317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(969) *Livres ouverts en géométrie de contact*

Vincent COLIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2006
59e année, 2006-2007, n° 969, p. 91 à 117

LIVRES OUVERTS EN GÉOMÉTRIE DE CONTACT
[d'après Emmanuel Giroux]

par **Vincent COLIN**

1. INTRODUCTION

La géométrie de contact a connu récemment de nombreuses avancées, en interaction avec d'autres branches des mathématiques. Le signal déclencheur de cette évolution a été l'introduction, par Emmanuel Giroux [**32**], d'une nouvelle description des variétés de contact en termes de *livres ouverts*. Brièvement ici, un livre ouvert dans une variété V est la donnée d'une sous-variété K de codimension deux de V à fibré normal trivial, appelée la reliure, et d'une fibration $\theta : V \setminus K \to S^1$ qui est l'application coordonnée angulaire sur un voisinage tubulaire trivialisé de K. Les fibres de θ sont appelées les pages. Les livres ouverts qui représentent les variétés de contact sont d'un type particulier : la reliure est elle-même une variété de contact, les pages sont des variétés de Stein et la monodromie, qui décrit la fibration θ, peut être représentée par un difféomorphisme symplectique de l'une des pages. On considère cette correspondance modulo une opération de stabilisation sur les livres ouverts : le plombage lagrangien positif. En dimension trois, elle devient alors bijective.

En dimension trois, cette description est purement topologique, comme l'est la topologie symplectique en dimension deux. Elle permet de traduire les problèmes de géométrie de contact en questions sur la monodromie du livre ouvert. Giroux donne ainsi une caractérisation des monodromies qui correspondent aux structures de contact holomorphiquement remplissables [**32, 33**] et Honda-Kazez-Matić [**44**] (et le travail précurseur de Goodman [**36**]) de celles qui correspondent aux structures de contact tendues.

Depuis l'exposé [**28**], de nombreux résultats sont venus affiner notre compréhension des structures de contact sur les variétés de dimension trois, dans la lignée de ceux obtenus par Bennequin, Eliashberg et Giroux dans les années 80-90. On en possède une classification complète sur de nombreuses variétés [**30, 31, 40, 41, 42, 43**] et on a découvert une classification grossière générale [**9, 10, 11, 12**] : une variété close orientable et irréductible de dimension trois porte une infinité de structures de contact tendues si et seulement si elle contient un tore π_1-injecté. Tous ces résultats peuvent maintenant se transposer dans le monde des livres ouverts et des difféomorphismes de surfaces. C'est de cette manière que Giroux donne avec Goodman dans [**34**] la réponse à une question de Harer sur la classification des entrelacs fibrés.

À tout livre ouvert portant une structure de contact ξ, on peut associer une classe particulière de *champs de Reeb*, *i.e.* de champs de vecteurs transversaux à ξ et dont le flot préserve ξ : celle des champs de Reeb transversaux aux pages. Ce contrôle de la dynamique permet dans de nombreux cas, par exemple lorsque la monodromie est isotope à un difféomorphisme périodique [**13**], de calculer l'homologie de contact de ξ et de montrer la conjecture de Weinstein : tout champ de Reeb pour une telle structure de contact ξ a une orbite périodique.

Les livres ouverts jouent également, *via* la construction de remplissages symplectiques découverte indépendamment par Eliashberg [**20**] et Etnyre [**23**], un rôle clé dans la démonstration récente de la propriété P des nœuds par Kronheimer et Mrowka [**46**]. Ils interviennent aussi de manière cruciale dans la définition d'une classe de contact en homologie de Heegaard-Floer, par Ozsváth et Szabó [**52**], permettant en retour de nouvelles avancées en géométrie de contact et en topologie [**47**].

En dimension supérieure, la construction de Giroux est de nature différente et s'appuie sur les travaux de Donaldson [**14, 15**], transcrits par Ibort-Martinez-Presas [**45**] de la géométrie symplectique vers la géométrie de contact. Elle permet de formuler la géométrie de contact dans le langage de la géométrie symplectique. Il s'agit là de construire des sections approximativement holomorphes et équitransversales de fibrés en droites hermitiens au-dessus d'une variété de contact (V,ξ). Giroux interprète géométriquement ces sections par l'existence d'un livre ouvert particulier. Cette présentation a permis notamment à Bourgeois de répondre positivement à une question posée par Lutz dans les années 70 [**5**] : tout tore de dimension impaire porte une structure de contact.

Je remercie très vivement Emmanuel Giroux et François Laudenbach pour leur aide lors de la confection de ce document.

2. LIVRES OUVERTS

On note V une variété close (compacte sans bord) et orientée de dimension $2n+1$.

Une *structure de contact* orientée et positive sur V est un champ d'hyperplans ξ, défini globalement comme le noyau d'une 1-forme non singulière α, sujette à la condition $\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$. Lorsque V et ξ sont orientés, le champ ξ est aussi coorienté.

La forme α est choisie positive sur un vecteur normal direct à ξ ; elle est alors unique à multiplication près par une fonction positive. Dans ce cas, la forme $(d\alpha|_\xi)^n$ donne l'orientation de ξ : la 2-forme $d\alpha|_\xi$ est une forme symplectique positive.

Les structures de contact sont des champs de plans localement homogènes. Tout point de (V,ξ) est inclus dans une *carte de Darboux*, où la structure ξ a pour équation $dz + \Sigma_{i=1}^n p_i dq_i = 0$ dans des coordonnées $(p_1, q_1, ..., p_n, q_n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Si on peut en général envisager des structures de contact non orientées et négatives, on ne considérera dans ce texte que des structures orientées et positives.

Les champs de Reeb associés à une structure de contact ξ sont mis en bijection avec les formes de contact α de noyau ξ par les équations : $i_R\alpha = 1$; $i_R d\alpha = 0$, qui admettent une unique solution. On peut ainsi parler du champ de Reeb *associé* à une forme de contact α.

On note D^2 le disque unité dans le plan, muni des coordonnées polaires $\{(r,\phi)\} \in]0,1] \times S^1$.

Définition 2.1. — *Un livre ouvert pour V est la donnée d'un couple (K,θ), où :*

- *K est une sous-variété close de V de codimension deux à fibré normal trivial ;*
- *$\theta : V \setminus K \to S^1$ est une fibration égale à $(k,r,\phi) \mapsto \phi$, $k \in K$, $(r,\phi) \in]0,1] \times S^1$, dans un voisinage tubulaire $K \times D^2 \setminus (K \times \{0\})$ de $K \simeq K \times \{0\}$.*

La sous-variété K est appelée la reliure du livre ouvert ; les fibres de θ sont ses pages.

Toute page d'un livre ouvert se compactifie naturellement par ajout de la reliure, c'est pourquoi on considérera parfois par la suite des pages compactes. On peut également voir les livres ouverts de façon constructive. Soient S une variété compacte à bord et h un difféomorphisme de S qui vaut l'identité au bord. On considère la suspension

$$\Sigma(S,h) = S \times [0,1]/\sim_h$$

de h, où $\sim_h$ est la relation d'équivalence $(x,1) \sim_h (h(x),0)$, pour tout $x \in S$. Comme h vaut l'identité sur ∂S, le bord $\partial\Sigma(S,h)$ est canoniquement difféomorphe à $\partial S \times S^1$. La variété

$$V = \overline{\Sigma}(S,h) = \Sigma(S,h) \cup_\partial (\partial S) \times D^2,$$

obtenue par collage du produit $(\partial S) \times D^2$ à $\Sigma(S,h)$ par identification canonique de leurs bords respectifs à $(\partial S) \times S^1$, possède un livre ouvert. La reliure est $K = (\partial S) \times \{0\} \subset (\partial S) \times D^2$, et la fibration θ l'extension de la fibration $\theta_0 : \Sigma(S,h) \to S^1$, $\theta_0(x,t) \mapsto t$, par l'application coordonnée angulaire sur $(\partial S) \times (D^2 \setminus \{0\})$. On dit que $V = \overline{\Sigma}(S,h)$ est la *suspension relative* de (S,h).

Réciproquement, tout livre ouvert (K,θ) sur V est obtenu par une construction similaire. On note $K \times D^2$ un voisinage de K sur lequel la fibration est donnée par l'application coordonnée angulaire. On considère alors un champ de vecteurs X sur V, égal à $r\frac{\partial}{\partial\phi}$ sur $K\times D^2$ et transversal aux fibres de θ. Si S est une fibre de $\theta|_{V\setminus int(K\times D^2)}$, l'application de premier retour sur S donnée en suivant le flot de X est l'identité au bord de S. Elle définit un difféomorphisme h de S, dont la suspension relative s'identifie à V.

Si V est orientée et si (K,θ) est un livre ouvert pour V, la fibration θ détermine une coorientation des pages et donc une orientation des pages et de la reliure. Le lien établi par Giroux entre les structures de contact et les livres ouverts s'exprime à l'aide de la définition suivante.

DÉFINITION 2.2. — *Une structure de contact ξ est portée par un livre ouvert (K,θ) si elle est le noyau d'une forme de contact α telle que :*

1) *α donne une forme de contact positive sur K ;*

2) *$d\alpha$ induise une forme symplectique positive sur les pages.*

Une forme de contact α qui vérifie ces deux conditions est dite adaptée à (K,θ). La condition (2) est équivalente à l'existence d'un champ de Reeb positivement transversal aux pages.

EXEMPLE. Sur $S^3=\{r_1^2+r_2^2=1\}\subset\mathbb{C}^2=\{(z_1=r_1e^{i\theta_1},z_2=r_2e^{i\theta_2})\}$, la forme de contact $\alpha=r_1^2d\theta_1+r_2^2d\theta_2$ de noyau ζ_0 est adaptée au livre ouvert $K_0=\{r_2=0\}$, $\theta(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2)=\theta_2$, dont les pages sont des disques.

