda) > 0 \implies q(s, X, \Lambda) \geq 0.$$

*Notation.* In this section and in the next section, the Euclidean norm  $\Gamma(X)^{1/2}$  is fixed and the norms of the vectors and of the multilinear forms are taken with respect to that norm. We shall write everywhere  $|\cdot|$  instead of  $\|\cdot\|_{\Gamma}$ . Furthermore, we shall say that  $C$  is a “fixed” constant if it depends only on a finite number of  $\gamma_k$  above and on the dimension  $n$ .

We shall always omit the dependence of  $q$  with respect to the large parameter  $\Lambda$  and write  $q(t, X)$  instead of  $q(t, X, \Lambda)$ . The operator  $Q(t) = q(t)^w$  will stand for the operator with Weyl symbol  $q(t, X)$ . We introduce now for  $t \in \mathbb{R}$ , following [13],

$$(2.3) \quad \mathbb{X}_+(t) = \cup_{s \leq t} \{X \in \mathbb{R}^{2n}, q(s, X) > 0\}, \quad \mathbb{X}_-(t) = \cup_{s \geq t} \{X \in \mathbb{R}^{2n}, q(s, X) < 0\},$$

$$(2.4) \quad \mathbb{X}_0(t) = \mathbb{X}_-(t)^c \cap \mathbb{X}_+(t)^c.$$

Thanks to (2.2),  $\mathbb{X}_+(t), \mathbb{X}_-(t)$  are disjoint open subsets of  $\mathbb{R}^{2n}$ ; moreover  $\mathbb{X}_0(t), \mathbb{X}_\pm(t) \cup \mathbb{X}_\pm(t)$  are closed since their complements are open. The three sets  $\mathbb{X}_0(t), \mathbb{X}_\pm(t)$  are two by two disjoint with union  $\mathbb{R}^{2n}$  (note also that  $\overline{\mathbb{X}_\pm(t)} \subset \mathbb{X}_0(t) \cup \mathbb{X}_\pm(t)$  since  $\mathbb{X}_0(t) \cup \mathbb{X}_\pm(t)$  are closed). When  $t$  increases,  $\mathbb{X}_+(t)$  increases and  $\mathbb{X}_-(t)$  decreases. The following three lemmas are easy and can be found as Lemmas 2.1.1-2-3 in [22].

LEMMA 2.1. — *Let  $(E, d)$  be a metric space, let  $A \subset E$  and  $\kappa > 0$  be given. We define  $\Psi_{A, \kappa}(x) = \kappa$  if  $A = \emptyset$  and if  $A \neq \emptyset$ , we define*

$$\Psi_{A, \kappa}(x) = \min(d(x, A), \kappa).$$

---

<sup>(3)</sup>The attentive reader should not be scared by the fact that (2.2) is different from (0.8): we shall deal from now on with the adjoint of an operator satisfying condition  $(\psi)$  and we are willing to prove an *a priori* estimate as in Theorem 4.1 below.

The function  $\Psi_{A,\kappa}$  is valued in  $[0, \kappa]$ , Lipschitz continuous with a Lipschitz constant  $\leq 1$ . Moreover, the following implication holds:  $A_1 \subset A_2 \subset E \implies \Psi_{A_1,\kappa} \geq \Psi_{A_2,\kappa}$ .

LEMMA 2.2. — For each  $X \in \mathbb{R}^{2n}$ , the function  $t \mapsto \Psi_{\mathbb{X}_+(t),\kappa}(X)$  is decreasing and for each  $t \in \mathbb{R}$ , the function  $X \mapsto \Psi_{\mathbb{X}_+(t),\kappa}(X)$  is supported in  $\mathbb{X}_+(t)^c = \mathbb{X}_-(t) \cup \mathbb{X}_0(t)$ . For each  $X \in \mathbb{R}^{2n}$ , the function  $t \mapsto \Psi_{\mathbb{X}_-(t),\kappa}(X)$  is increasing and for each  $t \in \mathbb{R}$ , the function  $X \mapsto \Psi_{\mathbb{X}_-(t),\kappa}(X)$  is supported in  $\mathbb{X}_-(t)^c = \mathbb{X}_+(t) \cup \mathbb{X}_0(t)$ . As a consequence the function  $X \mapsto \Psi_{\mathbb{X}_+(t),\kappa}(X)\Psi_{\mathbb{X}_-(t),\kappa}(X)$  is supported in  $\mathbb{X}_0(t)$ .

LEMMA 2.3. — For  $\kappa > 0, t \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^{2n}$ , we define<sup>(4)</sup>

$$(2.5) \quad \sigma(t, X, \kappa) = \Psi_{\mathbb{X}_-(t),\kappa}(X) - \Psi_{\mathbb{X}_+(t),\kappa}(X).$$

The function  $t \mapsto \sigma(t, X, \kappa)$  is increasing and valued in  $[-\kappa, \kappa]$ , the function  $X \mapsto \sigma(t, X, \kappa)$  is Lipschitz continuous with Lipschitz constant less than 2; we have

$$\sigma(t, X, \kappa) = \begin{cases} \min(|X - \mathbb{X}_-(t)|, \kappa) & \text{if } X \in \mathbb{X}_+(t), \\ -\min(|X - \mathbb{X}_+(t)|, \kappa) & \text{if } X \in \mathbb{X}_-(t). \end{cases}$$

We have  $\{X \in \mathbb{R}^{2n}, \sigma(t, X, \kappa) = 0\} \subset \mathbb{X}_0(t) \subset \{X \in \mathbb{R}^{2n}, q(t, X) = 0\}$ , and  $\{X \in \mathbb{R}^{2n}, \pm q(t, X) > 0\} \subset \mathbb{X}_\pm(t) \subset \{X \in \mathbb{R}^{2n}, \pm \sigma(t, X, \kappa) > 0\}$

$$(2.6) \quad \subset \{X \in \mathbb{R}^{2n}, \pm \sigma(t, X, \kappa) \geq 0\} \subset \{X \in \mathbb{R}^{2n}, \pm q(t, X) \geq 0\}.$$

DEFINITION 2.4. — Let  $q(t, X)$  be as above. We define

$$(2.7) \quad \delta_0(t, X) = \sigma(t, X, \Lambda^{1/2})$$

and we notice that from the previous lemmas,  $t \mapsto \delta_0(t, X)$  is increasing, valued in  $[-\Lambda^{1/2}, \Lambda^{1/2}]$ , satisfying

$$(2.8) \quad |\delta_0(t, X) - \delta_0(t, Y)| \leq 2|X - Y|,$$

and such that

$$(2.9) \quad \{X \in \mathbb{R}^{2n}, \delta_0(t, X) = 0\} \subset \{X \in \mathbb{R}^{2n}, q(t, X) = 0\},$$

$$(2.10) \quad \{X \in \mathbb{R}^{2n}, \pm q(t, X) > 0\} \subset \{X, \pm \delta_0(t, X) > 0\} \subset \{X, \pm q(t, X) \geq 0\}.$$

The following lemma is elementary and is a good introduction to the Calderón-Zygmund methods. This is lemma 2.1.5 in [22].

LEMMA 2.5. — Let  $f$  be a symbol in  $S(\Lambda^m, \Lambda^{-1}\Gamma)$  where  $m$  is a positive real number. We define

$$(2.11) \quad \lambda(X) = 1 + \max_{\substack{0 \leq j < 2m \\ j \in \mathbb{N}}} (\|f^{(j)}(X)\|_{\Gamma}^{\frac{2}{2m-j}}).$$

<sup>(4)</sup>If the distances of  $X$  to both  $\mathbb{X}_\pm(t)$  are less than  $\kappa$ , we have  $\sigma(t, X, \kappa) = |X - \mathbb{X}_-(t)| - |X - \mathbb{X}_+(t)|$ .

Then  $f \in S(\lambda^m, \lambda^{-1}\Gamma)$  and the mapping from  $S(\Lambda^m, \Lambda^{-1}\Gamma)$  to  $S(\lambda^m, \lambda^{-1}\Gamma)$  is continuous. Moreover, with  $\gamma = \max_{\substack{0 \leq j < 2m \\ j \in \mathbb{N}}} \gamma_j^{\frac{2}{2m-j}}$ , where the  $\gamma_j$  are the semi-norms of  $f$ , we have for all  $X \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$(2.12) \quad 1 \leq \lambda(X) \leq 1 + \gamma\Lambda.$$

The metric  $\lambda^{-1}\Gamma$  is admissible (Def. 1.4), with structure constants depending only on  $\gamma$ . It will be called the  $m$ -proper metric of  $f$ . The function  $\lambda$  above is a weight for the metric  $\lambda^{-1}\Gamma$  and will be called the  $m$ -proper weight of  $f$ .

The following two lemmas are more involved and appear as lemmas 2.1.6-7 in [22].

LEMMA 2.6. — Let  $q(t, X)$  and  $\delta_0(t, X)$  be as above. We define, with  $\langle s \rangle = (1 + s^2)^{1/2}$ ,

$$(2.13) \quad \mu(t, X) = \langle \delta_0(t, X) \rangle^2 + |\Lambda^{1/2}q'_X(t, X)| + |\Lambda^{1/2}q''_{XX}(t, X)|^2.$$

The metric  $\mu^{-1}(t, \cdot)\Gamma$  is slowly varying with structure constants depending only on a finite number of semi-norms of  $q$  in  $S(\Lambda, \Lambda^{-1}\Gamma)$ . Moreover, there exists  $C > 0$ , depending only on a finite number of semi-norms of  $q$ , such that

$$(2.14) \quad \mu(t, X) \leq C\Lambda, \quad \frac{\mu(t, X)}{\mu(t, Y)} \leq C(1 + |X - Y|^2),$$

and we have

$$(2.15) \quad \Lambda^{1/2}q(t, X) \in S(\mu(t, X)^{3/2}, \mu^{-1}(t, \cdot)\Gamma),$$

so that the semi-norms depend only the semi-norms of  $q$  in  $S(\Lambda, \Lambda^{-1}\Gamma)$ .

LEMMA 2.7. — Let  $q(t, X), \delta_0(t, X), \mu(t, X)$  be as above. We define,

$$(2.16) \quad \nu(t, X) = \langle \delta_0(t, X) \rangle^2 + |\Lambda^{1/2}q'_X(t, X)\mu(t, X)^{-1/2}|^2.$$

The metric  $\nu^{-1}(t, \cdot)\Gamma$  is slowly varying with structure constants depending only on a finite number of semi-norms of  $q$  in  $S(\Lambda, \Lambda^{-1}\Gamma)$ . There exists  $C > 0$ , depending only on a finite number of semi-norms of  $q$ , such that

$$(2.17) \quad \nu(t, X) \leq 2\mu(t, X) \leq C\Lambda, \quad \frac{\nu(t, X)}{\nu(t, Y)} \leq C(1 + |X - Y|^2),$$

and we have

$$(2.18) \quad \Lambda^{1/2}q(t, X) \in S(\mu(t, X)^{1/2}\nu(t, X), \nu(t, \cdot)^{-1}\Gamma),$$

so that the semi-norms of this symbol depend only on the semi-norms of  $q$  in  $S(\Lambda, \Lambda^{-1}\Gamma)$ . Moreover the function  $\mu(t, X)$  is a weight for the metric  $\nu(t, \cdot)^{-1}\Gamma$ .

We wish now to discuss the normal forms attached to the metric  $\nu^{-1}(t, \cdot)\Gamma$  for the symbol  $q(t, \cdot)$ . In the sequel of this section, we consider that  $t$  is fixed.

DEFINITION 2.8. — Let  $0 < r_1 \leq 1/2$  be given. With  $\nu$  defined in (2.16), we shall say that

(i)  $Y$  is a nonnegative (resp. nonpositive) point at level  $t$  if

$$\delta_0(t, Y) \geq r_1 \nu(t, Y)^{1/2}, \quad (\text{resp. } \delta_0(t, Y) \leq -r_1 \nu(t, Y)^{1/2}).$$

(ii)  $Y$  is a gradient point at level  $t$  if

$$|\Lambda^{1/2} q'_Y(t, Y) \mu(t, Y)^{-1/2}|^2 \geq \nu(t, Y)/4 \quad \text{and} \quad \delta_0(t, Y)^2 < r_1^2 \nu(t, Y).$$

(iii)  $Y$  is a negligible point in the remaining cases

$$|\Lambda^{1/2} q'_Y(t, Y) \mu(t, Y)^{-1/2}|^2 < \nu(t, Y)/4 \quad \text{and} \quad \delta_0(t, Y)^2 < r_1^2 \nu(t, Y).$$

Note that this implies  $\nu(t, Y) \leq 1 + r_1^2 \nu(t, Y) + \nu(t, Y)/4 \leq 1 + \nu(t, Y)/2$  and thus  $\nu(t, Y) \leq 2$ .

Note that if  $Y$  is a nonnegative point, from (2.8) we get, for  $T \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $|T| \leq 1$ ,  $0 \leq r \leq r_1/4$

$$\delta_0(t, Y + r\nu^{1/2}(t, Y)T) \geq \delta_0(t, Y) - 2r\nu^{1/2}(t, Y) \geq \frac{r_1}{2}\nu^{1/2}(t, Y)$$

and from (2.10), this implies that  $q(t, X) \geq 0$  on the ball  $B(Y, r\nu^{1/2}(t, Y))$ . Similarly if  $Y$  is a nonpositive point,  $q(t, X) \leq 0$  on the ball  $B(Y, r\nu^{1/2}(t, Y))$ . Moreover if  $Y$  is a gradient point, we have  $|\delta_0(t, Y)| < r_1 \nu(t, Y)^{1/2}$  so that, if  $Y \in \mathbb{X}_+(t)$ , we have  $\min(|Y - \mathbb{X}_-(t)|, \Lambda^{1/2}) < r_1 \nu(t, Y)^{1/2}$  and if  $r_1$  is small enough, since  $\nu \lesssim \Lambda$ , we get that  $|Y - \mathbb{X}_-(t)| < r_1 \nu(t, Y)^{1/2}$  which implies that there exists  $Z_1 \in \mathbb{X}_-(t)$  such that  $|Y - Z_1| < r_1 \nu(t, Y)^{1/2}$ . On the segment  $[Y, Z_1]$ , the Lipschitz continuous function is such that  $\delta_0(t, Y) > 0$  ( $Y \in \mathbb{X}_+(t)$ , cf. Lemma 2.3) and  $\delta_0(t, Z_1) < 0$  ( $Z_1 \in \mathbb{X}_-(t)$ ); as a result, there exists a point  $Z$  (on that segment) such that  $\delta_0(t, Z) = 0$  and thus  $q(t, Z) = 0$ . Naturally the discussion for a gradient point  $Y$  in  $\mathbb{X}_-(t)$ , is analogous. If the gradient point  $Y$  belongs to  $\mathbb{X}_0(t)$ , we get right away  $q(t, Y) = 0$ , also from the lemma 2.3. The function

$$(2.19) \quad f(T) = \Lambda^{1/2} q\left(t, Y + r_1 \nu^{1/2}(t, Y)T\right) \mu(t, Y)^{-1/2} \nu(t, Y)^{-1}$$

satisfies for  $r_1$  small enough with respect to the semi-norms of  $q$  and  $c_0, C_0, C_1, C_2$  fixed positive constants,  $|T| \leq 1$ , from (2.18),

$$|f(T)| \leq |S - T|C_0 r_1 \leq C_1 r_1^2, \quad |f'(T)| \geq r_1 c_0, \quad |f''(T)| \leq C_2 r_1^2.$$

The standard analysis (see the appendix A.7 in [22]) of the Beals-Fefferman metric [2] shows that, on  $B(Y, r_1 \nu^{1/2}(t, Y))$

$$(2.20) \quad q(t, X) = \Lambda^{-1/2} \mu^{1/2}(t, Y) \nu^{1/2}(t, Y) e(t, X) \beta(t, X),$$

$$(2.21) \quad 1 \leq e \in S(1, \nu(t, Y)^{-1}\Gamma), \quad \beta \in S(\nu(t, Y)^{1/2}, \nu(t, Y)^{-1}\Gamma),$$

$$(2.22) \quad \beta(t, X) = \nu(t, Y)^{1/2}(X_1 + \alpha(t, X')), \quad \alpha \in S(\nu(t, Y)^{1/2}, \nu(t, Y)^{-1}\Gamma).$$

LEMMA 2.9. — Let  $q(t, X)$  be a smooth function satisfying (2.1-2) and let  $t \in [-1, 1]$  be given. The metric  $g_t$  on  $\mathbb{R}^{2n}$  is defined as  $\nu(t, X)^{-1}\Gamma$  where  $\nu$  is defined in (2.16). There exists  $r_0 > 0$ , depending only on a finite number of semi-norms of  $q$  in (2.1) such that, for any  $r \in ]0, r_0]$ , there exist a sequence of points  $(X_k)$  in  $\mathbb{R}^{2n}$ , and sequences of functions  $(\chi_k), (\psi_k)$  satisfying the properties in the lemma 1.4 such that there exists a partition of  $\mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{N} = E_+ \cup E_- \cup E_0 \cup E_{00}$$

so that, according to the definition 2.8,  $k \in E_+$  means that  $X_k$  is a nonnegative point, ( $k \in E_- : X_k$  nonpositive point;  $k \in E_0 : X_k$  gradient point,  $k \in E_{00} : X_k$  negligible point).

*Proof.* — This lemma is an immediate consequence of the definition 2.8, of lemma 1.4 and of lemma 2.7, asserting that the metric  $g_t$  is admissible.

**2.2. Some lemmas on  $C^3$  functions**

We give in this section a key result on the second derivative  $f''_{XX}$  of a real-valued smooth function  $f(t, X)$  such that  $\tau - if(t, x, \xi)$  satisfies condition  $(\psi)$ . The following claim gives a good qualitative version of what is needed for our estimates. Although we shall not use that (very simple) result, proving the following claim may serve as a good warm-up exercise for the more difficult sequel.

*Claim.* — Let  $f_1, f_2$  be two real-valued twice differentiable functions defined on an open set  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^N$  and such that  $f_1^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \subset f_2^{-1}(\mathbb{R}_+)$  (i.e.  $f_1(x) > 0 \implies f_2(x) \geq 0$ ). If for some  $\omega \in \Omega$ , the conditions  $f_1(\omega) = f_2(\omega) = 0, df_1(\omega) \neq 0, df_2(\omega) = 0$  are satisfied, we have  $f_2''(\omega) \geq 0$  (as a quadratic form).

This claim has the following consequence: take three functions  $f_1, f_2, f_3$ , twice differentiable on  $\Omega$ , such that, for  $1 \leq j \leq k \leq 3, f_j(x) > 0 \implies f_k(x) \geq 0$ . Assume that, at some point  $\omega$  we have  $f_1(\omega) = f_2(\omega) = f_3(\omega) = 0, df_1(\omega) \neq 0, df_3(\omega) \neq 0, df_2(\omega) = 0$ . Then one has  $f_2''(\omega) = 0$ : indeed, the previous claim gives  $f_2''(\omega) \geq 0$  and it can be applied to the couple  $(-f_3, -f_2)$  to get  $-f_2''(\omega) \geq 0$ .

*Notations.* The open Euclidean ball of  $\mathbb{R}^N$  with center 0 and radius  $r$  will be denoted by  $B_r$ . For a  $k$ -multilinear symmetric form  $A$  on  $\mathbb{R}^N$ , we shall note  $\|A\| = \max_{|T|=1} |AT^k|$  which is easily seen to be equivalent to the norm  $\max_{|T_1|=\dots=|T_k|=1} |A(T_1, \dots, T_k)|$  since the symmetrized  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$  can be written a sum of  $k^{\text{th}}$  powers.

The next statement is a precise quantitative version of the previous claim and is lemma 2.2.2 in [22].

LEMMA 2.10. — Let  $R_0 > 0$  and  $f_1, f_2$  be real-valued functions defined in  $\bar{B}_{R_0}$ . We assume that  $f_1$  is  $C^2, f_2$  is  $C^3$  and for  $x \in \bar{B}_{R_0}$ ,

$$(2.23) \quad f_1(x) > 0 \implies f_2(x) \geq 0.$$



We define the non-negative numbers  $\rho_1, \rho_2$ , by

$$(2.24) \quad \rho_1 = \max(|f_1(0)|^{\frac{1}{2}}, |f_1'(0)|), \quad \rho_2 = \max(|f_2(0)|^{\frac{1}{3}}, |f_2'(0)|^{\frac{1}{2}}, |f_2''(0)|),$$

and we assume that, with a positive  $C_0$ ,

$$(2.25) \quad 0 < \rho_1, \quad \rho_2 \leq C_0 \rho_1 \leq R_0.$$

We define the non-negative numbers  $C_1, C_2, C_3$ , by

$$(2.26) \quad C_1 = 1 + C_0 \|f_1''\|_{L^\infty(\bar{B}_{R_0})}, \quad C_2 = 4 + \frac{1}{3} \|f_2'''\|_{L^\infty(\bar{B}_{R_0})}, \quad C_3 = C_2 + 4\pi C_1.$$

Assume that for some  $\kappa_2 \in [0, 1]$ , with  $\kappa_2 C_1 \leq 1/4$ ,

$$(2.27) \quad \rho_1 = |f_1'(0)| > 0,$$

$$(2.28) \quad \max(|f_2(0)|^{1/3}, |f_2'(0)|^{1/2}) \leq \kappa_2 |f_2''(0)|,$$

$$(2.29) \quad B(0, \kappa_2^2 \rho_2) \cap \{x \in \bar{B}_{R_0}, f_1(x) \geq 0\} \neq \emptyset.$$

Then we have

$$(2.30) \quad |f_2''(0)_-| \leq C_3 \kappa_2 \rho_2,$$

where  $f_2''(0)_-$  stands for the negative part of the quadratic form  $f_2''(0)$ . Note that, whenever (2.29) is violated, we get  $B(0, \kappa_2^2 \rho_2) \subset \{x \in \bar{B}_{R_0}, f_1(x) < 0\}$  (note that  $\kappa_2^2 \rho_2 \leq \rho_2 \leq R_0$ ) and thus

$$(2.31) \quad \text{distance}(0, \{x \in \bar{B}_{R_0}, f_1(x) \geq 0\}) \geq \kappa_2^2 \rho_2.$$

### 2.3. Inequalities for symbols

The next statement (theorem 2.3.1 in [22]) is a (not-so-easy) consequence of the previous lemmas. A slightly weaker version of this theorem appeared for the first time in Dencker's preprint [7] and is certainly one of the main novelties brought forward by this author.

**THEOREM 2.11.** — *Let  $q$  be a symbol satisfying (2.1-2) and  $\delta_0, \mu, \nu$  as defined above in (2.7), (2.13) and (2.16). For the real numbers  $t', t, t''$ , and  $X \in \mathbb{R}^{2n}$ , we define*

$$(2.32) \quad N(t', t'', X) = \frac{\langle \delta_0(t', X) \rangle}{\nu(t', X)^{1/2}} + \frac{\langle \delta_0(t'', X) \rangle}{\nu(t'', X)^{1/2}},$$

$$(2.33) \quad R(t, X) = \Lambda^{-1/2} \mu(t, X)^{1/2} \nu(t, X)^{-1/2} \langle \delta_0(t, X) \rangle.$$

Then there exists a constant  $C_0 \geq 1$ , depending only on a finite number of semi-norms of  $q$  in (2.1), such that, for  $t' \leq t \leq t''$ , we have

$$(2.34) \quad C_0^{-1} R(t, X) \leq N(t', t'', X) + \frac{\delta_0(t'', X) - \delta_0(t, X)}{\nu(t'', X)^{1/2}} + \frac{\delta_0(t, X) - \delta_0(t', X)}{\nu(t', X)^{1/2}}.$$

**2.4. Quasi-convexity**

A differentiable function  $\psi$  of one variable is said to be quasi-convex on  $\mathbb{R}$  if  $\dot{\psi}(t)$  does not change sign from + to - for increasing  $t$  (see [20]). In particular, a differentiable convex function is such that  $\dot{\psi}(t)$  is increasing and is thus quasi-convex.

DEFINITION 2.12. — Let  $\sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be an increasing function,  $C_1 > 0$  and let  $\rho_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . We shall say that  $\rho_1$  is quasi-convex with respect to  $(C_1, \sigma_1)$  if for  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ ,

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \implies \rho_1(t_2) \leq C_1 \max(\rho_1(t_1), \rho_1(t_3)) + \sigma_1(t_3) - \sigma_1(t_1).$$

When  $\sigma_1$  is a constant function and  $C_1 = 1$ , this is the definition of quasi-convexity. Let  $\sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be an increasing function and let  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . We define

$$(2.35) \quad \rho_1(t) = \inf_{t' \leq t \leq t''} (\omega(t') + \omega(t'') + \sigma_1(t'') - \sigma_1(t')).$$

Then the function  $\rho_1$  is quasi-convex with respect to  $(2, \sigma_1)$ .

The following lemma (lemma 2.4.3 in [22]) is due to L. Hörmander [13].

LEMMA 2.13. — Let  $\sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be an increasing function and let  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Let  $T > 0$  be given. We consider the function  $\rho_1$  as given in Definition 2.12 and we define

$$(2.36) \quad \Theta_T(t) = \sup_{-T \leq s \leq t} \left\{ \sigma_1(s) - \sigma_1(t) + \frac{1}{2T} \int_s^t \rho_1(r) dr - \rho_1(s) \right\}.$$

Then we have

$$(2.37) \quad 2T \partial_t (\Theta_T + \sigma_1) \geq \rho_1, \quad \text{and for } |t| \leq T, \quad |\Theta_T(t)| \leq \rho_1(t).$$

DEFINITION 2.14. — For  $T > 0, X \in \mathbb{R}^{2n}, |t| \leq T$ , we define

$$(2.38) \quad \omega(t, X) = \frac{\langle \delta_0(t, X) \rangle}{\nu(t, X)^{1/2}}, \quad \sigma_1(t, X) = \delta_0(t, X), \quad \eta(t, X) = \int_{-T}^t \delta_0(s, X) \Lambda^{-1/2} ds + 2T,$$

where  $\delta_0, \nu$  are defined in (2.7), (2.16). For  $T > 0, (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ , we define  $\Theta(t, X)$  by the formula (2.36),

$$(2.39) \quad \Theta(t, X) = \sup_{-T \leq s \leq t} \left\{ \sigma_1(s, X) - \sigma_1(t, X) + \frac{1}{2T} \int_s^t \rho_1(r, X) dr - \rho_1(s, X) \right\},$$

where  $\rho_1$  is defined by (2.35). We define also

$$(2.40) \quad m(t, X) = \delta_0(t, X) + \Theta(t, X) + T^{-1} \delta_0(t, X) \eta(t, X).$$

The next statement is theorem 2.4.5 in [22]. The reader may be interested in checking that it is indeed the term  $\eta$ , defined above in (2.38), which allows us to cut the loss of derivatives from 2 to 3/2.

THEOREM 2.15. — *With the notations above for  $\Theta, \rho_1, m$ , with  $R$  and  $C_0$  defined in Theorem 2.11, we have for  $T > 0, |t| \leq T, X \in \mathbb{R}^{2n}, \Lambda \geq 1$ ,*

$$(2.41) \quad |\Theta(t, X)| \leq \rho_1(t, X) \leq 2 \frac{\langle \delta_0(t, X) \rangle}{\nu(t, X)^{1/2}}, \quad |\sigma_1(t, X)| = |\delta_0(t, X)|,$$

$$(2.42) \quad C_0^{-1} R(t, X) \leq \rho_1(t, X) \leq 2T \frac{\partial}{\partial t} (\Theta(t, X) + \sigma_1(t, X)),$$

$$(2.43) \quad 0 \leq \eta(t, X) \leq 4T, \quad \frac{d}{dt} (\delta_0 \eta) \geq \delta_0^2 \Lambda^{-1/2}, \quad |\eta'_X(t, X)| \leq 4T \Lambda^{-1/2},$$

$$(2.44) \quad T \frac{d}{dt} m \geq \frac{1}{2} \rho_1 + \delta_0^2 \Lambda^{-1/2} \geq \frac{1}{2C_0} R + \delta_0^2 \Lambda^{-1/2} \geq \frac{1}{2^{3/2} C_0} \langle \delta_0 \rangle^2 \Lambda^{-1/2}.$$

### 3. ENERGY ESTIMATES

#### 3.1. Preliminaries

DEFINITION 3.1. — *Let  $T > 0$  be given. With  $m$  defined in (2.40), we define for  $|t| \leq T$ ,*

$$(3.1) \quad M(t) = m(t, X)^{\text{Wick}},$$

where the Wick quantization is given by the definition 5.1 in the appendix.

#### 3.2. Stationary estimates for the model cases

Let  $T > 0$  be given and  $Q(t) = q(t)^w$  given by (2.1-2). We define  $M(t)$  according to (3.1). We consider

$$(3.2) \quad \Re(Q(t)M(t)) = \frac{1}{2} Q(t)M(t) + \frac{1}{2} M(t)Q(t) = P(t).$$

We have, omitting now the variable  $t$  fixed here,

$$(3.3) \quad P = \Re \left[ q^w (\delta_0 (1 + T^{-1} \eta))^{\text{Wick}} + q^w \Theta^{\text{Wick}} \right].$$

Following the section 3.2 in [22], we discuss now the various model cases that could occur for the symbol  $q(t, X)$  when  $t$  is fixed.

*3.2.1. The gradient points.* — Let us assume first that  $q = \Lambda^{-1/2} \mu^{1/2} \nu^{1/2} \beta e_0$  with  $\beta \in S(\nu^{1/2}, \nu^{-1} \Gamma), 1 \leq e_0 \in S(1, \nu^{-1} \Gamma)$  and  $\delta_0 = \beta$ . Moreover, we assume  $0 \leq T^{-1} \eta \leq 4, T^{-1} |\eta'| \leq 4 \Lambda^{-1/2}, |\Theta| \leq C \langle \delta_0 \rangle \nu^{-1/2}$ . Here  $\Lambda, \mu, \nu$  are assumed to be positive constants such that  $\Lambda \geq \mu \geq \nu \geq 1$ . After a rather simple but delicate discussion involving various properties of the Wick quantization, we get

$$(3.4) \quad \Re(QM) + S(\Lambda^{-1/2} \mu^{1/2} \nu^{-1/2}, \Gamma)^w \geq 0.$$

3.2.2. *The nonnegative points.* — Let us assume now that  $q \geq 0$ ,  $q \in S(\Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}\nu, \nu^{-1}\Gamma)$ ,  $\gamma_0\nu^{1/2} \leq \delta_0 \leq \gamma_0^{-1}\nu^{1/2}$  with a positive fixed constant  $\gamma_0$ . Moreover, we assume  $0 \leq T^{-1}\eta \leq 4, T^{-1}|\eta'| \leq 4\Lambda^{-1/2}$ ,  $|\Theta(X)| \leq C$ ,  $\Theta$  real-valued. Here  $\Lambda, \mu, \nu$  are assumed to be positive constants such that  $\Lambda \geq \mu \geq \nu \geq 1$ . We start over our discussion from the identity (3.3):

$$(3.5) \quad P = \Re \left[ q^w \left( \delta_0(1 + T^{-1}\eta) + \Theta \right)^{\text{Wick}} \right].$$

Some arguments of symbolic calculus and the Fefferman-Phong inequality ([12]) yield

$$(3.6) \quad \Re(QM) + S(\Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}, \Gamma)^w \geq 0.$$

The discussion is analogous for the nonpositive points and the negligible points.

### 3.3. Stationary estimates

Following the section 3.3 in [22], we get the following result as a consequence of section 3.2.

LEMMA 3.2. — *Let  $p$  be the Weyl symbol of  $P$  defined in (3.3) and  $\tilde{\Theta} = \Theta * 2^n \exp -2\pi\Gamma$ , where  $\Theta$  is defined in (2.39) (and satisfies (2.41)). Then we have*

$$(3.7) \quad p(t, X) \equiv p_0(t, X) = q(t, X) \left( \delta_0(1 + T^{-1}\eta) * 2^n \exp -2\pi\Gamma \right) + q(t, X)\tilde{\Theta}(t, X),$$

modulo  $S(\Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}\nu^{-1/2}\langle \delta_0 \rangle, \Gamma)$ .

Now, we shall use a partition of unity  $1 = \sum_k \chi_k^2$  related to the metric  $\nu(t, X)^{-1}\Gamma$  and a sequence  $(\psi_k)$  as in the lemma 1.6. We have, omitting the variable  $t$ , with  $p_0$  defined in the previous lemma,

$$p_0(X) = \sum_k \chi_k(X)^2 q(X) \int \delta_0(Y)(1 + T^{-1}\eta(Y))2^n \exp -2\pi\Gamma(X - Y)dY \\ + \sum_k \chi_k(X)^2 q(X) \int \Theta(Y)2^n \exp -2\pi\Gamma(X - Y)dY.$$

We obtain, assuming  $\delta_0 = \delta_{0k}, \Theta = \Theta_k, q = q_k$  on  $U_k$ ,

$$(3.8) \quad p_0 = \sum_k \chi_k^2 q_k (\delta_{0k}(1 + T^{-1}\eta) * 2^n \exp -2\pi\Gamma) + \sum_k \chi_k^2 q_k (\Theta_k * 2^n \exp -2\pi\Gamma) \\ + S(\Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}\nu^{-\infty}, \Gamma).$$

It is then rather straightforward to get the following lemma (cf. lemma 3.3.3 in [22]).

LEMMA 3.3. — *With  $\tilde{\Theta}_k = \Theta_k * 2^n \exp -2\pi\Gamma$ ,  $d_k = \delta_{0k}(1 + T^{-1}\eta) * 2^n \exp -2\pi\Gamma$  and  $q_k, \chi_k$  defined above, we have*

$$(3.9) \quad \sum_k \chi_k \# q_k d_k \# \chi_k + \sum_k \chi_k \# q_k \tilde{\Theta}_k \# \chi_k = p_0 + S(\Lambda^{-1/2}\mu^{1/2}\nu^{-1/2}\langle \delta_0 \rangle, \Gamma).$$

From this, we can obtain the following result (cf. proposition 3.3.4 in [22]).

PROPOSITION 3.4. — Let  $T > 0$  be given and  $Q(t) = q(t)^w$  given by (2.1-2). We define  $M(t)$  according to (3.1). Then, with a partition of unity  $1 = \sum_k \chi_k^2$  related to the metric  $\nu(t, X)^{-1}\Gamma$  we have

$$\Re(Q(t)M(t)) = \sum_k \chi_k^w \Re(q_k^w d_k^w + q_k^w \tilde{\Theta}_k^w) \chi_k^w + S(\Lambda^{-1/2} \mu^{1/2} \langle \delta_0 \rangle \nu^{-1/2}, \Gamma)^w$$

$$\text{and } \Re(Q(t)M(t)) + S(\Lambda^{-1/2} \mu^{1/2} \langle \delta_0 \rangle \nu^{-1/2}, \Gamma)^w \geq 0.$$

### 3.4. The multiplier method

THEOREM 3.5. — Let  $T > 0$  be given and  $Q(t) = q(t)^w$  given by (2.1-2). We define  $M(t)$  according to (3.1). There exist  $T_0 > 0$  and  $c_0 > 0$  depending only on a finite number of  $\gamma_k$  in (2.1) such that, for  $0 < T \leq T_0$ , with  $D(t, X) = \langle \delta_0(t, X) \rangle$  ( $D$  is Lipschitz continuous with Lipschitz constant 2, as  $\delta_0$  in (2.8) and thus a  $\Gamma$ -weight),

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt} M(t) + 2\Re(Q(t)M(t)) \geq T^{-1} (D^2)^{\text{Wick}} \Lambda^{-1/2} c_0.$$

Moreover we have with  $m$  defined in (2.40),  $\tilde{m}(t, \cdot) = m(t, \cdot) * 2^n \exp -2\pi\Gamma$ ,

$$(3.11) \quad M(t) = m(t, X)^{\text{Wick}} = \tilde{m}(t, X)^w, \text{ with } \tilde{m} \in S_1(D, D^{-2}\Gamma) + S(1, \Gamma),$$

where the set of symbols  $S_1(D, D^{-2}\Gamma)$  is defined in section 5.2 of our appendix. We have also

$$(3.12) \quad m(t, X) = a(t, X) + b(t, X), \quad |a/D| + |a'_X| + |b| \text{ bounded, } \dot{m} \geq 0, \\ a = \delta_0(1 + T^{-1}\eta), \quad b = \tilde{\Theta}.$$

This theorem is a direct consequence of the previous lemmas and propositions and is Theorem 3.4.1 in [22]. We shall not give its complete proof here, but we wish to make a few points about the loss of derivatives in a semi-classical framework.

Remark 3.6. — Let us check that this theorem gives an estimate with loss of 3/2 derivatives for

$$(3.13) \quad L = D_t + iQ(t).$$

We compute for  $u \in C_c^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$ ,  $\text{supp } u \subset [-T_0, T_0]$ , the quantity  $\langle Lu, iMu \rangle$  and we use (3.10):

$$2\Re\langle Lu, iMu \rangle = \langle \dot{M}u, u \rangle + 2\Re\langle Qu, Mu \rangle \geq c_0 T^{-1} \Lambda^{-1/2} \langle (1 + \delta_0^2(t, \cdot))^{\text{Wick}} u, u \rangle.$$

We get, for all positive  $\alpha$ ,

$$c_0 T^{-1} \Lambda^{-1/2} \langle (1 + \delta_0^2(t, \cdot))^{\text{Wick}} u, u \rangle \leq \alpha^{-1} \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}^2 + \alpha \|Mu\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}^2$$

and from the lemma A.1.4 in [22], with a positive fixed constant  $C_1$ , we obtain

$$c_0 T^{-1} \Lambda^{-1/2} \langle (1 + \delta_0^2(t, \cdot))^{\text{Wick}} u, u \rangle \leq \alpha^{-1} \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}^2 + \alpha C_1 \langle (1 + \delta_0^2(t, \cdot))^{\text{Wick}} u, u \rangle.$$

Choosing now  $\alpha = \frac{c_0}{2C_1T\Lambda^{1/2}}$ , we obtain

$$(3.14) \quad \frac{1}{2}c_0T^{-1}\Lambda^{-1/2}\langle(1+\delta_0^2(t,\cdot))^{\text{Wick}}u,u\rangle \leq \frac{2C_1T}{c_0}\Lambda^{1/2}\|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}^2$$

and thus with a fixed positive constant  $c_1$ ,  $\|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}^2 \geq c_1^2T^{-2}\Lambda^{-1}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}^2$ , yielding

$$(3.15) \quad \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \geq c_1T^{-1}\Lambda^{-1/2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})},$$

which is indeed an estimate with loss of  $3/2$  derivatives with respect to the elliptic estimate  $\|Lu\| \gtrsim \Lambda\|u\|$ . We can notice also, that in the region where  $\langle\delta_0\rangle \sim \Lambda^{1/2}$ , the estimate (3.14) loses just one derivative and is an  $L^2 - L^2$  estimate.

#### 4. FROM SEMI-CLASSICAL TO LOCAL ESTIMATES

The theorem 3.5 and the discussion in the remark 3.6 indicate that we are in a good position to prove an estimate with loss of  $3/2$  derivatives for the transposed of an operator satisfying condition  $(\psi)$ , as defined in definition 1.1. However since the loss of derivatives is strictly larger than 1, we cannot patch together these weak estimates, simply because the commutators with a partition of unity would be of order 0, giving  $L^2$ -norms as remainders whereas we dominate only a  $H^{-1/2}$  norm. Another seemingly paradoxical feature of this problem is that the result should be invariant by “nice” perturbations of order 0, and since these perturbations have a size larger than what is controlled by the inequality, this triggers another difficulty. Of course the word “nice” in the previous sentence is important and means that the perturbations should be limited to have symbols in a very standard class of pseudodifferential operators. That situation of having to cope with a large loss of derivatives is quite common for multiple characteristics operators, and we shall use the inequalities (3.10) which can actually be patched together; they are in principle quite close to the construction of a parametrix. The details of the remaining arguments can be found in section 4 of [22]. Although the semi-classical result of remark 3.6 appears as the main step for the proof, it turns out that some significant difficulties remain to deal with the weak estimate and to sort out pseudodifferential operators in  $n$  dimensions depending on a real parameter from homogeneous pseudodifferential operators in  $n+1$  dimensions. The following result is Theorem 4.1.9 in [22].

**THEOREM 4.1.** — *Let  $f(t,x,\xi)$  be a smooth real-valued function defined on  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , satisfying (2.2) and*

$$(4.1) \quad \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}}} |(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f)(t,x,\xi)|(1+|\xi|)^{-1+|\beta|} = C_{\alpha\beta} < \infty.$$

Let  $f_0(t, x, \xi)$  be a smooth complex-valued function defined on  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , such that  $\langle \xi \rangle f_0(t, x, \xi)$  satisfies (4.1). Then there exists  $T_0 > 0, c_0 > 0$  depending on a finite number of seminorms of  $f, f_0$ , such that, for all  $T \leq T_0$  and all  $u \in C_c^\infty((-T, T); \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$

$$\|D_t u + if(t, x, \xi)^w u + f_0(t, x, \xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \geq c_0 T^{-1} \left( \int \|u(t)\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2}.$$

The remaining part of the proof is concerned with the delicate construction of an homogeneous microlocalization for a pseudodifferential operator in  $n + 1$  dimensions with some tensor-product structure related to the normal form of the principal symbol. The lengthy details are given in sections 4.2-3-4 of [22].

## 5. APPENDIX

### 5.1. Wick quantization

We recall here some facts on the so-called Wick quantization, as used in [26]-[27]-[28].

DEFINITION 5.1. — Let  $Y = (y, \eta)$  be a point in  $\mathbb{R}^{2n}$ . The operator  $\Sigma_Y$  is defined as  $[2^n e^{-2\pi|\cdot - Y|^2}]^w$ . This is a rank-one orthogonal projection:  $\Sigma_Y u = (Wu)(Y)\tau_Y \varphi$  with  $(Wu)(Y) = \langle u, \tau_Y \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ , where  $\varphi(x) = 2^{n/4} e^{-\pi|x|^2}$  and  $(\tau_{y, \eta} \varphi)(x) = \varphi(x - y) e^{2i\pi \langle x - \frac{y}{2}, \eta \rangle}$ . Let  $a$  be in  $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . The Wick quantization of  $a$  is defined as

$$(5.1) \quad a^{\text{Wick}} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(Y) \Sigma_Y dY.$$

The following proposition is classical and easy (see e.g. section 5 in [27]).

#### PROPOSITION 5.2

(i) Let  $a$  be in  $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Then  $a^{\text{Wick}} = W^* a^\mu W$  and  $1^{\text{Wick}} = Id_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  where  $W$  is the isometric mapping from  $L^2(\mathbb{R}^n)$  to  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  given above, and  $a^\mu$  the operator of multiplication by  $a$  in  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ . The operator  $\pi_H = WW^*$  is the orthogonal projection on a closed proper subspace  $H$  of  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ . Moreover, we have

$$(5.2) \quad \|a^{\text{Wick}}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})},$$

$$(5.3) \quad a(X) \geq 0 \text{ for all } X \text{ implies } a^{\text{Wick}} \geq 0.$$

(ii) Let  $m$  be a real number and  $p \in S(\Lambda^m, \Lambda^{-1}\Gamma)$ . Then  $p^{\text{Wick}} = p^w + r(p)^w$ , with  $r(p) \in S(\Lambda^{m-1}, \Lambda^{-1}\Gamma)$  so that the mapping  $p \mapsto r(p)$  is continuous. More precisely, one has

$$r(p)(X) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1 - \theta)p''(X + \theta Y)Y^2 e^{-2\pi\Gamma(Y)} 2^n dY d\theta.$$

Note that  $r(p) = 0$  if  $p$  is affine.

(iii) For  $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , the Weyl symbol of  $a^{\text{Wick}}$  is

$$(5.4) \quad a * 2^n \exp -2\pi\Gamma \quad \text{which belongs to } S(1, \Gamma) \text{ with } k^{\text{th}}\text{-seminorm } c(k)\|a\|_{L^\infty}.$$

(iv) Let  $\mathbb{R} \ni t \mapsto a(t, X) \in \mathbb{R}$  such that, for  $t \leq s$ ,  $a(t, X) \leq a(s, X)$ . Then, for  $u \in C_c^1(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}^n))$ , assuming  $a(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,

$$(5.5) \quad \int_{\mathbb{R}} \Re \langle D_t u(t), ia(t)^{\text{Wick}} u(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \geq 0.$$

(v) With the operator  $\Sigma_Y$  given in Definition 5.1, we have the estimate

$$(5.6) \quad \|\Sigma_Y \Sigma_Z\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq 2^n e^{-\frac{\pi}{2}\Gamma(Y-Z)}.$$

Note that (5.5) is simply a way of writing that  $\frac{d}{dt}(a(t)^{\text{Wick}}) \geq 0$ , which is a consequence of (5.3) and of the non-decreasing assumption made on  $t \mapsto a(t, X)$ .

### 5.2. Some classes of symbols

Let  $g$  be an admissible metric on  $\mathbb{R}^{2n}$  and  $m$  be a  $g$ -weight (see Definition 1.4). Then, at each point  $X \in \mathbb{R}^{2n}$ , we can define a metric  $g_X^\sharp$  by taking the geometric mean of  $g_X, g_X^\sigma$  so that in particular

$$(5.7) \quad g_X \leq g_X^\sharp = (g_X^\sharp)^\sigma \leq g_X^\sigma.$$

We define

$$(5.8) \quad h(X) = \sup_{g_X^\sharp(T)=1} g_X(T)$$

and we note that whenever  $g^\sigma = \lambda^2 g$  we get from the definition 1.4 that  $g^\sharp = \lambda_g g$  and  $\lambda_g = 1/h$ .

DEFINITION 5.3. — Let  $l$  be a nonnegative integer. We define the set  $S_l(m, g)$  as the set of smooth functions  $a$  defined on  $\mathbb{R}^{2n}$  such that  $a$  satisfies the estimates of  $S(m, g)$  for derivatives of order  $\leq l$ , and the estimates of  $S(m, g^\sharp)$  for derivatives of order  $\geq l + 1$ , which means

$$|a^{(k)}(X)T^k| \leq C_k m(X) \times \begin{cases} g_X(T)^{k/2} & \text{if } k \leq l, \\ g_X^\sharp(T)^{k/2} h(X)^{\frac{l+1}{2}} & \text{if } k \geq l + 1, \end{cases} \quad \text{with } h(X) = \sup_{g_X^\sharp(T)=1} g_X(T).$$



Note that since  $h \leq 1$  and  $g \leq hg^\sharp$ , we get  $S(m, g) \subset S_l(m, g)$ . If  $g = \lambda(X)^{-1}\Gamma_X$ , where  $\lambda(X)$  is positive (scalar) and  $\Gamma_X = \Gamma_X^\sigma$ , then  $g_X^\sharp = \Gamma_X$  and  $a$  belongs to  $S_l(m, \lambda^{-1}\Gamma)$  means

$$|a^{(k)}(X)|_{\Gamma_X} \leq C_k m(X) \times \begin{cases} \lambda(X)^{-k/2} & \text{if } k \leq l, \\ \lambda(X)^{-l/2} & \text{if } k \geq l + 1. \end{cases}$$

Moreover, if  $g \equiv g^\sharp$ , then for all  $l$ ,  $S(m, g) = S_l(m, g)$ .

## REFERENCES

- [1] G. BACHELARD – *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, Paris, 1938.
- [2] R. BEALS & C. FEFFERMAN – On local solvability of linear partial differential equations, *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), p. 482–498.
- [3] J.-M. BONY – Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **19** (1969), no. 1, p. 277–304.
- [4] J.-M. BONY & J.-Y. CHEMIN – Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, *Bull. Soc. Math. France* **122** (1994), no. 1, p. 77–118.
- [5] J.-M. BONY & N. LERNER – Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur. I, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989), no. 3, p. 377–433.
- [6] H. BRÉZIS – On a characterization of flow-invariant sets, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), p. 261–263.
- [7] N. DENCKER – On the sufficiency of condition  $(\psi)$ , preprint, May 22, 2001.
- [8] ———, *The solvability of non- $L^2$ -solvable operators*, 1996, Saint Jean de Monts meeting.
- [9] ———, Estimates and solvability, *Ark. Mat.* **37** (1999), no. 2, p. 221–243.
- [10] ———, The solvability of pseudodifferential operators, in *Phase space analysis of PDE*, Centro de Giorgi, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2004, p. 175–200.
- [11] ———, The resolution of the Nirenberg-Treves conjecture, *Ann. of Math. (2)* **163** (2006), p. 405–444.
- [12] C. FEFFERMAN & D. H. PHONG – On positivity of pseudo-differential operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **75** (1978), no. 10, p. 4673–4674.
- [13] L. HÖRMANDER – Private communications, september 2002 – august 2004.
- [14] ———, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.* **94** (1955), p. 161–248.
- [15] ———, Differential equations without solutions, *Math. Ann.* **140** (1960), p. 169–173.
- [16] ———, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, *Ann. of Math. (2)* **83** (1966), p. 129–209.

- [17] ———, Propagation of singularities and semiglobal existence theorems for (pseudo)differential operators of principal type, *Ann. of Math. (2)* **108** (1978), no. 3, p. 569–609.
- [18] ———, *Pseudo-differential operators of principal type. Singularities in boundary value problems*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Boston, London, 1981.
- [19] ———, *The analysis of linear partial differential operators I–IV*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vols. 256-257, 274-275, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [20] ———, *Notions of convexity*, Progress in Mathematics, vol. 127, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [21] ———, On the solvability of pseudodifferential equations. Structure of solutions of differential equations, in *Proceedings of the Taniguchi Symposium held in Katata, June 26–30, 1995, and the RIMS Symposium held at Kyoto University, Kyoto, July 3–7, 1995* (M. Morimoto & T. Kawai, eds.), World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [22] N. LERNER – Cutting the loss of derivatives for solvability under condition  $(\psi)$ , <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00016103>, december 2005, to appear in *Bull. Soc. Math. France*.
- [23] ———, Sufficiency of condition  $(\psi)$  for local solvability in two dimensions, *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 2, p. 243–258.
- [24] ———, An iff solvability condition for the oblique derivative problem, Séminaire EDP, École polytechnique, exposé 18, 1990–91.
- [25] ———, Nonsolvability in  $L^2$  for a first order operator satisfying condition  $(\psi)$ , *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), no. 2, p. 363–393.
- [26] ———, Energy methods via coherent states and advanced pseudo-differential calculus, in *Multidimensional complex analysis and partial differential equations (São Carlos, 1995)*, Contemp. Math., vol. 205, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, p. 177–201.
- [27] ———, Perturbation and energy estimates, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **31** (1998), no. 6, p. 843–886.
- [28] ———, When is a pseudo-differential equation solvable?, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 2, p. 443–460.
- [29] ———, Solving pseudo-differential equations, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians II (Beijing 2002)*, Higher Ed. Press, 2002, p. 711–720.
- [30] H. LEWY – An example of a smooth linear partial differential equation without solution, *Ann. of Math. (2)* **66** (1957), p. 155–158.
- [31] S. MIZOHATA – Solutions nulles et solutions non analytiques, *J. Math. Kyoto Univ.* **1** (1961/1962), p. 271–302.

- [32] R. D. MOYER – Local solvability in two dimensions: necessary conditions for the principal type case, mimeographed manuscript, University of Kansas, 1978.
- [33] L. NIRENBERG & F. TREVES – Solvability of a first order linear partial differential equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **16** (1963), p. 331–351.
- [34] ———, On local solvability of linear partial differential equations I. Necessary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), p. 1–38.
- [35] ———, On local solvability of linear partial differential equations II. Sufficient conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), p. 459–509.
- [36] ———, A correction to: “On local solvability of linear partial differential equations II. Sufficient conditions” (*Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), p. 459–509), *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971), no. 2, p. 279–288.
- [37] J.-M. TRÉPREAU – Sur la résolubilité analytique microlocale des opérateurs pseudo-différentiels de type principal, Thèse, Université de Reims, 1984.

Nicolas LERNER

Projet analyse fonctionnelle

Institut de Mathématiques de Jussieu

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

175 rue du Chevaleret

F-75013 Paris

*E-mail* : [lerner@math.jussieu.fr](mailto:lerner@math.jussieu.fr)



**RIGIDITY RESULTS FOR BERNOULLI ACTIONS  
AND THEIR VON NEUMANN ALGEBRAS**

[after Sorin Popa]

by **Stefaan VAES**

**Contents**

1. Introduction .....	237
2. Preliminaries and conventions .....	246
3. The malleability property of Bernoulli actions .....	249
4. Superrigidity for Bernoulli actions .....	251
5. Non-orbit equivalent actions and 1-cohomology .....	259
6. Intertwining rigid subalgebras of crossed products .....	261
7. Fundamental groups of type II <sub>1</sub> factors .....	264
8. From von Neumann equivalence to orbit equivalence .....	265
9. Strong rigidity for von Neumann algebras .....	271
10. Outer conjugacy of $w$ -rigid group actions on the hyperfinite II <sub>1</sub> factor .....	275
Appendix A. The basic construction and Hilbert modules .....	279
Appendix B. Relative property (T) and II <sub>1</sub> factors .....	281
Appendix C. Intertwining subalgebras using bimodules .....	283
Appendix D. Some results on (weakly) mixing actions .....	287
References .....	290

**1. INTRODUCTION**

Suppose that a countable group  $G$  acts freely and ergodically on the standard probability space  $(X, \mu)$  preserving the probability measure  $\mu$ . We are interested in several types of ‘isomorphisms’ between such actions. Two actions are said to be

- (1) *conjugate* if there exist a group isomorphism and a measure space isomorphism satisfying the obvious conjugacy formula;
- (2) *orbit equivalent* if there exists a measure space isomorphism sending orbits to orbits, i.e., the *equivalence relations* given by the orbits are isomorphic;
- (3) *von Neumann equivalent* if the crossed product von Neumann algebras are isomorphic.

Note that the *crossed product* construction<sup>(1)</sup> has been introduced by Murray and von Neumann [41], who called it the *group measure space construction*.

It is clear that conjugacy of two actions implies orbit equivalence. Since the crossed product von Neumann algebra can be defined directly from the equivalence relation given by the orbits, orbit equivalence implies von Neumann equivalence. *Rigidity results* provide the converse implications for certain actions of certain groups. This is a highly non-trivial matter. Dye [16, 17] proved that all free ergodic measure preserving actions of groups with polynomial growth on the standard probability space are orbit equivalent. This result was extended to all *amenable groups* by Ornstein and Weiss [45]. Finally, Connes, Feldman and Weiss [10] showed that every ergodic amenable probability measure preserving countable equivalence relation is generated by a free  $\mathbb{Z}$ -action and is hence unique. Summarizing, for amenable group actions all information on the group, except its amenability, gets lost in the passage to the equivalence relation.

Concerning the relation between orbit equivalence and von Neumann equivalence, it was noted by Feldman and Moore [19] that the pair  $L^\infty(X, \mu) \subset L^\infty(X, \mu) \rtimes G$  remembers the equivalence relation. The abelian subalgebra  $L^\infty(X, \mu)$  is a so-called *Cartan subalgebra*. So, in order to deduce orbit equivalence from von Neumann equivalence, we need certain uniqueness results for Cartan subalgebras, which is an extremely hard problem. Connes and Jones [12] gave the first examples of non orbit equivalent, yet von Neumann equivalent actions.

In this talk, we discuss Popa's recent breakthrough rigidity results for Bernoulli actions<sup>(2)</sup> of Kazhdan groups. These results open a new era in von Neumann algebra theory, with striking applications in ergodic theory. The heart of Popa's work is his *deformation/rigidity strategy*: he discovered families of von Neumann algebras with a rigid subalgebra but yet with just enough deformation properties in order for the rigid part to be uniquely determined inside the ambient algebra (up to unitary conjugacy). This leads to far reaching classification results for these families of von Neumann algebras. Popa considered the deformation/rigidity strategy for the first time in [54]. In [52], he used it to deduce orbit equivalence from mere von Neumann equivalence between certain group actions and to give the first examples of  $\text{II}_1$  factors with trivial fundamental group, through an application of Gaboriau's  $\ell^2$  Betti numbers of equivalence relations [22]. Deformation/rigidity arguments are again the crucial ingredient in the papers [48, 55, 56, 53] that we discuss in this talk and they are applied in [29], in the study of amalgamated free products. These ideas may lead to

<sup>(1)</sup>The crossed product von Neumann algebra  $L^\infty(X, \mu) \rtimes G$  contains a copy of  $L^\infty(X, \mu)$  and a copy of the group  $G$  by unitary elements in the algebra, and the commutation relations between both are given by the action of  $G$  on  $(X, \mu)$ .

<sup>(2)</sup>Every discrete group  $G$  acts on  $(X, \mu) = \prod_{g \in G} (X_0, \mu_0)$ , by shifting the Cartesian product. Here  $(X_0, \mu_0)$  is the standard non-atomic probability space and the action is called the Bernoulli action of  $G$ .

many more applications in von Neumann algebra and ergodic theory (see *e.g.* the new papers [28, 58] written since this talk was given).

In the papers discussed in this talk, the *rigidity* comes from the group side and is given by Kazhdan's property (T) [15, 36] and more generally, by the relative property (T) of Kazhdan-Margulis (see [26] and Valette's Bourbaki seminar [63] for details): the groups dealt with contain an infinite normal subgroup with the relative property (T) and are called *w-rigid groups*. Popa discovered a strong *deformation property* shared by the Bernoulli actions, and called it *malleability*. In a sense, a Bernoulli action can be continuously deformed until it becomes orthogonal to its initial position. In order to exploit the tension between the deformation of the action and the rigidity of the group, yet another technique comes in. Using *bimodules* (Connes' correspondences), Popa developed a very strong method to prove that two subalgebras of a von Neumann algebra are unitarily conjugate. Note that he used this bimodule technique in many different settings, see [29, 46, 55, 56, 52, 51].

The following are the two main results of [48, 55, 56] and are discussed below. The *orbit equivalence superrigidity theorem* states that the equivalence relation given by the orbits of a Bernoulli action of a *w-rigid* group, entirely remembers the group and the action. The *von Neumann strong rigidity theorem* roughly says that whenever a Bernoulli action is von Neumann equivalent with a free ergodic action of a *w-rigid* group, the actions are actually conjugate. It is the first theorem in the literature deducing conjugacy of actions out of von Neumann equivalence. The methods and ideas behind these far reaching results are fundamentally *operator algebraic* and yield striking theorems in *ergodic theory*.

### Some important conventions

All probability spaces in this talk are standard. All actions of countable groups  $G$  on  $(X, \mu)$  are supposed to preserve the probability measure  $\mu$ . All statements about elements of  $(X, \mu)$  only hold almost everywhere. A *w-rigid group* is a countable group that admits an infinite normal subgroup with the relative property (T).

### Orbit equivalence superrigidity

In [48], the deformation/rigidity technique leads to the following orbit equivalence superrigidity theorem.

**THEOREM (Theorem 4.4).** — *Let  $G \curvearrowright (X, \mu)$  be the Bernoulli action of a *w-rigid* group  $G$  as above. Suppose that  $G$  does not have finite normal subgroups. If the restriction to  $Y \subset X$  of the equivalence relation given by  $G \curvearrowright X$  is given by the orbits of  $\Gamma \curvearrowright Y$  for some group  $\Gamma$  acting freely and ergodically on  $Y$ , then, up to measure zero,  $Y = X$  and the actions of  $G$  and  $\Gamma$  are conjugate through a group isomorphism.*

The theorem implies as well that the restriction to a Borel set of measure  $0 < \mu(Y) < 1$ , of the Bernoulli action of a  $w$ -rigid group  $G$  without finite normal subgroups, yields an ergodic probability measure preserving countable equivalence relation that cannot be generated by a free action of a group. The first examples of this phenomenon – answering a question of Feldman and Moore – were given by Furman in [21]. Dropping the ergodicity, examples were given before by Adams in [1], who also provides examples in the Borel setting.

Popa proves the orbit equivalence superrigidity for the Bernoulli action of  $G$  on  $X$  using his even stronger *cocycle superrigidity theorem*: any 1-cocycle for the action  $G \curvearrowright X$  with values in a discrete group  $\Gamma$  is cohomologous to a homomorphism of  $G$  to  $\Gamma$ . The origin of orbit equivalence rigidity and cocycle rigidity theory lies in Zimmer's pioneering work. Zimmer proved in [66] his celebrated cocycle rigidity theorem and used it to obtain the first orbit equivalence rigidity results (see Section 5.2 in [67]). Since Zimmer's theorem deals with cocycles taking values in linear groups, he obtains orbit equivalence rigidity results where both groups are assumed to be linear (see [68]). Furman developed in [20, 21] a new technique and obtains an orbit equivalence superrigidity theorem with quite general ergodic actions of higher rank lattices on one side and an arbitrary free ergodic action on the other side. Note however that Furman's theorem nevertheless depends on Zimmer's cocycle rigidity theorem. We also mention the orbit equivalence superrigidity theorems obtained by Monod and Shalom [39] for certain actions of direct products of hyperbolic groups. An excellent overview of orbit equivalence rigidity theory can be found in Shalom's survey [61].

Zimmer's cocycle rigidity theorem was a deep generalization of Margulis' seminal superrigidity theory [38]. In particular, the mathematics behind involve the theory of algebraic groups and their lattices. On the other hand, Popa's technique to deal with 1-cocycles for Bernoulli actions is intrinsically operator algebraic.

As stated above, Popa uses his powerful *deformation/rigidity strategy* to prove the cocycle superrigidity theorem. Leaving aside several delicate passages, the argument goes as follows. A 1-cocycle  $\gamma$  for the Bernoulli action  $G \curvearrowright X$  of a  $w$ -rigid group  $G$ , can be interpreted in two ways as a 1-cocycle for the diagonal action  $G \curvearrowright X \times X$ , either as  $\gamma_1$ , only depending on the first variable, either as  $\gamma_2$ , only depending on the second variable. The malleability of the Bernoulli action (this is the deformation property) yields a continuous path joining  $\gamma_1$  to  $\gamma_2$ . The relative property (T) implies that, in cohomology, the 1-cocycle remains essentially constant along the continuous path. This yields  $\gamma_1 = \gamma_2$  in cohomology and the weak mixing property allows to conclude that  $\gamma$  is cohomologous to a homomorphism.

Let  $(\sigma_g)$  be the Bernoulli action of a  $w$ -rigid group  $G$  on  $(X, \mu)$ . Popa's cocycle superrigidity theorem covers his previous result [54, 57] identifying the 1-cohomology group  $H^1(\sigma)$  with the character group  $\text{Char } G$ . This result allows to compute as



well the 1-cohomology for quotients of Bernoulli actions, yielding the following result of [53].

**THEOREM (Theorem 5.3).** — *Let  $G$  be a  $w$ -rigid group. Then,  $G$  admits a continuous family of non-stably<sup>(3)</sup> orbit equivalent actions.*

Note that Popa does not only prove an existence result, but explicitly exhibits a continuous family of mutually non orbit equivalent actions. The existence of a continuum of non orbit equivalent actions of an infinite property (T) group had been established before in a non-constructive way by Hjorth [27], who exhibits a continuous family of actions such that every action in the family is orbit equivalent to at most countably many other actions of the family.

Finally note that the first concrete computations of 1-cohomology for ergodic group actions are due to Moore [40] and Gefter [23].

### Von Neumann strong rigidity

The culmination of Popa's work on Bernoulli actions is the following *von Neumann strong rigidity* theorem of [56]; it is the first theorem in the literature that deduces conjugacy of the actions from isomorphism of the crossed product von Neumann algebras.

**THEOREM (Theorem 9.1).** — *Let  $G$  be a group with infinite conjugacy classes and  $G \curvearrowright (X, \mu)$  its Bernoulli action as above. Let  $\Gamma$  be a  $w$ -rigid group that acts freely and ergodically on  $(Y, \eta)$ . If*

$$\theta : L^\infty(Y) \rtimes \Gamma \rightarrow p(L^\infty(X) \rtimes G)p$$

*is a \*-isomorphism for some projection  $p \in L^\infty(X) \rtimes G$ , then  $p = 1$ , the groups  $\Gamma$  and  $G$  are isomorphic and the actions of  $\Gamma$  and  $G$  are conjugate through this isomorphism.*

Note that in the conditions of the theorem, there is an assumption on the action on one side and an assumption on the group on the other side. As such, it is not a superrigidity theorem: one would like to obtain the same conclusion for any free ergodic action of any group  $\Gamma$  and for the Bernoulli action of a  $w$ -rigid ICC group  $G$ .

Another type of von Neumann rigidity has been obtained by Popa in [52, 51], deducing orbit equivalence from von Neumann equivalence. We just state the following particular case. Consider the usual action of  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  on  $\mathbb{T}^2$ . Whenever a free and ergodic action of a group  $\Gamma$  with the Haagerup property is von Neumann equivalent with the  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  action on  $\mathbb{T}^2$ , it actually is orbit equivalent with the latter. One should not hope to deduce a strong rigidity result yielding conjugacy of the actions: Monod and Shalom ([39], Theorem 2.27) proved that any free ergodic action of the

---

<sup>(3)</sup>See Definition 4.2.

free group  $\mathbb{F}_n$  is orbit equivalent with free ergodic actions of a continuum of non-isomorphic groups. Note that this also follows from Dye's result [16, 17] if we assume that every generator of  $\mathbb{F}_n$  acts ergodically.

## $\text{II}_1$ factors and their fundamental group

Let  $G$  act freely and ergodically on  $(X, \mu)$ . Freeness and ergodicity imply that the crossed product von Neumann algebra  $M := L^\infty(X, \mu) \rtimes G$  is a *factor* (the center of the algebra  $M$  is reduced to the scalars) and the invariant probability measure yields a finite trace on  $M$ . Altogether, we get that  $M$  is a so-called *type  $\text{II}_1$  factor*.

Another class of  $\text{II}_1$  factors arises as follows: for any countable group  $G$ , one considers the von Neumann algebra  $\mathcal{L}(G)$  generated by the left translation operators on the Hilbert space  $\ell^2(G)$ . The algebra  $\mathcal{L}(G)$  always admits a finite trace and it is a factor if and only if  $G$  has infinite conjugacy classes (ICC).

Let  $M$  be a  $\text{II}_1$  factor with normalized trace  $\tau$ . The *fundamental group* of  $M$ , introduced by Murray and von Neumann [42], is the subgroup of  $\mathbb{R}_+^*$  generated by the numbers  $\tau(p)$ , where  $p$  runs through the projections of  $M$  satisfying  $M \cong pMp$ . Murray and von Neumann showed in [42] that the fundamental group of the hyperfinite<sup>(4)</sup>  $\text{II}_1$  factor is  $\mathbb{R}_+^*$ . They also write that there is no reason to believe that the fundamental group of every  $\text{II}_1$  factor is  $\mathbb{R}_+^*$ . However, only forty years later, this intuition was proved to be correct, in a breakthrough paper of Connes [6]. Connes shows that the fundamental group of  $\mathcal{L}(G)$  is at most countable when  $G$  is an ICC group with Kazhdan's property (T). This can be considered as the first rigidity type result in the theory of von Neumann algebras. It was later refined by Golodets and Nessonov [24] to obtain  $\text{II}_1$  factors with countable fundamental group containing a prescribed countable subgroup of  $\mathbb{R}_+^*$ . However, until Popa's breakthroughs in [55, 52, 51], no precise computation of a fundamental group different from  $\mathbb{R}_+^*$  had been obtained.

Note in passing that Voiculescu proved in [64] that the fundamental group of  $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\infty)$  contains the positive rationals and that it was shown to be the whole of  $\mathbb{R}_+^*$  by Rădulescu in [59]. On the other hand, computation of the fundamental group of  $\mathcal{L}(\mathbb{F}_n)$  is equivalent with deciding on the (non)-isomorphism of the free group factors (see [18, 60]), which is a famous open problem in the subject.

Specializing the problem of Murray and von Neumann, Kadison [34] posed the following question: does there exist a  $\text{II}_1$  factor  $M$  not isomorphic to  $M_2(\mathbb{C}) \otimes M$ ? This question was answered affirmatively by Popa in [52], who showed that, among other examples,  $\mathcal{L}(G)$  has trivial fundamental group when  $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}^2$ . For a more elementary treatment of this example, see [51]. Note that Popa shows in [52] that the fundamental group of  $\mathcal{L}(G) = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rtimes L^\infty(\mathbb{T}^2)$  equals the fundamental group of the equivalence relation given by the orbits of  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^2$ . The latter

<sup>(4)</sup>The hyperfinite  $\text{II}_1$  factor is, up to isomorphism, the unique  $\text{II}_1$  factor that contains an increasing sequence of matrix algebras with weakly dense union.

reduces to 1 using Gaboriau's  $\ell^2$  Betti number invariants for equivalence relations, see [22]. We also refer to the Bourbaki seminar by Connes [9] on this part of Popa's oeuvre.

In [55], Popa goes much further and constructs  $\text{II}_1$  factors with an arbitrary countable fundamental group!

**THEOREM (Theorem 7.1).** — *Given a countable subgroup  $S \subset \mathbb{R}_+^*$  and a  $w$ -rigid ICC group  $G$  with  $\mathcal{L}(G)$  having trivial fundamental group, there exists an action of  $G$  on the hyperfinite  $\text{II}_1$ -factor  $\mathcal{R}$  such that the crossed product  $\mathcal{R} \rtimes G$  is a  $\text{II}_1$  factor with fundamental group  $S$ .*

The example par excellence of a group  $G$  satisfying the conditions of the theorem, is  $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ . Again, Popa does not establish a mere existence result: the actions considered are the so-called Connes-Størmer Bernoulli actions (see [13] and Section 3 below).

### Some comments on proving von Neumann strong rigidity

We explain how an isomorphism of crossed products forces, in certain cases, actions to be conjugate.

In a first step, using the *deformation/rigidity strategy*, Popa [55] shows the following result. Suppose that  $G \curvearrowright (X, \mu)$  is the Bernoulli action of an infinite group  $G$  and consider the crossed product  $L^\infty(X, \mu) \rtimes G$ . It is shown (see Theorem 6.3 below) that any subalgebra of  $L^\infty(X, \mu) \rtimes G$  with the relative property (T) can essentially be unitarily conjugated into  $\mathcal{L}(G)$ . Again leaving aside several delicate passages, the argument goes as follows. A subalgebra  $Q \subset L^\infty(X, \mu) \rtimes G$  with the relative property (T) is viewed in two ways as a subalgebra of  $L^\infty(X \times X, \mu \times \mu) \rtimes G$ , where  $G$  acts diagonally:  $Q_1$  only living on the first variable of  $X \times X$  and  $Q_2$  only living on the second one. The malleability of the Bernoulli action implies that the subalgebras  $Q_1$  and  $Q_2$  are joined by a continuous path of subalgebras  $Q_t$ . The relative property (T) then ensures that  $Q_1$  and  $Q_2$  are essentially unitarily conjugate. The mixing of the action is used to deduce that  $Q$  can essentially be conjugated into  $\mathcal{L}(G)$ .

Note in passing that the above result remains true when the 'commutative' Bernoulli action is replaced by a 'non-commutative' Connes-Størmer Bernoulli action, which is the crucial ingredient to produce  $\text{II}_1$  factors with prescribed countable fundamental groups.

Given an isomorphism  $\theta : L^\infty(Y) \rtimes \Gamma \rightarrow L^\infty(X) \rtimes G$ , where  $G \curvearrowright X$  is the Bernoulli action and the group  $\Gamma$  is  $w$ -rigid, the previous paragraph implies that  $\theta$  sends  $\mathcal{L}(\Gamma)$  into  $\mathcal{L}(G)$ , after conjugating by a unitary in the crossed product. Using very precise analytic arguments, Popa [56] succeeds in proving next that also the Cartan subalgebras  $L^\infty(Y)$  and  $L^\infty(X)$  can be conjugated into each other with a unitary in the crossed product (see Theorem 8.2 below). Having at hand this orbit

equivalence and knowing that the group von Neumann algebras can be conjugated into each other, Popa manages to prove conjugacy of the actions.

An important remark should be made here. The results on Bernoulli actions discussed up to now, use the deformation property called *strong malleability* combined with the mixing property of the action. So, they are valid for all strongly malleable mixing actions. The result on the conjugation of the Cartan subalgebras however, uses a much stronger mixing property of Bernoulli actions, called the *clustering property*, which roughly means that the Bernoulli action allows for a natural *tail*. Note in this respect the following conjecture of Neshveyev and Størmer [43]: suppose that the abelian countable groups  $G$  and  $\Gamma$  act freely and weakly mixingly on the standard probability space and that they give rise to isomorphic crossed products where the isomorphism sends  $\mathcal{L}(G)$  onto  $\mathcal{L}(\Gamma)$ ; then, the Cartan subalgebras are conjugate with a unitary in the crossed product<sup>(5)</sup>.

### Outer conjugacy of actions on the hyperfinite $\text{II}_1$ factor

The deformation/rigidity technique first appeared<sup>(6)</sup> in Popa's paper [54] on the computation of several invariants for (cocycle) actions of  $w$ -rigid groups on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor. In fact, many ideas exploited in the papers [48, 55, 56, 53, 57] are already present to some extent in the breakthrough paper [54].

Recall that two actions  $(\sigma_g)$  and  $(\rho_g)$  of a group  $G$  on a factor are said to be *outer conjugate* if there exists an isomorphism  $\Delta$  such that the conjugate automorphism  $\Delta\sigma_g\Delta^{-1}$  equals  $\rho_g$  up to an inner automorphism.

The classification up to outer conjugacy of actions of a group  $G$  on, say, the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor is an important subject. This classification has been completed, first for cyclic groups by Connes [5, 3], for finite groups by Jones [31] and finally, for amenable groups by Ocneanu [44]: any two outer<sup>(7)</sup> actions of an amenable group  $G$  on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor are outer conjugate (even cocycle conjugate).

Away from amenable groups, Jones proved in [32] that any non-amenable group admits at least two non outer conjugate actions on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor. Apart from actions, one also studies *cocycle actions* of a group  $G$  on a factor  $N$ : families of automorphisms  $(\sigma_g)_{g \in G}$  such that  $\sigma_g\sigma_h = \sigma_{gh}$  modulo an inner automorphism  $\text{Ad } u_{g,h}$ , where the unitaries  $u_{g,h}$  satisfy a 2-cocycle relation.

<sup>(5)</sup>It is crucial to have conjugation of the Cartan subalgebras through a unitary in the crossed product, which is the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor. Indeed, thanks to the work of Connes, Feldman and Weiss [10], two Cartan subalgebras are always conjugate with an automorphism of the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor. But, there exist continuously many non inner conjugate Cartan subalgebras.

<sup>(6)</sup>The paper [54] circulated since 2001 as a preprint of the MSRI and is the precursor of the papers [48, 55, 56, 53, 57] discussed above.

<sup>(7)</sup>An outer action is an action  $(\sigma_g)$  such that for  $g \neq e$ ,  $\sigma_g$  is an outer automorphism, i.e., not of the form  $\text{Ad } u$  for a unitary  $u$  in the von Neumann algebra.