Elle l'est également au livre ouvert $K_+=\{r_1r_2=0\}$, $\theta_+(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2)=\theta_1+\theta_2$, dont les pages sont des anneaux.

3. LE CAS DE LA DIMENSION TROIS

Si V est une variété de dimension trois, la reliure K d'un livre ouvert (K,θ) de V est un entrelacs. Une structure de contact ξ est portée par (K,θ) s'il existe une forme de contact α de noyau ξ dont le champ de Reeb est positivement transversal aux pages et tangent positivement à la reliure.

Avant leur formalisation par Giroux, les livres ouverts apparaissaient déjà en filigrane dans la littérature de contact. Dans son travail fondateur [**3**], Bennequin utilise le fait que la structure standard ζ_0 d'équation $\ker(dz+r^2d\phi)$ dans $\mathbb{R}^3$ muni de coordonnées cylindriques est portée par le livre ouvert dont les pages sont des demi-plans reliés sur l'axe vertical $\{r=0\}$. Il réussit à rendre transversal aux pages tout nœud transversal à ζ_0 par une isotopie de nœuds transversaux à ζ_0. Dans [**56**], Thurston et Wilkenkemper utilisent les livres ouverts pour montrer que toute variété de dimension trois porte une structure de contact. En fait, ils obtiennent même que, suivant la terminologie de Giroux, tout livre ouvert porte une structure de contact. Pour finir, Torisu a le premier dégagé dans [**57**] les liens entre la théorie des surfaces convexes (section 3.3) et la notion de livre ouvert.

3.1. Structures de contact portées par un livre ouvert

On revient un instant sur la construction de Thurston et Wilkenkemper.

PROPOSITION 3.1 ([**56**]). — *En dimension trois, tout livre ouvert porte une structure de contact.*

Démonstration. — Soient $h : S \to S$ la monodromie de (K, θ) et β une 1-forme sur S telle que $d\beta$ soit une forme de surface. On choisit β strictement positive sur ∂S. Si on pose $\beta_t = (1-t)\beta + th^*\beta$, $t \in [0,1]$, alors pour $\epsilon > 0$ assez petit, $\alpha_\epsilon = dt + \epsilon\beta_t$ est une forme de contact, compatible avec la suspension de h. Reste à étendre α_ϵ sur la suspension relative, c'est-à-dire sur $D^2 \times \partial S$. Comme $h|_{\partial S} = Id$, α_ϵ vaut $dt + \epsilon\beta$ au bord de $D^2 \times \partial S$. Dans les coordonnées cylindriques $\{(r, \phi, z)\}$ de $D^2 \times \partial S$, l'expression de α_ϵ est $Adz + Bd\phi$, $A, B > 0$, si on a pris soin de choisir β invariante par le flot de $\frac{\partial}{\partial z}$ sur ∂S. On complète alors cette forme par une forme du type $f(r)dz + g(r)d\phi$ sur $D^2 \times \partial S$. La condition de contact est que $fg' - f'g > 0$, ce qui signifie que le point de coordonnées $(f(r), g(r))$ tourne dans le sens trigonométrique autour de l'origine. On veut imposer $(f(0), g(0)) = (1, 0)$ et $f'(r) < 0$, ce qui garantit que la forme est adaptée. Il suffit pour cela de faire moins d'un quart de tour. □

En fait, un livre ouvert détermine, à isotopie près, une unique structure de contact.

PROPOSITION 3.2. — *L'espace des structures de contact portées par un livre ouvert (K, θ) est faiblement contractile.*

Démonstration. — On montre ici que deux structures de contact ξ_0 et ξ_1 portées par (K, θ) sont isotopes parmi les structures de contact portées par (K, θ). La preuve s'étend directement au cas des groupes d'homotopie supérieurs.

On note α_0 et α_1 des équations de ξ_0 et ξ_1 adaptées à (K, θ). Si dt est la forme de longueur sur le cercle, on note α la 1-forme sur V qui vaut $\theta^* dt$ hors de $N(K)$ et $f(r)d\phi$ dans les coordonnées de $N(K) \simeq D^2(1) \times S^1$ compatibles avec le livre ouvert, où $f(r)$ vaut 0 près de $\{r = 0\}$ et 1 pour $r \geq r_0$.

Pour tout $M > 0$ et $s \in [0,1]$, les formes $\alpha_{0,s}^M = \alpha_0 + sM\alpha$ et $\alpha_{1,s}^M = \alpha_1 + sM\alpha$ sont de contact. De plus, si M est assez grand, les formes $(1-s)\alpha_{0,1}^M + s\alpha_{1,1}^M$ sont elles aussi de contact. En concaténant ces trois chemins, on obtient un chemin de structures de contact entre ξ_0 et ξ_1, que le théorème de Gray [**38**] convertit en isotopie. □

Réciproquement, Giroux montre l'existence, pour toute structure de contact, d'un livre ouvert porteur.

THÉORÈME 3.3. — *Sur une variété close de dimension trois, toute structure de contact est portée par un livre ouvert.*

3.2. Stabilisation des livres ouverts

Une même structure de contact peut être portée par des livres ouverts différents, comme le montre l'exemple de (S^3, ζ_0).

On part d'un livre ouvert (K, θ). Il est donné par la suspension relative d'un difféomorphisme h d'une surface compacte à bord et orientée S, avec $h|_{\partial S} = Id$. Soit S' une surface compacte à bord orientée obtenue par addition d'une anse A d'indice 1 à S le long de ∂S. Comme le difféomorphisme h est l'identité au bord de S, il se prolonge par l'identité sur A en un difféomorphisme, à nouveau noté h, de S' qui est l'identité au bord de S'. Soit maintenant γ une courbe fermée simple plongée dans S' qui intersecte exactement une fois la co-âme de A (c'est-à-dire qu'elle traverse A une fois). On note τ_γ le twist de Dehn positif le long de γ et $h' = \tau_\gamma \circ h$. La suspension relative de (S', h') donne un livre ouvert canonique (K', θ') pour lequel il existe un difféomorphisme $(V, K, \theta) \to (V, K', \theta')$ qui induit l'inclusion sur une des pages. On dit que (K', θ') est un *plombage positif* de (K, θ).

Cette opération peut être vue comme une chirurgie (également appelée *plombage*) entre le livre ouvert (K, θ) et le livre ouvert (K_+, θ_+) de S^3 (cf. exemple) qui porte la structure standard ζ_0. Pour cela, on décompose γ en la réunion de deux arcs δ et δ', $\delta \subset S$, $\delta' \subset A$. On note δ_+ un arc proprement plongé dans une page $S_+ \simeq S^1 \times [0, 1]$ de (K_+, θ_+) et joignant une composante de ∂S_+ à l'autre. Le livre ouvert (K', θ') peut être réalisé dans la somme connexe de V et S^3 le long de voisinages adaptés B et B_+ des arcs δ et δ_+, de sorte que $K' = (K - B) \cup (K_+ - B_+)$ et que la fibration θ' étende les fibrations θ et θ_+ données sur chaque facteur. Le livre ouvert (K', θ') porte la structure de contact obtenue par somme connexe de ξ et ζ_0, qui est isotope à ξ. On détaillera ce fait dans la proposition 3.6.

Vu dans V, si $S \subset V$ est une surface compacte à bord et $\delta \subset S$ un arc proprement plongé, on dit que $S' \subset V$ s'obtient par *plombage positif* (*resp. négatif*) de S le long de δ s'il existe un anneau $\widehat{A}$ plongé dans V avec les propriétés suivantes :

- $S' = S \cup \widehat{A}$;
- $\widehat{A} \cap S$ est un voisinage régulier de δ dans S ;
- l'âme de $\widehat{A}$ borde un disque plongé dans V dont l'intersection avec S est δ ;
- les deux composantes de $\partial \widehat{A}$ ont pour enlacement $+1$ (resp. -1).

D'après Stallings [**55**], si S est l'adhérence d'une page d'un livre ouvert (K, θ), alors S' l'est aussi pour le plombage positif de (K, θ) le long de δ.

Plus généralement, on dit que (K', θ') est une *stabilisation* de (K, θ) si on peut passer de (K, θ) à (K', θ') par une suite de plombages positifs.

THÉORÈME 3.4. — *Sur une variété close de dimension trois, deux livres ouverts portent des structures de contact isotopes si et seulement si ils possèdent des stabilisations isotopes.*

3.3. Rappels de topologie de contact de dimension trois

Une courbe *legendrienne* dans une variété de contact (V, ξ) est une courbe tangente à ξ en tout point. L'*invariant de Thurston-Bennequin* $tb(\gamma)$ d'une courbe legendrienne γ homologue à zéro est l'enlacement entre γ et toute courbe γ_ϵ obtenue en poussant légèrement γ dans la direction normale à ξ. C'est aussi le nombre algébrique d'intersection, le long de γ, entre ξ et le plan tangent à une surface compacte orientée de bord γ.

Si S est une surface plongée dans (V, ξ), le *feuilletage caractéristique* ξS de S est le feuilletage intégral du champ de droites singulier $\xi \cap TS$. Une surface $S \subset (V, \xi)$ est dite *convexe* si elle est transversale à un champ de vecteurs de contact (dont le flot préserve ξ). Pour les surfaces closes, cette propriété est générique [**27**]. Si S est une surface convexe dans une variété de contact (V, ξ), et X un champ de vecteurs de contact transversal à S, on appelle *courbe de découpage* de S l'ensemble $\Gamma_S = \{x \in S \mid X(x) \in \xi(x)\}$. C'est une sous-variété close et orientée de S, transversale à ξ et qui ne dépend pas du choix de X, à isotopie près parmi les sous-variétés de S transversales à ξ. De plus, la multi-courbe Γ_S capte l'essentiel de l'information sur le germe de ξ le long de S : si ξ_0 et ξ_1 sont deux structures de contact sur V pour lesquelles S est convexe et qui donnent sur S la même courbe de découpage, alors il existe une isotopie de V à support dans un voisinage de S qui envoie ξ_1 sur une structure de contact ξ_1' dont le germe le long de S est celui de ξ_0. On se référera souvent à ce résultat, ou à ses variantes à bord, comme au *lemme de réalisation* [**27**].

Pour une surface à bord legendrien S, on peut calculer un invariant de Thurston-Bennequin relatif $tb(\gamma, S)$ pour chaque composante de bord γ de S en comptant l'intersection entre γ_ϵ et S. Si toutes les composantes ont un invariant négatif ou nul, alors S peut être rendue convexe par une isotopie relative au bord, C^0-petite près du bord et C^∞-petite en dehors d'un voisinage du bord. Lorsque S est convexe et $\gamma \subset \partial S$, $tb(\gamma, S) = -\frac{1}{2}\sharp(\gamma \cap \Gamma_S)$. La définition d'invariant de Thurston-Bennequin relatif s'étend directement aux arcs legendriens inclus dans S et dont les extrémités sont des singularités du feuilletage caractéristique de S.

Une structure de contact est dite *vrillée* s'il existe un disque plongé dont le bord est une courbe legendrienne d'invariant de Thurston-Bennequin nul. Sinon, elle est *tendue* ; c'est le cas de la structure standard de $\mathbb{R}^3 = \{(p, q, z)\}$ d'équation $dz + pdq = 0$ et donc de la restriction de toute structure de contact sur une de ses cartes de Darboux [**3**]. Si S est une surface convexe close différente de S^2 dans une variété de contact tendue, aucune composante de Γ_S n'est homotope à zéro dans S. Toujours lorsque la structure est tendue, la courbe de découpage d'une sphère est connexe et celle d'un disque ne contient pas de composante close. Dans le cas contraire, le lemme de réalisation permettrait en effet de faire apparaître un disque vrillé sur une surface isotope à S.

Pour une exposition détaillée de ces notions et de leurs propriétés, on renvoie au texte [**28**].

3.4. Construction d'un livre ouvert porteur

On donne la preuve du théorème 3.3. Elle repose sur l'utilisation d'une *cellulation polyédrale* de V, adaptée à la structure de contact ξ.

Une *cellule polyédrale* de V est l'image d'un polyèdre convexe compact euclidien par un plongement topologique.

Une *cellulation polyédrale* est alors une décomposition de V en cellules polyédrales avec les propriétés suivantes :

- les intérieurs intrinsèques des cellules forment une partition de V ;
- le bord d'une cellule est une union de cellules ;
- les cellules de dimension inférieure ou égale à deux sont lisses (images de plongements lisses) ;
- la valeur de l'angle d'incidence de deux faces d'une même 3-cellule le long d'une arête commune est en tout point dans $[0, \pi]$.

Lorsque V est munie d'une structure de contact ξ, une cellulation polyédrale Δ de V est dite *de contact* si :

(1) le 1-squelette de Δ est legendrien ;
(2) toutes les faces sont ξ-convexes ;
(3) les 3-cellules sont incluses dans des cartes de Darboux ;
(4) les faces sont ξ-*bien positionnées*, c'est-à-dire que si $[a, b]$ est un arc inclus dans une arête faisant partie de faces F et F' d'une même 3-cellule, alors $]a, b[$ n'est jamais une orbite régulière de ξF et de $\xi F'$ orientée de a vers b dans ξF et $\xi F'$ et joignant une singularité négative de ξF (resp. $\xi F'$) en a à une singularité positive de $\xi F'$ (resp. ξF) en b (les faces F et F' sont coorientées comme bord de la 3-cellule).

On parle de décomposition cellulaire *totale* lorsque de plus :

(5) l'invariant de Thurston-Bennequin du bord de chaque 2-cellule vaut -1.

Soit donc $(V, \xi = \ker \alpha)$ une variété de contact close.

Première étape. On montre que (V, ξ) admet une cellulation de contact totale.

On part d'une cellulation polyédrale quelconque Δ_0 de V, par exemple une triangulation, dont les 3-cellules sont assez petites pour être contenues dans des cartes de Darboux. On déforme Δ_0 par isotopie pour que son 1-squelette soit legendrien. C'est une opération aisée, car, dans une variété de contact, tout arc est isotope à un arc legendrien par une isotopie C^0-petite. Quitte à diminuer l'invariant de Thurston-Bennequin de chaque arête par un procédé classique (en la faisant spiraler dans une carte de Darboux), on obtient une cellulation pour laquelle les faces sont ξ-bien positionnées. Par une isotopie générique de Δ_0 relative à son 1-squelette, on rend alors toutes les faces ξ-convexes. On note toujours Δ_0 la cellulation obtenue. Elle possède toutes les propriétés pour être une cellulation de contact totale, sauf (5).

Pour obtenir (5), on va subdiviser chaque face. C'est là l'avantage d'utiliser des cellulations polyédrales : toute subdivision des faces s'étend trivialement pour donner une nouvelle cellulation.

Pour cela, on considère une face F de Δ_0. On note Γ_F sa courbe de découpage. Tout comme les deux 3-cellules auxquelles elle est adjacente, F est incluse dans une carte de Darboux. En particulier, ξ est tendue dans un voisinage de F. La courbe Γ_F est donc constituée d'arcs qui vont du bord de F au bord de F (et n'a pas de composante close) [**27**]. Si $tb(\partial F) < -1$, Γ_F a au moins deux composantes. On trouve alors un arc legendrien intégral de ξF, noté γ, inclus dans $F \setminus \Gamma_F$ avec $\partial\gamma \subset \partial F$. La subdivision par γ donne une nouvelle cellulation polyédrale (on vérifie en particulier que par cette méthode les faces restent ξ-bien positionnées). On construit les autres arcs par récurrence sur $tb(\partial F)$, en remarquant que γ subdivise F en deux cellules de bords legendriens et d'invariants de Thurston-Bennequin strictement supérieurs à ceux de ∂F.

On obtient ainsi une cellulation polyédrale de contact totale Δ de (V, ξ).

Deuxième étape. On exhibe le livre ouvert.

On note $\Sigma \subset V$ une surface compacte contenant le 1-squelette Δ^1 de Δ dans son intérieur, tangente à ξ le long de $\Delta^1 - N(\Delta^0)$ et « presque » tangente à ξ dans un voisinage $N(\Delta^0)$ du 0-squelette.

Si $N(\Delta^1)$ est un voisinage tubulaire de Δ^1 suffisamment petit, alors :

- la surface $S = \Sigma \cap N(\Delta^1)$ est une surface compacte à bord, dont le bord $K = \partial S$ est inclus dans $\partial N(\Delta^1)$;
- par la condition de contact, K est transversal à ξ ;
- si on oriente S le long de Δ^1 comme ξ, alors K, orienté comme le bord de S, est ascendant à ξ ;
- $d\alpha$ est non dégénérée sur S (car elle l'est le long de Δ^1 où $TS = \xi$) ;
- $\partial N(\Delta^1)$ est une surface convexe dont la courbe de découpage est K.

De plus, dans cette situation, on peut écrire $N(\Delta^1) \setminus K \simeq \mathrm{int}(S) \times [0,1]$, $\mathrm{int}(S) \simeq \mathrm{int}(S) \times \{1/2\}$ avec, pour tout $t \in [0,1]$, $d\alpha|_{\mathrm{int}(S)\times\{t\}} > 0$. Bien entendu, $H = V \setminus \mathrm{int}(N(\Delta^1))$ est aussi un corps en anses.

Le point essentiel est que, comme pour toute face F du 2-squelette de Δ l'invariant $tb(\partial F) = -1$, l'intersection entre l'entrelacs K et F vaut 2. Comme de plus les faces sont ξ-bien positionnées, on peut, par une isotopie C^0-petite des faces, faire en sorte que la courbe K intersecte chaque face en exactement deux points (avec le même signe). Le corps en anses H admet un système maximal D_1,...,D_n de disques de compression, constitué de son intersection avec la collection des faces F_1,...,F_n de Δ. Chaque composante du découpage de H par $\cup_{1\leq i\leq n} D_i$ est un domaine de Darboux : la structure y est tendue. D'après **[8]**, la structure ξ est tendue sur H : on part des domaines de Darboux et on effectue des collages successifs le long des disques $D_i \subset F_i$ qui préservent le caractère tendu de la structure car $tb(\partial F_i) = -1$. Comme K intersecte ∂D_i en deux points, grâce au lemme de réalisation, on modifie H et D_i pour imposer à ∂D_i d'être une courbe legendrienne, avec $tb(\partial D_i) = -1$. On peut alors également assurer par généricité la convexité des disques D_i. Comme la structure ξ est tendue sur H et comme de surcroît $tb(\partial D_i) = -1$, la courbe de découpage Γ_{D_i} est connexe et constituée d'un arc. On note K_{D_i} un arc proprement plongé dans D_i et joignant les deux intersections de D_i avec K.

Lorsqu'on découpe H le long de $\cup_{i=1}^n D_i$, on obtient une collection de boules B_1,...,B_k. Après lissage de ∂B_i, la courbe de découpage $\Gamma_{\partial B_j}$ est isotope à la courbe $(K \cup_{1\leq i\leq n} K_{D_i}) \cap (\partial B_j)$. En particulier, comme $\xi|_{B_j}$ est tendue, $\Gamma_{\partial B_j}$ est connexe et donc aussi $(K \cup_{1\leq i\leq n} K_{D_i}) \cap (\partial B_j)$. On peut alors écrire une identification $H \setminus K \simeq \mathrm{int}(S) \times [1,2]$. Ainsi, la fibration $N(\Delta^1) \setminus K \simeq \mathrm{int} S \times [0,1]$, $(x,t) \to t$ se prolonge en une fibration $\theta : V \setminus K \mapsto S^1$.