In the previously cited works on amenable group actions, it is shown as well that any cocycle action of an amenable group on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor is outer conjugate to a genuine action. Popa generalized this result to arbitrary  $\text{II}_1$  factors in [50]. In [11], Connes and Jones constructed, for any infinite property (T) group  $G$ , examples of cocycle actions of  $G$  on the free group factor  $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\infty)$  that are non outer conjugate to a genuine action.

This brings us to the topic of [54]. Popa introduces two outer conjugacy invariants for a (cocycle) action on a  $\text{II}_1$  factor: the fundamental group and the spectrum. These invariants are computed in [54] for the Connes-Størmer Bernoulli actions, yielding the following theorem.

**THEOREM** (Theorems 10.3 and 10.6). — *Let  $G$  be a  $w$ -rigid group. Then  $G$  admits a continuous family of non outer conjugate actions on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor. Also,  $G$  admits a continuous family of cocycle actions on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor that are non outer conjugate to a genuine action.*

### Further remarks

We discussed in detail how Popa recovers information on a group action from the crossed product algebra  $L^\infty(X, \mu) \rtimes G$ . On the other hand, to what extent a group von Neumann algebra  $\mathcal{L}(G)$  remembers the group  $G$ ? Very little is known on this problem. Connes' celebrated theorem [4] states that all the  $\text{II}_1$  factors  $\mathcal{L}(G)$  defined by amenable ICC groups  $G$  are isomorphic to the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor. Indeed, they are all *injective*<sup>(8)</sup> and Connes shows in [4] the uniqueness of the injective  $\text{II}_1$  factor. Cowling and Haagerup [14] have shown that the group von Neumann algebras  $\mathcal{L}(\Gamma)$  are non-isomorphic if one takes lattices  $\Gamma$  in  $\text{Sp}(1, n)$  for different values of  $n$ .

Some group von Neumann algebras  $\mathcal{L}(G)$  can be written as well as the crossed product by a free ergodic action (but not all, since Voiculescu [65] showed that the free group factors cannot be written in this way). We have for instance  $\mathcal{L}(\text{SL}(n, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n) = L^\infty(\mathbb{T}^n) \rtimes \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ . Another example consists in writing the Bernoulli action crossed product  $L^\infty(X, \mu) \rtimes G$  as  $\mathcal{L}(\mathbb{Z} \wr G)$ , where the *wreath product* group  $\mathbb{Z} \wr G$  is defined as the semidirect product  $\mathbb{Z} \wr G := (\bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}) \rtimes G$ . Popa's von Neumann strong rigidity theorem then implies the following result. It can be considered as a relative version of Connes' conjecture [7], which states that within the class of ICC property (T) groups,  $\mathcal{L}(G_1) \cong \mathcal{L}(G_2)$  if and only if  $G_1 \cong G_2$ . Popa's result 'embeds injectively' the category of  $w$ -rigid ICC groups into the category of  $\text{II}_1$  factors.

<sup>(8)</sup>A factor  $M \subset B(H)$  is called injective if there exists a conditional expectation of  $B(H)$  onto  $M$  (which of course need not be weakly continuous). A conditional expectation of a von Neumann  $M$  onto a von Neumann subalgebra  $N$  is a unital, positive,  $N$ - $N$ -bimodule map  $E : M \rightarrow N$ .

COROLLARY. — *When  $G$  and  $\Gamma$  are  $w$ -rigid ICC groups,  $\mathcal{L}(\mathbb{Z} \wr G) \cong \mathcal{L}(\mathbb{Z} \wr \Gamma)$  if and only if  $G \cong \Gamma$ . Moreover,  $\mathcal{L}(\mathbb{Z} \wr G)$  has trivial fundamental group for any  $w$ -rigid ICC group  $G$ .*

Popa's von Neumann strong rigidity theorem is in fact more precise than the version stated above. As we shall see in Theorem 9.1 below, the strong rigidity theorem allows as well to compute the group  $\text{Out } M$  of outer automorphisms of  $M = L^\infty(X, \mu) \rtimes G$ , where  $G$  is a  $w$ -rigid ICC group and  $G \curvearrowright (X, \mu)$  its Bernoulli action. Then,

$$\text{Out } M \cong \text{Char } G \times \frac{\text{Aut}^*(X, G)}{G},$$

where  $\text{Aut}^*(X, G)$  is the group of measure space isomorphisms  $\Delta : X \rightarrow X$  for which there exists a  $\delta \in \text{Aut } G$  such that  $\Delta(g \cdot x) = \delta(g) \cdot \Delta(x)$  almost everywhere. Writing  $\Delta_g(x) = g \cdot x$ , one embeds  $G \hookrightarrow \text{Aut}^*(X, G)$ . Note moreover that  $\text{Aut}^*(X, G)$  obviously contains another copy of  $G$  acting by Bernoulli shifts 'on the other side'.

In [29], Ioana, Peterson and Popa apply the strategy of deformation/rigidity in the completely different context of amalgamated free products, yielding the first examples of  $\text{II}_1$  factors with trivial outer automorphism group. Much more is done in [29], where actually a von Neumann version of the Bass-Serre theory is developed.

### Acknowledgment

*I learned about Popa's work during his numerous lectures in Paris and his course in the Collège de France in the fall of 2004. It is my pleasure to express my warmest thanks to Sorin Popa for all our discussions and for his hospitality at UCLA. I thank Georges Skandalis for his numerous remarks and the entire days we spent discussing the present text. I finally took benefit from the remarks of Aurélien Alvarez, Claire Anantharaman, Etienne Blanchard, Alain Connes, David Fisher, Damien Gaboriau, Cyril Houdayer, Sergey Neshveyev, Mikael Pichot, Alain Valette and Dan Voiculescu. Thanks to all of you!*

## 2. PRELIMINARIES AND CONVENTIONS

### Von Neumann algebras, traces, almost periodic states and group actions

Throughout  $M, \mathcal{M}, N, \mathcal{N}, A, \mathcal{A}$  denote *von Neumann algebras*. Recall that a von Neumann algebra is a non-commutative generalization of a measure space, the algebras  $L^\infty(X, \mu)$  being the abelian examples. By definition, a von Neumann algebra is a weakly closed unital  $*$ -subalgebra of  $B(H)$  for some Hilbert space  $H$ . Whenever  $\mathcal{M} \subset B(H)$  is a von Neumann algebra, the *commutant* of  $\mathcal{M}$  is denoted by  $\mathcal{M}'$  and consists of the operators in  $B(H)$  commuting with all the operators in  $\mathcal{M}$ . Von Neumann's *bicommutant* theorem states that  $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$  and this equality characterizes

von Neumann algebras among the unital  $*$ -subalgebras of  $B(H)$ . A *factor* is a von Neumann algebra with trivial center, i.e.,  $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}1$ .

A *state* on a von Neumann algebra is a positive linear map  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfying  $\omega(1) = 1$ . All states are assumed to be *normal*, i.e., continuous with respect to the ultraweak topology on  $\mathcal{M}$  (which is equivalent with requiring weak continuity on the unit ball of  $\mathcal{M}$ ). Hence, normal states are the counterparts of probability measures on  $(X, \mu)$  absolutely continuous with respect to  $\mu$ . A state  $\omega$  is said to be *tracial* if  $\omega(xy) = \omega(yx)$  for all  $x, y$ . A state is said to be *faithful* if the equality  $\omega(x) = 0$  for  $x$  positive implies that  $x = 0$ . States are always assumed to be faithful.

The algebras denoted  $M, N, A$  are supposed to admit a *faithful normal trace* and if we specify a state on  $M, N$  or  $A$ , it is always supposed to be a trace. The terminology *finite von Neumann algebra*  $(N, \tau)$  means a von Neumann algebra  $N$  with a faithful normal trace  $\tau$ .

An action of a countable group on  $(\mathcal{M}, \varphi)$  is understood to be an action by automorphisms *leaving the state  $\varphi$  invariant*. We denote by  $(X, \mu)$  the standard probability space without atoms and an action of a countable group on  $(X, \mu)$  is supposed to preserve the probability measure  $\mu$ .

If  $G$  acts on  $(\mathcal{M}, \varphi)$  by automorphisms  $(\sigma_g)$ ,  $\mathcal{M}^\sigma$  denotes the von Neumann subalgebra of elements  $x \in \mathcal{M}$  satisfying  $\sigma_g(x) = x$  for all  $g \in G$ . The action  $(\sigma_g)$  is said to be *ergodic* if  $\mathcal{M}^\sigma = \mathbb{C}1$ .

If  $\varphi$  is a faithful normal state on  $\mathcal{M}$ , we consider the *centralizer algebra*  $\mathcal{M}^\varphi$  of  $\varphi$  consisting of those  $x \in \mathcal{M}$  satisfying  $\varphi(xy) = \varphi(yx)$  for all  $y$ . More generally, for a real number  $\lambda > 0$ , a  $\lambda$ -*eigenvector* for  $\varphi$  is an element  $x \in \mathcal{M}$  satisfying  $\varphi(xy) = \lambda\varphi(yx)$  for all  $y \in \mathcal{M}$ . We say that  $\varphi$  is *almost periodic* (or that  $(\mathcal{M}, \varphi)$  is almost periodic), if the  $\lambda$ -eigenvectors span a weakly dense subalgebra of  $\mathcal{M}$  when  $\lambda$  runs through  $\mathbb{R}_+^*$ . If this is the case,  $\text{Sp}(\mathcal{M}, \varphi)$  denotes the point spectrum of  $\varphi$ , i.e., the set of  $\lambda > 0$  for which there exists a non-zero  $\lambda$ -eigenvector.

A finite von Neumann algebra  $(P, \tau)$  is said to be *diffuse* if  $P$  does not contain a minimal projection. A finite  $(P, \tau)$  is diffuse if and only if  $P$  contains a sequence of unitaries tending weakly to zero. Equivalently,  $P$  does not have a direct summand that is a matrix algebra. For instance, the group von Neumann algebra  $\mathcal{L}(G)$  (see page 242 for its definition) is diffuse for any infinite group  $G$ .

### Crossed products

Whenever a countable group  $G$  acts by  $\varphi$ -preserving automorphisms  $(\sigma_g)$  on  $(\mathcal{M}, \varphi)$ , we denote by  $\mathcal{M} \rtimes G$  the crossed product, generated by the elements  $a \in \mathcal{M}$  and the unitaries  $(u_g)_{g \in G}$  such that  $u_g a u_g^* = \sigma_g(a)$  for all  $a \in \mathcal{M}$  and  $g \in G$ . We have a natural conditional expectation (see footnote on page 245) given by  $E : \mathcal{M} \rtimes G \rightarrow \mathcal{M} : E(a u_g) = \delta_{g,e} a$  and we extend  $\varphi$  to a faithful normal state on  $\mathcal{M} \rtimes G$  by the formula  $\varphi \circ E$ . If  $\varphi$  is tracial, its extension is tracial.

The crossed product  $M$  is a factor (hence, a type  $\text{II}_1$  factor) in the following (non-exhaustive) list of examples. If  $A \subset M$  is an inclusion of von Neumann algebras, we denote by  $M \cap A'$  the *relative commutant* consisting of elements in  $M$  commuting with all elements of  $A$ .

- Suppose that  $G$  acts (essentially) freely on  $(X, \mu)$  and put  $M = L^\infty(X) \rtimes G$ . Then,  $M \cap L^\infty(X)' = L^\infty(X)$  and  $M$  is a factor if and only if the  $G$ -action is ergodic.
- Suppose that the ICC group  $G$  acts on the finite  $(N, \tau)$  and put  $M = N \rtimes G$ . Then,  $M \cap \mathcal{L}(G)' = N^G$  and  $M$  is a factor if and only if the  $G$ -action on the center of  $N$  is ergodic.
- Suppose that the group  $G$  acts on the  $\text{II}_1$  factor  $(N, \tau)$  such that for all  $g \neq e$ ,  $\sigma_g$  is an outer automorphism of  $N$ , i.e., an automorphism that cannot be written as  $\text{Ad } u$  for some unitary  $u \in N$ . Putting  $M = N \rtimes G$ , we have  $M \cap N' = \mathbb{C}1$  and in particular,  $M$  is a factor.

**1-cocycles and 1-cohomology**

Let the countable group  $G$  act on  $(X, \mu)$ . We denote by  $g \cdot x$  the action of an element  $g \in G$  on  $x \in X$  and we denote by  $(\sigma_g)$  the corresponding action of  $G$  on  $A = L^\infty(X)$  given by  $(\sigma_g(F))(x) = F(g^{-1} \cdot x)$ . A *1-cocycle* for  $(\sigma_g)$  with coefficients in a Polish group  $K$  is a measurable map

$$\gamma : G \times X \rightarrow K \quad \text{satisfying} \quad \gamma(gh, x) = \gamma(g, h \cdot x) \gamma(h, x)$$

almost everywhere. Two 1-cocycles  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  are said to be *cohomologous* if there exists a measurable map  $w : X \rightarrow K$  such that

$$\gamma_1(g, x) = w(g \cdot x) \gamma_2(g, x) w(x)^{-1} \quad \text{almost everywhere.}$$

Whenever  $K$  is abelian, the 1-cocycles form a group  $Z^1(\sigma, K)$  and quotienting by the 1-cocycles cohomologous to the trivial 1-cocycle, we obtain  $H^1(\sigma, K)$ . Whenever  $K = S^1$ , we just write  $Z^1(\sigma)$  and  $H^1(\sigma)$ . Several important remarks should be made. Suppose that the action of  $G$  on  $(X, \mu)$  is free and ergodic.

- Write  $M = L^\infty(X) \rtimes G$ . The group  $Z^1(\sigma)$  embeds in  $\text{Aut}(M)$ , associating with  $\gamma \in Z^1(\sigma)$ , the automorphism  $\theta_\gamma$  of  $M$  defined by  $\theta_\gamma(a) = a$  for all  $a \in L^\infty(X)$  and  $\theta_\gamma(u_g) = u_g \gamma(g, \cdot)$ . Passing to quotients,  $H^1(\sigma)$  embeds into  $\text{Out}(M)$ .
- $H^1(\sigma)$  is an invariant for  $(\sigma_g)$  up to stable orbit equivalence (see Definition 4.2).
- If  $(\sigma_g)$  is weakly mixing, the group of characters  $\text{Char } G$  embeds into  $H^1(\sigma)$  as 1-cocycles not depending on the space variable  $x$ .

**The fundamental group of a  $\text{II}_1$  factor**

Let  $M$  be a  $\text{II}_1$  factor. If  $t > 0$ , we define, up to isomorphism, the *amplification*  $M^t$  as follows: choose  $n \geq 1$  and a projection  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes M$  with  $(\text{Tr} \otimes \tau)(p) = t$ . Define  $M^t := p(M_n(\mathbb{C}) \otimes M)p$ . The *fundamental group* of  $M$  is defined as

$$\mathcal{F}(M) = \{t > 0 \mid M^t \cong M\} .$$

It can be checked that  $\mathcal{F}(M)$  is a subgroup of  $\mathbb{R}_+^*$ .



In Theorem 9.1, a large class of non-isomorphic  $\text{II}_1$  factors with trivial fundamental group is obtained. In Theorem 7.1,  $\text{II}_1$  factors with a prescribed countable subgroup of  $\mathbb{R}_+^*$  as a fundamental group, are constructed.

### Quasi-normalizers and almost normal subgroups

Let  $Q \subset M$  be a von Neumann subalgebra of  $M$ . An element  $x \in M$  is said to *quasi-normalize*  $Q$  if there exist  $x_1, \dots, x_k$  and  $y_1, \dots, y_r$  in  $M$  such that

$$xQ \subset \sum_{i=1}^k Qx_i \quad \text{and} \quad Qx \subset \sum_{i=1}^r y_iQ.$$

The elements quasi-normalizing  $Q$  form a  $*$ -subalgebra of  $M$  and their weak closure is called the *quasi-normalizer* of  $Q$  in  $M$ . The inclusion  $Q \subset M$  is said to be *quasi-regular* if  $M$  is the quasi-normalizer of  $Q$  in  $M$ .

A typical example arises as follows: let  $G$  be a countable group and  $H$  an *almost normal subgroup*, which means that  $gHg^{-1} \cap H$  is a finite index subgroup of  $H$  for every  $g \in G$ . Equivalently, this means that for any  $g$  in  $G$ ,  $HgH$  is the union of finitely many left cosets, as well as the union of finitely many right cosets. So, it is clear that for every almost normal subgroup  $H \subset G$ , the inclusion  $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{L}(G)$  is quasi-regular.

There are some advantages to work with the quasi-normalizer rather than the normalizer. In Lemma 6.5, the following is shown: let  $Q \subset M$  be an inclusion of finite von Neumann algebras and let  $p$  be a projection in  $Q$ . If  $P$  denotes the quasi-normalizer of  $Q$  in  $M$ , the quasi-normalizer of  $pQp$  in  $pMp$  is  $pPp$ . This is no longer true for the actual normalizer.

**More background material** is available in the appendices. We discuss in Appendix A the *basic construction*  $\langle \mathcal{N}, e_B \rangle$  starting from an inclusion  $B \subset \mathcal{N}$  of a von Neumann algebra  $B$  in the centralizer algebra of  $(\mathcal{N}, \varphi)$  (in particular, for an inclusion of finite von Neumann algebras). Appendix B deals with the relative property (T) and its analogue for inclusions of finite von Neumann algebras. In Appendix C is studied the relation between conjugating von Neumann subalgebras with a unitary and the existence of finite-trace bimodules. Finally, Appendix D is devoted to (weakly) mixing actions.

## 3. THE MALLEABILITY PROPERTY OF BERNOULLI ACTIONS

Popa discovered several remarkable properties of Bernoulli actions. The first one is a deformation property, that he called strong malleability and that is discussed in this section. This notion of malleability, together with its stunning applications, should be considered as one of the major innovations of Popa.

As is well known, the Bernoulli actions are mixing (see Appendix D for definition and results) and this fact is used throughout. But, Popa exploits as well a very strong mixing property of Bernoulli actions that he called the *clustering property*. This will be used in Section 8.

DEFINITION 3.1 (Popa, [55, 57]). — *The action  $(\sigma_g)$  of  $G$  on  $(\mathcal{N}, \varphi)$  is said to be*

- *malleable if there exists a continuous action  $(\alpha_t)$  of  $\mathbb{R}$  on  $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}, \varphi \otimes \varphi)$  that commutes with the diagonal action  $(\sigma_g \otimes \sigma_g)$  and satisfies  $\alpha_1(a \otimes 1) = 1 \otimes a$  for all  $a \in \mathcal{N}$ ;*
- *strongly malleable if there moreover exists an automorphism  $\beta$  of  $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}, \varphi \otimes \varphi)$  commuting with  $(\sigma_g \otimes \sigma_g)$  such that  $\beta\alpha_t = \alpha_{-t}\beta$  for all  $t \in \mathbb{R}$  and  $\beta(a \otimes 1) = a \otimes 1$  for all  $a \in \mathcal{N}$  and such that  $\beta$  has period 2:  $\beta^2 = \text{id}$ .*

Remark 3.2. — In [55, 56], Popa uses the term ‘malleability’ for a larger class of actions: indeed, instead of extending the action from  $\mathcal{N}$  to  $\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}$ , he allows for a more general extension to  $\tilde{\mathcal{N}}$ , which can typically be a graded tensor square  $\mathcal{N} \widehat{\otimes} \mathcal{N}$ . This last example occurs when considering Bogolyubov actions. See remark 10.7 for details.

### Generalized Bernoulli actions

The main example of a *strongly malleable action* arises as a (generalized) Bernoulli action. Let  $G$  be a countable group that acts on the countable set  $I$ . Let  $(X_0, \mu_0)$  be a probability space. The action of  $G$  on  $(X, \mu) := \prod_{i \in I} (X_0, \mu_0)$  by shifting the infinite product, is called the (generalized) Bernoulli action. The usual Bernoulli action arises by taking  $I = G$  with the action of  $G$  by translation.

Convention 3.3. — For simplicity, we only deal with Bernoulli actions on the infinite product of *non-atomic* probability spaces and we refer to them as *Bernoulli actions with non-atomic base*. Most of Popa’s results also hold for Bernoulli actions on products of atomic spaces. They are no longer malleable but *sub-malleable*, see Definition 4.2 in [55] and Remark 4.6.

Write  $A_0 = L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . To check that the generalized Bernoulli action is strongly malleable, it suffices to produce an action  $(\alpha_t)$  of  $\mathbb{R}$  on  $A_0 \otimes A_0$  and a period 2 automorphism  $\beta$  of  $A_0 \otimes A_0$  such that  $\alpha_1(a \otimes 1) = 1 \otimes a$ ,  $\beta(a \otimes 1) = a \otimes 1$  for all  $a \in A_0$  and  $\beta\alpha_t = \alpha_{-t}\beta$  for all  $t \in \mathbb{R}$ . One can then take the infinite product of these  $(\alpha_t)$  and  $\beta$ . Take the uniquely determined map  $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  satisfying  $x = f(x) \pmod{\mathbb{Z}}$  for all  $x$ . Define the measure preserving flow  $\alpha_t$  and the measure preserving transformation  $\beta$  on  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  by the formulae

$$\alpha_t(x, y) = (x + tf(y - x), y + tf(y - x)) \quad \text{and} \quad \beta(x, y) = (x, 2x - y) .$$

For  $F \in L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , write  $\alpha_t(F) = F \circ \alpha_t$  and  $\beta(F) = F \circ \beta$ .

Popa gives a more functional analytic argument for the strong malleability of the generalized Bernoulli action. Consider  $A_0 \otimes A_0$  as being generated by two independent Haar unitaries  $u$  and  $v$ . We have to construct a one-parameter group  $(\alpha_t)$  and a period 2 automorphism  $\beta$  such that  $\alpha_1(u) = v$ ,  $\beta(u) = u$  and  $\beta\alpha_t = \alpha_{-t}\beta$ . Conjugating  $\alpha_t$  and  $\beta$  with the automorphism  $\sigma$  determined by  $\sigma(u) = u$ ,  $\sigma(v) = vu$  (note that  $u$  and  $vu$  are independent generating Haar unitaries), the first requirement changes to  $\alpha_1(u) = vu$  and the other requirements remain. Taking  $\log : \mathbb{T} \rightarrow ]-\pi, \pi]$ , we can now set  $\alpha_t(u) = \exp(t \log v)u$ ,  $\alpha_t(v) = v$  and  $\beta(u) = u$ ,  $\beta(v) = v^*$ .

### Connes-Størmer Bernoulli actions

Apart from ‘classical’ Bernoulli actions, also the ‘non-commutative’ Bernoulli actions of Connes and Størmer [13] satisfy Popa’s malleability condition. These Connes-Størmer Bernoulli actions provide the main non-commutative examples of *malleable* actions.

Let  $G$  be a countable group acting on a countable set  $I$ . Let  $\varphi_0$  be a faithful normal state on  $B(H)$  for some Hilbert space  $H$  (finite or infinite-dimensional). Define

$$(\mathcal{N}, \varphi) := \bigotimes_{i \in I} (B(H), \varphi_0).$$

On  $(\mathcal{N}, \varphi)$ ,  $G$  acts by shifting the tensor factors. To prove the malleability, one has to produce an action  $(\alpha_t)$  of  $\mathbb{R}$  on  $(B(H \otimes H), \varphi_0 \otimes \varphi_0)$  satisfying  $\alpha_1(a \otimes 1) = 1 \otimes a$  for all  $a \in B(H)$ . Denoting by  $P \in B(H \otimes H)$  the orthogonal projection on the symmetric subspace densely spanned by the vectors  $\xi \otimes \mu + \mu \otimes \xi$  for  $\xi, \mu \in H$ , we define  $U_t = P + e^{i\pi t}(1 - P)$  and  $\alpha_t = \text{Ad } U_t$ . Note that Connes-Størmer Bernoulli actions are not in an obvious way *strongly* malleable. In some cases however, a generalization of strong malleability holds, see 10.7.

The state  $\varphi_0$  is of the form  $\text{Tr}_\Delta$  for some positive trace-class operator  $\Delta$ . So,  $\varphi$  is almost periodic and  $\text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$  is the subgroup of  $\mathbb{R}_+^*$  generated by the ratios  $t/s$ , where  $t, s$  belong to the point spectrum of  $\Delta$ .

## 4. SUPERRIGIDITY FOR BERNOULLI ACTIONS

In this section, Popa’s very strong rigidity results for Bernoulli actions of  $w$ -rigid groups are proved: according to the philosophy in the beginning of the introduction, an orbit equivalence rigidity result deduces conjugacy of actions out of their mere orbit equivalence. All these rigidity results follow from the following cocycle superrigidity theorem.

THEOREM 4.1 (Popa, [48]). — *Let  $G$  be a countable group with infinite normal subgroup  $H$  such that  $(G, H)$  has the relative property (T). Let  $G$  act strongly malleably on  $(X, \mu)$  and suppose that its restriction to  $H$  is weakly mixing. Then, any 1-cocycle*

$$\gamma : G \times X \rightarrow K$$

*with values in a closed subgroup  $K$  of the unitary group  $\mathcal{U}(B)$  of a finite von Neumann algebra  $(B, \tau)$ , is cohomologous to a homomorphism  $\theta : G \rightarrow K$ .*

By regarding  $\Gamma \subset \mathcal{U}(\mathcal{L}(\Gamma))$ , the theorem covers all 1-cocycles with values in countable groups, which is the crucial ingredient to prove orbit equivalence rigidity results.

The superrigidity theorem for Bernoulli actions proved below, does not only deal with orbit equivalence, but also with *stable orbit equivalence*. There are several ways to introduce this concept, one of them being the following (see *e.g.* [21], where the terminology of weak orbit equivalence is used).

DEFINITION 4.2. — *Let  $G \curvearrowright (X, \mu)$  and  $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$  be free and ergodic actions. A stable orbit equivalence between these actions is given by a measure space isomorphism  $\pi : A \rightarrow B$  between non-negligible subsets  $A \subset X$  and  $B \subset Y$  preserving the restricted equivalence relations:  $\pi(A \cap (G \cdot x)) = B \cap (\Gamma \cdot \pi(x))$  for almost all  $x \in A$ .*

*The compression constant of  $\pi$  is defined as  $c(\pi) := \eta(B)/\mu(A)$ .*

*The maps  $\pi_i : A_i \rightarrow B_i$  ( $i = 1, 2$ ) define the same stable orbit equivalence if*

$$\pi_2(A_2 \cap (G \cdot x)) \subset \Gamma \cdot \pi_1(x) \quad \text{for almost all } x \in A_1 .$$

*Note that this implies that  $c(\pi_1) = c(\pi_2)$ .*

Suppose that  $\pi_i : A_i \rightarrow B_i$  ( $i = 1, 2$ ) define the same stable orbit equivalence. If, say,  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ , there exist  $\phi$  in the full group<sup>(9)</sup> of the equivalence relation given by the  $G$ -orbits and  $\psi$  in the full group of the equivalence relation given by the  $\Gamma$ -orbits such that  $\phi(A_1) \subset A_2$  and  $\pi_1$  is the restriction of  $\psi \circ \pi_2 \circ \phi$  to  $A_1$ .

If  $\pi : A \rightarrow B$  defines a stable orbit equivalence between the free and ergodic actions  $G \curvearrowright (X, \mu)$  and  $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$ , one defines as follows a 1-cocycle  $\alpha : G \times X \rightarrow \Gamma$  for  $G \curvearrowright X$  with values in  $\Gamma$ . By ergodicity, we can choose a measurable map  $\text{pr}_A : X \rightarrow A$  satisfying  $\text{pr}_A(x) \in G \cdot x$  almost everywhere and denote  $p = \pi \circ \text{pr}_A$ . Freeness of the action  $\Gamma \curvearrowright Y$ , allows to define

$$\alpha : G \times X \rightarrow \Gamma : p(g \cdot x) = \alpha(g, x) \cdot p(x)$$

almost everywhere. Taking another  $\pi$  defining the same stable orbit equivalence or choosing another  $\text{pr}_A$ , yields a cohomologous 1-cocycle.

Given a free and ergodic action  $G \curvearrowright (X, \mu)$ , there are certain actions that are trivially stably orbit equivalent to  $G \curvearrowright X$  and we introduce them in Notation 4.3.

<sup>(9)</sup>The full group of the equivalence relation defined by  $G$ -orbits, consists of the measure space automorphisms  $\Delta : X \rightarrow X$  satisfying  $\Delta(x) \in G \cdot x$  for almost all  $x$ .

The superrigidity theorem 4.4 states that for Bernoulli actions of  $w$ -rigid groups these are *the only actions* that are stably orbit equivalent to the given Bernoulli action.

*Notation 4.3.* — Let  $G$  act freely and ergodically on  $(X, \mu)$ . Suppose that  $\theta : G \rightarrow \Gamma$  is a homomorphism with  $\text{Ker } \theta$  finite and  $\text{Im } \theta$  of finite index in  $\Gamma$ . Define

$$\text{Ind}_G^\Gamma(X, \theta) := G \backslash (X \times \Gamma) \quad \text{where } G \text{ acts on } X \times \Gamma \text{ by } g \cdot (x, s) = (g \cdot x, \theta(g)s).$$

The action of  $\Gamma$  on  $\text{Ind}_G^\Gamma(X, \theta)$  given by  $t \cdot (x, s) = (x, st^{-1})$  is free, ergodic and finite measure preserving. We also have a canonical stable orbit equivalence between  $G \curvearrowright X$  and  $\Gamma \curvearrowright \text{Ind}_G^\Gamma(X, \theta)$ , with compression constant  $[\Gamma : \theta(G)] / |\text{Ker } \theta|$ .

**THEOREM 4.4** (Popa, [48]). — *Let  $G$  be a countable group with infinite normal subgroup  $H$  such that  $(G, H)$  has the relative property (T). Let  $G$  act strongly malleably on  $(X, \mu)$  and suppose that its restriction to  $H$  is weakly mixing.*

*Whenever  $\Gamma$  is a countable group acting freely and ergodically on  $(Y, \eta)$  and whenever  $\pi$  defines a stable orbit equivalence between  $G \curvearrowright X$  and  $\Gamma \curvearrowright Y$ , there exist*

- *a homomorphism  $\theta : G \rightarrow \Gamma$  with  $\text{Ker } \theta$  finite in  $G$  and  $\text{Im } \theta$  of finite index in  $\Gamma$  ;*
- *a measure space isomorphism  $\Delta : Y \rightarrow \text{Ind}_G^\Gamma(X, \theta)$  conjugating the actions  $\Gamma \curvearrowright Y$  and  $\Gamma \curvearrowright \text{Ind}_G^\Gamma(X, \theta)$ ,*

*such that  $\Delta \circ \pi$  defines the canonical stable orbit equivalence between  $G \curvearrowright X$  and  $\Gamma \curvearrowright \text{Ind}_G^\Gamma(X, \theta)$ . In particular, the compression constant  $c(\pi)$  equals  $[\Gamma : \theta(G)] / |\text{Ker } \theta|$ .*

*Remark 4.5.* — Several special instances of Theorem 4.4 should be mentioned. Suppose that the action  $G \curvearrowright X$  satisfies the conditions of Theorem 4.4 and denote by  $\mathcal{R}$  the equivalence relation given by the  $G$ -orbits.

- If we suppose moreover that  $G$  does not have finite normal subgroups, we get the following result stated in the introduction. If the restriction to  $Y \subset X$  of the equivalence relation given by  $G \curvearrowright X$  is given by the orbits of  $\Gamma \curvearrowright Y$  for some group  $\Gamma$  acting freely and ergodically on  $Y$ , then, up to measure zero,  $Y = X$  and the actions of  $G$  and  $\Gamma$  are conjugate through a group isomorphism.

- The amplified equivalence relation<sup>(10)</sup>  $\mathcal{R}^t$  can be generated by a free action of a group if and only if  $t = n/|G_0|$ , where  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  and  $G_0$  is a finite normal subgroup of  $G$ . So, we get many examples of type  $\text{II}_1$  equivalence relations that *cannot be generated by a free action of a group*. The first such examples were given by Furman [21], answering a long standing question of Feldman and Moore.

<sup>(10)</sup>The amplified equivalence relation  $\mathcal{R}^t$  is defined as follows. If  $t \leq 1$ , we restrict  $\mathcal{R}$  to a subset of measure  $t$ . If  $t > 1$ , we take a restriction of the obvious type  $\text{II}_1$  equivalence relation on  $X \times \{1, \dots, n\}$ .

- The *fundamental group* of  $\mathcal{R}$  is trivial. Note that this fundamental group is defined as the group of  $t > 0$  such that  $t$  is the compression constant for some stable orbit equivalence between  $G \curvearrowright X$  and itself. If  $\pi : A \rightarrow B$  is a stable orbit equivalence with compression constant  $t \geq 1$ , Theorem 4.4 implies that  $t = n/|\text{Ker } \theta|$ , where  $\theta : G \rightarrow G$  has finite kernel, satisfies  $n = [G : \theta(G)]$  and where  $G \curvearrowright X$  is conjugate to  $G \curvearrowright \text{Ind}_G^G(X, \theta)$ . Since the action  $G \curvearrowright X$  is weakly mixing, the induction is trivial, i.e.,  $n = 1$ . This implies that  $t \leq 1$  and hence,  $t = 1$ .

- The *outer automorphism group*  $\text{Out } \mathcal{R} = \text{Aut } \mathcal{R} / \text{Inn } \mathcal{R}$  of  $\mathcal{R}$  can be described as follows. Recall first that  $\text{Aut } \mathcal{R}$  is defined as the group of orbit equivalences  $\Delta : X \rightarrow X$  of  $G \curvearrowright X$  with itself. The full group (see note on page 252) of  $\mathcal{R}$  is a normal subgroup of  $\text{Aut } \mathcal{R}$  and denoted by  $\text{Inn } \mathcal{R}$ . The subgroup  $\text{Aut}^*(X, G) \subset \text{Aut } \mathcal{R}$  consists of those  $\Delta$  satisfying

$$\Delta(g \cdot x) = \delta(g) \cdot \Delta(x) \text{ almost everywhere,}$$

for some group automorphism  $\delta \in \text{Aut } G$ . For our given  $\mathcal{R}$ ,  $\text{Out } \mathcal{R}$  is the image of  $\text{Aut}^*(X, G)$  through the quotient map  $\text{Aut } \mathcal{R} \rightarrow \text{Out } \mathcal{R}$ . Weak mixing then implies that  $\text{Out } \mathcal{R} \cong \text{Aut}^*(X, G)/G$ .

*Remark 4.6.* — Let  $G$  be a group with infinite normal subgroup  $H$  with the relative property (T). Let  $G \curvearrowright (X, \mu)$  be a strongly malleable action whose restriction to  $H$  is weakly mixing. Then, the conclusions of Theorems 4.1 and 4.4 hold as well for all *quotient actions*  $G \curvearrowright (Y, \eta)$  provided that the quotient map  $X \rightarrow Y$  satisfies a *relative weak mixing* property, introduced by Popa in [48] (Definition 2.9). Indeed, if for a measurable map  $w : X \rightarrow K$  and a homomorphism  $\theta : G \rightarrow K$ , the 1-cocycle  $G \times X \rightarrow K : (g, x) \mapsto w(g \cdot x)\theta(g)w(x)^{-1}$  actually is a map  $G \times Y \rightarrow K$ , then relative weak mixing imposes that  $w$  is already a map  $Y \rightarrow K$ .

Hence, the conclusions of Theorems 4.1 and 4.4 hold for all generalized Bernoulli actions that are free and weakly mixing restricted to  $H$ , even starting from an atomic base space.

In fact, Theorem 4.4 follows from the cocycle superrigidity theorem 4.1 and the following classical lemma.

**LEMMA 4.7.** — *Let  $G \curvearrowright (X, \mu)$  and  $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$  be free ergodic actions that are stably orbit equivalent. If the associated 1-cocycle is cohomologous to a homomorphism  $\theta : G \rightarrow \Gamma$ , then the conclusion of Theorem 4.4 holds.*

*Proof.* — The proof of the lemma consists of two easy translation statements. In the first paragraph, stable orbit equivalence is translated as *measure equivalence* (see e.g. [21]): we get a natural space with an infinite measure preserving action of  $G \times \Gamma$ . In a second paragraph, the conclusion follows using the triviality of the cocycle.

Let  $p : X \rightarrow Y$  be the equivalence relation preserving map as in the construction of the 1-cocycle  $\alpha$  above. Take symmetrically  $q : Y \rightarrow X$  and the 1-cocycle  $\beta : \Gamma \times Y \rightarrow G$ . We denote by  $g \cdot x$  the action of  $G$  on  $X$  and by  $s * y$  the action of  $\Gamma$  on  $Y$ . Define commuting actions of  $G$  and  $\Gamma$  on  $X \times \Gamma$  and  $Y \times G$  respectively, by the formulae

$$g \cdot (x, s) \cdot t = (g \cdot x, \alpha(g, x)st) \quad , \quad s * (y, g) * h = (s * y, \beta(s, y)gh) .$$

Following Theorem 3.3 in [21], we prove that there is a natural  $G \times \Gamma$ -equivariant measure space isomorphism  $\Theta : X \times \Gamma \rightarrow Y \times G$  satisfying  $\Theta(x, s) \in (\Gamma * p(x)) \times G$  for almost all  $(x, s)$ . Indeed, take measurable maps  $X \rightarrow G : x \mapsto g_x$  and  $Y \rightarrow \Gamma : y \mapsto s_y$  such that  $q(p(x)) = g_x \cdot x$  and  $p(q(y)) = s_y * y$  almost everywhere. Define

$$\begin{aligned} \Theta : X \times \Gamma &\rightarrow Y \times G : \Theta(x, s) = (s^{-1} * p(x), \beta(s^{-1}, p(x))g_x) \\ \Theta^{-1} : Y \times G &\rightarrow X \times \Gamma : \Theta^{-1}(y, g) = (g^{-1} * q(y), \alpha(g^{-1}, q(y))s_y) . \end{aligned}$$

The assumption of the lemma yields a homomorphism  $\theta : G \rightarrow \Gamma$  and a measurable map  $w : X \rightarrow \Gamma$  such that  $\alpha(g, x) = w(g \cdot x)\theta(g)w(x)^{-1}$  almost everywhere. So, the map  $\Psi : X \times \Gamma \rightarrow X \times \Gamma : \Psi(x, s) = (x, w(x)s)$  is a measure space isomorphism that is equivariant in the following sense

$$\Psi(g \cdot x, \theta(g)st) = g \cdot \Psi(x, s) \cdot t .$$

So,  $\Theta \circ \Psi$  conjugates the new commuting actions  $g(x, s)t = (g \cdot x, \theta(g)st)$  on  $X \times \Gamma$  with the commuting actions on  $Y \times G$  given above. In particular, the new action of  $G$  on  $X \times \Gamma$  has a fundamental domain of finite measure. Having a fundamental domain forces  $\text{Ker } \theta$  to be finite, while its being of finite measure imposes  $\theta(G)$  to be of finite index in  $G$ . Finally, the new action of  $\Gamma$  on the quotient  $G \backslash (X \times \Gamma)$  is exactly  $\Gamma \curvearrowright \text{Ind}_G^\Gamma(X, \theta)$  and  $\Theta \circ \Psi$  induces a conjugacy of the actions  $\Gamma \curvearrowright \text{Ind}_G^\Gamma(X, \theta)$  and  $\Gamma \curvearrowright Y$ .  $\square$

There is a slightly more general way of writing ‘obviously’ stably orbit equivalent actions, by first restricting  $G \curvearrowright X$  to  $G_0 \curvearrowright X_0$ , where  $G_0$  is a finite index subgroup of  $G$  and  $G \curvearrowright X$  is induced from  $G_0 \curvearrowright X_0$ . Since the superrigid actions in this talk are all weakly mixing, they are not induced in this way.

It remains to prove the cocycle superrigidity theorem 4.1. This proof occupies the rest of the section and consists of several steps.

- (0) Using the *weak mixing* property and the fact that  $\mathcal{U}(B)$  is a *Polish group with a bi-invariant metric*, restrict to the case  $K = \mathcal{U}(B)$ .

The 1-cocycle  $\gamma : G \times X \rightarrow \mathcal{U}(B)$  is then interpreted as a family of unitaries  $\gamma_g \in \mathcal{U}(A \otimes B)$ , where  $A = L^\infty(X, \mu)$ . Moreover, strong malleability yields  $(\alpha_t)$  and  $\beta$  on  $A \otimes A$ .

- (1) Using the *relative property (T)*, find  $t_0 > 0$  and a non-zero partial isometry  $a \in A \otimes A \otimes B$  satisfying

$$(*) \quad (\gamma_g)_{13}(\sigma_g \otimes \sigma_g \otimes \text{id})(a) = a(\alpha_{t_0} \otimes \text{id})((\gamma_g)_{13})$$

for all  $g \in H$ . We use the notation  $(a \otimes b)_{13} := a \otimes 1 \otimes b$  and extend to  $u_{13}$  for all  $u \in A \otimes B$  by linearity and continuity.

- (2) Using the *period 2 automorphism given by the strong malleability* and the *weak mixing property of the action restricted to H*, glue together partial isometries, in order to get (\*) with  $t_0 = 1$ , i.e., a non-zero partial isometry  $a \in A \otimes A \otimes B$  satisfying

$$(\gamma_g)_{13}(\sigma_g \otimes \sigma_g \otimes \text{id})(a) = a(\gamma_g)_{23}$$

for all  $g \in H$ .

- (3) Deduce from the previous equality, using the *intertwining-by-bimodules technique*, a non-zero partial isometry  $v \in A \otimes B$  and partial isometries  $\theta(g) \in B$  such that

$$\gamma_g(\sigma_g \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(g))$$

for all  $g \in H$ .

- (4) Using a *maximality argument*, glue together such partial isometries  $v$  in order to get a unitary  $v$  satisfying the same formula.
- (5) Use the *normality* of  $H$  in  $G$  and the weak mixing property of the action restricted to  $H$ , to extend the formula to  $g \in G$ .

Lemma 4.8 covers step (0), Lemma 4.9 covers steps (1), (2) and (3), Lemma 4.10 covers step (4) and the final step (5) is done in the proof of the theorem.

To prove step (0) of the program, the essential property of the Polish group  $\mathcal{U}(B)$  that we retain is the existence of a *bi-invariant metric*  $d(u, v) = \|u - v\|_2$ .

LEMMA 4.8. — *Let  $G$  act weakly mixing on  $(X, \mu)$ . Let  $\mathcal{G}$  be a Polish group with a bi-invariant complete metric  $d$  and let  $K \subset \mathcal{G}$  be a closed subgroup. Suppose that  $\gamma : G \times X \rightarrow K$  is a 1-cocycle. Let  $v : X \rightarrow \mathcal{G}$  be a measurable map and  $\theta : G \rightarrow \mathcal{G}$  a homomorphism such that*

$$\gamma(g, x) = v(g \cdot x)\theta(g)v(x)^{-1}$$

*almost everywhere. Whenever  $v_0 \in \mathcal{G}$  is an essential value of the function  $v$ , we have  $v(x)v_0^{-1} \in K$  almost everywhere and  $v_0\theta(g)v_0^{-1} \in K$  for all  $g \in G$ .*

*Proof.* — Let  $v_0$  be an essential value of the function  $v$ . Changing  $v(x)$  into  $v(x)v_0^{-1}$  and  $\theta$  into  $(\text{Ad } v_0) \circ \theta$ , we assume that  $e$  is an essential value of  $v$  and prove that  $\theta(g) \in K$  for all  $g \in G$  and  $v(x) \in K$  almost everywhere.

Denote by  $d$  the bi-invariant metric on the  $\mathcal{G}$ . Choose  $\varepsilon > 0$  and  $g \in G$ . Take  $W \subset X$  with  $\mu(W) > 0$  such that  $d(v(x), 1) < \varepsilon/4$  for all  $x \in W$ . Take  $k \in G$  such that  $\mu(k \cdot W \cap W) > 0$  and  $\mu((gk)^{-1} \cdot W \cap W) > 0$ . If  $x \in k \cdot W \cap W$ , we have  $d(v(x), 1), d(v(k^{-1} \cdot x), 1) < \varepsilon/4$ . It follows that  $d(\theta(k^{-1}), K) < \varepsilon/2$ . In the same way,



$d(\theta(gk), K) < \varepsilon/2$ . Together,  $d(\theta(g), K) < \varepsilon$ . This holds for all  $\varepsilon > 0$  and all  $g \in G$  and hence,  $\theta(G) \subset K$ .

Let  $\varepsilon > 0$ . The formula  $v(g \cdot x) = \gamma(g, x)v(x)\theta(g)^*$  almost everywhere, yields that  $\{x \in X \mid d(v(x), K) < \varepsilon\}$  is non-negligible and  $G$ -invariant, hence, the whole of  $X$ . It follows that  $v(x) \in K$  almost everywhere.  $\square$

We fix the following data and notations.

- Let  $G$  be a countable group with infinite normal subgroup  $H$  such that  $(G, H)$  has the relative property (T). Let  $G$  act strongly malleably on  $(X, \mu)$  and suppose that its restriction to  $H$  is weakly mixing. Write  $A = L^\infty(X)$  and write the action of  $G$  on  $A$  as  $(\sigma_g(F))(x) = F(g^{-1} \cdot x)$ .
- Let  $\gamma : G \times X \rightarrow \mathcal{U}(B)$  be a 1-cocycle with values in the unitary group of the  $II_1$  factor  $(B, \tau)$ . Remark that we can indeed suppose that  $B$  is a  $II_1$  factor<sup>(11)</sup>. We write  $\gamma_g \in \mathcal{U}(A \otimes B)$ , given by  $\gamma_g(x) = \gamma(g, g^{-1} \cdot x)$ . The 1-cocycle relation becomes

$$\gamma_g(\sigma_g \otimes \text{id})(\gamma_h) = \gamma_{gh} \quad \text{for all } g, h \in G.$$

- We denote by  $(\rho_g)$  the following action of  $G$  by automorphisms of  $A \otimes B$ :

$$\rho_g(a) = \gamma_g(\sigma_g \otimes \text{id})(a)\gamma_g^* \quad \text{for all } a \in A \otimes B.$$

- We denote by  $(\eta_g)$  the unitary representation of  $G$  on  $L^2(X) \otimes L^2(B)$  given by

$$\eta_g(a) = \gamma_g(\sigma_g \otimes \text{id})(a) \quad \text{for all } a \in A \otimes B \subset L^2(X) \otimes L^2(B).$$

- We denote, for every  $t \in \mathbb{R}$ , by  $(\pi_g^t)$  the unitary representation on  $L^2(X \times X) \otimes L^2(B)$  of  $G$  given by

$$\pi_g^t(a) = (\gamma_g)_{13}(\sigma_g \otimes \sigma_g \otimes \text{id})(a)(\alpha_t \otimes \text{id})((\gamma_g)_{13}^*)$$

for all  $a \in A \otimes A \otimes B \subset L^2(X \times X) \otimes L^2(B)$ . Recall the notation  $u_{13}$  determined by  $(a \otimes b)_{13} = a \otimes 1 \otimes b$ .

We cover steps (1), (2) and (3) of the program in the next lemma.

LEMMA 4.9. — *Let  $q \in A \otimes B$  be a non-zero projection which is  $\rho|_H$ -invariant. There exist a non-zero partial isometry  $v \in A \otimes B$ , a projection  $p \in B$  and a homomorphism  $\theta : H \rightarrow \mathcal{U}(pBp)$  such that  $vv^* \leq q$ ,  $v^*v = 1 \otimes p$  and*

$$\gamma_h(\sigma_h \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(h))$$

for all  $h \in H$ .

<sup>(11)</sup>Any finite  $(B, \tau)$  can be embedded, in a trace-preserving way, into a  $II_1$  factor, e.g. into  $(\otimes_{n \in \mathbb{Z}} (B, \tau)) \rtimes \mathbb{Z}$  and  $\mathcal{U}(B)$  is then a closed subgroup of the unitary group of this  $II_1$  factor.

*Proof*

*Step (1).* Note that 1 is a  $\pi_G^0$ -invariant vector. The relative property (T) yields a  $t_0 = 2^{-n}$  and a non-zero element  $a \in A \otimes A \otimes B$  such that  $a$  is  $\pi_H^{t_0}$ -invariant and such that  $\|a - 1\|_2 \leq \|q\|_2/2$ . It follows that  $a(\alpha_{t_0} \otimes \text{id})(q_{13}) \neq 0$ , which remains  $\pi_H^{t_0}$ -invariant. Taking the polar decomposition of  $a(\alpha_{t_0} \otimes \text{id})(q_{13})$ , we get a non-zero partial isometry  $a \in A \otimes A \otimes B$  which is  $\pi_H^{t_0}$ -invariant and satisfies  $a^*a \leq (\alpha_{t_0} \otimes \text{id})(q_{13})$ . Moreover, Proposition D.2 yields

$$aa^* , (\alpha_{-t_0} \otimes \text{id})(a^*a) \in (A \otimes B)_{13}^{\rho|_H} .$$

So, we have a projection  $\tilde{q} \in (A \otimes B)^{\rho|_H}$  such that  $\tilde{q} \leq q$  and

$$a^*a = (\alpha_{t_0} \otimes \text{id})(\tilde{q}_{13}) .$$

*Step (2).* Whenever  $a$  and  $b$  are  $\pi_H^{t_0}$ -invariant, we have that  $a(\alpha_{t_0} \otimes \text{id})(b)$  is  $\pi_H^{2t_0}$ -invariant and that  $(\beta \otimes \text{id})(a)$  and  $(\alpha_{-t_0} \otimes \text{id})(a^*)$  are  $\pi_H^{-t_0}$ -invariant. So, if we define

$$a_1 = (\alpha_{t_0} \otimes \text{id})((\beta \otimes \text{id})(a^*)a)$$

we get that  $a_1$  is  $\pi_H^{2t_0}$ -invariant and satisfies

$$a_1 a_1^* = \tilde{q}_{13} \quad \text{and} \quad a_1^* a_1 = (\alpha_{2t_0} \otimes \text{id})(\tilde{q}_{13}) .$$

Iterating the procedure yields at stage  $n$  a partial isometry  $b \in A \otimes A \otimes B$  which is  $\pi_H^1$ -invariant and satisfies  $bb^* = \tilde{q}_{13}$  and  $b^*b = \tilde{q}_{23}$ .

*Step (3)* Define the (non-zero) operator  $T \in B(L^2(X)) \otimes B$  by

$$(T\xi)(x) = \int_X b(x, y)\xi(y) \, d\mu(y) \quad \text{for all } \xi \in L^2(X) \otimes B .$$

We get

$$[T, \eta_h] = 0 \quad \text{for } h \in H , \quad \tilde{q}T = T = T\tilde{q} , \quad \|(\text{Tr} \otimes \text{id})(T^*T)\| < \infty .$$

Taking a spectral projection  $P$  of  $T$ , we get a non-zero orthogonal projection  $P$  with the same properties as  $T$ . It follows that the range of  $P$  is a finitely generated right  $B$ -submodule of  $(L^2(X) \otimes L^2(B))_B$  which is stable under  $(\eta_h)_{h \in H}$ .

As in Proposition C.1, we get  $n \geq 1$ , a non-zero projection  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$ , a non-zero partial isometry  $v \in A \otimes M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes B$  and a homomorphism  $\theta : H \rightarrow \mathcal{U}(p(M_n(\mathbb{C}) \otimes B)p)$  such that

$$\gamma_h(\sigma_h \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(h)) \quad \text{for } h \in H , \quad \tilde{q}v = v , \quad v(1 \otimes p) = v .$$

Since  $v^*v$  is  $(\sigma_h \otimes \text{Ad } \theta(h))$ -invariant for all  $h \in H$ , it follows from Proposition D.2 that  $v^*v = 1 \otimes p_0$  for some non-zero projection  $p_0 \in p(M_n(\mathbb{C}) \otimes B)p \cap \theta(H)'$ . Since  $p_0$  commutes with  $\theta(H)$ , we can cut down by  $p_0$ . Since moreover  $\tau(p_0) \leq 1$ , we can move  $p_0$  into the upper corner of  $M_n(\mathbb{C}) \otimes B$  and we have found a non-zero partial isometry  $v \in A \otimes B$ , a non-zero projection  $p \in B$  and a homomorphism  $\theta : H \rightarrow \mathcal{U}(pBp)$  such that  $vv^* \leq q$ ,  $v^*v = 1 \otimes p$  and

$$\gamma_h(\sigma_h \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(h))$$

for all  $h \in H$ . □

We cover step (4) of the program in the following lemma.

LEMMA 4.10. — *There exists a unitary element  $v \in A \otimes B$  and a homomorphism  $\theta : H \rightarrow \mathcal{U}(B)$  such that*

$$\gamma_h(\sigma_h \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(h))$$

for all  $h \in H$ .

*Proof.* — The proof is a straightforward maximality argument. Consider the set  $\mathcal{I}$  of partial isometries  $v \in A \otimes B$  for which there exist  $p \in B$  and  $\theta : H \rightarrow \mathcal{U}(pBp)$  satisfying

$$v^*v = 1 \otimes p \quad \text{and} \quad \gamma_h(\sigma_h \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(h))$$

for all  $h \in H$ . Partially order  $\mathcal{I}$  by extension of partial isometries and let  $v$  be a maximal element of  $\mathcal{I}$ . Write  $v^*v = 1 \otimes p$ . If  $vv^* \neq 1$ , put  $q = 1 - vv^*$ . Then,  $q \in (A \otimes B)^{\rho|_H}$  and Lemma 4.9 yields a non-zero partial isometry  $w \in A \otimes B$ , a projection  $e \in B$  and a homomorphism  $\theta : H \rightarrow \mathcal{U}(eBe)$  such that  $ww^* \leq q$ ,  $w^*w = 1 \otimes e$  and

$$\gamma_h(\sigma_h \otimes \text{id})(w) = w(1 \otimes \theta(h))$$

for all  $h \in H$ . Since  $e \preceq 1 - p$  in the  $\text{II}_1$  factor  $B$ , we contradict the maximality of  $v$ .  $\square$

*Proof of Theorem 4.1.* — Using Lemma 4.8, it is sufficient to prove the existence of a unitary  $v \in A \otimes B$  and a homomorphism  $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(B)$  such that

$$(1) \quad \gamma_g(\sigma_g \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(g))$$

for all  $g \in G$ . Take  $v$  and  $\theta$  as given by Lemma 4.10. Fix  $g \in G$  and write

$$\tilde{v} = \gamma_g(\sigma_g \otimes \text{id})(v) \quad \text{and} \quad \tilde{\theta}(h) = \theta(g^{-1}hg) \quad \text{for } h \in H.$$

Obviously,  $\gamma_h(\sigma_h \otimes \text{id})(\tilde{v}) = \tilde{v}(1 \otimes \tilde{\theta}(h))$  for all  $h \in H$ . It follows that

$$(\sigma_h \otimes \text{id})(\tilde{v}^*v) = (1 \otimes \tilde{\theta}(h)^*)\tilde{v}^*v(1 \otimes \theta(h))$$

for all  $h \in H$ . Since  $\tilde{v}^*v$  is a unitary, the same proof as the one for Proposition D.2, yields a unitary  $u \in B$  such that  $\tilde{\theta} = (\text{Ad } u)\theta$  and  $\tilde{v} = v(1 \otimes u^*)$ . So, for any  $g \in G$ , we find a unique unitary element  $\theta(g) \in \mathcal{U}(B)$  such that (1) holds. By uniqueness,  $\theta$  is a homomorphism and we are done.  $\square$

## 5. NON-ORBIT EQUIVALENT ACTIONS AND 1-COHOMOLOGY

The following theorem is an immediate consequence of Theorem 4.1.

THEOREM 5.1 (Popa, Sasyk, [57]). — *Let  $G$  be a countable group with infinite normal subgroup  $H$  such that  $(G, H)$  has the relative property (T). Let  $(\sigma_g)$  be the Bernoulli action (with non-atomic base) of  $G$  on  $(X, \mu)$ . Then,  $H^1(\sigma) = \text{Char } G$ .*

Through the following lemma, one can easily produce non-stable orbit equivalent actions

LEMMA 5.2. — *Let  $G$  be a countable group and  $K$  a compact abelian group. Let  $G \times K$  act on  $(X, \mu)$  and denote by  $(\sigma_g \rho_k)$  the corresponding action on  $A = L^\infty(X)$ . Define  $B = A^K$ , the algebra of  $K$ -fixed points. Denote by  $(\sigma_g^K)$  the restriction of  $(\sigma_g)$  to  $B$ . Assume that*

- $(\sigma_g)$  is free and weakly mixing,
- $(\sigma_g^K)$  is still free,
- $H^1(\sigma) = \text{Char } G$ .

Then,  $H^1(\sigma^K) = \text{Char } G \times \text{Sp}(K, \rho)$ , where

$$\text{Sp}(K, \rho) = \{ \alpha \in \text{Char}(K) \mid \exists u \in \mathcal{U}(A), \rho_k(u) = \alpha(k)u \text{ for all } k \in K \}.$$

*Proof.* — Whenever  $u \in \mathcal{U}(A)$  and  $\rho_k(u) = \alpha(k)u$  for all  $k \in K$ , we define  $\omega_g \in B$  by the formula  $\omega_g = u\sigma_g(u^*)$ . Using the weak mixing of  $(\sigma_g)$ , it is easy to check that we obtain an embedding  $\text{Char } G \times \text{Sp}(K, \rho) \hookrightarrow H^1(\sigma^K)$ . Suppose on the contrary that the 1-cocycle  $\omega$  defines an element of  $H^1(\sigma^K)$ . We regard  $\omega$  as a 1-cocycle for  $\sigma$  and since  $H^1(\sigma) = \text{Char } G$ , we find that  $\omega$  is cohomologous to a character of  $G$ . Subtracting this character from  $\omega$ , we may assume that  $\omega_g = u\sigma_g(u^*)$  for some unitary  $u \in \mathcal{U}(A)$ . Since for any  $k \in K$ ,  $\omega_g$  is  $K$ -invariant and since  $(\sigma_g)$  is weakly mixing, we conclude that there exists  $\alpha : K \rightarrow S^1$  such that  $\rho_k(u) = \alpha(k)u$  for all  $k \in K$ . But this means that  $\omega$  is given by an element of  $\text{Sp}(K, \rho)$ .  $\square$

The following proposition immediately follows.

PROPOSITION 5.3 (Popa, [53]). — *Let  $G$  be a countable group with infinite normal subgroup  $H$  such that  $(G, H)$  has the relative property (T). Let  $\Gamma$  be any countably infinite abelian group and  $K = \widehat{\Gamma}$ . Denote by  $(\sigma_g)$  the Bernoulli action of  $G$  on  $L^\infty(X, \mu) = \otimes_{g \in G} L^\infty(K, \text{Haar})$  and define  $(\rho_k)_{k \in K}$  as the diagonal action on  $L^\infty(X, \mu)$  of the translation action of  $K$  on  $L^\infty(K)$ . Define  $(\sigma_g^K)$  as the restriction of  $(\sigma_g)$  to the  $K$ -fixed points  $L^\infty(X)^K$ .*

Then,  $(\sigma_g^K)$  is a free and ergodic action of  $G$  satisfying  $H^1(\sigma^K) = \text{Char } G \times \Gamma$ .

Remark 5.4. — It follows that any countable group  $G$  that admits an infinite normal subgroup  $H$  such that  $(G, H)$  has the relative property (T), admits a continuous family of non-stably orbit equivalent actions. Indeed,  $\text{Char } G$  being compact, an isomorphism  $\text{Char } G \times \Gamma_1 \cong \text{Char } G \times \Gamma_2$  entails a virtual isomorphism between  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ . It is not hard to exhibit a continuous family of non virtually isomorphic countable abelian groups.

## 6. INTERTWINING RIGID SUBALGEBRAS OF CROSSED PRODUCTS

The major aim of the rest of the talk is to prove Popa's *von Neumann strong rigidity theorem* for Bernoulli actions of  $w$ -rigid groups, deducing conjugacy of actions out of their mere von Neumann equivalence. This is more difficult, but nevertheless related to the orbit equivalence superrigidity Theorem 4.4. In particular, the crucial Lemma 6.1 below, is the von Neumann counterpart to Lemma 4.9, covering steps (1), (2) and (3) of the program on page 255. It states that in a crossed product  $M := N \rtimes G$  by a malleable mixing action, a subalgebra  $Q \subset M$  with the relative property (T), can be essentially conjugated into  $\mathcal{L}(G)$ .

But, the aim of this section is not only preparation to the von Neumann strong rigidity theorem. The results are applied as well in the next section in order to construct  $\text{II}_1$  factors with prescribed countable fundamental groups. For this reason, we need to deal with actions on non-tracial (but almost-periodic) algebras.

We refer to page 243 for a rough explanation of the idea of the proof of Lemma 6.1. It is another application of Popa's *deformation/rigidity strategy*. The deformation property of *malleability* is played against the relative property (T). For this, we need the notion of relative property (T) for an inclusion  $Q \subset M$  of finite von Neumann algebras (see Definition B.2). The mixing property of the action has several von Neumann algebraic consequences that are used throughout and proved in Appendix D. Finally, in order to actually conjugate (essentially)  $Q$  into  $\mathcal{L}(G)$ , Popa's *intertwining-by-bimodules* technique is used (see Appendix C).

LEMMA 6.1. — *Given a strongly malleable mixing action of a countable group  $G$  on an almost periodic  $(\mathcal{N}, \varphi)$ , write  $N = \mathcal{N}^\varphi$ . Let  $Q \subset N \rtimes G$  be a diffuse subalgebra with the relative property (T). Denote by  $P$  the quasi-normalizer of  $Q$  in  $N \rtimes G$  and suppose that there is no non-zero homomorphism from  $P$  to an amplification of  $N$ .*

*Then, there exist  $\gamma > 0$ ,  $n \geq 1$  and a non-zero partial isometry  $v \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \otimes (N \rtimes G)$  which is a  $\gamma$ -eigenvector for  $\varphi$  and satisfies*

$$v^*v \in P \cap Q' \quad , \quad vPv^* \subset M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G) \quad .$$

*Proof.* — In the course of this proof, we use the following terminology: given subalgebras  $Q_1, Q_2$  of a von Neumann algebra, an element  $a$  is said to be  $Q_1$ - $Q_2$ -finite, if there exists finite families  $(a_i)$  and  $(b_i)$  such that

$$aQ_2 \subset \sum_{i=1}^n Q_1 a_i \quad \text{and} \quad Q_1 a \subset \sum_{i=1}^m b_i Q_2 \quad .$$

Hence, the  $Q$ - $Q$ -finite elements are nothing else but the elements quasi-normalizing  $Q$ .

*Step (1), using relative property (T).* Take  $(\alpha_i)$  and  $\beta$  as in Definition 3.1. Write  $\tilde{N} = (\mathcal{N} \otimes \mathcal{N})^{\varphi \otimes \varphi}$  and  $\tilde{M} = \tilde{N} \rtimes G$ . Write  $M = N \rtimes G$  and consider  $M$  as a

subalgebra of  $\widetilde{M}$  by considering  $\mathcal{N} \otimes 1 \subset \mathcal{N} \otimes \mathcal{N}$ . Extend  $(\alpha_t)$  and  $\beta$  to  $\widetilde{M}$ . The relative property (T) yields  $t_0 = 2^{-n}$  and a non-zero element  $w \in \widetilde{M}$  such that  $xw = w\alpha_{t_0}(x)$  for all  $x \in Q$ .

*Step (2), finding a non-zero element  $a \in \widetilde{M}$  that is  $Q$ - $\alpha_1(Q)$ -finite, using the period 2-automorphism  $\beta$ .* Denote by  $\mathcal{P}$  the  $*$ -algebra of  $Q$ - $Q$ -finite elements in  $M$ . By definition,  $P$  is the weak closure of  $\mathcal{P}$ . Whenever  $y \in \mathcal{P}$ , the element  $\alpha_{t_0}(\beta(w^*)yw)$  is  $Q$ - $\alpha_{2t_0}(Q)$ -finite. It suffices to find  $y$  such that  $\beta(w^*)yw$  is non-zero, since we can then continue to find a non-zero  $Q$ - $\alpha_1(Q)$ -finite element  $a$  in  $\widetilde{M}$ . Denote by  $p$  the supremum of all range projections of elements  $yw$ , where  $y \in \mathcal{P}$ . We have to prove that  $p\beta(w) \neq 0$ . By construction,  $p \in \widetilde{M} \cap P'$  and  $pw = w$ . From Proposition D.5 (and here we use that there is no non-zero homomorphism from  $P$  to an amplification of  $N$ ),  $\widetilde{M} \cap P' \subset M$  and so,  $p \in M$ . But,  $\beta$  acts trivially on  $M$  and we obtain  $p\beta(w) = \beta(pw) = \beta(w) \neq 0$ .

*Step (3), using the intertwining-by-bimodules technique to conclude.* Denote by  $f \in \langle \widetilde{M}, e_{\alpha_1(M)} \rangle \cap Q'$  the orthogonal projection onto the closure of  $Qa\alpha_1(M)$  in  $L^2(\widetilde{M})$  and remark that  $\widehat{\varphi}(f) < +\infty$ . Denoting by  $\mathcal{F} : \langle (\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}) \rtimes G, e_{(1 \otimes \mathcal{N}) \rtimes G} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{N} \rtimes G, e_{\mathcal{L}(G)} \rangle$  the  $\widehat{\varphi}$ -preserving conditional expectation, it follows that

$$\mathcal{F}(f) \in \langle \mathcal{N} \rtimes G, e_{\mathcal{L}(G)} \rangle \cap Q' \quad \text{with} \quad \widehat{\varphi}(\mathcal{F}(f)) < \infty .$$

Moreover,  $\mathcal{F}(f) \neq 0$  since  $\mathcal{F}$  is faithful.

>From Proposition C.1, we get  $\gamma > 0$ ,  $n \geq 1$ ,  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G)$ , a homomorphism  $\theta : Q \rightarrow p(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))p$  and a non-zero partial isometry  $w \in M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes (\mathcal{N} \rtimes G)$  such that  $w$  is a  $\gamma$ -eigenvector for  $\varphi$  and  $xw = w\theta(x)$  for all  $x \in Q$ . It follows that  $w^*w \in p(M_n(\mathbb{C}) \otimes (N \rtimes G))p \cap \theta(Q)'$ , which is included in  $p(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))p$  by Theorem D.4. Also  $w w^* \in M \cap Q'$  and hence,  $w^*Qw$  is a diffuse subalgebra of  $p(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))p$ . Applying once more Theorem D.4, we get  $w^*Pw \subset p(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))p$ . Since obviously  $M \cap Q' \subset P$ , we can take  $v = w^*$  to conclude.  $\square$

*Remark 6.2.* — If  $P$  is a factor, it is sufficient to assume *malleability* instead of *strong malleability*. Indeed, looking back at the proof, let  $a \in \widetilde{M}$  be a  $Q$ - $\alpha_{t_0}(Q)$ -finite element. Then,  $a\alpha_{t_0}(ya)$  is  $Q$ - $\alpha_{2t_0}(Q)$ -finite for every  $y \in \widetilde{M}$  that quasi-normalizes  $Q$ . Denote by  $\widetilde{P}$  the quasi-normalizer of  $Q$  in  $\widetilde{M}$ . It is then sufficient to show that  $\widetilde{P}$  is factorial, to obtain at least one  $y$  such that  $a\alpha_{t_0}(ya) \neq 0$ . As in the proof above,  $\widetilde{M} \cap P' \subset M$ . Since  $\widetilde{P}$  contains  $P$ , it follows that  $\widetilde{M} \cap \widetilde{P}' \subset M \cap P' = \mathcal{Z}(P) = \mathbb{C}1$ . So, we are done.

In two cases, a unitary intertwiner  $v$  can be found. The first case is easy and follows immediately: assume  $G$  to be ICC and the quasi-normalizer  $P$  to be a factor. It is crucial to allow as well for an amplification in order to apply the result when dealing with the fundamental group of the crossed product  $N \rtimes G$ .

**THEOREM 6.3** (Popa, [55]). — *Given a malleable mixing action of an ICC group  $G$  on an almost periodic  $(\mathcal{N}, \varphi)$ , write  $N = \mathcal{N}^\varphi$  and  $M = N \rtimes G$ . Let  $t > 0$  and let  $Q \subset M^t$  be a diffuse subalgebra with the relative property (T). Denote by  $P$  the quasi-normalizer of  $Q$  in  $M^t$ . Suppose that  $P$  is a factor and that there is no non-zero homomorphism from  $P$  to an amplification of  $N$ . Realize  $M^t = p(M_n(\mathbb{C}) \otimes M)p$ .*

*Then, there exist  $\gamma > 0$ ,  $k \geq 1$  and  $v \in M_{n,k}(\mathbb{C}) \otimes (\mathcal{N} \rtimes G)$  a  $\gamma$ -eigenvector for  $\varphi$ , such that*

$$v^*v = p, \quad q := vv^* \in M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G), \quad vPv^* \subset \mathcal{L}(G)^{t\gamma},$$

*where we have realized  $\mathcal{L}(G)^{t\gamma} := q(M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))q$ .*

*Proof.* — Choose a projection  $q \in M_k(\mathbb{C}) \otimes Q$  with trace  $s$  where  $s = 1/t$ . Write  $Q^s := q(M_k(\mathbb{C}) \otimes Q)q$  and  $P^s := q(M_k(\mathbb{C}) \otimes P)q$ . We consider  $Q^s \subset P^s \subset M$ . Clearly,  $Q^s$  is diffuse,  $Q^s \subset M$  has the relative property (T) by Proposition B.6 and  $P^s$  is the quasi-normalizer of  $Q^s$  by Lemma 6.5. So, Lemma 6.1 (with Remark 6.2) yields a partial isometry  $v$  which is a  $\gamma$ -eigenvector for  $\varphi$  and satisfies  $v^*v \in P^s$ ,  $vP^sv^* \subset \mathcal{L}(G)^\gamma$ . Since both  $P^s$  and  $\mathcal{L}(G)$  are factors, we can move around  $v$  using partial isometries in matrix algebras over  $P$  and  $\mathcal{L}(G)$  to conclude.  $\square$

In the tracial case, assuming  $G$  to be ICC is sufficient.

**THEOREM 6.4** (Popa, [55]). — *Given a strongly malleable mixing action of an ICC group  $G$  on a finite  $(N, \tau)$ , let  $t > 0$  and let  $Q \subset (N \rtimes G)^t$  be a diffuse subalgebra with the relative property (T). Denote by  $P$  the quasi-normalizer of  $Q$  in  $(N \rtimes G)^t$  and suppose that there is no non-zero homomorphism from  $P$  to an amplification of  $N$ .*

*Then, there exists a unitary element  $v \in (N \rtimes G)^t$  such that  $vPv^* \subset \mathcal{L}(G)^t$ .*

*Proof.* — Write  $M = N \rtimes G$ . Below we prove the existence of a partial isometry  $v \in M^t$  satisfying  $v^*v \in P \cap Q'$  and  $vPv^* \subset \mathcal{L}(G)^t$ . Since any projection  $p \in P \cap Q'$  of trace  $s$  yields an inclusion  $pQ \subset pPp \subset M^{st}$  satisfying the assumptions of the theorem, a maximality argument combined with the factoriality of  $\mathcal{L}(G)$  then allows to conclude.

Choose a projection  $q \in M_k(\mathbb{C}) \otimes Q$  with trace  $s$  where  $s = 1/t$ . Write  $Q^s := q(M_k(\mathbb{C}) \otimes Q)q$  and  $P^s := q(M_k(\mathbb{C}) \otimes P)q$  as in the proof of the previous theorem. From Lemma 6.1, we get a partial isometry  $w \in M$  satisfying  $w^*w \in P^s \cap (Q^s)'$  and  $wP^sw^* \subset \mathcal{L}(G)$ . Let  $e$  be the smallest projection in  $P \cap Q'$  satisfying  $w^*w \leq 1 \otimes e$ . Moving around  $w$  using partial isometries in matrix algebras over  $Q$  and  $\mathcal{L}(G)$ , we find a partial isometry  $v \in M^t$  satisfying  $v^*v = e$  and  $vPv^* \subset \mathcal{L}(G)^t$ .  $\square$

**LEMMA 6.5.** — *Let  $Q \subset M$  be an inclusion of finite von Neumann algebras and  $p$  a non-zero projection in  $Q$ . If  $P$  denotes the quasi-normalizer of  $q$  in  $M$ , then  $pPp$  is the quasi-normalizer of  $pQp$  in  $pMp$ .*

*Proof.* — Denote by  $\tilde{P}$  the quasi-normalizer of  $pQp$  in  $pMp$ . We only prove the inclusion  $pPp \subset \tilde{P}$ , the converse inclusion being analogous. Let  $z$  be a central projection in  $Q$  such that  $z = \sum_{i=1}^n v_i v_i^*$  with  $v_i$  partial isometries in  $Q$  and  $v_i^* v_i \leq p$ .

If now  $x \in M$  quasi-normalizes  $Q$ , we write  $p_0 = pz$  and claim that  $p_0 x p_0$  quasi-normalizes  $pQp$ . Indeed, if  $xQ \subset \sum_{k=1}^r Qx_k$ , it is readily checked that

$$p_0 x p_0 pQp \subset \sum_{k,i} pQp v_i^* x_k p .$$

Since the central support of  $p$  in  $Q$  can be approximated arbitrary well by such special central projections  $z$ ,  $p_0$  approximates arbitrary well  $p$  and we have proved that  $pPp \subset \tilde{P}$ . □

### 7. FUNDAMENTAL GROUPS OF TYPE II<sub>1</sub> FACTORS

Recall that we denote the fundamental group of a II<sub>1</sub> factor  $M$  by  $\mathcal{F}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$  and that  $\text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi) \subset \mathbb{R}_+^*$  denotes the point spectrum of the modular automorphism group of an almost periodic state  $\varphi$  on  $\mathcal{N}$ .

**THEOREM 7.1** (Popa, [55]). — *Let  $G$  be an ICC group that admits an infinite almost normal subgroup  $H$  with the relative property (T). Let  $(\sigma_g)$  be a malleable mixing action of  $G$  on the almost periodic injective  $(\mathcal{N}, \varphi)$ . Denote  $M := \mathcal{N}^\varphi \rtimes G$ . One has*

$$\text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi) \subset \mathcal{F}(M) \subset \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi) \mathcal{F}(\mathcal{L}(G)) .$$

*In particular, if  $\mathcal{L}(G)$  has trivial fundamental group,  $\mathcal{F}(M) = \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$ .*

*Proof.* — As shown by Golodets and Nessonov [24], the inclusion  $\text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi) \subset \mathcal{F}(M)$  holds. Indeed, let  $s \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$  and take an  $s$ -eigenvector  $v \in \mathcal{N}$ , that we may suppose to be a partial isometry. Write  $p = v^* v$  and  $q = v v^*$ . Then,  $p, q \in \mathcal{N}^\varphi \subset M$ ,  $\varphi(q) = s\varphi(p)$  and  $\text{Ad } v$  yields an isomorphism of  $pMp$  with  $qMq$ . Hence,  $s \in \mathcal{F}(M)$ .