Troisième étape. On trouve une forme de contact adaptée à (K,θ).

Il reste à montrer que la forme α s'étend sur H en une forme dont la différentielle donne une forme d'aire sur les fibres de $\theta|_H$. Pour cela, on montre que $\xi|_H$ est conjuguée à une structure modèle pour laquelle on a une telle forme de contact.

On reprend la décomposition du corps en anses tendu (H,ξ) par un système complet D_1,...,D_n de disques de compression, chacun de ces disques D_i étant convexe, de bord legendrien avec $tb(\partial D_i) = -1$. On montre que ces données déterminent ξ sur H :

Proposition 3.5. — *Si ξ' est une structure sur H qui coïncide avec ξ près de ∂H et qui est tendue sur H, alors ξ' est isotope à ξ, relativement à ∂H.*

Démonstration. — Par hypothèse, chaque courbe ∂D_i est legendrienne et d'invariant $tb(\partial D_i) = -1$ pour ξ et ξ'. On réalise une petite isotopie de ξ' pour que chaque D_i

soit ξ'-convexe. Comme, pour ξ et ξ', $tb(\partial D_i) = -1$ et ξ et ξ' sont tendues, les courbes de découpage de D_i sont des segments connexes. Le lemme de réalisation fournit alors une isotopie de ξ' relative au bord de H et à support dans un voisinage de $\cup_{1\leq i\leq n} D_i$, qui la fait coïncider avec ξ au voisinage de $\cup_{1\leq i\leq n} D_i$.

Après ces isotopies préparatoires, ξ et ξ' coïncident au bord des boules du découpage de H par $\cup_{1\leq i\leq n} D_i$. Sur chacune de ces boules, les structures ξ et ξ' sont tendues. Pour conclure, on utilise un théorème de classification d'Eliashberg [**16**] : l'espace des structures de contact tendues sur la boule dont le germe est fixé au bord est faiblement contractile. On obtient un chemin de structures de contact entre ξ et ξ' que le théorème de Gray [**38**] transforme en isotopie. □

Si β est la primitive d'une forme d'aire sur S, positive sur ∂S, la forme $\alpha_0 = dt + \beta$ donne une structure de contact ξ_0 sur $S \times \mathbb{R}$. On cherche à réaliser H dans un voisinage de $S \times \{0\}$, de sorte que la structure induite par ξ_0 soit conjuguée à $\xi|_H$.

On part de $S \times [-1,1] \subset S \times \mathbb{R}$ dont on arrondit les coins pour obtenir un corps en anses H'. On effectue cette opération de lissage afin que $H' \setminus (\partial S \times \{0\})$ possède un feuilletage $\mathcal{F}$ par des copies de $\mathrm{int}(S)$, dont chaque feuille soit un graphe au-dessus de $S \times \{0\}$. Dans cette situation, $\partial H'$ est convexe et $\Gamma_{\partial H'} = \partial S \times \{0\}$. Avec le lemme de réalisation, on peut modifier chaque composante de $\partial H' \setminus \partial S \times \{0\}$ relativement à un voisinage de $\partial S \times \{0\}$, parmi les surfaces transversales au champ de contact $\frac{\partial}{\partial t}$, pour obtenir que le germe de ξ_0 près de l'image de $\partial H'$ soit conjugué au germe de ξ près de ∂H, la conjugaison envoyant $\partial S \times \{0\}$ sur K et s'étendant en un difféomorphisme de l'image de H' sur H. On garde la notation H' pour le corps en anses obtenu comme image de H' par cette isotopie. L'image du feuilletage $\mathcal{F}$ par l'isotopie est un feuilletage, toujours noté $\mathcal{F}$, transversal à $\frac{\partial}{\partial t}$.

La structure ξ_0 est tendue sur H' et donc, d'après la proposition 3.5, (H', ξ_0) est contactomorphe à (H, ξ). On étend la fibration θ sur H en prenant l'image du feuilletage $\mathcal{F}$ de H'. La forme de contact α_0 donnée sur H comme l'image de α_0 possède la propriété désirée : sa différentielle $d\beta$ induit une forme d'aire sur chaque fibre.

Il reste à ajuster les formes de contact α et α_0 obtenues sur $N(\Delta_1)$ et H. On considère un petit voisinage $N(K)$ de K, muni de coordonnées cylindriques $(r, \phi, z) \in [0, \epsilon] \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, sur lequel ξ a pour équation $dz + r^2 d\phi = 0$. En interpolant entre α et α_0 en dehors de $U(K) = \{r \leq \epsilon/2\} \subset N(K)$, on obtient facilement une forme de contact, notée à nouveau α, dont la différentielle $d\alpha$ induit une forme d'aire sur les fibres de $\theta : V \setminus U(K) \to S^1$. Sur $N(K)$, on note χ une fonction qui vaut 0 sur $\{r \leq \epsilon/2\}$ et 1 près de $\{r = \epsilon\}$. Si M est assez grand, la forme α étendue par $(1 - \chi(r))M(dz + r^2 d\phi) + \chi(r)\alpha$ sur $N(K)$ est (presque) adaptée à (K, θ).

3.5. Stabilisation

Proposition 3.6. — *Si (K, θ) est un livre ouvert qui porte ξ, alors tout livre ouvert (K', θ') obtenu par plombage positif de (K, θ) porte une structure isotope à ξ.*

Démonstration. — On note (S, h) et (S', h') des monodromies respectivement de (K, θ) et (K', θ'). La monodromie h est obtenue en suivant le flot d'un champ de vecteurs X, transversal aux fibres de θ. On réalise géométriquement (K', θ') dans V.

Pour cela on part de (K, θ) qui porte ξ. On note t_0 et t_1 deux points diamétralement opposés sur le cercle S^1, de sorte que les pages $S_0 = \theta^{-1}(t_0)$ et $S_1 = \theta^{-1}(t_1)$ se recollent le long de K pour faire une surface lisse $\Sigma = S_0 \cup K \cup S_1$. La surface S' est obtenue par adjonction d'une anse A à S et le difféomorphisme h' en composant h avec un twist de Dehn positif le long d'une courbe fermée simple γ. On écrit $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$, où γ_0 et γ_1 sont deux arcs, $\gamma_0 \subset S$, $\gamma_1 \subset A$.

On identifie S à S_0, ce qui permet de voir γ_0 dans S_0. On pousse γ_0 dans S_1 à l'aide du flot de X pour obtenir un segment $\gamma_1' \subset S_1$. La courbe $\gamma' = \gamma_0 \cup \gamma_1'$ est plongée dans Σ et borde un disque D dans $V \setminus \Sigma$ (donné par des portions d'orbites de X). Or, la surface Σ est convexe et scindée par K. De plus, la courbe γ' intersecte deux fois K. Le lemme de réalisation fournit alors une isotopie de Σ, relative à K, qui rend γ' legendrienne et d'invariant $tb(\gamma') = tb(\gamma', \Sigma) = -1$. Dès lors, on considère le corps en anses H_0 obtenu en adjoignant un voisinage tubulaire $N(\gamma_1')$ de γ_1' à un voisinage collier $N(S_0)$ de S_0. On observe que le bord de H_0 (après lissage judicieux) est convexe. Une courbe de découpage est obtenue en prenant $(K \cap \partial H_0) \cup l$, où l est constitué de deux arcs tracés sur $\partial N(\gamma_1') \cap \partial H_0$, chacun allant d'une composante de $\partial N(\gamma_1') \cap \partial N(S_0)$ à l'autre et coupant une fois D. On la note K'.

La sous-variété $H_0 \setminus K'$ est un voisinage collier de l'intérieur d'une surface S_0', obtenue en ajoutant à S_0 une anse A' d'âme γ_1'. Le complémentaire H_1 de $\mathrm{int}(H_0)$ dans V est obtenu en faisant apparaître une anse triviale dans le complémentaire de $\mathrm{int}(N(S_0))$ dans V. Cette anse admet D comme disque de compression, qui coupe exactement deux fois $K' = \Gamma_{\partial H_1}$. Comme dans le paragraphe précédent, on obtient un livre ouvert (K', θ') qui porte ξ. La fibre de θ' est difféomorphe à $S' = S \cup A$.

Reste à identifier la monodromie associée, donnée en suivant le flot de X. Si on part d'une courbe $a \subset S_0 \subset S_0'$ qui ne rencontre pas γ', son image par le flot de X ne rencontre pas $N(\gamma_1')$, et donc elle revient sur $h(a) \subset S_0$. La co-âme c de A' peut être poussée dans $\partial(D \cap H_1)$, de sorte que, si on note toujours c son image, $\partial(D \cap H_1) = c \cup c'$, $c \cap c' = \partial c = \partial c' = \partial(D \cap H_1) \cap K'$. On a essentiellement (après projection dans H_0), $h(c) = c' = \tau_{\gamma'}(c)$. □

On indique à présent comment démontrer le théorème 3.4. On dit qu'un livre ouvert (K, θ) est *associé* à une cellulation de contact totale Δ si l'une des fibres de θ contient le 1-squelette de Δ et se rétracte dessus par une isotopie de contact.