Suppose  $t \in \mathcal{F}(M)$  and let  $\theta : M \rightarrow M^t$  be a  $*$ -isomorphism. Since  $H$  is almost normal in  $G$ ,  $\mathcal{L}(G)$  is contained in the quasi-normalizer of  $\mathcal{L}(H)$  in  $M$ . Moreover,  $\mathcal{L}(H)$  is diffuse since  $H$  is infinite. So, it follows from Theorem D.4 that the quasi-normalizer of  $\mathcal{L}(H)$  in  $M$  is exactly  $\mathcal{L}(G)$  and, in particular, a factor. Since  $\mathcal{N}^\varphi$  is an injective von Neumann algebra with finite trace  $\varphi$ , it follows from Remark B.4 that there is no non-zero homomorphism from  $\mathcal{L}(G)$  to an amplification of  $\mathcal{N}^\varphi$ .

Write  $\mathcal{M} = \mathcal{N} \rtimes G$ ,  $Q = \theta(\mathcal{L}(H))$  and  $P = \theta(\mathcal{L}(G))$ . Realize  $M^t := p(M_n(\mathbb{C}) \otimes M)p$ , where  $p$  is chosen in  $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(H)$ . By Proposition B.5, the inclusion  $Q \subset P$  has the relative property (T). Increasing  $n$  if necessary, the previous paragraph and Theorem 6.3 yield  $s \in \text{Sp}(\mathcal{M}, \varphi)$  and  $v \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$  such that  $v$  is an  $s$ -eigenvector for  $\varphi$ ,  $v^* v = p$ ,  $q := v v^* \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G)$  and  $v P v^* \subset q(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))q$ . We claim that this inclusion is an equality. Then, we have shown that  $\mathcal{L}(G)$  and  $\mathcal{L}(G)^{ts}$  are



isomorphic, which yields  $ts \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(G))$  and hence,  $t \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)\mathcal{F}(\mathcal{L}(G))$ . So, this ends the proof.

Changing  $q$  to an equivalent projection in  $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G)$ , we may assume that  $q \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(H)$ . Write  $Q_1 \subset P_1 \subset M$  as

$$Q_1 := \theta^{-1}(v^*(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(H))v) \quad \text{and} \quad P_1 := \theta^{-1}(v^*(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))v).$$

The inclusion  $Q_1 \subset M = N \rtimes G$  has the relative property (T),  $P_1$  is the quasi-normalizer of  $Q_1$  and  $\mathcal{L}(G) \subset P_1$ . We have to prove that  $\mathcal{L}(G) = P_1$ .

By Theorem 6.3, there exist a  $w \in M_{k,1}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$ , an  $r$ -eigenvector for  $\varphi$  satisfying  $w^*w = 1$  and  $wP_1w^* \subset \mathcal{L}(G)^r$ . Since  $\mathcal{L}(G) \subset P_1$ , Theorem D.4 yields  $w \in M_{k,1}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G)$ . But then,  $\mathcal{L}(G) = P_1$  and we are done.  $\square$

**COROLLARY 7.2.** — *Let  $G$  be an ICC group that admits an infinite almost normal subgroup with the relative property (T). Suppose that  $\mathcal{L}(G)$  has trivial fundamental group. Let  $\text{Tr}_\Delta$  be the faithful normal state on  $B(H)$  given by  $\text{Tr}_\Delta(a) = \text{Tr}(\Delta a)$  and define  $(\mathcal{N}, \varphi) = \bigotimes_{g \in G} (B(H), \text{Tr}_\Delta)$ , with Connes-Størmer Bernoulli action  $G \curvearrowright (\mathcal{N}, \varphi)$ . Write  $M := \mathcal{N}^\varphi \rtimes G$ .*

*Then,  $\mathcal{F}(M)$  is the subgroup of  $\mathbb{R}_+^*$  generated by the ratios  $\lambda/\mu$  for  $\lambda, \mu$  belonging to the point spectrum of  $\Delta$ . In particular, for every countable subgroup  $S \subset \mathbb{R}_+^*$ , there exists a type  $\text{II}_1$  factor with separable predual whose fundamental group is  $S$ .*

Popa showed in [52] that, among other examples,  $\mathcal{L}(G)$  has trivial fundamental group when  $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}^2$ . Note that Popa shows in [52] that the fundamental group of  $\mathcal{L}(G) = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rtimes L^\infty(\mathbb{T}^2)$  equals the fundamental group of the equivalence relation given by the orbits of  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^2$ . The latter reduces to 1 using Gaboriau's  $\ell^2$  Betti number invariants for equivalence relations, see [22].

It is an open problem whether there exist  $\text{II}_1$  factors with separable predual and uncountable fundamental group different from  $\mathbb{R}_+^*$ .

## 8. FROM VON NEUMANN EQUIVALENCE TO ORBIT EQUIVALENCE

The following is an immediate consequence of Theorem 6.4.

**PROPOSITION 8.1.** — *Let  $G$  be an ICC group with a strongly malleable mixing action on the probability space  $(X, \mu)$ . Write  $M = L^\infty(X) \rtimes G$ . Let  $\Gamma$  be a countable group that admits an almost normal infinite subgroup  $\Gamma_0$  such that  $(\Gamma, \Gamma_0)$  has the relative property (T). Suppose that  $\Gamma$  acts on the probability space  $(Y, \eta)$ .*

*Let  $p$  be a projection in  $\mathcal{L}(G)$  and*

$$\theta : L^\infty(Y) \rtimes \Gamma \rightarrow p(L^\infty(X) \rtimes G)p$$

*a* \*-isomorphism. Then, there exists a unitary  $v \in pMp$  such that  $v\theta(\mathcal{L}(\Gamma))v^* \subset p\mathcal{L}(G)p$ .

*Proof.* — We apply Theorem 6.4, observing that  $\mathcal{L}(\Gamma)$  is included in the quasi-normalizer  $P$  of  $\mathcal{L}(\Gamma_0)$  in  $L^\infty(Y) \rtimes \Gamma$ . Using Remark B.4, it follows that there is no non-zero homomorphism from  $P$  to an amplification of  $L^\infty(X)$ .  $\square$

From now on, specify  $G \curvearrowright (X, \mu)$  to be the *Bernoulli action*. The following preliminary result is proved: an isomorphism between crossed products sending one group algebra into the other, makes the Cartan subalgebras conjugate. The final aim is Theorem 9.1 below, which states that the actions are necessarily conjugate.

**THEOREM 8.2** (Popa, [56]). — *Let  $G$  be an infinite group and, for  $\mu_0$  non-atomic,  $G \curvearrowright (X, \mu) = \prod_{g \in G} (X_0, \mu_0)$ , its Bernoulli action. Let  $\Gamma$  be an infinite group that acts freely and weakly mixing on the probability space  $(Y, \eta)$ . Write  $A = L^\infty(X)$  and  $B = L^\infty(Y)$ . Let  $p$  be a projection in  $\mathcal{L}(G)$  and*

$$\theta : B \rtimes \Gamma \rightarrow p(A \rtimes G)p$$

*a* \*-isomorphism. Suppose that  $\theta(\mathcal{L}(\Gamma)) \subset p\mathcal{L}(G)p$ . Then,

- there exists a partial isometry  $u \in A \rtimes G$  satisfying  $u^*u = p$ ,  $e := uu^* \in A$  and  $u\theta(B)u^* = eA$ ;
- the equality  $\theta(\mathcal{L}(\Gamma)) = p\mathcal{L}(G)p$  holds.

Later on, Proposition 8.1 and Theorem 8.2 are combined to prove that the actions of  $\Gamma$  and  $G$  are conjugate through a group isomorphism of  $\Gamma$  and  $G$ . The proof of Theorem 8.2 certainly is the most technical and analytically subtle part of this talk.

*Notations 8.3.* — We fix several notations used throughout the lemmas needed to prove Theorem 8.2.

- We fix an infinite group  $G$  and write  $A_0 = L^\infty(X_0)$ ,  $(A, \tau) = \bigotimes_{g \in G} (A_0, \tau_0)$ . For every finite subset  $K \subset G$ , we write  $A_{K^c} := \bigotimes_{g \notin K} (A_0, \tau_0)$ . Write  $M = A \rtimes G$  and denote by  $\tau$  the tracial state on  $M$ .

- We use  $\eta : M \rightarrow L^2(M)$  to identify an element of the algebra  $M$  with its corresponding vector in the Hilbert space  $L^2(M)$ .

- For a finite subset  $K \subset G$ , we denote by  $e_{\tilde{K}}$  the orthogonal projection onto the closure of  $\text{span}\{\eta(A_{K^c}u_g) \mid g \in G\}$  in  $L^2(M)$  and we denote by  $p_{\tilde{K}}$  the orthogonal projection onto the closure of  $\text{span}\{\eta(Au_k) \mid k \in G \setminus K\}$  in  $L^2(M)$ .

- We do not write the isomorphism  $\theta$ . We simply suppose that  $B \rtimes \Gamma = p(A \rtimes G)p$  in such a way that  $\mathcal{L}(\Gamma) \subset p\mathcal{L}(G)p$ . Of course,  $\tau$  is as well the trace on  $B \rtimes \Gamma$ , but non-normalized.

- The elements of  $\Gamma$  are denoted by  $s, t$  and the action of  $\Gamma$  on  $B$  by  $(\rho_s)_{s \in \Gamma}$ . The elements of  $G$  are denoted by  $g, h$  and the action of  $G$  on  $A$  by  $(\sigma_g)_{g \in G}$ .

• Denote by  $(\nu_s)_{s \in \Gamma}$  the canonical unitaries generating  $\mathcal{L}(\Gamma)$  and by  $(u_g)_{g \in G}$  the canonical unitaries generating  $\mathcal{L}(G)$ .

We first explain the idea of the proof of Theorem 8.2. Elements in the image of  $e_{\tilde{K}}$  for  $K$  large are thought of as *living far away space-wise*, while elements in the image of  $p_{\tilde{K}}$  for  $K$  large are thought of as *living far away group-wise*. In order to show that  $B$  can be conjugated into  $A$ , one shows first that sufficiently many elements of  $B$  are not living far away group-wise. This suffices to construct a  $B$ - $A$ -subbimodule of  $L^2(M)$  which is finitely generated as an  $A$ -module. To obtain elements of  $B$  that are not living far away group-wise, two lemmas are used:

- if an element of  $B$  lives far away space-wise, it does not live far away group wise (Lemma 8.4);
- if  $b \in B$  and  $s_n \rightarrow \infty$  in  $\Gamma$ , the elements  $\rho_{s_n}(b)$  are more and more living far away space-wise (Lemma 8.5).

To pass from the approximate inequalities in Lemmas 8.4, 8.5 to exact inequalities, the powerful technique of ultraproducts is applied. This allows to conjugate  $B$  into  $A$  at least on the level of the ultrapower algebra. But this is sufficient to return to earth and conjugate  $B$  into  $A$ .

LEMMA 8.4. — *For every  $\varepsilon > 0$  there exist finite subsets  $K, L \subset G$  such that*

$$\|p_{\tilde{K}}\eta(x)\|^2 \leq 3\|(1 - e_{\tilde{L}})\eta(x)\| + \varepsilon$$

for all  $x \in B$  with  $\|x\| \leq 1$ .

*Proof.* — We make the following claim.

*Claim.* For every  $a \in M$  with  $\|a\| \leq 1$  and every  $\varepsilon > 0$ , there exist  $K, L \subset G$  finite such that

$$|\langle a \cdot \eta(x) \cdot a^*, p_{\tilde{K}}\eta(x) \rangle| \leq 3\|(1 - e_{\tilde{L}})\eta(x)\| + \|E_{\mathcal{L}(G)}(a)\|_2 + \varepsilon$$

for all  $x \in M$  with  $\|x\| \leq 1$ . To deduce the lemma from this claim it is then sufficient to prove that  $B$  contains unitaries  $a$  with  $\|E_{\mathcal{L}(G)}(a)\|_2$  arbitrary small and to use the commutativity of  $B$  in order to get  $a \cdot \eta(x) \cdot a^* = \eta(x)$  for  $x \in B$ .

To prove the claim, choose  $a \in M$  with  $\|a\| \leq 1$  and  $\varepsilon > 0$ . By the Kaplansky density theorem, we may assume that  $a \in \text{span}\{A_{F_0}u_g \mid g \in F_1\}$  for some finite subsets  $F_0, F_1 \subset G$ . We may assume as well that  $e \in F_1$ . Put  $L = F_1^{-1}F_0$  and  $K = LF_0^{-1}$ . It is an excellent Bernoulli exercise to check that

$$e_{\tilde{L}}(a \cdot \xi) = e_{\tilde{L}}(E_{\mathcal{L}(G)}(a) \cdot \xi) \text{ for } \xi \in \text{Im } e_{\tilde{L}}, \quad e_{\tilde{L}}(\xi \cdot a) = (e_{\tilde{L}}\xi) \cdot a \text{ for } \xi \in \text{Im } p_{\tilde{K}}.$$

Take  $x \in M$  with  $\|x\| \leq 1$ . We obtain that

$$(*) \quad |\langle a \cdot \eta(x) \cdot a^*, p_{\tilde{K}}\eta(x) \rangle| \leq \|e_{\tilde{L}}(a \cdot \eta(x))\| + \|(1 - e_{\tilde{L}})((p_{\tilde{K}}\eta(x)) \cdot a)\|.$$

In (\*), the second term equals

$$\|(1 - e_{\tilde{L}})p_{\tilde{K}}\eta(x) \cdot a\| \leq \|(1 - e_{\tilde{L}})\eta(x)\|.$$

The first term of (\*), is bounded by

$$(**) \quad \|e_{\bar{L}}(a \cdot (e_{\bar{L}}\eta(x)))\| + \|(1 - e_{\bar{L}})\eta(x)\| .$$

In (\*\*), the first term equals

$$\begin{aligned} \|e_{\bar{L}}(E_{\mathcal{L}(G)}(a) \cdot (e_{\bar{L}}\eta(x)))\| &\leq \|E_{\mathcal{L}(G)}(a) \cdot (e_{\bar{L}}\eta(x))\| \\ &\leq \|E_{\mathcal{L}(G)}(a) \cdot \eta(x)\| + \|(1 - e_{\bar{L}})\eta(x)\| \\ &\leq \|E_{\mathcal{L}(G)}(a)\|_2 + \|(1 - e_{\bar{L}})\eta(x)\| . \end{aligned}$$

We have shown that

$$|\langle a \cdot \eta(x) \cdot a^*, p_{\bar{K}}\eta(x) \rangle| \leq 3\|(1 - e_{\bar{L}})\eta(x)\| + \|E_{\mathcal{L}(G)}(a)\|_2$$

for all  $x \in M$  with  $\|x\| \leq 1$ , which proves the claim.

It remains to show that, for every  $\varepsilon > 0$ , there exists a unitary  $u \in B$  such that  $\|E_{\mathcal{L}(G)}(u)\|_2 < \varepsilon$ . If not, it follows from Proposition C.1 that there exist  $n \geq 1$ , a projection  $q \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G)$ , a homomorphism  $\theta : B \rightarrow q(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))q$  and a non-zero partial isometry  $v \in M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes pM$  satisfying  $v^*v \leq q$  and  $bv = v\theta(b)$  for all  $b \in B$ . Using Theorem D.4,  $v^*v \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G)$  and we may assume that  $v^*v = q$ . Then,  $v^*Bv$  is a diffuse subalgebra of  $q(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))q$ . Since the normalizer of  $B$  in  $pMp$  is the whole of  $pMp$ , it follows from Theorem D.4 that  $v^*Mv \subset q(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))q$ . Since  $v^*Mv = q(M_n(\mathbb{C}) \otimes M)q$ , this is a contradiction.  $\square$

LEMMA 8.5. — *For every  $b \in B$ ,  $\varepsilon > 0$  and  $L \subset G$  finite, there exists  $K \subset \Gamma$  finite such that*

$$\|(1 - e_{\bar{L}})\eta(\rho_s(b))\| < \varepsilon$$

for all  $s \in \Gamma \setminus K$ .

*Proof.* — We again make a claim.

*Claim.* For every  $a \in M$  with  $\|a\| \leq 1$ ,  $L \subset G$  finite and  $\varepsilon > 0$ , there exists  $K_1 \subset G$  finite such that

$$\|(1 - e_{\bar{L}})\eta(vaw)\| \leq \varepsilon + \|(1 - p_{\bar{K}_1})\eta(v)\|$$

for all  $v, w \in \mathcal{L}(G)$  with  $\|w\| \leq 1$ .

The lemma follows easily from the claim: given  $K_1 \subset G$  finite and  $\varepsilon > 0$ , we can take  $K \subset \Gamma$  finite such that  $\|(1 - p_{\bar{K}_1})\eta(\nu_s)\| < \varepsilon$  for all  $s \in \Gamma \setminus K$ . It remains to observe that  $\rho_s(b) = \nu_s b \nu_s^*$  and  $\nu_s \in \mathcal{L}(\Gamma) \subset \mathcal{L}(G)$ .

To prove the claim, choose  $a \in M$  with  $\|a\| \leq 1$  and  $\varepsilon > 0$ . By the Kaplansky density theorem, we may assume that  $a \in \text{span}\{A_F u_g \mid g \in G\}$  for some finite subset  $F \subset G$ . Given  $L \subset G$  finite, we put  $K_1 = LF^{-1}$  and leave as an exercise to check that

$$(p_{\bar{K}_1}\eta(v)) \cdot (aw) \in \text{Im } e_{\bar{L}} \text{ for all } v, w \in \mathcal{L}(G).$$

The claim follows immediately.  $\square$

LEMMA 8.6. — For every  $b \in B$ ,  $E_{\mathcal{L}(G)}(b) = \frac{\tau(b)}{\tau(p)}p$ . Hence,  $\mathcal{L}(\Gamma) = p\mathcal{L}(G)p$ .

*Proof.* — We have to prove the following: if  $b \in B$  and  $\tau(b) = 0$ , then  $E_{\mathcal{L}(G)}(b) = 0$ . Take such a  $b \in B$  with  $\tau(b) = 0$ . Since  $\Gamma$  acts weakly mixing on  $B$ , we take a sequence  $s_n \rightarrow \infty$  in  $\Gamma$  such that  $\rho_{s_n}(b) \rightarrow 0$  in the weak topology.

Combining Lemmas 8.4 and 8.5, we find a finite subset  $K \subset G$  and  $n_0$  such that  $\|p_{\tilde{K}}\eta(\rho_{s_n}(b))\|^2 \leq \varepsilon$  for all  $n \geq n_0$ . Denote by  $f$  the orthogonal projection of  $L^2(M)$  onto the closure of  $\eta(\mathcal{L}(G))$ . Since  $f$  and  $p_{\tilde{K}}$  commute, we find that  $\|p_{\tilde{K}}\eta(E_{\mathcal{L}(G)}(\rho_{s_n}(b)))\|^2 \leq \varepsilon$  for all  $n \geq n_0$ . On the other hand,  $E_{\mathcal{L}(G)}(\rho_{s_n}(b))$  tends weakly to 0 and belongs to  $\mathcal{L}(G)$ . Hence,

$$\|(1 - p_{\tilde{K}})\eta(E_{\mathcal{L}(G)}(\rho_{s_n}(b)))\|^2 \rightarrow 0$$

when  $n \rightarrow \infty$ . We conclude that for  $n$  sufficiently large,  $\|E_{\mathcal{L}(G)}(\rho_{s_n}(b))\|_2^2 \leq 2\varepsilon$ . But, for every  $n$ ,

$$\|E_{\mathcal{L}(G)}(\rho_{s_n}(b))\|_2 = \|\nu_{s_n}E_{\mathcal{L}(G)}(b)\nu_{s_n}\|_2 = \|E_{\mathcal{L}(G)}(b)\|_2.$$

It follows that  $\|E_{\mathcal{L}(G)}(b)\|_2^2 \leq 2\varepsilon$  for all  $\varepsilon > 0$ , which proves that  $E_{\mathcal{L}(G)}(b) = 0$ .

Since  $pMp = B \rtimes \Gamma$  and  $\mathcal{L}(\Gamma) \subset p\mathcal{L}(G)p$ , it suffices to apply  $E_{\mathcal{L}(G)}$  to obtain that  $p\mathcal{L}(G)p = \mathcal{L}(\Gamma)$ . □

Let us warm up the ultraproduct machinery to finish the proof of Theorem 8.2.

*Notations 8.7.* — We introduce the following notations.

- Let  $\omega$  be a free ultrafilter on  $\mathbb{N}$  and define the ultrapower algebra  $M^\omega$ , containing  $A^\omega$  as a maximal abelian subalgebra. Denote by  $A_\infty^\omega \subset A^\omega$  the *tail algebra* for the Bernoulli action, defined as

$$A_\infty^\omega := \bigcap_{\substack{F \subset G \\ F \text{ finite}}} (A_{F^c})^\omega.$$

Observe that  $A_\infty^\omega$ , as a subalgebra of  $M^\omega$ , is normalized by the unitaries  $(u_g)_{g \in G}$ .

- Denote by  $A_\infty^\omega \rtimes G$  the von Neumann subalgebra of  $M^\omega$  generated by  $A_\infty^\omega$  and  $\mathcal{L}(G)$ .

- We define  $\chi := B^\omega \cap p(A_\infty^\omega \rtimes G)p$ .

Lemmas 8.4 and 8.5 can be reinterpreted to yield elements of  $\chi$ .

LEMMA 8.8. — *The following results hold.*

(1) A bounded sequence  $(b_n)$  in  $B$  represents an element of  $\chi$  if and only if

$$\lim_{n \rightarrow \omega} \|(1 - e_{\tilde{L}})\eta(b_n)\| = 0 \quad \text{for every finite subset } L \subset G.$$

(2) When  $s_n \rightarrow \infty$  in  $\Gamma$  and  $b \in B$ , the sequence  $(\rho_{s_n}(b))$  represents an element in  $\chi$ .

(3) If a bounded sequence  $(b_n)$  in  $B$  represents an element of  $\chi$ , then  $b_n - \tau_1(b_n)p$  tends to 0 weakly. Here  $\tau_1 := \tau(\cdot)/\tau(p)$  denotes the normalized trace on  $pMp$ .

*Proof*

(1) If  $(a_n) \in A_\infty^\omega$  and  $g \in G$ , clearly  $\lim_{n \rightarrow \omega} \|(1 - e_{\tilde{L}})\eta(a_n u_g)\| = 0$ . Hence, the same holds if we replace  $(a_n u_g)$  by any element of  $A_\infty^\omega \rtimes G$ . Conversely, let  $b \in B^\omega$  be represented by the bounded sequence  $(b_n)$  in  $B$  such that (1) holds. For any finite  $K \subset G$ , define  $z_K \in M^\omega$  by the sequence  $(\sum_{g \in K} E_A(b_n u_g^*)u_g)$ . Our assumption yields that  $z_K \in A_\infty^\omega \rtimes G$  for all  $K$ . From Lemma 8.4 it follows that  $\|z_K - b\|_2 \rightarrow 0$ , if  $K \rightarrow G$ . Hence,  $b \in A_\infty^\omega \rtimes G$ .

(2) This follows using Lemma 8.5 and statement (1).

(3) Using Lemma 8.6, it suffices to check that  $b_n - E_{\mathcal{L}(G)}(b_n)$  tends to 0 weakly. This is true for any  $(b_n)$  in  $A_\infty^\omega \rtimes G$ . □

In the next lemma,  $\chi$  is shown to be sufficiently big.

LEMMA 8.9. — *One has  $pM^\omega p \cap \chi' = B^\omega$ .*

*Proof.* — We first claim that the action  $(\rho_s)_{s \in \Gamma}$  is 2-mixing (see Definition D.6). We have to prove that for all  $a, b, c \in B$ ,

$$|\tau(a\rho_s(b)\rho_t(c)) - \tau(a)\tau(\rho_s(b)\rho_t(c))| \rightarrow 0$$

when  $s, t \rightarrow \infty$ .

Suppose that the bounded sequence  $(d_n)$  represents an element  $d \in \chi$ . By (3) in Lemma 8.8,  $d_n - \tau_1(d_n)p \rightarrow 0$  weakly and hence,

$$|\tau_1(ad_n) - \tau_1(a)\tau_1(d_n)| \rightarrow 0$$

for all  $a \in B$ . Fix  $a, b, c \in B$  and take sequences  $s_n, t_n \rightarrow \infty$  in  $\Gamma$ . From (2) in Lemma 8.8, we get that the sequences  $(\rho_{s_n}(b))$  and  $(\rho_{t_n}(c))$  represent elements of  $\chi$ . Since  $\chi$  is a von Neumann algebra, the sequence  $(\rho_{s_n}(b)\rho_{t_n}(c))$  represents an element of  $\chi$  as well. Applying the previous paragraph to this sequence, we have proved the claim. Combining the 2-mixing of the action  $(\rho_s)_{s \in \Gamma}$  with Lemma D.7, we are done. □

*Proof of Theorem 8.2.* — We first claim that there exists a non-zero  $a \in p\langle M^\omega, e_{A^\omega} \rangle^+ p \cap \chi'$  with  $\hat{\tau}(a) < \infty$ . As usual,  $\hat{\tau}$  denotes the semi-finite trace on the basic construction  $\langle M^\omega, e_{A^\omega} \rangle$ , see Appendix A.

There exists a finite subset  $K \subset G$  such that

$$\lim_{n \rightarrow \omega} \|p_{\tilde{K}}\eta(b_n)\| \leq \frac{1}{2}$$

for all  $(b_n)$  in the unit ball of  $\chi$ . Indeed, if not, write  $G$  as an increasing union of finite subsets  $K_n$  and choose  $b_n \in B$  with  $\|b_n\| \leq 1$ ,  $\|(1 - e_{\tilde{K}_n})\eta(b_n)\| \leq 1/n$  and  $\|p_{\tilde{K}_n}\eta(b_n)\| > 1/2$ . This yields a contradiction with Lemma 8.4.

Define the projection  $f_K \in \langle M^\omega, e_{A^\omega} \rangle$  as  $f_K = \sum_{g \in K} u_g^* e_{A^\omega} u_g$ . Clearly  $\widehat{\tau}(f_K) < \infty$ . Denote by  $a$  the (unique) element in the ultraweakly closed convex hull of  $\{bf_K b^* \mid b \in \mathcal{U}(\chi)\}$ . By construction  $\widehat{\tau}(a) < \infty$  and  $a \in \chi'$ . To obtain the claim, we have to show that  $a \neq 0$ . Whenever  $(b_n)$  represents  $b \in \mathcal{U}(\chi)$ , we have

$$\widehat{\tau}(e_{A^\omega} b f_K b^* e_{A^\omega}) = \lim_{n \rightarrow \omega} \|(1 - p_{\tilde{K}})\eta(b_n)\|^2 \geq 3/4.$$

Hence,  $\widehat{\tau}(e_{A^\omega} a e_{A^\omega}) \neq 0$  and  $a \neq 0$ . This proves the claim stated in the beginning of the proof.

It follows from Lemma 8.9 and Theorem C.3 that there exists a non-zero partial isometry  $v \in M^\omega$  satisfying  $v^*v \in B^\omega$ ,  $vv^* \in A^\omega$  and  $vB^\omega v^* \subset A^\omega$ . Take partial isometries  $v_n \in M$  such that  $e_n := v_n^*v_n \in B$ ,  $v_n v_n^* \in A$  and  $(v_n)$  represents  $v$ . It follows that there exists  $n$  such that

$$\|v_n b v_n^* - E_A(v_n b v_n^*)\|_2 < \frac{1}{2} \|e_n\|_2$$

for all  $b \in B$  with  $\|b\| \leq 1$ . Indeed, if not, we find a sequence of elements  $b_n \in B$  with  $\|b_n\| \leq 1$  and  $\|v_n b_n v_n^* - E_A(v_n b_n v_n^*)\|_2 \geq \frac{1}{2} \|e_n\|_2$ . Since  $(b_n)$  defines an element in  $B^\omega$ , taking the limit  $n \rightarrow \omega$  yields a contradiction.

If we write  $f = v_n v_n^* \in A$ ,  $A_1 := fA$  and  $B_1 := v_n B v_n^*$  as subalgebras of  $fMf$ , we have, after normalization of the trace,  $\|b - E_{A_1}(b)\|_2 \leq \frac{1}{2}$  for all  $b \in B_1$  with  $\|b\| \leq 1$ . Hence, (4) in Proposition C.1 is satisfied and an application of Theorem C.3 concludes the proof of Theorem 8.2. □

### 9. STRONG RIGIDITY FOR VON NEUMANN ALGEBRAS

Suppose that  $G$  acts on  $(A, \tau)$  by  $(\sigma_g)_{g \in G}$  and  $\Gamma$  on  $(B, \tau)$  by  $(\rho_s)_{s \in \Gamma}$ . A conjugation of both actions is a pair  $(\Delta, \delta)$  of isomorphisms  $\Delta : B \rightarrow A$ ,  $\delta : \Gamma \rightarrow G$  satisfying  $\Delta(\rho_s(b)) = \sigma_{\delta(s)}(\Delta(b))$ , for all  $b \in B$  and  $s \in \Gamma$ . Associated with the conjugation  $(\Delta, \delta)$  is of course the obvious isomorphism of crossed products  $\theta_{\Delta, \delta} : B \rtimes \Gamma \rightarrow A \rtimes G$ .

Whenever  $G$  acts on  $(A, \tau)$  and  $\alpha : G \rightarrow S^1$  is a character, we have an obvious automorphism  $\theta_\alpha$  of the crossed product  $A \rtimes G$  defined as fixing pointwise  $A$  and  $\theta_\alpha(u_g) = \alpha(g)u_g$ .

**THEOREM 9.1** (Popa, [56]). — *Let  $G$  be an ICC group acting and  $G \curvearrowright (X, \mu)$  its Bernoulli action (with non-atomic base). Let  $\Gamma$  be a countable group that admits an almost normal infinite subgroup  $\Gamma_0$  such that  $(\Gamma, \Gamma_0)$  has the relative property (T). Suppose that  $\Gamma$  acts freely on the probability space  $(Y, \eta)$ . Let  $p$  be a projection in  $L^\infty(X) \rtimes G$  and*

$$\theta : L^\infty(Y) \rtimes \Gamma \rightarrow p(L^\infty(X) \rtimes G)p$$

a  $*$ -isomorphism. Then,  $p = 1$  and there exist a unitary  $u \in L^\infty(X) \rtimes G$ , a conjugation  $(\Delta, \delta)$  of the actions through a group isomorphism  $\delta : \Gamma \rightarrow G$  and a character  $\alpha$  on  $G$  such that

$$\theta = \text{Ad } u \circ \theta_\alpha \circ \theta_{\Delta, \delta}.$$

Theorem 9.1 admits the following corollary stated in the introduction.

**COROLLARY 9.2.** — *Let  $G$  be a  $w$ -rigid group and denote by  $M_G := L^\infty(X) \rtimes G$  the crossed product of the Bernoulli action  $G \curvearrowright (X, \mu)$  with non-atomic base. Then, for  $w$ -rigid ICC groups  $G$  and  $\Gamma$ , we have  $M_G \cong M_\Gamma$  if and only if  $G \cong \Gamma$ . Moreover, all  $M_G$  for  $G$   $w$ -rigid ICC, have trivial fundamental group.*

The corollary is an immediate consequence of Theorem 8.2 and the orbit equivalence superrigidity Theorem 4.4. Indeed, let  $G$  and  $\Gamma$  be  $w$ -rigid ICC groups with Bernoulli actions on  $(X, \mu)$  and  $(Y, \eta)$ , respectively. If  $p$  is a projection in  $L^\infty(X) \rtimes G$  and  $\theta : L^\infty(Y) \rtimes \Gamma \rightarrow p(L^\infty(X) \rtimes G)p$  is a  $*$ -isomorphism, we have to prove that  $p = 1$  and that  $\Gamma$  and  $G$  are isomorphic. Combining Proposition 8.1 and Theorem 8.2, we may assume that  $p \in L^\infty(X)$  and  $\theta(L^\infty(Y)) = L^\infty(X)p$ . Hence,  $\theta$  defines a stable orbit equivalence between  $\Gamma \curvearrowright Y$  and  $G \curvearrowright X$ . So, Theorem 4.4 allows to conclude.

Refining the reasoning above, Theorem 9.1 is proved. First, taking a further reduction, it is shown that we may assume that the action  $\Gamma \curvearrowright Y$  is weakly mixing. So, Proposition 8.1 and Theorem 8.2 can be applied and yield a stable orbit equivalence of  $\Gamma \curvearrowright Y$  and  $G \curvearrowright X$ . Associated with this stable orbit equivalence is a cocycle. The unitary that conjugates  $\mathcal{L}(\Gamma)$  into  $\mathcal{L}(G)$  (its existence is the contents of Proposition 8.1) is reinterpreted as making cohomologous this cocycle to a homomorphism into  $\mathcal{U}(\mathcal{L}(G))$ . Using the weak mixing property through an application of Lemma 4.8, the homomorphism can be assumed to take values in  $G$  itself. This yields the conjugacy of the actions.

*Proof of Theorem 9.1.* — Write  $A = L^\infty(X)$  and  $B = L^\infty(Y)$ . Write  $M = A \rtimes G$  and identify through  $\theta$ ,  $B \rtimes \Gamma = p(A \rtimes G)p$ . First applying Proposition 8.1, we may assume that  $p \in \mathcal{L}(G)$  and  $\mathcal{L}(\Gamma) \subset p\mathcal{L}(G)p$ . We claim that there exist a finite index subgroup  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  and a  $\Gamma_1$ -invariant projection  $p_1 \in B \cap \mathcal{L}(G)$  such that the  $\Gamma$ -action on  $B$  is induced from the  $\Gamma_1$ -action on  $p_1B$  obtained by restriction, and such that the  $\Gamma_1$ -action on  $p_1B$  is weakly mixing.

Whenever  $V \subset B$  is a finite-dimensional  $\Gamma$ -invariant subspace, it follows from Theorem D.4 that  $V \subset p\mathcal{L}(G)p$ . Also,  $B \cap \mathcal{L}(G)$  is a  $\Gamma$ -invariant von Neumann subalgebra of  $B$ . By the ergodicity of the  $\Gamma$ -action on  $B$ , this invariant subalgebra is either diffuse or atomic. If it is diffuse and since it commutes with  $B$ , it would follow from Theorem D.4 that  $B \subset p\mathcal{L}(G)p$  and hence,  $pMp \subset p\mathcal{L}(G)p$ , a contradiction. So,  $B \cap \mathcal{L}(G)$  is atomic, hence finite-dimensional, and it suffices to take a minimal projection  $p_1 \in B \cap \mathcal{L}(G)$ . This proves the claim.



It now suffices to prove the theorem under the additional assumption that the action of  $\Gamma$  on  $B$  is weakly mixing. We apply Theorem 8.2. Conjugating again, we obtain the following situation: a projection  $q \in A$  and a partial isometry  $v \in M$  such that  $vv^* = p \in \mathcal{L}(G)$ ,  $v^*v = q$  and  $B \rtimes \Gamma = q(A \rtimes G)q$  in such a way that  $B = qA$  and  $v\mathcal{L}(\Gamma)v^* = p\mathcal{L}(G)p$ . The theorem follows from Proposition 9.3 below.  $\square$

In the proof of Theorem 9.1, we used the following proposition. It is a weaker version of Theorem 5.2 in [56], but sufficient for our purposes. It also provides a generalization and simpler proof for the main result in [43] by Neshveyev and Størmer.

PROPOSITION 9.3 (Popa, [56]). — *Let  $G$  be an infinite group that acts freely and weakly mixing on  $(X, \mu)$ . Let  $\Gamma$  be an infinite group that acts freely on  $(Y, \eta)$ . Write  $A = L^\infty(X)$  and  $B = L^\infty(Y)$ . Suppose that  $q$  is a projection in  $A$  such that*

$$B \rtimes \Gamma = q(A \rtimes G)q \quad \text{with} \quad B = qA.$$

*Suppose that there exists a partial isometry  $v \in A \rtimes G$  satisfying  $v^*v = q$ ,  $vv^* = p \in \mathcal{L}(G)$  and  $v\mathcal{L}(\Gamma)v^* = p\mathcal{L}(G)p$ .*

- *If  $G$  has no finite normal subgroups,  $q = 1$ .*
- *If  $q = 1$ , there exists  $w \in \mathcal{U}(\mathcal{L}(G))$  such that, writing  $\tilde{v} = vw$ ,  $\tilde{v}$  normalizes  $B = A$  and  $\tilde{v}\nu_s\tilde{v}^* = \alpha(s)u_{\delta(s)}$  for some  $\alpha \in \text{Char}(\Gamma)$  and some group isomorphism  $\delta : \Gamma \rightarrow G$ .*

We write this rather pedantic formulation of the proposition, to cover at the same time its application in the proof of Theorem 9.1 (where  $G$  is ICC and hence, without finite normal subgroups) and the result of [43] (where  $G$  is an any abelian group, but  $q = 1$  from the beginning).

*Proof.* — We make use of the canonical embedding  $\eta : A \rtimes G \rightarrow A\overline{\otimes}\ell^2(G)$  of the crossed product into the Hilbert-W\*-module  $A\overline{\otimes}\ell^2(G)$  given by  $\eta(u_g a) = a \otimes \delta_{g^{-1}}$  for all  $g \in G$  and  $a \in A$ . Here  $(\delta_g)_{g \in G}$  is the canonical orthonormal basis of  $\ell^2(G)$ . We identify  $A\overline{\otimes}\ell^2(G) = L^\infty(X, \ell^2(G))$  and we make act  $\mathcal{L}(G)$  on  $\ell^2(G)$  on the left and the right:  $u_g \delta_h = \delta_{gh}$  and  $\delta_h u_g = \delta_{hg}$ . At the same time, we regard  $\mathcal{L}(G) \subset \ell^2(G)$ .

Denote  $S^1 G := S^1 \times G$  that we identify in the obvious way with a closed subgroup of  $\mathcal{U}(\mathcal{L}(G))$ . We identified  $Y \subset X$  such that  $\Gamma$  acts on  $Y$ ,  $B = L^\infty(Y)$ ,  $A = L^\infty(X)$  and  $q = \chi_Y$ . We have the orbit equivalence  $q(A \rtimes G)q = B \rtimes \Gamma$  with  $B = qA$ . This yields a one-cocycle  $\gamma : \Gamma \times Y \rightarrow S^1 G$  given by

$$\eta(z\nu_s)(x) = \eta(z)(s * x) \gamma(s, x)$$

for all  $z \in A \rtimes G$  and where we use  $s * x$  to denote the action of an element  $s \in \Gamma$  on  $x \in Y$ . We claim that the partial isometry  $v$  makes  $\gamma$  cohomologous to a homomorphism.

Observe that  $E_{\mathcal{L}(G)}(vav^*) = \tau(p)^{-1}\tau(a)p$  for all  $a \in B$ . Indeed,

$$E_{\mathcal{L}(G)}(vav^*) = \tau(p)^{-1}E_{v\mathcal{L}(\Gamma)v^*}(vav^*) = \tau(p)^{-1}vE_{\mathcal{L}(\Gamma)}(a)v^* = \tau(p)^{-1}\tau(a)p.$$

We first study the function  $w := \tau(p)^{1/2}\eta(v) \in L^\infty(Y, \ell^2(G))$ . Suppose that  $w_0 \in \mathcal{L}(G)$  is an essential value of this function. We find a decreasing sequence of non-zero projections  $q_n$  in  $B$  such that  $\|\tau(p)^{1/2}\eta(v)q_n - q_n \otimes w_0\|_\infty \rightarrow 0$ , where we use the uniform norm for functions in  $L^\infty(X, \ell^2(G))$ . So, we have a sequence  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  such that  $\|(\tau(p)^{1/2}v - w_0)q_n\|_2 \leq \varepsilon_n\|q_n\|_2$ , where we use the norm of  $L^2(M)$ . In  $L^1(M)$ , we obtain that  $\tau(q_n)^{-1}\|\tau(p)vq_nv^* - w_0q_nw_0^*\|_1 \rightarrow 0$ . Applying  $E_{\mathcal{L}(G)}$  it follows that  $\|p - w_0w_0^*\|_1 \rightarrow 0$  and hence  $w_0w_0^* = p$ . We have shown that for almost all  $y \in Y$ ,

$$w(y) \in \mathcal{L}(G) \quad \text{and} \quad w(y)w(y)^* = p.$$

Since we can replace  $v$  by  $w_0^*v$ , we may assume that  $p$  is an essential value of the function  $w$ .

Define the homomorphism  $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(p\mathcal{L}(G)p) : \pi(s) = v\nu_s v^*$ . For every  $s \in \Gamma$ ,  $v\nu_s = \pi(s)v$ . Applying  $\eta$ , this yields,

$$(2) \quad w(s * x) \gamma(s, x) = \pi(s) w(x) \quad \text{for almost all } x \in Y.$$

If  $q = 1$ , Lemma 4.8 yields that  $\pi(s) \in S^1G$  for all  $s \in \Gamma$  and  $w(x) \in S^1G$  for almost all  $x \in X$ . The latter implies that  $v$  normalizes the Cartan subalgebra  $A = B$ . The former allows to define the group isomorphism  $\delta : \Gamma \rightarrow G$  and the character  $\alpha : \Gamma \rightarrow S^1$  such that  $\pi(s) = \alpha(s)\delta(s)$  for all  $s \in \Gamma$ . So, we are done in the case  $q = 1$ .

It remains to show that  $p = 1$  when  $G$  has no finite normal subgroups. The orbit equivalence allows as well for an inverse 1-cocycle: define  $W = \{(g, x) \in G \times Y \mid x \in Y, g \cdot x \in Y\}$ . We use the notation  $g \cdot x$  to denote the action of an element  $g \in G$  on  $x \in X$ . Then, the 1-cocycle  $\mu : W \rightarrow S^1\Gamma$  is well defined and related to  $\gamma$  by the formula

$$g = \gamma(\mu_{\text{group}}(g, x), x) \mu_{\text{scal}}(g, x)$$

for almost all  $(g, x) \in W$ . Here we split up explicitly  $\mu = \mu_{\text{scal}}\mu_{\text{group}}$ . Plugging the previous equality into (2) yields

$$(3) \quad w(g \cdot x) u_g = \pi(\mu(g, x)) w(x) \quad \text{for almost all } (g, x) \in W.$$

Since  $p$  is an essential value of the function  $w$  and since  $\pi$  takes values in the unitaries of  $p\mathcal{L}(G)p$ , arguing exactly as in the proof of Lemma 4.8, yields that for any  $g \in G$ ,  $pu_g$  is arbitrary close to a unitary and hence,  $u_g$  and  $p$  commute for all  $g \in G$ . So,  $p$  is a central projection in  $\mathcal{L}(G)$  and it follows that  $w(x) \in \mathcal{U}(p\mathcal{L}(G)p)$  for almost all  $x \in Y$ . Conjugating equation (3) with  $v^*$ , implies that the cocycle  $\mu : W \rightarrow S^1\Gamma$  is cohomologous, as a cocycle with values in  $\mathcal{U}(\mathcal{L}(\Gamma))$ , to the homomorphism  $g \mapsto v^*u_gv$ . It follows from Lemma 4.8 that  $v^*u_gv \in S^1\Gamma$  for all  $g \in G$ . On  $S^1\Gamma$ , the trace  $\tau$  takes the values 0 and  $\tau(p)S^1$ . Hence, for all  $g \in G$ , we have

$$\tau(u_gp) = \tau(u_gvv^*) = \tau(v^*u_gv) \in \{0\} \cup S^1\tau(p).$$

We also know that  $p$  is a central projection in  $\mathcal{L}(G)$ . It is an excellent exercise to deduce from all this that  $p$  is of the form  $\sum_{g \in K} \beta(k)u_k$  for some finite normal subgroup

$K \subset G$  and an  $\text{Ad } G$ -invariant character  $\beta \in \text{Char } K$ . Hence,  $K = \{e\}$ ,  $p = 1$  and we are done. □

### 10. OUTER CONJUGACY OF $w$ -RIGID GROUP ACTIONS ON THE HYPERFINITE $\text{II}_1$ FACTOR

We discuss some of the results of Popa [54] on (cocycle) actions of  $w$ -rigid groups on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor. As explained in the introduction, the paper [54] is the precursor to all of Popa’s papers on rigidity of Bernoulli actions.

DEFINITION 10.1. — *A cocycle action of a countable group  $G$  on a von Neumann algebra  $N$  consists of automorphisms  $(\sigma_g)_{g \in G}$  of  $N$  and unitaries  $(u_{g,h})_{g,h \in G}$  in  $N$  satisfying*

$$\sigma_g \sigma_h = (\text{Ad } u_{g,h}) \sigma_{gh} , \quad u_{g,h} u_{gh,k} = \sigma_g(u_{h,k}) u_{g,hk} , \quad \sigma_e = \text{id} \quad \text{and} \quad u_{e,e} = 1 ,$$

for all  $g, h, k \in G$ .

A cocycle action  $(\sigma_g)$  of  $G$  on  $N$  is said to be outer conjugate to a cocycle action  $(\rho_g)$  of  $G$  on  $M$  if there exists an isomorphism  $\Delta : N \rightarrow M$  such that  $\Delta \sigma_g \Delta^{-1} = \rho_g \text{ mod Inn } M$  for all  $g \in G$ .

Note that a stronger notion of conjugacy exists, called *cocycle conjugacy*, where it is imposed that  $\Delta \sigma_g \Delta^{-1} = (\text{Ad } w_g) \rho_g$ , with unitaries  $(w_g)$  making the 2-cocycles for  $\sigma$  and  $\rho$  cohomologous. In the case of an outer conjugacy between cocycle actions on a factor, the associated 2-cocycles are only made cohomologous up to a scalar-valued 2-cocycle.

Cocycle actions on a  $\text{II}_1$  factor can be obtained by reducing an action by a projection. Let  $(\sigma_g)$  be an action of  $G$  on the  $\text{II}_1$  factor  $N$ . Whenever  $p$  is a non-zero projection in  $N$ , choose partial isometries  $w_g \in N$  such that  $w_g w_g^* = p$  and  $w_g^* w_g = \sigma_g(p)$ . This is possible because  $(\sigma_g)$  preserves the trace and hence,  $p$  and  $\sigma_g(p)$  are equivalent projections since they have the same trace. Define

(4)  
$$\sigma_g^p \in \text{Aut}(pNp) : \sigma_g^p(x) = w_g \sigma_g(x) w_g^* \quad \text{and} \quad u_{g,h} \in \mathcal{U}(pNp) : u_{g,h} = w_g \sigma_g(w_h) w_h^* .$$

It is easily checked that  $(\sigma_g^p)$  is a cocycle action of  $G$  on the  $\text{II}_1$  factor  $pNp$  and that its outer conjugacy class does not depend on the choice of  $w_g$ .

DEFINITION 10.2. — *Let  $(\sigma_g)$  be an action of the countable group  $G$  on the  $\text{II}_1$  factor  $N$ . Whenever  $t > 0$ , the cocycle action  $(\sigma_g^t)$  of  $G$  on  $N^t$  is defined by reducing the action  $(\text{id} \otimes \sigma_g)$  of  $G$  on  $M_n(\mathbb{C}) \otimes N$  by a projection  $p$  with  $(\text{Tr} \otimes \tau)(p) = t$ , as in (4).*

The fundamental group  $\mathcal{F}(\sigma)$  of the action  $\sigma$  is defined as the group of  $t > 0$  such that  $(\sigma_g^t)$  and  $(\sigma_g)$  are outer conjugate.

It is clear that  $\mathcal{F}(\sigma)$  is an outer conjugacy invariant for  $(\sigma_g)$ . The following theorem computes the fundamental group for Connes-Størmer Bernoulli actions of  $w$ -rigid groups.

**THEOREM 10.3** (Popa, [54]). — *Let  $(\mathcal{N}, \varphi)$  be an almost periodic von Neumann algebra and suppose that  $N := \mathcal{N}^\varphi$  is a  $II_1$  factor. Suppose that the countable group  $G$  admits an infinite normal subgroup  $H$  with the relative property (T) and that  $(\sigma_g)$  is a malleable action of  $G$  on  $(\mathcal{N}, \varphi)$  whose restriction to  $H$  is weakly mixing.*

*If we still denote by  $(\sigma_g)$  the restricted action of  $G$  on the  $II_1$  factor  $N$ , then  $\mathcal{F}(\sigma) = \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$ .*

*Proof.* — If  $s \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$ , we take a non-zero partial isometry  $v \in \mathcal{N}$  which is an  $s$ -eigenvector for  $\varphi$ . Denote  $p = v^*v$  and  $q = vv^*$ . Then,  $\text{Ad } v$  outer conjugates  $(\sigma_g^p)$  and  $(\sigma_g^q)$ . Since  $s = \frac{\varphi(q)}{\varphi(p)}$ , it follows that  $s \in \mathcal{F}(\sigma)$ .

Conversely, suppose that  $s \in \mathcal{F}(\sigma)$ . We have to prove that  $s \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$ . We may clearly assume that  $0 < s < 1$  and take a projection  $p \in N$  and elements  $w_g \in N$  such that  $\varphi(p) = s$ ,  $w_g w_g^* = p$  and  $w_g^* w_g = \sigma_g(p)$  for all  $g \in G$  and such that  $\rho_g(x) = w_g \sigma_g(x) w_g^*$  defines a genuine action of  $G$  on  $pNp$  that is conjugate to  $(\sigma_g)$ . We only retain that  $(\rho_g)$  is a genuine action and that its restriction  $\rho|_H$  is weakly mixing.

Let  $(\alpha_t)$  be the one-parameter group on  $\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}$  given by the malleability of  $(\sigma_g)$ . As in the proof of Lemma 4.9, the relative property (T) yields  $t_0 = 1/n$  and a non-zero partial isometry  $a \in (\mathcal{N} \otimes \mathcal{N})^{\varphi \otimes \varphi}$  such that  $aa^* \leq p \otimes 1$ ,  $a^*a \leq \alpha_{t_0}(p \otimes 1)$  and

$$(w_g \otimes 1)(\sigma_g \otimes \sigma_g)(a) = a\alpha_{t_0}(w_g \otimes 1) \quad \text{for all } g \in H .$$

Weak mixing of  $\sigma|_H$  on  $\mathcal{N}$  and of  $\rho|_H$  on  $pNp$  implies that  $aa^* = p \otimes 1$  and  $a^*a = \alpha_{t_0}(p \otimes 1)$ . Taking  $b := a\alpha_{t_0}(a) \cdots \alpha_{(n-1)t_0}(a)$ , we get a partial isometry  $b \in (\mathcal{N} \otimes \mathcal{N})^{\varphi \otimes \varphi}$  satisfying  $bb^* = p \otimes 1$ ,  $b^*b = 1 \otimes p$  and

$$(w_g \otimes 1)(\sigma_g \otimes \sigma_g)(b) = b(1 \otimes w_g) \quad \text{for all } g \in H .$$

Continuing as in the proof of Lemma 4.9, Step (3), we obtain the following data: a non-zero partial isometry  $v \in p\mathcal{N} \otimes M_{1,n}(\mathbb{C})$  which is a  $\gamma$ -eigenvector for  $\varphi$  and satisfies  $v^*v = 1$  as well as  $w_g(\sigma_g \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(g))$  for all  $g \in H$ , where  $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(n)$  is a projective representation. The ergodicity of  $\rho|_H$  yields  $vv^* = p$  and hence,  $\text{Ad } v$  conjugates the actions  $\rho|_H$  and  $(\rho_g \otimes \text{Ad } \theta(g))_{g \in H}$ . Since  $1 \otimes M_n(\mathbb{C})$  is an invariant subspace of the latter, weak mixing of  $\rho|_H$  imposes  $n = 1$ . Since  $vv^* = p$ ,  $v^*v = 1$  and  $v$  is a  $\gamma$ -eigenvector, we conclude that  $s = 1/\gamma \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$ . □

In Section 3, Connes-Størmer Bernoulli actions were shown to be malleable and mixing. The following corollary is then clear.

COROLLARY 10.4. — Let  $G$  be a countable group that admits an infinite normal subgroup with the relative property (T). Let  $\text{Tr}_\Delta$  be the faithful normal state on  $B(H)$  given by  $\text{Tr}_\Delta(a) = \text{Tr}(\Delta a)$  and define  $(\mathcal{N}, \varphi) = \bigotimes_{g \in G} (B(H), \text{Tr}_\Delta)$ , with Connes-Størmer Bernoulli action  $G \curvearrowright (\mathcal{N}, \varphi)$ . Write  $\mathcal{R} := \mathcal{N}^\varphi$  and denote by  $(\sigma_g)$  the restricted action of  $G$ . Then,  $\mathcal{F}(\sigma)$  is the subgroup of  $\mathbb{R}_+^*$  generated by the ratios  $\lambda/\mu$  between  $\lambda, \mu$  in the point spectrum of  $\Delta$ .

In particular,  $G$  admits a continuous family of non outer conjugate actions on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor  $\mathcal{R}$ .

In Theorem 10.3 the following question was studied: when is the cocycle action  $(\sigma_g^t)$  outer conjugate to  $(\sigma_g)$ ? Another natural question is: when is the cocycle action  $(\sigma_g^t)$  outer conjugate to a genuine action? The following remark shows that  $(\sigma_g^t)$  is always outer conjugate to a genuine action when  $(\sigma_g)$  is a Connes-Størmer Bernoulli action on the centralizer of  $\bigotimes_{g \in G} (B(H), \varphi_0)$  for  $\varphi_0$  non-tracial. On the other hand, for  $\varphi_0$  the trace on  $M_2(\mathbb{C})$  and  $t$  not an integer,  $(\sigma_g^t)$  is not outer conjugate to a genuine action, see Theorem 10.6 below.

Remark 10.5. — Let  $(\mathcal{N}, \varphi)$  be an almost periodic factor with  $N := \mathcal{N}^\varphi$  a type  $\text{II}_1$  factor and  $\varphi$  non-tracial (note that this implies that  $\mathcal{N}$  is a factor of type  $\text{III}_\lambda$  with  $0 < \lambda \leq 1$ ). Suppose that the group  $G$  acts on  $(\mathcal{N}, \varphi)$  and denote by  $(\sigma_g)$  the restriction of this action to  $N$ . Then, for any  $t > 0$ ,  $(\sigma_g^t)$  is outer conjugate to a genuine action.

For simplicity of notation, suppose  $t \leq 1$  and let  $p \in N$  be a projection with  $\varphi(p) = t$ . We can write a series  $t = \sum_n \gamma_n$  with  $\gamma_n \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$ . Write  $p = \sum_n p_n$  for some mutually orthogonal projections  $p_n$  in  $N$  with  $\varphi(p_n) = \gamma_n$ . Take partial isometries  $v_n \in \mathcal{N}$  such that  $v_n$  is a  $\gamma_n$ -eigenvector for  $\varphi$  and  $v_n^* v_n = 1$ ,  $v_n v_n^* = p_n$ . Define for  $g \in G$ , the element  $w_g \in N$  as

$$w_g := \sum_n v_n \sigma_g(v_n^*).$$

It is easy to check that  $w_g w_g^* = p$ ,  $w_g^* w_g = \sigma_g(p)$  for all  $g \in G$  and  $w_g \sigma_g(w_h) = w_{gh}$  for all  $g, h \in G$ . Writing  $\sigma_g^p(x) = w_g \sigma_g(x) w_g^*$  for  $x \in p N p$ , it follows that  $(\sigma_g^p)$  is a genuine action of  $G$  on  $p N p$  and a way to write  $(\sigma_g^t)$ .

THEOREM 10.6 (Popa, [54]). — Suppose that the countable group  $G$  admits an infinite normal subgroup  $H$  with the relative property (T). Denote by  $(\sigma_g)$  the Bernoulli action of  $G$  on  $\mathcal{R} = \bigotimes_{g \in G} (M_2(\mathbb{C}), \tau)$ . For  $t > 0$ , the cocycle action  $(\sigma_g^t)$  is outer conjugate to a genuine action if and only if  $t \in \mathbb{N}_0$ .

Observe moreover that it follows from Theorem 10.3 that, for different values of  $t > 0$ , the cocycle actions  $(\sigma_g^t)$  are mutually non outer conjugate.

*Proof.* — Given  $(\sigma_g^t)$  outer conjugate to a genuine action  $(\rho_g)$ , we can start off in the same way as in the proof of 10.3, but we do not know anymore that  $\rho|_H$  is weakly mixing (or even, that  $\rho$  is ergodic). So, in order to make the passage from ‘an intertwiner for  $\alpha_{t_0}$ ’ to ‘an intertwiner for  $\alpha_1$ ’, we need the extra data of *strong malleability*, as in the proof of Lemma 4.9. But, the Connes-Størmer Bernoulli action  $(\sigma_g)$  is not strongly malleable in the sense of Definition 3.1 in an obvious way. So, we need a more flexible notion, essentially replacing tensor products by graded tensor products, see Remark 10.7 below.

Let  $t > 0$  and suppose that  $(\sigma_g^t)$  is outer conjugate to a genuine action. So, we can take  $k \in \mathbb{N}$ , a projection  $p \in \mathcal{R} \otimes M_k(\mathbb{C})$  with  $(\tau \otimes \text{Tr})(p) = t$  and partial isometries  $w_g \in \mathcal{R} \otimes M_k(\mathbb{C})$  such that  $w_g w_g^* = p$ ,  $w_g^* w_g = (\sigma_g \otimes \text{id})(p)$  and such that  $\rho_g(x) = w_g(\sigma_g \otimes \text{id})(x)w_g^*$  defines an action of  $G$  on  $\mathcal{R}^t := p(M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{R})p$ . Let  $q \leq p$  be any non-zero projection in  $\mathcal{R}^t$  invariant under  $\rho|_H$ . We shall prove that  $q$  dominates a non-zero projection  $q_0$ , invariant under  $\rho|_H$  and with  $(\tau \otimes \text{Tr})(q) \in \mathbb{N}$ . This of course proves that  $(\tau \otimes \text{Tr})(p) \in \mathbb{N}$ .

Combining Remark 10.7 and the proof of Lemma 4.9, we find a non-zero partial isometry  $v \in \mathcal{R} \otimes M_{k,n}(\mathbb{C})$  and a projective representation  $\theta : G \rightarrow U(n)$  such that  $v^*v = 1$ ,  $vv^* \leq q$  and such that  $w_g(\sigma_g \otimes \text{id})(v) = v(1 \otimes \theta(g))$  for all  $g \in H$ . Putting  $q_0 = vv^*$ , we are done. □

*Remark 10.7.* — The Connes-Størmer Bernoulli action  $(\sigma_g)$  of the group  $G$  on  $N := \otimes_{g \in G} M_2(\mathbb{C})$  satisfies the following form of strong malleability: the  $\text{II}_1$  factor  $N$  is  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graded, the action  $(\sigma_g)$  commutes with the grading and the graded tensor square  $N \widehat{\otimes} N$  is equipped with a one-parameter group of automorphisms  $(\alpha_t)$  and a period 2 automorphism  $\beta$ , all commuting with the grading and satisfying

$$\alpha_1(x \widehat{\otimes} 1) = 1 \widehat{\otimes} x, \quad \beta(x \widehat{\otimes} 1) = x \widehat{\otimes} 1 \quad \text{and} \quad \beta\alpha_t\beta = \alpha_{-t} \quad \text{for all } x \in N, t \in \mathbb{R}.$$

To check that the Bernoulli action indeed admits such a graded strong malleability, it suffices to construct the grading and  $(\alpha_t)$ ,  $\beta$  on the level of  $M_2(\mathbb{C})$  and take the infinite product.

More generally however, for any real Hilbert space  $H_{\mathbb{R}}$ , one considers the complexified Clifford \*-algebra  $\text{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$ , generated by self-adjoint elements  $s(\xi)$ ,  $\xi \in H_{\mathbb{R}}$  with relations

$$s(\xi)^2 = \|\xi\|^2 \quad \text{for all } \xi \in H_{\mathbb{R}} \quad \text{and} \quad \xi \mapsto s(\xi) \quad \mathbb{R}\text{-linear.}$$

The \*-algebra  $\text{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$  admits an obvious  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -grading such that the elements  $s(\xi)$  have odd degree. Also,  $\text{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$  has a natural tracial state yielding the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor after completion if  $H_{\mathbb{R}}$  is of infinite dimension. Clearly, any orthogonal representation on  $H_{\mathbb{R}}$  extends to an action on  $\text{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$  preserving the grading. Finally, we have a canonical isomorphism  $\text{Cliff}(H_{\mathbb{R}} \oplus K_{\mathbb{R}}) \cong \text{Cliff}(H_{\mathbb{R}}) \widehat{\otimes} \text{Cliff}(K_{\mathbb{R}})$ .

If one notes that  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^2) \cong M_2(\mathbb{C})$ , one defines  $\alpha_t$  and  $\beta$  on  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2)$  by the formulas

$$\alpha_t \left( s \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = s \left( \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & -\sin \frac{\pi t}{2} \\ \sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \quad \text{and} \quad \beta \left( s \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = s \begin{pmatrix} \xi \\ -\eta \end{pmatrix} .$$

The above procedure shows that also the so-called *Bogolyubov actions* are strongly malleable in a graded way.

## APPENDIX A

### THE BASIC CONSTRUCTION AND HILBERT MODULES

Let  $(\mathcal{N}, \varphi)$  be a von Neumann algebra with almost periodic faithful normal state  $\varphi$  and let  $B \subset \mathcal{N}^\varphi$  be a von Neumann subalgebra of the centralizer algebra. A particularly interesting case, is the one where  $\varphi$  is a trace and where we consider an inclusion  $B \subset (N, \tau)$ . We briefly explain the so-called *basic construction* von Neumann algebra  $\langle \mathcal{N}, e_B \rangle$ , introduced in [62, 2] and used extensively by Jones [33] in his seminal work on subfactors. We refer to [8, 25, 33] for further reading and briefly explain what is needed in this talk.

The basic construction  $\langle \mathcal{N}, e_B \rangle$  is defined as the von Neumann subalgebra of  $B(L^2(\mathcal{N}))$  generated by  $\mathcal{N}$  and the orthogonal projection  $e_B$  of  $L^2(\mathcal{N})$  onto  $L^2(B) \subset L^2(\mathcal{N})$ . It can be checked that  $\langle \mathcal{N}, e_B \rangle$  consists of those operators  $T \in B(L^2(\mathcal{N}))$  that commute with the right module action of  $B$ :  $T(\xi b) = T(\xi)b$  for all  $\xi \in L^2(\mathcal{N})$  and  $b \in B$ .

The basic construction  $\langle \mathcal{N}, e_B \rangle$  comes equipped with a canonical normal semi-finite faithful weight  $\widehat{\varphi}$  satisfying

$$\widehat{\varphi}(xe_B y) = \varphi(xy) \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{N}.$$

If  $\varphi$  is a tracial state,  $\widehat{\varphi}$  is a semi-finite trace.

Let  $(B, \tau)$  be a finite von Neumann algebra with faithful tracial state  $\tau$ . Whenever  $K$  is a right  $B$ -module, the commutant  $B'$  of  $B$  on  $K$  is a semi-finite von Neumann algebra that admits a canonical semi-finite trace  $\tau'$ , characterized by the formula

$$\tau'(TT^*) = \tau(T^*T) \quad \text{whenever } T : L^2(B) \rightarrow K \text{ is bounded and right } B\text{-linear.}$$

Observe that for every bounded right  $B$ -linear map  $T : L^2(B) \rightarrow K$ , the element  $TT^*$  belongs to  $B'$  and  $T^*T$  belongs to  $B$ , acting on the left on  $L^2(B)$ .

When  $B$  is a factor, one defines  $\dim_B(K) := \tau'(1)$  and calls  $\dim_B(K)$  the *coupling constant*. It is a complete invariant for countably generated  $B$ -modules, which means the following: if  $\dim_B(K) = +\infty$ ,  $K$  is isomorphic to  $\ell^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(B)$  as a right  $B$ -module and if  $\dim_B(K) = t$  and  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$  is a projection with  $(\text{Tr} \otimes \tau)(p) = t$ , then  $K$  is isomorphic with  $pL^2(B)^{\oplus n}$  as a right  $B$ -module.

When  $(B, \tau)$  is an arbitrary finite von Neumann algebra with faithful tracial state  $\tau$ , the situation is slightly more complicated. If  $E_{\mathcal{Z}}$  denotes the center valued trace, i.e., the unique  $\tau$ -preserving conditional expectation  $E_{\mathcal{Z}} : B \rightarrow \mathcal{Z}(B)$  of  $B$  onto the center of  $B$ , we know that  $E_{\mathcal{Z}}(xy) = E_{\mathcal{Z}}(yx)$  for all  $x, y \in B$  and that  $p \preceq q$  if and only if  $E_{\mathcal{Z}}(p) \leq E_{\mathcal{Z}}(q)$  whenever  $p$  and  $q$  are projections in  $B$ . Moreover, whenever the Hilbert space  $K$  is a right  $B$ -module and  $\tau$  a faithful tracial state on  $B$ , we denote by  $B'$  the commutant of  $B$  on  $K$  as above and construct a normal, semi-finite positive linear map

$$E'_{\mathcal{Z}} : (B')^+ \rightarrow \{ \text{positive elements affiliated with } \mathcal{Z}(B) \}$$

satisfying  $E'_{\mathcal{Z}}(x^*x) = E'_{\mathcal{Z}}(xx^*)$  for all  $x$  and such that

$$E'_{\mathcal{Z}}(TT^*) = E_{\mathcal{Z}}(T^*T) \text{ whenever } T : L^2(B) \rightarrow K \text{ is bounded and right } B\text{-linear.}$$

The positive affiliated element  $E'_{\mathcal{Z}}(1)$  of  $\mathcal{Z}(B)$  provides a complete invariant for countably generated right  $B$ -modules. First note that the  $B$ -module  $K$  is finitely generated, i.e., of the form  $pL^2(B)^{\oplus n}$  for some projection  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$ , if and only if  $E'_{\mathcal{Z}}(1)$  is bounded. In that case  $E'_{\mathcal{Z}}(1) = (\text{Tr} \otimes E_{\mathcal{Z}})(p)$ .

Note that  $\tau' = \tau \circ E'_{\mathcal{Z}}$ . So, if  $\tau'(1) < \infty$ , it follows that  $E'_{\mathcal{Z}}(1)$  is not necessarily bounded, but  $\tau$ -integrable. This implies that  $E'_{\mathcal{Z}}(1)z$  is bounded for projections  $z \in \mathcal{Z}(B)$  with trace arbitrary close to 1. So, we have shown the following lemma.

LEMMA A.1. — *Let  $K$  be a right  $B$ -module and  $\tau$  a normal faithful tracial state on  $B$ . Denote by  $\tau'$  the canonical semi-finite trace on the commutant  $B'$  of  $B$  on  $K$ . If  $\tau'(1) < \infty$ , there exists for any  $\varepsilon > 0$  a central projection  $z \in \mathcal{Z}(B)$  with  $\tau(z) \geq 1 - \varepsilon$  and such that the  $B$ -module  $Kz$  is finitely generated, i.e., of the form  $pL^2(B)^{\oplus n}$  for some projection  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$ .*

Returning to the basic construction for the inclusion  $B \subset \mathcal{N}$ , with  $B \subset \mathcal{N}^\varphi$ , we observe that the restriction of  $\varphi$  defines a tracial state on  $B$  and that  $\langle \mathcal{N}, e_B \rangle$  is the commutant of  $B$  on  $L^2(\mathcal{N})$ . Using the previous paragraph,  $\langle \mathcal{N}, e_B \rangle$  comes equipped with a canonical semi-finite trace  $\varphi'$ . If  $\varphi$  is tracial on  $\mathcal{N}$ , it is easily checked that  $\widehat{\varphi} = \varphi'$ . If  $\varphi$  is no longer a trace, but an almost periodic state, we denote by  $p_\gamma$  the orthogonal projection of  $L^2(\mathcal{N})$  on the  $\gamma$ -eigenvectors for  $\varphi$ . Note that  $p_\gamma$  belongs to  $\langle \mathcal{N}, e_B \rangle$  because  $B \subset \mathcal{N}^\varphi$ . It is easy to check that

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{\gamma \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)} \widehat{\varphi}(p_\gamma x p_\gamma) \quad \text{and} \quad \varphi'(x) = \sum_{\gamma \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)} \gamma^{-1} \widehat{\varphi}(p_\gamma x p_\gamma)$$

for all  $x \in \langle \mathcal{N}, e_B \rangle^+$ . In particular,  $\widehat{\varphi}$  is tracial and a multiple of  $\varphi'$  on  $p_\gamma \langle \mathcal{N}, e_B \rangle p_\gamma$ , for all  $\gamma \in \text{Sp}(\mathcal{N}, \varphi)$ .



## APPENDIX B

RELATIVE PROPERTY (T) AND  $\text{II}_1$  FACTORS

A countable group  $G$  has Kazhdan's *property (T)* if every unitary representation of  $G$  that admits a sequence of almost invariant unit vectors, admits a non-zero  $G$ -invariant vector. More generally, a pair  $(G, H)$  consisting of a countable group  $G$  with subgroup  $H$  is said to have the *relative property (T)* of Kazhdan-Margulis [26, 15, 36, 37], if every unitary representation of  $G$  that admits a sequence of almost invariant unit vectors, admits a non-zero  $H$ -invariant vector. The main example is the pair  $(\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$ .

A countable group  $G$  is said to be *amenable* if the regular representation on  $\ell^2(G)$  admits a sequence of almost invariant unit vectors. Hence, an amenable property (T) group is finite and an amenable group does not have an infinite subgroup with the relative property (T).

Below, we need the following alternative characterization of relative property (T) due to Jolissaint (see Theorem 1.2(a3) in [30]). The pair  $(G, H)$  has the relative property (T) if and only if every unitary representation of  $G$  admitting a sequence of almost invariant unit vectors, admits a non-zero  $H$ -invariant finite dimensional subspace.

The notion of property (T) has been defined for  $\text{II}_1$  factors by Connes and Jones [11]. Unitary representations of groups are replaced by *bimodules* (Connes' *correspondences*, see [7, 49]). Popa [52] defined the relative property (T) for an inclusion of finite von Neumann algebras  $Q \subset P$  and we explain it in this appendix.

A  $P$ - $P$  bimodule is a Hilbert space  $H$  with a left and a right (normal, unital) action of  $P$ . We write  $x\xi$ , resp.  $\xi x$  for the left, resp. right action of  $P$  on  $H$ .

*Terminology B.1.* — Let  $(P, \tau)$  be a von Neumann algebra with a faithful normal tracial state  $\tau$ . If  $K$  is a  $P$ - $P$ -bimodule and  $(\xi_n)$  a sequence of unit vectors in  $K$ , we say that

- $(\xi_n)$  is *almost central* if  $\|x\xi_n - \xi_n x\| \rightarrow 0$  for all  $x \in P$ ;
- $(\xi_n)$  is *almost tracial* if  $\|\langle \xi_n, \cdot \xi_n \rangle - \tau\| \rightarrow 0$  and  $\|\langle \xi_n, \xi_n \cdot \rangle - \tau\| \rightarrow 0$ .

A vector  $\xi$  is said to be  $Q$ -*central* for some von Neumann subalgebra  $Q \subset P$  if  $x\xi = \xi x$  for all  $x \in Q$ .

**DEFINITION B.2** (Popa, [52]). — *Let  $(P, \tau)$  be a von Neumann algebra with a faithful normal tracial state  $\tau$ . The inclusion  $Q \subset P$  is said to have the relative property (T) if any  $P$ - $P$  bimodule that admits a sequence of almost central almost tracial unit vectors, admits a sequence of almost tracial  $Q$ -central unit vectors.*

*Remark B.3.* — One might wonder why almost traciality is assumed in the definition of relative property (T). In applications (as the ones Popa's work), it is crucial that an inclusion  $Q \subset P$  with the relative property (T) remains relative (T) when cutting down with a projection of  $Q$  (see Proposition B.6). Now look at the following example: we take a  $\text{II}_1$  factor  $P$ , two von Neumann subalgebras  $Q_1, Q_2 \subset P$  and we consider the inclusion of  $Q_1 \oplus Q_2 \subset M_2(\mathbb{C}) \otimes P$ . If one would define naively the relative property (T) by imposing that any  $P$ - $P$  bimodule admitting almost central vectors, admits a non-zero  $Q$ -central vector, then the inclusion  $Q_1 \oplus Q_2 \subset M_2(\mathbb{C}) \otimes P$  would have the relative property (T) if *one of the inclusions*  $Q_1 \subset P$ ,  $Q_2 \subset P$  has the relative property (T). And hence, Proposition B.6 would not hold.

*Remark B.4.* — A finite von Neumann algebra  $(P, \tau)$  with faithful normal tracial state  $\tau$  is said to be *injective* (or *amenable*) if the coarse Hilbert  $P$ - $P$ -bimodule  $L^2(P) \otimes L^2(P)$  defined by  $a \cdot \xi \cdot b = (a \otimes 1)\xi(1 \otimes b)$  contains a sequence of almost central almost tracial vectors. It is then clear that an injective  $(P, \tau)$  does not contain a diffuse subalgebra  $Q \subset P$  with the relative property (T). More generally, if  $Q \subset P$  is diffuse with the relative property (T), there is no non-zero normal homomorphism from  $P$  to an injective finite von Neumann algebra.

A lot can be said about relative property (T) in the setting of von Neumann algebras, see the papers of Peterson and Popa [47, 52]. In this talk, only two easy results are shown, which suffices for the applications in the rest of the talk.

PROPOSITION B.5. — *Let  $G$  be a countable group with subgroup  $H$ . Then,  $(G, H)$  has the relative property (T) if and only if the inclusion  $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{L}(G)$  has the relative property (T) in the sense of Definition B.2.*

*Proof.* — First suppose that  $(G, H)$  has the relative property (T). Let  $K$  be an  $\mathcal{L}(G)$ - $\mathcal{L}(G)$ -bimodule with an almost central almost  $\tau$ -tracial sequence of unit vectors  $(\xi_n)$ , for some faithful normal tracial state  $\tau$  on  $\mathcal{L}(G)$ . Define the representation  $\pi(g)\xi = u_g \xi u_g^*$  of  $G$  on  $K$ . Choose  $\varepsilon > 0$ . Using the stronger version of relative property (T), we can take a  $\pi(H)$ -invariant unit vector  $\xi$  and  $n \in \mathbb{N}$  such that

$$\|\xi - \xi_n\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|\langle \xi_n, \cdot \xi_n \rangle - \tau\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|\langle \xi_n, \xi_n \cdot \rangle - \tau\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Since a  $\pi(H)$ -invariant vector is  $\mathcal{L}(H)$ -central, we have found an  $\mathcal{L}(H)$ -central unit vector  $\xi$  satisfying

$$\|\langle \xi, \cdot \xi \rangle - \tau\| < \varepsilon, \quad \|\langle \xi, \xi \cdot \rangle - \tau\| < \varepsilon.$$

It follows that  $K$  admits a sequence of almost tracial  $\mathcal{L}(H)$ -central vectors.