PROPOSITION 3.7. — *Tout livre ouvert portant une structure de contact ξ se stabilise en un livre ouvert associé à une cellulation de contact totale Δ.*

Démonstration. — Soit S une fibre de θ. La fibre S se rétracte sur un graphe $\delta \subset S$, parfois appelé « spine ». Le lemme de réalisation de [**27**] permet de réaliser δ de manière legendrienne dans S, de sorte que K soit le bord d'un élargissement de δ dans la direction de ξ comme dans la preuve du théorème 3.3. On complète δ en une cellulation Δ, que l'on peut toujours raffiner en une cellulation de contact totale en suivant la méthode développée dans le paragraphe précédent. On ajoute alors successivement à δ les bords des faces de Δ. À chaque ajout, l'étude effectuée pour prouver la proposition 3.6 s'applique. Le livre ouvert obtenu est un plombage positif du précédent et la fibre se rétracte sur le 1-squelette. On aboutit à un livre ouvert associé à Δ. □

Pour démontrer le théorème 3.4, on part de deux livres ouverts portant une même structure ξ. D'après la proposition 3.7, ils se stabilisent tous deux en des livres ouverts (K_0, θ_0) et (K_1, θ_1) associés à des cellulations de contact totales Δ_0 et Δ_1.

On met alors Δ_0 et Δ_1 en position générale : leurs arêtes sont deux à deux disjointes et les faces et arêtes de l'une sont transversales aux faces et arêtes de l'autre. On trouve alors une sous-cellulation Δ_2 commune à Δ_0 et Δ_1. En subdivisant Δ_2, on en fait une cellulation de contact totale Δ pour ξ (encore une fois, le point (4) est à vérifier soigneusement).

Le passage de Δ_0 et Δ_1 à Δ se réalise comme précédemment par ajout à Δ_i, $i = 0, 1$, des bords des faces de Δ. Le livre ouvert associé à Δ est une stabilisation commune à Δ_0 et Δ_1.

3.6. Applications

Les théorèmes 3.3 et 3.4 établissent un pont entre la géométrie de contact de dimension trois et l'étude des difféomorphismes de surfaces, modulo stabilisation, ou la théorie des entrelacs fibrés. Ils ouvrent un large champ d'étude pour comprendre comment s'expriment les propriétés classiques dans l'un et l'autre langage.

De façon immédiate, ils permettent à Giroux d'introduire de nouveaux invariants des variétés de contact, comme le *genre* d'une structure de contact ξ, qui est le genre minimal des pages d'un livre ouvert portant ξ (où le genre d'une surface à bord S est le genre de la surface obtenue en collant un disque à chaque composante de ∂S).

Pour la structure standard ζ_0 de $\mathbb{R}^3$, le genre est 0. Etnyre montre dans [**24**] qu'il existe des structures de contact de genre supérieur à 1.

3.6.1. *Caractérisation des structures de contact Stein remplissables et des structures tendues.* — Pour la définition de structure de contact Stein remplissable, on renvoie à la section 4.3. D'après Eliashberg [**17**] et Gromov [**39**], toute structure de contact Stein remplissable est tendue.

THÉORÈME 3.8. — *Une structure de contact sur une variété close de dimension trois est Stein remplissable si et seulement si elle est portée par un livre ouvert dont la monodromie est un produit de twists de Dehn positifs.*

Ce théorème étend un résultat de Loi et Piergallini [**48**]. Le travail [**4**] permet de remplacer l'hypothèse *Stein remplissable* par *holomorphiquement remplissable.*

Démonstration. — Soit (K, θ) un livre ouvert de page S et de monodromie h. Si γ est une courbe fermée simple et non séparante dans S, alors le lemme de réalisation permet, par une isotopie de ξ parmi les structures portées par (K, θ), de rendre γ legendrienne et d'invariant de Thurston-Bennequin relatif à S nul. On vérifie que la structure obtenue par chirurgie legendrienne d'indice -1 sur γ est portée par le livre ouvert de page S et de monodromie $\tau_\gamma \circ h$.

Une fois cette relation mise à jour, on utilise la caractérisation des structures de contact Stein remplissables découverte par Eliashberg [**18**] :

THÉORÈME 3.9. — *Une variété de contact (V, ξ) de dimension trois est Stein remplissable si et seulement si elle est obtenue à partir de la somme connexe $\#_n S^2 \times S^1$ de n copies de $S^2 \times S^1$ munies de leur structure de contact standard ξ_0 par une suite de chirurgies d'indice -1 sur des nœuds legendriens.*

On part donc de $(\#_n S^2 \times S^1, \xi_0)$ qui est portée par un livre ouvert (K_0, θ_0) dont la monodromie est l'identité. La variété (V, ξ) est obtenue par chirurgie legendrienne sur les composantes d'un entrelacs legendrien γ. On utilise le fait qu'il existe une stabilisation (K_1, θ_1) de (K_0, θ_0) qui contient γ dans une de ses pages S_1, de sorte qu'aucune composante de γ ne sépare S_1. La monodromie h_1 de (K_1, θ_1) est un produit de twists de Dehn positifs. Pour obtenir (V, ξ), on effectue des chirurgies de Dehn sur les composantes de γ. Chacune d'entre elles est équivalente à composer h_1 avec un twist de Dehn positif sur la composante correspondante. Au final, (V, ξ) est portée par un livre ouvert dont la monodromie est un produit de twists de Dehn positifs. □

Le théorème 3.8 n'affirme pas que tous les livres ouverts portant ξ ont pour monodromie un produit de twists de Dehn positifs. On ignore actuellement si c'est le cas.

Dans la même veine, Honda, Kazez et Matič caractérisent dans [**44**] les monodromies qui donnent les structures de contact tendues. Soit S une surface compacte orientée à bord. On note $\alpha : [0,1] \to S$ et $\beta : [0,1] \to S$ deux arcs orientés et proprement plongés dans S dont les origines $\alpha(0) = \beta(0) = x$ coïncident. On note également $\pi : \tilde{S} \to S$ le revêtement universel de S. On choisit des relevés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ de α et β dans $\tilde{S}$, tous deux issus d'un même relevé $\tilde{x}$ de x. L'arc $\tilde{\alpha}$ sépare $\tilde{S}$ en deux régions, l'une située à gauche et l'autre à droite de $\tilde{\alpha}$ (de sorte qu'en $\tilde{x}$, en suivant l'orientation de $\partial\tilde{S}$, on passe de la région gauche à la région droite).

On dit que β est *à droite* de α si $\tilde{\beta}(1)$ se trouve à droite de $\tilde{\alpha}$, ou est égal à $\tilde{\alpha}(1)$. Si h est un difféomorphisme de S qui vaut l'identité au bord de S, on dit que h est *dextrogire* si pour tout arc proprement plongé α, l'arc $h(\alpha)$ est à droite de α.

THÉORÈME 3.10 ([**44**]). — *La variété de contact (V, ξ) est tendue si et seulement si tous les livres ouverts qui portent ξ ont une monodromie dextrogire.*

Comme il existe des variétés de contact qui sont tendues mais pas Stein remplissables (ni même symplectiquement remplissables [**26**]), on déduit des théorèmes 3.8 et 3.10 qu'il existe des difféomorphismes dextrogires qui ne sont pas isotopes (rel. ∂S) à un produit de twists de Dehn positifs (alors que la réciproque est toujours vraie).

3.6.2. *Comment obtenir tous les entrelacs fibrés.* — Comme exemple d'application topologique, Giroux répond, en collaboration avec Goodman, à une question de Harer [**34**]. On considère ici le plombage/déplombage d'un livre ouvert par des entrelacs de Hopf positifs (stabilisations) et négatifs (où on compose la monodromie par un twist de Dehn négatif).

THÉORÈME 3.11. — *Dans une sphère d'homologie entière, deux entrelacs fibrés quelconques sont obtenus l'un à partir de l'autre par une suite de plombages et de déplombages sur des entrelacs de Hopf positifs et négatifs.*

Démonstration. — On munit la variété V d'une métrique auxiliaire ainsi que d'une trivialisation de son fibré tangent. Comme la variété ambiante est une sphère d'homologie, la classe d'homotopie d'un champ de plans orienté ξ sur V est repérée par son invariant de Hopf, c'est-à-dire l'enlacement des fibres de deux valeurs régulières de l'application $V \to S^2$ donnée par la normale directe à ξ. La preuve repose sur les faits suivants :

- Tout entrelacs fibré donne un livre ouvert, qui porte une structure de contact.
- Le plombage par un entrelacs de Hopf négatif augmente l'invariant de Hopf d'une unité.
- Après plombage par un entrelacs de Hopf négatif, la structure portée par le livre ouvert associé est toujours vrillée.

Si K_1 et K_2 sont des entrelacs fibrés, on considère les structures de contact ξ_1 et ξ_2 portées par les livres ouverts associés. Quitte à plomber l'un des deux par un nombre suffisant d'entrelacs de Hopf négatifs, on se ramène au cas où ξ_1 et ξ_2 sont homotopes comme champs de plans. Si on plombe à nouveau une fois K_1 et K_2 par des entrelacs de Hopf négatifs, on obtient en plus que les nouvelles structures ξ_1 et ξ_2 sont vrillées. On utilise alors un théorème d'Eliashberg [**16**] : deux structures de contact vrillées homotopes comme champs de plans sont isotopes. C'est le cas pour ξ_1 et ξ_2 et le théorème 3.4 s'applique : les livres ouverts associés à K_1 et K_2 ont des stabilisations isotopes. □

3.6.3. *Sur la dynamique des champs de Reeb.* — L'existence d'un champ de Reeb adapté à un livre ouvert porteur rend envisageable le calcul de *l'homologie de contact* de la variété (V, ξ), en vue de démontrer la conjecture de Weinstein.

CONJECTURE 3.12 (Weinstein). — *Sur une variété close, tout champ de Reeb possède une orbite périodique.*

Des avancées récentes, s'appuyant sur l'existence de livres ouverts porteurs, ont eu lieu dans ce sens :

THÉORÈME 3.13 ([**1**]). — *Toute structure de contact portée par un livre ouvert planaire* (*dont la fibre est de genre* 0) *vérifie la conjecture de Weinstein.*

THÉORÈME 3.14 ([**13**]). — *Toute structure de contact portée par un livre ouvert dont la monodromie est isotope à un difféomorphisme périodique vérifie la conjecture de Weinstein.*

4. LA DIMENSION SUPÉRIEURE

En dimension supérieure à trois, Giroux obtient des restrictions supplémentaires sur la structure du livre ouvert portant une structure de contact : les pages sont des variétés de Stein et la monodromie un difféomorphisme symplectique.

Voici comment s'articulent la géométrie de contact et la géométrie complexe.

Toute hypersurface réelle V plongée dans une variété complexe (W, J) hérite d'un champ d'hyperplans canonique ξ, celui des hyperplans complexes $T_vV \cap JT_vV$, $v \in V$, tangents à V. Si on note α une 1-forme de noyau ξ, la 2-forme

$$Q = d\alpha(., J.)|_\xi$$

est appelée une *forme de Levi* pour V. Si elle est non dégénérée alors ξ est une structure de contact. Lorsqu'elle est définie positive, V est dite *strictement pseudo-convexe.*

Une source d'exemples d'hypersurfaces strictement pseudo-convexes est obtenue en prenant les niveaux réguliers d'une fonction *strictement pluri-sous-harmonique*, c'est-à-dire d'une fonction $f : W \to \mathbb{R}$ pour laquelle la 2-forme

$$\omega_f = -dd^c f, \text{ où } d^c f = df \circ J$$

vérifie $\omega_f(v, Jv) > 0$ pour tout $v \neq 0$. Dans ce cas en effet, si $V = f^{-1}(c)$, alors $\xi = \ker d^c f|_V$ et $Q(v) = \omega_f(v, Jv)$.

EXEMPLE.

- Dans $\mathbb{C}$, $\omega_f = -\Delta f\, dx \wedge dy$.
- La sphère unité de $\mathbb{C}^n$ est strictement pseudo-convexe et porte donc une structure de contact canonique ζ_0.

Une *variété de Stein* est une variété complexe qui se plonge holomorphiquement et proprement dans $\mathbb{C}^N$. Cette définition impose de fortes restrictions topologiques : d'après le théorème de Lefschetz-Serre-Andreotti-Frankel-Milnor [**49**], toute variété de Stein de dimension réelle $2n$ a le type d'homotopie d'un complexe cellulaire de dimension n.

THÉORÈME 4.1 ([**37**]). — *Une variété complexe W est une variété de Stein si et seulement s'il existe une fonction de Morse propre $f : W \to [0, +\infty[$ qui est strictement pluri-sous-harmonique.*

Si W est une variété de Stein et si $f : W \to [0, +\infty[$ est une fonction de Morse propre strictement pluri-sous-harmonique, alors la forme ω_f est symplectique. Le champ de vecteurs X défini par $i_X\omega_f = -d^c f$ est un gradient pour f qui dilate exponentiellement ω_f. On observe en effet que $df(X) = -df(J^2X) = -d^c f(JX) = \omega_f(X, JX) > 0$ en dehors des points critiques de f et que $L_X\omega_f = di_x\omega_f = \omega_f$. D'après Eliashberg et Gromov [**21**], la forme ω_f ne dépend pas du choix de f parmi les fonctions de Morse propres strictement pluri-sous-harmoniques : si f et g sont deux telles fonctions avec des gradients associés complets, alors ω_f et ω_g sont isotopes.

Un *domaine de Stein* est une variété complexe compacte à bord F qui admet une fonction de Morse strictement pluri-sous-harmonique $f : F \to [0, +\infty[$ pour laquelle ∂F est un niveau régulier. Dans ce cas, $\mathrm{int}(F)$ est une variété de Stein.

Une *variété de Weinstein* est une variété symplectique (W, ω) qui porte un champ de vecteurs X complet avec les propriétés suivantes :

- X est un gradient pour une fonction de Morse propre $f : W \to [0, +\infty[$;
- $L_X\omega = \omega$.

Lorsque W est compacte, on demande à ∂W d'être un niveau régulier de f.

THÉORÈME 4.2 ([**18**]). — *Si (W, ω, f, X) est une variété de Weinstein de dimension $2n$, $n > 2$, alors W porte une structure complexe J qui en fait une variété de Stein, qui rend f strictement pluri-sous-harmonique et pour laquelle $\omega = \omega_f$.*

La preuve du théorème 4.2 s'étend au cas de la dimension 4 : toute variété de Weinstein est symplectomorphe à une variété de Stein.

De façon encore plus générale, soit F une variété compacte de bord $K = \partial F$ munie d'une forme symplectique exacte ω. Un *champ de Liouville* pour ω est un champ de vecteurs ω-dual d'une primitive de ω. On dit que (F,ω) est *convexe* si elle porte un champ de Liouville transversal à K. En particulier, si (F,ω) est de Weinstein, le pseudo-gradient X intervenant dans la définition vérifie $d(i_X\omega) = \omega$. Si on choisit $\beta = i_X\omega$ comme primitive de ω, le champ X est de Liouville, et comme K est un niveau régulier pour la fonction de Morse associée, F est convexe.

La *complétion* d'une variété symplectique compacte et convexe (F,ω) est la variété symplectique

$$(\tilde{F},\tilde{\omega}) = (F,\omega) \cup_\partial (\partial F \times [0,+\infty[, e^t\omega(p)),$$

pour $(p,t) \in \partial F \times [0,+\infty[$. On rencontre encore le terme de variété de *Liouville*. Lorsque α est une forme de contact adaptée à un livre ouvert (K,θ), alors la forme symplectique exacte $d\alpha$ donnée sur une page F fait de $F \setminus \mathrm{int}(N(K))$ une variété symplectique convexe dont la complétion ne dépend pas de α et du petit voisinage tubulaire $N(K)$ de K à isotopie près [**21**].

4.1. Construction de structures de contact

Soient $(F,\omega = d\beta)$ une variété symplectique compacte convexe et $K = \partial F$. La forme β induit une forme de contact γ sur K. On se donne également un difféomorphisme symplectique ϕ de F qui vaut l'identité près de K.

PROPOSITION 4.3. — *Le livre ouvert (K,θ) donné par la suspension relative $\overline{\Sigma}(F,\phi)$ porte une structure de contact.*

Démonstration. — Comme $\phi^*\omega = \omega$, la forme $\phi^*\beta - \beta$ est fermée. On suppose dans un premier temps qu'elle est exacte : $\phi^*\beta - \beta = dh$. Quitte à dilater ω et translater h, on peut supposer que h est strictement positive et vaut 1 près de $K = \partial F$.

La 1-forme $\alpha = dt + \beta$ est alors une forme de contact sur $F \times \mathbb{R}$, où t désigne la coordonnée sur $\mathbb{R}$. Elle est laissée invariante par le difféomorphisme

$$(x,t) \to (\phi(x), t + h(x))$$

et induit donc une forme de contact α sur la suspension de (F,ϕ). Pour l'étendre à la suspension relative, on prolonge α sur $K \times D^2$ par la forme $\gamma + r^2 d\phi$.

Dans le cas général, on utilise le lemme d'isotopie suivant, qui permet de se ramener au cas où la forme $\phi^*\beta - \beta$ est exacte et de faire la construction dans cette situation. $\square$

LEMME 4.4. — *Il existe une isotopie $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ de $\phi = \phi_0$ parmi les difféomorphismes symplectiques de (F,ω) égaux à l'identité près du bord, telle que la forme $\phi_1^*\beta - \beta$ soit exacte.*

Démonstration. — On note μ la forme fermée $\phi^*\beta - \beta$ et Y le champ de vecteurs défini par l'équation $i_Y\omega = -\mu$. On a $L_Y\omega = i_Y d\omega + di_Y\omega = -d\mu = 0$. Ainsi, le flot ψ_t de Y préserve ω et vaut l'identité près de K, où μ vaut 0. On pose $\phi_t = \phi \circ \psi_t$.

On observe alors que $\frac{d}{dt}\phi_t^*\beta = \psi_t^*(L_Y\phi^*\beta) = d(\psi_t^* i_Y\phi^*\beta) + \psi_t^*(i_Y d(\phi^*\beta)) = dh_t + \psi_t^*(i_Y\omega) = dh_t + \beta - \phi^*\beta$. On en déduit que $\phi_1^*\beta - \beta = dh$, avec $h = \int_0^1 i_Y\phi_t^*\beta\, dt$. □

Le résultat d'unicité inclut cette fois la structure symplectique des pages.

PROPOSITION 4.5. — *Si deux structures de contact portées par un même livre ouvert définissent sur les pages des structures symplectiques dont les complétions sont isotopes, alors elles sont isotopes.*

4.2. Existence d'un livre ouvert porteur

Giroux montre l'existence d'un livre ouvert porteur pour toute structure de contact :

THÉORÈME 4.6. — *Toute structure de contact ξ sur une variété close de dimension $2n+1$ est portée par un livre ouvert dont les pages sont des variétés de Stein et la monodromie est représentée par un difféomorphisme symplectique.*

EXEMPLE. La fibration de Milnor [**32**], [**6**]

Soit $P : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un polynôme avec un point critique isolé en $0 \in \mathbb{C}^n$. L'hypersurface $H = P^{-1}(0)$ possède une singularité isolée en 0. Soit ρ une norme euclidienne de $\mathbb{C}^n$. On considère alors la famille de sphères

$$S_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) = r^2\}.$$

D'après Milnor [**50**], pour $r > 0$ assez petit, la sphère S_r intersecte H transversalement le long d'une sous-variété K_r de codimension réelle 2. De plus l'application $\arg(P) : S_r \backslash K_r \to S^1$ est une fibration qui fait du couple $(K_r, \arg(P))$ un livre ouvert. Giroux [**32**] dans un cas particulier et Caubel-Némethi-Popescu-Pampu [**6**] en général, montrent que le livre ouvert (K, θ) porte la structure canonique de $S_r \simeq S^{2n+1}$, constituée des hyperplans complexes tangents à S_r. Par exemple, dans le cas d'un polynôme homogène et des sphères rondes, la forme de contact canonique est adaptée.