Conversely, suppose that the inclusion  $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{L}(G)$  has the relative property (T) in the sense of Definition B.2. Let  $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(K_0)$  be a unitary representation of  $G$  that admits a sequence  $(\xi_n)$  of almost invariant unit vectors. As stated above, it is sufficient to prove that  $K_0$  admits a non-zero finite-dimensional  $\pi(H)$ -invariant

subspace. Define  $K = \ell^2(G) \otimes K_0$ , which we turn into an  $\mathcal{L}(G)$ - $\mathcal{L}(G)$ -bimodule by the formulas

$$u_g \cdot (\delta_h \otimes \xi) = \delta_{gh} \otimes \pi(g)\xi \quad \text{and} \quad (\delta_h \otimes \xi) \cdot u_g = \delta_{hg} \otimes \xi$$

for all  $g, h \in G, \xi \in K_0$ . It is clear that  $(\delta_e \otimes \xi_n)$  is a sequence of almost central almost tracial unit vectors. So,  $K$  admits a non-zero  $\mathcal{L}(H)$ -central vector  $\mu$ . Considering  $\mu$  as an element in  $\ell^2(G, K_0)$ , we get that  $\mu(hgh^{-1}) = \pi(h)\mu(g)$  for all  $h \in H, g \in G$ . Take  $g \in G$  such that  $\mu(g) \neq 0$ . Since  $\mu \in \ell^2(G, K_0)$ , we conclude that  $\{hgh^{-1} \mid h \in H\}$  is finite. But then, the linear span of  $\{\mu(hgh^{-1}) \mid h \in H\}$  is a finite-dimensional  $\pi(H)$ -invariant subspace of  $K_0$ .  $\square$

PROPOSITION B.6. — *Let  $P$  be a  $\text{II}_1$  factor and  $Q \subset P$  an inclusion having the relative property (T). If  $p \in Q$  is a non-zero projection,  $pQp \subset pPp$  has the relative property (T).*

*Proof.* — Write  $Q_1 = pQp$  and  $P_1 = pPp$ . Since  $P$  is a  $\text{II}_1$  factor, we can take partial isometries  $v_1, \dots, v_k \in P$  satisfying  $v_1 = p, v_i^*v_i \leq p$  and  $\sum_{i=1}^k v_i v_i^* = 1$ . Let  $K_1$  be a  $P_1$ - $P_1$ -bimodule admitting the almost central almost tracial sequence of unit vectors  $(\xi_n)$ . Define  $K$  as the induced  $P$ - $P$ -bimodule: put a scalar product on  $Pp K_1 pP$  by the formula

$$\langle x\xi y^*, a\mu b^* \rangle = \langle \xi, (x^*a)\mu(b^*y) \rangle \quad \text{for all } x, y, a, b \in Pp, \xi, \mu \in K_1.$$

Up to normalization, the sequence  $\sum_{i=1}^k v_i \xi_n v_i^*$  is almost central almost tracial in the  $P$ - $P$ -bimodule  $K$ . Hence,  $K$  admits an almost tracial sequence  $(\mu_n)$  of  $Q$ -central vectors. Up to normalization,  $(p\mu_n) = (\mu_n p)$  defines an almost tracial sequence of  $pQp$ -central vectors in  $K_1$ .  $\square$

The above proposition remains valid when  $(P, \tau)$  is just von Neumann algebra with faithful tracial state  $\tau$ , but the proof becomes slightly more involved.

## APPENDIX C

### INTERTWINING SUBALGEBRAS USING BIMODULES

The fundamental problem in the whole of this talk is to decide when two von Neumann subalgebras  $P, B \subset M$  can be conjugated one into the other:  $uPu^* \subset B$  for some  $u \in \mathcal{U}(M)$ . The usage of the basic construction in this respect goes back to Christensen [2], who used it to study conjugacy of uniformly close subalgebras. A major innovation came with the work of Popa [55, 52], who managed to prove conjugacy results for arbitrary subalgebras, still using the basic construction.

Roughly, Proposition C.1 below says the following. Let  $P, B \subset M$  be von Neumann subalgebras of a finite von Neumann algebra  $(M, \tau)$ . Then, the following are equivalent.

- A corner of  $P$  can be conjugated into a corner of  $B$ .
- $L^2(M)$  contains a non-zero  $P$ - $B$ -subbimodule which is finitely generated as a  $B$ -module.

• The basic construction  $\langle M, e_B \rangle$  contains a positive element  $a$ , commuting with  $P$  and satisfying  $0 < \widehat{\tau}(a) < +\infty$ , where  $\widehat{\tau}$  is the canonical semi-finite trace on  $\langle M, e_B \rangle$ .

The relation between the second and the third condition is clear: the orthogonal projection  $p_K$  onto a  $P$ - $B$ -subbimodule  $K$  of  $L^2(M)$  belongs to  $\langle M, e_B \rangle \cap P'$  and  $\widehat{\tau}(p_K) < \infty$  is essentially equivalent to  $K$  being a finitely generated  $B$ -module.

We reproduce from [55, 52] two results needed in this talk.

PROPOSITION C.1 (Popa, [55, 52]). — *Let  $(\mathcal{M}, \varphi)$  be a von Neumann algebra with an almost periodic faithful normal state  $\varphi$ . Let  $P, B \subset \mathcal{M}^\varphi$  be von Neumann subalgebras. Then, the following statements are equivalent.*

(1) *There exist  $n \geq 1, \gamma > 0, v \in M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$ , a projection  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$  and a homomorphism  $\theta : P \rightarrow p(M_n(\mathbb{C}) \otimes B)p$  such that  $v$  is a non-zero partial isometry which is a  $\gamma$ -eigenvector for  $\varphi$ ,  $v^*v \leq p$  and*

$$xv = v\theta(x) \quad \text{for all } x \in P.$$

(2) *There exists a non-zero element  $w \in \mathcal{M}$  such that  $Pw \subset \sum_{k=1}^n w_k B$  for some finite family  $w_k$  in  $\mathcal{M}$ .*

(3) *There exists a non-zero element  $a \in \langle \mathcal{M}, e_B \rangle^+ \cap P'$  with  $\widehat{\varphi}(a) < \infty$ . Here  $\langle \mathcal{M}, e_B \rangle$  denotes the basic construction for the inclusion  $B \subset \mathcal{M}$ , with its canonical almost periodic semi-finite weight  $\widehat{\varphi}$ .*

(4) *There is no sequence of unitaries  $(u_n)$  in  $P$  such that  $\|E_B(au_n b)\|_2 \rightarrow 0$  for all  $a, b \in \mathcal{M}$ .*

Of course, if one wants to deal as well with the non-separable case, one should take a net instead of a sequence in statement (4).

*Proof*

(1)  $\Rightarrow$  (2). Taking a non-zero component of  $v$ , this is trivial.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Since  $P$  and  $B$  are in the centralizer algebra  $\mathcal{M}^\varphi$  and  $\varphi$  is almost periodic, we can assume that  $w, w_1, \dots, w_n$  are all  $\gamma$ -eigenvectors for  $\varphi$ . Note that, whenever  $w \in \mathcal{M}$  is a  $\gamma$ -eigenvector, the projection of  $L^2(\mathcal{M})$  onto the closure of  $wB$  yields a projection  $f \in \langle \mathcal{M}, e_B \rangle$  and  $f$  is the range projection of  $we_B w^*$ . It follows that  $\widehat{\varphi}(f) \leq \gamma$ . In the same way, the projection onto the closure of  $\sum_{k=1}^n w_k B$  has finite  $\widehat{\varphi}$ -weight. Hence, the projection  $f$  onto the closure of  $PwB$  in  $L^2(\mathcal{M})$  satisfies the requirements in (3).

(3)  $\Rightarrow$  (1). If  $p_\gamma$  denotes the orthogonal projection of  $L^2(\mathcal{M})$  onto the  $\gamma$ -spectral subspace of  $\varphi$ , we know that  $\widehat{\varphi}(a) = \sum_\gamma \widehat{\varphi}(p_\gamma a p_\gamma)$  and we can replace  $a$  by  $p_\gamma a p_\gamma \neq 0$ . Taking a spectral projection of the form  $\chi_{[\delta, +\infty[}(a)$ , we obtain an orthogonal projection  $f \in \langle \mathcal{M}, e_B \rangle^+ \cap P'$  with  $\widehat{\varphi}(f) < \infty$  and the range of  $f$  contained in the  $\gamma$ -spectral

subspace of  $\varphi$ . Hence, the range of  $f$  is a non-zero  $P$ - $B$ -sub-bimodule of  $L^2(\mathcal{M})_\gamma$  with finite trace over  $B$ . Cutting down by a central projection of  $B$  (see Lemma A.1), we get a  $P$ - $B$ -sub-bimodule  $H \subset L^2(\mathcal{M})_\gamma$  which is finitely generated over  $B$ . Hence, we can take  $n \geq 1$ , a projection  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$  and a  $B$ -module isomorphism

$$\psi : pL^2(B)^{\oplus n} \rightarrow H .$$

Since  $H$  is a  $P$ -module, we get a homomorphism  $\theta : P \rightarrow p(M_n(\mathbb{C}) \otimes B)p$  satisfying  $x\psi(\xi) = \psi(\theta(x)\xi)$  for all  $x \in P$  and  $\xi \in H$ . Define  $e_i \in L^2(B)^{\oplus n}$  as  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  and  $\xi \in M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes H$  as  $\xi_i = \psi(pe_i)$ . The polar decomposition of the vector  $\xi$  yields an isometry  $v \in M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$  belonging to the  $\gamma$ -spectral subspace for  $\varphi$ . A direct computation shows that  $xv = v\theta(x)$  for all  $x \in P$ , as well as  $v^*v \leq p$ .

(1)  $\Rightarrow$  (4). Suppose that we have all the data of (1). If  $(u_n)$  is a sequence of unitaries in  $P$  such that  $\|E_B(au_nb)\|_2 \rightarrow 0$  for all  $a, b \in \mathcal{M}$ , it follows that  $\|(\text{id} \otimes E_B)(v^*u_nv)\|_2 \rightarrow 0$  when  $n \rightarrow \infty$ . But,  $\|(\text{id} \otimes E_B)(v^*u_nv)\|_2 = \|(\text{id} \otimes E_B)(v^*v)\theta(u_n)\|_2 = \|(\text{id} \otimes E_B)(v^*v)\|_2$ . We conclude that  $v = 0$ , a contradiction.

(4)  $\Rightarrow$  (3). By (4), we can take  $\varepsilon > 0$  and  $K \subset \mathcal{M}$  finite such that for all unitaries  $u \in P$ ,  $\max_{a,b \in K} \|E_B(aub)\|_2 \geq \varepsilon$ . Define the element  $c = \sum_{b \in K} be_Bb^*$  in  $\langle \mathcal{M}, e_B \rangle^+$ . Note that  $\widehat{\varphi}(c) < \infty$ . Let  $d \in \langle \mathcal{M}, e_B \rangle^+$  be the element of minimal  $L^2$ -norm (with respect to  $\widehat{\varphi}$ ) in the  $L^2$ -closed convex hull of  $\{ucu^* \mid u \in \mathcal{U}(P)\}$ . By uniqueness of the element of minimal  $L^2$ -norm, it follows that  $d \in \langle \mathcal{M}, e_B \rangle^+ \cap P'$  and by construction  $\widehat{\varphi}(d) < \infty$ . It remains to show that  $d \neq 0$ . But, for all  $u \in \mathcal{U}(P)$ , we have

$$\sum_{a \in K} \widehat{\varphi}(e_Ba ucu^* a^* e_B) = \sum_{a,b \in K} \|E_B(aub)\|_2^2 \geq \varepsilon^2 .$$

It follows that  $\sum_{a \in K} \widehat{\varphi}(e_Bada^* e_B) \geq \varepsilon^2$  and  $d \neq 0$ . □

LEMMA C.2. — *Let  $M$  be a finite von Neumann algebra and  $B \subset M$  a maximal abelian subalgebra.*

- *If  $q \in M$  is an abelian projection, there exists  $v \in M$  satisfying  $v^*v = q$  and  $vMv^* \subset B$ .*
- *If  $M$  is of finite type I and  $P_0 \subset M$  an abelian von Neumann subalgebra, there exists a unitary  $u \in M$  such that  $uP_0u^* \subset B$ .*

*Proof.* — We do not provide a full proof of this classical lemma: see paragraph 6.4 in [35] for the necessary background. The following indications shall allow the reader to fill in the proof.

For the first statement, it suffices to find a projection in  $B$  which is equivalent with  $q$ , i.e.,  $v \in M$  with  $v^*v = q$  and  $vv^* \in B$ . Since  $B$  is maximal abelian, we have  $vMv^* \subset B$ .

For the second statement: since  $M$  is of finite type I and  $L^\infty(X) = B \subset M$  is maximal abelian, the partial isometries in  $M$  normalizing  $B$  induce an equivalence

relation with finite orbits on  $X$ . Taking a fundamental domain for this equivalence relation, we can easily conclude. Of course, a proper proof can be given in operator algebraic terms: if  $M$  is of type  $I_n$  and  $B \subset M$  maximal abelian, we can write  $1$  as the sum of  $n$  equivalent abelian projections contained in  $B$ . Embedding  $P_0 \subset P \subset M$  with  $P$  maximal abelian, we can do the same with  $P$  and then,  $P$  and  $B$  are unitary conjugate.  $\square$

**THEOREM C.3** (Popa, [52]). — *Let  $(M, \tau)$  be a finite von Neumann algebra and  $P_0, B \subset M$  abelian subalgebras. Suppose that  $B$  is maximal abelian and  $P := M \cap P'_0$  abelian (hence, maximal abelian). The following statements are equivalent.*

- (1) *There exists a non-zero  $v \in M$  such that  $P_0 v \subset \sum_{k=1}^n v_k B$  for some finite set of elements  $(v_k)$  in  $B$ .*
- (2) *There exists a non-zero  $a \in \langle M, e_B \rangle^+ \cap P'_0$  satisfying  $\widehat{\tau}(a) < \infty$ . Here  $\langle M, e_B \rangle$  denotes the basic construction for the inclusion  $B \subset M$  and  $\widehat{\tau}$  is the canonical semi-finite trace on it.*
- (3) *There exists a non-zero partial isometry  $v \in M$  such that  $v^* v \in P$ ,  $p := v v^* \in B$  and  $v P v^* = B p$ .*

*If moreover  $M$  is a factor and  $P$  and  $B$  are Cartan subalgebras, a fourth statement is equivalent:*

- (4) *There exists a unitary  $u \in M$  such that  $u P u^* = B$ .*

*Proof.* — Given Proposition C.1, it suffices to prove that (2) implies (3) as well as (4) under the additional assumption that  $M$  is factorial and  $P$  and  $D$  are Cartan.

Using Proposition C.1, we take  $n \geq 1$ , a projection  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$ , a non-zero partial isometry  $w \in M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes M$  and a homomorphism  $\theta : P_0 \rightarrow p(M_n(\mathbb{C}) \otimes B)p$  such that  $xw = w\theta(x)$  for all  $x \in P_0$ . We can replace  $p$  by an equivalent projection in  $M_n(\mathbb{C}) \otimes B$  and take  $p = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ . Then,  $\text{diag}(p_1 B, \dots, p_n B)$  is a maximal abelian subalgebra of the finite type I algebra  $p(M_n(\mathbb{C}) \otimes B)p$ . Since  $P_0$  is abelian, Lemma C.2 allows to suppose that  $\theta(P_0) \subset \text{diag}(p_1 B, \dots, p_n B)$ . Hence, we can cut down  $\theta$  and  $w$  by one of the projections  $(0, \dots, p_i, \dots, 0)$  and suppose from the beginning that  $n = 1$ .

Write  $q := w^* w$ ,  $e := w w^* \in P$  and  $A := p M p \cap \theta(P_0)'$ . Then,  $q \in A$  and  $q A q = w^*(e M e \cap (P e)')w = w^* P w$ , which is abelian. Since  $A$  is finite and  $p B \subset A$  maximal abelian, Lemma C.2 gives  $u \in A$  satisfying  $u u^* = q$  and  $u^* A u \subset p B$ . Writing  $v = u^* w^*$ , we have  $v P v^* \subset B$  and  $v^* v = e$ . Write  $f := v v^* \in B$ . Hence,  $e P \subset v^* B v \subset e M e$ . Since  $v^* B v$  is abelian, it follows that  $e P = v^* B v$  and so,  $v P v^* = f B$ .

Assume now that  $M$  is a factor and that  $P, B \subset M$  are Cartan subalgebras. Whenever  $u_1$  is a unitary in  $M$  normalizing  $P$  and  $u_2$  is a unitary in  $M$  normalizing  $B$ ,  $u_2 v u_1$  moves as well a corner of  $P$  into a corner of  $B$ . A maximality argument yields (4).  $\square$

## APPENDIX D

### SOME RESULTS ON (WEAKLY) MIXING ACTIONS

An action of a countable group  $G$  on  $(\mathcal{A}, \varphi)$  is said to be *ergodic* if the scalars are the only  $G$ -invariant elements of  $\mathcal{A}$ . Equivalently, the multiples of 1 are the only  $G$ -invariant vectors in  $L^2(\mathcal{A}, \varphi)$ . Stronger notions of ergodicity are the mixing and weak mixing properties.

DEFINITION D.1. — *An action of a countable group  $G$  on  $(\mathcal{A}, \varphi)$  is said to be*

- mixing if for every  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi(a\sigma_g(b)) \rightarrow \varphi(a)\varphi(b)$  when  $g \rightarrow \infty$ ;
- weakly mixing if for every  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$  and  $\varepsilon > 0$ , there exists  $g \in G$  such that  $|\varphi(a_i\sigma_g(a_j)) - \varphi(a_i)\varphi(a_j)| < \varepsilon$  for all  $i, j = 1, \dots, n$ .

For the convenience of the reader, we prove the following classical equivalent characterizations for weakly mixing actions.

PROPOSITION D.2. — *Let a countable group  $G$  act on the finite von Neumann algebra  $(A, \tau)$  by automorphisms  $(\sigma_g)$ . Then, the following statements are equivalent.*

- (1) *The action  $(\sigma_g)$  is weakly mixing.*
- (2) *For every  $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$  with  $\tau(a_i) = 0$ , there exists a sequence  $g_n \rightarrow \infty$  in  $G$  such that  $\sigma_{g_n}(a_i) \rightarrow 0$  weakly for all  $i = 1, \dots, k$ .*
- (3)  *$\mathbb{C}1$  is the only finite-dimensional invariant subspace of  $L^2(A)$ .*
- (4)  *$\mathbb{C}1$  is the only finite-dimensional invariant subspace of  $A$ .*
- (5) *For every action  $(\alpha_g)$  of  $G$  on a finite von Neumann algebra  $(M, \tau)$ ,  $(A \otimes M)^{\sigma \otimes \alpha} = 1 \otimes M^\alpha$ .*
- (6) *The diagonal action of  $G$  on  $A \otimes A$  is ergodic.*

*Proof.* — The implications (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4), as well as (5)  $\Rightarrow$  (6), being obvious, we prove two implications below.

(4)  $\Rightarrow$  (5). Suppose that  $X \in (A \otimes M)^{\sigma \otimes \alpha}$ . Denote by  $\eta$  the canonical embeddings  $M \rightarrow L^2(M)$  and  $A \rightarrow L^2(A)$ . Define the Hilbert-Schmidt operator  $T : L^2(M) \rightarrow L^2(A) : T\bar{\xi} = \eta((\text{id} \otimes \omega_{\xi, \eta(1)})(X))$ . Note that the image of  $T$  is contained in  $\eta(A)$  and that  $TT^*$  commutes with the unitary representation  $(\pi_g)$  on  $L^2(A)$  given by  $\pi_g\eta(a) = \eta(\sigma_g(a))$ . Moreover,  $TT^*$  is trace-class. Taking a spectral projection, we find a  $G$ -invariant finite-dimensional subspace of  $A$ . By (4), the image of  $T$  is included in  $\mathbb{C}\eta(1)$ , which means that  $X \in 1 \otimes M^\alpha$ .

(6)  $\Rightarrow$  (1). Suppose that  $(\sigma_g)$  is not weakly mixing. We find  $\varepsilon > 0$  and  $a_1, \dots, a_n$  with  $\tau(a_i) = 0$  and  $\sum_{i,j=1}^n |\tau(a_j^*\sigma_g(a_i))|^2 \geq \varepsilon$  for every  $g \in G$ . Define the vector  $\xi = \sum_{i=1}^n a_i \otimes a_i^*$  in  $L^2(A \otimes A)$ . Let  $\xi_1$  be the element of minimal norm in the closed convex hull of  $\{(\pi_g \otimes \pi_g)\xi \mid g \in G\}$ . Since for any  $g \in G$ ,

$$\langle \xi, (\pi_g \otimes \pi_g)(\xi) \rangle = \sum_{i,j=1}^n |\tau(a_j^*\sigma_g(a_i))|^2 \geq \varepsilon$$

we conclude that  $\xi_1 \neq 0$ . Moreover, by the uniqueness of  $\xi_1$ , we get that  $\xi_1$  is  $(\pi_g \otimes \pi_g)$ -invariant. By construction  $\xi_1$  is orthogonal to 1 and we have obtained a contradiction with (6). □

LEMMA D.3. — *Let  $(\mathcal{M}, \varphi)$  be an almost periodic von Neumann algebra and  $P \subset B \subset \mathcal{M}^\varphi$  von Neumann subalgebras of the centralizer algebra  $\mathcal{M}^\varphi$ . Suppose that there exists a sequence of unitaries  $(u_n)$  in  $P$  such that*

$$\|E_B(au_nb)\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{whenever } a, b \in \text{Ker } E_B ,$$

where  $E_B : \mathcal{M} \rightarrow B$  is the  $\varphi$ -preserving conditional expectation. If  $x \in \mathcal{M}$  is such that  $Px \subset \sum_{k=1}^n x_k B$  for a finite family of elements  $x_k \in \mathcal{M}$ , then  $x \in B$ .

More generally, any  $P$ - $B$ -sub-bimodule of  $L^2(\mathcal{M})$  that is finitely generated as a  $B$ -module, is contained in  $L^2(B)$ .

*Proof.* — Let  $H_0 \subset L^2(\mathcal{M})$  be a  $P$ - $B$ -subbimodule that is finitely generated as a  $B$ -module. We have to prove that  $H_0 \subset L^2(B)$ . Cutting down with a central projection in  $\mathcal{Z}(B)$  and using almost periodicity, we may assume that  $H_0$  is generated by the entries of a  $\gamma$ -eigenvector  $\xi \in (M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M})p$ , with  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$  and  $\theta : P \rightarrow p(M_n(\mathbb{C}) \otimes B)p$  a homomorphism satisfying  $a\xi = \xi\theta(a)$  for all  $a \in P$ . We have to prove that all entries of  $\xi$  belong to  $L^2(B)$ .

In the polar decomposition of  $\xi$ , the positive part  $|\xi|$  commutes with  $\theta(P)$  and is affiliated with  $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}^\varphi$ . So, cutting down  $\xi$  by spectral projections of  $|\xi|$ , we may moreover assume that  $\xi \in M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$ . Our assumptions imply that

$$\|(\text{id} \otimes E_B)(\xi^* u_n \xi) - (\text{id} \otimes E_B)(\xi)^* u_n (\text{id} \otimes E_B)(\xi)\|_2 \rightarrow 0 .$$

Since  $u_n \xi = \xi\theta(u_n)$  and  $\theta(u_n) \in M_n(\mathbb{C}) \otimes B$ , it follows that

$$(\text{id} \otimes E_B)(\xi^* \xi) = (\text{id} \otimes E_B)(\xi)^* (\text{id} \otimes E_B)(\xi) .$$

This implies that the entries of  $\xi$  belong to  $B$  and we are done. □

THEOREM D.4 (Popa, [55]). — *Suppose that  $G$  acts mixingly on an almost periodic  $(\mathcal{N}, \varphi)$  and write  $\mathcal{M} = \mathcal{N} \rtimes G$ . Let  $p \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G)$  a projection with (non-normalized) trace  $t$  and write  $\mathcal{L}(G)^t = p(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(G))p$ ,  $\mathcal{M}^t = p(M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M})p$ . If  $P \subset \mathcal{L}(G)^t$  is a diffuse von Neumann subalgebra, any  $P$ - $\mathcal{L}(G)^t$ -sub-bimodule of  $L^2(\mathcal{M}^t)$  that is finitely generated as an  $\mathcal{L}(G)^t$ -module, is contained in  $L^2(\mathcal{L}(G)^t)$ .*

So, under the conditions of Theorem D.4, if  $x \in \mathcal{M}^t$  such that

$$Px \subset \sum_{k=1}^n x_k \mathcal{L}(G)^t$$

for a finite family  $x_k \in \mathcal{M}^t$ , then  $x \in \mathcal{L}(G)^t$ .



*Proof.* — We claim that whenever  $(x_n)$  is a bounded sequence in  $\mathcal{L}(G)$  that weakly tends to 0,

$$\|E_{\mathcal{L}(G)}(ax_nb)\|_2 \rightarrow 0$$

when  $n \rightarrow \infty$ , for all  $a, b \in \text{Ker}(E_{\mathcal{L}(G)})$ . Here  $E_{\mathcal{L}(G)} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}(G)$  is the  $\varphi$ -preserving conditional expectation. It suffices to prove the claim when  $a, b \in \mathcal{N}$  with  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Writing  $x_n = \sum_{g \in G} x_n(g)u_g$ , we have

$$\|E_{\mathcal{L}(G)}(ax_nb)\|_2^2 = \sum_{g \in G} |x_n(g)\varphi(a\sigma_g(b))|^2.$$

Take  $C > 0$  such that  $\|x_n\| \leq C$  for all  $n$ . Choose  $\varepsilon > 0$ . Since  $(\sigma_g)$  is a mixing action, take  $K \subset G$  finite such that  $|\varphi(a\sigma_g(b))|^2 \leq \varepsilon/(2C^2)$  for all  $g \in G \setminus K$ . Since  $x_n$  tends weakly to 0,  $x_n(g) \rightarrow 0$  for every  $g$ . Hence, take  $n_0$  such that for  $n \geq n_0$ ,  $\sum_{g \in K} |x_n(g)\varphi(a\sigma_g(b))|^2 < \varepsilon/2$ . Since  $\sum_g |x_n(g)|^2 \leq C^2$  for all  $n$ , we obtain that  $\|E_{\mathcal{L}(G)}(ax_nb)\|_2^2 \leq \varepsilon$  for all  $n \geq n_0$ , which proves the claim.

It is then clear that any sequence of unitaries  $(u_n)$  in  $P$  tending weakly to 0 satisfies the conditions of Lemma D.3 with  $B = \mathcal{L}(G)^t$  and  $M = M^t$ . □

PROPOSITION D.5 (Popa, [55]). — *Suppose that  $G$  acts mixingly on the almost periodic  $(\mathcal{N}, \varphi)$  and arbitrarily on the almost periodic  $(\mathcal{A}, \psi)$ . Consider the diagonal action on  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{N}$ . Write  $M = \mathcal{A}^\psi \rtimes G$  and  $\tilde{M} = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{N})^{\psi \otimes \varphi} \rtimes G$ . Let  $P \subset M$  be a diffuse subalgebra such that there is no non-zero homomorphism from  $P$  to an amplification of  $\mathcal{A}^\psi$ . If  $x \in \tilde{M}$  and  $Px \subset \sum_{k=1}^n x_k M$ , we have  $x \in M$ .*

*Proof.* — Write  $A = \mathcal{A}^\psi$ . It follows from Proposition C.1 that there exists a sequence of unitaries  $(u_n)$  in  $P$  such that  $\|E_A(u_n u_g)\|_2 \rightarrow 0$  for all  $g \in G$ . Let  $E : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{N}) \rtimes G \rightarrow \mathcal{A} \rtimes G$  be the unique state-preserving conditional expectation. By Lemma D.3, it suffices to check that  $\|E(au_nb)\|_2 \rightarrow 0$  for all  $a, b \in \text{Ker } E$ . It moreover suffices to check this last statement for  $a, b \in \mathcal{N}$  with  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Writing  $u_n = \sum_g u_n(g)u_g$  with  $u_n(g) \in A$ , we have

$$\|E(au_nb)\|_2^2 = \sum_{g \in G} |\varphi(a\sigma_g(b))|^2 \|u_n(g)\|_2^2.$$

We conclude the proof in exactly the same way as the proof of Theorem D.4. □

Finally, the notion of a 2-mixing action is introduced. Definition D.1 of a mixing action comes down to the notion of a 1-mixing action.

DEFINITION D.6. — *An action of a countable group  $G$  on  $(\mathcal{A}, \varphi)$  is said to be 2-mixing if*

$$\varphi(a\sigma_g(b)\sigma_h(c)) \rightarrow \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) \quad \text{when } g, h, g^{-1}h \rightarrow \infty.$$

Note that any 2-mixing action is mixing and satisfies

$$|\varphi(a\sigma_g(b)\sigma_h(c)) - \varphi(a)\varphi(\sigma_g(b)\sigma_h(c))| \rightarrow 0 \quad \text{when } g, h \rightarrow \infty.$$

Conversely, this last statement characterizes 2-mixing actions.

LEMMA D.7. — *Let  $(\sigma_g)_{g \in G}$  be a free 2-mixing action of a countable group  $G$  on  $(X, \mu)$ . Write  $A = L^\infty(X, \mu)$ . For every  $\varepsilon > 0$ , there exists a finite partition of 1 in  $A$  given by  $1 = q_1 + \dots + q_n$  with  $q_i$  projections in  $A$  and satisfying*

$$(5) \quad \limsup_{g \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n \sigma_g(q_k) x \sigma_g(q_k) \right\|_2^2 \leq \varepsilon \|x\|_2^2$$

for all  $x \in A \rtimes G$  with  $E_A(x) = 0$ .

*Proof.* — Choose  $\varepsilon > 0$ . Combining freeness and the mixing property, we take a finite partition of 1 in  $A$  given by  $1 = q_1 + \dots + q_n$  with  $q_i$  projections in  $A$  and satisfying

$$\sum_{k=1}^n \tau(q_k \sigma_g(q_k)) \leq \varepsilon$$

for all  $g \neq e$ . We claim that (5) holds for all  $x \in A \rtimes G$  with  $E_A(x) = 0$ . It is sufficient to check this for  $x = \sum_{h \in F} a_h u_h$  for some finite subset  $F \subset G$  not containing  $e$ . Then,

$$\left\| \sum_{k=1}^n \sigma_g(q_k) x \sigma_g(q_k) \right\|_2^2 = \sum_{h \in F, k=1}^n \tau(a_h^* a_h \sigma_g(q_k) \sigma_{hg}(q_k)).$$

When  $g \rightarrow \infty$ , the right hand side is arbitrary close to

$$\sum_{h \in F, k=1}^n \tau(a_h^* a_h) \tau(\sigma_g(q_k) \sigma_{hg}(q_k)) = \sum_{h \in F, k=1}^n \tau(a_h^* a_h) \tau(q_k \sigma_{g^{-1}hg}(q_k)) \leq \varepsilon \|x\|_2^2.$$

So, we are done.  $\square$

## REFERENCES

- [1] S. ADAMS – « An equivalence relation that is not freely generated », *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988), no. 3, p. 565–566.
- [2] E. CHRISTENSEN – « Subalgebras of a finite algebra », *Math. Ann.* **243** (1979), no. 1, p. 17–29.
- [3] A. CONNES – « Outer conjugacy classes of automorphisms of factors », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **8** (1975), no. 3, p. 383–419.
- [4] ———, « Classification of injective factors. Cases  $\text{II}_1$ ,  $\text{II}_\infty$ ,  $\text{III}_\lambda$ ,  $\lambda \neq 1$  », *Ann. of Math. (2)* **104** (1976), no. 1, p. 73–115.
- [5] ———, « Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type  $\text{II}_1$  », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **39** (1977), no. 1-2, p. 39–66.

- [6] ———, « A factor of type  $\text{II}_1$  with countable fundamental group », *J. Operator Theory* **4** (1980), no. 1, p. 151–153.
- [7] ———, « Classification des facteurs », in *Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, 1982, p. 43–109.
- [8] ———, « Indice des sous facteurs, algèbres de Hecke et théorie des nœuds [d'après Vaughan Jones] », in *Séminaire Bourbaki (1984/85)*, Astérisque, vol. 133-134, Soc. Math. France, Paris, 1986, p. 289–308.
- [9] ———, « Nombres de Betti  $L^2$  et facteurs de type  $\text{II}_1$  [d'après D. Gaboriau et S. Popa] », in *Séminaire Bourbaki (2002/2003)*, Astérisque, vol. 294, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 321–333.
- [10] A. CONNES, J. FELDMAN & B. WEISS – « An amenable equivalence relation is generated by a single transformation », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **1** (1981), p. 431–450.
- [11] A. CONNES & V. F. R. JONES – « Property (T) for von Neumann algebras », *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), p. 57–62.
- [12] ———, « A  $\text{II}_1$  factor with two nonconjugate Cartan subalgebras », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), p. 211–212.
- [13] A. CONNES & E. STØRMER – « Entropy for automorphisms of  $\text{II}_1$  von Neumann algebras », *Acta Math.* **134** (1975), p. 289–306.
- [14] M. COWLING & U. HAAGERUP – « Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one », *Invent. Math.* **96** (1989), p. 507–549.
- [15] C. DELAROCHE & A. KIRILLOV – « Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés [d'après D. A. Kazhdan] », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 1995, exp. no. 343 (février 1968), p. 507–528.
- [16] H. A. DYE – « On groups of measure preserving transformation. I », *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 119–159.
- [17] ———, « On groups of measure preserving transformations. II », *Amer. J. Math.* **85** (1963), p. 551–576.
- [18] K. DYKEMA – « Interpolated free group factors », *Pacific J. Math.* **163** (1994), no. 1, p. 123–135.
- [19] J. FELDMAN & C. C. MOORE – « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras, II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), p. 325–359.
- [20] A. FURMAN – « Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 3, p. 1059–1081.
- [21] ———, « Orbit equivalence rigidity », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 3, p. 1083–1108.
- [22] D. GABORIAU – « Invariants  $l^2$  de relations d'équivalence et de groupes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2002), no. 95, p. 93–150.

- [23] S. L. GEFTER – « Cohomology of the ergodic action of a  $T$ -group on the homogeneous space of a compact Lie group », in *Operators in function spaces and problems in function theory*, Naukova Dumka, Kiev, 1987, Russian, p. 77–83.
- [24] V. Y. GOLODETS & N. I. NESSONOV – «  $T$ -property and nonisomorphic full factors of types II and III », *J. Funct. Anal.* **70** (1987), p. 80–89.
- [25] F. M. GOODMAN, P. DE LA HARPE & V. F. R. JONES – *Coxeter graphs and towers of algebras*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [26] P. DE LA HARPE & A. VALETTE – *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque, vol. 175, Soc. Math. France, Paris, 1989.
- [27] G. HJORTH – « A converse to Dye's theorem », *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), no. 8, p. 3083–3103 (electronic).
- [28] A. IOANA – « Rigidity results for wreath product  $\text{II}_1$  factors », preprint, [math.OA/0606574](#).
- [29] A. IOANA, J. PETERSON & S. POPA – « Amalgamated Free Products of  $w$ -Rigid Factors and Calculation of their Symmetry Groups », *Acta Math.*, to appear; [math.OA/0505589](#).
- [30] P. JOLISSAINT – « On property (T) for pairs of topological groups », *Enseign. Math. (2)* **51** (2005), no. 1-2, p. 31–45.
- [31] V. F. R. JONES – « Actions of finite groups on the hyperfinite type  $\text{II}_1$  factor », *Mem. Amer. Math. Soc.* **28** (1980), no. 237.
- [32] ———, « A converse to Ocneanu's theorem », *J. Operator Theory* **10** (1983), no. 1, p. 61–63.
- [33] ———, « Index for subfactors », *Invent. Math.* **72** (1983), no. 1, p. 1–25.
- [34] R. V. KADISON – « Problems on von Neumann algebras », Baton Rouge Conference, 1967.
- [35] R. V. KADISON & J. R. RINGROSE – *Fundamentals of the theory of operator algebras II*, Academic Press, Orlando, 1986.
- [36] D. A. KAZHDAN – « Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups », *Funct. Anal. Appl.* **1** (1967), p. 63–65.
- [37] G. A. MARGULIS – « Finitely-additive invariant measures on Euclidean spaces », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **2** (1982), no. 3-4, p. 383–396 (1983).
- [38] ———, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [39] N. MONOD & Y. SHALOM – « Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology », *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), p. 825–878.
- [40] C. C. MOORE – « Ergodic theory and von Neumann algebras », in *Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, 1982, p. 179–226.
- [41] F. J. MURRAY & J. VON NEUMANN – « On rings of operators », *Ann. of Math. (2)* **37** (1936), p. 116–229.

- [42] ———, « On rings of operators, IV », *Ann. of Math. (2)* **44** (1943), p. 716–808.
- [43] S. NESHVEYEV & E. STØRMER – « Ergodic Theory and Maximal Abelian Subalgebras of the Hyperfinite Factor », *J. Funct. Anal.* **195** (2002), p. 239–261.
- [44] A. OCNEANU – *Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1138, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [45] D. S. ORNSTEIN & B. WEISS – « Ergodic theory of amenable group actions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), p. 161–164.
- [46] N. OZAWA & S. POPA – « Some prime factorization results for type  $\text{II}_1$  factors », *Invent. Math.* **156** (2004), p. 223–234.
- [47] J. PETERSON & S. POPA – « On the Notion of Relative Property (T) for Inclusions of Von Neumann Algebras », *J. Funct. Anal.* **219** (2005), p. 469–483.
- [48] S. POPA – « Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of  $w$ -rigid groups », *Invent. Math.*, to appear; [math.GR/0512646](https://arxiv.org/abs/math/0512646).
- [49] ———, « Correspondences », INCREST preprint, 1986.
- [50] ———, « Sous-facteurs, actions des groupes et cohomologie », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **309** (1989), no. 12, p. 771–776.
- [51] ———, « On the fundamental group of type  $\text{II}_1$  factors », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **101** (2004), no. 3, p. 723–726 (electronic).
- [52] ———, « On a class of type  $\text{II}_1$  factors with Betti numbers invariants », *Ann. of Math. (2)* **163** (2006), no. 3, p. 809–899.
- [53] ———, « Some computations of 1-cohomology groups and construction of non-orbit-equivalent actions », *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (2006), no. 2, p. 309–332.
- [54] ———, « Some rigidity results for non-commutative Bernoulli shifts », *J. Funct. Anal.* **230** (2006), no. 2, p. 273–328.
- [55] ———, « Strong rigidity of  $\text{II}_1$  factors arising from malleable actions of  $w$ -rigid groups, Part I », *Invent. Math.* **165** (2006), p. 369–408.
- [56] ———, « Strong rigidity of  $\text{II}_1$  factors arising from malleable actions of  $w$ -rigid groups, Part II », *Invent. Math.* **165** (2006), p. 409–451.
- [57] S. POPA & R. SASYK – « On the cohomology of actions of groups by Bernoulli shifts », *Ergodic Dynam. Systems* **27** (2007), p. 241–251.
- [58] S. POPA & S. VAES – « Strong rigidity of generalized Bernoulli actions and computations of their symmetry groups », preprint, [math.0A/0605456](https://arxiv.org/abs/math/0605456).
- [59] F. RĂDULESCU – « The fundamental group of the von Neumann algebra of a free group with infinitely many generators is  $\mathbb{R}_+^*$  », *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), no. 3, p. 517–532.
- [60] ———, « Random matrices, amalgamated free products and subfactors of the von Neumann algebra of a free group, of noninteger index », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 2, p. 347–389.
- [61] Y. SHALOM – « Measurable group theory », in *European Congress of Mathematics*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005, p. 391–423.

- [62] C. F. SKAU – « Finite subalgebras of a von Neumann algebra », *J. Funct. Anal.* **25** (1977), no. 3, p. 211–235.
- [63] A. VALETTE – « Nouvelles approches de la propriété (T) de Kazhdan », *Astérisque*, vol. 294, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 97–124.
- [64] D. VOICULESCU – « Circular and semicircular systems and free product factors », in *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris 1989)*, Progr. Math., vol. 92, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 45–60.
- [65] ———, « The analogues of entropy and of Fisher’s information measure in free probability theory. III. The absence of Cartan subalgebras », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 1, p. 172–199.
- [66] R. J. ZIMMER – « Strong rigidity for ergodic actions of semisimple Lie groups », *Ann. of Math. (2)* **112** (1980), no. 3, p. 511–529.
- [67] ———, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics, vol. 81, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [68] ———, « Groups generating transversals to semisimple Lie group actions », *Israel J. Math.* **73** (1991), no. 2, p. 151–159.

Stefaan VAES

CNRS, Institut de Math. de Jussieu  
175 rue du Chevaleret  
F-75013 Paris (France)

Department of Mathematics, K.U.Leuven  
Celestijnenlaan 200B  
B-3001 Leuven (Belgium)  
*E-mail* : `stefaan.vaes@wis.kuleuven.be`

**MODULATION INVARIANT AND  
MULTILINEAR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS**  
[after Lacey and Thiele]

by Michael CHRIST

**Contents**

1. Historical background .....	296
2. Localized Fourier coefficients .....	299
3. Almost-orthogonality .....	303
4. Trees, towers, and multitrees .....	304
5. Organizing the total sum into subsums .....	308
6. Counting multitrees .....	310
7. Refinement .....	311
8. Proof of the almost-orthogonality lemma .....	314
9. Carleson's maximal operator, according to Lacey and Thiele . . .	314
10. Open problems .....	316
References .....	318

**INTRODUCTION**

The bilinear Hilbert transform is the operator

$$(1) \quad BH(f_1, f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-t)f_2(x+t)t^{-1}dt$$

where  $x, t \in \mathbb{R}$  and  $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R})$ . If  $t^{-1}$  were an integrable function then this integral would become absolutely convergent, for almost every  $x$  for appropriate exponents  $p_j$ . The question of the finiteness of the conditional integral, and of inequalities in  $L^p$  norms, was an open problem from roughly the mid-1960's to the late 1990's, when Michael Lacey and Christoph Thiele showed in a series of breakthrough papers that  $BH$  is well-defined and bounded on appropriate  $L^p$  spaces. This operator is prototypical for a class of multilinear operators with modulation symmetry, and their work has

---

Supported in part by NSF grant DMS-040126.

been followed by significant further developments too numerous to cite in the space available.

In this expository article I discuss the background and origins of the problem, outline the main lines of the analysis, and indicate the connection with the almost everywhere convergence of Fourier integrals. This article is not intended as an exhaustive survey, but merely as an introduction to the main ideas of the original articles [21–23]. I deliberately focus on one particular operator in order to emphasize what I consider to be the main concepts.

## 1. HISTORICAL BACKGROUND

### 1.1. Singular integrals

The most fundamental example of a Calderón-Zygmund singular integral operator is the Hilbert transform  $Hf(x) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) t^{-1} dt$  for  $x \in \mathbb{R}$ . The integral fails to converge absolutely in general, and is defined as the limit as  $\varepsilon \rightarrow 0$  of the integral over  $|t| > \varepsilon$ .

$H$  plays a fundamental role in the theory of convergence of the Fourier transform, as well as in one-dimensional complex analysis. It satisfies  $\widehat{Hf}(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi)$  for all  $\xi \neq 0$ , where  $\operatorname{sgn}(\xi) = \pm 1$  according to whether  $\xi > 0$  or  $< 0$ . Thus  $P = \frac{1}{2}(I - iH)$ , where  $I$  is the identity, is the projection operator onto positive frequencies:  $\widehat{Pf}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \chi_{\xi > 0}$ . The “partial sum” operators  $\widehat{P_N f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \chi_{|\xi| \leq N}$  can be synthesized out of  $P$  together with shifts of the Fourier variable, in such a way that uniform boundedness of  $P_N$  on  $L^p$  is equivalent to boundedness of  $H$  on  $L^p$ . This is the basis of the classical theorem of M. Riesz on  $L^p$  norm convergence of Fourier series.

Somewhat more general CZ operators can be expressed as Fourier multiplier operators

$$(2) \quad \widehat{Tf}(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi) \quad \text{where } m(r\xi) \equiv m(\xi) \text{ for all } r > 0$$

and  $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ . General Fourier multipliers  $\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi)$  with  $m \in L^\infty$  preserve  $L^p(\mathbb{R})$  only for  $p = 2$ ; there is no characterization of  $L^p$  functions in terms of the absolute values of their Fourier coefficients for  $p \neq 2$ .

The most general Calderón-Zygmund operators in  $\mathbb{R}^d$  lack convolution structure, taking the form  $\int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy$  where

$$(3) \quad |K(x, y)| \leq C|x - y|^{-d} \quad \text{and} \quad |\nabla_{x, y} K| \leq C|x - y|^{-d-1};$$

again I slur over the issue of interpretation of this typically absolutely divergent integral. Roughly speaking, (3) says that the portions of  $f, g$  microlocalized in phase space near  $(x, \xi)$  and  $(x', \xi')$  respectively interact quite weakly unless  $|\xi| + |\xi'| \leq C|x - x'|^{-1}$ . According to the uncertainty principle, any stronger restriction of this



general type is meaningless. A basic theorem [5] states that if such an operator is bounded on  $L^2$ , then it is also bounded on  $L^p$  for all  $p \in (1, \infty)$ .

The basic symmetries of this theory are translation and dilation; if  $K(x, y)$  is a Calderón-Zygmund kernel then so are  $K(x - z, y - z)$  and  $r^d K(rx, ry)$ , uniformly for all  $r > 0$  and  $z \in \mathbb{R}^d$ . The individual operators need not exhibit these symmetries, but the class as a whole does.

A third basic symmetry, with respect to *modulation*, is totally lacking in this theory. Multiplying  $K(x, y)$  by  $e^{i(ax+by)}$  for any nonzero  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  destroys the bound on  $\nabla K$ . This lack of symmetry is perhaps even more apparent in (2), in the convolution case  $K(x - y)$ , where  $\xi = 0$  plays a privileged role. Of course, such a modulation does not affect  $L^p$  estimates, but as we will see, the bilinear Hilbert transform can be regarded as an infinite sum of modulated Calderón-Zygmund operators with different modulating frequencies, in such a way that boundedness of the sum cannot easily be inferred by summing bounds for the individual summands.

## 1.2. Calderón's commutator

Calderón had an abiding interest in partial differential equations with nonsmooth coefficients and on nonsmooth domains. He had employed algebras of singular integral operators in studying PDE, for instance in his work on uniqueness in the Cauchy problem [2]. Thus he was naturally led to investigate compositions of operators such as the canonical example  $H$ , the operator  $M_A$  of multiplication by a function  $A$  having limited smoothness, and  $\frac{d}{dx}$ . He showed in 1965 [3] that the commutator  $[H, M_A]$  is smoothing, in the sense that  $\mathcal{C}_A = \frac{d}{dx} \circ [H, M_A]$  is bounded on  $L^2(\mathbb{R}^1)$ , whenever  $A$  is Lipschitz continuous, that is, whenever  $a = dA/dx \in L^\infty$ . Formally

$$(4) \quad \mathcal{C}_A f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{A(x) - A(y)}{(x - y)^2} dy,$$

which satisfies the Calderón-Zygmund assumptions (3) when  $a = \frac{dA}{dx}$  belongs to  $L^\infty$ . These operators possess translation and dilation invariance as a family, even though individually they lack it.

Since the commutator operator is not translation-invariant, Plancherel's theorem can not be invoked directly to establish its  $L^2$  boundedness. A key realization of Calderón was that it could profitably be regarded as a *bilinear* operator, and that the full force of Fourier analysis and complex variables methods should be brought to bear on  $a$ .

An intriguing alternative expression is obtained by writing  $A(x) - A(y) = (x - y) \int_0^1 a(sx + (1 - s)y) ds$  to obtain a decomposition  $\mathcal{C}_A(f) = \int_0^1 \mathcal{C}_s(f, a) ds$  where

$$(5) \quad \mathcal{C}_s(f, a)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t) a(x + st) t^{-1} dt.$$

Thus bounds for  $\mathcal{C}_s$  from  $L^2 \times L^\infty$  to  $L^2$  would imply corresponding bounds for the commutator operator. The special case  $\mathcal{C}_1$  is traditionally called the *bilinear Hilbert*

transform, but all the operators  $\mathcal{C}_s$  for  $s \neq 0, -1$  have essentially the same intrinsic qualities and stature. Calderón asked<sup>(1)</sup> whether these operators do map  $L^2 \times L^\infty$  to  $L^2$ . The problem became notorious, but was not resolved until the work of Lacey and Thiele [21, 22] in the late 1990s.

Thought of as linear operators acting on  $f$ ,  $\mathcal{C}_s$  have nonsmooth kernels  $K(x, y) = (x - y)^{-1}a(xs + (1 - s)y)$  which satisfy no gradient estimate. Viewed as bilinear operators, they are singular in the sense that  $\mathcal{C}_s(f, a)(x)$  depends on  $a(y_1)f(y_2)$  only for  $(y_1, y_2)$  in a one-dimensional subset of  $\mathbb{R}^2$ .

It is remarkable that these building blocks  $\mathcal{C}_s$  not only retain translation and dilation symmetry, but gain new modulation symmetries: defining  $\mathcal{M}_\eta f(x) = e^{ix\eta}f(x)$ ,

$$(6) \quad \boxed{\mathcal{C}_s(\mathcal{M}_{s\eta}f, \mathcal{M}_\eta a) \equiv \mathcal{M}_{(1+s)\eta}\mathcal{C}_s(f, a).}$$

These are partial symmetries; there is no relation for  $\mathcal{C}_s(\mathcal{M}_\eta f, \mathcal{M}_{\tilde{\eta}}a)$  unless  $s\eta = \tilde{\eta}$ .

In terms of the Fourier transform the operator is written

$$(7) \quad \mathcal{C}_s(f, a)(x) = c \iint e^{ix(\xi_1 + \xi_2)} \operatorname{sgn}(s\xi_2 - \xi_1) \widehat{f}(\xi_1) \widehat{a}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

for a certain constant  $c$ , and the modulation symmetry is reflected in the invariance of the Fourier multiplier  $\operatorname{sgn}(s\xi_2 - \xi_1)$  under  $\xi \mapsto \xi + (s\eta, \eta)$ . This multiplier is nonsmooth along an entire line, rather than merely at the origin.

It is (perhaps) a general principle that more symmetric operators are more difficult to analyze; a featureless wall presents no cracks which can naturally be enlarged into gaps. A fundamental point to look for in the discussion below is how the symmetry is broken; see §5.

### 1.3. Carleson’s maximal operator

Carleson [6] proved in 1966 that for any periodic function  $f \in L^2$  of one real variable, the partial sums of the Fourier series converge to  $f$  almost everywhere. The essentially equivalent statement for the real line is that  $(2\pi)^{-1} \int_{|\xi| \leq N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$  converges to  $f(x)$  as  $N \rightarrow \infty$ , for almost every  $x \in \mathbb{R}$ . The main ingredient is an estimate for Carleson’s maximal operator  $\mathcal{C}^* f(x) = \sup_{N < \infty} \left| \int_{|\xi| \leq N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right|$ , which is essentially the same as

$$(8) \quad \mathcal{C}^* f(x) = \sup_{N \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x - t) e^{iNt} t^{-1} dt \right|.$$

Carleson proved that  $\mathcal{C}^*$  maps  $L^2$  to weak  $L^2$ , that is,  $|\{x : \mathcal{C}^* f(x) > \lambda\}| \leq C\lambda^{-2} \|f\|_{L^2}^2$  uniformly for all  $\lambda > 0$  and  $f \in L^2$ . Almost everywhere convergence follows immediately from this inequality since it holds trivially for functions whose Fourier transforms have compact support.

---

<sup>(1)</sup>The question is widely attributed to Calderón, though I know of no reference.

It is equivalent to establish bounds for the linear operators  $\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{iN(x)t}t^{-1}dt$  which are *uniform* over all measurable real-valued selection functions  $N$ . Once again these operators enjoy forms of translation, dilation, and modulation invariance. For instance,  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_\eta f)(x) = \mathcal{M}_\eta \mathcal{L}' f(x)$ , where  $\mathcal{L}'$  is obtained from  $\mathcal{L}$  by replacing the function  $N(x)$  by  $N(x) - \eta$ .

Fefferman [17] later gave a second proof of Carleson's theorem. Lacey and Thiele used elements of both of these analyses to prove<sup>(2)</sup>

**THEOREM 1.1.** — *Let  $p_1, p_2, q \in (1, \infty]$  satisfy  $q^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1}$ , and assume that no more than one of these exponents is infinite. Then there exists  $C < \infty$  such that  $\|BH(f_1, f_2)\|_{L^q} \leq C\|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}}$  for all Schwartz class functions.*

#### 1.4. Two roads diverge

Calderón proved the bound he sought for the commutator operator without understanding the bilinear Hilbert transform, and went on to analyze [4] the Cauchy integral associated to Lipschitz curves with small Lipschitz constant by an extension of those ideas. Further developments have included a vast literature on elliptic boundary problems on Lipschitz domains, analytic capacity in one complex variable [27], the work of Coifman-Meyer-McIntosh [9] on the Cauchy integral, and the  $T(1)$  theorem of David and Journé [13]. A theory of multilinear Calderón-Zygmund singular operators was developed [10, 12], which however does not include  $\mathcal{C}_s$ ; it encompasses operators which have a Fourier representation like (7) with  $\text{sgn}(s\xi_2 - \xi_1)$  replaced by functions smooth away from  $\xi = 0$  and satisfying  $m(r\xi) \equiv m(\xi)$  for  $r > 0$ . These operators lack modulation invariance, and are less singular. Some of that theory provides essential building blocks for the analysis outlined here.

## 2. LOCALIZED FOURIER COEFFICIENTS

### 2.1. A frame with a preferred scale

Let  $\psi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  be an infinitely differentiable function supported in  $(0, 2)$  such that  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(t-n) \equiv 1$  for all  $t \in \mathbb{R}$ . Then the set of all functions  $\{\psi_{k,n} = e^{ikt}\psi(t-n) : k, n \in \mathbb{Z}\}$  is a *frame* for  $L^2(\mathbb{R}^1)$ ; for any  $f \in L^2$ ,

$$(9) \quad f = c \sum_{k,n} \psi_{k,n} \langle f, \psi_{k,n} \rangle$$

for a certain constant  $c$  whose precise value is of no consequence for the type of inequality in question here. The inverse Fourier transform of  $\psi$  is a Schwartz function, and multiplying it by  $(2\pi)^{-1/2}$  yields a function  $\varphi$  such that  $\{\varphi_{k,n}(x) = e^{inx}\varphi(x-k)\}$  is likewise a frame for  $L^2$ . It is good intuition to think of  $\varphi_{k,n}(x)$  as being

<sup>(2)</sup>Their theorem actually applies for all  $q > \frac{2}{3}$ .

essentially  $c_0 e^{inx} e^{-|x-k|^2}$ , although this is not quite correct because these functions lack compactly supported Fourier transforms.

One thinks of  $\langle f, \varphi_{k,n} \rangle$  as being *localized Fourier coefficients*. Such a frame is quite different from celebrated *wavelet bases*. The lesser difference is that  $\{\varphi_{k,n}\}$  is not an orthonormal system; there is some oversampling here. The significant difference is that whereas a wavelet basis treats all scales equally, this frame prefers one scale. An advantage of this frame, not shared by wavelet-type bases, is its invariance under modulation by integral frequencies.

The rank one operator  $f \mapsto \langle f, \varphi_{k,n} \rangle \varphi_{k,n}$  heuristically represents the orthogonal projection of  $L^2(\mathbb{R})$  onto the subspace consisting of all functions  $g$  such that  $g$  is supported in  $I = [k, k+1]$  and  $\hat{g}$  is supported in  $\omega = [n, n+1]$ , although this is not exactly true. The entire *phase space*  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  is tiled by these sets  $I \times \omega$ , and corresponding to this geometric decomposition is the analytic decomposition of the identity operator as a sum of projections.

## 2.2. Scaled frames and tiles in phase space

Other frames can be constructed by scaling: For each integer  $r$  we form  $\{2^{-r/2} \varphi_{k,n}(2^{-r}x) : k, n \in \mathbb{Z}\}$ , which is likewise a frame. This corresponds to tiling  $\mathbb{R}^2$  by rectangles  $I \times \omega$  where  $I$  has length  $2^r$  and  $\omega$  has length  $2^{-r}$ .

A *dyadic interval* is a closed bounded subinterval of  $\mathbb{R}^1$  of the form  $[k2^n, (k+1)2^n]$  for arbitrary integers  $k, n$ . The set of all dyadic intervals enjoys an often useful combinatorial property: If two such intervals do overlap, then one is contained in the other.

DEFINITION 2.1. — *A tile is a subset of the phase space  $\mathbb{R}^2$  of the form  $I \times \omega$ , where  $I, \omega$  are arbitrary dyadic intervals satisfying  $|I| \cdot |\omega| = 1$ .*

In contrast to dyadic intervals, no tile is properly contained in another. Tiles and dyadic intervals are said to be *nonoverlapping* if their interiors are disjoint<sup>(3)</sup>.

## 2.3. Decomposition of the bilinear Hilbert transform by scales

The bilinear Hilbert transform has no preferred scale; with respect to the operators  $D_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ , there is the dilation symmetry  $BH(D_\lambda f, D_\lambda g) = D_\lambda(BH(f, g))$ . Thus none of our frames is well adapted to the operator.

<sup>(3)</sup>I will sometimes abuse language and notation by saying that intervals are disjoint when they merely do not overlap.

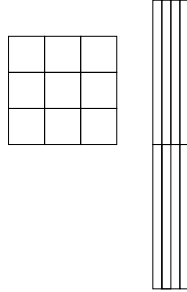


FIGURE 1. Two tilings of phase space. According to the uncertainty principle, no significant refinement of either tiling is meaningful.

Let  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  be a smooth function supported<sup>(4)</sup> in (8, 32) such that  $\sum_{r \in \mathbb{Z}} \eta(2^r \xi) \equiv 1$  for all  $\xi > 0$ .  $BH$  is thus decomposed as  $\sum_{r \in \mathbb{Z}} BH_r$  where

$$(10) \quad BH_r(f_1, f_2)(x) = c \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\xi_1 + \xi_2)} \operatorname{sgn}(\xi_1 - \xi_2) \eta(2^r(\xi_1 - \xi_2)) \widehat{f}_1(\xi_1) \widehat{f}_2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

plus a second, very similar, infinite sum obtained by replacing  $\eta(s)$  by  $\eta(-s)$ .

There is an alternative expression

$$(11) \quad BH_r(f_1, f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x+t) f_2(x-t) 2^{-r} h(2^{-r}t) dt$$

for a certain Schwartz function  $h$ . An immediate consequence of Hölder's inequality is that  $BH_r$  maps  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  to  $L^q$  whenever  $p_1, p_2, q$  are  $\geq 1$  and satisfy  $q^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1}$  and the scaling symmetry ensures that the operator norm is independent of  $r$ . The sole issue is the summation over  $r$ .

$BH_r$  clearly has a preferred spatial scale,  $2^r$ , and retains the modulation invariance of  $BH$ . For each  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $BH_r$  will be analyzed in terms of the frame described above with the same parameter  $r$ . Thus one works simultaneously with infinitely many frames, one for each scale.

#### 2.4. Phase space decomposition of the bilinear Hilbert transform

For each  $r \in \mathbb{Z}$  denote by  $\mathcal{P}_r$  the set of all phase space tiles  $P = I \times \omega$  of dimensions  $2^r \times 2^{-r}$ . Consider the trilinear form  $\mathcal{H}_r(f_1, f_2, f_3) = \langle f_3, BH_r(f_1, f_2) \rangle$  for an arbitrary test function  $f_3$ . Then  $\langle BH(f_1, f_2), f_3 \rangle = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_r(f_1, f_2, f_3)$ .

Decompose each  $f_k = \sum_{P^k \in \mathcal{P}_r} \langle f_k, \phi_{P^k} \rangle \phi_{P^k}$  to obtain

$$\mathcal{H}_r(f_1, f_2, f_3) = \sum_{P=(P^1, P^2, P^3) \in \mathcal{P}_r^3} \beta_P \prod_{k=1}^3 \langle f_k, \phi_{P^k} \rangle$$

<sup>(4)</sup>The precise numbers 8, 32 are of no significance; one could replace these by any  $A, B$  such that  $B > 2A$  and  $A > 0$  is sufficiently large.

for certain coefficients  $\beta_P$  independent of  $\{f_k\}$ . Upper bounds for the “interaction amplitudes”  $\beta_P$  are required, and elementary estimates combined with the information that  $\eta$  is supported in (8, 32) give:

LEMMA 2.2. — *Let  $P = (P^1, P^2, P^3)$  where each  $P^k = I_k \times \omega_k$  is a phase space tile of dimensions  $2^r \times 2^{-r}$ . Then for any finite exponent  $N$ ,*

$$(12) \quad |\beta_P| \leq C_N 2^{-r/2} \left( \max_{k,l \in \{1,2,3\}} (1 + 2^{-r} \text{distance}(I_k, I_l)) \right)^{-N}$$

and

$$(13) \quad \beta_P \equiv 0$$

unless the centerpoints  $c_k$  of the frequency space intervals  $\omega_k$  satisfy  $c_2 - c_1 \in [2 \cdot 2^{-r}, 38 \cdot 2^{-r}]$  and  $c_3 - 2c_1 \in [10 \cdot 2^{-r}, 70 \cdot 2^{-r}]$ .

This is a reflection of a fundamental characteristic of the bilinear Hilbert transform:  $BH(e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2})(x) = \pi i \operatorname{sgn}(\xi_1 - \xi_2) e^{i\xi_3 x}$  where  $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$ .

The numbers 2, 38, 10, 70 are insignificant artifacts of certain nearly arbitrary choices. What is important is the following consequence, which will be a source of orthogonality in the analysis.

FACT 2.3. — *Let  $P, Q \in \cup_r \mathcal{P}_r^3$  and suppose that  $\beta_P, \beta_Q$  are both nonzero. Suppose that for some index  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\omega_{P^k}, \omega_{Q^k}$  overlap, and that  $|\omega_{P^k}| < |\omega_{Q^k}|$ . Then for each  $i \neq k$ ,  $\omega_{P^i}$  is disjoint from  $\omega_{Q^i}$ , and they are separated by a distance comparable to  $|\omega_{Q^i}|$ .*

**2.5. Nuisance technicalities involving tiles**

If  $I, J$  are dyadic intervals, then either one is contained in the other, or they do not overlap. This makes dyadic intervals well suited to stopping time arguments, in which one begins with such an interval, subjects it to a test, and if it fails, subdivides it into halves and subjects the two halves separately to (rescaled versions of) the same test, repeating indefinitely.

On the other hand, the set of all dyadic intervals has no reasonable translation invariance. Consider the interval  $[0, 1]$ , which for any integer  $N \geq 1$  is contained in the larger dyadic interval  $[0, 2^N]$ . These larger intervals have the unnatural feature that they extend only to the right of  $[0, 1]$ , never to the left; their union is only half of the real axis. Thus analysis based on these intervals is likely to disregard interactions between the two halves of the real axis. This defect is essentially reprised at every dyadic point  $j2^n$ ,  $j, n \in \mathbb{Z}$ .

This difficulty arises commonly and has been sidestepped in various ways by various authors; see [6, 18, 26]. It is also helpful to thin out the sum by partitioning the set of all dyadic intervals into finitely many subfamilies, so that for any two intervals  $I, J$  belonging to any common subfamily, if  $I \subset J$  and  $I \neq J$  then  $|J| \geq 2^K |I|$  where  $K$  is

a large constant. This leads to a decomposition into finitely many suboperators, all having the same structure.

In this exposé I will systematically slur over these technicalities, which are of no intrinsic interest. I do not pretend to give a full proof, only a conceptually accurate outline. Statements made below are correct, but under the proviso that these technicalities have been dealt with.

### 3. ALMOST-ORTHOGONALITY

#### 3.1. Introduction

The space  $L^2$  plays a special role in the classical singular integral operator theory, partly because methods relying on Hilbert space structure are available. In particular, Plancherel's theorem can be applied to easily establish  $L^2$  estimates for translation-invariant operators; but it is not directly applicable to the commutator operator or its more degenerate relatives.

A rather flexible almost-orthogonality principle was introduced by Knapp and Stein [20], who were motivated by problems in the representation theory of semisimple groups to establish  $L^2$  bounds for singular integral operators invariant with respect to certain (nilpotent) Lie group structures. They showed that if an abstract operator  $T$  is decomposed as a sum of bounded operators  $T_j$  such that  $\|T_i T_j^*\|, \|T_i^* T_j\| \leq c_{i-j}$  for all  $i, j \in \mathbb{Z}$ , then  $\|T\| \leq \sum_j c_j^{1/2}$ . A trivial case is when the summands have pairwise orthogonal ranges, and likewise for their adjoints.

A satisfying explanation of the  $L^2$  boundedness of Calderón-Zygmund operators was finally obtained by David and Journé, who showed that any such (bounded) operator can be decomposed as a sum of three parts, one of which has a natural almost-orthogonal decomposition in the sense of Knapp and Stein. The other two parts have a different structure, related to the concepts of Carleson measures and paraproducts [12]. It is remarkable that on this level the ultimate understanding of the fundamental  $L^2$  estimate rests on the theory surrounding BMO, which is one limit of  $L^p$  as  $p \rightarrow \infty$ .

#### 3.2. Orthogonality via phase space disjointness

If two functions  $f, g$  have disjoint supports, then of course  $\langle f, g \rangle = 0$ . The same goes if  $\widehat{f}, \widehat{g}$  have disjoint supports. If  $P, Q$  are nonoverlapping tiles, then either  $\omega_P$  and  $\omega_Q$  are nonoverlapping, or  $I_P$  and  $I_Q$  are. In the former case,  $\langle \phi_P, \phi_Q \rangle = 0$ , but in the latter case the two supports cannot be disjoint (both functions are real analytic).

Nonetheless, since  $\phi_P(x)$  decays rapidly as  $x$  moves away from  $I_P$ ,  $\langle \phi_P, \phi_Q \rangle$  is relatively small if  $I_P, I_Q$  are far apart. Therefore one hopes to retain some form of orthogonality. The following lemma<sup>(5)</sup> is analogous to Bessel's inequality for Fourier coefficients, but is slightly weakened by the necessity of a supplementary hypothesis<sup>(6)</sup> (14).

LEMMA 3.1. — *Let  $\mathcal{S}$  be any set of pairwise nonoverlapping tiles. Let  $f \in L^2$  and  $\lambda > 0$ . Suppose that for every  $P \in \mathcal{S}$ ,*

$$(14) \quad \lambda |I_P|^{1/2} \leq |\langle f, \phi_P \rangle| \leq 2\lambda |I_P|^{1/2}.$$

Then  $\boxed{\sum_{P \in \mathcal{S}} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \leq C \|f\|_{L^2}^2}.$

The constant  $C$  is independent of  $f, \lambda, \mathcal{S}$ . An equivalent statement of the conclusion is  $\sum_{P \in \mathcal{S}} |I_P| \leq C \lambda^{-2} \|f\|_{L^2}^2$ ;  $\sum_P |I_P|$  is a weighted count of the number of tiles satisfying (14). For a complete proof of this fundamental fact see §8.

A localized variant is often useful: Suppose that there is given an interval  $J$  such that  $I_P \subset J$  for all  $P \in \mathcal{S}$ . Then under hypothesis (14),

$$(15) \quad \sum_{P \in \mathcal{S}} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \leq C_M \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \left( 1 + \frac{\text{distance}(x, J)}{|J|} \right)^{-M} dx$$

for any finite  $M$ . This is natural, since  $|\phi_P(x)|$  decays rapidly as  $x$  moves away from  $J$ .

#### 4. TREES, TOWERS, AND MULTITREES

The set of all tiles is endowed with a partial ordering.

DEFINITION 4.1. —  *$P \leq Q$  if and only if  $I_P \subset I_Q$  and  $\omega_P \supset \omega_Q$ . Also  $P < Q$  means that  $P \leq Q$  and  $P \neq Q$ .*

DEFINITION 4.2. — *A multitile  $P$  is an ordered 3-tuple of tiles  $(P^1, P^2, P^3)$  such that  $I_{P^i} = I_{P^j}$  for all indices  $i, j$ , and the centers of the associated frequency intervals  $\omega_{P^j}$  satisfy the constraints listed following (13).*

This common interval  $I_{P^k}$  is denoted by  $I_P$ . To any multitile are associated three functions  $\phi_{P^k}, k \in \{1, 2, 3\}$ . For any single  $P$ , the associated three rectangles  $I_P \times \omega_P^k$  all share the same dimensions.

<sup>(5)</sup>The original proofs of Lacey and Thiele [21, 22] were more complicated than the one outlined here, in large part because they had only a weaker version of Lemma 3.1 at their disposal. Lemma 3.1, in a slightly more sophisticated form, is in their paper [23].

<sup>(6)</sup>Without a supplementary hypothesis of some kind, Lemma 3.1 is false.



#### 4.1. Model operator

A simplified model for the sum that represents the bilinear Hilbert transform is

$$(16) \quad \mathcal{H}_{\text{model}}(f_1, f_2, f_3) = \sum_P |I_P|^{-1/2} \prod_{k=1}^3 |\langle f_k, \phi_{P^k} \rangle|$$

where the sum ranges over all multitiles, or some large collection of multitiles. These terms are normalized so that  $|I_P|^{-1/2} \prod_k |\langle f_k, \phi_{P^k} \rangle| \leq C \prod_k \|f_k\|_{L^{p_k}}$  whenever  $\sum_k p_k^{-1} = 1$ , with  $C$  independent of  $P$ . The theorem asserts that this sum of infinitely many uniformly bounded operators is bounded.

The condition (12) that  $\beta_P$  is small whenever  $I_{P^k}, I_{P^i}$  are far apart has been simplified in this model to the condition that  $\beta_P = 0$  whenever  $I_{P^k} \neq I_{P^i}$ . Only this model will be discussed further; but see [21] for an explanation of how the bilinear Hilbert transform can actually be realized as a limit of averages of such model operators.

One should regard each factor  $\langle f_k, \phi_{P^k} \rangle$  as expressing one irreducible bit of information, and each term in the sum as being likewise irreducible. This minimality would be lost if a single frame for  $L^2(\mathbb{R})$  were used.

#### 4.2. Trees, towers, and multitrees

The analysis proceeds by decomposing the full sum (16) over all multitiles into sums over various subfamilies enjoying additional structure.

DEFINITION 4.3. — *A tower is a nonempty finite set  $T$  of tiles such that there exists a tile  $\mathbf{top}(T) \in T$ , called the top of  $T$ , such that every  $P \in T$  satisfies  $P \leq \mathbf{top}(T)$ , that is,  $I_P \subset I_{\mathbf{top}(T)}$  and  $\omega_P \supset \omega_{\mathbf{top}(T)}$ .*

DEFINITION 4.4. — *A tree  $T$  is a finite set of tiles with an element  $\mathbf{top}(t) \in T$ , such that for any  $P \neq Q \in T$ :*

- (i)  $I_P \subset I_{\mathbf{top}(T)}$ ,
- (ii)  $P, Q$  do not overlap,
- (iii) if  $|I_P| \neq |I_Q|$  then  $\omega_P \cap \omega_Q = \emptyset$ .

Moreover,

- (iv) there exists  $\xi_0 \in \mathbb{R}$  such that  $\text{distance}(\omega_P, \xi_0) \sim |\omega_P|$  for all  $P \in T$ .

DEFINITION 4.5. — *Let  $k \in \{1, 2, 3\}$ . A finite set  $T$  of multitiles is said to be a  $k$ -tower if  $T^k = \{P^k : P \in T\}$  is a tower. A multitree is a set of multitiles which is a  $k$ -tower for some index  $k$ .*

A  $k$ -tower has a unique topmost element  $\mathbf{top}(T)$ , such that  $\mathbf{top}(T)^k$  is the top of the tower  $T^k$ .

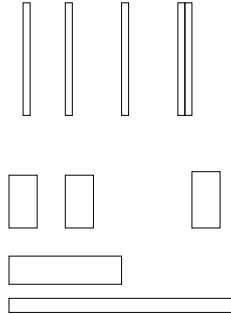


FIGURE 2. A tree. The  $x$  axis is horizontal; the  $\xi$  axis is vertical. Towers are similar, except that there exists some horizontal line which crosses every rectangle.

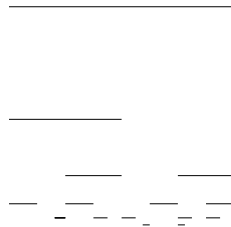


FIGURE 3. All intervals  $I_P$  associated to tiles  $P \in T$ , where  $T$  is either a tree or a tower. These intervals are contained in  $\mathbb{R}$ , but each is displaced vertically for purposes of illustration.  $I_{\text{top}(T)}$  is the topmost interval. The corresponding frequency space intervals  $\omega_P$  have lengths inversely proportional to  $|I_P|$ . These form a nested set if  $T$  is a tower, whereas any two of different lengths are nonoverlapping if  $T$  is a tree.

### 4.3. One origin of orthogonality

Plancherel’s and Parseval’s theorems and Bessel’s inequality lie at the heart of many more sophisticated arguments in classical Fourier analysis. Here a fundamental role is played by inequalities based on orthogonality, reflecting the principle that  $\phi_P, \phi_Q$  are nearly orthogonal when the subsets  $P, Q$  of phase space do not overlap. We now discuss one property of the set of all multitiles, which leads to families of nonoverlapping tiles in the analysis of multilinear singular integrals.

Towers  $T$  are sets of tiles which totally lack useful almost-orthogonality, since  $\omega_P \cap \omega_Q \neq \emptyset$  for any  $P, Q \in T$ . In the case where  $0 \in \omega_{\text{top}(T)}$ , the rank one operators  $f \mapsto \langle f, \phi_Q \rangle \phi_Q$  for  $Q \in T$  are closely analogous to averaging operators  $f \mapsto (|I_Q|^{-1} \int_{I_Q} f) \cdot \chi_{I_Q}$  (and more generally to frequency-modulated generalizations  $f \mapsto e^{ix\xi_0} (|I_Q|^{-1} \int_{I_Q} e^{-ix\xi_0} f) \cdot \chi_{I_Q}(x)$  for  $\xi_0 \in \omega_{\text{top}(T)}$ ). A tower could include a large family of  $Q$  such that  $|I_Q| \rightarrow 0$  and  $I_Q$  approaches some point  $x_0$ . For almost

all such  $x_0$ ,  $|I_Q|^{-1} \int_{I_Q} f \rightarrow f(x_0)$  by Lebesgue's differentiation theorem. Thus for a tower, no upper bound may be available for the coefficients  $|I_Q|^{-1/2} \langle f, \phi_Q \rangle$  beyond their uniform boundedness.