Schéma de la preuve du théorème 4.6. — Soit ξ une structure de contact donnée sur V comme le noyau d'une forme de contact α et R_α le champ de Reeb associé. On note J une structure presque complexe sur ξ, compatible avec α au sens où l'opérateur $J : \xi \to \xi$ vérifie $J^2 = -Id$, $d\alpha(J., J.) = d\alpha(.,.)$ et $d\alpha(., J.)$ est non dégénérée positive. On complète $d\alpha(., J.)$ en une métrique g_α définie sur V pour laquelle R_α est un vecteur orthonormal à ξ. Dans la suite, on mesure les vecteurs tangents à V à l'aide de g_α.

On considère le fibré trivial $L = V \times \mathbb{C}$, muni de la connexion ∇ donnée par $-i\alpha$. Autrement dit, pour une section s de L, $\nabla s = ds - is\alpha$. Pour $f : V \to \mathbb{C}$, on note $\partial_\xi f = \frac{1}{2}(df - id^c f)$ et $\bar{\partial}_\xi f = \frac{1}{2}(df + id^c f)$ les parties $\mathbb{C}$-linéaires et $\mathbb{C}$-antilinéaires de $df|_\xi$.

Le résultat principal sur lequel s'adosse la preuve du théorème 4.6 est dû à Ibort, Martinez et Presas [**45**]. Il s'agit d'une adaptation d'un théorème de Donaldson [**14, 15**] à la géométrie de contact.

THÉORÈME 4.7 ([**45**]). — *Il existe $C, \delta > 0$ et des fonctions lisses $s_k : V \to \mathbb{C}$, $k \gg 0$, avec les propriétés suivantes* :

(1) *en tout point $p \in V$,*
$$|s_k| \leq C,\ |ds_k - iks_k\alpha| \leq Ck^{1/2} \text{ et } |\bar{\partial}_\xi s_k| \leq C\ ;$$

(2) *en tout point $p \in V$ où $|s_k(p)| \leq \delta$,*
$$|\partial_\xi s_k(p)| \geq \delta k^{1/2}.$$

Les fonctions s_k sont des sections du fibré trivial $L^{\otimes k}$, muni de la connexion donnée par $-ik\alpha$. L'expression $ds_k - iks_k\alpha$ est la dérivée covariante ∇s_k pour cette connexion. La mise en regard des estimées sur $\partial_\xi s_k$ et $\bar{\partial}_\xi s_k$ dans la zone $|s_k| \leq \delta$ assure que s_k est approximativement holomorphe le long de ξ. Les inégalités portant sur $\partial_\xi s_k$ et $ds_k - iks_k\alpha$ contrôlent la transversalité de s_k à, respectivement, la section nulle et aux rayons $\{(v, Re^{it}), v \in V, R \in [0, +\infty[\}$. Celle portant sur $\partial_\xi s_k$ assure en particulier que s_k est transversale à la section nulle en utilisant uniquement les directions de ξ.

COROLLAIRE 4.8. — *Pour $|w| \leq \delta$ et k assez grand, l'ensemble $K_w = s_k^{-1}(w)$ est une sous-variété de contact de (V, ξ). De plus, l'application $arg(s_k) : V \setminus K_0 \to S^1$ est une fibration dont les fibres sont transversales au champ de Reeb R_α en tout point $p \in V$ vérifiant $s_k(p) \geq \delta$*

Démonstration. — En un point $p \in V$ où $|s_k(p)| \leq \delta$, la dérivée $\partial_\xi s_k(p)$ est non nulle en vertu de (2) et $ds_k(p)$ est donc surjective. Pour $|w| \leq \delta$, l'ensemble K_w est une sous-variété de codimension deux de V transversale à ξ. La structure ξ donne sur K_w un champ d'hyperplans ξ_w d'équation $\alpha|_{\ker ds_k} = 0$. Les inégalités $|\partial_\xi s_k| \geq \delta k^{1/2}$ et $|\bar{\partial}_\xi s_k| \leq C$ assurent que, pour k assez grand, $ds_k|_\xi$ est presque $\mathbb{C}$-linéaire et donc que ξ_w est presque J-invariante. Comme $d\alpha$ est non dégénérée sur tout sous-espace complexe et que la non-dégénérescence est une condition ouverte, $d\alpha$ est non dégénérée sur ξ_w et ξ_w est une structure de contact.

On observe de plus qu'en tout point $p \in V$ on a $|ds_k(p)(R_\alpha) - iks_k(p)| \leq Ck^{1/2}$. Lorsque $|s_k(p)| \geq \delta$, cette inégalité montre que, pour k grand, $\frac{1}{k} ds_k(p)(R_\alpha)$ est proche de $is_k(p)$ et donc que $ds_k(p)(R_\alpha)$ est non nul et presque orthogonal à $s_k(p)$. Pour k assez grand, en combinant cette estimation pour $|s_k(p)| \geq \delta$ et l'estimation

$|\partial_\xi s_k| \geq \delta k^{1/2}$ pour $|s_k(p)| \leq \delta$, on obtient que les fibres $s_k^{-1}(\{Re^{it},\ R > 0\})_{t\in S^1}$ de $\arg(s_k)$ sont des sous-variétés de $V \setminus K_0$.

Un voisinage tubulaire de la reliure est donné par $(K_w)_{w\in D^2(\delta)} \simeq K_0 \times D^2(\delta)$, où la fibration $\arg(s_k)$ est exactement l'application $\arg(w)$. On a ainsi un modèle local de fibration adéquat. On obtient également que le champ de Reeb R_α est transversal aux fibres de $\arg(s_k)$ en dehors du voisinage $N(K_0) = \{p \in V\ |s_k(p) \leq \delta\}$ de K_0. $\square$

Il reste à modifier la forme α sur $N(K_0)$ pour trouver un champ de Reeb transversal aux pages aussi dans ce domaine. La propriété requise est précisée dans le lemme ci-dessous.

Lemme 4.9. — *Soient (K,θ) un livre ouvert sur V et $N(K) \simeq K \times D^2$ un voisinage tubulaire trivialisé de la reliure sur lequel θ coïncide avec l'application coordonnées angulaire. Soit $\xi = \ker\alpha$ une structure de contact qui induit une structure de contact positive sur chaque $K_w = K \times \{w\}$, $w \in D^2$, et dont le champ de Reeb R_α est positivement transversal aux pages en dehors de $N(K)$. Alors il existe une forme de contact $\alpha' = F\alpha$ égale à α hors de K et portée par (K,θ).*

C'est un exercice qu'on résout en jouant sur $\frac{\partial F}{\partial r}$ près de K dans de bonnes coordonnées. Ceci achève la preuve du corollaire 4.8. $\square$

Le dernier point à vérifier pour prouver le théorème 4.6 est que les pages du livre ouvert (K,θ) sont des variétés de Stein et que la monodromie est représentée par un difféomorphisme symplectique. Compte tenu du théorème 4.2, il suffit de vérifier que ce sont des variétés de Weinstein.

On note $F = \{p \in V|\ s_k(p) = r,\ r \geq \delta\}$ la fibre de θ au-dessus de 0, amputée d'un δ-voisinage de K. On pose $\phi = |s_k|$ sur F et $f = -\log\phi$. Le champ X est le champ de Liouville donné sur F par $i_X d\alpha|_F = \alpha|_F$. La condition $L_X\omega = L_X d\alpha = d(i_X d\alpha) = d\alpha = \omega$ est automatique. Dans la pratique, il faut encore modifier s_k et donc f pour faire de X un pseudo-gradient de f et de F une variété de Weinstein. Si on note J_k la projection de J sur TF parallèlement au champ de Reeb R_α, il faut choisir s_k pour que

$$(i)\quad |\bar{\partial}_k\phi| < \frac{1}{\sqrt{2}}|\partial_k\phi|,$$

où $\partial_k = \frac{1}{2}(\nabla - i\nabla \circ J_k)$ et $\bar{\partial}_k = \frac{1}{2}(\nabla + i\nabla \circ J_k)$ sont les parties J_k-linéaires et antilinéaires de ∇. Sous cette hypothèse, on calcule que $Re(\partial_k\phi) = \frac{1}{2}(d\phi - k\phi J_k^*\alpha)$ et $Re(\bar{\partial}_k\phi) = \frac{1}{2}(d\phi + k\phi J_k^*\alpha)$. Les formes $\partial_k\phi$ et $\bar{\partial}_k\phi$ sont respectivement des $(1,0)$ et $(0,1)$-formes. Comme telles, les normes de leurs parties réelles et imaginaires sont égales. On obtient, en injectant les parties réelles dans (i) que, sur F,

$$|d\phi/\phi + kJ_k^*\alpha| < |d\phi/\phi - kJ_k^*\alpha|.$$

Si on tient compte du fait que $kJ_k^*\alpha(X) = kd\alpha(X, J_kX) > 0$ pour k grand, cette inégalité signifie que $df(X) = -d\phi/\phi(X) > 0$ en dehors des points critiques de f.