However, in the context of multitiles, there is substantial compensation for this lack of orthogonality.

**FACT 4.6.** — *If a family  $T$  of multitiles is an  $i$ -tower for some  $i \in \{1, 2, 3\}$  then  $\{P^j : P \in T\}$  is a tree for any  $j \neq i$  in  $\{1, 2, 3\}$ .*

This crucial consequence of Fact 2.3 partly explains the terminology “multitree”.

Expressions  $(\sum_{Q \in T} |\langle f, \phi_Q \rangle|^2)^{1/2}$ , where  $T$  is a tree, are closely analogous to classical Littlewood-Paley expressions and are central to the analysis. An important part of this analogy is the next bound.

**LEMMA 4.7.** — *Uniformly for all trees  $T$  and all functions  $f$ ,*

$$(17) \quad \sum_{P \in T} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \leq C \min(\|f\|_{L^2}^2, |I_{\mathbf{top}(T)}| \|f\|_{L^\infty}^2).$$

These inequalities lend Fact 4.6 great significance. The second conclusion is a localized version of the first.

The basic principle underlying Lemma 4.7 is that since the tiles  $P \in T$  form a nearly disjoint family of subsets of phase space,  $\{\phi_P : P \in T\}$  is an almost-orthogonal family of functions. The lemma is not quite a consequence of Lemma 3.1 on almost-orthogonality via nonoverlapping tiles, but follows easily from a direct examination of the magnitudes of matrix coefficients  $\langle \phi_P, \phi_Q \rangle$  for  $P, Q \in T$ .

#### 4.4. Energy and mass of multitrees

The  $j$ -energy  $\mathcal{E}_j(T)$  and  $j$ -mass  $\mathcal{M}_j(T)$  of a multitree  $T$  are defined for  $j \in \{1, 2, 3\}$  to be

$$(18) \quad \mathcal{E}_j(T) = |I_{\mathbf{top}(T)}|^{-1/2} \left( \sum_{P \in T} |\langle f_j, \phi_{P^j} \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

$$(19) \quad \mathcal{M}_j(T) = \sup_{P \in T} |I_P|^{-1/2} |\langle f_j, \phi_{P^j} \rangle|.$$

The individual terms are normalized so that  $|I_P|^{-1/2} |\langle f_j, \phi_{P^j} \rangle| \leq CM f_j(x)$  for  $x \in I_P$ , and if  $\{P^j : P \in T\}$  is a tree then  $\mathcal{E}_j(T) \leq C \|f_j\|_{L^\infty}$  (by Lemma 4.7).

If  $i, j, k$  are the three elements of  $\{1, 2, 3\}$  in any order then

$$(20) \quad |\mathcal{H}_T(f_1, f_2, f_3)| \leq \mathcal{E}_j(T) \mathcal{E}_k(T) \mathcal{M}_i(T) |I_{\mathbf{top}(T)}|.$$

(20) is a direct consequence of definitions via Cauchy-Schwarz, and should be regarded as a manifesto of intent rather than as a genuine estimate. Proposition 7.2 below provides alternative upper bounds for  $\mathcal{H}_T$ , not subsumed in the mass-energy bound.

**5. ORGANIZING THE TOTAL SUM INTO SUBSUMS**

The stage has been set for a discussion, in this section and the next, of the heart of the proof: a sorting algorithm, a counting problem, and a counting estimate based on phase space orthogonality. To any finite set  $\mathcal{S}$  of multitiles and any three functions  $f_j : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  is associated the operator expression

$$(21) \quad \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(f_1, f_2, f_3) = \sum_{P \in \mathcal{S}} |I_P|^{-1/2} \prod_{j=1}^3 |\langle f_j, \phi_{P^j} \rangle|.$$

We will partition the set of all multitiles into subsets having special structure, derive a reasonable bound for the contribution of each subset, and sum those bounds.

**5.1. The sorting algorithm’s output**

In the proof we examine the sum  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  of contributions of an arbitrary finite set of multitiles  $\mathcal{S}$ . The sorting procedure detailed below partitions the collection  $\mathcal{S}$  into multitrees. It constructs families  $\mathcal{F}_{n,i,j}$  of multitrees, indexed by  $n \in \mathbb{Z}$  and  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , with the following main properties:

- (i)  $\mathcal{S}$  is the disjoint union, over all  $n$  and all ordered pairs  $(i, j)$ , of all  $T \in \mathcal{F}_{n,i,j}$ .
- (ii) Each  $T \in \mathcal{F}_{n,i,j}$  is an  $i$ -tower.
- (iii) For any  $T \in \mathcal{F}_{n,i,j}$ ,

$$(22) \quad |\mathcal{H}_T(f_1, f_2, f_3)| \leq C 2^{3n} |I_{\mathbf{top}(T)}|.$$

- (iv) If  $j = i$  then

$$(23) \quad |I_{\mathbf{top}(T)}| \leq 2^{-2n} |\langle f_i, \phi_{\mathbf{top}(T)^i} \rangle|^2.$$

- (v) If  $j \neq i$  then

$$(24) \quad |I_{\mathbf{top}(T)}| \leq 2^{-2n} \sum_{P \in T} |\langle f_j, \phi_{P^j} \rangle|^2.$$

- (vi) Each  $T \in \mathcal{F}_{n,i,j}$  enjoys certain maximality properties.

**5.2. The sorting algorithm**

The algorithm seeks out the enemy in the form of subsums corresponding to  $i$ -towers; such subsums are potentially unfavorable because of the lack of orthogonality discussed above. We proceed to construct families  $\mathcal{F}_{n,i,j}$  of multitrees  $T \subset \mathcal{S}$ , for all  $n \in \mathbb{Z}$  and all  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ . The construction proceeds by descending induction on  $n$ . Begin with a very large positive  $n$ . Order the 9 ordered pairs of indices  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$  arbitrarily.

Fix a small constant  $c_0 > 0$ . For the first pair  $(i, j)$ , if  $i = j$  then consider all  $i$ -towers  $T \subset \mathcal{S}$  such that

- (i)  $|I_P|^{-1/2} |\langle f_i, \phi_{P^i} \rangle| \geq c_0 2^n$  for every  $P \in T$
- (ii)  $T$  is maximal with respect to set inclusion. That is, there exists no  $i$ -tower  $T' \subset \mathcal{S}$  properly containing  $T$  which satisfies (i).

If there exists a nonempty  $i$ -tower  $T \subset \mathcal{S}$  satisfying (i), then there also exists one satisfying both criteria. Choose any one,  $T$ , put it into  $\mathcal{F}_{n,i,j}$ , and delete all tiles  $P \in T$  from  $\mathcal{S}$ . Repeat the procedure with this reduced set  $\mathcal{S}$  for the same pair  $(i, j)$  until no multitrees satisfying (i) remain. Then move on to the next pair  $(i, j)$ . Observe how modulation symmetry is broken; the decomposition depends on the localized Fourier coefficients  $\langle f_i, \phi_{P^i} \rangle$  of  $f_i$ .

If  $j \neq i$  then do the same, retaining (ii) but replacing (i) by

- (i)\*  $\mathcal{E}_j(T) \geq 2^n$ ,

and imposing a supplementary condition (iii)\* whose role will not be visible in this exposé<sup>(7)</sup>.

Continue with a given index  $n$  until all 9 pairs  $(i, j)$  have been fully examined, and no multitrees satisfying the criteria remain. Then replace  $n$  by  $n - 1$ , and repeat the selection again, with  $n$  replaced by  $n - 1$  in criteria (i) and (i)\*. Continue by descending induction on  $n$  until only tiles satisfying  $\langle f_k, \phi_{P^k} \rangle = 0$  for all  $k \in \{1, 2, 3\}$  remain. Those contribute nothing to the operator, and may be discarded.

Given a finite set  $\mathcal{S}$ , there exists  $n_0$  so large that (i), (i)\* cannot possibly hold with factors of  $2^{n_0}$ . The induction begins with such an  $n_0$ .

(23) and (24) follow directly from (i), (i)\*. Moreover  $\mathcal{M}_k(T) \leq c_0 2^{n+1}$  and  $\mathcal{E}_k(T) \leq 2^{n+1}$  for all  $k \in \{1, 2, 3\}$ , because all tiles of  $T$  were available throughout the selection of  $\mathcal{F}_{n,i,k}$ , yet  $T$  was not selected. Therefore  $T$  did not satisfy the selection criteria (i), (i)\* at stage  $n + 1$ . (22) follows by Cauchy-Schwarz.

This purely formal discussion applies to any expression  $\sum_{P \in \mathcal{S}} |I_P|^{-1/2} \prod_{k=1}^3 |a_k(P)|$ ; the actual meaning of the coefficients  $a_k = \langle f_k, \phi_{P^k} \rangle$  has not yet been exploited.

---

<sup>(7)</sup>Criterion (iii)\*: If  $i < j$ , then a candidate  $i$ -tower  $T$  is not selected if there is some other candidate multitree  $T'$  such that  $\omega_T^i$  lies strictly to the left of  $\omega_{T'}^j$ . (An interval  $[a, b]$  is said to lie strictly to the left of  $[c, d]$  if  $b < c$ .) The same goes if  $i > j$ , with "left" replaced by "right". The reader is urged to disregard this point for the present. Likewise the smallness of the constant  $c_0$  in (i) plays a role which will not be apparent at the level of detail of this exposé.

**6. COUNTING MULTITREES**

The total sum is the sum of the contributions of all  $T$ , and we have a bound<sup>(8)</sup> of  $2^{3n}|I_{\text{top}}(t)|$  for each  $T$ , so it would suffice to have a suitable bound for

$$\boxed{\text{the weighted count } \sum_T |I_{\text{top}(T)}| \text{ of the number of multitrees}}$$

in each family  $\mathcal{F}_{n,i,j}$ . Here an estimate with genuine content must finally be established.

Since an upper bound for  $\sum_T |I_{\text{top}(T)}|$  is required, it is advantageous to place as many tiles as possible into each multitree, consistent with the selection criteria (i), (i)\*. This motivates the maximality criterion (ii).

**6.1. A small reduction**

For each  $j \in \{1, 2, 3\}$  let  $E_j \subset \mathbb{R}$  be an arbitrary measurable set with  $|E_j| < \infty$ . Let  $f_j$  be any function which is  $\equiv 0$  on  $\mathbb{R} \setminus E_j$ , and  $|f_j(x)| \leq 1$  for all  $x \in E_j$ . The theorem is a consequence of the following inequality via a simple interpolation argument<sup>(9)</sup>.

PROPOSITION 6.1. — *There exists  $C < \infty$  such that for any finite set  $\mathcal{S}$  of multitiles, sets  $E_j$ , and functions  $f_j$ ,*

$$(25) \quad \sum_{P \in \mathcal{S}} |I_P|^{-1/2} \prod_{k=1}^3 |(f_k, \phi_{P^k})| \leq C \prod_{k=1}^3 |E_k|^{1/p_k}$$

for any exponents  $p_k \in (1, \infty)$  satisfying  $\sum_k p_k^{-1} = 1$ .

**6.2. Counting multitrees**

Here is the crux of the entire analysis.

LEMMA 6.2 (Counting multitrees). — *For any  $n \in \mathbb{Z}$  and  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , for any measurable sets  $E_1, E_2, E_3$ , the multitrees selected by the sorting algorithm satisfy*

$$(26) \quad \sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,j}} |I_{\text{top}(T)}| \leq C 2^{-2n} |E_j|.$$

We will discuss only the case  $j = i$  in detail; see §7.1 for a brief discussion of the case  $j \neq i$ . The proof combines structural information built into the sorting algorithm

---

<sup>(8)</sup>An important alternative bound is also available; see Proposition 7.2.  
<sup>(9)</sup>Any function can be decomposed as  $f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^m f_m$  where the sets  $f_m$  have pairwise disjoint supports and satisfy  $\|f_m\|_{L^\infty} \leq 1$ . Interpolation amounts to making this substitution for  $f_k$  for each  $k \in \{1, 2, 3\}$  to produce an infinite sum of expressions of the type controlled by (25), and summing the resulting bounds.

with almost-orthogonality of the rank one operators  $f \mapsto \langle f, \phi_{P^k} \rangle \phi_{P^k}$  associated to collections of nonoverlapping (scalar) tiles  $P$ . This structural information is:

**FACT 6.3.** — *The tiles  $\{\mathbf{top}(T)^i : T \in \mathcal{F}_{n,i,i}\}$  do not overlap.*

*Proof.* — If not, there exist two distinct  $i$ -towers  $T, T' \in \mathcal{F}_{n,i,i}$  satisfying  $\mathbf{top}(T)^i < \mathbf{top}(T')^i$ . If  $T'$  was chosen before  $T$ , we reach a contradiction because  $T' \cup \{\mathbf{top}(T)\}$  is an  $i$ -tower which properly contains  $T'$ , contradicting the maximality criterion (ii) for  $T'$ . If  $T$  was chosen before  $T'$  then (ii) is again contradicted, since  $T \cup \{\mathbf{top}(T')\}$  is an  $i$ -tower (whose top is  $\mathbf{top}(T')$ ), which properly contains  $T$ .  $\square$

By the sorting algorithm,  $|I_{\mathbf{top}(T)}| \leq 2^{-2n} |\langle f_i, \phi_{\mathbf{top}(T)^i} \rangle|^2 \leq 4|I_{\mathbf{top}(T)}|$  for all  $T \in \mathcal{F}_{n,i,i}$ , uniformly in  $n, i$  and in  $\{f_k\}, \{E_k\}$ . Since these tiles  $\mathbf{top}(T)^i$  are nonoverlapping and  $|f_i| \leq \chi_{E_i}$ , the almost-orthogonality lemma gives

$$\sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,i}} |I_{\mathbf{top}(T)}| \leq C2^{-2n} \sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,i}} |\langle f_i, \phi_{\mathbf{top}(T)^i} \rangle|^2 \leq C2^{-2n} \|f_i\|_{L^2}^2 \leq C2^{-2n} |E_i|,$$

establishing Lemma 6.2.  $\square$

### 6.3. Summation with respect to $n$

By the bound of Lemma 4.7 in terms of  $\|f\|_{L^\infty}$ , the selection criteria (i), (i)\* for parameters  $(n, i, j)$  cannot be satisfied unless  $n$  does not exceed a certain finite  $n_0$ , independent of the functions  $f_k$  and sets  $E_k$ . Therefore  $\mathcal{F}_{n,i,j}$  is empty for all larger  $n$ . Thus

$$(27) \quad \sum_n \sum_{i,j} \sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,j}} \mathcal{H}_T(f_1, f_2, f_3) \leq C \sum_{n \leq n_0} 2^{3n} 2^{-2n} \sum_{k=1}^3 |E_k| \leq C \sum_{k=1}^3 |E_k|.$$

In the case where all three sets  $E_j$  have comparable measures, this is the bound of Proposition 6.1. Although it remains to treat the general case, this suffices to exhibit essential elements of the analysis<sup>(10)</sup>: localized Fourier decomposition, the connection between phase space disjointness and orthogonality, sorting of tiles into towers, the relation between towers and trees, the key role of the weighted count of all resulting multitreestrees, and the role of orthogonality in establishing that count.

## 7. REFINEMENT

In this more technical section we briefly discuss two steps omitted above. The first is the counting of multitreestrees of type  $(n, i, j)$  for  $j \neq i$ . The second is the refinement of the above argument to replace the crude bound  $\sum_{k=1}^3 |E_k|$  by  $\prod_{k=1}^3 |E_k|^{1/p_k}$ .

<sup>(10)</sup>It also fully proves a nontrivial result, an  $L^1$  inequality for  $BH(f_1, f_2)$  for arbitrary  $L^\infty$  functions  $f_j$  supported on sets of boundedly finite measures.

**7.1. Counting multitrees of type  $(n, i, j)$  with  $j \neq i$**

The total “number”  $\sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,j}} |I_{\text{top}(T)}|$  of multitrees in  $\mathcal{F}_{n,i,j}$  is likewise  $\leq C2^{-2n}|E_j|$ . The proof relies on the following variant of the almost-orthogonality Lemma 3.1. A collection  $\mathcal{F}$  of trees is said to be *strongly disjoint* if for any  $T \neq T' \in \mathcal{F}$ , any  $P \in T$  and any  $Q \in T'$ , if  $\omega_Q \supset \omega_P$  then not only must  $I_Q \cap I_P = \emptyset$ , but furthermore  $I_Q \cap I_{\text{top}(T)} = \emptyset$ .

LEMMA 7.1. — *Let  $f \in L^2$  and  $\lambda > 0$  be arbitrary. Let  $\mathcal{F}$  be a finite collection of strongly disjoint trees satisfying  $\lambda \leq \text{energy}(T) \leq 2\lambda$  for every  $T \in \mathcal{F}$ . Then*

$$(28) \quad \sum_{T \in \mathcal{F}} |I_{\text{top}(T)}| \leq C\lambda^{-2} \|f\|_{L^2}^2.$$

There is a localization in the same spirit as (15).

With this lemma in hand, the reasoning for the case  $j \neq i$  is parallel to that for  $j = i$ , though a bit more complicated. It is almost but not quite true that  $\{T^j : T \in \mathcal{F}_{n,i,j}\}$ , where  $T^j = \{P^j : P \in T\}$ , is a strongly disjoint family of trees for any fixed  $n, i, j$  with  $j \neq i$ . See [21] for details.

**7.2. Classical trilinear bound**

So far, the analysis has relied entirely on  $L^2$  estimates, but genuine  $L^p$  inequalities for linear operators do come into play.  $L^p$  estimates are available because expressions  $\mathcal{H}_T$  associated to multitrees  $T$  are subsumed<sup>(11)</sup> by the theory of singular integral operators, as developed by Coifman and Meyer [10, 12]. If  $f_k \in L^\infty$  then such a sum can be rewritten (with  $\{1, 2, 3\} = \{i, j, k\}$ ) as  $\langle \mathcal{T}f_i, f_j \rangle$  where  $\mathcal{T}$  is a classical singular integral operator, associated to a kernel  $K$  which satisfies (3) with a constant  $C$  proportional to  $\|f_k\|_{L^\infty}$ .

Let  $E_j$  be measurable sets satisfying  $|E_j| < \infty$ , and let  $f_j$  be measurable functions supported on  $E_j$  satisfying  $|f_j(x)| \leq 1$  for almost every  $x \in E_j$  and  $f_j(x) = 0$  for  $x \notin E_j$ .

PROPOSITION 7.2. — *Let  $T$  be any multitree. For all 3-tuples of exponents  $p_k \in (1, \infty]$  satisfying the scaling relation  $\sum_k p_k^{-1} = 1$  with at most one exponent equal to  $\infty$ ,*

$$(29) \quad \sum_{P \in T} |I_P|^{-1/2} \prod_{k=1}^3 |\langle f_k, \phi_{P^k} \rangle| \leq C \prod_{k=1}^3 |E_k|^{1/p_k}.$$

<sup>(11)</sup>More exactly, these expressions are *modulated* singular integral operators; the associated kernels  $K$  are multiplied by factors  $e^{i(x-y)\xi}$  for some arbitrary  $\xi$ .



The constant  $C$  depends on the exponents but not on the sets, functions, tower, or index  $l$ . This is of course a very particular case of Proposition 6.1.

As is often the case in this subject, a localized version is also available:  $|E_k|$  can be replaced by  $\int_{E_k} \left(1 + \frac{\text{distance}(x, I_{\text{top}(T)})}{|I_{\text{top}(T)}|}\right)^{-2} dx$ .

### 7.3. An alternative bound

Consider for simplicity only the case  $j = i$ . If  $\{i, l, m\} = \{1, 2, 3\}$  then using (29) in place of the mass-energy bound for each multitree leads to an alternative bound

$$(30) \quad \sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,i}} \mathcal{H}_T(f_1, f_2, f_3) \leq C_\varepsilon 2^{-(1+\varepsilon)n} |E_m|^{1-2\varepsilon} |E_l|^\varepsilon |E_i|^\varepsilon$$

for arbitrarily small  $\varepsilon > 0$ .

To prove this write  $\{1, 2, 3\} = \{i, l, m\}$ . Application of the almost-orthogonality lemma as above shows that uniformly for all dyadic intervals  $J$ ,

$$(31) \quad \sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,i}: I_{\text{top}(T)} \subset J} |I_{\text{top}(T)}| \leq C 2^{-2n} \int_{E_i} \left(1 + \frac{\text{distance}(x, J)}{|J|}\right)^{-2} dx \leq C 2^{-2n} |J|.$$

The *John-Nirenberg lemma* says that this “self-similar” inequality implies a stronger version of itself, to the effect that  $\sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,i}} \chi_{I_{\text{top}(T)}}$  is nearly a bounded function:

$$(32) \quad \int_J \left( \sum_{T \in \mathcal{F}_{n,i,i}} \chi_{I_{\text{top}(T)}} \right)^r \leq C_r 2^{-2nr} |J|$$

uniformly for all dyadic intervals  $J$ , for any finite exponent  $r$ .

Write  $\{1, 2, 3\} = \{i, l, m\}$ . Concerning the contributions of  $f_m, f_l$ , classical Calderón-Zygmund theory almost gives

$$(33) \quad \sum_{P \in T} |\langle f_m, \phi_{P^m} \rangle| |\langle f_l, \phi_{P^l} \rangle| \leq C |E_l \cap I_{\text{top}(T)}|^{1/p_l} |E_m \cap I_{\text{top}(T)}|^{1/p_m}$$

for any exponents in  $(1, \infty)$  satisfying  $p_l^{-1} + p_m^{-1} = 1$ ; in particular,  $p_m$  can be taken to be arbitrarily close to 1. This inequality is merely almost true;  $|E_j \cap I_{\text{top}(T)}|$  must be replaced by  $\int_{E_j} \left(1 + \frac{\text{distance}(x, I)}{|I|}\right)^{-2} dx$ , where  $I = I_{\text{top}(T)}$ . This sort of routine complication is controlled satisfactorily by the Hardy-Littlewood maximal function.

Consider all intervals  $J$  which are maximal among the collection  $\{I_{\text{top}(T)} : T \in \mathcal{F}_{n,i,i}\}$  with respect to set inclusion. Combining (33) with (32) and Hölder’s inequality for each interval  $J$ , summing over  $J$ , and finally exploiting the inclusions  $J \subset \{x : M(\chi_{E_i})(x) \geq c 2^{2n}\}$  leads to (30). Details are left to the experts.

(30) is unfavorable for  $n$  near  $-\infty$ , but the bound  $2^n |E_i|$  is still favorable for all sufficiently negative  $n$ . To conclude the argument, modify the selection algorithm by replacing the thresholds  $2^n$  in criteria (i), (i)\* by  $2^{n a_j}$  where  $a_j > 0$  are parameters. Adjusting these appropriately, depending on the relative sizes of  $|E_i|, |E_m|, |E_l|$ , makes the minimum of our two bounds favorable in all cases, and permits summation of the infinite series over  $n$ .

**8. PROOF OF THE ALMOST-ORTHOGONALITY LEMMA**

I have emphasized the leading role played by  $L^2$  arguments based on almost-orthogonality. The required almost-orthogonality lemma has a relatively simple proof. First, a preliminary fact: Define  $h_P(x) = |I_P|^{-1} \left(1 + \frac{\text{distance}(x, I_P)}{|I_P|}\right)^{-2}$ . These functions belong to  $L^1(\mathbb{R})$  uniformly in  $P$ . If  $|I_Q| \leq |I_P|$  then

$$|\langle \phi_P, \phi_Q \rangle| \leq C |I_P|^{1/2} |I_Q|^{-1/2} \int_{I_Q} h_P.$$

$h_P(x)$  decays rapidly as  $x$  moves away from  $P$ , on a scale comparable to  $|I_P|$ .

*Proof of Lemma 3.1.* — Set  $\beta_P = \langle f, \phi_P \rangle$  and  $X = \sum_{P \in \mathcal{F}} |\beta_P|^2$ . Then

$$X = \sum_P \langle f, \phi_P \rangle \langle \phi_P, f \rangle = \left\langle \sum_P \beta_P \phi_P, f \right\rangle \leq \|f\|_{L^2} \left\| \sum_P \beta_P \phi_P \right\|_{L^2}.$$

Now

$$\left\| \sum_P \beta_P \phi_P \right\|_{L^2}^2 \leq 2 \sum_P \sum_{Q: \omega_P \subset \omega_Q} |\beta_P \beta_Q \langle \phi_P, \phi_Q \rangle|$$

because  $\langle \phi_P, \phi_Q \rangle = 0$  unless  $\omega_P, \omega_Q$  overlap, and dyadic intervals cannot overlap unless one contains the other. Thus

$$\begin{aligned} \left\| \sum_P \beta_P \phi_P \right\|_{L^2}^2 &\leq 8\lambda^2 \sum_P |I_P|^{1/2} \sum_{Q: \omega_P \subset \omega_Q} |I_Q|^{1/2} |\langle \phi_P, \phi_Q \rangle| \\ &\leq C\lambda^2 \sum_P |I_P| \sum_{Q: \omega_P \subset \omega_Q} \int_{I_Q} h_P \leq C\lambda^2 \sum_P |I_P| \int_{\mathbb{R}} h_P \leq C \sum_P |\beta_P|^2 \end{aligned}$$

since the collection of all intervals  $I_Q$  such that  $Q \in \mathcal{F}$  and  $\omega_P \subset \omega_Q$  is nonoverlapping by hypothesis. Thus  $X^2 \leq C\|f\|_{L^2}^2 X$ . □

**9. CARLESON’S MAXIMAL OPERATOR, ACCORDING TO LACEY AND THIELE**

Here I give only a brief outline of a rather condensed treatment [23], in order to exhibit the parallel between the analyses of the bilinear Hilbert transform and Carleson’s maximal operator.

**Expression in terms of localized Fourier coefficients.** — For any dyadic interval  $\omega$ , denote by  $\omega^b$  and  $\omega^\sharp$  the left and right halves of  $\omega$ , respectively. Likewise to any tile  $P = I \times \omega$  are associated the two semitiles  $P^b = I \times \omega^b$  and  $P^\sharp = I \times \omega^\sharp$ .

Let functions  $\phi_P$  be as above, with the single change that  $\widehat{\phi_P}$  is supported in  $\omega_P^b$ . The linearized Carleson operator  $\int_{\mathbb{R}} e^{iN(x)t} f(x-t) t^{-1} dt$  is modeled by sums

$$(34) \quad \mathcal{C}^{**}(f)(x) = \sum_P \langle f, \phi_P \rangle \phi_P(x) \chi(x, P)$$

where  $\chi(x, P) = 1$  if  $N(x)$  lies in  $\omega_P^\sharp$ , and  $= 0$  otherwise. In fact, this operator can be realized as a limit of averages of such models. The goal is an inequality  $|\langle \mathcal{C}^{**}(f), \chi_E \rangle| \leq C \|f\|_{L^2} |E|^{1/2}$  for all measurable sets  $E$ .

**Towers.** — A tower  $T$  is a set of tiles for which there exists some tile  $\mathbf{top}(T)$  such that for every  $P \in T$ ,  $P \leq \mathbf{top}(T)$ ; in this discussion  $\mathbf{top}(T)$  is *not* required to be an element of  $T$ .  $\sharp$ -towers and  $\flat$ -towers are defined in the same way, with the requirements  $P^\sharp \leq \mathbf{top}(T)^\sharp$  and  $P^\flat \leq \mathbf{top}(T)^\flat$ , respectively.

There are two fundamental sources of orthogonality. Firstly, if  $T$  is a  $\flat$ -tower, then for any  $P, Q \in T$  satisfying  $|I_P| \neq |I_Q|$ , the intervals  $\omega_P^\sharp, \omega_Q^\sharp$  do not overlap<sup>(12)</sup>. Therefore the sets  $\{x \in E : N(x) \in \omega_P^\sharp\}$  and  $\{x \in E : N(x) \in \omega_Q^\sharp\}$  are disjoint. Secondly, any  $\sharp$ -tower  $T$  is a  $\flat$ -tree: whenever  $P, Q \in T$  satisfy  $|I_P| \neq |I_Q|$ ,  $\omega_P^\flat$  and  $\omega_Q^\flat$  do not overlap. Therefore  $\langle \phi_P, \phi_Q \rangle = 0$ .

The energy of a tower  $T$  is

$$(35) \quad \mathcal{E}(T) = \sup_{T' \subset T} |I_{\mathbf{top}(T')}|^{-1/2} \left( \sum_{P \in T'} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \right)^{1/2},$$

where the supremum is taken over all  $\sharp$ -towers  $T' \subset T$ . The mass of a tower is

$$(36) \quad \mathcal{M}(T) = \sup_{P \in T} \sup_{Q \geq P} |I_Q|^{-1} \int_{\{x \in E : N(x) \in \omega_Q\}} (1 + |I_Q|^{-1} \text{distance}(x, I_Q))^{-2} dx.$$

**Classical mass-energy bound for a single tower.** In the analysis of the bilinear Hilbert transform, the contribution of a single multitree was estimated by a trivial mass-energy bound. While there is a mass-energy bound here, it is not trivial. For any tower,

$$(37) \quad \sum_{P \in T} |\langle f, \phi_P \rangle| \cdot |\langle \phi_P, \chi_{N(x) \in \omega_P^\sharp} \chi_E \rangle| \leq C \mathcal{E}(T) \mathcal{M}(T) |I_{\mathbf{top}(T)}|.$$

There is also a very simple alternative bound  $\mathcal{M}(T) \leq C < \infty$ , uniformly for all sets  $E$ , because  $\chi_E \in L^\infty$  with norm 1.

<sup>(12)</sup>This is correct under the usual proviso that technicalities concerning dyadic intervals have been appropriately dealt with.

(37) is roughly on the level of Proposition 7.2, and is proved as follows. Any  $\sharp$ -tower is a  $\flat$ -tree, and the associated sum is essentially a (frequency-modulated generalization of a) truncated singular integral operator

$$(38) \quad \int_{|x-y| \geq \varepsilon(x)} K(x, y) f(y) dy$$

for some function  $\varepsilon(x)$  and Calderón-Zygmund kernel  $K$ . Such truncations are basic objects in the classical theory. On the other hand, any  $\flat$ -tower enjoys the first form of orthogonality described above, and this leads quite easily to the upper bound (37) for its contribution.

**Sorting algorithm.** — As in the analysis of  $BH$ , a selection algorithm partitions any finite set of tiles by selecting certain collections  $\mathcal{F}_{n, \sharp}$  of towers, for each integer  $n$  and index  $\sharp \in \{\flat, \sharp\}$ . For  $\mathcal{F}_{n, \flat}$  the main selection criterion is that  $\mathcal{M}(T) \geq 2^{2n}$ , while for  $\mathcal{F}_{n, \sharp}$  it is that  $\mathcal{E}(T) \geq 2^n$ . In both cases  $T$  is required to be maximal, and for  $\mathcal{F}_{n, \sharp}$  there is an analogue of criterion (iii)\*.

**Counting the towers.** — The key point is again an upper bound for the weighted number of trees in  $\mathcal{F}_{n, \sharp}$ .

LEMMA 9.1. — *Uniformly for all functions  $f$  and all measurable sets  $E \subset \mathbb{R}$  satisfying  $\|f\|_{L^2} \leq 1$  and  $|E| \leq 1$ ,*

$$(39) \quad \sum_{T \in \mathcal{F}_{n, \sharp} \cup \mathcal{F}_{n, \flat}} |I_{\text{top}(T)}| \leq C 2^{-2n}.$$

For  $\mathcal{F}_{n, \flat}$ , (39) is essentially a bound for the Hardy-Littlewood maximal function of  $\chi_E$ . The proof for  $\mathcal{F}_{n, \sharp}$  is essentially the same as that of the counting bound for  $\mathcal{F}_{n, i, j}$  with  $i \neq j$  in the bilinear Hilbert transform analysis; the primary ingredient is the almost-orthogonality lemma for strongly disjoint trees, Lemma 7.1. The strong disjointness of the collection  $\mathcal{F}_{n, \sharp}$  of trees is a consequence of the selection algorithm.

In this argument there is no *a priori* upper bound on  $n$ , but summation over all  $n \in \mathbb{Z}$  yields the desired uniform upper bound anyway (the alternative bound  $\mathcal{M}(T) \leq C < \infty$  is used for  $n \geq 0$ ).

### 10. OPEN PROBLEMS

**Higher-degree multilinear operators.** — The bilinear Hilbert transform can be generalized to

$$(40) \quad T(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^m f_k(x - \alpha_k t) t^{-1} dt$$

where the  $\alpha_j$  are pairwise distinct and nonzero. The analysis outlined above fails to apply to this operator for  $m \geq 3$ , and it is an open problem whether this formal

expression has any meaning for functions in appropriate spaces; scaling dictates that the natural estimate would be  $\|T(f_1, f_2, f_3)\|_{L^q} \leq C \prod \|f_k\|_{L^{p_k}}$  where  $q^{-1} = \sum_k p_k^{-1}$ . In fact, for  $m \geq 4$ , when this operator is expanded in terms of localized Fourier coefficients, the resulting sum actually fails to converge absolutely. See [24] and the references cited there for some positive results in this direction.

I mention in passing that for nonsingular expressions  $T(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{-1}^1 \prod_{k=1}^m f_k(x - \alpha_k t) dt$ , with no singular factor  $t^{-1}$ , there are interesting questions (for  $m \geq 3$ ) [7] which make contact with work of Bourgain [1] and of Katz-Tao [19] on a problem in additive number theory related to the Kakeya problem.

**Scattering for one-dimensional Dirac operators.** — Associated to any potential  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  is the Dirac operator  $D_V = \begin{pmatrix} -i \frac{d}{dx} & V \\ V & i \frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ . If  $V$  has compact support then for each  $\lambda \in \mathbb{R}$  there exist unique scattering coefficients  $a(\lambda), b(\lambda)$  for which there exists a solution  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  of the generalized eigenfunction equation  $D_V u = \lambda u$  taking the form  $u(x) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix}$  as  $x \rightarrow -\infty$  and  $u(x) \equiv \begin{pmatrix} a(\lambda)e^{i\lambda x} \\ b(\lambda)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}$  as  $x \rightarrow +\infty$ .

For potentials  $V \in L^1(\mathbb{R})$ , it is elementary that there still exist solutions with these asymptotics, for every  $\lambda$ . For  $V \in L^p$  for  $1 < p < 2$ , this continues to hold for Lebesgue-almost every  $\lambda$ . However, there are indications [14] that the natural class of potentials is  $V \in L^2$ .

For any  $x$ ,  $u(x)$  can be written in the form  $u(x) = \begin{pmatrix} a(x, \lambda)e^{i\lambda x} \\ b(x, \lambda)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}$  where  $b(\lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x, \lambda)$  and likewise for  $a$ . The mapping  $V \rightarrow \begin{pmatrix} a(x, \lambda) \\ b(x, \lambda) \end{pmatrix}$  is fully nonlinear. A Taylor-type expansion about  $V = 0$  gives the linearized expression

$$(41) \quad b(x, \lambda) = i \int_{-\infty}^x e^{2i\lambda y} V(y) dy \quad \text{plus higher-order terms.}$$

The question is whether  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x, \lambda)$  exists for almost every  $\lambda$ , for every  $V \in L^2(\mathbb{R})$ . By writing  $V = \widehat{f}$  we see that the linearization of this problem about  $V = 0$  is simply a restatement of Carleson's theorem. Thus the almost everywhere existence of these scattering coefficients, for general  $V \in L^2$ , is a nonlinear extension of the problem of almost everywhere convergence of Fourier integrals.

For  $1 < p < 2$ , this was proved [8] using an expansion of the mapping  $V \mapsto b(x, \lambda)$  as an infinite sum of multilinear expressions acting on  $V$ . However, Muscalu, Tao, and Thiele [25] have shown that even the first nonlinear expression in this series diverges for general  $V \in L^2$ , and the problem remains open despite an interesting positive result of those authors concerning a related model problem.

There is an almost identical problem for one-dimensional Schrödinger operators, with the added complication that a WKB-type phase correction must be incorporated [8].

**Multilinear maximal operators.** — The bilinear Hilbert transform is to the Hilbert transform as the following multilinear maximal operator is to the Hardy-Littlewood maximal function, which acts on functions  $f, g$  defined on  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{M}(f, g)(x) = \sup_{r>0} r^{-1} \int_{|t|\leq r} |f(x-t)g(x+t)| dt.$$

This operator obviously maps  $L^p \times L^q$  to weak  $L^1$  whenever  $1 < p, q$  and  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ , but a much deeper result of Lacey is that it maps  $L^p \times L^q$  to  $L^1$ . Despite the “positive” nature of the operator, the approach of Lacey relies on a combination of the machinery described in this article, with an inequality developed by Bourgain in his work on averages over subsequences in ergodic theory. Various extensions are known, but most variants of this inequality remain open, including for instance trilinear variants  $\sup_{r>0} r^{-1} \int_{|t|\leq r} |f(x-t)g(x+t)h(x+ct)| dt$ . See [15, 16] for recent work and references on this topic.

**Epilogue.** — There is a great more to be said, both about subsequent developments to which other authors have made important contributions, and about other types of multilinear operators which appear in contemporary analysis. Space-time inequalities prevent this author from discussing those matters here. I particularly regret having had to give short shrift to other authors’ contributions in order to discuss the themes chosen in the space allotted.

## REFERENCES

- [1] J. BOURGAIN – On the dimension of Kakeya sets and related maximal inequalities, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), no. 2, p. 256–282.
- [2] A. P. CALDERÓN – Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations., *Amer. J. Math.* **80** (1958), p. 16–36.
- [3] ———, Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **53** (1965), p. 1092–1099.
- [4] ———, Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), no. 4, p. 1324–1327.
- [5] A. P. CALDERÓN & A. ZYGMUND – On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* **88** (1952), p. 85–139.
- [6] L. CARLESON – On convergence and growth of partial sumas of Fourier series, *Acta Math.* **116** (1966), p. 135–157.
- [7] M. CHRIST – On certain elementary trilinear operators, *Math. Res. Lett.* **8** (2001), no. 1-2, p. 43–56.

- [8] M. CHRIST & A. KISELEV – WKB asymptotic behavior of almost all generalized eigenfunctions for one-dimensional Schrödinger operators with slowly decaying potentials, *J. Funct. Anal.* **179** (2001), no. 2, p. 426–447.
- [9] R. R. COIFMAN, A. MCINTOSH & Y. MEYER – L’intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes, *Ann. of Math. (2)* **116** (1982), no. 2, p. 361–387.
- [10] R. R. COIFMAN & Y. MEYER – *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque, vol. 57, Soc. Math. France, Paris, 1978.
- [11] ———, Le théorème de Calderón par les “méthodes de variable réelle”, in *Séminaire d’Analyse Harmonique 1978–1979*, Publ. Math. Orsay 79, vol. 7, Univ. Paris XI, Orsay, 1979, p. 49–55.
- [12] ———, *Ondelettes et opérateurs III. opérateurs multilinéaires*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1991.
- [13] G. DAVID & J.-L. JOURNÉ – A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, *Ann. of Math. (2)* **120** (1984), no. 2, p. 371–397.
- [14] P. DEIFT & R. KILLIP – On the absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with square summable potentials, *Comm. Math. Phys.* **203** (1999), no. 2, p. 341–347.
- [15] C. DEMETER, M. T. LACEY, T. TAO & C. THIELE – Breaking the duality in the return times theorem, preprint, [math.DS/0601455](#).
- [16] C. DEMETER, T. TAO & C. THIELE – Maximal multilinear operators, preprint, [math.CA/0510581](#).
- [17] C. FEFFERMAN – Pointwise convergence of Fourier series, *Ann. of Math. (2)* **98** (1973), p. 551–571.
- [18] J. B. GARNETT & P. W. JONES – BMO from dyadic BMO, *Pacific J. Math.* **99** (1982), no. 2, p. 351–371.
- [19] N. H. KATZ & T. TAO – Bounds on arithmetic projections, and applications to the Kakeya conjecture, *Math. Res. Lett.* **6** (1999), no. 5-6, p. 625–630.
- [20] A. W. KNAPP & E. M. STEIN – Intertwining operators for semisimple groups, *Ann. of Math. (2)* **93** (1971), p. 489–578.
- [21] M. T. LACEY & C. M. THIELE –  $L^p$  estimates on the bilinear Hilbert transform for  $2 \leq p \leq \infty$ , *Ann. of Math. (2)* **146** (1997), no. 3, p. 693–724.
- [22] ———, On Calderón’s conjecture, *Ann. of Math. (2)* **149** (1999), no. 2, p. 475–496.
- [23] ———, A proof of boundedness of the Carleson operator, *Math. Res. Lett.* **7** (2000), no. 4, p. 361–370.
- [24] C. MUSCALU, T. TAO & C. THIELE – Multi-linear operators given by singular multipliers, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), no. 2, p. 469–496.
- [25] ———, A counterexample to a multilinear endpoint question of Christ and Kiselev, *Math. Res. Lett.* **10** (2003), no. 2-3, p. 237–246.

- [26] F. NAZAROV, S. TREIL & A. VOLBERG – The  $Tb$ -theorem on non-homogeneous spaces, *Acta Math.* **190** (2003), no. 2, p. 151–239.
- [27] H. PAJOT – Capacité analytique et le problème de Painlevé, in *Séminaire Bourbaki (2003/2004)*, Astérisque, vol. 299, Soc. Math. France, Paris, 2005, exp. no. 936, p. 301–328.

Michael CHRIST

Department of Mathematics

University of California

Berkeley, CA 94720-3840 – U.S.A.

*E-mail* : `mchrist@math.berkeley.edu`



**SUR LES REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE  
DE LA SUPER ALGÈBRE DE LIE  $\mathfrak{gl}(m, n)$**   
[d'après Serganova]

par **Caroline GRUSON**

**INTRODUCTION**

Les représentations de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie sont sommes directes de leurs composantes irréductibles. Si on fixe une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  dans une algèbre de Lie simple et une représentation de dimension finie  $V$  de cette algèbre de Lie, les éléments de  $\mathfrak{h}$  agissent de manière simultanément diagonalisable dans  $V$  et les valeurs propres s'organisent en des formes linéaires sur  $\mathfrak{h}$ . Connaître ces formes linéaires, c'est-à-dire les *poids* de la représentation  $V$ , et leurs multiplicités revient à connaître  $V$  si  $V$  est irréductible sur l'algèbre de Lie initiale : c'est ce qu'on appelle le caractère de  $V$  et Hermann Weyl en a donné une formule générale, qui est une somme alternée indexée par le groupe de Weyl de la situation.

Les algèbres de Lie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduées (ou super algèbres de Lie) simples ont été classifiées par Victor Kac en 1977, [9]. Dans [8], Kac étudie la théorie des représentations de ces algèbres et, dans le cas de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ , il introduit les modules de Kac, qui sont de dimension finie et possèdent une formule des caractères analogue à la formule de Weyl. Malheureusement (?), la catégorie  $\mathcal{F}$  des représentations de  $\mathfrak{gl}(m, n)$  de dimension finie sur lesquelles une sous-algèbre de Cartan de la partie paire  $\mathfrak{gl}(m) \times \mathfrak{gl}(n)$  agit de manière diagonalisable n'est pas semi-simple : certaines représentations irréductibles, dites atypiques, ne sont pas scindées dans les représentations où elles apparaissent comme sous-quotients. Les autres représentations irréductibles, dites typiques, sont en fait des modules de Kac et on dispose donc d'une formule des caractères pour eux.

Le problème de trouver le caractère des représentations atypiques de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ , resté ouvert depuis 1977, étudié par Bernstein et Leites dans [2], a été résolu par Vera Serganova en 1996 ([12]). Chaque représentation irréductible atypique  $L$  est quotient propre d'un module de Kac  $V$ , et si on regarde une suite de Jordan-Hölder de ce module de Kac, on voit apparaître des représentations irréductibles atypiques, qui sont

dans la même composante connexe (ou dans le même bloc) de  $\mathcal{F}$  que  $L$  et  $V$ . Le premier théorème (théorème 2.2) explicite ces représentations irréductibles, qui sont en nombre fini. Le second théorème (théorème 2.3) exprime le caractère d'une représentation irréductible atypique comme une somme infinie, il est donc d'un maniement plus compliqué. Ce sont ces résultats qui sont exposés ici.

La difficulté principale du cas  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué provient du fait que le centre de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}(m, n))$  a une structure beaucoup plus compliquée que dans le cas classique. Sergeev, dans [15], donne une description de ce centre dans le cas de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ . Il s'agit des polynômes super symétriques. D'autre part,  $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}(m, n))$  intervient dans des questions de géométrie algébrique étudiées par Fulton et Pragacz dans [6]. On remarquera que les difficultés soulevées ressemblent beaucoup aux ennuis que l'on a quand on étudie les représentations des algèbres de Lie simples en caractéristique  $p$  (voir [7]). Plusieurs constructions établies par Serganova se font de manière analogue en caractéristique  $p$ , même si les conclusions sont assez différentes.

Notons que Jonathan Brundan fait un lien dans [4] entre certaines catégories de représentations du groupe quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$  et certaines catégories de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ -modules. Ses résultats répondent aux mêmes questions que ceux de Serganova, avec une approche très différente, mais ne simplifient pas, hélas, les difficultés calculatoires qu'on rencontre.

Le plan de ce texte est le suivant : dans les deux premières parties, je donne les définitions, les notations et les résultats nécessaires pour énoncer les deux principaux théorèmes de [12], et je traite des exemples. Les parties 3 et 4 contiennent des éléments de la démonstration de Vera Serganova, l'induction géométrique pour le paragraphe 3 et un principe de récurrence pour 4 ; elles sont basées sur les articles [14] et [12]. Pour terminer, au paragraphe 5, j'essaie de dépeindre l'état actuel du sujet, en particulier les résultats de [13] et [4].

À partir du paragraphe 3, je suppose que le lecteur a une certaine familiarité avec la théorie des représentations.

J'ai choisi de ne citer en bibliographie que les textes qui m'ont servi directement. L'article de Brundan ([4]) contient une bibliographie très bien faite sur le sujet.

Je suis très reconnaissante envers tous ceux avec lesquels j'ai discuté de ce texte, tout particulièrement Corinne Blondel, Michel Duflo, Laurent Gruson, Séverine Leidwanger, Jean-François Robinet et Jerzy Weyman.

Je remercie très chaleureusement Vera Serganova pour ses réponses claires et rapides à mes questions, pour sa relecture attentive de la présente rédaction et pour sa disponibilité et sa gentillesse pendant la préparation de cet exposé.

## 1. LE CONTEXTE : DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On définit la super algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m, n)$ ; elle est constituée des matrices  $(m+n) \times (m+n)$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , munies de la  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation suivante :

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}), D \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, B \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), C \in \text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \right\},$$

et du crochet de Lie défini sur les éléments homogènes  $u$  dans  $\mathfrak{g}_{p(u)}$  et  $v$  dans  $\mathfrak{g}_{p(v)}$  par :

$$[u, v] := uv - (-1)^{p(u)p(v)}vu$$

et prolongé par bilinéarité.

Ce crochet vérifie les axiomes des crochets de super algèbres de Lie (super antisymétrie et identité de Jacobi graduée : pour tous  $u, v, w$  homogènes dans  $\mathfrak{g}$ , on a  $[u, [v, w]] + (-1)^{p(u)(p(v)+p(w))}[v, [w, u]] + (-1)^{p(w)(p(u)+p(v))}[w, [u, v]] = 0$ ).

Le contexte étant  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué, on utilise une indéterminée  $\varepsilon$ , de carré 1, pour différencier les parties paires et impaires.

**DÉFINITION 1.1.** — Soit  $V = V_0 \oplus V_1$  un espace vectoriel  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué, de (super) dimension  $k + \varepsilon l$  (i.e. la dimension de la partie paire est  $k$  et la dimension de la partie impaire est  $l$ ); on notera  $\mathfrak{gl}(V)$  la super algèbre de Lie des endomorphismes gradués de  $V$  (qui est isomorphe à  $\mathfrak{gl}(k, l)$  par le choix d'une base homogène de  $V$ ).

On dira que  $V$  est un  **$\mathfrak{g}$ -module**, ou une **représentation** de  $\mathfrak{g}$ , si on s'est donné un morphisme de super algèbres de Lie  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

On dira que la représentation  $V$  est **irréductible** ou **simple** si elle ne contient aucune sous-représentation non triviale.

Soit  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$  constituée des matrices diagonales (remarquons que  $\mathfrak{h}$  contient le centre de dimension 1 de  $\mathfrak{g}$ ).

### Racines de $\mathfrak{g}$

L'ensemble des racines de  $\mathfrak{g}$  est par définition constitué de l'ensemble  $\Delta_0$  des racines (au sens de [3]) de  $\mathfrak{g}_0$  et de l'ensemble  $\Delta_1$  des poids de  $\mathfrak{g}_1$ , vu comme  $\mathfrak{g}_0$ -module.

Remarquons que l'on peut munir  $\mathfrak{g}$  d'une graduation sur  $\mathbb{Z}$ , compatible avec la structure de super algèbre de Lie, en posant :

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0,$$

$$\mathfrak{g}^{+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, C \in \text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \right\}.$$

Notons  $\mathfrak{b}_0$  la sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}_0$  formée des matrices triangulaires supérieures par blocs; alors  $\mathfrak{b} := \mathfrak{b}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$  est une *sous-algèbre de Borel* de  $\mathfrak{g}$  ce qui

permet, comme dans le cas classique, de séparer les racines de  $\mathfrak{g}$  en racines positives et négatives.

On note  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m+n}$  la base usuelle de  $\mathfrak{g}$  et  $(E_{i,j}^*)_{1 \leq i,j \leq m+n}$  la base duale. On appelle *super trace* la forme linéaire  $Str = E_{1,1}^* + \dots + E_{m,m}^* - E_{m+1,m+1}^* - \dots - E_{m+n,m+n}^*$ . Elle est  $\mathfrak{g}$ -invariante, et permet de définir une forme bilinéaire  $\mathfrak{g}$ -invariante non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$  par  $B(u,v) := Str(v.u)$  pour  $u$  et  $v$  dans  $\mathfrak{g}$ . Sa restriction à  $\mathfrak{h}$  est encore non dégénérée et on note  $\langle ; \rangle$  le produit scalaire sur  $\mathfrak{h}^*$  qui s'en déduit.

Si on note  $\varepsilon_i$  (resp.  $\delta_j$ ) l'élément  $E_{i,i}^*$  (resp.  $E_{m+j,m+j}^*$ ) de  $\mathfrak{g}^*$ , alors les  $\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , et les  $\delta_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , forment une base de  $\mathfrak{h}^*$  et on a  $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $\langle \delta_i, \delta_j \rangle = -\delta_{ij}$  et  $\langle \varepsilon_i, \delta_j \rangle = 0$ . On pose :

$$\Delta_0^+ = \{(\varepsilon_i - \varepsilon_j), 1 \leq i < j \leq m\} \cup \{(\delta_i - \delta_j), 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$\Delta_1^+ = \{(\varepsilon_i - \delta_j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

avec  $\Delta_0 = \Delta_0^+ \cup -\Delta_0^+$  et  $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup -\Delta_1^+$ . Remarquons que toutes les racines de  $\Delta_1$ , qu'on appelle racines *impaires*, sont isotropes. Les racines de  $\Delta_0$  sont dites *paires*.

Enfin, on notera  $W$  le groupe de Weyl de  $\mathfrak{g}_0$ , identifié au produit de groupes symétriques  $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ .

### Modules et poids

On étudie ici les  $\mathfrak{g}$ -modules dans lesquels la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  agit de manière diagonalisable. Tout  $\mathfrak{g}$ -module est un  $\mathfrak{g}_0$ -module, par restriction. Les  $\mathfrak{g}$ -modules de dimension finie ont des *poids*, qui correspondent aux valeurs propres de  $\mathfrak{h}$  agissant sur ceux-ci. Ce sont des éléments de  $\mathfrak{h}^*$ .

Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ; on dit que  $\lambda$  est un *poids entier* si les coordonnées de  $\lambda$  dans la base ci-dessus sont entières (ce qui implique que  $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall \alpha \in \Delta_0$ ), et on note  $P$  l'ensemble des poids entiers.

On pose  $\rho = \frac{1}{2}(\sum_{\alpha \in \Delta_0^+} \alpha - \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} \alpha)$ . On a

$$\rho = \frac{1}{2}((m-n-1)\varepsilon_1 + (m-n-3)\varepsilon_2 + \dots + (-m-n+1)\varepsilon_m +$$

$$+ (m+n-1)\delta_1 + (m+n-3)\delta_2 + \dots + (m-n+1)\delta_n)$$

et, pour toute racine paire  $\alpha$ , on pose  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ . On dira que  $\lambda$  est un *poids dominant* si  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \alpha \in \Delta_0^+$ . On note  $P^+$  l'ensemble des poids dominants.

Si  $\lambda = a_1\varepsilon_1 + \dots + a_m\varepsilon_m + b_1\delta_1 + \dots + b_n\delta_n$ , on a :

$$\lambda \in P^+ \Leftrightarrow \lambda \in P \text{ et } a_1 \geq \dots \geq a_m, b_1 \geq \dots \geq b_n.$$

De plus, si  $\lambda \in P^+$ , on a alors  $\lambda + \rho = x_1\varepsilon_1 + \dots + x_m\varepsilon_m + y_1\delta_1 + \dots + y_n\delta_n$  avec  $x_1 > \dots > x_m$ ,  $x_{i+1} - x_i \in \mathbb{Z}$  et  $y_1 > \dots > y_n$ ,  $y_{i+1} - y_i \in \mathbb{Z}$ .

On dispose par ailleurs d'un *ordre partiel* sur les poids entiers défini par : si  $\lambda$  et  $\mu$  sont dans  $P$ , on dit que  $\lambda \geq \mu$  si  $\lambda - \mu$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{N}$ ,  $\sum_{\alpha_k \in \Delta_0^+ \cup \Delta_1^+} n_k \alpha_k$ .

*Remarque 1.2.* — La catégorie des  $\mathfrak{g}$ -modules  $\mathfrak{h}$ -diagonalisables de dimension finie,  $\mathcal{F}$ , munie des morphismes de  $\mathfrak{g}$ -modules de degré 0, est abélienne mais n'est pas semi-simple, contrairement à la catégorie correspondante pour  $\mathfrak{g}_0$ . D'autre part, un  $\mathfrak{g}$ -module irréductible  $V$  de  $\mathcal{F}$  a un *plus haut poids*, c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in P^+$  tel que, pour tout poids  $\mu$  de  $V$ , on a  $\lambda \geq \mu$ .

### Algèbre enveloppante et caractère infinitésimal

Comme dans le cas classique (voir [5]), on dispose de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , d'un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, et du centre  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Contrairement à ce dont nous avons l'habitude,  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  n'est plus un anneau de polynômes. L'article [15] donne une description complète de la structure de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ . Par le lemme de Schur, si  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module irréductible de dimension finie, tout élément  $z$  de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  agit par un scalaire  $z(V)$  sur  $V$  et on peut donc définir le *caractère infinitésimal* associé à  $V$  sur  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  :

$$\chi_V : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z(V).$$

De même, si  $V$  est un module indécomposable avec plus haut poids (par exemple un module de Kac ou un module de Verma, voir les définitions dans l'alinéa suivant), tout élément  $z$  de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  agit par un scalaire sur  $V$  et  $\chi_V$  est bien défini.

### Construction de modules de plus haut poids

Soit  $\lambda \in P$ . On construit le *module de Verma*  $M_\lambda$  de plus haut poids  $\lambda$  : soit  $\mathbb{C}_\lambda$  le caractère de  $\mathfrak{b}$  qui étend trivialement le caractère  $\lambda$  de  $\mathfrak{h}$ . On pose :

$$M_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \mathbb{C}_\lambda.$$

C'est un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension infinie qui admet un unique sous-module maximal, il est donc indécomposable. On note  $L_\lambda$  son unique quotient simple, c'est le  *$\mathfrak{g}$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$* , on démontre ([8]) que  $L_\lambda$  est de dimension finie si et seulement si  $\lambda \in P^+$ .

Remarquons maintenant que, si  $\lambda \in P^+$ , alors il existe un  $\mathfrak{g}_0$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$  et de dimension finie, que nous noterons  $L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$ . On étend trivialement l'action à  $\mathfrak{g}^{+1}$ , ce qui nous donne un  $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$ -module de dimension finie. On fait enfin une induction en posant :

$$V_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} L_\lambda(\mathfrak{g}_0).$$

Or l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}^{-1}$  est isomorphe, comme  $\mathbb{C}$ -algèbre, à l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathfrak{g}^{-1}$ . En faisant cette induction, on obtient donc un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension finie  $V_\lambda$  indécomposable qui s'appelle le *module de Kac* de plus haut poids  $\lambda$ . Le module simple  $L_\lambda$  est un quotient de  $V_\lambda$ .

### Modules typiques et atypiques

Rappelons que, dans le cas classique, si  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie réductive et si on a choisi  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$  une sous-algèbre de Cartan contenue dans une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{a}$ , soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux poids entiers ; notons  $\chi_\lambda$  le caractère infinitésimal associé au

$\mathfrak{a}$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$ ,  $W$  le groupe de Weyl de la situation et  $\rho$  la demi-somme des racines positives. On a :

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \iff \exists w \in W \text{ t.q. } \mu = w(\lambda + \rho) - \rho.$$

Revenons à  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m, n)$ , en gardant la notation  $\chi_\lambda$  pour le caractère infinitésimal associé au module simple de plus haut poids  $\lambda$ ,  $L_\lambda$ .

On introduit une relation d'équivalence sur l'ensemble des poids entiers  $P$  :

$$\lambda \sim \mu \iff \chi_\lambda = \chi_\mu.$$

DEFINITION-PROPOSITION 1.3. — Soit  $\lambda \in P^+$ .

i) Si pour toute racine  $\alpha$  dans  $\Delta_1^+$ , on a  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \neq 0$ , alors  $\lambda$  (et le module simple  $L_\lambda$ ) est dit **typique**. Pour tout  $\mu$ , on a alors

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \iff \exists w \in W \text{ t.q. } \mu = w(\lambda + \rho) - \rho.$$

ii) Si il existe  $\alpha$  dans  $\Delta_1^+$  telle que  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$ , alors  $\lambda$  (et le module simple  $L_\lambda$ ) est dit **atypique** et on a, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\chi_\lambda = \chi_{\lambda+k\alpha}$ .

DÉFINITION 1.4. — Soit  $\lambda$  un poids dominant atypique. On appelle **degré d'atypie** de  $\lambda$  et on note  $\#\lambda$  le cardinal de l'ensemble  $A(\lambda)$  suivant :

$$A(\lambda) := \{\alpha \in \Delta_1^+, \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0\}.$$

Remarquons que  $A(\lambda)$  est constitué de racines deux à deux orthogonales et indépendantes, ce qui fait que  $\#\lambda \leq \inf(m, n)$ .

Si  $\lambda$  est typique, l'ensemble  $A(\lambda)$  est vide et on pose  $\#\lambda = 0$ .

PROPOSITION 1.5. — Soit  $\lambda$  un poids dominant atypique, soit  $\mu$  dans  $P$ . On a

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \iff \lambda \sim \mu$$

$$\lambda \sim \mu \iff \lambda \sim' \mu,$$

où  $\sim'$  est la relation d'équivalence engendrée par :

i)  $\lambda \sim' \mu$  si  $\exists w \in W$  t.q.  $\mu = w(\lambda + \rho) - \rho$ ,

ii) Soit  $\alpha \in \Delta_1^+$  tel que  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$ ; alors  $\mu = \lambda + \alpha$  vérifie  $\lambda \sim' \mu$ .

De plus, si  $\lambda \sim' \mu$  et si  $\mu$  est dominant, alors  $\#\lambda = \#\mu$ .

Ceci justifie la définition plus générale suivante :

DÉFINITION 1.6. — Soit  $\mu \in P$ ; on dira que  $\mu$  est atypique de degré d'atypie  $\#\mu$  s'il existe  $\lambda$  dans  $P^+$  atypique de degré d'atypie  $\#\mu$  tel que  $\lambda \sim \mu$ .

PROPOSITION 1.7. — Soit  $\lambda \in P^+$ ,  $\lambda$  typique. Alors le module de Kac  $V_\lambda$  est égal au module simple  $L_\lambda$ .

Remarque 1.8. — Les modules de Kac étant des modules induits à partir de  $\mathfrak{g}_0$ -modules, on calcule aisément leur décomposition en  $\mathfrak{h}$ -modules irréductibles (ce qu'on appelle leur *caractère*), donc le caractère des modules simples typiques est connu ([8]).

### Blocs de $\mathcal{F}$

La catégorie  $\mathcal{F}$  se décompose en composantes connexes, les *blocs* de  $\mathcal{F}$ . Dans [13], Serganova montre que chaque bloc correspond à une valeur du caractère infinitésimal  $\chi_\lambda$ . Les modules typiques forment donc chacun un bloc, et si  $\lambda$  est un poids atypique, tous les modules de dimension finie dont le caractère infinitésimal est  $\chi_\lambda$  sont dans le même bloc que le module simple  $L_\lambda$ . Elle montre de plus que si le degré d'atypie de  $\lambda$  est égal à  $k$ , alors le bloc est équivalent au bloc maximale atypique de  $\mathfrak{gl}(k, k)$  (c'est-à-dire l'unique bloc contenant les modules simples de degré d'atypie égal à  $k$ ; l'unicité de ce bloc est montrée dans [13]). Les modules de Kac étant indécomposables, tous les quotients simples d'une suite de Jordan-Hölder d'un module de Kac  $V$  sont dans le même bloc que  $V$ .

## 2. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS ET EXEMPLES

Soit  $\lambda$  un poids dominant atypique. On garde les notations du premier paragraphe.

On veut trouver les quotients simples d'une suite de Jordan-Hölder du module de Kac  $V_\lambda$ . On utilise pour ce faire des opérateurs définis dans le  $\mathbb{Z}$ -module libre  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  ayant pour base les classes d'isomorphismes  $[L_\mu]$  de  $\mathfrak{g}$ -modules simples  $\mathfrak{h}$ -diagonalisables de dimension finie (c'est le *groupe de Grothendieck* de la catégorie  $\mathcal{F}$ ). Soit  $q$  une indéterminée. Si  $V = V_0 \oplus V_1$  est un super espace vectoriel de dimension  $m + \varepsilon n$ , on note  $V^\Pi$  le super espace vectoriel  $(V^\Pi)_0 \oplus (V^\Pi)_1$  avec  $(V^\Pi)_0 = V_1$  et  $(V^\Pi)_1 = V_0$ , et on pose, pour tout  $V$  dans  $\mathcal{F}$ ,  $\varepsilon V = V^\Pi$ . C'est un opérateur dont le carré vaut l'identité.

Soit  $\mathcal{H}$  le  $\mathbb{C}[q, \varepsilon]$ -module libre ayant pour base des éléments  $T_\lambda$ , où  $\lambda$  parcourt l'ensemble des poids entiers,  $P$ .

**DÉFINITION 2.1.** — *Soit  $\alpha$  une racine impaire positive. On définit un opérateur  $\sigma_\alpha$  sur  $\mathcal{H}$  par les axiomes suivants :*

i)  $\sigma_\alpha(T_\lambda) = 0$  si  $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ .

ii) Si  $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$ ,

$$\sigma_\alpha(T_\lambda) = \varepsilon [q^{l(\lambda, \alpha) - 1} \sigma_\alpha(T_{\lambda - \alpha})]_+ + \varepsilon q T_{\lambda - \alpha},$$

où  $[ ]_+$  désigne la partie polynomiale en  $q$  de degré strictement positif et  $l(\lambda, \alpha) = rk(W_{\lambda - \alpha}) - rk(W_{\lambda - \alpha} \cap W_\lambda)$ , où  $rk(W_\mu)$  désigne le rang (comme groupe de Coxeter) du stabilisateur de  $\mu$  dans  $W$ .

iii) Si  $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$  et si  $\lambda$  et  $-\alpha$  sont dans la même chambre (dans le même domaine fondamental pour l'action de  $W$ ), alors  $\sigma_\alpha(T_\lambda) = \varepsilon q T_{\lambda - \alpha}$ .

On obtient ainsi les  $\sigma_\alpha$  par récurrence. Leur définition est directement liée à la démonstration des théorèmes, comme on le voit en analysant l'énoncé du théorème 4.3 de ce texte. Nous donnerons un peu plus loin un algorithme permettant de les calculer.

On définit ensuite des opérateurs  $\tilde{s}_\alpha$  et  $s_\alpha$  de  $\mathbb{C}[q] \otimes \mathcal{K}[\mathcal{F}]$  et de  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  respectivement : on définit d’abord l’opérateur  $\mathbb{C}[q, \varepsilon]$ -linéaire  $\Xi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}[q] \otimes \mathcal{K}[\mathcal{F}]$  tel que  $\Xi(T_\lambda) = [L_{\tilde{\lambda}-\rho}]$  (où  $\tilde{\lambda}$  est un représentant dans  $P^+$  de la  $W$ -orbite de  $\lambda$ ) si  $\tilde{\lambda} - \rho \in P^+$ , et  $\Xi(T_\lambda) = 0$  si  $\tilde{\lambda} - \rho \notin P^+$ .

On pose :  $\tilde{s}_\alpha[L_\lambda] = \Xi(\sigma_\alpha(T_{\lambda+\rho}))$ , l’opérateur  $s_\alpha$  étant alors obtenu en évaluant  $\tilde{s}_\alpha$  en  $q = -1$ .

THÉORÈME 2.2. — *On a la relation suivante dans l’anneau de Grothendieck  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  :*

$$[V_\lambda] = \left( \prod_{\alpha \in \Delta_1^+}^{\leftarrow} (1 - s_\alpha) \right) [L_\lambda],$$

où l’ordre du produit est compatible avec l’ordre partiel  $\geq$  sur  $\Delta_1^+$ .

On connaît donc les modules simples qui interviennent dans les suites de Jordan-Hölder des modules de Kac. De plus, on a une égalité de  $\mathfrak{g}_0$ -modules entre la somme directe des modules en question et le module de Kac.

On note  $Ch(\mathcal{F})$  l’anneau des caractères de la catégorie  $\mathcal{F}$  : on le considère comme un sous-anneau de  $\mathbb{Z}[\varepsilon, \{e^\mu\}_{\mu \in P}]$ . En effet, le caractère d’un  $\mathfrak{g}$ -module  $V = V_0 \oplus V_1$  est  $Ch(V) = \sum (m_i e^{\mu_i} + \varepsilon n_j e^{\nu_j})$  où  $\mu_i$  parcourt les poids de  $V_0$  (avec multiplicité  $m_i$ ) et  $\nu_j$  parcourt les poids de  $V_1$  (avec multiplicité  $n_j$ ).

On a vu que le caractère du module de Kac  $V_\lambda$  est connu car il s’agit d’un module induit. On a la formule suivante :

$$Ch(V_\lambda) = Ch(L_\lambda(\mathfrak{g}_0)) \prod_{\alpha \in \Delta_1^+} (1 + \varepsilon e^{-\alpha}).$$

Soit maintenant l’application  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ -linéaire de  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  dans  $Ch(\mathcal{F})$ ,  $\psi$ , telle que  $\psi[L_\lambda] := Ch(V_\lambda)$ , qui à une classe d’isomorphisme de modules simples de plus haut poids  $\lambda$  associe le caractère du module de Kac de plus haut poids  $\lambda$ . On a le

THÉORÈME 2.3. — *Soit  $\lambda$  un poids dominant ; on a :*

$$Ch(L_\lambda) = \psi \left( \left( \prod_{\alpha \in \Delta_1^+}^{\rightarrow} (1 - s_\alpha)^{-1} \right) [L_\lambda] \right),$$

où l’ordre du produit est compatible avec l’ordre partiel  $\leq$  sur  $\Delta_1^+$ .

**Exemples**

Le théorème 2.3 correspond à une inversion formelle dans la formule du théorème 2.2 ; la formule fait apparaître des sommes infinies, car  $(1 - s_\alpha)^{-1} = 1 + s_\alpha + s_\alpha^2 + \dots$ . Elle n’aide donc pas beaucoup au calcul effectif du caractère d’un module simple atypique donné.

Le théorème 2.2 est plus accessible au calcul ; Vera Serganova donne un algorithme pour le calcul des  $s_\alpha$  ([12], remarque 2.5) qui se déduit de l’énoncé du théorème. Je vais décrire cet algorithme en utilisant des diagrammes de partitions pour un poids



maximalement atypique (de degré d'atypie  $k$ ) dans  $\mathfrak{gl}(k, k)$  pour un entier  $k \geq 2$ . On peut toujours se ramener à cette situation-là d'après le dernier alinéa du paragraphe 1.

Dans les notations précédentes, un tel poids s'écrit  $\lambda = a_1\varepsilon_1 + \dots + a_k\varepsilon_k + b_1\delta_1 + \dots + b_k\delta_k$  et on peut supposer qu'on a les relations  $a_i = -b_{k+1-i}$  pour  $1 \leq i \leq k$ , de sorte que les racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  telles que  $\langle \lambda + \rho, \alpha_i \rangle = 0$  sont les  $\alpha_i := \varepsilon_{k+1-i} - \delta_i$  (on a  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$ , ce qui fait que l'ordre du produit dans le théorème 2.2 est  $(1 - s_{\alpha_k}) \dots (1 - s_{\alpha_1})$ ). Pour éviter les lourdeurs de notations, on note  $\lambda = (a_1, \dots, a_k)$ .

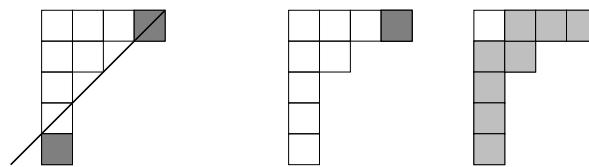
Comme  $\lambda$  est dominant, on a  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ . Notons  $D_\lambda$  le diagramme obtenu en mettant  $a_i$  cases dans la  $i$ -ième ligne (avec la notation anglaise). Comme les  $a_i$  ne sont pas supposés positifs, on considère qu'on peut ajouter autant de colonnes qu'on veut à gauche du diagramme.

Pour calculer  $s_{\alpha_k}$ , (ou plus exactement  $-s_{\alpha_k}$ ) on fait la chose suivante : soit  $\Delta$  l'antidiagonale issue de la case  $C_1$  en haut à droite de  $D_\lambda$ . On regarde toutes les cases  $C_j$  qui sont à droite (au sens large) de cette antidiagonale, à droite de leur horizontale, en bas de leur verticale (les cases Sud-Est sous l'antidiagonale  $\Delta$ ) et telles que la parallèle à  $\Delta$  issue de  $C_j$  est au-dessous (au sens large) de toutes les cases Sud-Est apparues avant  $C_j$ . Elles correspondent à des lignes  $i_1, \dots, i_r$  de  $D_\lambda$ , la ligne  $i_j$  contenant  $a_{i_j}$  cases (dont  $C_j$  est la dernière). On en déduit  $r$  nouveaux diagrammes  $D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_r}$ , où  $D_{\lambda_j}$  est obtenu en retirant à  $D_\lambda$  la bordure reliant la case  $C_j$  à la case  $C_1$ . Cela nous donne  $r$  nouveaux poids  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  et on calcule

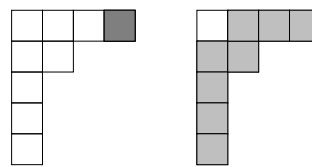
$$-s_{\alpha_k}[L_\lambda] = \sum_{j=1}^r (-\varepsilon)^{a_{i_j} - a_1 + i_j - 1} [L_{\lambda_j}]$$

(le nombre  $a_{i_j} - a_1 + i_j - 1$  est la distance de la case  $C_j$  à  $\Delta$ ).

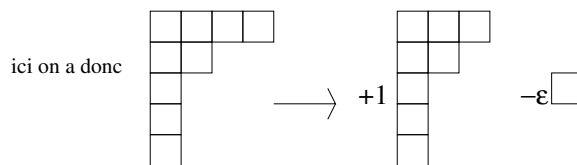
Exemple pour le poids  $\lambda = (4, 2, 1, 1, 1)$  :



étape 1



les bordures



ici on a donc

Pour calculer  $s_{\alpha_{k-i}}$ , on refait la même chose en oubliant les  $i - 1$  premières lignes de  $D_\lambda$ .

Si par chance  $\lambda$  est tel que, pour tout  $i$ ,  $a_i - a_{i+1} \geq 2$ , alors les opérations sur le diagramme sont triviales et on obtient la belle formule suivante :

$$[V_\lambda] = [L_\lambda] + \varepsilon \sum_{1 \leq i \leq k} [L_{\lambda - \alpha_i}] + \sum_{1 \leq i < j \leq k} [L_{\lambda - \alpha_i - \alpha_j}] + \cdots + \varepsilon^k [L_{\lambda - \sum_{i=1}^k \alpha_i}].$$

Ces poids sont « loin des murs », ils ont un comportement régulier qu'on peut considérer comme admirable...

Dès qu'on s'approche des murs (i.e. quand un  $a_i - a_{i+1}$  est égal à 0 ou 1), les calculs se compliquent fortement, des signes font leur apparition et le nombre de termes peut croître beaucoup.

L'exemple 2.6 de [12] consiste à faire tous les calculs pour le module trivial de  $\mathfrak{gl}(3, 3)$ ,  $\lambda = (0, 0, 0)$ , on trouve (après des calculs où interviennent 14 modules!!!) un résultat plutôt élégant :

$$[V_{(0,0,0)}] = [L_{(0,0,0)}] + \varepsilon[L_{(0,0,-1)}] + [L_{(0,-2,-2)}] + \varepsilon[L_{(-3,-3,-3)}].$$

Plus généralement, on trouve pour le module trivial de  $\mathfrak{gl}(k, k)$  :

$$[V_{(0,\dots,0)}] = \sum_{i=0}^k [L_{-i \sum_{j=1}^i \alpha_j}].$$

### 3. INDUCTION GÉOMÉTRIQUE

Soit  $\mathcal{F}^{free}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  constituée des modules qui sont libres comme  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{-1})$ -modules : par construction, les modules de Kac sont dans  $\mathcal{F}^{free}$ . On montre facilement que tout module de  $\mathcal{F}^{free}$  admet une filtration finie dont les quotients successifs sont des modules de Kac, qui, comme dans une suite de Jordan-Hölder, sont uniquement déterminés à l'ordre près. On démontre de plus que tout module  $M$  de  $\mathcal{F}$  admet une résolution par des modules de  $\mathcal{F}^{free}$ , et cette résolution est de longueur finie si et seulement si  $M \in Ob(\mathcal{F}^{free})$ . En particulier, les  $\mathfrak{g}$ -modules simples  $L_\lambda$  de  $\mathcal{F}$  ont une résolution dans  $\mathcal{F}^{free}$  qui est de longueur infinie quand  $\lambda$  est un poids atypique. On peut choisir la résolution de  $L_\lambda$  de sorte que le premier terme soit le module de Kac  $V_\lambda$  ; on a ainsi :

$$\cdots \rightarrow M_i \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow V_\lambda \rightarrow L_\lambda \rightarrow 0$$

et de plus (c'est le lemme 1.14 de [12]), en désignant par  $[M_i : V_\mu]$  la multiplicité du module de Kac  $V_\mu$  dans une  $\mathcal{F}^{free}$ -filtration de  $M_i$ , si  $i > 0$ ,  $[M_i : V_\mu] \neq 0$  impose  $\mu < \lambda$  et  $\chi_\mu = \chi_\lambda$ .

Ceci signifie qu'on peut choisir la résolution de  $L_\lambda$  dans le bloc de  $L_\lambda$ .

Serganova introduit un opérateur  $\mathbb{Z}[q]$ -linéaire de  $\mathcal{K}[\mathcal{F}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q]$ ,  $\mathbf{U}(q)$ , dont elle donne deux définitions (elle démontre dans [14] qu'elles sont équivalentes).

**Première définition de  $\mathbf{U}(q)$** 

Soit  $\mathfrak{p}$  la sous-algèbre parabolique maximale de  $\mathfrak{g}$  obtenue en annulant toutes les coordonnées non diagonales de la première colonne. On note  $\mathfrak{g}(m-1, n)$  la sous super algèbre de Lie de  $\mathfrak{p}$  obtenue en annulant toutes les coordonnées non diagonales de la première ligne. C'est une sous super algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  qui est isomorphe à  $\mathfrak{gl}(m-1, n) \oplus \mathbb{C}\varepsilon_1$ ; elle a donc un centre de dimension deux.

Soit  $t$  un entier. Soit  $M \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ , soit  $M^t$  le sous-espace vectoriel de  $M$  engendré par les vecteurs de poids  $\mu$  avec  $\langle \mu, \varepsilon_1 \rangle \geq t$ : c'est un sous- $\mathfrak{p}$ -module de  $M$  et on note  $U_t(M)$  le quotient de  $M$  par le  $\mathfrak{g}$ -module engendré par  $M^t$ . Ceci définit un foncteur  $U_t$  de la catégorie  $\mathcal{F}$  dans elle-même qui est exact à droite ([12], lemme 4.3), ce qui fait qu'on peut considérer la suite  $(U_t)_i, i \geq 1$  de ses foncteurs dérivés à gauche.

**DÉFINITION 3.1.** — *L'opérateur  $\mathbf{U}(q)$  associe au module simple de plus haut poids  $\lambda$  dans  $P^+$  la somme formelle*

$$\sum_{i \geq 1} q^i [(U_t)_i(L_\lambda)],$$

où  $t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle$ .

On démontre (cf. [14]) que cette somme définit un polynôme en  $q$  sur  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ .

*Remarque 3.2.* — On montre que le foncteur  $U_t$  est exact dans  $\mathcal{F}^{free}$ , ce qui fait que, si  $V \in \text{Ob}(\mathcal{F})$  et si

$$\cdots \rightarrow M_i \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow V \rightarrow 0$$

est une résolution de  $V$  par des modules de  $\mathcal{F}^{free}$ , on a  $(U_t)_i(V) = H_i(U_t(M_\bullet))$ . Dans [12], toutes les notations sont cohomologiques, ce qui rend parfois l'interprétation hasardeuse. J'ai pris la liberté de descendre les indices pour comprendre.

**Seconde définition de  $\mathbf{U}(q)$** 

Soit  $(G, \mathcal{O}_G)$  le super groupe algébrique complexe  $GL(m, n)$ : sa super algèbre de Lie est  $\mathfrak{g}$ ; les points  $G_0$  de  $G$  sont les éléments de  $GL(m, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$  et l'algèbre de Hopf  $\mathcal{O}_G$  est isomorphe à l'algèbre (super) symétrique de  $\mathfrak{g}$ , localisée en  $\det|_{\mathfrak{g}_0}$ , la restriction du déterminant à la partie paire.

Soit  $(P, \mathcal{O}_P)$  le sous super groupe de  $(G, \mathcal{O}_G)$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$ : c'est le sous super groupe fermé de  $(G, \mathcal{O}_G)$  qui fixe le premier vecteur de base de  $\mathbb{C}^m$  à homothéties près. On note  $P_0$  les points de  $P$ . Comme  $P$  est fermé dans  $G$ , il existe une structure de super variété algébrique sur le quotient  $G/P$  notée  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Les points de cette super variété sont les points de l'espace projectif  $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ , qu'on notera aussi parfois  $G_0/P_0$ , et les fonctions constituent l'algèbre extérieure de  $\mathbb{C}^n \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m-1}}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m-1}}(-1)$  où  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m-1}}$  désigne l'anneau des fonctions régulières (au sens non gradué) sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ .

Soit  $V$  un  $(P, \mathcal{O}_P)$ -module de dimension finie (il se dérive en un  $\mathfrak{p}$ -module). On construit, de la manière habituelle ([7], I.5.8), un super fibré vectoriel  $\mathbf{V}$  sur  $X$ , dont on note  $\mathcal{O}_V$  le faisceau des sections, sur lequel le super groupe  $(G, \mathcal{O}_G)$  agit de manière

équivariante. On note  $H^i(\mathcal{O}_V)$  le  $i$ -ième groupe de cohomologie de ce faisceau ; c'est un  $(G, \mathcal{O}_G)$ -module de dimension finie, qui se dérive en un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension finie que l'on note de la même manière.

PROPOSITION 3.3. — Soit  $\lambda$  un poids dominant de  $\mathfrak{g}$ .

i) On note  $V_\lambda(\mathfrak{p})$  le  $\mathfrak{g}(m-1, n)$ -module de Kac de plus haut poids  $\lambda$  étendu à  $\mathfrak{p}$  et  $V_\lambda$  le  $\mathfrak{g}$ -module de Kac de plus haut poids  $\lambda$ . On a alors :

$$H^i(\mathcal{O}_{V_\lambda(\mathfrak{p})^*}) = 0, \quad \forall i > 0,$$

$$H^0(\mathcal{O}_{V_\lambda(\mathfrak{p})^*}) = V_\lambda^*.$$

ii) On note  $L_\lambda(\mathfrak{p})$  le  $\mathfrak{g}(m-1, n)$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$  étendu à  $\mathfrak{p}$  et  $L_\lambda$  le  $\mathfrak{g}$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$ . On a alors :

$$H^i(\mathcal{O}_{L_\lambda(\mathfrak{p})^*}) = ((U_t)_{i+1}(L_\lambda))^* \text{ où } t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle \text{ si } i > 0,$$

et une suite exacte :

$$0 \rightarrow (U_t)_1(L_\lambda) \rightarrow (H^0(\mathcal{O}_{L_\lambda(\mathfrak{p})^*}))^* \rightarrow L_\lambda \rightarrow 0.$$

Remarque 3.4. — Cette proposition montre que la somme formelle de la définition 3.1 de  $\mathbf{U}(q)$  est bien un polynôme en  $q$  sur  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$  puisqu'elle porte sur un nombre fini de termes.

COROLLAIRE 3.5. — Soit  $\lambda$  un poids dominant, on a l'égalité suivante dans  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  :

$$[L_\lambda] - \mathbf{U}(-1)[L_\lambda] = Eu((\mathcal{O}_{L_\lambda(\mathfrak{p})^*})^*),$$

où  $Eu$  désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

### Lien avec la formule des caractères

Serganova introduit dans [14] des polynômes en la variable  $q$  présentant des analogies avec les polynômes de Kazhdan-Lusztig tels qu'ils apparaissent dans l'étude de la catégorie  $\mathcal{O}$  de [1] dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple complexe.

DÉFINITION 3.6. — Soit  $\lambda$  un poids dominant. Considérons le complexe de Koszul  $S^\bullet(\mathfrak{g}^{-1}) \otimes L_\lambda$  ; soit  $\mu \in P^+$ . On pose :

$$K_{\lambda, \mu}(q) := \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(\mathfrak{g}^{-1}, L_\lambda))_\mu q^i,$$

où  $(H_i(\mathfrak{g}^{-1}, L_\lambda))_\mu$  désigne la composante  $\mathfrak{g}_0$ -isotypique de poids  $\mu$  de  $H_i(\mathfrak{g}^{-1}, L_\lambda)$ . On appelle  $K_{\lambda, \mu}$  le **polynôme de Kazhdan-Lusztig associé à  $\lambda$  et  $\mu$** .

Remarque 3.7. — La série formelle qui définit  $K_{\lambda, \mu}$  est un polynôme car, pour  $i$  assez grand, le poids  $\mu$  n'apparaît pas dans  $S^i(\mathfrak{g}^{-1}) \otimes L_\lambda$ .

Remarque 3.8. — Soient  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $P^+$  ; on a :

$$K_{\lambda, \lambda} = 1,$$

$$K_{\lambda, \mu} \neq 0 \Rightarrow \mu \leq \lambda \text{ et } \chi_\lambda = \chi_\mu.$$

Attention, il peut y avoir des suites infinies décroissantes de poids ayant même caractère infinitésimal qui restent dans  $P^+$ , par exemple, pour  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\lambda_k = -k\varepsilon_m + k\delta_1$ .

Vera Serganova aimerait beaucoup avoir une méthode théorique de calcul de ces polynômes, mais elle ne sait pour le moment le faire que pour  $q = -1$  (c'est une des raisons pour lesquelles j'ai dit dans le résumé que la compréhension de la structure des blocs de la catégorie  $\mathcal{F}$  est presque complète).

La démonstration du lemme qui suit (numéroté 3.4 dans [12]) est une adaptation d'arguments de la théorie de Bernstein-Gelfand-Gelfand [1].

LEMME 3.9. — Soit  $\lambda$  un poids dominant ; on a l'égalité suivante dans  $\tilde{\mathcal{K}}[\mathcal{F}]$  (où  $\tilde{\mathcal{K}}[\mathcal{F}]$  est un complété convenable de  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$ , voir [12], p. 622) :

$$[L_\lambda] = \sum_{\mu \in P^+} K_{\lambda, \mu}(-1)[V_\mu],$$

ce qui donne le caractère de  $L_\lambda$  si les valeurs en  $-1$  des polynômes de Kazhdan-Lusztig sont connues.

Notons  $\mathbf{K}$  la matrice (infinie) constituée des  $K_{\lambda, \mu}(-1)$  : elle est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. D'après ce qui précède, son inverse calcule les multiplicités des modules simples  $[L_\mu]$  dans une suite de Jordan-Hölder d'un module de Kac  $[V_\lambda]$ .

Notons  $\mathbf{U}$  l'opérateur  $\mathbf{U}(q)$  de la définition 3.1 pris en  $q = -1$ . Si on désigne par  $\mathbf{K}[\mathfrak{g}(m-1, n)]$  l'analogue de la matrice  $\mathbf{K}$  pour l'algèbre  $\mathfrak{g}(m-1, n)$  contenue dans  $\mathfrak{p}$ , on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3.10. — On a l'égalité de matrices :

$$\mathbf{K}[\mathfrak{g}(m-1, n)] = \mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{U}.$$

Ce résultat permet de calculer  $\mathbf{K}$  par récurrence si on connaît l'opérateur  $\mathbf{U}$ .

Remarque 3.11. — Tout le contenu de ce paragraphe peut se faire à l'identique si on remplace  $\mathfrak{p}$  par  $\tilde{\mathfrak{p}}$ , la sous-algèbre parabolique maximale de  $\mathfrak{g}$  obtenue en annulant toutes les coordonnées non diagonales de la dernière ligne. Le rôle de  $\varepsilon_1$  est alors joué par  $\delta_n$ . Quand on utilisera  $\tilde{\mathfrak{p}}$ , on notera tout avec un tilde sauf  $\mathfrak{g}(m-1, n)$  transformée alors en  $\mathfrak{g}(m, n-1)$ .

#### 4. DESCRIPTION PAR RÉCURRENCE DE L'OPÉRATEUR $U(q)$ ET FIN DE LA DÉMONSTRATION

##### Notations et définitions

Pour  $0 \leq k \leq m$  et  $0 \leq l \leq n$ , on notera  $\mathfrak{g}(k, l)$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  constituée des matrices dont tous les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls sur les  $m-k$  premières (resp.  $n-l$  dernières) lignes et colonnes (ces notations sont compatibles avec les notations  $\mathfrak{g}(m-1, n)$  et  $\mathfrak{g}(m, n-1)$  introduites au paragraphe 3).

Reprenons la sous-algèbre  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\tilde{\mathfrak{p}}$ ). Soit  $\lambda$  un poids de  $P^+$ ; on dira que  $\lambda$  est *atypique relativement à  $\mathfrak{p}$*  (resp.  $\tilde{\mathfrak{p}}$ ) s'il existe une racine impaire positive  $\alpha$  (resp.  $\tilde{\alpha}$ ) avec  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_i$  (resp.  $\tilde{\alpha} = \varepsilon_j - \delta_n$ ) telle que  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$  (resp.  $\langle \lambda + \rho, \tilde{\alpha} \rangle = 0$ ).

Dans le cas contraire,  $\lambda$  est dit *typique relativement à  $\mathfrak{p}$*  (resp.  $\tilde{\mathfrak{p}}$ ). Notons que, comme l'ensemble  $A(\lambda)$  de la définition 1.4 est constitué de racines deux à deux orthogonales, si  $\lambda$  est atypique relativement à  $\mathfrak{p}$ , alors la racine  $\alpha$  est unique.

On note  $U_{\lambda, \mu}$  (resp.  $\tilde{U}_{\lambda, \mu}$ ) le polynôme en  $q$  qui correspond à l'entrée  $(\lambda, \mu)$  de la matrice de l'opérateur  $\mathbf{U}(q)$  (resp.  $\tilde{\mathbf{U}}(q)$ ) dans  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  (cf. définition 3.1). On note  $U_{\lambda, \mu}[\mathfrak{g}(k, l)]$  le polynôme en  $q$  défini de manière analogue pour  $\mathfrak{g}(k, l)$ .

Dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , pour un poids dominant  $\lambda$ , on notera  $p_\lambda$  la projection sur le bloc correspondant à la valeur  $\chi_\lambda$  du caractère infinitésimal. Si  $V$  est un  $(P, \mathcal{O}_P)$ -module et si on note  $\mathcal{O}_V$  le faisceau correspondant sur la super grassmannienne  $G/P$ , on peut considérer les  $p_\lambda(\mathcal{O}_V)$  (qui ne sont pas nécessairement les mêmes que les  $\mathcal{O}_{p_\lambda(V)}$ ).

Il existe un foncteur (qui dépend du choix de la sous-algèbre de Cartan,  $\mathfrak{h}$ ) de  $\mathcal{F}$  dans elle-même, contravariant et de carré l'identité

$$V \rightarrow V^\vee,$$

qui conserve la décomposition en  $\mathfrak{h}$ -modules irréductibles (et donc le caractère) : soit  $\tau$  l'automorphisme de  $\mathfrak{g}$  qui, à toute matrice  $M$ , associe  $-{}^{str}M$ , où, si  $M$  est une matrice par blocs  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ,  ${}^{str}M = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ -{}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$ . Si  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module de  $\mathcal{F}$ , on construit un module  $V^\tau$ , isomorphe à  $V$  comme super espace vectoriel, sur lequel une matrice  $M$  de  $\mathfrak{g}$  agit sur  $x$  dans  $V$  par  $-{}^{str}M.x$ . On pose  $V^\vee = (V^\tau)^*$ .

##### Principe de la récurrence

On veut calculer les  $U_{\lambda, \mu}$ . Pour le faire, on suppose d'une part qu'on a calculé les opérateurs  $\mathbf{U}[\mathfrak{g}(k, l)](q)$ , et d'autre part qu'on connaît  $U_{\lambda-\alpha, \mu}$  si  $\lambda$  est atypique relativement à  $\mathfrak{p}$  avec  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_j$  et  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$ . On montre dans le même mouvement que les  $\mathfrak{g}$ -modules  $(U_t)_i(L_\lambda)$  ( $t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle$ , comme dans la partie 3) sont semi-simples.

La récurrence s'initialise pour  $\mathfrak{gl}(1, 1)$ ; les poids atypiques sont de la forme  $\lambda = a\varepsilon_1 - a\delta_1$  ( $a$  est supposé entier). Ils sont tous dominants et ils sont tous dans le même

bloc. Tous les modules simples associés sont de dimension 1 ; on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow (L_{\lambda-\alpha})^{\Pi} \rightarrow V_{\lambda} \rightarrow L_{\lambda} \rightarrow 0,$$

où  $\alpha$  est la racine impaire  $\varepsilon_1 - \delta_1$ . Ceci décrit les  $U_{\lambda, \mu}$ , qui sont tous nuls sauf pour  $\mu = \lambda - \alpha$  pour lequel on a  $U_{\lambda, \lambda-\alpha}(q) = \varepsilon q$ .

Revenons au cas général.

On veut se ramener à étudier les poids  $\lambda$  qui sont atypiques relativement à  $\mathfrak{p}$ , la racine  $\alpha$  correspondante étant  $\varepsilon_1 - \delta_n$ . On montre relativement facilement les deux énoncés suivants :

PROPOSITION 4.1 ([12], théorème 6.2). — *Supposons que  $\lambda$  est typique relativement à  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\tilde{\mathfrak{p}}$ ) alors, si on note  $U_{\lambda}$  (resp.  $\tilde{U}_{\lambda}$ ) la matrice ligne formée des polynômes  $U_{\lambda, \mu}$  (resp.  $\tilde{U}_{\lambda, \mu}$ ), on a  $U_{\lambda} = 0$  (resp.  $\tilde{U}_{\lambda} = 0$ ).*

PROPOSITION 4.2. — *Supposons que  $\lambda$  est atypique relativement à  $\mathfrak{p}$ , la racine  $\alpha$  correspondante étant  $\varepsilon_1 - \delta_k$  ; alors, lorsque les polynômes en  $q$  correspondants ont tous un sens, on a :*

$$U_{\lambda, \mu} = U_{\lambda, \mu}[\mathfrak{g}(m, k)].$$

De plus, si on fait l'hypothèse que les  $(U_t)_i$  ( $t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle$ ) du paragraphe 3 appliqués au  $\mathfrak{g}(m, k)$ -module simple  $L_{\lambda}[\mathfrak{g}(m, k)]$  sont des  $\mathfrak{g}(m, k)$ -modules semi-simples, alors  $(U_t)_i(L_{\lambda})$  est un  $\mathfrak{g}$ -module semi-simple.

On a un résultat analogue en transformant  $\mathfrak{p}$  en  $\tilde{\mathfrak{p}}$  et  $\alpha$  en  $\tilde{\alpha} = \varepsilon_k - \delta_n$ , avec les modifications évidentes.

On suppose maintenant que  $\lambda$  est atypique relativement à  $\mathfrak{p}$  pour la racine  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_n$ .

Trois cas de comportements relativement différents surgissent :

THÉORÈME 4.3 ([12], corollaire 6.26). — *Soit  $\lambda$  un poids dominant atypique relativement à  $\mathfrak{p}$  pour la racine  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_n$ . On a les relations suivantes :*

i) *Si  $\lambda - \alpha$  est dominant,*

$$U_{\lambda, \mu} = \varepsilon[q^{-1}U_{\lambda-\alpha, \mu}]_+ \text{ si } \mu \neq \lambda - \alpha$$

où  $[\ ]_+$  a le même sens que dans la définition 2.1, et

$$U_{\lambda, \lambda-\alpha} = \varepsilon q.$$

ii) *Si  $\lambda - \alpha$  n'est pas dominant et si*

a)  *$\lambda - \varepsilon_1$  est dominant,*

$$U_{\lambda, \mu} = \varepsilon U_{\lambda-\alpha, \mu}[\mathfrak{g}(m, n-1)],$$

b)  *$\lambda + \delta_n$  est dominant,*

$$U_{\lambda, \mu} = \varepsilon U_{\lambda-\alpha, \mu}[\mathfrak{g}(m-1, n)].$$

iii) Si  $\lambda - \alpha$ ,  $\lambda - \varepsilon_1$ ,  $\lambda + \delta_n$  ne sont pas dominants,

$$U_{\lambda, \mu} = \varepsilon q U_{\lambda - \alpha, \mu}[\mathfrak{g}(m - 1, n - 1)].$$

Je ne prétends pas donner ici une démonstration, même incomplète, de ce théorème ; je veux juste indiquer quelques articulations de l'argument de Vera Serganova pour i), sachant que ii) utilise le même type d'éléments. La preuve de iii) est plus technique et compliquée.

On remarque que  $L_{\varepsilon_1}$  (resp.  $L_{-\delta_n}$ ) est la représentation standard (resp. standard duale) de  $\mathfrak{g}$ . L'étude du produit tensoriel avec  $L_{\varepsilon_1}$  joue un rôle crucial dans la démonstration :

LEMME 4.4 ([12], théorème 5.9). — Soient  $\lambda$  un poids dominant,  $\chi$  un caractère de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  provenant d'un  $\mathfrak{g}$ -module simple de dimension finie et  $E$  le module  $L_{\varepsilon_1}$  (resp.  $L_{-\delta_n}$ ). On pose :

$$T = p_{\chi}(L_{\lambda} \otimes E).$$

On a :

- i)  $T^{\vee} \simeq T$ .
- ii) Si  $T$  est non nul, alors  $\chi = \chi_{\lambda + \varepsilon_i}$  ou  $\chi_{\lambda + \delta_j}$  (resp.  $\chi = \chi_{\lambda - \varepsilon_i}$  ou  $\chi_{\lambda - \delta_j}$ ) pour un certain  $i \in \{1, \dots, m\}$ , ou  $j \in \{1, \dots, n\}$ .
- iii) Si  $\#\chi$  est égal à  $\#\lambda$ , alors  $T$  est simple.
- iv) Si  $T$  n'est pas irréductible, il a un unique sous-module simple  $S$  et, si on note  $X$  le noyau de la projection de  $T^{\vee}$  ( $= T$ ) vers  $S^{\vee}$ , alors  $X$  contient  $S$  et  $X$  est engendré comme  $\mathfrak{g}$ -module par un vecteur de plus haut poids, dont on note  $\mu$  le poids. On a  $\chi_{\mu} = \chi$ , et il existe une racine  $\alpha$  dans  $\Delta_1^+$  vérifiant  $\langle \mu + \rho, \alpha \rangle = 0$  et telle que le plus haut poids de  $S$  est égal à  $\mu - \alpha$ .

Notons  $p_{\lambda^*}$  la projection de  $\mathcal{F}$  sur le bloc dont le caractère infinitésimal est celui du dual de  $L_{\lambda}$ .

Le lien entre  $U_{\lambda, \mu}$  et  $U_{\lambda - \alpha, \mu}$  provient, avec les notations du paragraphe 3, de la suite exacte de faisceaux au-dessus du super espace projectif  $X = G/P$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{((L_{\lambda - \alpha}(\mathfrak{p}))^{\Pi})^*} \rightarrow p_{\lambda^*}(\mathcal{O}_{(L_{\lambda - \varepsilon_1}(\mathfrak{p}))^*} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{(L_{\varepsilon_1})^*}) \rightarrow \mathcal{O}_{(L_{\lambda}(\mathfrak{p}))^*},$$

qui provient du dévissage de  $L_{\varepsilon_1}$  comme  $\mathfrak{p}$ -module :

$$0 \rightarrow L_{\varepsilon_1}(\mathfrak{p}) \rightarrow L_{\varepsilon_1} \rightarrow L_{\varepsilon_2}(\mathfrak{p}) \rightarrow 0$$

(suite d'Euler pour le fibré tangent à  $X$ ).

Le terme du milieu de cette suite exacte de faisceaux s'écrit

$$p_{\lambda^*}(\mathcal{O}_{(L_{\lambda - \varepsilon_1}(\mathfrak{p}))^*} \otimes_{\mathbb{C}} (L_{\varepsilon_1})^*).$$

Comme  $\lambda - \varepsilon_1$  est typique relativement à  $\mathfrak{p}$ , la proposition 4.1 montre que la cohomologie de ce faisceau est concentrée en degré 0 et est égale à  $(p_{\lambda}(L_{\varepsilon_1} \otimes L_{\lambda - \varepsilon_1}))^*$ .



La suite exacte longue de cohomologie, associée à la suite exacte de faisceaux, donne des isomorphismes

$$H^i(\mathcal{O}_{(L_\lambda(\mathfrak{p}))^*}) \simeq H^{i+1}(\mathcal{O}_{((L_{\lambda-\alpha}(\mathfrak{p}))^*)^\Pi}) \text{ si } i \geq 1;$$

donc, compte tenu de la proposition 3.3, ii), on obtient des isomorphismes

$$(U_{t'})_{i+2}(L_{\lambda-\alpha}) \simeq (U_t)_{i+1}(L_\lambda) \text{ si } i \geq 1,$$

où  $t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle, t' = \langle \lambda - \alpha, \varepsilon_1 \rangle$  (on a  $t' = t - 1$ ).

Pour  $i = 0$ , on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow (U_{t'})_2(L_{\lambda-\alpha}) \rightarrow (H^0(\mathcal{O}_{(L_\lambda(\mathfrak{p}))^*}))^* \rightarrow p_\lambda(L_{\varepsilon_1} \otimes L_{\lambda-\varepsilon_1}) \rightarrow (H^0(\mathcal{O}_{(L_{\lambda-\alpha}(\mathfrak{p}))^*}))^* \rightarrow 0.$$

Ces isomorphismes donnent l'égalité de i) pour les coefficients des puissances strictement supérieures à 1 de  $q$  (le terme constant est nul par la définition 3.1). Le coefficient de  $q$  est plus difficile à trouver.

On montre dans un premier temps qu'on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck :

$$[(U_t)_1(L_\lambda)] = \varepsilon[(U_{t'})_2(L_{\lambda-\alpha})] + \varepsilon[L_{\lambda-\alpha}] + [R_\lambda], \quad (4.5(\lambda))$$

où  $R_\lambda$  est un  $\mathfrak{g}$ -module tel que  $[R_\lambda : L_\mu] \leq \varepsilon[(U_t)_1(L_{\lambda-\alpha}) : L_\mu]$  pour  $\mu \in P^+$ .

La preuve est algébrique et elle repose sur le lemme 4.4.

Pour obtenir i), il reste à voir que  $R_\lambda = 0$ .

On a l'égalité (4.5( $\lambda$ )), et donc l'égalité (4.5( $\lambda + k\alpha$ )) est vérifiée pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

On montre que  $R_{\lambda+k\alpha} = 0$  pour  $k$  assez grand : je donne ici quelques détails.

Soit  $k$  un entier assez grand, on pose  $\mu = \lambda + k\alpha$ , montrons que  $R_\mu = 0$ . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow (U_t)_1(L_\mu) \rightarrow (H^0(\mathcal{O}_{L_\mu(\mathfrak{p})^*}))^* \rightarrow L_\mu \rightarrow 0,$$

qui provient de la proposition 3.3. On montre d'abord que :

(\*) les plus hauts poids des facteurs de composition de  $(U_t)_1(L_\mu)$  font partie des plus hauts poids des facteurs de composition de  $L_{\varepsilon_1} \otimes L_\mu$ .

On peut regarder le faisceau  $\mathcal{O}_{L_\mu(\mathfrak{p})^*}$  comme un faisceau  $M$  au-dessus de  $G_0/P_0 = \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ ; les résultats de Penkov [11] permettent de construire une filtration finie  $G_0$ -équivariante de  $M$  dont les quotients  $M_i$  sont des  $\mathcal{O}_{G_0/P_0}$ -modules, chacun provenant d'un  $\mathfrak{g}_0$ -module simple dont on notera  $\mu_i$  le plus haut poids. De plus, les poids  $\mu - \mu_i$  doivent être les plus hauts poids de  $\mathfrak{g}_0$ -composantes de l'algèbre extérieure  $\Lambda(\mathfrak{g}^{+1})$ , donc on a  $\mu - \mu_i = \sum_{\beta \in S_i} \beta$  où  $S_i$  est un sous-ensemble de  $\Delta_1^+$ .

On applique le théorème de Borel-Weil-Bott aux faisceaux  $M_i$  : comme  $k$  est assez grand, il n'y a pas de cohomologie en degré strictement positif, et on a :

$$H_{G_0/P_0}^0(M_i) = (L_{\mu_i}(\mathfrak{g}_0))^*.$$

La cohomologie de  $M$  est donc connue comme  $\mathfrak{g}_0$ -module : elle est concentrée en degré 0 et on a :

$$H_{G_0/P_0}^0(M) = \bigoplus_i (L_{\mu_i}(\mathfrak{g}_0))^*.$$

De plus,  $H_{G_0/P_0}^0(M)$  est un  $\mathfrak{g}$ -module égal à  $H^0(\mathcal{O}_{L_\mu(\mathfrak{p})^*})$ , donc les  $\mathfrak{g}_0$ -plus hauts poids de  $(H^0(\mathcal{O}_{L_\mu(\mathfrak{p})^*}))^*$  sont les  $\mu_i$ . On doit chercher parmi les  $\mu_i$ , qui sont les  $\mathfrak{g}$ -plus hauts poids, c'est-à-dire les poids  $\nu$  tels que  $\chi_\mu = \chi_\nu$  et qui font partie des  $\mu_i$ . Un tel  $\nu$  est nécessairement de la forme  $\mu - \sum_{\beta \in S_\nu} \beta$  avec  $S_\nu$  contenu dans  $\Delta_1^+$  et, si  $\beta$  appartient à  $S_\nu$  et si  $\beta = \varepsilon_1 - \delta_k$ , alors  $k = n$ . Ceci fait que toute racine de  $S_\nu$  est soit orthogonale, soit égale à  $\alpha$ . Alors  $\langle \mu - \nu, \varepsilon_1 \rangle$  est égal à 0 ou 1, ce qui permet de montrer (\*).

En utilisant le lemme 4.4, iii), on en déduit que  $R_\mu = 0$  pour  $k$  assez grand. Il reste à voir que

$$R_\mu = 0 \Rightarrow R_{\mu-\alpha} = 0,$$

ce qui se fait en reprenant les arguments algébriques aboutissant à l'égalité (4.5( $\lambda$ )), auxquels on incorpore deux ingrédients supplémentaires : l'hypothèse  $R_\mu = 0$  et le fait que, si  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module dont les facteurs de composition sont de multiplicité 1 et vérifiant  $V = V^\vee$ , alors  $V$  est semi-simple.

Pour obtenir les théorèmes 2.2 et 2.3, on remarque que les résultats de ce paragraphe nous permettent de calculer la matrice de  $\mathbf{U}$  et donc de calculer l'opérateur  $\mathbf{K}$  par récurrence (théorème 3.10). Le lien avec les opérateurs  $s_\alpha$  s'obtient en remarquant que si  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_n$ , on a les mêmes matrices pour  $\mathbf{U}$  et  $s_\alpha$ .

## 5. ÉTAT DES LIEUX

Depuis [12], je connais deux développements récents du sujet.

Dans [13], Vera Serganova cite un certain nombre de résultats nouveaux, sans démonstration. D'une part elle étudie les blocs des différentes catégories  $\mathcal{F}$  (quand on fait varier  $m$  et  $n$ ), et montre qu'à équivalence près ils sont caractérisés par le degré d'atypie. D'autre part, elle utilise des techniques d'induction géométrique pour obtenir des résultats analogues à la formule des caractères pour les super algèbres de Lie de type orthosymplectique : dans ce cadre, les modules de Kac n'existent plus, ce qui oblige à formuler des énoncés plus compliqués que je ne chercherai pas à décrire ici.

Le travail de Jonathan Brundan [4] décrit le groupe de Grothendieck  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  comme  $\Lambda^m(V^*) \otimes \Lambda^n(V)$  où  $V$  désigne la représentation naturelle du groupe quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ .

En utilisant la base canonique (resp. canonique duale) de Lusztig ([10]) de ce module, il paramètre les classes d'objets simples (resp. basculants, qui sont en l'occurrence les objets projectifs indécomposables, qui sont aussi injectifs) de  $\mathcal{F}$ .

Cela lui permet d'obtenir une formule de multiplicité d'un module simple  $L_\lambda$  dans un module de Kac  $V_\mu$ , qui montre que ces multiplicités sont toujours égales à 0 ou 1.

Voici son résultat, qui est très élégant ; je le cite dans les notations que j'ai utilisées, dans le cas maximale atypique pour  $\mathfrak{gl}(n, n)$ .

THÉORÈME 5.1 ([4], Main theorem, p. 3). — Soit  $\lambda = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n - a_n\delta_1 - \dots - a_1\delta_n$  un poids dominant maximalelement atypique de  $\mathfrak{gl}(n, n)$ . Soit  $(k_1, \dots, k_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers strictement positifs minimal dans l'ordre lexicographique pour la propriété suivante :

pour tous  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  dans  $\{0, 1\}^n$ ,  $\lambda + \sum_{s=1}^n \theta_s k_s (\varepsilon_s - \delta_{k-s})$  est conjugué pour l'action  $w(\lambda + \rho) - \rho$  du groupe de Weyl  $W$  à un élément  $R_\theta(\lambda)$  de  $P^+$ .

Alors la multiplicité  $[V_\mu : L_\lambda]$  est égale à 1 si  $\mu$  est un  $R_\theta(\lambda)$ , à 0 sinon.

Ce théorème permet d'obtenir un algorithme qui détermine, pour un poids dominant maximalelement atypique  $\lambda$  donné, quels sont les modules de Kac  $V_\mu$  dont  $L_\lambda$  est un sous-quotient. On remarquera toutefois que cet algorithme ne fournit pas directement les facteurs de composition d'un module de Kac donné.

La démonstration utilise très peu la structure super, le principal argument  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué provient de l'étude des produits tensoriels d'un module de Kac  $V_\mu$  par les puissances symétriques de  $L_{\varepsilon_1}$  et  $L_{-\delta_n}$ , dont il décompose les projections dans des blocs convenables.

Dans le même article, Brundan conjecture des résultats analogues pour la catégorie  $\mathcal{O}$  de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ .

Parmi les nombreuses questions soulevées par les travaux de Brundan et de Serganova, il en est une que je souhaite poser : toutes les constructions que nous avons vues ici dépendent du choix de la sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$  ; il se trouve que, contrairement au cas classique, les sous-algèbres de Borel ne sont pas toutes  $\mathfrak{g}$ -conjuguées. Si on choisit une autre sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}'$  de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{b}_0$ , la catégorie  $\mathcal{F}$  reste elle-même en tant que catégorie, mais comme *catégorie de modules de plus haut poids*, elle change de nature. Quel parti peut-on en tirer ? En effet, le choix de  $\mathfrak{b}$  semble privilégié à cause de la  $\mathbb{Z}$ -gradation de longueur 3 de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ , mais cette propriété disparaît dans le cas orthosymplectique.

## RÉFÉRENCES

- [1] I. N. BERNŠTEĪN, I. M. GEL'FAND & S. I. GEL'FAND – « A certain category of  $\mathfrak{g}$ -modules », *Funct. Anal. Appl.* **10** (1976), no. 2, p. 87–92.
- [2] I. N. BERNŠTEĪN & D. A. LEĪTES – « A formula for the characters of the irreducible finite-dimensional representations of Lie superalgebras of series  $Gl$  and  $sl$  », *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **33** (1980), no. 8, p. 1049–1051.
- [3] N. BOURBAKI – *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5 et 6, Masson, Paris, 1981.
- [4] J. BRUNDAN – « Kazhdan-Lusztig polynomials and character formulae for the Lie superalgebra  $\mathfrak{gl}(m|n)$  », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, p. 185–231 (electronic).
- [5] J. DIXMIER – *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

- [6] W. FULTON & P. PRAGACZ – *Schubert varieties and degeneracy loci*, Lect. Notes in Math., vol. 1689, Springer-Verlag, Berlin, 1998, appendice J en collaboration avec I. Ciocan-Fontanine.
- [7] J. C. JANTZEN – *Representations of algebraic groups*, 2<sup>nd</sup>e éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.
- [8] V. KAC – « Representations of classical Lie superalgebras », in *Differential geometrical methods in mathematical physics II (Bonn 1977)*, Lect. Notes in Math., vol. 676, Springer, Berlin, 1978, p. 597–626.
- [9] V. G. KAC – « Lie superalgebras », *Adv. Math.* **26** (1977), no. 1, p. 8–96.
- [10] G. LUSZTIG – *Introduction to quantum groups*, Progress in Math., vol. 110, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1993.
- [11] I. B. PENKOV – « Borel-Weil-Bott theory for classical Lie supergroups », in *Current problems in mathematics. Newest results*, Itogi Nauki i Tekhniki, vol. 32, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1988, traduit dans *J. Soviet Math.* **51** (1990), p. 71–124.
- [12] V. SERGANOVA – « Kazhdan-Lusztig polynomials and character formula for the Lie superalgebra  $\mathfrak{gl}(m|n)$  », *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996), no. 4, p. 607–651.
- [13] ———, « Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin 1998)*, 1998, *Doc. Math.*, extra vol. II, p. 583–593 (electronic).
- [14] V. V. SERGANOVA – « Kazhdan-Lusztig polynomials for Lie superalgebra  $\mathfrak{gl}(m|n)$  », in *I. M. Gelfand Seminar*, Adv. Soviet Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, 1993, p. 151–165.
- [15] A. SERGEEV – « The invariant polynomials on simple Lie superalgebras », *Represent. Theory* **3** (1999), p. 250–280 (electronic).

Caroline GRUSON

Institut Élie Cartan (IÉCN)

Faculté des Sciences

Université Nancy I (Henri Poincaré)

F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy

*E-mail* : [Caroline.Gruson@iecn.u-nancy.fr](mailto:Caroline.Gruson@iecn.u-nancy.fr)

## TRAVAUX DE ZINK

by William MESSING

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARY DEFINITIONS AND RESULTS

Fix a prime number  $p$ . All rings considered will be  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algebras. If  $R$  is a ring we will consider  $p$ -divisible groups over  $R$  and in particular those which are formal groups. If  $\frac{1}{p} \in R$ , then  $p$ -divisible groups are étale and consequently given by continuous representations  $\rho : \pi_1(\mathrm{Spec}(R)) \rightarrow \mathrm{GL}_h(\mathbf{Z}_p)$ . Hence we shall assume  $p$  is either nilpotent in  $R$  or  $R$  is separated and complete for a topology having a neighborhood basis of 0 consisting of ideals and that  $p$  is topologically nilpotent.

With these conventions, the aim of the various Dieudonné theories is to classify the category of  $p$ -divisible groups over  $R$  via functors to categories living in the realm of (semi)linear algebra. One should think of them as analogous to the functor  $G \mapsto \mathrm{Lie}(G)$  which establishes an equivalence of categories between formal groups and Lie algebras when  $R$  is a  $\mathbf{Q}$ -algebra. We will not give an overview of the various Dieudonné theories, but rather concentrate on the most recent, Zink's theory of displays. Nevertheless it will be necessary for us to relate Zink's theory to Cartier's theory and to the crystalline theory. We refer the reader to [Ta], [Ser], [Gr1], [Gr2], [Dem], [Fon1] for  $p$ -divisible groups, to [Car1], [Car2], [Haz], [Laz], [Z1], [Z2] for Cartier theory, to [Gr1], [Gr2], [MM], [M], [BBM], [BM1], [BM2], [dJ2], [dJM] for crystalline Dieudonné theory.

If  $R$  is a perfect field of characteristic  $p$ , these theories are, for  $p$ -divisible groups (formal in the case of Cartier's theory), all equivalent. Indeed it was one of Zink's motivations in developing his theory to relate the Cartier theory to the crystalline theory. But, in establishing properties of his theory, he uses both the Cartier and the crystalline theories. Hence there is a symbiotic relationship between the three theories.

We refer to [Bour] for the standard facts about the Witt vector ring,  $W(R)$ . We write  $w_n : W(R) \rightarrow R$  for the ghost component maps,  $f : W(R) \rightarrow W(R)$  for the Frobenius ring endomorphism and  $v : W(R) \rightarrow W(R)$  for the additive Verschiebung endomorphism. Let  $I_R = \text{Ker}(w_0) = \text{im}(v)$ . If  $a \in R$ ,  $[a]$  denotes its Teichmüller representative.

LEMMA 1.1. — *If  $R$  is separated and complete in the  $p$ -adic topology, then  $W(R)$  is separated and complete in both its  $p$ -adic and  $I_R$ -adic topologies. If  $p$  is nilpotent in  $R$ , these topologies coincide and it is finer than the  $v$ -adic topology.*

DEFINITION 1.2. — *A display  $\mathcal{P}$  over  $R$  is a quadruple  $(P, Q, F, F_1)$  where  $P$  is a finitely generated projective  $W(R)$ -module,  $Q$  a submodule,  $F : P \rightarrow P$ ,  $F_1 : Q \rightarrow P$  are  $f$ -semilinear such that*

- (i)  $I_R P \subset Q$ .
- (ii)  $0 \rightarrow Q/I_R P \rightarrow P/I_R P \rightarrow P/Q \rightarrow 0$  is a split sequence of  $R$ -modules.
- (iii)  $P$  is generated by  $\text{im}(F_1)$ .
- (iv)  $F_1(v(\xi)x) = \xi F(x)$  for  $\xi \in W(R)$ ,  $x \in P$ .

If  $u : M \rightarrow N$  is a  $f$ -semilinear map of  $W(R)$ -modules, we set  $M^{(1)} = W(R) \otimes_{f, W(R)} M$  for the extension of scalars using  $f$  and denote by  $u^\sharp : M^{(1)} \rightarrow N$  the associated linear map.

With the obvious notion of morphisms, displays form an additive category and, if we define a morphism of displays  $u : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  to be an admissible monomorphism (resp. epimorphism) provided  $u : P' \rightarrow P$  is injective (resp. surjective) and  $u^{-1}(Q) = Q'$  (resp.  $u(Q') = Q$ ), we equip  $\text{Displays}_R$  with the structure of an exact category.

DEFINITION 1.3. — *A normal decomposition for a display  $\mathcal{P}$  over  $R$  is a direct sum decomposition  $P = L \oplus T$  such that  $Q = L \oplus I_R T$ .*

If  $R$  is a  $p$ -adic ring, in particular if  $p$  is nilpotent in  $R$ , normal decompositions always exist. This is a consequence of the fact that finitely generated projective modules can always be lifted for surjections  $A \rightarrow B$  whose kernel is a nilideal or such that  $A$  is separated and complete for the topology given by powers of the kernel.

*Examples.*— (i) The display corresponding to the formal multiplicative group  $\mathcal{G} = (W(R), I_R, f, v^{-1})$ .

(ii) If  $R = k$ , a perfect field of characteristic  $p$ ,  $M \mapsto \mathcal{P}_M = (M, V(M), F, V^{-1})$  establishes an equivalence of categories between Dieudonné modules over  $k$  and displays over  $k$ .

From now on we assume  $p$  is nilpotent in  $R$ , unless we explicitly state the contrary.

If  $u : R \rightarrow R'$  is a ring homomorphism and  $\mathcal{P}$  is a display over  $R$ , the base changed display  $u_*(\mathcal{P})$  is the display over  $R'$ ,  $\mathcal{P}' = (P', Q', F', F'_1)$ , where  $P' = W(R') \otimes_{W(R)} P$ ,  $Q' = \text{Ker}(P' \rightarrow R' \otimes_R P/Q)$ ,  $F' = f \otimes F$  and  $F'_1$  is determined by

$$F'_1(v(\xi) \otimes x) = \xi \otimes F(x), \quad \xi \in W(R'), \quad x \in P$$

and

$$F'_1(\xi \otimes y) = f(\xi) \otimes F_1(y), \quad \xi \in W(R'), \quad y \in Q.$$

Using a normal decomposition, it is easy to show that  $F'_1$  exists and  $\mathcal{P}'$  is a display.

DEFINITION 1.4. — *Let  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$  be displays over  $R$ . A bilinear form of displays  $(, ) : \mathcal{P} \times \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{G}$  is a bilinear map  $P \times P' \rightarrow W(R)$  such that  $v(F_1 y, F'_1 y') = (y, y')$  for  $y \in Q, y' \in Q'$ .*

If  $\mathcal{P}$  is a display over  $R$ , its dual display  $\mathcal{P}^t = (P^\vee, \widehat{Q}, F, F_1)$  where  $P^\vee = \text{Hom}_{W(R)}(P, W(R))$ ,  $\widehat{Q} = \{z \in P^\vee \mid z(Q) \subset I_R\}$  and  $F$  and  $F_1$  are determined by

$$\begin{aligned} (F_1 x, Fz) &= f(x, z) && \text{for } x \in Q, z \in P^\vee \\ (Fx, Fz) &= pf(x, z) && \text{for } x \in P, z \in P^\vee \\ (Fx, F_1 z) &= f(x, z) && \text{for } x \in P, z \in \widehat{Q} \\ v(F_1 x, F_1 z) &= (x, z) && \text{for } x \in Q, z \in \widehat{Q}. \end{aligned}$$

We have a canonical isomorphism

$$\text{Bil}(\mathcal{P}, \mathcal{P}'; \mathcal{G}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{P}', \mathcal{P}^t).$$

PROPOSITION 1.5. — *There is a unique linear map  $V^\sharp : P \rightarrow P^{(1)}$  determined by  $V^\sharp(\xi Fx) = p\xi \otimes x$ ,  $V^\sharp(\xi F_1 y) = \xi \otimes y$ , for  $\xi \in W(R)$ ,  $x \in P$ ,  $y \in Q$ .*

This is established by taking a normal decomposition  $P = L \oplus T$ , showing that  $F_1^\sharp \oplus F^\sharp : L^{(1)} \oplus T^{(1)} \rightarrow P$  is bijective and defining  $V^\sharp$  to be the composite

$$(\text{id} \oplus p \cdot \text{id}) \circ (F_1^\sharp \oplus F^\sharp)^{-1} : P \rightarrow L^{(1)} \oplus T^{(1)} = P^{(1)}.$$

One has  $F^\sharp \circ V^\sharp = p \cdot \text{id}_P$ ,  $V^\sharp \circ F^\sharp = p \cdot \text{id}_{P^{(1)}}$ . If  $P^{(i)}$  is the scalar extension of  $P$  using  $f^i$ , then  $V^\sharp$  gives rise to  $V_i^\sharp : P^{(i)} \rightarrow P^{(i+1)}$ .

DEFINITION 1.6. —  *$\mathcal{P}$  satisfies the nilpotence condition or  $\mathcal{P}$  is a nilpotent display provided there is an  $N$  such that  $V_N^\sharp \circ V_{N-1}^\sharp \circ \dots \circ V^\sharp$  is zero modulo  $I_R + pW(R)$ .*

Remark 1.7. — In [Z5], displays were called  $3n$ -displays ( $3n$  for “not necessarily nilpotent”) and nilpotent displays were called displays. We follow Zink’s more recent terminology (*cf.* his Paris 13 lectures of February, 2006) here. Also in [Z5],  $F_1$  was denoted by  $V^{-1}$ . Zink and Langer have initiated a theory of higher displays, [LZ2], in which  $P = P_0$ ,  $Q = P_1$  and there are higher  $P_i$  and  $F_i : P_i \rightarrow P$ . For this reason we write, following Zink,  $F_1$  instead of his original  $V^{-1}$ .

*Remark 1.8.* — Locally on  $\text{Spec}(R)$ , if  $L \oplus T$  is a normal decomposition we will have  $L$  and  $T$  free modules and if  $T$  has basis  $\{e_1, \dots, e_d\}$  and  $L$  has basis  $\{e_{d+1}, \dots, e_h\}$ , the map  $F_1^\sharp \oplus F^\sharp$  will be expressed in terms of these bases by a matrix  $(\alpha_{ij}) \in \text{GL}_h(W(R))$ . Conversely any such invertible matrix will determine a display. If the matrix  $(\alpha_{ij})$  has inverse  $(\beta_{k\ell})$ , and  $B$  is the  $(h - d) \times (h - d)$  matrix with entries in  $R/pR$  given by  $B = (w_0(\beta_{k\ell})) \bmod p)_{k,\ell=d+1,\dots,h}$ , then  $\mathcal{P}$  is nilpotent if and only if there is an  $N$  such that

$$B^{(p^N)} \dots B = 0,$$

where  $B^{(p^i)}$  is the matrix obtained by applying the  $i$ -th iterate of Frobenius to  $B$ .

If  $e_i$  is a basis for a free module over the Cartier ring, then the relations

$$\begin{aligned} Fe_i &= \sum \alpha_{ji} e_j, & i &= 1, \dots, d; \\ e_i &= V\left(\sum \alpha_{ji} e_j\right), & i &= d + 1, \dots, h \end{aligned}$$

define a reduced Cartier module. Relations of this form were called by Norman [N] “displayed structural equations” of a reduced Cartier module. This is the origin of Zink’s use of the term display.

*Remark 1.9.* — Let  $S \xrightarrow{u} R$  be a surjection whose kernel is a nilideal. Let  $\mathcal{P}$  be a display over  $R$ . Then there is a display  $\mathcal{P}'$  over  $S$  and an isomorphism  $u_*(\mathcal{P}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$ .

This is proven using the fact that finitely generated projective  $W(R)$ -modules can be lifted to finitely generated projective  $W(S)$ -modules and using normal decompositions. Nakayama’s lemma then shows that lifting modules are determined up to isomorphism (non-unique!).

If  $\mathcal{P}/R$  is a nilpotent display and  $\mathcal{P}'$  is a lifting to  $S$ , then  $\mathcal{P}'$  is nilpotent too. This is clear as  $\text{Ker}(S \rightarrow R)$  is a nilideal.

We ask about the ambiguity in the lifting  $\mathcal{P}'$  of  $\mathcal{P}$ . If  $\mathcal{P}' = (P', Q', F', F'_1)$ ,  $J = \text{Ker}(S \xrightarrow{u} R)$  and  $\alpha : P' \rightarrow W(J) \otimes_{W(S)} P'$ , we define a display  $\mathcal{P}'_\alpha$  over  $S$  lifting  $\mathcal{P}$  by  $\mathcal{P}'_\alpha = (P', Q', F'_\alpha, F'_{1\alpha})$ , where  $F'_\alpha(x) = F'x - \alpha(F'x)$ , for  $x \in P'$ ,  $F'_{1\alpha}(y) = F'_1y - \alpha(F'_1y)$ , for  $y \in Q'$ . Then  $\mathcal{P}'_\alpha$  is a display and Zink shows any lifting of  $\mathcal{P}$  is isomorphic to a  $\mathcal{P}'_\alpha$ .

*Remark 1.10.* — Assume  $p \cdot 1_R = 0$ . Let  $\mathcal{P}$  be a display over  $R$ ,  $\mathcal{P}^{(p)}$  be the display over  $R$  given by  $(\text{Frob})_* \mathcal{P}$ . Then  $V^\sharp$  commutes with  $F$  and  $F_1$  and hence defines a morphism of display  $\mathcal{F}_\mathcal{P} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^{(p)}$ . Similarly  $F^\sharp$  defines a morphism of displays  $\mathcal{V}_\mathcal{P} : \mathcal{P}^{(p)} \rightarrow \mathcal{P}$ . Of course both composites are multiplications by  $p$ .

If  $R \rightarrow R'$  is a ring homomorphism, there is an obvious notion of a descent datum for  $\mathcal{P}'$  a  $R'$ -display and, if  $\mathcal{P}$  is a  $R$ -display,  $\mathcal{P}_{R'}$  has a canonical descent datum, can.



Zink proves:

PROPOSITION 1.11. — *If  $R \rightarrow R'$  is faithfully flat and  $p$  is nilpotent in  $R$ , then  $\mathcal{P} \mapsto (\mathcal{P}_{R'}, \text{can})$  is an equivalence of categories between  $\text{Displays}/R$  and the category of  $R'$ -displays equipped with descent data. The same is true for nilpotent displays.*

## 2. THE CRYSTALS ASSOCIATED TO DISPLAYS

We refer to [Ber] for a detailed discussion of crystals, crystalline cohomology, ... and recall the bare minimum here. An ideal  $J \subset A$  has divided powers if we are given maps  $\gamma_n : J \rightarrow J$ ,  $n \geq 1$ , satisfying axioms imposed by thinking of  $\gamma_n(x)$  as  $\frac{x^n}{n!}$ . The ideal  $(p) \subset \mathbf{Z}_{(p)}$  has unique divided powers since  $\frac{p^n}{n!} \in (p)$ . It follows that for any ring  $A$ ,  $p \cdot A$  has divided powers. If  $J \subset A$  is an ideal with divided powers we require that its divided powers agree with those on  $J \cap pA$ . This is called the compatibility condition. If  $R$  is a  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algebra, then  $I_R \subset W(R)$  has canonical divided powers which are compatible with those on  $p \cdot W(R)$ . These are determined by  $\gamma_n(v(x)) = \frac{p^{n-1}}{n!} v(x^n)$ , [Gr2]. The ideals  $v^m(W(R))$  are sub-divided power ideals. We refer to [Ber] for the definition of nilpotent divided powers and to [M], [Z3] for a weaker notion.

We continue to assume  $p$  is nilpotent in  $R$ . If  $A$  is an  $R$ -algebra, a divided power thickening of  $A$  is a surjection  $A' \xrightarrow{\pi} A$  such that  $p$  is nilpotent in  $A'$  and  $\text{Ker}(\pi)$  is equipped with divided powers (satisfying the compatibility condition). A morphism of divided power thickenings is a commutative diagram

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\pi} & A \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ B' & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & B \end{array}$$

such that  $\text{Ker}(\pi)$ ,  $\text{Ker}(\tilde{\pi})$  have divided powers,  $\psi(\gamma_n(x)) = \gamma_n(\psi(x))$ ,  $n \geq 1$  for  $x \in \text{Ker} \pi$ .

A crystal in modules  $M$  on  $R$  is the giving for every divided power thickening  $A' \xrightarrow{\pi} A$  of a  $A'$ -module,  $M_{(A' \xrightarrow{\pi} A)}$ , and for every morphism of divided power thickenings of an isomorphism

$$T_{(\psi, \phi)} : B' \otimes_{A'} (M_{(A' \xrightarrow{\pi} A)}) \xrightarrow{\sim} M_{(B' \xrightarrow{\tilde{\pi}} B)},$$

these isomorphisms being required to satisfy the obvious transitivity condition.

Similarly we define a Witt-crystal on  $R$  as the giving for any divided power thickening of an  $R$ -algebra  $(A' \xrightarrow{\pi} A)$  of a  $W(A')$ -module  $K_{(A' \xrightarrow{\pi} A)}$  together with, for

any diagram (\*), an isomorphism

$$T'_{(\psi, \phi)} : W(B') \otimes_{W(A')} K_{(A' \xrightarrow{\pi} A)} \xrightarrow{\sim} K_{(B' \xrightarrow{\tilde{\pi}} B')}.$$

We want now to explain Zink's functors

$$\begin{aligned} \text{Nilpotent Displays}/R &\longrightarrow \text{Crystals}/R \\ \mathcal{P} &\longmapsto \mathcal{D}_{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nilpotent Displays}/R &\longrightarrow \text{Witt crystals} \\ \mathcal{P} &\longmapsto \mathcal{H}_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Note first, and for later use as well, that if  $C$  is a  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algebra commutative and associative, but not necessarily with an identity,  $W(C)$  is defined.

Assume  $C$  has divided powers; then we can divide the  $n$ -th ghost component and write  $w'_n = \frac{w_n}{p^n}$  via

$$w'_n(\gamma) = \frac{\sum_{i=0}^n p^i x_i^{p^{n-i}}}{p^n} = \sum_{i=0}^n (p^{n-i} - 1)! \gamma_{p^{n-i}}(x_i).$$

In particular if  $J = \text{Ker}(\pi)$ ,  $\pi : A' \twoheadrightarrow A$  has divided powers, then the map  $W(J) \xrightarrow{w'} J^{\mathbf{N}}$ ,  $x \mapsto (w'_0(x_0), w'_1(x_0, x_1), \dots, w'_n(x_0, \dots, x_n), \dots)$  is an isomorphism of  $W(A')$ -modules where the target is made into a  $W(A')$ -module via

$$\xi \cdot \underline{y} = (w_0(\xi)y_0, w_1(\xi)y_1, \dots, w_n(\xi)y_n, \dots), \quad \underline{y} \in J^{\mathbf{N}}.$$

We also refer to the  $y_i = w'_i(x)$  as the logarithmic coordinates and write this isomorphism as  $\log : W(J) \xrightarrow{\sim} J^{\mathbf{N}}$ . Then  $\log^{-1}(J, 0, 0, \dots) \subset W(J)$  is an ideal in  $W(A')$  which we abusively denote by  $J$ .

This embedding  $J \subset W(A')$  depends of course on the divided power structure on  $J$ . We have  $J \oplus I_{A'} \subset W(A')$  and  $f(J) = (0)$ . By using a normal decomposition, one easily obtains the basic lemma:

LEMMA 2.1. — *Assuming  $\mathcal{P}'$  is a display over  $A'$ ,  $p$  is nilpotent in  $A'$  and  $J \subset A'$  is an ideal with divided powers,  $F'_1$  has a unique extension to  $W(J) \cdot P + Q$  such that  $F'_1(J \cdot P) = (0)$ .*

COROLLARY 2.2. — *Assume  $p$  is nilpotent in  $A'$ ,  $J \subset A'$  is a nilpotent ideal and  $\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2$  are nilpotent displays over  $A'$ . Let  $\pi : A' \rightarrow A'/J$ ,  $\mathcal{P}_i = \pi_*(\mathcal{P}'_i)$ . Then*

$$\text{Hom}(\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$$

*is injective and its cokernel is  $p$ -torsion. Further, if the nilradical of  $A'$  is nilpotent,  $\text{Hom}(\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2)$  is  $p$ -torsion free.*

This result is the analogue of rigidity for  $p$ -divisible groups.

We now introduce the concept of a  $\mathcal{P}$ -triple where  $\mathcal{P}$  is a nilpotent display over  $R$ . Let  $R' \xrightarrow{\pi} R$  be a surjection whose kernel  $J$  is equipped with divided powers and where  $p$  is nilpotent in  $R'$ .

DEFINITION 2.3. — A  $\mathcal{P}$ -triple over  $R'$  is a triple  $(P', F', F'_1)$  such that  $P'$  is a finitely generated projective  $W(R')$ -module which lifts  $P$ , and if  $Q'$  = the inverse image of  $Q$ ,  $F' : P' \rightarrow P'$ ,  $F'_1 : Q' \rightarrow P'$  are  $f$ -semilinear and satisfy

- (i)  $F'$  (resp.  $F'_1$ ) lifts  $F$  (resp.  $F_1$ ).
- (ii)  $F'_1(v(\xi) \cdot x) = \xi F'(x)$ ,  $\xi \in W(R')$ ,  $x \in P'$ .
- (iii)  $F'_1(J \cdot P') = (0)$ .

If  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 2$  are nilpotent displays and  $\mathcal{T}_i$  are  $\mathcal{P}_i$ -triples and  $\alpha : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ , there is an obvious notion of an  $\alpha$ -morphism  $\tilde{\alpha} : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ .

There is also the notion of base change for  $\mathcal{P}$ -triples. If

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{u'} & S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{u} & S \end{array}$$

is a morphism of divided power thickenings and  $\mathcal{T}$  is a  $\mathcal{P}$ -triple,  $u'_*(\mathcal{T})$  is a  $u_*(\mathcal{P})$ -triple with  $P'_{S'} = W(S') \otimes_{W(R)} P'$  and  $F'_{S'}$ ,  $F'_{1S'}$  determined in the obvious way.

THEOREM 2.4. — Let  $\alpha : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$  be a morphism of nilpotent displays over  $R$ ,  $R' \rightarrow R$  a divided power thickening and  $\mathcal{T}_i$ ,  $\mathcal{P}_i$ -triples over  $R'$ . Then there exists a unique  $\alpha$ -morphism  $\tilde{\alpha} : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ .

Using this theorem, we construct functors:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &: \text{nilpotent displays}/R \longrightarrow \text{crystals}/R \\ \mathcal{K} &: \text{nilpotent displays}/R \longrightarrow \text{Witt crystals}/R \end{aligned}$$

If  $\mathcal{P}$  is a nilpotent display over  $R$  and  $\mathcal{T} = (P', F, F_1)$  is a  $\mathcal{P}$ -triple over the divided power thickening  $R' \rightarrow R$ , then  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(R') = P'/I_{R'} P'$  and  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}(R') = P'$ .

Let  $\mathcal{P} = (P, Q, F, F_1)$  be a nilpotent display over  $R$ . We consider its ‘‘Hodge filtration’’  $Q/I_R P \subset P/I_R P$ . If  $R' \rightarrow R$  is a divided power thickening and  $\mathcal{T} = (P', F, F_1)$  is a  $\mathcal{P}$ -triple over  $R'$ , we call a lift of the Hodge filtration the giving of a direct summand  $L \subset P'/I_{R'} P'$  such that  $L \otimes_{R'} R = Q/I_R P$ . If  $Q'_L$  is the inverse image of  $L$  in  $P'$ , then  $\mathcal{P}' = (P', Q'_L, F, F_1)$  is a nilpotent display over  $R'$  which lifts  $\mathcal{P}$ .

Consider a divided power thickening  $R' \rightarrow R$ . Let  $\mathcal{C}$  be the category whose objects are pairs  $(\mathcal{P}, L)$  where  $\mathcal{P}$  is a nilpotent display over  $R$  and  $L$  is a direct summand

of  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(R')$  lifting the Hodge filtration. A morphism  $\phi : (\mathcal{P}_1, L_1) \rightarrow (\mathcal{P}_2, L_2)$  in  $\mathcal{C}$  is a morphism of nilpotent displays  $\phi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$  such that  $\mathcal{D}(\phi)(R')L_1 \subset L_2$ .

The following result is the analogue of [M, V (1.6)].

PROPOSITION 2.5. — *The functor nilpotent display/ $R' \rightarrow \mathcal{C}$  given by  $\mathcal{P}' = (P', Q', F, F_1) \mapsto (\mathcal{P}'_R, Q'/I_{R'} P')$  is an equivalence of categories.*

If  $R$  is a ring of characteristic  $p$ , then the morphisms

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^{(p)}, \quad \mathcal{V}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}^{(p)} \rightarrow \mathcal{P}$$

define associated morphisms of the crystals. In particular  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$  is endowed with the structure of a Dieudonné crystal in the sense of [Gr1], [Gr2], [BBM].

Let  $R' \xrightarrow{\pi} R$  be a divided power thickening where  $p$  is nilpotent in  $R'$ . If  $J = \text{Ker}(\pi)$ , then  $J \subset W(R')$  has divided powers given by transport of structure via  $\log$ .  $I_{R'}$  has divided powers and as  $J + I_{R'} = J \oplus I_{R'}$ , we obtain divided powers on this ideal. Hence  $W(R') \xrightarrow{\pi \circ w_0} R$  is a (topological) divided power thickening, inducing divided power thickenings  $W_n(R') \rightarrow R$ .

Using the Cartier map  $W(R) \xrightarrow{\delta} W(W(R))$ , characterized by  $w_n \circ \delta = f^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , Zink proves:

PROPOSITION 2.6. — *Let  $\mathcal{P}$  be a nilpotent display. There is a canonical isomorphism*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}}(R') \simeq \varprojlim \mathcal{D}_{\mathcal{P}}(W_n(R')).$$

If  $R$  has characteristic  $p$ , this isomorphism is compatible with Frobenius and Verschiebung.

PROPOSITION 2.7. — *Let  $R$  have characteristic  $p$ . Assume there is a topological divided power thickening  $S \rightarrow R$  which is a flat  $\mathbf{Z}_p$ -algebra. Then the functor  $\mathcal{P} \mapsto (\mathcal{D}_{\mathcal{P}}, Q/I_R P)$  from nilpotent displays to filtered Dieudonné crystals is fully-faithful in the following weak sense. Given a morphism  $\psi$  between the filtered Dieudonné crystals, there is a morphism of displays  $\phi$  inducing  $\psi$  for every divided power thickening  $R' \rightarrow R$  which receives a map from (some)  $S$  to  $R'$ .*

Remark 2.8. — The same result is true for the filtered Witt-crystals, the filtration being given by  $\widehat{Q}$ . Also one need only assume  $\psi$  is compatible with Frobenius. Finally, if  $p \neq 2$ , the same result holds for the nilpotent crystalline site.

### 3. THE FUNCTOR $BT$

Recall that an  $R$ -algebra  $N$  without identity is nilpotent provided  $N^n = (0)$  for some positive integer  $n$ . There are many equivalent ways to define formal groups. For us we will regard a formal group  $G$  over  $R$  as a functor from nilpotent  $R$ -algebras to abelian groups satisfying:

- (i) if  $0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow 0$  is exact (as a sequence of  $R$ -modules)

$$0 \longrightarrow G(N_1) \longrightarrow G(N_2) \longrightarrow G(N_3) \longrightarrow 0$$

is exact;

- (ii) if any  $R$ -module  $M$  is viewed as a nilpotent  $R$ -algebra ( $M^2 = (0)$ ), then  $\bigoplus_{i \in I} G(M_i) \xrightarrow{\sim} G(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ ;

- (iii)  $G(R)$  is a finitely generated projective module,  $R$  being viewed as having square zero. This is the tangent space, denoted  $\text{Lie}(G)$ .

We will define a functor  $BT : \text{Displays}/R \rightarrow \text{Formal Groups}/R$ .

If  $N$  is a nilpotent  $R$ -algebra, let  $\widehat{W}(N) \subset W(N)$  be the  $W(R)$ -subalgebra consisting of all Witt vectors almost all whose components are zero. Given a display  $\mathcal{P} = (P, Q, F, F_1)$  over  $R$ , we set  $G_{\mathcal{P}}^0(N) = \widehat{W}(N) \otimes_{W(R)} P$ ,  $G_{\mathcal{P}}^{-1}(N) \subset G_{\mathcal{P}}^0(N)$  is the subgroup generated by  $\{v(\xi) \otimes x, \xi \otimes y \mid \xi \in \widehat{W}(N), x \in P, y \in Q\}$ . The functors  $G_{\mathcal{P}}^{-1}(N)$  and  $G_{\mathcal{P}}^0(N)$  are exact in the sense of condition (i) in our definition of a formal group.

LEMMA 3.1. — (i) The map  $F_1 : Q \rightarrow P$  extends to a map  $G_{\mathcal{P}}^{-1}(N) \xrightarrow{F_1} G_{\mathcal{P}}^0(N)$  determined by  $F_1(v(\xi) \otimes x) = \xi \otimes F(x)$ ,  $F_1(\xi \otimes y) = f(\xi) \otimes F_1(y)$ .

- (ii) If  $N$  is equipped with nilpotent divided powers, the  $F_1$  of (i) extends to a nilpotent endomorphism of  $G_{\mathcal{P}}^0(N)$ .

- (iii) If  $i$  is the inclusion of  $G_{\mathcal{P}}^{-1}(N)$  in  $G_{\mathcal{P}}^0(N)$ ,  $F_1 - i : G_{\mathcal{P}}^{-1}(N) \rightarrow G_{\mathcal{P}}^0(N)$  is injective.

DEFINITION 3.2. — Let  $BT_{\mathcal{P}}$  be the functor on nilpotent  $R$ -algebras  $BT_{\mathcal{P}}(N) = \text{coker}(F_1 - i)$ .

THEOREM 3.3. — (i) The functor  $BT$  takes values in the category of formal groups and commutes with base change.

- (ii) If  $N$  has nilpotent divided powers, there is a canonical isomorphism

$$\exp : N \otimes_R \frac{P}{Q} \xrightarrow{\sim} BT_{\mathcal{P}}(N).$$

- (iii) If  $\mathcal{P}$  is a nilpotent display,  $BT_{\mathcal{P}}$  is a  $p$ -divisible formal group.

- (iv) If  $R$  has characteristic  $p$ ,  $BT$  transforms  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  and  $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$  to Frobenius and Verschiebung.

Recall that the Cartier ring  $C_R$  is by definition  $\text{End}(\widehat{W})^0$  and that its elements may be uniquely expressed as  $c = \sum_{n,m \geq 0} V^n [a_{n,m}] F^m$  where, for fixed  $n$ ,  $a_{nm} = 0$  for all but finitely many  $m$ . For  $x \in \widehat{W}(N)$ ,  $c \in C_R$  as above, we have  $x \cdot c = \sum_{n,m \geq 0} v^m ([a_{n,m}] f^n(x))$ . The Cartier module associated to a formal group  $G$  is the left  $C_R$ -module  $\text{Hom}(\widehat{W}, G) = M(G)$ .

PROPOSITION 3.4. — *Let  $\mathcal{P}$  be a display over  $R$ ,  $C_R \otimes_{W(R)} P \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\widehat{W}, G^0_{\mathcal{P}})$  via  $c \otimes z \mapsto (x \mapsto xc \otimes z)$ . The map  $G^0_{\mathcal{P}} \rightarrow BT_{\mathcal{P}}$  induces a surjection  $C_R \otimes_{W(R)} P \rightarrow M(BT_{\mathcal{P}})$  whose kernel is the  $C_R$ -submodule generated by*

$$\{F \otimes x - 1 \otimes Fx, V \otimes F_1y - 1 \otimes y \mid x \in P, y \in Q\}.$$

Recall that if  $G/R$  is a  $p$ -divisible formal group, the crystalline Dieudonné theory associates to  $G$  a crystal as follows. For any divided power thickening  $R' \rightarrow R$  with nilpotent divided powers and any  $p$ -divisible group  $G'$  lifting  $G$ , we consider the universal extension by a vector group

$$0 \rightarrow \omega_{G^*} \rightarrow E(G') \rightarrow G' \rightarrow 0.$$

By definition  $\mathbf{D}(G)_{R'}$  is  $\text{Lie}(E(G'))$  which is, up to canonical isomorphism, independent of  $G'$ . Because  $G$  is a formal group, this definition extends to the site consisting of divided power thickening  $R' \xrightarrow{\pi} R$  where  $\text{Ker}(\pi)$  is a nilpotent ideal [MM], [Z5].

The following is one of Zink’s main theorems.

THEOREM 3.5. — (i) *The functors  $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{D}_{\mathcal{P}}$  and  $\mathcal{P} \mapsto \mathbf{D}(BT_{\mathcal{P}})$  from the category of nilpotent displays to the category of crystals (where the divided power ideals of thickenings are nilpotent) are canonically isomorphic. The canonical isomorphism transforms Hodge filtration to Hodge filtration.*

(ii) *If  $\mathcal{P}$  is a nilpotent display over  $R$ ,  $R' \xrightarrow{\pi} R$  has nilpotent kernel and  $G'/R'$  is a  $p$ -divisible group lifting  $BT_{\mathcal{P}}$ , then there is a nilpotent display  $\mathcal{P}'$  lifting  $\mathcal{P}$  and an isomorphism  $BT_{\mathcal{P}'} \rightarrow G'$  lifting the identity.*

*With the notation of (ii),*

(iii) *if  $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$  is a morphism of nilpotent displays over  $R$  and  $\widetilde{G}'$  is a lift to  $R'$  of  $BT_{\widetilde{\mathcal{P}}}$  with corresponding display  $\widetilde{\mathcal{P}}'$ , then  $\alpha$  lifts to  $\alpha' : \mathcal{P}' \rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}'$  if and only if  $BT(\alpha)$  lifts to an homomorphism  $G' \rightarrow \widetilde{G}'$ .*

(iv) *The functor  $BT$  from nilpotent displays to  $p$ -divisible formal groups is faithful.*

Parts (ii), (iii) of Theorem 3.5 follow from Proposition 2.5 and [M] in the case where  $R' \rightarrow R$  has kernel with nilpotent divided powers. As usual this extends inductively to the case where this kernel is a nilpotent ideal. For (iv), let  $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  induce  $a : BT_{\mathcal{P}} \rightarrow BT_{\mathcal{P}'}$ . If  $a = 0$ ,  $\mathbf{D}(a) = 0$ . But evaluating  $\mathbf{D}(a)$  on the thickenings  $W_n(R) \rightarrow R$  and passing to the projective limit, we find, by (i) and Proposition 2.6, that  $\alpha = 0$ .

#### 4. PROPERTIES OF THE FUNCTOR $BT$ FOR NILPOTENT DISPLAYS

All displays in this paragraph are nilpotent. Before stating the next result recall that a noetherian ring  $R$  is said to be a Nagata ring if, for every prime ideal  $\mathfrak{p}$  of  $R$ , the integral closure of  $R/\mathfrak{p}$  in a finite extension of  $\text{Frac}(R/\mathfrak{p})$  is a finitely generated  $R/\mathfrak{p}$ -module. Examples of such rings include excellent rings. The concept of Nagata ring is discussed in [Bour, IX, §4] and, of course, in E.G.A. IV, §7.7, where these rings are called (noetherian and) universally Japanese<sup>(1)</sup>.

PROPOSITION 4.1. — (i) *Let  $p$  be nilpotent in  $R$  and assume the nilradical of  $R$  is nilpotent. Then  $BT : \text{nilpotent displays over } R \rightarrow p\text{-divisible formal groups}$  is fully faithful.*

(ii) *Assume  $R$  has characteristic  $p$  and admits a topological divided power thickening  $S \xrightarrow{\pi} R$ , i.e.  $J = \text{Ker}(\pi)$  has divided powers and  $S$  is separated and complete for the linear topology defined by a sequence of sub-divided power ideals  $J = J_1 \supset J_2 \supset \dots$  such that  $\text{Ker}(S/J_n \rightarrow R)$  is a nilpotent ideal and  $S$  is flat as a  $\mathbf{Z}_p$ -algebra. Then  $BT$  is fully-faithful.*

THEOREM 4.2. — *Assume  $R$  is a Nagata ring which is separated and complete in the  $p$ -adic topology. Then  $BT$  is an equivalence of categories between nilpotent displays over  $R$  and  $p$ -divisible formal groups over  $R$ .*

*Proof.* — The theorem is proved in successive steps. As each category is the projective limit in the sense of  $\varprojlim$  of the categories relative to  $R/p^n$ , we may assume  $p$  is nilpotent in  $R$ . Then, by Proposition 4.1, we know  $BT$  is fully-faithful. Hence we need show that it is essentially surjective.

(i) Assume  $R = k$  a field. Let  $K = k^{p^{-\infty}}$ . By classical Dieudonné theory the result is true over  $K$ . If  $G/k$  is a  $p$ -divisible formal group, let  $\mathcal{P}_K$  be a nilpotent display over  $K$  such that  $BT(\mathcal{P}_K) = G_K$ . If  $C$  is a Cohen ring for  $k$  we choose a map  $C \rightarrow W(K)$  lifting the inclusion of  $k$  in  $K$ . Let  $A = W(K) \otimes_C W(K)$ , a  $p$ -torsion free ring such that  $A/pA = K \otimes_k K$ . If  $S = \widehat{A}$ , the  $p$ -adic completion, then Proposition 4.1 (ii) tells us that  $BT$  is fully-faithful over  $K \otimes_k K$ . Then  $\mathcal{P}_K$  is equipped by Proposition 4.1 (ii), with descent data and, by Proposition 1.11, there is a nilpotent display  $\mathcal{P}$  over  $k$  which descends  $\mathcal{P}_K$ . Then  $BT(\mathcal{P})$  is isomorphic to  $G$ .

(ii)  $R$  is an artin local ring with residue field  $k$ . Let  $G/R$  be a  $p$ -divisible formal group. Let  $\mathcal{P}_k$  be a nilpotent display such that  $BT(\mathcal{P}_k) = G_k$ . By theorem 3.5 (ii), there is a nilpotent display  $\mathcal{P}$  lifting  $\mathcal{P}_k$  and an isomorphism  $BT(\mathcal{P}) \rightarrow G$ .

<sup>(1)</sup>Gabber has told me that if  $V$  is a complete height 1 valuation ring with algebraically closed fraction field, then  $V\{X_1, \dots, X_n\}[Y_1, \dots, Y_m]$  is universally Japanese, but of course not noetherian.

(iii)  $R$  is a complete local ring. By the result just used in case (ii) we may assume  $R$  is reduced. Let  $G_n = G \otimes R/\mathfrak{m}^n$ . Then  $G_n = BT(\mathcal{P}_n)$  and let  $\mathcal{P}$  be the display corresponding to the system  $(\mathcal{P}_n)$ . We must show that  $\mathcal{P}$  is a nilpotent display. If  $H = BT(\mathcal{P})$  we look at  $M(H)$  described in Proposition 3.4, the Cartier module. We embed  $R$  in a finite product of algebraically closed fields and hence reduce to the case where  $R = k$  is an algebraically closed field. Then  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{nil}} \oplus \mathcal{P}_{\text{ét}}$ , where  $\mathcal{P}_{\text{nil}}$  is a nilpotent display and  $P_{\text{ét}}$  has a basis  $\{e_1, \dots, e_h\}$ ,  $Q = P_{\text{ét}}$  and  $F_1(e_i) = e_i$  for  $i = 1, \dots, h$  and  $M(BT(\mathcal{P}_{\text{ét}}))$  has a presentation  $\bigoplus_{i=1}^h C_k \cdot \frac{e_i}{V_{e_i - e_i}}$ . But  $V - 1$  is a unit in  $C_k$  so  $M(BT(\mathcal{P}_{\text{ét}})) = (0)$  and  $M(BT(\mathcal{P}_{\text{nil}})) = M(BT(\mathcal{P}))$ . But  $\text{height}(G) = \text{rank}(P_{\text{nil}})$  and  $\text{height}(G) = \text{rank}(P)$ . Then  $\mathcal{P}_{\text{nil}} = \mathcal{P}$ , finishing the case when  $R$  is a complete local ring.

(iv)  $R$  is a Nagata local ring. Let  $\widehat{R}$  be its completion. We may assume  $R$  is reduced. Then  $\widehat{R}$  and  $\widehat{R} \otimes_R \widehat{R}$  are both reduced [Bour, IX, § 4, théorème 3]. Given  $G/R$ , let  $\widehat{\mathcal{P}}$  be a nilpotent display over  $\widehat{R}$  such that  $BT(\widehat{\mathcal{P}}) = G_{\widehat{R}}$ . Using Proposition 4.1 (i), Theorem 3.5 (iv), we see  $\widehat{\mathcal{P}}$  is equipped with descent data and this gives the result just as in the case when  $R$  is a field.

(v) The general case. We may assume that the  $h = \text{height}$  of  $G$  is constant on  $\text{Spec}(R)$ . Let  $R' = \prod R_{\mathfrak{m}}$ , the product running over all maximal ideals of  $R$ . Then to give a  $p$ -divisible formal group  $G$  of height  $h$  over  $R'$  is the same as giving for each  $\mathfrak{m}$  a  $p$ -divisible formal group  $G_{\mathfrak{m}}$  of height  $h$  over each  $R_{\mathfrak{m}}$ . Similarly to give a display  $\mathcal{P}$  over  $R'$ , with  $\text{rank}(P) = h$ , is the same as giving displays  $\mathcal{P}_{\mathfrak{m}}$  over each  $R_{\mathfrak{m}}$ , these each having  $\text{rank}(P_{\mathfrak{m}}) = h$ . Both statements follow because idempotents in  $M_n(R')$  are given by families of idempotents in the  $M_n(R_{\mathfrak{m}})$ . If all the  $\mathcal{P}_{\mathfrak{m}}$  are nilpotent displays, then  $\mathcal{P}$  is a nilpotent display also because the exponent of nilpotency for  $V_{\mathfrak{m}}^{\sharp}$  is bounded above by  $h$ . As each  $R_{\mathfrak{m}}$  is a Nagata local ring we conclude from Part (iv) that there is a nilpotent display  $\mathcal{P}'$  over  $R'$  such that  $BT(\mathcal{P}') = G_{R'}$ . We will be able to apply descent to finish the proof, provided we can show  $R' \otimes_R R'$  is reduced (so to be able to invoke Proposition 4.1 (i), Theorem 3.5 (iv) again). For any ring  $A$ , let  $Q(A)$  be its full ring of quotients. As  $R'$  is faithfully flat over  $R$ ,  $R' \otimes_R R' \hookrightarrow Q(R') \otimes_{Q(R)} Q(R')$ . As  $R$  is noetherian and reduced,  $Q(R) = \prod_{i=1}^n Q(R/\mathfrak{p}_i)$  if  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$  is the set of minimal prime ideals of  $R$ . The ring  $Q(R') \otimes_{Q(R)} Q(R')$  then decomposes as the  $\prod_{i=1}^n (Q(R') \otimes_{Q(R)} Q(R')) \otimes_{Q(R)} Q(R/\mathfrak{p}_i)$ . As  $Q(R') \hookrightarrow \prod Q(R_{\mathfrak{m}})$ , we see that  $R' \otimes_R R'$  embeds into the product of the rings

$$\prod_{\mathfrak{m}} Q\left(\frac{R_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{p}_i}\right) \otimes_{Q(R/\mathfrak{p}_i)} \prod_{\mathfrak{m}} Q\left(\frac{R_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{p}_i}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

This reduces us to showing that if  $K$  is a field and  $I$  any index set  $K^I \otimes_K K^I$  is reduced. This is standard as products and tensor products of separable algebras are separable.



*Remark 4.3.* — In [Z5], Zink stated Theorem 4.2 only for  $p$  nilpotent in  $R$  and  $R$  an excellent local ring or  $R/pR$  of finite type over a field (which implies  $R$  is excellent). But his proof works, as we have seen, in general. Indeed the proof shows that all we need to assume is that if  $R$  is noetherian and reduced, for each localization  $R_{\mathfrak{m}}$ ,  $\widehat{R}_{\mathfrak{m}}$  and  $\widehat{R}_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} \widehat{R}_{\mathfrak{m}}$  are both reduced.

If  $R$  is a complete noetherian local ring which is normal, with fraction field  $K$  of characteristic zero and residue field of characteristic  $p$ , then for a nilpotent display  $\mathcal{P}$  over  $R$ , the Tate module  $T_p(BT_{\mathcal{P}})$  can be described explicitly in terms of  $\mathcal{P}$ . Let  $\overline{K}$  be an algebraic closure of  $K$ ,  $\overline{R}$  the integral closure of  $R$  in  $\overline{K}$ ,  $\overline{\mathfrak{m}}$  its maximal ideal. For  $K \subset E \subset \overline{K}$  with  $[E : K]$  finite, set  $\widehat{W}(\mathfrak{m}_E) = \varprojlim \widehat{W}(\mathfrak{m}_E/\mathfrak{m}_E^n)$  and  $\widehat{W}(\overline{\mathfrak{m}}) = \varinjlim \widehat{W}(\mathfrak{m}_E)$ . Let  $\overline{W}(\overline{\mathfrak{m}})$  be the  $p$ -adic completion of  $\widehat{W}(\overline{\mathfrak{m}})$ . Let  $\tilde{\mathfrak{m}}$  be the  $p$ -adic completion of  $\overline{\mathfrak{m}}$ . For  $\mathcal{P}$  a nilpotent display over  $R$ , let  $G = BT_{\mathcal{P}}$  and define  $\overline{G}_{\mathcal{P}}^0$  to be  $\overline{W}(\overline{\mathfrak{m}}) \otimes_{W(R)} P$ ,

$$\overline{G}_{\mathcal{P}}^{-1} = \text{Ker} \left( \overline{W}(\overline{\mathfrak{m}}) \otimes_{W(R)} P \longrightarrow \tilde{\mathfrak{m}} \otimes_R P/Q \right).$$

As  $G$  is  $p$ -divisible we may write  $G = \varinjlim G_n$  where  $G_n$  is the kernel of  $p^n$  on  $G$ . The Tate module  $T_p(G)$  is by definition  $\text{Hom}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, \varinjlim G_n(\overline{K}))$ .

PROPOSITION 4.4. — *There is an exact sequence of  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ -modules*

$$0 \longrightarrow T_p(G) \longrightarrow \overline{G}_{\mathcal{P}}^{-1} \xrightarrow{F_1-i} \overline{G}_{\mathcal{P}}^0 \longrightarrow 0.$$

## 5. DUALITY

We briefly sketch now the duality theory for nilpotent displays and corresponding  $p$ -divisible formal groups. From Zink's perspective it is based upon a canonical homomorphism

$$\text{Bil}(\mathcal{P}, \mathcal{P}'; \mathcal{G}) \longrightarrow \text{Biext}(BT_{\mathcal{P}}, BT_{\mathcal{P}'}; \widehat{\mathbf{G}}_m).$$

We do not review here the formalism of biextensions referring the reader to Mumford's original paper [Mu], Grothendieck's geometric and homological versions of the theory [Gr3] and Zink's reformulation of these in his context [Z5]. Let us only say that we have, if  $A, B, C$  are abelian groups (in a topos) and we are given exact sequences

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

an exact sequence

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(K_0 \otimes L_0, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(K_0 \otimes L_1, A) \times_{\mathrm{Hom}(K_1 \otimes L_1, A)} \mathrm{Hom}(K_1 \otimes L_0, A) \\ &\longrightarrow \mathrm{Biext}(B, C; A) \longrightarrow \mathrm{Biext}(K_0, L_0; A). \end{aligned}$$

We apply this formalism to the exact sequences

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow G_{\mathcal{P}}^{-1} \xrightarrow{F_1 - i} G_{\mathcal{P}}^0 \longrightarrow BT_{\mathcal{P}} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow G_{\mathcal{P}'}^{-1} \xrightarrow{F_1 - i} G_{\mathcal{P}'}^0 \longrightarrow BT_{\mathcal{P}'} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

where  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$  are displays. Mumford proved that  $\mathrm{Biext}(G_{\mathcal{P}}^0, G_{\mathcal{P}'}^0, \widehat{\mathbf{G}}_m) = (0)$  so every biextension of  $BT_{\mathcal{P}}, BT_{\mathcal{P}'}$ , by  $\widehat{\mathbf{G}}_m$  is defined by a pair of morphism

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: G_{\mathcal{P}}^{-1} \otimes G_{\mathcal{P}'}^0 \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}_m \\ \alpha_2 &: G_{\mathcal{P}}^0 \otimes G_{\mathcal{P}'}^{-1} \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}_m \end{aligned}$$

agreeing on  $G_{\mathcal{P}}^{-1} \otimes G_{\mathcal{P}'}^{-1}$ .

Let  $\alpha \in \mathrm{Bil}(\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{G})$ . We will associate to  $\alpha$  a pair of such homomorphisms as follows. First, for  $N$  a nilpotent  $R$ -algebra we have

$$\alpha_N : G_{\mathcal{P}}^0(N) \otimes G_{\mathcal{P}'}^0(N) \longrightarrow \widehat{W}(N)$$

defined by  $(\xi \otimes x) \otimes (\xi' \otimes x') \mapsto \alpha(x \otimes x')\xi\xi'$ .

Next recall that the Artin-Hasse exponential defines an exact sequence

$$0 \longrightarrow \widehat{W}(N) \xrightarrow{v - \mathrm{id}} \widehat{W}(N) \xrightarrow{AH} \widehat{\mathbf{G}}_m \longrightarrow 0.$$

Here for  $x \in \widehat{W}(N)$ ,

$$AH(x) = \left[ \exp \left( \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \frac{T^{p^n}}{p^n} \right) \right]_{T=1}.$$

Then with these notations we define

$$\begin{aligned} \alpha_1(y, x') &= AH(\alpha_N(F_1 y \otimes x')), \quad y \in G_{\mathcal{P}}^{-1}(N), \quad x' \in G_{\mathcal{P}'}^0(N) \\ \alpha_2(x, y') &= [AH(\alpha_N(x \otimes y'))]^{-1}, \quad x \in G_{\mathcal{P}}^0(N), \quad y' \in G_{\mathcal{P}'}^{-1}(N). \end{aligned}$$

The verification that  $\alpha_1, \alpha_2$  agree on  $G_{\mathcal{P}}^{-1} \otimes G_{\mathcal{P}'}^{-1}$  is easy. One can show that we obtain the same biextension if  $F_1 y$  is replaced by  $y$  in the equation defining  $\alpha_1$  and, simultaneously,  $y'$  is replaced by  $F_1 y'$  in the equation defining  $\alpha_2$ .

The category of nilpotent  $R$ -algebras is isomorphic to that of augmented  $R$ -algebras such that the augmentation ideal is nilpotent,  $\mathrm{Aug}_R$ . We endow  $(\mathrm{Aug}_R)^\circ$  with the fpqc topology and consider formal groups as abelian sheaves on this site. For any abelian sheaf  $F$ , we define a subsheaf  $F^+$  by setting  $F^+(X) = \mathrm{Ker}(F(X) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(\mathrm{Spec}(R)))$ , where  $\varepsilon : \mathrm{Spec}(R) \rightarrow X$  is the canonical section.

The homological formalism provides a canonical homomorphism  $\mathrm{Biext}(B, C; A) \rightarrow \mathrm{Hom}(B, \underline{\mathrm{Ext}}^1(C, A))$ . We apply this taking a nilpotent display  $\mathcal{P}$ , its dual display

$\mathcal{P}^t$  and the tautological  $\alpha \in \widehat{\text{Bil}}(\mathcal{P}^t, \mathcal{P}, \mathcal{G})$ . This furnishes us with a homomorphism  $BT_{\mathcal{P}^t} \xrightarrow{\chi} \underline{\text{Ext}}^1(BT_{\mathcal{P}}, \widehat{\mathbf{G}}_m)$ .

PROPOSITION 5.1. — *The map  $\chi$  defines an isomorphism of formal groups*

$$BT_{\mathcal{P}^t} \longrightarrow \underline{\text{Ext}}^1(BT_{\mathcal{P}}, \widehat{\mathbf{G}}_m)^+.$$

*Remark.* — In the case where  $\mathcal{P}^t$  is also a nilpotent display, this result was given in [MM], with a completely different proof using [Ill3] and [Ill4].

PROPOSITION 5.2. — *Assume  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$  are nilpotent displays and  $(\mathcal{P}')^t$  is also a nilpotent display. Then the map  $\text{Bil}(\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Biext}(BT_{\mathcal{P}}, BT_{\mathcal{P}'}; \widehat{\mathbf{G}}_m)$  is an isomorphism.*

### 6. DIEUDONNÉ DISPLAYS AND $p$ -DIVISIBLE GROUPS

Assume  $R$  is a complete noetherian local ring with perfect residue field  $k$  of characteristic  $p$ . If  $p = 2$ , assume in addition that  $2R = (0)$ . We will modify the definition of a display so as to obtain an equivalence of categories

$$BT : \text{Dieudonné displays}/R \xrightarrow{\sim} p\text{-divisible groups}/R.$$

If  $R$  is artinian we will consider a subring  $\widehat{W}(R) \subset W(R)$ , stable under  $f$  and  $v$ , functorial in  $R$  and having  $\widehat{W}(k) = W(k)$ . Let  $\mathfrak{m}$  be the maximal ideal of  $R$  and let  $x \in W(k)$ . Let  $y_n \in W(k)$  satisfy  $f^n(y_n) = x$ . Let  $\tilde{y}_n \in W(R)$  be any lift of  $y_n$ . Then for  $n \gg 0$ ,  $f^n(\tilde{y}_n)$  is independent of the choice and the map  $\delta : W(k) \rightarrow W(R)$  defined by  $\delta(x) = f^n(\tilde{y}_n)$ ,  $n$  large, is a ring homomorphism which is a section of  $W(R) \xrightarrow{\pi} W(k)$ .

We consider the sequence

$$0 \longrightarrow W(\mathfrak{m}) \longrightarrow W(R) \xrightarrow{\pi} W(k) \longrightarrow 0.$$

Let  $\widehat{W}(\mathfrak{m}) = \{x_0, \dots, x_i, \dots\} \in W(\mathfrak{m}) \mid \text{almost all } x_i = 0\}$ . Then  $\widehat{W}(\mathfrak{m})$  is stable under  $f$  and  $v$  and we define  $\widehat{W}(R) = \{x \in W(R) \mid x - \delta\pi x \in \widehat{W}(\mathfrak{m})\}$ .  $\widehat{W}(\mathfrak{m})$  is an ideal in  $W(R)$  and consequently  $\widehat{W}(R)$  is a ring. This ring is stable under  $f$  and  $v$ . It is easy to see that  $\widehat{W}(R)$  is a (non-noetherian) local ring which is separated and complete in the topology defined by its maximal ideal  $\widehat{W}(\mathfrak{m}) + \delta(p \cdot W(k))$ .

Now we define a Dieudonné display  $\mathcal{P}$  over  $R$  in exactly the same manner as we defined a display in Definition 1.2, replacing  $W(R)$  by  $\widehat{W}(R)$ . Just as before there is a map  $V^\sharp : P \rightarrow P^{(1)}$  and we have

$$F^\sharp \circ V^\sharp = p \cdot \text{id}_P, \quad V^\sharp \circ F^\sharp = p \cdot \text{id}_{P^{(1)}}.$$

We consider divided power thickenings  $S \xrightarrow{\pi} R$  such that for each  $a \in \text{Ker}(\pi) = J$ , we have  $\gamma_n(a) = 0$  for  $n \gg 0$  (depending on  $a$ ). We have an exact sequence

$$0 \longrightarrow \widehat{W}(J) \longrightarrow \widehat{W}(S) \longrightarrow \widehat{W}(R) \longrightarrow 0.$$

The condition imposed on the divided powers implies that  $\log$  induces an isomorphism

$$\log \widehat{W}(J) \xrightarrow{\sim} J^{(\mathbb{N})}.$$

With this nilpotency assumption on the divided powers, Lemma 2.1 and Theorem 2.4 extend to Dieudonné displays. Just as before this enables us to define the Witt and Dieudonné crystals associated to a Dieudonné display.

We have a “forgetful” functor Dieudonné displays  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  displays,  $P \mapsto W(R) \otimes_{\widehat{W}(R)} P$ .

We say that a Dieudonné display  $\mathcal{P}$  is nilpotent if  $\mathcal{F}(\mathcal{P})$  is nilpotent. The functor  $\mathcal{F}$  establishes an equivalence of categories between nilpotent Dieudonné displays and nilpotent displays. This follows easily from the fact that, for a divided power thickening  $S \xrightarrow{\pi} R$ , the functor

$$\text{Dieudonné displays}/S \longrightarrow \text{Dieudonné displays}/R + \text{lifts of the Hodge filtration}$$

is an equivalence of categories.

PROPOSITION 6.1. — *The category of nilpotent Dieudonné displays is equivalent via a functor  $BT$  to the category of  $p$ -divisible formal group/ $R$ . If  $A$  is a finite  $R$ -algebra (so a product of artinian local rings) and  $\mathcal{P}$  is such a nilpotent display with base change to  $A$ ,  $\mathcal{P}_A = (P', Q', F, F_1)$ , then we have an exact sequence*

$$0 \longrightarrow Q' \xrightarrow{F_1^{-i}} P' \longrightarrow BT_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow 0.$$

PROPOSITION 6.2. — *Let  $P$  be a finitely generated projective  $\widehat{W}(R)$ -module and  $\phi : P^{(1)} \rightarrow P$  (resp.  $\phi : P \rightarrow P^{(1)}$ ). Then there is a direct summand  $P^{tm}$  of  $P$  (resp. a projective quotient  $P^{ét}$  of  $P$ ) such that  $\phi$  induces on  $P^{tm}$  (resp. on  $P^{ét}$ ) an isomorphism. Further, if  $M$  is any  $\widehat{W}(R)$ -module equipped with an isomorphism  $\psi : M^{(1)} \rightarrow M$  (resp. an isomorphism  $\psi : M \rightarrow M^{(1)}$ ) and  $\alpha : M \rightarrow P$  (resp.  $\alpha : P \rightarrow M$ ) and  $\phi \circ \alpha^{(1)} = \alpha \circ \psi$  (resp.  $\alpha^{(1)} \circ \phi = \psi \circ \alpha$ ), then  $\alpha$  factors uniquely through  $P^{tm}$  (resp.  $P^{ét}$ ).*

PROPOSITION 6.3. — *Let  $\mathcal{P} = (P, Q, F, F_1)$  be a Dieudonné display.*

- a)  $P = Q \iff V^\sharp$  is an isomorphism.
- b)  $I_R P = Q \iff F^\sharp$  is an isomorphism.

*We say  $\mathcal{P}$  is étale if a) holds and  $\mathcal{P}$  is of multiplicative type if b) holds.*

PROPOSITION 6.4. — *Let  $\mathcal{P}/R$  be a Dieudonné display. There is a map  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^{ét}$  to an étale Dieudonné display which is universal with respect to morphisms from  $\mathcal{P}$  to étale Dieudonné displays. The map  $P \rightarrow P^{ét}$  is surjective and if  $P^{nil}$  is its kernel, then  $\mathcal{P}^{nil} = (P^{nil}, P^{nil} \cap Q, F, F_1)$  is a nilpotent Dieudonné display.*

This proposition has a dual proposition which we do not state explicitly.

Our artin ring  $R$  is canonically a  $W(k)$ -algebra. Let  $\bar{k}$  be an algebraic closure of  $k$ ,  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$  and  $\bar{R} = R \otimes_{W(k)} W(\bar{k})$ , equipped with its continuous action of  $\Gamma$ . If  $H$  is a finitely generated free  $\mathbf{Z}_p$ -module endowed with a continuous, for its  $p$ -adic topology, action of  $\Gamma$  we set

$$P(H) = \left( \widehat{W}(\bar{R}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} H \right)^\Gamma.$$

The natural map  $\widehat{W}(\bar{R}) \otimes_{\widehat{W}(R)} P(H) \rightarrow \widehat{W}(\bar{R}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} H$  is an isomorphism. Let  $\mathcal{P}(H)$  be the étale Dieudonné display  $(P(H), Q(H), F, F_1)$  where  $P(H) = Q(H)$  and  $F_1$  is induced by  $f \otimes_{\mathbf{Z}_p} \text{id}_H$  on  $\widehat{W}(\bar{R}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} H$ ,  $F = p \cdot F_1$ .

Conversely, if  $\mathcal{P}$  is an étale Dieudonné display over  $R$  define  $H(\mathcal{P})$  to be the kernel of the  $\mathbf{Z}_p$ -linear homomorphism.

$$F_1 - \text{id} : \widehat{W}(\bar{R}) \otimes_{\widehat{W}(R)} P \longrightarrow \widehat{W}(\bar{R}) \otimes_{\widehat{W}(R)} P.$$

PROPOSITION 6.5. — *These functors establish equivalences of categories between étale Dieudonné displays over  $R$  and continuous  $\Gamma$ -modules, finitely generated and free as  $\mathbf{Z}_p$ -modules.*

PROPOSITION 6.6. — *Let  $\mathcal{P}$  be a nilpotent Dieudonné display over  $R$ ,  $\overline{\mathcal{P}}$  the corresponding nilpotent Dieudonné display over  $\bar{R}$  and  $C_{\bar{R}}$  the cokernel of  $F_1 - i : \bar{Q} \rightarrow \bar{P}$ . Then there is an isomorphism  $\text{Hom}_\Gamma(H, C_{\bar{R}}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}(\mathcal{P}(H), \mathcal{P})$ .*

This is proved using Galois cohomology to establish that  $H^1(\Gamma, \text{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(H, \bar{Q})) = (0)$ .

Let  $G$  be a  $p$ -divisible group over  $R$ ; we wish to associate to it a Dieudonné display. As  $R$  is an artin local ring we have an exact sequence

$$0 \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow G \longrightarrow G^{\text{ét}} \longrightarrow 0$$

where  $G^{\text{ét}}$  is étale and  $\widehat{G}$  is a  $p$ -divisible formal group.

Write  $G^{\text{ét}} = BT(H) = \varinjlim p^{-n}H/H$  and  $\widehat{G} = BT_{\widehat{\mathcal{P}}}$ , where  $\widehat{\mathcal{P}}$  is a nilpotent Dieudonné display.

PROPOSITION 6.7. — *There is a canonical isomorphism*

$$\text{Hom}_\Gamma(H, \widehat{G}(\bar{R})) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}(BT(H), \widehat{G}).$$

THEOREM 6.8. — *There is an equivalence of categories*

$$\text{Dieudonné displays}/R \xrightarrow{\sim} p\text{-divisible groups}/R.$$

This follows from Propositions 6.1, 6.6, 6.7 and the fact that there are no non-trivial homomorphisms in either direction between étale and nilpotent Dieudonné displays (resp. étale and  $p$ -divisible formal groups over  $R$ ).

*Remark 6.9.* — The following questions raised by Zink in [Z3] remain open.

(i) If  $G/R$  is a  $p$ -divisible group with associated Dieudonné displays  $\mathcal{P}$ , is the Dieudonné crystal associated to  $\mathcal{P}$  (canonically) isomorphic to that associated to  $G$  by crystalline Dieudonné theory? The answer is of course yes by Theorem 3.5 if  $G$  is a  $p$ -divisible formal group.

(ii) Lau has shown that the equivalence between  $p$ -divisible groups and Dieudonné displays is compatible with duality, [L2].

(iii) The classification when  $R$  is a complete noetherian local ring is obtained by defining  $\widehat{W}(R) = \varprojlim \widehat{W}(R/\mathfrak{m}^n)$  and Dieudonné displays in the obvious manner since  $p$ -divisible groups/ $R \xrightarrow{\sim} \varprojlim p$ -divisible groups  $R/\mathfrak{m}^n$ .

## 7. WINDOWS AND DIEUDONNÉ DISPLAYS

If  $K$  is a local field of characteristic zero with perfect residue field of characteristic  $p$ , then one knows how to classify  $p$ -divisible groups over the ring of integer  $\mathcal{O}_K$ . If the absolute ramification index  $e \leq p - 2$ , the maximal ideal  $\mathfrak{m}_K$  has nilpotent divided powers and [Gr1] explains how to do this using the filtered Dieudonné module. A more direct approach to this classification is given in [Fon1]. Breuil has extended this result if  $p \neq 2$  to the case where  $e$  is arbitrary, [Br], see also the appendix of [K]. Zink has generalized Breuil's result to give a classification of  $p$ -divisible groups over a local finite flat  $W(k)$ -algebra  $S$ . When  $S = \mathcal{O}_K$ , Zink further shows that the category Breuil uses, strongly divisible modules, is naturally equivalent to the category of Dieudonné displays over  $\mathcal{O}_K$ . We indicate now Zink's generalization.

Let  $R$  be a local ring with perfect residue field of characteristic  $p \geq 3$ . Assume there is a  $n$  such that  $x^n = 0$  for all  $x \in \mathfrak{m}$ . If  $S \xrightarrow{\pi} R$  is a divided power thickening and  $S$  satisfies the same hypotheses we have the  $\log : W(J) \xrightarrow{\sim} J^{\mathbf{N}}$ ,  $J = \text{Ker}(\pi)$ . Let  $\widetilde{W}(J) = \log^{-1}(J^{\mathbf{N}})$ . Then  $\widehat{W}(J) \subset \widetilde{W}(J)$  and they are equal if the  $\gamma_m(x)$  of each  $x \in J$  are zero, for  $m \gg 0$ , depending on  $x$ . Denote by  $\widetilde{W}(S)$  the subring of  $W(S)$  generated by  $\widehat{W}(S)$  (cf. §6) and  $\widetilde{W}(J)$ . If  $A$  is a  $p$ -adic local ring equipped with an homomorphism  $A \xrightarrow{\pi} R$  and  $\text{Ker}(\pi)$  has divided powers compatible with those on  $pA$ , we define  $\widetilde{W}(A) = \varprojlim \widetilde{W}(A/p^n)$ , the limit over those  $n$  such that  $p^n = 0$  in  $R$ . Similarly we define  $\widehat{W}(A)$ .

**DEFINITION 7.1.** — (i) A *frame for  $R$*  is a flat  $\mathbf{Z}_p$ -algebra  $A$  which is a  $p$ -adic ring equipped with a surjection  $\pi : A \rightarrow R$  whose kernel has divided powers and an endomorphism  $\sigma : A \rightarrow A$  which lifts Frobenius.

(ii) A *Dieudonné frame for  $R$*  is a frame for  $R$  which, in addition, satisfies  $A/p^n A$ , is for all  $n$  a local ring whose maximal ideal satisfies the nilpotence condition imposed on  $R$  and the Cartier map  $A \xrightarrow{\delta} W(A)$  factors through  $\widetilde{W}(A)$ .

(iii) A Dieudonné window for a frame  $(A, \sigma)$  (resp. a Dieudonné frame) is a finitely generated projective  $A$ -module  $M$  a submodule  $M_1$  which contains  $JM$ ,  $J = \text{Ker}(\pi)$ , a  $\sigma$ -linear map  $\Phi : M \rightarrow M$  such that  $M/M_1$  is a projective  $R$ -module,  $\Phi M_1 \subset pM$  and  $M$  is generated by  $\Phi M \cup \frac{1}{p} \Phi M_1$ .

The hypothesis that  $A \xrightarrow{\delta} W(A)$  factors through  $\widetilde{W}(A)$  implies that the composite

$$A \xrightarrow{\delta} W(A) \xrightarrow{W(\pi)} W(R)$$

factors through  $\widehat{W}(R)$ . Hence we may associate to a Dieudonné window a Dieudonné display over  $R$  as follows

$$\begin{aligned} P &= \widehat{W}(R) \otimes_A M \\ Q &= \ker\left(\widehat{W}(R) \otimes_A M \longrightarrow M/M_1\right) \\ F(\xi \otimes x) &= f\xi \otimes \Phi x, \quad \xi \in \widehat{W}(R), x \in M \\ F_1(\xi \otimes y) &= f\xi \otimes \frac{1}{p}\Phi y, \quad \xi \in \widehat{W}(R), y \in M_1 \\ F_1(v\xi \otimes x) &= \xi \otimes \Phi x, \quad \xi \in \widehat{W}(R), x \in M. \end{aligned}$$

**THEOREM 7.2.** — *Let  $R$  satisfy our hypotheses and  $(A, \sigma)$  be a Dieudonné frame for  $R$ . Then the functor Dieudonné  $A$ -windows  $\rightarrow$  Dieudonné displays/ $R$  is an equivalence of categories.*

This theorem is established by constructing a quasi-inverse functor. To do this one associates to a Dieudonné display a crystal generalizing the discussion of §6 in that we no longer require any nilpotence condition on divided power thickenings. Lemma 2.1 and Theorem 2.4 extend to this situation. Note if the divided powers on  $J = \text{ker}(S \xrightarrow{\pi} R)$  are not nilpotent it is essential that one works with  $\widetilde{W}(S)$  and not  $\widehat{W}(S)$  for proving Lemma 2.1 in this context. Then, if  $\mathcal{P}$  is a Dieudonné display over  $R$  and  $\widetilde{\mathcal{P}}$  is a triple over  $A$  which lifts  $\mathcal{P}$  in the sense that  $\widetilde{\mathcal{P}} = (\widetilde{P}, F, F_1)$  where  $\widetilde{P}$  is a finitely generated free  $\widetilde{W}(A)$ -module, the window associated to  $\mathcal{P}$  is

$$M = A \otimes_{\widetilde{W}(A)} \widetilde{P}, \quad M_1 = \text{Ker}\left(M \longrightarrow R \otimes_{\widetilde{W}(R)} P \longrightarrow P/Q\right).$$

The crystal associated to  $\mathcal{P}/R$  depends only on  $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{R/p}$ . For this Dieudonné display we have

$$\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{P}}} : \overline{\mathcal{P}}^{(p)} \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}$$

and this induces  $\Phi : M \rightarrow M$ ,  $\sigma$ -similinear.

Let  $S$  be a finite flat local  $W(k)$ -algebra. Consider a presentation

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow W(k)[T_1, \dots, T_d] \longrightarrow S \longrightarrow 0,$$

where each  $T_i$  has image in the maximal ideal of  $S$ .

Let  $A_0 =$  the divided power envelope of  $I$  modulo  $p$ -torsion (i.e. if  $K = \text{Frac}(W(k))$ , the subring of  $K[T_1, \dots, T_d]$  generated over  $W(k)$  by  $\{\frac{x^n}{x!}, x \in I\}$ . We have a surjection  $A_0 \twoheadrightarrow S$ . Let  $\sigma : W(k)[T_1, \dots, T_d] \rightarrow W(k)[T_1, \dots, T_d]$  be  $f$  semi-linear with  $\sigma(T_i) = T_i^p$ . Then  $\sigma$  leaves  $I + (p)$  stable. If  $J_0 = \text{Ker}(A_0 \rightarrow S)$ , that is the divided power ideal,  $J_0 + pA_0$  has divided powers and  $\sigma$  extends to  $A_0$ ,  $\sigma$  lifts Frobenius. Let  $A$  be the  $p$ -adic completion of  $A_0$ . If  $R = S/p^n S$  for some fixed  $n$ , then  $(A, \sigma)$  is a Dieudonné frame for  $R$  since one shows that  $A \xrightarrow{\delta} W(A)$  factors through  $\widetilde{W}(A)$ . By Theorem 6.8 and 7.2, Dieudonné windows for  $(A, \sigma)$  classify  $p$ -divisible groups over  $R$ .

Passing to the limit over  $n$  we obtain:

**THEOREM 7.3.** — *The category of Dieudonné windows for the frame  $(A, \sigma)$  is equivalent to the category of  $p$ -divisible groups over  $S$ .*

**8. FURTHER RESULTS**

Zink has applied techniques from his theory of displays to give new and simpler proofs of a purity result for  $p$ -divisible groups. This result [dJO] states the following:

**PROPOSITION 8.1** (de Jong–Oort). — *Let  $R$  be a noetherian local ring of dimension  $\geq 2$ ,  $U$  the complement of the closed point in  $\text{Spec}(R)$ . If  $G/R$  is a  $p$ -divisible group which has constant Newton polygon over  $U$ , then  $G$  has constant Newton polygon over  $\text{Spec}(R)$ .*

Zink’s proof of this result uses, in part, ideas of Vasiliu, who proved a more general result of [V].

Langer and Zink have developed a theory of the de Rham–Witt complex valid for  $X$  an arbitrary scheme over a  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algebra  $R$ . This theory is related to, but not the same as the “absolute theory” of [HM]. It generalizes the classical theory of Bloch–Illusie, [Ill1]. If  $R$  is a ring with  $p$  nilpotent in  $R$  and  $X$  is an  $R$ -scheme there are complexes  $W_n \Omega_{X/R}^\bullet$  of  $W_n(\mathcal{O}_X)/W_n(R)$  differential graded algebras such that

$$W_n(\mathcal{O}_X) = W_n \Omega_{X/R}^0, d : W_n(\mathcal{O}_X) \rightarrow W_n \Omega_{X/R}^1$$

satisfies  $d(\gamma_n(v\xi)) = \gamma_{n-1}(v\xi)d(v\xi)$ . There are algebra homomorphisms  $F : W_{n+1} \Omega_{X/R}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_{X/R}^\bullet$  and additive maps  $V : W_n \Omega_{X/R}^\bullet \rightarrow W_{n+1} \Omega_{X/R}^\bullet$ . If  $X/R$  is smooth, then  $\mathbb{H}^*(X, W_n \Omega_{X/R}^\bullet)$  is canonically isomorphic to  $H_{\text{crys}}^*(X/W_n(R))$ . Passing to the inverse limit one defines  $W \Omega_{X/R}^\bullet$ . It has operators  $F, V, d$  satisfying the standard relations  $FdV = d, Vd = dVp, dF = pFd$ .

If  $X/R$  is proper and smooth, we have

$$\mathbb{H}^*(X, W \Omega_{X/R}^\bullet) \simeq H_{\text{crys}}^*(X/W(R)).$$



As an application we give the Zink–Langer construction of the display associated to an abelian scheme. Let  $X/R$  be an abelian scheme of relative dimension  $g$ . Let  $P = H_{\text{Crys}}^1(X/W(R))$ , a projective  $W(R)$ -module of rank  $2g$ . Consider the subcomplex of  $W\Omega_{X/R}^\bullet$  obtained by replacing  $W(\mathcal{O}_X)$  by  $I_X = v(W(\mathcal{O}_X))$ . Denote this complex by  $IW\Omega_{X/R}^\bullet$ .

We have a commutative diagram

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} I_X & \xrightarrow{d} & W\Omega_{X/R}^1 & \xrightarrow{d} & W\Omega_{X/R}^2 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow v^{-1} & & \downarrow F & & \downarrow pF & & \\ W(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{d} & W\Omega_{X/R}^1 & \xrightarrow{d} & W\Omega_{X/R}^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Let  $Q$  be the  $W(R)$ -module obtained as the  $\mathbb{H}^1(X, IW\Omega_{X/R}^\bullet)$ .

We have an exact sequence

$$0 \longrightarrow IW\Omega_{X/R}^\bullet \longrightarrow W\Omega_{X/R}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

where  $\mathcal{O}_X$  is viewed as a complex concentrated in degree zero.

Taking  $\mathbb{H}^1$  of this sequence we find

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow P \longrightarrow \text{Lie}(X) \longrightarrow 0.$$

PROPOSITION 8.2. — *Let  $F_1 : Q \rightarrow P$  be the  $f$ -linear map induced by the diagram (\*). Then  $\mathcal{P} = (P, Q, F, F_1)$  is a display over  $R$ .*

We end with a question and two comments:

1) Can the de Rham–Witt complex be used to directly construct the nilpotent display associated to a  $p$ -divisible formal group over a Nagata ring  $R$ . More generally we ask whether using crystalline techniques will allow us to associate a Dieudonné display to a  $p$ -divisible group over a complete noetherian local ring whose residue field is perfect of characteristic  $p$ .

2) Breuil has, extending work of Fontaine and Conrad, classified finite flat commutative  $p$ -group schemes over  $\mathcal{O}_K$  (notation as in § 7) for  $p \neq 2$ . Crystalline Dieudonné theory is defined for such group schemes over any base where  $p$  is nilpotent and has good faithfulness properties if the base is of characteristic  $p$  and is a reasonably nice scheme, [BM2], [dJ1], [dJM]. Thus it seems reasonable to hope that a good theory of displays which will classify finite flat  $p$ -group schemes can be developed.

3) In [Z5], page 132, Zink says he “would expect” that  $BT$  defines an equivalence of categories between nilpotent displays and  $p$ -divisible formal groups over any noetherian  $R$ . Recently Lau, [L1], has proven this conjecture of Zink without the noetherian hypothesis on  $R$ , requiring only that  $R$  is separated and complete for the  $p$ -adic topology. His proof uses the Grothendieck–Illusie theory, [Ill2], of deformations of truncated Barsotti–Tate groups.

## REFERENCES

- [Ber] P. BERTHELOT – *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique  $p > 0$* , Lect. Notes in Math., vol. 407, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [BBM] P. BERTHELOT, L. BREEN & W. MESSING – *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lect. Notes in Math., vol. 930, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [BM1] P. BERTHELOT & W. MESSING – *Théorie de Dieudonné cristalline I*, in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes I*, Astérisque, vol. 63, Soc. Math. France, Paris, 1979, p. 17–37.
- [BM2] ———, *Théorie de Dieudonné cristalline III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser, Boston, 1990, p. 173–247.
- [Bour] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative*, chapitres 8 et 9, Masson, 1983.
- [Br] C. BREUIL – *Groupes  $p$ -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, *Ann. of Math. (2)* **152** (2000), no. 2, p. 489–549.
- [Car1] P. CARTIER – *Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **265** (1967), p. 50–52.
- [Car2] ———, *Modules associés à un groupe formel commutatif. Courbes typiques*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **265** (1967), p. A129–A132.
- [Car3] ———, *Seminar at the Inst. Hautes Études Sci.*, Spring 1972.
- [Dem] M. DEMAZURE – *Lectures on  $p$ -divisible groups*, Lect. Notes in Math., vol. 302, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [Fon1] J.-M. FONTAINE – *Groupes  $p$ -divisibles sur les corps locaux*, Astérisque, vol. 47-48, Soc. Math. France, Paris, 1977.
- [Fon2] ———, *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **280** (1975), p. A1423–A1425.
- [Gr1] A. GROTHENDIECK – *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, in *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice 1970) I*, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 431–436.
- [Gr2] ———, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Sémin. Math. Sup., vol. 45, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1974.
- [Gr3] ———, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique I*, Lect. Notes in Math., vol. 288, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [Haz] M. HAZEWINKEL – *Formal groups and applications*, Pure Appl. Math., vol. 78, Academic Press Inc., New York, 1978.
- [HM] L. HESSELHOLT & I. MADSEN – *On the De Rham-Witt complex in mixed characteristic*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **37** (2004), no. 1, p. 1–43.
- [Ill1] L. ILLUSIE – *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **12** (1979), no. 4, p. 501–661.

- [Ill2] ———, Déformations de groupes de Barsotti-Tate (d'après A. Grothendieck), in *Sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérisque, vol. 127, 1985, p. 151–198.
- [Ill3] ———, *Complexe cotangent et déformations I*, Lect. Notes in Math., vol. 239, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [Ill4] ———, *Complexe cotangent et déformations II*, Lect. Notes in Math., vol. 283, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [dJ1] A. J. DE JONG – Finite locally free group schemes in characteristic  $p$  and Dieudonné modules, *Invent. Math.* **114** (1993), no. 1, p. 89–137.
- [dJ2] ———, Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1995), no. 82, p. 5–96 (1996).
- [dJM] A. J. DE JONG & W. MESSING – Crystalline Dieudonné theory over excellent schemes, *Bull. Soc. Math. France* **127** (1999), no. 2, p. 333–348.
- [dJO] A. J. DE JONG & F. OORT – Purity of the stratification by Newton polygons, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), no. 1, p. 209–241.
- [K] M. KISIN – Crystalline representations and  $F$ -crystals, in *Algebraic geometry and number theory*, Progr. Math., vol. 253, Birkhäuser, Boston, 2006, p. 459–496.
- [LZ1] A. LANGER & T. ZINK – De Rham-Witt cohomology for a proper and smooth morphism, *J. Inst. Math. Jussieu* **3** (2004), no. 2, p. 231–314.
- [LZ2] ———, De Rham-Witt cohomology and displays, available on Zink's web page.
- [L1] E. LAU – Displays and formal  $p$ -divisible groups, submitted manuscript.
- [L2] ———, Dieudonné displays and duality, manuscript, April 10, 2007.
- [Laz] M. LAZARD – *Commutative formal groups*, Lect. Notes in Math., vol. 443, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [MM] B. MAZUR & W. MESSING – *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lect. Notes in Math., vol. 370, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [M] W. MESSING – *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lect. Notes in Math., vol. 264, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [Mu] D. MUMFORD – Bi-extensions of formal groups, in *Algebraic Geometry (Bombay, 1968)*, Oxford Univ. Press, London, 1969, p. 307–322.
- [N] P. NORMAN – An algorithm for computing local moduli of abelian varieties, *Ann. Math. (2)* **101** (1975), p. 499–509.
- [Ser] J.-P. SERRE – Groupes  $p$ -divisibles (d'après J. Tate), in *Séminaire Bourbaki 1966/67*, Collection Hors Série, vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 1995, exp. no. 318, p. 73–86.

- [Ta] J. T. TATE –  $p$  – divisible groups., in *Proceedings of a Conference on local fields (Driebergen, 1966)*, Springer, Berlin, 1967, p. 158–183.
- [V] A. VASIU – Crystalline boundedness principle, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), no. 2, p. 245–300.
- [Z1] T. ZINK – *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen*, Teubner-Texte zur Mathematik, vol. 68, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1984.
- [Z2] ———, Cartiertheorie über perfecten Ringen I, II, preprints *Akad. Wissenschaften Berlin*, 1986.
- [Z3] ———, A Dieudonné theory for  $p$ -divisible groups, in *Class field theory—its centenary and prospect (Tokyo, 1998)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 30, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001, p. 139–160.
- [Z4] ———, Windows for displays of  $p$ -divisible groups, in *Moduli of abelian varieties (Texel Island 1999)*, Progr. Math., vol. 195, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 491–518.
- [Z5] ———, The display of a formal  $p$ -divisible group, in *Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques I*, Astérisque, vol. 278, 2002, p. 127–248.
- [Z6] ———, Lectures on displays, formal groups, ..., Lectures at Université Paris XIII, March 2006.

William MESSING

School of Mathematics

University of Minnesota

206 Church St. S.E.

Minneapolis, MN 55455 – U.S.A.

*E-mail* : `messaging@math.umn.edu`

**THE WAVE MAP PROBLEM.  
SMALL DATA CRITICAL REGULARITY  
[after T. Tao]**

by Igor RODNIANSKI

**1. INTRODUCTION**

The purpose of this paper is to describe the wave map problem

$$(1) \quad \begin{aligned} \square\phi &= -\phi(\partial_\alpha\phi \cdot \partial^\alpha\phi), \\ \phi|_{t=0} &= \phi_0, \quad \partial_t\phi|_{t=0} = \phi_1 \end{aligned}$$

where  $\phi$  is a map  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ , and its analogs for other target manifolds, with a specific focus on the small data critical regularity results of T. Tao, contained in the following

**THEOREM 1** ([30], [31]). — *Let  $n \geq 2$  and  $s > \frac{n}{2}$ . The solution of the Cauchy problem (1) with initial data  $(\phi_0, \phi_1) \in (\mathbb{S}^{m-1}, T\mathbb{S}^{m-1})$  in  $(\dot{H}^s, \dot{H}^{s-1})$  can be extended uniquely to a global solution  $(\phi(t), \partial_t\phi(t)) \in (\dot{H}^s, \dot{H}^{s-1})$  on  $\mathbb{R}^{n+1}$  provided that the initial data  $(\phi_0, \phi_1)$  has a sufficiently small  $(\dot{H}^{\frac{n}{2}}, \dot{H}^{\frac{n}{2}-1})$  norm:*

$$\|\phi_0\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)} + \|\phi_1\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

These results imply that in dimensions  $n \geq 3$ , despite the fact that the wave map problem is *supercritical* relative to a conserved energy and there exist solutions blowing up in finite time, its classical solutions with  $\mathbb{S}^{m-1}$  target can be extended globally in time as long as the initial data has a small scale-invariant  $\dot{H}^{\frac{n}{2}}$  norm<sup>(1)</sup>. In the critical dimension  $n = 2$  the result is particularly exciting as it implies that a solution exists globally as long as it has a small energy.

---

<sup>(1)</sup>Here and in what follows we will denote the initial data by  $\phi[0] = (\phi_0, \phi_1)$  and will say that  $\phi[0] \in H^s$  meaning  $(\phi_0, \phi_1) \in H^s \times H^{s-1}$ .

The problem (1) arises as an Euler-Lagrange equation corresponding (formally) to the critical points of the Lagrangian density:

$$(2) \quad \mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \phi \cdot \partial_\beta \phi) m^{\alpha\beta},$$

where  $m_{\alpha\beta}$  is the Minkowski metric on  $\mathbb{R}^{n+1}$ . The density  $\mathcal{L}[\phi]$  gives rise to the Minkowski analog of the harmonic map problem on  $\mathbb{R}^n$ , in which the energy density is given by  $\frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi$  and the critical points, harmonic maps  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ , satisfy the equation

$$\Delta\phi = -\phi(\nabla\phi \cdot \nabla\phi).$$

The equation (1) belongs to the more general class of wave map problems, in which  $\phi$  is a map from an  $(n + 1)$ -dimensional Lorentzian manifold  $(\mathcal{M}, g)$  to a Riemannian manifold  $(\mathcal{N}, h)$ . The map  $\phi$  is a solution of the Euler-Lagrange equations:

$$(3) \quad D^\alpha \partial_\alpha \phi = 0,$$

corresponding to the Lagrangian density:

$$(4) \quad \mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} h_{ij} (\partial_\alpha \phi^i \partial_\beta \phi^j) g^{\alpha\beta}.$$

Here  $\{\phi^i\}$  denote local coordinates on  $\mathcal{N}$ .  $D$  is the pull-back of the Levi-Civita connection on  $T\mathcal{N}$  to the bundle  $\phi^*(T\mathcal{N})$ . In terms of the local coordinates  $\{\phi^i\}$  this pull-back connection acting on sections of  $\phi^*(T\mathcal{N})$  reads:

$$(5) \quad D_\alpha = \nabla_\alpha + \bar{\Gamma}_{\alpha j}^k, \quad \bar{\Gamma}_{\alpha j}^k = \Gamma_{ij}^k(\phi) \partial_\alpha \phi^i,$$

where  $\Gamma_{ij}^k$  is the Christoffel symbol in the coordinates  $\{\phi^i\}$  and  $\nabla$  is a covariant derivative on  $T\mathcal{M}$ . The wave-map equation (3) has the form:

$$(6) \quad \square_g \phi^k = -\Gamma_{ij}^k(\phi) g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \phi^i \partial_\beta \phi^j).$$

In particular in the case of a wave map problem from Minkowski space  $(\mathbb{R}^{n+1}, m)$  the map  $\phi$  verifies the equation

$$(7) \quad \square\phi = -\Gamma(\phi)(\partial_\alpha \phi, \partial^\alpha \phi).$$

The wave map problem appears naturally in solid-state physics, theory of topological solitons, Quantum Field Theory and General Relativity:

**Topological solitons.** — One of the simplest non-trivial models with *topological soliton* solutions is the  $(2 + 1)$  dimensional Lorentz invariant  $O(3)$  classical  $\sigma$ -model which is nothing else but a  $(2 + 1)$ -dimensional wave map problem with  $\mathbb{S}^2$  target. It arises in the study of a continuum limit of an isotropic anti-ferromagnet, [8]. Topological solitons in this model are the *static* solutions (harmonic maps from  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  of the equation

$$\square\phi = -\phi(\partial_\alpha \phi \cdot \partial^\alpha \phi)$$

which minimize the energy (conserved under evolution)

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}^2} (|\partial_t \phi|^2 + |\nabla_x \phi|^2) dx$$

in a given homotopy class. Such maps satisfy the Bogomol'nyi equation

$$\partial_i \phi = \pm \epsilon_{ij} \phi \times \partial_j \phi$$

and are thought to represent meta-stable particles, [1]. Here  $\epsilon_{ij}$  is an anti-symmetric tensor in two dimensions. The important feature of this model, common to all  $(2+1)$ -dimensional wave map problems, is its *criticality*. Both the equation and the conserved energy  $E[\phi]$  are invariant under scaling transformations  $\phi(t, x) \rightarrow \phi(\lambda t, \lambda x)$ . The problem displays a fascinating interplay between the infinite dimensional wave map dynamics defined by (1) and a finite dimensional dynamics generated by restricting the full dynamics to the moduli space of static solutions (e.g. self-shrinking ( $\lambda \rightarrow 0$ ) of harmonic maps), see e.g. [20], ultimately leading to the existence of large data solutions of (1) blowing up in finite time, [23].

**General Relativity.** — The wave map problem on a curved  $(2+1)$ -dimensional background with an  $\mathbb{H}^2$  target arises in the  $U(1)$  symmetry reduction of the Einstein vacuum equations. In this case one starts with a  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  Lorentzian  $(3+1)$ -dimensional manifold with Ricci curvature

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = 0.$$

Under the assumption that  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  is invariant under the group action of  $U(1)$  which orbits are space-like the metric  $\mathbf{g}$  can be decomposed

$$\mathbf{g} = e^{-2\gamma} g + e^{2\gamma} (\theta)^2$$

where  $g$  is a Lorentzian metric on a  $(2+1)$ -dimensional manifold  $\mathcal{N} = (\Sigma \times \mathbb{R})$  and  $\theta = dx^3 + A_a dx^a$  with  $a = 0, 1, 2$  local coordinates on  $\mathcal{N}$  and  $x^3$  a coordinate along the orbit. The equations  $\mathbf{R}_{a3} = 0$  (and the assumption of triviality of the first cohomology class of  $\Sigma$ ) imply that

$$dA = \frac{1}{2} e^{-4\gamma} \star d\omega,$$

where  $\star$  is the Hodge dual relative to the metric  $g$  and a scalar function  $\omega$  is called a twist potential. The equation  $\mathbf{R}_{33} = 0$  implies that

$$\begin{aligned} \square_g \gamma + \frac{1}{2} e^{-4\gamma} g^{ab} \partial_a \omega \partial_b \omega &= 0, \\ \square_g \omega - 4g^{ab} \partial_a \omega \partial_b \gamma &= 0 \end{aligned}$$

which can be recognized as a wave map equation from  $(\Sigma \times \mathbb{R}, g)$  into the hyperbolic space  $\mathbb{H}^2$  with the metric

$$2(d\gamma)^2 + \frac{1}{2} e^{-4\gamma} (d\omega)^2.$$

Note that the wave map evolves on a dynamic background with the metric  $g$ , which itself depends on the wave map. This coupling is determined by satisfying the remaining equations  $\mathbf{R}_{ab} = 0$ . The only result available in this fully nonlinear context is a small data global stability in the expanding direction statement for solutions with  $\Sigma$  a compact surface with genus greater than one, metric  $g = -dt^2 + t^2\sigma$  with  $\sigma$  a metric of scalar curvature  $-1$  on  $\Sigma$  and the wave map  $\phi = 0$ , see [6].

**Acknowledgments.** — The author would like to thank Terry Tao for valuable comments on this paper.

## 2. SUMMARY OF QUESTIONS AND RESULTS FOR THE WAVE MAP PROBLEM FROM MINKOWSKI SPACE

Traditionally<sup>(2)</sup>, as the wave map equation is a hyperbolic evolution problem, one is interested in the questions of local and global in time existence and uniqueness of solutions, existence of solutions blowing up in finite time and stability of static or other “preferred”<sup>(3)</sup> solutions. The wave map equation from Minkowski space is invariant under the scaling transformation  $\phi(t, x) \rightarrow \phi(\lambda t, \lambda x)$ , which also preserves the  $\dot{H}^{\frac{n}{2}}$  Sobolev norm. On this basis and in view of a geometric nature of the problem, our experience suggests that we could expect<sup>(4)</sup> that:

Local in time solutions exist and unique for any initial data  $\phi[0] \in H^s$  with  $s > n/2$ .

Solutions with data with a small  $\dot{H}^{\frac{n}{2}}$ -norm can be extended globally in time.

Large data classical solutions can be extended globally in time for the  $(2 + 1)$ -dimensional (*critical*) wave map problem, where the scale invariant space  $\dot{H}^1$  coincides with a conserved energy space, at least in the case of a target manifold of negative curvature, in analogy with the harmonic map heat flow.

Large data classical solutions can be extended globally in time for the  $(1 + 1)$ -dimensional wave map problem, where the scale invariant space  $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$  is larger (subcritical) than the energy space.

---

<sup>(2)</sup>The connection of the wave problem to QFT and GR may present an additional set of questions.

<sup>(3)</sup>An example of such a solution is  $\phi = \gamma(u)$  where  $\gamma$  is a geodesic on  $(\mathcal{N}, h)$  and  $u$  verifies the wave equation  $\square u = 0$ .

<sup>(4)</sup>Just on the basis of presented here “evidence” perhaps a more appropriate term here would be “hope” as in some other problems these expectations have not been yet fulfilled or simply turned out to be wrong. For the wave map problem these expectations are more grounded due to the referred to above geometric origin of the problem, which makes available various cancellation properties (e.g. the expression  $\partial^\alpha \phi \cdot \partial_\alpha \phi$  is an example of a *null form* eliminating parallel interactions of free waves).



Below we briefly (and incompletely, sometimes referring to just the final result) summarize known results (a good survey of the wave map problem is given in [34]):

Existence and uniqueness of local in time solutions in  $H^s$  with  $s > n/2$  is in [13], [15] and [11] in dimension  $n = 1$ .

Small data global existence in  $\dot{H}^{\frac{n}{2}} \times \dot{H}^{\frac{n}{2}}$  in dimensions  $n \geq 2$  is shown in [30], [31]. Extensions to other targets are in [14], [25], [21], [16], [17], [35].

Large data global existence for the  $(1+1)$ -dimensional wave map is established in [9], [19].

Existence of large data solutions blowing up in finite time in dimensions  $n \geq 3$  is shown in [24], [4].

Stability of a trivial constant wave map and geodesic wave maps is in [27] and stability of certain  $(2+1)$ -dimensional spherically symmetric solutions is in [18].

For the critical  $(2+1)$ -dimensional wave map problem existence of solutions blowing up in finite time was proved in [23] for the  $\mathbb{S}^2$  target. The large data global existence result is conjectured for the  $\mathbb{H}^2$  target.

We should also mention that good results have been obtained for the large data critical  $(2+1)$ -dimensional wave map problem for solutions with additional *spherical* or *equivariant* symmetry assumptions. It was shown in [7] (for geodesically convex targets), [29] that large data global spherically symmetric solutions can be extended globally and uniquely in time.

The  $k$ -equivariant (co-rotational) solutions of the wave map problem are considered in the case when a target manifold is a surface of revolution. The results in [26] and [28] imply that a solution blows up in finite time only if the energy concentrates (in particular small energy implies regularity), blow-up can not occur at a self-similar rate and at the blow-up a harmonic map can be “bubbled off”. We note that in the case of the  $\mathbb{S}^2$  target the equation for a  $k$ -equivariant wave map takes the form

$$\partial_t^2 u - \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) u + k^2 \frac{\sin(2u)}{2r^2} = 0$$

for a single scalar function  $u$  satisfying the boundary conditions  $u(0) = 0$  and  $u(\infty) = \pi$ .

### 3. LOCAL SUBCRITICAL THEORY

We begin by discussing the framework for proving (subcritical) local existence and uniqueness results for the wave map problem (7) as it already contains major elements required for the (critical) small data global existence problem.

A general scheme for proving local existence and uniqueness in a Sobolev space  $H^s$  can be loosely described as follows:

*Identify a space  $X$  with the property that  $X$  contains solutions of the homogeneous wave equation  $\square w = 0$  with initial data in  $w[0] \in H^s$ .*

*Assume a priori that a solution  $\phi$  belongs to  $X$  and*

$$(8) \quad \|\phi\|_X \leq 2C_0$$

*for some constant  $C_0$ .*

*Express  $\phi$  via a representation*

$$(9) \quad \phi = W(t)\phi[0] - \square^{-1}(\Gamma(\phi)\partial^\alpha\phi \cdot \partial_\alpha\phi),$$

*where  $w = W(t)\phi[0]$  is a solution of the homogeneous wave equation  $\square w = 0$  with initial  $\phi[0]$  and  $v = \square^{-1}F$  denotes a solution of the inhomogeneous problem  $\square v = F$  with zero initial data at  $t = 0$ .*

*Show that*

$$(10) \quad \|\square^{-1}(\Gamma(\phi_1)(\partial^\alpha\phi_2 \cdot \partial_\alpha\phi_3))\|_X \leq C$$

*for arbitrary functions  $\|\phi_i\|_X \leq 2C_0$ .*

*In the energy method, in which space  $X$  is chosen to be  $L_t^\infty H^s$ , the representation (9) reads*

$$(11) \quad \phi(t) = W(t)\phi[0] - \int_0^t W(t-s)(\Gamma(\phi)\partial^\alpha\phi \cdot \partial_\alpha\phi)(s) ds,$$

and the estimate (10) follows from the standard energy estimates for the wave equation and a choice of a small time interval  $[0, T]$  gives local well-posedness in Sobolev spaces  $H^s$  with  $s > \frac{n}{2} + 1$ .

*The Strichartz method* is based on (11) and combines the energy estimates for the solution of the wave equation with the Strichartz estimates:

$$\|\phi\|_{L_t^q L_x^p} \lesssim \|\phi[0]\|_{\dot{H}^s} + \|\square\phi\|_{L_t^1 \dot{H}^{s-1}},$$

where

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{2}{q} &\leq (n-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right), \quad q \geq 2, \quad (n, q, p) \neq (3, 2, \infty), \\ \frac{1}{q} + \frac{n}{p} &= \frac{n}{2} - s. \end{aligned}$$

The space  $X = L_t^\infty H^s \cap L_t^2 W_\infty^1$  for  $n \geq 3$  and  $X = L_t^\infty H^s \cap L_t^4 W_\infty^1$  for  $n = 2$ . Local existence and uniqueness of solutions with initial data in  $H^s$  with  $s > \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$  for  $n \geq 3$  and  $s > \frac{n}{2} + \frac{3}{4}$  for  $n = 2$  follow by iterating the wave map equation in the spaces where the energy norm is complemented by the Strichartz norm  $\|\partial\phi\|_{L_t^2 L_x^\infty}$  for  $n \geq 3$  and  $\|\partial\phi\|_{L_t^4 L_x^\infty}$  for  $n = 2$ , see [22].

The  $H^{s,\delta}$  method<sup>(5)</sup> is based on the iteration in the space  $X = H^{s,\delta}$  with the norm

$$\|F\|_{H^{s,\delta}} = \|(1 + |\tau| + |\xi|)^s (1 + |\tau| - |\xi|)^\delta \tilde{F}(\tau, \xi)\|_{L_{\tau,\xi}^2}$$

adapted to the symbol of  $\square$  (i.e.,  $\square H^{s,\delta} = H^{s-1,\delta-1}$ ). For  $\delta > 1/2$  the space  $H^{s,\delta}$  is smaller than the intersection of energy space  $L_t^\infty H^s$  and the  $L_t^q L_x^p$  Strichartz spaces consistent with  $H^s$  regularity. Iteration in  $H^{s,\delta}$  leads to the local existence and uniqueness results in  $H^s$  with  $s > n/2$ , see [13], [15]. The key to this result is the algebra property

$$H^{s,\frac{1}{2}+} \cdot H^{s-1,-\frac{1}{2}+} \subset H^{s-1,-\frac{1}{2}+},$$

and the null form estimate

$$Q_0(H^{s,\frac{1}{2}+}, H^{s,\frac{1}{2}+}) \subset H^{s-1,-\frac{1}{2}+},$$

which both hold with  $s > \frac{n}{2}$ . Here  $H^{s,\frac{1}{2}+}$  stands for the space  $H^{s,\delta}$  with  $1/2 < \delta < 1/2 + s - n/2$ . The null form  $Q_0(\phi, \phi) = \partial_\partial \phi \partial^\alpha \phi$  is precisely the expression arising in the nonlinear term of the wave map problem. It has the property that for two solutions of the homogeneous wave equation  $\square\phi = \square\psi = 0$  we have

$$2Q_0(\phi, \psi) = \square(\phi\psi).$$

In particular  $Q_0$  eliminates parallel interactions, between  $\phi$  and  $\psi$  whose space-time Fourier transform lies on the cone  $|\tau|^2 = |\xi|^2$ . This special structure of the nonlinearity in the wave map problem is crucial for both the local existence and the small data global existence results in low dimensions.

The challenge in strengthening these results to obtain a global scale-invariant critical statement lied in the fact that it would require a scale-invariant homogeneous version of the space  $H^{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$

$$\|F\|_{\dot{H}^{s,\delta}} = \|(|\tau| + |\xi|)^s (|\tau| - |\xi|)^\delta \tilde{F}(\tau, \xi)\|_{L_{\tau,\xi}^2}.$$

The space  $\dot{H}^{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$  is not suitable (in fact it is not even well defined) for the solution of the critical wave map problem in particular in view of the *division* and *summation*

<sup>(5)</sup>In the context of the well-posedness theory for hyperbolic equations the  $H^{s,\delta}$  spaces were first used in the work of Klainerman-Machedon [12]. They are closely connected with the  $X^{s,b}$  spaces introduced and used by Bourgain for the Schrödinger and KdV equations in [2], [3].

problems one faces in the process of constructing (i.e., proving a priori estimates) the wave map via a representation (9)

$$\phi = W(t)\phi[0] - \square^{-1}(\Gamma(\phi)(\partial^\alpha \phi \cdot \partial_\alpha \phi)).$$

First we can modify the space  $\dot{H}^{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}}$  by improving its summability properties relative to the distance to the cone  $||\tau|-|\xi||$  while keeping the space scale-invariant. We assume that the space-time Fourier transform  $\tilde{F}(\tau, \xi)$  has support in the region  $|\xi| \approx 2^k$  and define

$$(13) \quad \|F\|_{\dot{H}_k^{s, \frac{1}{2}, 1}} = 2^{ks} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{j}{2}} \|m(2^{-j} ||\tau| - |\xi||) \tilde{F}(\tau, \xi)\|_{L^2_{\tau, \xi}},$$

where  $m$  is a smooth bump function supported on the interval  $[1/4, 4]$  and equal to one on  $[1/2, 2]$ . The division problem arises already at the level of attempting to implement the general existence scheme described above assuming that  $\phi$  is a linear combination of *finitely* many  $H_k^{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1}$  atoms. The summation problem requires handling square summable combinations of  $H_k^{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1}$  pieces.

#### 4. TATARU'S RESULT

In [32], [33] Tataru solved the division problem under the assumption that the initial has a small critical Besov norm  $\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}}$  instead of a larger Sobolev space  $\dot{H}^{\frac{n}{2}}$ . The summation problem was avoided by putting together the  $H_k^{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1}$  pieces in  $\ell^1$ . Such a space is only consistent with free waves with initial data in the smaller Besov space  $\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}}$ . The solution of the division problem requires enlarging the atomic space built on  $H_k^{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1}$  atoms by adding a component which lies in a *null frame* space. Without going into much details, the null frame spaces are motivated by the following observation. Let  $w$  be a unit frequency solution of the homogeneous wave equation  $\square w = 0$  whose spatial Fourier support lies in an angular sector  $\Omega$ . For simplicity we may assume that  $w$  is a + wave and thus it can be represented as a superposition of the traveling waves

$$w = \int_{\mathbb{R}^n} e^{it|\xi|+ix \cdot \xi} w_0(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \int_{\lambda \sim 1} e^{i\lambda(t+ix \cdot \omega)} w_0(\lambda \omega) \lambda^{n-1} d\lambda d\omega = \int_{\Omega} w_\omega(t+x \cdot \omega) d\omega,$$

where

$$w_\omega(s) = \int_{\lambda \sim 1} e^{is\lambda} w_0(\lambda \omega) \lambda^{n-1} d\lambda.$$

For a fixed  $\omega$  let  $u_\omega = t + x \cdot \omega$  denote a variable parametrizing the corresponding null (i.e., the length of the tangent vector  $(1, \omega)$  with respect to the Minkowski metric is

zero) direction and let  $x_\omega$  denote the variables  $(t - x \cdot \omega, x - x \cdot \omega)$ . Then the traveling wave decomposition has the property that

$$(14) \quad \int_{\Omega} \|u_\omega\|_{L^2_{u_\omega} L^\infty_{x_\omega}} \lesssim |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|w_0\|_{L^2_x}$$

In addition for any  $\theta \notin \Omega$

$$(15) \quad \|w\|_{L^\infty_{u_\theta} L^2_{x_\theta}} \lesssim \text{dist}(\theta, \Omega)^{-1} \|w_0\|_{L^2_x}$$

The iteration space<sup>(6)</sup>  $X$  is composed from the  $X_k$  atoms, where each space  $X_k$  contains functions  $F$  with spatial Fourier support in the region  $|\xi| \sim 2^k$  and

$$\|F\|_{X_k} = \inf \left( \|F_0\|_{H^{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1}_k} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_+} \|F_\ell\|_{Y_{k, \ell}} \right),$$

where the infimum is taken with respect to all possible decompositions  $F = F_0 + \sum_\ell F_\ell$ , the functions  $F_\ell$  are supported at distance  $\leq 2^{k-2\ell}$  from the cone  $\tau^2 = |\xi|^2$  in Fourier space. Each of the spaces  $Y_{k, \ell}$  is also an atomic space, where

$$\|G\|_{Y_{k, \ell}} = 2^{\frac{n}{2}k} \inf \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|,$$

where the infimum is taken with respect to the decompositions  $G = \sum_{m=1}^{\infty} a_m G_m$  and each atom  $G_m$ , in addition to the above requirements on its Fourier support, is assumed to verify the following conditions. Let  $K_\ell$  denote a collection of  $(2^{2\ell(n-1)})$  spherical caps of size  $2^{-\ell}$  covering the unit sphere of directions in  $\xi$  space and  $P_\kappa$  denote the associated projection in Fourier space on the cap  $\kappa \in K_\ell$ . Then we require that for each  $\kappa$  there exists an angle  $\omega_\kappa \notin 2\kappa$  such that

$$\sum_{\kappa \in K_\ell} \left( 2^{-2k} (\text{dist}(\omega_\kappa, \kappa))^{-2} \|\square P_\kappa G_m\|_{L^1_{u\omega_\kappa} L^2_{x\omega_\kappa}}^2 + (\text{dist}(\omega_\kappa, \kappa))^2 \|P_\kappa G_m\|_{L^\infty_{u\omega_\kappa} L^2_{x\omega_\kappa}}^2 \right) \leq 1.$$

Thus constructed space  $X$  is shown to satisfy the following properties:

- (1)  $X \subset C_t^0 \dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}} \cap C_t^1 \dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}-1}$  and  $X$  contains solutions of the homogeneous wave equation with  $(\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}} \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}-1})$  initial data.
- (2)  $X \cdot X \subset X$  and  $X \cdot \square X \subset \square X$  – bilinear estimates.

### 5. TAO'S RESULT IN HIGHER DIMENSIONS

We now discuss the result contained in [30], in which the  $(\dot{H}^{\frac{n}{2}}$  critical) small data global existence problem was completely solved for the wave map equation (1) on Minkowski space  $\mathbb{R}^{n+1}$  for the  $S^{m-1}$  target manifold in dimensions  $n \geq 5$ . The

<sup>(6)</sup>The description given below is somewhat imprecise as some of the spatial Fourier localizations should be in fact space-time Fourier localizations.

solution of the problem is particularly elegant in this case as the iteration spaces are essentially as in the Strichartz method.

### 5.1. Tools

A consistent theme in [30] is micro-localization. In this context it simply means that all involved functions<sup>(7)</sup> are decomposed into parts each oscillating with frequencies in a given dyadic interval and all interactions are viewed in terms of interactions between such individual pieces. The framework for this is provided by the Littlewood-Paley theory and paradifferential calculus. According to it an arbitrary function  $f(x)$  can be decomposed with the help of the Littlewood-Paley projections  $P_k$ :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k, \quad f_k = P_k f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \chi(2^{-k}|\xi|) \hat{f}(\xi) d\xi$$

where

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(2^{-k}r) = 1, \quad \forall r \neq 0$$

and  $\chi$  is a smooth non-negative cut-off function supported on  $[1/2, 2]$ . We set

$$f_{<k} = \sum_{m < k} f_m, \quad f_{>k} = \sum_{m > k} f_m.$$

The following capture usefulness of such decompositions:

$$\begin{aligned} \|\nabla|^s f_k\|_{L^p} &\sim 2^{ks} \|f_k\|_{L^p}, & \forall 1 \leq p \leq \infty, \\ \|f_k\|_{L^p} &\lesssim 2^{k(\frac{n}{q} - \frac{n}{p})} \|f_k\|_{L^q}, & \forall 1 \leq q \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

The first relation reflects the fact that  $f_k$  oscillates at the frequency  $2^k$ , while the second is called the Bernstein inequality and is simply a prototype of the Sobolev inequality.

The product of two different Littlewood-Paley pieces  $f_{k_1}^1$  and  $f_{k_2}^2$  can be characterized as follows<sup>(8)</sup>:

If  $k_1 > k_2$  then the Fourier support  $f_{k_1}^1 f_{k_2}^2$  is essentially still contained in the dyadic region  $|\xi| \sim 2^k$ .

If  $k_1 = k_2$  then the Fourier support  $f_{k_1}^1 f_{k_2}^2$  is essentially still contained in the region  $|\xi| \leq 2^k$ .

<sup>(7)</sup>A wave map  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$  is viewed as an  $\mathbb{R}^m$ -valued function with  $|\phi| = 1$ .

<sup>(8)</sup>For simplicity of exposition we will make no distinction between the relations  $k_1 > k_2$  and  $k_1 \gg k_2$ .

The analysis requires a micro-local version of the Strichartz spaces  $S_k$  adapted to frequency localized functions and consistent with the critical  $\dot{H}^{\frac{n}{2}}$  regularity. Define the norm in  $S_k$  by

$$(16) \quad \|\psi\|_{S_k} = \sup_{q,p} 2^{(\frac{1}{q} + \frac{n}{p})k} (\|\psi\|_{L_t^q L_x^p} + 2^{-k} \|\partial_t \psi\|_{L_t^q L_x^p}),$$

where the sup is taken over all Strichartz *admissible* exponents described in (12). The Strichartz estimates applied to a function  $\psi_k$  localized at the frequency  $2^k$  imply:

$$(17) \quad \|\psi_k\|_{S_k} \lesssim \|\psi_k[0]\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}}} + 2^{\frac{n-2}{2}k} \|\square \psi_k\|_{L_t^1 L_x^2}$$

In particular, one easily obtains the following strengthened version of the Strichartz estimates:

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\psi_k\|_{S_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\psi[0]\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}}} + \|\square \psi\|_{L_t^1 \dot{H}^{\frac{n}{2}-1}}.$$

A very useful notion introduced in [30] is that of an  $\sigma$ -envelope:  $c = \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ , which has the property that

$$c_k \leq 2^{\sigma|k-k'|} c_{k'}, \quad \forall k, k' \in \mathbb{Z}.$$

Any  $\ell^2$  sequence  $a$  lies under a  $\sigma$ -envelope  $c$  (for instance)

$$c_k = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} 2^{-\sigma|k-k'|} a_{k'}.$$

In particular the sequence  $\|\phi[0]_k\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}}}$  associated with initial data for the wave map  $\phi$  lies under a  $\sigma$ -envelope  $c$  with the property that

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2 < \epsilon^2.$$

### 5.2. The setup

Existence, uniqueness and propagation of regularity<sup>(9)</sup> follow from proving estimates in the space  $X = S(c)$  defined by the norm

$$\|\phi\|_{S(c)} = \sup_k c_k^{-1} \|\phi_k\|_{S_k}.$$

This means that assuming that

$$\|\phi_k\|_{S_k} \leq 2C_0 c_k$$

for some sufficiently large constant  $C_0$  the result will follow if one can prove the stronger estimate

$$\|\phi_k\|_{S_k} \leq C_0 c_k.$$

<sup>(9)</sup>Restriction on the parameter  $\sigma$  limits propagation of regularity to the values of Sobolev exponent  $n/2 < s < n/2 + \sigma$ . It is not however standard that a propagation of regularity in a Sobolev space  $H^s$  with  $s > n/2$  immediately implies the same statement in all higher Sobolev spaces.

As opposed to the local existence scheme one is not able to prove the estimate

$$\|\square^{-1}(\Gamma(\phi^1)(\partial^\alpha \phi^2 \cdot \partial_\alpha \phi^3))\|_{S(c)} \leq C_0$$

for functions  $\|\phi^i\|_{S(c)} \leq 2C_0$ . The problem requires renormalization!

### 5.3. Micro-linearization of the wave-map equation

The next step is to project the wave map equation

$$\square \phi = -\phi(\partial_\alpha \phi \cdot \partial^\alpha \phi)$$

on the frequency  $2^k$  with the help of Littlewood-Paley projection  $P_k$  thus deriving an equation for  $\phi_k$

$$\square \phi_k = - \sum_{k_1, k_2, k_3} P_k(\phi_{k_1}(\partial_\alpha \phi_{k_2} \cdot \partial^\alpha \phi_{k_3})).$$

Using scale invariance each  $\phi_k$  can be seen to satisfy the same equation as  $\phi_0$

$$(18) \quad \square \phi_0 = - \sum_{k_1, k_2, k_3 \sim 0} P_0(\phi_{k_1}(\partial_\alpha \phi_{k_2} \cdot \partial^\alpha \phi_{k_3}))$$

and it suffices to prove that

$$\|\phi_0\|_{S_0} \leq C_0 c_0.$$

(This is where the envelope idea becomes very helpful.)

Next one says that  $F$  is an acceptable error term if  $\|F\|_{L_t^1 L_x^2} \leq \epsilon C_0^3 c_0$  and thus by Strichartz estimates (17) its contribution to the  $\|\phi_0\|_{S_0}$  is less than the allowed  $C_0 c_0$  and thus can be discarded.

The main contribution of the nonlinear term in (18) is identified by rewriting (18) in the form

$$(19) \quad \square \phi_0 = -2\phi_{<0}(\partial_\alpha \phi_{<0} \cdot \partial^\alpha \phi_0) + F,$$

and claiming that the term  $F$  is an acceptable error. Before tackling  $F$  one sets the following

*Rules of the game:* place the terms with a higher frequency in the norm requiring fewer<sup>(10)</sup> derivatives (e.g.  $L_t^2 L_x^4$ ) and terms with a lower frequency in the norm requiring more (e.g.  $L_t^\infty L_x^\infty$ ). Almost all estimates will appear as if they have “extra room” and thus are not scale invariant. This is merely an illusion due to the fact that we measure low and high frequency relative to a fixed benchmark frequency. That is, a low frequency will mean  $k < 0$  while the high frequency will mean that  $k > 0$ . The actual gain occurs only through relative ratios of frequencies of functions involved in the products and is entirely consistent with an overall scale invariance.

<sup>(10)</sup>The number of derivatives is reflected in the exponential factors placed in front of the Strichartz norms in the definition of  $S_k$  in (16). For example the  $L_t^2 L_x^4$  norm “costs” only  $1/2 + n/4$  derivatives while the  $L_t^\infty L_x^\infty$  norm requires  $n/2$  derivatives.



Using the paradifferential calculus rules for products described above, one sees that the error term essentially contains<sup>(11)</sup> low-high-high, high-high-high, high-low-high and 0-low-low interactions. For example, the low-high-high interaction can be handled as follows (with the help of the envelope properties):

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k_2 \sim k_3 > 0} \phi_{<0}(\partial_\alpha \phi_{k_2} \cdot \partial^\alpha \phi_{k_3}) \right\|_{L_t^1 L_x^2} &\lesssim \sum_{k_2 \sim k_3 > 0} \|\phi_{<0}\|_{L_t^\infty L_x^\infty} \|\partial_\alpha \phi_{k_2}\|_{L_t^2 L_x^4} \|\partial^\alpha \phi_{k_3}\|_{L_t^2 L_x^4} \\ &\lesssim \sum_{k_2 \sim k_3 > 0} 2^{-(k_2+k_3)\frac{n-2}{4}} \|\phi_{k_2}\|_{S_{k_2}} \|\phi_{k_3}\|_{S_{k_3}} \\ &\lesssim \epsilon C^2 c_0 \sum_{k_2 \sim k_3 > 0} 2^{-(k_2+k_3)\frac{n-2}{4} + \sigma k_2} \lesssim \epsilon C^2 c_0 \end{aligned}$$

provided that  $\sigma$  is sufficiently small. Similarly for the high-low-high interactions

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k_1 \sim k_2 > 0, k_3 < 0} \phi_{k_1}(\partial_\alpha \phi_{k_2} \cdot \partial^\alpha \phi_{k_3}) \right\|_{L_t^1 L_x^2} \\ &\lesssim \sum_{k_1 \sim k_2, k_3 < 0} \|\partial_\alpha \phi_{k_3}\|_{L_t^\infty L_x^\infty} \|\phi_{k_1}\|_{L_t^2 L_x^4} \|\partial^\alpha \phi_{k_2}\|_{L_t^2 L_x^4} \\ &\lesssim \sum_{k_1 \sim k_2 > 0, k_3 < 0} 2^{k_3 - k_1} 2^{-(k_1+k_3)\frac{n-2}{4}} \times \|\phi_{k_1}\|_{S_{k_1}} \|\phi_{k_2}\|_{S_{k_2}} \|\phi_{k_3}\|_{S_{k_3}} \lesssim \epsilon^2 C^3 c_0. \end{aligned}$$

The remaining cases can be treated in a similar fashion.

The principal term  $\phi_{<0}(\partial_\alpha \phi_{<0} \cdot \partial^\alpha \phi_0)$  cannot be iterated away by means of Strichartz estimates (or even with the help of more sophisticated spaces and estimates) as can be seen from the following argument. The term  $\phi_{<0}$  has to be placed in  $L_t^\infty L_x^\infty$ , which means that one needs an estimate

$$\|\partial_\alpha \phi_{<0} \cdot \partial^\alpha \phi_0\|_{L_t^1 L_x^2} \lesssim \|\phi_{<0}\|_{L_t^2 L_x^p} \|\phi_0\|_{L_t^2 L_x^r} \lesssim \left( \sum_{k < 0} \|\phi_k\|_{S_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi_0\|_{S_0},$$

where  $1/2 = 1/p + 1/r$ . By a scaling argument the term with  $\phi_{<0}$  requires  $p \geq 2n$ . The condition  $1/2 = 1/p + 1/r$  then implies that  $r \leq 2n/(n - 1)$ . However the admissible Strichartz exponents  $(q, r)$  with  $q = 2$  lie in the range  $[2\frac{n-1}{n-3}, \infty]$  inconsistent with  $r \leq 2n/(n - 1)$ .

#### 5.4. The renormalization procedure

One begins with an anti-symmetrization trick, used previously in the context of regularity theory for harmonic maps in [10], [5]. Recall that  $\phi$  takes values in a unit sphere  $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$  and write relative to the standard coordinates on  $\mathbb{R}^m$

$$\phi_{<0}^i(\partial_\alpha \phi_{<0}^j \partial^\alpha \phi_0^j) = B_\alpha^{ij} \partial^\alpha \phi_0^j.$$

<sup>(11)</sup>We will consistently ignore all the terms arising from the commutators with the Littlewood-Paley projections.

The  $m \times m$  matrices  $B_\alpha$  can be anti-symmetrized as follows. The expression

$$\partial_\alpha \phi_{<0}^i (\phi_{<0}^j \partial^\alpha \phi_0^j) = \partial_\alpha \phi_{<0}^i (\partial^\alpha \phi_{<0}^j \phi_0^j) - \partial_\alpha \phi_{<0}^i \partial^\alpha (\phi_{<0}^j \phi_0^j).$$

Both of the terms on the right hand side above are error terms similar to  $F_0$  satisfying a good  $L_t^1 L_x^2$  estimate. In the first term a derivative has been successfully transferred to a lower frequency making in a 0-low-low term. On the other hand the expression

$$(\phi_{<0}^j \phi_0^j) = P_0(|\phi|^2) + P_0(\text{high-high})$$

can be identified, modulo terms contributing to an acceptable error term, with the projection of  $|\phi|^2$  on the unit frequencies. Since  $\phi \in \mathbb{S}^{m-1}$  we have  $|\phi| = 1$  and  $P_0(|\phi|^2) = 0$ .

This argument allows one to replace

$$\phi_{<0}^i (\partial_\alpha \phi_{<0}^j \partial^\alpha \phi_0^j) = B_\alpha^{ij} \partial^\alpha \phi_0^j = A_\alpha^{ij} \partial^\alpha \phi_0^j,$$

where  $A_\alpha$  are the anti-symmetric matrices

$$A_\alpha = \phi_{<0} (\partial_\alpha \phi_{<0}, \cdot) - \partial_\alpha \phi_{<0} (\phi_{<0}, \cdot)$$

and  $(\cdot, \cdot)$  is the standard scalar product on  $\mathbb{R}^m$ . This anti-symmetry property is crucial for the following renormalization procedure. The unit frequency part of the wave-map  $\phi$  is replaced by a new dynamic variable

$$w = U \phi_0$$

with  $U$  an almost orthogonal matrix nonlinearly dependent on  $\phi$ . The map  $w$  verifies the equation

$$\square w = -2U A_\alpha \partial^\alpha \phi_0 + 2\partial_\alpha U \partial^\alpha \phi_0 + \square U \phi_0$$

and this change of variables is motivated by the attempt to eliminate the troublesome term  $A_\alpha \partial^\alpha \phi_0$  by setting

$$(20) \quad \partial_\alpha U = U A_\alpha.$$

Solubility of the above transport equations depends on the Frobenius condition<sup>(12)</sup>

$$(21) \quad \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta] = 0.$$

Given the explicit form of  $A_\alpha$  the condition (21) is not satisfied. However,

$$\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta] = [A_\alpha, A_\beta] \approx \partial \phi_{<0} \cdot \partial \phi_{<0}.$$

---

<sup>(12)</sup>Equation (20) would suggest that  $A$  is a trivial  $O(n)$  connection, which of course requires that its curvature vanishes. It turns out indeed that  $A$  is a low frequency portion of the pull-back connection  $\phi_*(\nabla)$  on the bundle  $\phi_*(T\mathbb{S}^{m-1})$  over  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

is quadratic in the derivatives of a low frequency part of  $\phi$  (and thus in particular only of size  $\epsilon^2$ ). The equation (20) is then solved approximately with the defect giving rise to an acceptable error term. The construction is recursive with<sup>(13)</sup>

$$U_k := (P_k\phi(P_{<k}\phi, \cdot) - P_{<k}\phi(P_k\phi, \cdot)) U_{<k},$$

$$U_{<k} := I + \sum_{k' < k} U_{k'}$$

This construction can be motivated by the following argument. In the original equation for  $\phi_0$  the term  $A_\alpha \partial_0^\phi$  can be replaced by  $\partial_\alpha \Lambda \partial^\alpha \phi_0$  with

$$\Lambda = \sum_{k < 0} (P_k\phi(P_{<k}\phi, \cdot) - P_{<k}\phi(P_k\phi, \cdot))$$

at the expense of generating an error term with an acceptable  $L_t^1 L_x^2$  bound: the difference between  $A_\alpha$  and  $\tilde{A}_\alpha = \partial_\alpha \Lambda$  involves terms where derivatives transferred to terms with lower frequencies. The equation (20) then reads

$$\partial_\alpha U = \partial_\alpha \Lambda U$$

with the solution given by

$$U = e^\Lambda = e^{\sum_{k < 0} (P_k\phi(P_{<k}\phi, \cdot) - P_{<k}\phi(P_k\phi, \cdot))} \approx$$

and thus if we set

$$U_{<k} = e^{\sum_{k' < k} (P_{k'}\phi(P_{<k'}\phi, \cdot) - P_{<k'}\phi(P_{k'}\phi, \cdot))}$$

we have

$$U_k = \left( e^{(P_k\phi(P_{<k}\phi, \cdot) - P_{<k}\phi(P_k\phi, \cdot))} - I \right) e^{\sum_{k' < k} (P_{k'}\phi(P_{<k'}\phi, \cdot) - P_{<k'}\phi(P_{k'}\phi, \cdot))}$$

$$\approx (P_k\phi(P_{<k}\phi, \cdot) - P_{<k}\phi(P_k\phi, \cdot)) U_{<k}.$$

It remains to show that the remaining terms on the right hand side of the equation for  $w$  are acceptable error terms so that

$$(22) \quad \square w = F$$

and that the transformation  $U$  preserves the space  $S_0$ . The latter follows from the estimates

$$\|U\|_{L_t^\infty L_x^\infty} \lesssim 1, \quad \|U\|_{L_t^\infty L_x^\infty}, \quad \|\partial_\alpha U\|_{L_t^\infty L_x^\infty} \lesssim \epsilon.$$

The standard<sup>(14)</sup> Strichartz estimates applied to the equation (22) imply that

$$\|w\|_{S_0} \lesssim \|w[0]\|_{L^2} + C_0^3 \epsilon c_0 \lesssim \|\phi[0]\|_{L^2} + C_0^3 \epsilon c_0 \lesssim 2c_0$$

and the desired estimate for  $\phi_0$  follows.

<sup>(13)</sup>For technical reasons the sum in the second definition should extend only to a finite large negative integer  $-M$ .

<sup>(14)</sup>not quite, as the Fourier support of  $w$  is not supported on unit frequencies, since  $\phi_0$  has been distorted by  $U$ . This can be corrected however without too much difficulty.

6. TAO’S RESULT IN LOWER DIMENSIONS

The (critical) small data global existence result for the wave map problem with the  $\mathbb{S}^{m-1}$  target for the remaining dimensions  $2 \leq n \leq 4$  is contained in [31]. Given the space constraints it is very difficult to do the justice to that paper here. The proof is a true tour de force. We will only give a (superficial) description of the spaces used in the proof.

As the problem is shifted to the lower dimensions the dispersion properties of the wave equation become weaker and one starts “losing” various key Strichartz estimates (e.g.  $L_t^2 L_x^4$  in dimensions  $n \leq 4$  and even the  $L_t^2 L_x^\infty$  in dimensions  $n \leq 3$ ). This eventually means that the renormalization procedure has to be combined with a refinement of ideas that led to the solution of the division problem. In particular the null structure of the nonlinearity, which did not have much effect on the higher dimensional problem, becomes crucial. In the iteration procedure the Strichartz based spaces are replaced by a combination of the  $H^{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}}$  and null frame spaces. The iteration space  $X = S(c)$ , associated with an envelope  $c = \{c_k\}$ , is built of the following parts:

$$\|\phi\|_{S(c)} = \|\phi\|_{L_t^\infty L_x^\infty} + \sup_k c_k^{-1} \|\phi\|_{S[k]}.$$

The first  $L^\infty$  component is very important for the algebra property and reflects the fact that the wave map  $\phi \in \mathbb{S}^m$  and thus  $|\phi| = 1$ . The dyadic spaces  $S[k]$  in turn are defined by the norm

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{S[k]} := & \|\nabla_{x,t}\phi\|_{L_t^\infty \dot{H}^{\frac{n}{2}-1}} + \|\nabla_{x,t}\phi\|_{\dot{H}_k^{\frac{n}{2}-1, \frac{1}{2}, \infty}} \\ & + \sup_{\pm} \sup_{\ell > 0} \left( \sum_{\kappa \in K_\ell} \|P_{k, \pm \kappa} Q_{<k-2^\ell}^\pm \phi\|_{S[k, \kappa]}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

The first term on the right represents the usual energy space. The second is an  $H^{s, \delta}$  type space where the index  $\infty$  reflects an  $\ell^\infty$  norm with respect to a dyadic distance to the cone  $|\tau|^2 = |\xi|^2$ . The last ingredient is a null frame space built with the help of the Fourier projections  $P_{k, \pm \kappa}$  and  $Q_j^\pm$  restricting the Fourier transform of a function to the region of  $(\tau, \xi)$  with  $|\tau \pm |\xi|| \sim 2^j$  (coming from the  $Q_j$  action)  $|\xi| \sim 2^k$  (coming from  $P_k$  part) and a spherical cap  $\xi/|\xi| \in \kappa$  of size  $2^{-\ell}$  for  $\kappa \in K_\ell$ . Finally the space  $S[k, \kappa]$  is defined by the norm

$$\|\phi\|_{S[k, \kappa]} = 2^{\frac{nk}{2}} \|\phi\|_{NFA^*[\kappa]} + |\kappa|^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \|\phi\|_{PW[\kappa]} + 2^{\frac{nk}{2}} \|\phi\|_{L_t^\infty L_x^2},$$

where

$$\|\phi\|_{NFA^*[\kappa]} = \sup_{\omega \notin 2\kappa} \text{dist}(\omega, \kappa) \|\phi\|_{L_{u_\omega}^\infty L_{x_\omega}^2},$$

is motivated by the property (15) of free waves, and the space  $PW[\kappa]$  is an atomic Banach space whose atoms are functions  $\phi$  with

$$\|\phi\|_{L^2_{u_\omega} L^\infty_{x_\omega}} \leq 1$$

for some  $\omega \in \kappa$  and its definition is motivated by the property (14).

One of the important new ingredients is an appearance of a true trilinear estimate which deals with the nonlinearity  $\phi(\partial_\alpha \phi \cdot \partial^\alpha \phi)$  and provides an exponential gain in the ratio of frequencies in the case where the frequency of the first term is larger than one of the other two frequencies.

## 7. EXTENSIONS TO OTHER TARGET MANIFOLDS

The work in [30], [31] has already had a serious impact on the field. In particular a lot of effort has been concentrated on the extension of the (critical) small data global existence result to other target manifolds.

In a more intrinsic interpretation of the wave map problem it is cast as a system of equations for the derivatives of the wave map  $\phi$ . For a given orthonormal  $e_a$  on  $(\mathcal{N}, h)$  denote

$$\phi_\alpha^a = h(\partial_\alpha \phi, e_a).$$

We set  $A_{b\alpha}^a = h(\nabla_{\phi^*(\partial_\alpha)} e_a, e_b)$  to be the pull-back of the Levi-Civita connection  $\nabla$  on  $(\mathcal{N}, h)$  to the bundle  $\phi^*(T\mathcal{N})$ , represented by anti-symmetric matrices  $A_\alpha$ . Then if  $\phi$  is a wave map the components  $\Phi = (\phi_\alpha^a)$  satisfy the equation

$$(23) \quad \square \Phi = -2A_\alpha \cdot \partial^\alpha \Phi + E,$$

where  $E$  is a term cubic in  $\Phi$ . The problem (23) can be micro-linearized similar to (19). The low frequency of the connection  $A_\alpha$  is split with the help of a Hodge decomposition and a Coulomb gauge. Its gradient part then renormalized following Tao's approach. This led to an extension of Tao's result to a large class of target manifolds in dimensions  $n \geq 5$  in [14]. Intuitively, in this picture, the procedure of a Hodge decomposition and renormalization corresponds to a choice of an orthonormal frame  $e_a$  with the property that the connection  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 0, \dots, n$  satisfies the Coulomb gauge condition  $\sum_{i=1}^n \partial^i A_i = 0$ . This was made even more explicit in [25], where Tao's work was extended to more general targets in dimensions  $n \geq 4$ . The geometric choice of a global Coulomb gauge avoided a micro-linearization of the equation. Similar extension for  $n \geq 4$  was obtained in [21]. In [16], [17] the results were extended to general targets in dimensions  $n \geq 3$  and a hyperbolic space  $\mathbb{H}^2$  in dimension  $n \geq 2$ . In [35] the result was extended to targets isometrically embedded (with bounded geometry) into  $\mathbb{R}^m$  in dimensions  $n \geq 2$ .

## REFERENCES

- [1] A. A. BELAVIN & A. M. POLYAKOV – Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets, *JETP Lett.* **22** (1975), p. 245–247, Russian.
- [2] J. BOURGAIN – Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I. Schrödinger equations, *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), no. 2, p. 107–156.
- [3] ———, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation, *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), no. 3, p. 209–262.
- [4] T. CAZENAVE, J. SHATAH & A. S. TAHVILDAR-ZADEH – Harmonic maps of the hyperbolic space and development of singularities in wave maps and Yang-Mills fields, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **68** (1998), no. 3, p. 315–349.
- [5] S.-Y. A. CHANG, L. WANG & P. C. YANG – Regularity of harmonic maps, *Comm. Pure Appl. Math.* **52** (1999), no. 9, p. 1099–1111.
- [6] Y. CHOQUET-BRUHAT – Future complete U(1) symmetric Einsteinian space-times, the unpolarized case, in *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, Birkhäuser, Basel, 2004, p. 251–298.
- [7] D. CHRISTODOULOU & A. S. TAHVILDAR-ZADEH – On the regularity of spherically symmetric wave maps, *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), no. 7, p. 1041–1091.
- [8] E. FRADKIN – *Field theories of condensed matter systems*, Frontiers in Physics, vol. 82, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, 1991.
- [9] C. H. GU – On the Cauchy problem for harmonic maps defined on two-dimensional Minkowski space, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 6, p. 727–737.
- [10] F. HÉLEIN – Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312** (1991), no. 8, p. 591–596.
- [11] M. KEEL & T. TAO – Local and global well-posedness of wave maps on  $\mathbf{R}^{1+1}$  for rough data, *Internat. Math. Res. Notices* **21** (1998), p. 1117–1156.
- [12] S. KLAINERMAN & M. MACHEDON – Space-time estimates for null forms and the local existence theorem, *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), no. 9, p. 1221–1268.
- [13] ———, Smoothing estimates for null forms and applications, *Duke Math. J.* **81** (1995), no. 1, p. 99–133, a celebration of John F. Nash, Jr.
- [14] S. KLAINERMAN & I. RODNIANSKI – On the global regularity of wave maps in the critical Sobolev norm, *Internat. Math. Res. Notices* **13** (2001), p. 655–677.
- [15] S. KLAINERMAN & S. SELBERG – Remark on the optimal regularity for equations of wave maps type, *Comm. Partial Differential Equations* **22** (1997), no. 5-6, p. 901–918.

- [16] J. KRIEGER – Global regularity of wave maps from  $\mathbf{R}^{3+1}$  to surfaces, *Comm. Math. Phys.* **238** (2003), no. 1-2, p. 333–366.
- [17] ———, Global regularity of wave maps from  $\mathbf{R}^{2+1}$  to  $H^2$ . Small energy, *Comm. Math. Phys.* **250** (2004), no. 3, p. 507–580.
- [18] ———, Stability of spherically symmetric wave maps, *Mem. Amer. Math. Soc.* **181** (2006).
- [19] O. LADYZHENSKAYA & V. SHUBOV – Unique solvability of the Cauchy problem for the equations of the two dimensional chiral fields, taking values in complete Riemann manifolds, *J. Soviet Math.* **25** (1984), p. 855–864.
- [20] N. MANTON & P. SUTCLIFFE – *Topological solitons*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [21] A. NAHMOD, A. STEFANOV & K. UHLENBECK – On the well-posedness of the wave map problem in high dimensions, *Comm. Anal. Geom.* **11** (2003), no. 1, p. 49–83.
- [22] G. PONCE & T. C. SIDERIS – Local regularity of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **18** (1993), no. 1-2, p. 169–177.
- [23] I. RODNIANSKI & J. STERBENZ – On the Formation of Singularities in the Critical  $O(3)$   $\sigma$ -Model, preprint <http://arxiv.org/abs/math/0605023>.
- [24] J. SHATAH – Weak solutions and development of singularities of the  $SU(2)$   $\sigma$ -model, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), no. 4, p. 459–469.
- [25] J. SHATAH & M. STRUWE – The Cauchy problem for wave maps, *Int. Math. Res. Not.* **11** (2002), p. 555–571.
- [26] J. SHATAH & A. S. TAHVILDAR-ZADEH – On the Cauchy problem for equivariant wave maps, *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), no. 5, p. 719–754.
- [27] T. C. SIDERIS – Global existence of harmonic maps in Minkowski space, *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989), no. 1, p. 1–13.
- [28] M. STRUWE – Equivariant wave maps in two space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **56** (2003), no. 7, p. 815–823, Dedicated to the memory of Jürgen K. Moser.
- [29] ———, Radially symmetric wave maps from  $(1 + 2)$ -dimensional Minkowski space to general targets, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **16** (2003), no. 4, p. 431–437.
- [30] T. TAO – Global regularity of wave maps I. Small critical Sobolev norm in high dimension, *Internat. Math. Res. Notices* **6** (2001), p. 299–328.
- [31] ———, Global regularity of wave maps II. Small energy in two dimensions, *Comm. Math. Phys.* **224** (2001), no. 2, p. 443–544.
- [32] D. TATARU – Local and global results for wave maps. I, *Comm. Partial Differential Equations* **23** (1998), no. 9-10, p. 1781–1793.

- [33] ———, On global existence and scattering for the wave maps equation, *Amer. J. Math.* **123** (2001), no. 1, p. 37–77.
- [34] ———, The wave maps equation, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **41** (2004), no. 2, p. 185–204 (electronic).
- [35] ———, Rough solutions for the wave maps equation, *Amer. J. Math.* **127** (2005), no. 2, p. 293–377.

Igor RODNIANSKI

Department of Mathematics

Princeton University

PRINCETON, NJ 08544 – U.S.A.

*E-mail* : `irod@math.princeton.edu`



**ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE ET  
DISQUES DE SIEGEL DES POLYNÔMES QUADRATIQUES**

[d'après X. Buff et A. Chéritat]

par **Jean-Christophe YOCCOZ**

**1. ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE**

**1.1.** Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$  opérant sur la sphère de Riemann  $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ .

Le multiplicateur d'un point périodique  $z_0$  de  $R$ , de période minimale  $n$ , est  $\lambda = (R^n)'(z_0)$ . On dit que  $z_0$  est attractif si  $|\lambda| < 1$ , répulsif si  $|\lambda| > 1$ , indifférent si  $|\lambda| = 1$ . Un point périodique indifférent est parabolique si  $\lambda = 1$ , rationnel si  $\lambda$  est racine de l'unité, irrationnel dans le cas contraire.

L'ensemble de Fatou  $F(R)$  est l'ensemble des points  $z \in \overline{\mathbf{C}}$  au voisinage desquels les itérés  $(R^n)_{n \geq 1}$  forment une famille normale. Son complémentaire dans  $\overline{\mathbf{C}}$  est l'ensemble de Julia  $J(R)$ .

L'ensemble de Fatou est ouvert et totalement invariant :  $R^{-1}(F(R)) = F(R)$ . L'image par  $R$  d'une composante connexe de  $F(R)$  est encore une composante connexe de  $F(R)$ . Un célèbre théorème de D. Sullivan affirme que chaque composante est pré-périodique sous l'action de  $R$ . Il y a au plus  $2d - 2$  cycles de composantes périodiques. La dynamique dans une composante fixe est d'un des 3 types suivants :

- convergence vers un point fixe attractif ;
- convergence vers un point fixe parabolique situé sur le bord de la composante ;
- dynamique quasi périodique conjuguée à une rotation irrationnelle sur un disque (dit de Siegel) ou un anneau (dit de Herman).

L'ensemble de Julia est une partie compacte, totalement invariante, qui n'est jamais vide. C'est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de  $R$ . La dynamique y est chaotique, au moins topologiquement, dans le sens suivant : pour tout ouvert  $U$  rencontrant  $J(R)$ , il existe  $N \geq 1$  tel que  $R^N(U)$  contienne  $J(R)$ .

L'ensemble de Fatou peut être vide. C'est le cas, en particulier, pour les exemples de Lattès déduits via la fonction de Weierstrass des endomorphismes non inversibles des courbes elliptiques. M. Rees a montré que dans l'espace (de dimension complexe  $2d - 2$ ) des fractions rationnelles de degré  $d$ , celles pour lesquelles l'ensemble de Fatou est vide forment un ensemble de mesure de Lebesgue positive. Cependant, lorsque l'ensemble de Julia n'est pas égal à la sphère de Riemann tout entière, c'est un ensemble d'intérieur vide.

Pour un polynôme  $P$  de degré  $d \geq 2$ , la présence d'un point fixe (super)attractif à l'infini rend les choses un peu plus simples : l'ensemble de Fatou n'est jamais vide. On appelle ensemble de Julia rempli l'ensemble  $K(P)$  des points  $z \in \mathbf{C}$  d'orbite bornée. C'est une partie compacte totalement invariante de  $\mathbf{C}$  dont le bord est égal à  $J(P)$ .

**1.2.** Dès le début du siècle dernier, P. Fatou suggère d'étudier les ensembles de Julia par les méthodes de la théorie de la mesure de Borel-Lebesgue. Vers 1980, D. Sullivan développe et met à profit des analogies profondes entre l'itération des fractions rationnelles et l'action des groupes kleinien (i.e. des sous-groupes discrets de type fini de  $PSL(2, \mathbf{C})$ ) sur la sphère de Riemann. Pour un groupe kleinien, l'ensemble limite joue le rôle de l'ensemble de Julia. Une conjecture d'Ahlfors, maintenant démontrée, affirme que l'ensemble limite est de mesure nulle s'il n'est pas égal à la sphère de Riemann. La question analogue pour les ensembles de Julia s'impose alors rapidement comme l'un des problèmes majeurs de la théorie, d'autant plus qu'une réponse positive aurait de nombreuses conséquences intéressantes. Dans les années suivantes on montre en particulier pour de nombreuses classes de polynômes (cf. ci-dessous) que l'ensemble de Julia est de mesure nulle.

Cependant, vers 1990, T. Nowicki et S. Van Strien d'une part, A. Douady d'autre part, commencent à suspecter qu'il pourrait exister des polynômes dont l'ensemble de Julia est de mesure de Lebesgue positive. T. Nowicki et S. Van Strien considèrent des polynômes  $P(z) = z^d + c$ , de grand degré  $d$ , pour lesquels l'orbite de l'unique point critique 0 s'organise suivant une combinatoire quasipériodique dite de Fibonacci ; mais leur programme n'aboutira pas.

A. Douady formule de son côté un programme visant à construire des polynômes quadratiques possédant un point fixe indifférent irrationnel non linéarisable dont l'ensemble de Julia (égal dans ce cas à l'ensemble de Julia rempli) est de mesure positive. Dans sa thèse [9], A. Chéritat réalise des progrès majeurs qui ne laissent plus de doute sur l'existence de tels polynômes. S'appuyant sur des travaux récents de Inou-Shishikura [13], X. Buff et A. Chéritat ont finalement obtenu ([7], [5]) le

**THÉORÈME** — *Il existe des polynômes quadratiques dont l'ensemble de Julia est de mesure de Lebesgue strictement positive.*

**1.3.** Dans la prochaine section, nous présentons quelques préliminaires sur la dynamique des polynômes quadratiques, en particulier ceux possédant un point fixe indifférent irrationnel. Cela nous permettra d'énoncer des versions un peu plus précises du théorème précédent. Dans la section suivante, on présente le plan de la construction, une version simplifiée de la proposition initiale de Douady, qui comporte 3 étapes. Ces étapes sont passées en revue au cours des 3 sections suivantes. Dans la dernière section, nous présenterons plusieurs résultats spectaculaires sur les disques de Siegel des polynômes quadratiques obtenus par X. Buff et A. Chéritat, résultats qui utilisent certains des ingrédients essentiels de la construction précédente.

Je remercie Xavier Buff, Arnaud Chéritat et Adrien Douady pour de nombreuses et précieuses conversations, et Dominique Bidois sans laquelle ce texte n'aurait pas vu le jour à temps.

## 2. RAPPELS SUR LES POLYNÔMES QUADRATIQUES

**2.1.** À conjugaison affine près, un polynôme quadratique s'écrit de façon unique sous la forme

$$Q_c(x) = x^2 + c.$$

L'ensemble des paramètres  $c$  pour lesquels le point critique 0 a une orbite bornée est l'ensemble de Mandelbrot  $M$ . C'est aussi l'ensemble des paramètres pour lesquels l'ensemble de Julia rempli  $K(Q_c)$  est connexe.

Quand on s'intéresse à un point fixe et à son multiplicateur, il est plus pratique d'effectuer un revêtement ramifié  $c = \lambda/2 - \lambda^2/4$  dans le plan des paramètres et une translation  $x = z + \lambda/2$  dans le plan dynamique : le point 0 est alors fixe, de multiplicateur  $\lambda$ . Seul le cas où  $|\lambda|$  est égal ou voisin de 1 nous intéresse, on écrira  $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$  et on considérera donc la famille

$$P_\alpha(z) = \lambda z + z^2.$$

L'image du disque  $\{|\lambda| < 1\}$  par le revêtement  $\lambda \rightarrow c = \lambda/2 - \lambda^2/4$  (ramifié en  $\lambda = 1$  au-dessus de  $c = 1/4$ ) est la cardioïde principale de  $M$ .

**2.2.** Si  $c \notin M$ , le point critique 0 s'échappe vers le point fixe attractif à l'infini ; l'ensemble de Julia  $J(Q_c) = K(Q_c)$  est un ensemble de Cantor sur lequel le polynôme est uniformément dilatant.

Si  $Q_c$  possède une orbite périodique  $\mathcal{O}$  attractive ou indifférente, alors  $c \in M$  et les autres orbites périodiques sont répulsives ; si  $\mathcal{O}$  est attractive ou indifférente rationnelle, l'orbite du point critique 0 converge vers  $\mathcal{O}$  ; l'intérieur de  $K(Q_c)$  est alors exactement égal au bassin de  $\mathcal{O}$ . Si  $\mathcal{O}$  est attractive, le polynôme  $Q_c$  est uniformément

dilatant sur  $J(Q_c)$ . On dit que  $Q_c$  est hyperbolique si  $c \notin M$  ou si  $Q_c$  possède une orbite périodique attractive (à distance finie).

**2.3.** Soit  $n$  un entier au moins égal à 2. On dit que  $Q_c$  est  $n$ -renormalisable s'il existe des disques topologiques  $U, V$  avec  $0 \in U \subset\subset V$  tels que la restriction de  $Q_c^n$  à  $U$  soit un revêtement ramifié sur  $V$  de degré 2 et  $Q_c^{nk}(0)$  appartienne à  $U$  pour tout  $k \geq 0$ . On dit que  $Q_c$  est infiniment renormalisable s'il existe une infinité d'entiers  $n$  tels que  $Q_c$  soit  $n$ -renormalisable.

**2.4.** Soit  $Q_c$  un polynôme quadratique possédant un point périodique indifférent irrationnel  $x_0$ , de période minimale  $N$  et multiplicateur  $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ . On dit que  $x_0$  est linéarisable si  $x_0$  appartient à l'intérieur de  $K(Q_c)$ ; on appelle alors disque de Siegel la composante connexe  $\Delta$  de  $\text{int}K(Q_c)$  qui contient  $x_0$ ; c'est un disque topologique et toute représentation conforme  $\alpha : (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (\Delta, x_0)$  conjugue la rotation  $R_\alpha(z) = \lambda z$  à la restriction de  $Q_c^N$  à  $\Delta$ .

Lorsque  $x_0$  n'est pas linéarisable, on a  $K(Q_c) = J(Q_c)$ ; on dit que  $x_0$  est un point de Cremer.

Notons

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

le développement en fraction continue de  $\alpha$  et  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  les réduites associées. Alors, pour que  $x_0$  soit linéarisable, il faut et il suffit que  $\alpha$  vérifie la condition de Brjuno (cf. [22], [2], [23])

$$\sum_{n \geq 0} q_n^{-1} \log q_{n+1} < +\infty.$$

On dit que  $\alpha$  est de type constant si la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  est bornée. La condition de Brjuno est alors satisfaite. Un théorème de Herman-Swiatek affirme que  $\Delta$  est un quasidisque et que le point critique appartient au bord de l'orbite de  $\Delta$ .

**2.5.** On sait que l'ensemble de Julia  $J(Q_c)$  est de mesure nulle dans chacun des cas suivants :

- $Q_c$  est hyperbolique ;
- $Q_c$  possède un point périodique indifférent rationnel ([11]) ;
- $Q_c$  n'est pas infiniment renormalisable et toutes ses orbites périodiques sont répulsives ([15], [21]) ;
- $Q_c$  possède un point périodique indifférent irrationnel dont le multiplicateur  $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$  vérifie  $\log a_n = \mathcal{O}(\sqrt{n})$  ([20]).

Dans tous les cas restants, Buff et Chéritat ont construit des exemples pour lesquels l'ensemble de Julia est de mesure positive.

THÉORÈME. — 1) *Il existe des paramètres  $c$  tels que  $Q_c$  a un point fixe de Cremer et  $J(Q_c)$  est de mesure positive.*

2) *Il existe des paramètres  $c$  tels que  $Q_c$  a un disque de Siegel fixe et  $J(Q_c)$  est de mesure positive.*

3) *Il existe des paramètres  $c$  tels que  $Q_c$  est infiniment renormalisable et  $J(Q_c)$  est de mesure positive.*

Dans la suite, nous décrirons la construction dans le cas des points de Cremer. Les autres cas sont basés sur les mêmes méthodes, avec quelques subtilités supplémentaires.

### 3. PRINCIPE DE LA CONSTRUCTION

**3.1.** Comme on s'intéresse à des points fixes indifférents, on va écrire (cf. §2.1)

$$P_\alpha(z) = \lambda z + z^2, \quad \lambda = \exp 2\pi i \alpha.$$

On notera pour simplifier  $K_\alpha = K(P_\alpha)$ ,  $J_\alpha = J(P_\alpha)$ .

Soit  $N$  un entier assez grand, qui sera déterminé ultérieurement (voir §5). On note  $\mathcal{C}(N)$  l'ensemble des nombres de type constant tels que  $a_n \geq N$  pour tout  $n \geq 1$ . Pour  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ ,  $n \geq 0$  et  $A \geq 1$ , on pose

$$\alpha(n, A) = [a_0, a_1, \dots, a_n, A, N, N, N, \dots]$$

On a donc  $\alpha(n, A) \in \mathcal{C}(N)$  si  $\alpha \in \mathcal{C}(N)$  et  $A \geq N$ .

PROPOSITION. — Soient  $\alpha \in \mathcal{C}(N)$ ,  $A_n$  une suite telle que  $\lim q_n^{-1} \log A_n = +\infty$ , et soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $n$  est assez grand, on a

$$\text{Leb}(K_{\alpha(n, A_n)}) \geq (1 - \varepsilon) \text{Leb}(K_\alpha)$$

et le disque  $\{|z| < \varepsilon\}$  contient un cycle périodique de  $P_{\alpha(n, A_n)}$  distinct de  $\{0\}$ .

REMARQUE. — Cet énoncé est très probablement vrai pour tout entier  $N \geq 1$ , mais n'est démontré que si l'entier  $N$  est assez grand.

**3.2.** La proposition permet de réaliser la construction recherchée. On définit en effet une suite  $(\alpha_\ell)_{\ell \geq 0}$  dans  $\mathcal{C}(N)$  comme suit. On choisit arbitrairement  $\alpha_0 \in \mathcal{C}(N)$ , puis on construit  $\alpha_{\ell+1}$  à partir de  $\alpha_\ell$  en posant

$$\alpha_{\ell+1} = \alpha_\ell(n, A_n).$$

Ici, la suite  $(A_n)$  est choisie de façon à vérifier l'hypothèse de la proposition et l'entier  $n = n_\ell$  est choisi assez grand pour que les conclusions de la proposition

soient vérifiées avec  $\varepsilon_\ell = 2^{-\ell-1}$ . Quitte à augmenter  $n_\ell$ , on peut de plus garantir que la suite  $\alpha_\ell$  converge vers une limite irrationnelle  $\alpha_\infty$ , et que le cycle périodique dans  $\{|z| < 2^{-j}\} - \{0\}$  garanti par la proposition pour  $P_{\alpha_j}$  (pour  $j \leq \ell$ ) soit encore contenu dans le même disque pour  $P_{\alpha_{\ell+1}}$ .

Le polynôme  $P_{\alpha_\infty}$  possède les propriétés requises : tout voisinage de 0 contient un cycle périodique distinct de 0, donc 0 est un point de Cremer. On a donc  $K_{\alpha_\infty} = J_{\alpha_\infty}$ . Toute valeur d'adhérence d'une suite  $(z_\ell)_{\ell \geq 0}$  vérifiant  $z_\ell \in K_{\alpha_\ell}$  appartient à  $K_{\alpha_\infty}$ .

On a donc

$$\text{Leb}(K_{\alpha_\infty}) \geq \limsup \text{Leb}(K_{\alpha_\ell}).$$

Comme le produit  $\prod(1 - \varepsilon_\ell)$  est convergent et  $K_{\alpha_0}$  est d'intérieur non vide, on obtient bien que  $J_{\alpha_\infty}$  est de mesure de Lebesgue positive.

### 3.3. La démonstration de la proposition comporte trois étapes.

Dans une première étape, on contrôle le cycle périodique voisin de 0 de  $P_{\alpha(n, A_n)}$  au moyen d'outils introduits par A. Chéritat. On couple ensuite ces outils aux techniques de renormalisation introduites il y a une vingtaine d'années par Douady, Ghys et moi-même pour faire un premier pas vers l'estimation de mesure : on montre que, pour tout ouvert  $V$  contenu dans le disque de Siegel  $\Delta_\alpha$  de  $P_\alpha$ , et tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\text{Leb}(V \cap \Delta_{\alpha(n, A_n)}) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \text{Leb}(V)$$

si  $n$  est assez grand.

Dans une deuxième étape, on montre que pour tout ouvert  $W$  contenant  $\Delta_\alpha$ , et tout nombre  $\alpha' \in \mathcal{C}(N)$  suffisamment proche de  $\alpha$ , l'orbite du point critique pour  $P_{\alpha'}$  est contenue dans  $W$ . Cette affirmation est une conséquence des résultats de renormalisation d'Inou-Shishikura [13] ; c'est ici qu'il est (pour l'instant) nécessaire de supposer que l'entier  $N$  est assez grand.

Dans la troisième étape, on met à profit ce contrôle de l'orbite postcritique pour  $P_{\alpha(n, A_n)}$  pour obtenir l'estimation de mesure de  $K_{\alpha(n, A_n)}$ . Pour promouvoir la constante  $\frac{1}{2} - \varepsilon$  en  $1 - \varepsilon$ , on reprend en le modifiant légèrement un argument de C. McMullen.

Chacune de ces étapes est détaillée dans les trois sections suivantes.

#### 4. EXPLOSION PARABOLIQUE ET TAILLE ASYMPTOTIQUE

4.1. Soit  $p/q$  un nombre rationnel. Écrivons au voisinage de l'origine

$$P_{p/q}^q(z) = z + Az^{q+1} + \mathcal{O}(z^{q+2}).$$

Le coefficient  $A$  n'est pas nul : sinon, la dynamique locale en 0 comporterait au moins deux cycles de pétales, et chacun devrait contenir une orbite postcritique. Suivant Chéritat, définissons la taille asymptotique par

$$L(p/q) = |qA|^{-1/q}.$$

Pour  $\alpha$  voisin de  $p/q$ ,  $P_\alpha$  possède au voisinage de 0 un cycle périodique de période  $q$ . Plus précisément, en écrivant  $\alpha = p/q + \delta^q$ , il existe une fonction holomorphe  $\chi = \chi_{p/q}$  définie au voisinage de 0 telle que les points de ce cycle périodique soient exactement

$$\chi(\delta), \chi(\zeta\alpha), \dots, \chi(\zeta^{q-1}\delta)$$

avec  $\zeta = \exp 2\pi i/q$ . On a

$$|\chi'(0)| = (2\pi q^2)^{1/q} L(p/q)$$

donc la taille asymptotique exprime la vitesse de l'explosion parabolique [10].

On peut suivre le cycle périodique de période  $q$  tant qu'il n'est pas parabolique. Par conséquent,  $\chi$  est holomorphe dans un disque  $\{|\delta| < \rho(p/q)\}$ , où  $r(p/q) = \rho(p/q)^q$  est la distance de  $p/q$  à l'ensemble des paramètres  $\alpha \neq p/q$  pour lesquels  $P_\alpha$  a un  $q$ -cycle parabolique. Comme le cycle est contenu dans l'ensemble de Julia rempli, qui est uniformément borné dans la région considérée, la fonction  $\chi$  est bornée dans  $\{|\delta| < \rho(p/q)\}$ .

On a

$$1 \geq r(p/q) \geq q^{-3},$$

où la majoration est triviale et la minoration résulte d'une inégalité sur la taille des membres de  $M$  que j'ai établie il y a 20 ans. En particulier, on a

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \rho(p/q) = 1.$$

4.2. Soit  $\alpha$  un nombre vérifiant la condition de Brjuno ; on note  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  les réduites de  $\alpha$  et  $r(P_\alpha)$  le rayon conforme du disque de Siegel  $\Delta_\alpha$  (rayon de convergence de l'application linéarisante normalisée). Après Jellouli [14], on observe que  $P_{p_n/q_n}^{q_n}$  converge vers l'identité uniformément sur les compacts de  $\Delta_\alpha$ . En particulier  $P_{p_n/q_n}^{q_n}$  est univalente sur de tels compacts et on en déduit facilement

$$\liminf_n L(p_n/q_n) \geq r(P_\alpha).$$

Soit  $\rho < 1$ . Les fonctions  $\chi_{p_n/q_n}$  sont définies dans  $\{|z| < \rho\}$  pour  $n$  assez grand et y forment une famille normale. Toute valeur d'adhérence  $\chi$  n'est pas constante d'après l'inégalité précédente; comme on a

$$\chi_{p_n/q_n}(\delta \exp 2\pi i p_n/q_n) = P_{p_n/q_n}(\chi_{p_n/q_n}(\delta)),$$

la fonction  $\chi$  va linéariser  $P_\alpha$ . Comme  $\rho < 1$  est arbitraire, on conclut après Chéritat que  $(\chi_{p_n/q_n})_{n \geq 0}$  converge sur les compacts de  $\{|z| < 1\}$  vers le biholomorphisme  $\chi_\alpha : \{|z| < 1\} \rightarrow \Delta_\alpha$  tel que  $\chi_\alpha(0) = 0$  et  $\chi_\alpha(1) = r(P_\alpha)$ . En particulier, on a

$$\lim L(p_n/q_n) = r(P_\alpha).$$

**4.3.** Dans le cadre de la proposition du 3.1, on a

$$|\alpha(n, A) - p_n/q_n| \approx q_n^{-2} A^{-1}.$$

Au vu des résultats ci-dessus, l'hypothèse de la proposition ( $A_n^{1/q_n} \rightarrow +\infty$ ) garantit bien l'existence d'un  $q_n$ -cycle périodique proche de 0 pour  $P_{\alpha(n, A_n)}$  lorsque  $n$  est grand.

**4.4.** Il s'agit maintenant de montrer que, pour tout ouvert  $V$  de  $\Delta_\alpha$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$Leb(V \cap \Delta_{\alpha(n, A_n)}) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) Leb(V)$$

si  $n$  est assez grand.

Introduisons

$$f_n = \chi_{p_n/q_n}^{-1} \circ P_{\alpha(n, A_n)} \circ \chi_{p_n/q_n},$$

Cette suite tend vers  $R_\alpha$  uniformément sur les compacts de  $\{|z| < 1\}$ . Posons aussi

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \alpha(n, A_n) - p_n/q_n, \\ \psi_n(z) &= \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \varepsilon_n} = v = \exp 2\pi i q_n^2 |\varepsilon_n| w \end{aligned}$$

et, pour tout  $\rho < 1$

$$X_n(\rho) = \psi_n^{-1}(\{|v| < \frac{\rho^{q_n}}{\rho^{q_n} + |\varepsilon_n|}\}).$$

Pour tout ouvert  $W \subset \{|z| < \rho\}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a clairement, si  $n$  est assez grand

$$Leb(W \cap X_n(\rho)) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) Leb(W).$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout  $\rho < 1$ ,  $X_n(\rho)$  est contenu dans le disque de Siegel de  $f_n$  si  $n$  est assez grand.

Posons

$$\xi_n(z) = 2\pi i q_n z (\varepsilon_n - z^{q_n})$$



La définition de  $\chi_{p_n/q_n}$  permet de factoriser :

$$\begin{aligned} f_n^{q_n}(z) - z &= \xi_n(z)k_n(z), \\ \exp((-1)^n \frac{2\pi i}{q_n}) f_n^{q_n-1}(z) - z &= \xi_n(z)g_n(z), \end{aligned}$$

et il n'est pas difficile de voir que  $k_n$  tend vers 1 uniformément sur les compacts de  $\{|z| < 1\}$ , tandis que  $|g_n|^{1/q_n}$  est pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $\rho < 1$  majoré par  $1 + \varepsilon$  sur  $\{|z| < \rho\}$  si  $n$  est assez grand.

L'image par le revêtement ramifié  $\chi_n$  du champ de vecteurs  $\xi_n(z) \partial/\partial z$  est le champ  $2\pi i q_n^2 \varepsilon_n v \partial/\partial v$ , qui se relève en  $(-1)^n \frac{\partial}{\partial w}$ . Le domaine  $X_n(\rho)$  correspond à

$$H_n(\rho) = \{Im w > \frac{1}{2\pi|\varepsilon_n|q_n^2} \log(1 + |\varepsilon_n|\rho^{-q_n})\}.$$

Dans la coordonnée  $w$ , les applications  $f_n^{q_n}, f_n^{q_n-1}$  s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} F_n(w) &= w + u_n(w), \\ G_n(w) &= w + v_n(w) - \frac{1}{q_n^2 \varepsilon_n}. \end{aligned}$$

Le contrôle de  $u_n, v_n$  dans  $H_n(\rho)$  se déduit de celui de  $k_n, g_n$ . On a en particulier que  $|v_n|^{1/q_n}$  est majoré par  $1 + \varepsilon$  si  $n$  est assez grand ; comme  $|\varepsilon_n|^{1/q_n}$  tend vers 0, c'est le terme de translation qui domine dans  $G_n$ . On obtient surtout dans  $H_n(\rho)$

$$|u_n(w) - 1| \leq B_n |\varepsilon_n| \kappa_n(Re w),$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n^{1/q_n} = 1$  et

$$\kappa_n(X) = 1 + |1 + \frac{\rho^{q_n}}{\rho^{q_n} + |\varepsilon_n|} \exp(2\pi i q_n^2 |\varepsilon_n| X)|^{-1}.$$

Ce contrôle permet (tout juste) d'itérer suffisamment  $F_n$  pour traverser une bande de largeur  $(q_n^2 |\varepsilon_n|)^{-1}$ . Cela suffit pour pouvoir utiliser les techniques de renormalisation introduites par Douady, Ghys et moi-même et conclure qu'on peut itérer indéfiniment les points de  $H_n(\rho)$ , ce qui mène à la conclusion recherchée.

## 5. CONTRÔLE DE L'ORBITE CRITIQUE ET RENORMALISATION SUIVANT INOU-SHISHIKURA

**5.1.** Les techniques de renormalisation évoquées précédemment s'appliquent à des transformations (possédant un point fixe indifférent irrationnel) dont la seule caractéristique globale est d'être univalentes dans le domaine où on les considère. Cela s'avère suffisant pour contrôler l'intérieur des disques de Siegel. Cependant, pour presque tout nombre de rotation, le bord du disque de Siegel du polynôme quadratique contient le point critique. Une autre difficulté associée à ces techniques est la présence de choix arbitraires dans la définition de la renormalisation : on considère en effet l'application

de premier retour dans un secteur délimité par une courbe  $\ell$  issue du point fixe et son image; pour uniformiser un tel secteur, il faut le clore par une courbe joignant l'extrémité de  $\ell$  à son image; changer cette dernière courbe conjuguée l'application renormalisée.

Pour étudier de façon plus approfondie les bords des disques de Siegel des polynômes quadratiques (et des transformations de même nature), il est donc souhaitable de travailler avec des transformations de nature plus globale qui permettent en particulier de rigidifier l'uniformisation. Le problème est alors de trouver des classes de transformation qui soient stables pour l'application de renormalisation, de façon à ce qu'on puisse itérer celle-ci autant qu'il est nécessaire.

Inou et Shishikura ont résolu partiellement ce problème en découvrant de telles classes lorsque le nombre de rotation est assez petit. Pour un nombre de rotation  $\alpha$  de type constant, c'est donc seulement lorsque  $\alpha \in \mathcal{C}(N)$ , avec  $N$  assez grand, qu'on pourra itérer indéfiniment leur application de renormalisation. C'est suffisant pour la construction de Buff et Chéritat.

**5.2.** Il est pratique de travailler dans une coordonnée qui rejette le point fixe à l'infini.

Considérons la fraction rationnelle de degré 6

$$Q(z) = z\left(1 + \frac{1}{z}\right)^6\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-4}$$

dans  $\{|z| > 1\}$ . À l'infini, on a

$$Q(z) = z + 10 + 49z^{-1} + \dots$$

donc  $\infty$  est un point fixe parabolique de multiplicité minimale 2. Dans  $\{|z| > 1\}$ , le seul point critique est  $5 + \sqrt{24}$ , la valeur critique correspondante est 27. Sur le cercle  $\{|z| = 1\}$ , on a aussi les points critiques  $-1$  (de degré local 6) et  $1$  (de degré local 4), les valeurs critiques correspondantes sont 0 et  $\infty$ .

Décrivons l'image du cercle  $\{|z| = 1\}$  (en contournant par l'extérieur les points  $\pm 1$  : on parcourt l'axe réel positif entre  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) et  $R \gg 1$  puis on tourne 2 fois dans le sens négatif sur  $\{|z| = R\}$  avant de revenir de  $R$  à  $\varepsilon$  et de tourner 3 fois sur  $\{|z| = \varepsilon\}$  dans le sens positif.

Suivant Inou-Shishikura, définissons

$$E = \left\{ z = x + iy, \left(\frac{x - x_E}{a_E}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_E}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

avec  $x_E = -0.18$ ,  $a_E = 1.24$ ,  $b_E = 1.04$ . L'intérieur de  $E$  contient  $\{|z| \leq 1\}$ . Notons  $\mathcal{F}_0$  la classe des applications  $f = Q \circ \varphi^{-1}$ , où  $\varphi$  est une application univalente sur  $\overline{\mathbb{C}} - E$  vérifiant  $\varphi(\infty) = \infty$ ,  $\varphi'(\infty) = 1$ , et telle que  $\varphi(\overline{\mathbb{C}} - E)$  est un quasidisque ne contenant pas 0. Le domaine de  $f$  est donc ce quasidisque et l'image est  $Q(\overline{\mathbb{C}} - E)$ .

Les applications de  $\mathcal{F}_0$  ont donc toutes un point fixe parabolique à l'infini, et il est facile de voir qu'il est toujours de multiplicité minimale 2.

Pour  $\alpha \in (0, 1)$ , notons  $\mathcal{F}_\alpha$  la classe des transformations  $R_{-\alpha} \circ f, f \in \mathcal{F}_0$ . Le multiplicateur du point fixe à l'infini est alors  $\exp 2\pi i\alpha$ .

Une transformation dans  $\mathcal{F}_\alpha$  s'écrit

$$f(z) = \exp(-2\pi i\alpha)z + c_0 + \mathcal{O}(z^{-1}),$$

avec  $|c_0 - 10| \leq 3$ . Pour  $\alpha$  petit,  $f$  a un autre point fixe  $z^*$  voisin de  $\frac{c_0}{2\pi i\alpha}$ . Supposons par exemple  $\alpha > 0$ . Notons  $\ell$  la demi-droite verticale joignant  $z^*$  à  $-i\infty$ ,  $U$  le secteur infini délimité par  $\ell$  et  $f(\ell)$ ; la surface de Riemann  $\mathcal{U}$  obtenue en recollant les bords de  $U$  par  $f$  est isomorphe à  $\mathbf{C}^*$ ; on l'uniformise en envoyant les bouts correspondant à  $z^*$  et  $\infty$  en  $0, \infty$  respectivement. La coordonnée uniformisante est alors définie à multiplication par un nombre complexe non nul près, et sera complètement déterminée en spécifiant l'unique valeur critique de l'application renormalisée (on la prendra égale à  $27 \exp(-2\pi i\alpha^{-1})$ ).

La renormalisation  $Rf$  de  $f \in \mathcal{F}_\alpha$  est définie au voisinage de l'infini comme l'application de premier retour dans  $U$ , lue dans la coordonnée uniformisante  $w$  de  $\mathcal{U}$ . L'application  $Rf$  a un point fixe indifférent à l'infini de multiplicateur  $\exp(-2\pi i\alpha^{-1})$ . Après conjugaison par  $w \rightarrow \bar{w}$ , ce multiplicateur devient  $\exp(2\pi i\alpha^{-1}) = \exp(2\pi i\alpha_1)$  avec  $\alpha^{-1} = \alpha_1 + \alpha_1$ . Inou et Shishikura ont montré que  $Rf$  appartient à  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$  !

Plus précisément, notons  $V_1$  (resp.  $V_{-1}$ ) la région voisine de 1 (resp. de  $-1$ ) qui s'envoie par  $Q$  sur  $\{|z| \geq 27e^{4\pi}\}$  (resp. sur  $\{|z| \leq 27e^{-4\pi}\}$ ).

L'ensemble  $E' = \{|z| \leq 1\} \cup V_1 \cup V_{-1}$  est contenu dans l'intérieur de  $E$ . L'image par  $Q$  de  $\bar{\mathbf{C}} - E'$  est égale à  $\{|z| > 27e^{-4\pi}\}$ ; un point  $z$  dans ce domaine qui n'est pas sur le segment  $[27e^{-4\pi}, 27e^{4\pi}]$  a 1 image inverse par  $Q$  dans  $\bar{\mathbf{C}} - E'$  si  $|z| > 27e^{4\pi}$ , 3 si  $|z| < 27e^{4\pi}$ .

Sur la surface de Riemann  $\mathcal{U}$ , munie de sa coordonnée uniformisante normalisée  $w$ , Inou et Shishikura construisent un quasidisque  $E'_1$  contenant 0 dans son intérieur tel que

- $Rf$  est défini sur  $\bar{\mathbf{C}} - E'_1$  et envoie ce domaine sur  $\{|w| > 27e^{-4\pi}\}$
- il existe un isomorphisme  $\Phi$  de  $\bar{\mathbf{C}} - E'$  sur  $\mathcal{U} - E'_1$  tel que

$$Rf \circ \Phi = Q.$$

On voit que  $Rf$  est de la forme cherchée sur un domaine plus grand (car  $\bar{\mathbf{C}} - E$  est d'adhérence compacte dans  $\bar{\mathbf{C}} - E'$ ). Cela leur permet de conclure, à l'aide d'un argument de type lemme de Schwartz dans un espace de Teichmüller approprié, que l'opérateur de renormalisation est uniformément contractant (à nombre de rotation fixé). Résumons :

THÉORÈME (INOUE-SHISHIKURA), [13]. — *Si  $\alpha$  est assez petit, l'opérateur de renormalisation envoie  $\mathcal{F}_\alpha$  dans  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$ , et est une contraction uniforme pour la distance de Teichmüller.*

Inoue et Shishikura déduisent ce résultat par perturbation d'un résultat analogue pour  $\mathcal{F}_0$ . Leur démonstration entremêle des calculs numériques délicats et des estimations raffinées sur les fonctions univalentes.

**5.3.** On prend  $N$  assez grand de façon à ce que le théorème d'Inoue-Shishikura s'applique lorsque  $|\alpha| < 1/N$ .

Soit alors  $\alpha \in \mathcal{C}(N)$ . Bien que l'application  $z \rightarrow z^2(1 + \lambda z)^{-1}$  (conjuguée au polynôme quadratique par l'inversion  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ ) n'appartienne pas à  $\mathcal{F}_\alpha$  on peut définir sa renormalisée et montrer après Inoue-Shishikura qu'elle appartient à  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$ , ce qui permet donc de définir les renormalisées de tous ordres.

Soit  $W_n$  le domaine formé des points dont l'orbite jusqu'à l'ordre  $q_n$  est représentée par la renormalisée d'ordre  $n$  (une définition précise de  $W_n$  dépend de choix arbitraires, mais les assertions qui suivent sont indépendantes de ces choix). La suite des domaines  $(W_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et on peut montrer que l'intersection des  $W_n$  est exactement égale à l'adhérence du disque de Siegel  $\Delta_\alpha$ . (On utilise ici que  $\alpha$  est de type constant :  $\partial\Delta_\alpha$  est un quasicerle sur lequel l'orbite postcritique est dense.)

On peut maintenant conclure que, pour tout ouvert  $W$  contenant  $\overline{\Delta}_\alpha$ , on a  $\overline{\Delta}_{\alpha'} \subset W$  si  $\alpha' \in \mathcal{C}(N)$  est assez proche de  $\alpha$  : on a en effet  $\overline{W}_{n_0} \subset W$  pour un entier  $n_0$  choisi assez grand ; la continuité évidente de l'opérateur de renormalisation implique qu'on a encore  $\overline{W}_{n_0}(\alpha') \subset W$  si  $\alpha'$  est assez proche de  $\alpha$ , et donc  $\overline{\Delta}_{\alpha'} \subset W$ .

## 6. FIN DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

**6.1.** Il reste à voir que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\text{Leb}(K_{\alpha(n, A_n)}) \geq (1 - \varepsilon)\text{Leb}(K_\alpha)$$

si  $n$  est assez grand.

Comme  $J_\alpha$  est de mesure nulle, la mesure de Lebesgue de  $K_\alpha$  est égale à celle de son intérieur. L'intérieur de  $K_\alpha$  est l'union des préimages de  $\Delta_\alpha$ . Il suffit donc de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\text{Leb}(K_{\alpha(n, A_n)} \cap \Delta_\alpha) \geq (1 - \varepsilon)\text{Leb}(\Delta_\alpha)$$

si  $n$  est assez grand. On sait déjà d'après la section 4 qu'on a, pour tout ouvert  $V \subset \Delta_\alpha$ ,

$$\text{Leb}(\Delta_{\alpha(n, A_n)} \cap V) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\text{Leb}(V)$$

si  $n$  est assez grand. Il est facile de se convaincre que la constante  $1/2$  est optimale; donc, pour récupérer l'autre moitié de la mesure, il faut utiliser les préimages de  $\Delta_{\alpha(n, A_n)}$ .

On va esquisser l'adaptation par Buff et Chéritat d'un argument de McMullen [18]. Celui-ci montrait (entre autres) que, si  $\alpha$  est de type constant,  $J_\alpha$  est de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 2 et tout point du bord de  $\Delta_\alpha$  est un point de densité de  $K_\alpha$ .

**6.2.** On note  $\Delta'_\alpha$  la composante de  $P^{-1}(\Delta_\alpha)$  distincte de  $\Delta_\alpha$ , c'est-à-dire le domaine symétrique de  $\Delta_\alpha$  par rapport au point critique.

Un voisinage  $W$  d'un point  $z$  est dit équilibré s'il existe  $r > 0$  tel qu'on ait

$$B(z, C^{-1}r) \subset W \subset B(z, Cr).$$

Ici et dans la suite,  $C$  désigne des constantes ne dépendant que de  $\alpha$ .

Pour  $\ell \geq 0$ , on pose  $\delta_\ell(z) = |P_\alpha^{q_\ell}(z) - z|$ .

Comme  $\Delta_\alpha$  est un quasidisque, et  $\alpha$  est de type constant, on peut construire une suite décroissante de domaines de Jordan  $V_\ell$  qui possède les propriétés suivantes :

(i) pour tout  $z \in \partial\Delta_\alpha$ , on a

$$B(z, C^{-1}\delta_\ell(z)) \subset V_\ell;$$

(ii) pour tout  $z \in V_\ell - V_{\ell+1}$ , on a

$$B(z, C^{-1}\delta_\ell(z)) \subset V_{\ell-1} - V_{\ell+2};$$

(iii)  $V_\ell \subset \bigcup_{\partial\Delta_\alpha} B(z, C\delta_\ell(z)) \bigcup \Delta_\alpha$ ;

(iv)  $P_\alpha(V_\ell) \subset \text{int } V_{\ell-1}$ ;

(v) pour tout  $z \in V_\ell - V_{\ell+1}$ , il existe un voisinage équilibré  $W_z$  de  $z$  et un entier  $m \leq q_\ell$  tel que  $P^j(W_z)$  soit contenu dans  $V_{\ell-1} - V_{\ell+2}$  pour  $0 \leq j \leq m$ ,  $P^m$  soit univalente de distortion bornée sur  $W_z$ , et on ait

$$\text{Leb}(P_\alpha^m(W_z) \cap \Delta'_\alpha) \geq c_0 \text{Leb}(P_\alpha^m(W_z)).$$

La densité relative uniforme de  $\Delta_{\alpha(n, A_n)}$  dans  $\Delta_\alpha$  et un argument de compacité impliquent, si  $n$  est assez grand ( $\ell$  étant fixé)

$$\text{Leb}(P_{\alpha(n, A_n)}^m(W_z) \cap \Delta'_{\alpha(n, A_n)}) \geq \frac{c_0}{3} \text{Leb}(P_{\alpha(n, A_n)}^m(W_z))$$

d'où l'on tire

$$\text{Leb}(W_z \cap P_{\alpha(n, A_n)}^{-(m+1)}(\Delta_{\alpha(n, A_n)})) \geq c_1 \text{Leb}(W_z).$$

uniformément en  $z \in V_\ell - V_{\ell+1}$  si  $n$  est assez grand.

**6.3.** Notons  $Z_{n, \ell}$  l'ensemble des points  $z \in \Delta_\alpha$  dont l'orbite sous  $P_{\alpha(n, A_n)}$  n'est pas contenue dans  $V_\ell$ .

Soit  $u \in Z_{n,\ell+1}$ . D'après (iv) ci-dessus, si  $n$  est assez grand, le premier point  $z = P_{\alpha(n,A_n)}^k(u)$  de l'orbite de  $u$  pour  $P_{\alpha(n,A_n)}$  qui n'appartient pas à  $V_{\ell+1}$  appartient à  $V_\ell$ .

D'après la section 5, l'orbite postcritique de  $P_{\alpha(n,A_n)}$  est contenue dans  $V_{\ell+3}$  si  $n$  est assez grand. On a donc une branche inverse de  $P_{\alpha(n,A_n)}^k$  définie et à distortion bornée sur  $W_z$  envoyant  $z$  sur  $u$ . L'image est un voisinage équilibré  $W_u$  de  $u$ . On a

$$\text{Leb}(W_u - Z_{n,\ell-1}) \geq c_2 \text{Leb}(W_u).$$

Par ailleurs, on a  $W_u \cap \Delta_\alpha \subset Z_{n,\ell+2}$  puisque  $W_z \cap V_{\ell+2} = \emptyset$ .

Un argument à la Vitali permet de conclure qu'il existe  $\lambda < 1$  tel qu'on ait

$$\text{Leb}(Z_{n,\ell-1}) \leq \lambda \text{Leb}(Z_{n,\ell+2})$$

pour  $n \geq n(\ell)$ . Cela suffit pour conclure qu'on a, pour tout  $\ell \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Leb} Z_{n,\ell} = 0.$$

Pour  $\ell = 0$ , c'est le résultat recherché. Cela conclut l'esquisse de preuve de la proposition de la section 3.

## 7. DISQUES DE SIEGEL DES POLYNÔMES QUADRATIQUES

### 7.1. Taille des disques

Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel,  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  la suite de ses réduites. Définissons

$$\alpha_0 = \{\alpha\}, \quad \alpha_n = \{\alpha_{n-1}^{-1}\} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

et posons, pour  $n \geq -1$

$$\beta_n = (-1)^n (q_n \alpha - p_n) = \prod_{\ell=0}^n \alpha_\ell.$$

La série

$$B(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1}$$

converge si et seulement si  $\alpha$  vérifie la condition de Brjuno.

Rappelons que pour un nombre  $\alpha$  vérifiant la condition de Brjuno, on note  $r(P_\alpha)$  le rayon conforme du disque de Siegel du polynôme quadratique  $P_\alpha$ . Posons alors

$$\Upsilon(\alpha) = B(\alpha) + \log r(P_\alpha).$$

THÉORÈME (BUFF-CHÉRITAT), [6] [4]. — *La fonction  $\alpha \rightarrow \Upsilon(\alpha)$  s'étend en une fonction continue sur  $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ .*

On notera que chacun des deux termes composant  $\Upsilon$  est extrêmement singulier, le premier de nature arithmétique et le second de nature géométrique.

J'avais auparavant montré [23] que  $\Upsilon$  est minorée et qu'on a une majoration

$$\log r(P_\alpha) \leq -(1 - \varepsilon)B(\alpha) + C_\varepsilon$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ . X. Buff a amélioré récemment mon argument [3] et obtient ainsi de façon élémentaire que  $\Upsilon$  est majorée. S. Marmi avait conjecturé, suite à des expériences numériques, que  $\Upsilon$  est continue [16]. Une conjecture plus forte [17] est que  $\Upsilon$  est höldérienne d'exposant  $1/2$ .

Buff et Chéritat donnent une définition directe de la valeur de  $\Upsilon$  aux nombres qui ne vérifient pas la condition de Brjuno.

Considérons d'abord un nombre irrationnel  $\alpha$ . Posons

$$\Phi_n(\alpha) = \sum_0^n \beta_{\ell-1} \log \alpha_\ell^{-1}$$

et notons  $r_n(\alpha)$  la distance de 0 à l'ensemble des points périodiques (distincts de 0) de période  $\leq q_n$ . Ils ont montré qu'on a

$$\Upsilon(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(\alpha) + \log r_n(\alpha).$$

Pour un nombre rationnel  $\alpha = p/q$ , soit  $m$  l'entier tel que  $\alpha_m = 0$ ; posons

$$\Phi_{\text{trunc}}(\alpha) = \sum_{0 \leq \ell < m} \beta_{\ell-1} \log \alpha_\ell^{-1}.$$

On a alors

$$\Upsilon(p/q) = \Phi_{\text{trunc}}(p/q) + \frac{\log 2\pi}{q} + \log L(p/q)$$

où  $L(p/q)$  est la taille asymptotique de la section 4. La preuve de Buff et Chéritat s'appuie principalement sur les méthodes évoquées dans la section 4.

## 7.2. Géométrie des disques

Perez-Marco a construit [19] des applications univalentes dans le disque unité possédant un disque de Siegel relativement compact dont le bord est une courbe de Jordan de classe  $C^\infty$ .

Par une méthode totalement différente, Buff et Chéritat ont montré que ceci se produisait dans de très nombreuses familles, y compris dans la famille des polynômes quadratiques. Leur démonstration a été simplifiée en collaboration avec A. Avila. Une simplification ultérieure est due à L. Geyer [12].

**THÉORÈME (AVILA-BUFF-CHÉRITAT), [1]** — *Soient  $\alpha_0$  un nombre de Brjuno,  $0 < r < r(P_{\alpha_0})$ ,  $\varepsilon > 0$ . Il existe un ensemble de Cantor  $K \subset [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]$  formé de nombre de Brjuno  $\alpha$  tels que le disque de Siegel  $\Delta_\alpha$  soit de rayon conforme égal à  $r$  et ait pour bord une courbe de Jordan de classe  $C^\infty$ .*

La méthode de démonstration est suffisamment souple pour obtenir d'autres classes de régularité, par exemple des courbes de classes  $C^n$  mais pas  $C^{n+1}$  [8].

On notera que, pour les nombres  $\alpha$  du théorème ci-dessus, le point critique de  $P_\alpha$  ne peut se trouver sur le bord de  $\Delta_\alpha$  ; d'après un théorème de Herman, cela veut dire qu'aucun de ces nombres  $\alpha$  ne peut vérifier la condition arithmétique  $\mathcal{H}$  associée à la linéarisation analytique des difféomorphismes analytiques du cercle [24].

## RÉFÉRENCES

- [1] A. AVILA, X. BUFF & A. CHÉRITAT – « Siegel disks with smooth boundaries », *Acta Math.* **193** (2004), no. 1, p. 1–30.
- [2] A. D. BRJUNO – « Analytic form of differential equations I, II », *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **25**, **26** (1971, 1972), p. 119–262, p. 199–239.
- [3] X. BUFF – « Disques de Siegel et ensembles de Julia d'aire strictement positive », preprint, <http://www.picard.ups-tlse.fr/~buff/HDR/HDR.pdf>.
- [4] X. BUFF & A. CHÉRITAT – « The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks », *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), p. 265–312.
- [5] ———, « Quadratic Julia sets with positive area », preprint <http://arxiv.org/abs/math/0605514>.
- [6] ———, « Upper bound for the size of quadratic Siegel disks », *Invent. Math.* **156** (2004), no. 1, p. 1–24.
- [7] ———, « Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), no. 11, p. 669–674.
- [8] ———, « How regular can the boundary of a quadratic Siegel disk be? », *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), p. 1073–1080.
- [9] A. CHÉRITAT – « Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive », Thèse, Orsay, 2001.
- [10] ———, « Sur la vitesse d'explosion des points fixes paraboliques dans la famille quadratique », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), no. 12, p. 1107–1112.
- [11] A. DOUADY & J. HUBBARD – « Étude dynamique des polynômes complexes I, II », *Publ. Math. Orsay* (1984-85).
- [12] L. GEYER – « Smooth Siegel discs without number theory: A remark on a proof by Buff and Chéritat », preprint <http://arxiv.org/abs/math.DS/0510578> (2003).
- [13] H. INOU & M. SHISHIKURA – « The renormalization for parabolic fixed points and their perturbation », preprint, <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mitsu/pararenorm/ParabolicRenormalization.pdf>.
- [14] H. JELLOULI – « Perturbation d'une fonction linéarisable », in *The Mandelbrot set, theme and variations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 274, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, p. 227–252.



- [15] M. LYUBICH – « On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial », Stonybrook IMS, preprint (1991/10).
- [16] S. MARMI – « Critical functions for complex analytic maps », *J. Phys. A* **23** (1990), no. 15, p. 3447–3474.
- [17] S. MARMI, P. MOUSSA & J.-C. YOCCOZ – « The Brjuno functions and their regularity properties », *Comm. Math. Phys.* **186** (1997), no. 2, p. 265–293.
- [18] C. T. MCMULLEN – « Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets », *Acta Math.* **180** (1998), no. 2, p. 247–292.
- [19] R. PÉREZ-MARCO – « Siegel disks with smooth boundary », preprint (1997).
- [20] C. L. PETERSEN & S. ZAKERI – « On the Julia set of a typical quadratic polynomial with a Siegel disk », *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), no. 1, p. 1–52.
- [21] M. SHISHIKURA – Unpublished.
- [22] C. L. SIEGEL – « Iteration of analytic functions », *Ann. of Math. (2)* **43** (1942), p. 607–612.
- [23] J.-C. YOCCOZ – *Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisque, vol. 231, Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [24] ———, « Analytic linearization of circle diffeomorphisms », in *Dynamical systems and small divisors (Cetraro, 1998)*, Lecture Notes in Math., vol. 1784, Springer, Berlin, 2002, p. 125–173.

Jean-Christophe YOCCOZ

Collège de France

Département de Mathématiques

3, rue d'Ulm

F-75231 Paris Cedex 05

*E-mail* : jean-c.yoccoz@college-de-france.fr