4.3. Stabilisation

Soit S^n la sphère de dimension n, et $(U^*S^n, \omega_0 = dp\wedge dq)$ la structure symplectique canonique (différentielle de la forme de Liouville) sur le fibré en boules unité cotangent à S^n. Un *twist symplectique positif* le long de S^n est le difféomorphisme symplectique de U^*S^n défini en appliquant consécutivement et dans cet ordre [**2**] :

- le flot géodésique au temps π ;
- la différentielle de l'application d'antipodie de S^n.

Un twist symplectique positif vaut l'identité sur $\partial(U^*S^n)$. Lorsque $n = 1$, c'est un twist de Dehn sur l'anneau U^*S^1.

Soit (K, θ) un livre ouvert de page (F^{2n}, ω) et de monodromie un difféomorphisme symplectique h. On suppose que D est un disque lagrangien paramétré proprement plongé dans F, dont le bord est une sphère legendrienne plongée dans $\partial F \simeq K$. Il existe une unique façon d'ajouter symplectiquement l'anse (U^*D, ω_0) à (F, ω) le long de ∂D de sorte que le recollement entre ∂D et le bord de la section nulle $D_0 \simeq D$ de D soit donné par l'identité. Dans la variété symplectique $(F' = F \cup_\partial U^*D, \omega')$, la sphère $S = D \cup_{Id|_{\partial D}} D_0$ est lagrangienne. Elle possède dans (F', ω') un voisinage tubulaire N conjugué à (U^*S^n, ω_0). Si (F, ω) est de Weinstein, resp. Stein ou convexe, alors (F', ω') est de Weinstein, resp. Stein ou convexe.

On dit que le livre ouvert (K', θ') obtenu par suspension relative de (F', ω') par le difféomorphisme symplectique $\tau_S \circ h$ — où h est l'extension de h à F' par l'identité et τ_S est un twist symplectique positif effectué dans N le long de S — est un *plombage lagrangien positif* de (K, θ). Un livre ouvert (K', θ') est une *stabilisation* de (K, θ) s'il est obtenu à partir de (K, θ) par une suite de plombages lagrangiens positifs.

On peut vérifier que deux livres ouverts stablement équivalents portent la même structure de contact. Pour cela on observe que la structure standard ζ_0 de S^{2n+1} est portée par un livre ouvert (K_0, θ_0) dont la fibre est U^*S^n et la monodromie un twist symplectique positif. Le livre ouvert (K_0, θ_0) est obtenu par la construction de Milnor pour la singularité de Morse [**2**] :

$$f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$$

$$(z_0, ..., z_n) \to z_0^2 + ... + z_n^2.$$

On montre alors que tout plombage lagrangien positif (K', θ') de (K, θ) est obtenu par somme connexe adaptée de (K, θ) et (K_0, θ_0), laquelle porte la structure ξ.

THÉORÈME 4.10. — *Sur une variété close de dimension $2n+1 \geq 5$, deux livres ouverts portant une même structure de contact ξ et obtenus par la construction de Giroux-Donaldson-Ibort-Martinez-Presas ont des stabilisations isotopes.*

On ignore si cet énoncé est encore valable lorsqu'on part de deux livres ouverts quelconques.

Une variété de contact (V,ξ) est *Stein remplissable* si V est le bord d'un domaine de Stein W et si ξ est le champ des hyperplans complexes $TV \cap JTV$ tangents à V.

THÉORÈME 4.11. — *Une structure de contact sur une variété close est Stein remplissable si et seulement si elle est portée par un livre ouvert dont la monodromie est un produit de twists symplectiques positifs.*

Schéma de la preuve. — On suppose que la monodromie du livre ouvert est un produit de twists symplectiques positifs. On raisonne par récurrence sur le nombre de twists. Le début est assuré par le fait que si F est de Stein, la suspension relative de (F, Id) est le bord du domaine de Stein $F \times D^2$. Le pas est donné par le résultat général suivant : si ϕ est un difféomorphisme symplectique de F qui vaut l'identité au bord et si S est une sphère lagrangienne de F, la suspension relative $\overline{\Sigma}(F, \tau_S \circ \phi)$ est obtenue par chirurgie legendrienne sur la sphère S de $\overline{\Sigma}(F,\phi)$. D'après Eliashberg [**18**], la chirurgie legendrienne préserve la classe des structures Stein remplissables.

Réciproquement, d'après Eliashberg [**18**], toute variété Stein remplissable (V,ξ) est obtenue par chirurgie sur un entrelacs de sphères legendriennes $\mathscr{L}$ contenues dans une suspension relative $\overline{\Sigma}(F, Id) = (K_1, \theta_1)$. À l'aide d'une version relative du théorème 4.6, on montre qu'on peut trouver un livre ouvert équivalent à (K_1,θ_1) dont les pages contiennent $\mathscr{L}$. En considérant une stabilisation commune, on obtient un livre ouvert (K_2,θ_2) qui contient $\mathscr{L}$ et dont la monodromie est un produit de twists symplectiques positifs. Effectuer une chirurgie legendrienne le long d'une sphère de $\mathscr{L}$ correspond alors à composer la monodromie de (K_2,θ_2) par un twist symplectique positif. Au final, ξ est portée par un livre ouvert dont la monodromie est un produit de twists symplectiques positifs. $\square$

4.4. Les tores de dimension impaire sont de contact

THÉORÈME 4.12 ([**5**]). — *Si Σ est une surface close orientable de genre $g \geq 1$ et si V porte une structure de contact ξ, alors c'est aussi le cas de $V \times \Sigma$.*

Démonstration. — Pour simplifier, on suppose $\Sigma = T^2$. Soit (K,θ) un livre ouvert qui porte une forme de contact α de noyau ξ. On prend un voisinage tubulaire $N(K) = K \times D^2$ de K dans lequel la fibration θ est $\theta((x,(r,\phi)) = \phi$. On note $(x_1,x_2) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ un système de coordonnées sur le tore T^2. Pour $r_0 \in]0,1/2[$, on choisit une fonction lisse et croissante $f : [0,1] \to [0,1]$ qui vaut r pour $r \leq r_0$ et 1 pour $r \geq 2r_0$. On pose alors

$$\tilde{\alpha} = f(r)(\cos\theta dx_1 - \sin\theta dx_2) + \alpha.$$

Si r_0 est assez petit, un calcul montre que la forme $\tilde{\alpha}$ est de contact. □

COROLLAIRE 4.13 ([**5**]). — *Tout tore de dimension impaire porte une structure de contact.*

RÉFÉRENCES

[1] C. ABBAS, K. CIELIEBAK & H. HOFER – The Weinstein conjecture for planar contact structures in dimension three, *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), p. 771–793.

[2] V. I. ARNOL′D – Some remarks on symplectic monodromy of Milnor fibrations, in *The Floer memorial volume*, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, 1995, p. 99–103.

[3] D. BENNEQUIN – Entrelacements et équations de Pfaff, in *Third Schnepfenried geometry conference 1982, Vol. 1*, Astérisque, vol. 107, Soc. Math. France, 1983, p. 87–161.

[4] F. A. BOGOMOLOV & B. DE OLIVEIRA – Stein small deformations of strictly pseudoconvex surfaces, in *Birational algebraic geometry (Baltimore, MD, 1996)*, Contemp. Math., vol. 207, Amer. Math. Soc., 1997, p. 25–41.

[5] F. BOURGEOIS – Odd dimensional tori are contact manifolds, *Int. Math. Res. Not.* **2002** (2002), p. 1571–1574.

[6] C. CAUBEL, A. NÉMETHI & P. POPESCU-PAMPU – Milnor open books and Milnor fillable contact 3-manifolds, *Topology* **45** (2006), p. 673–689.

[7] V. COLIN – Chirurgies d'indice un et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997), p. 659–663.

[8] ______, Recollement de variétés de contact tendues, *Bull. Soc. Math. France* **127** (1999), p. 43–69.

[9] ______, Sur la torsion des structures de contact tendues, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **34** (2001), p. 267–286.

[10] ______, Une infinité de structures de contact tendues sur les variétés toroïdales, *Comment. Math. Helv.* **76** (2001), p. 353–372.

[11] V. COLIN, E. GIROUX & K. HONDA – On the coarse classification of tight contact structures, in *Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 71, Amer. Math. Soc., 2003, p. 109–120.

[12] ______, Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues, en préparation.

[13] V. Colin & K. Honda – Reeb vector fields and open book decompositions, en préparation.

[14] S. K. Donaldson – Symplectic submanifolds and almost-complex geometry, *J. Differential Geom.* **44** (1996), p. 666–705.

[15] ———, Lefschetz pencils on symplectic manifolds, *J. Differential Geom.* **53** (1999), p. 205–236.

[16] Y. Eliashberg – Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds, *Invent. Math.* **98** (1989), p. 623–637.

[17] ———, Filling by holomorphic discs and its applications, in *Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 151, Cambridge Univ. Press, 1990, p. 45–67.

[18] ———, Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2, *Internat. J. Math.* **1** (1990), p. 29–46.

[19] ———, Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), p. 165–192.

[20] ———, A few remarks about symplectic filling, *Geom. Topol.* **8** (2004), p. 277–293.

[21] Y. Eliashberg & M. Gromov – Convex symplectic manifolds, in *Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 52, Amer. Math. Soc., 1991, p. 135–162.

[22] Y. Eliashberg & W. Thurston – *Confoliations*, University Lecture Series, vol. 13, Amer. Math. Soc., 1998.

[23] J. B. Etnyre – On symplectic fillings, *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), p. 73–80.

[24] ———, Planar open book decompositions and contact structures, *Int. Math. Res. Not.* **2004** (2004), p. 4255–4267.

[25] J. B. Etnyre & K. Honda – On the nonexistence of tight contact structures, *Ann. of Math.* **153** (2001), p. 749–766.

[26] ———, Tight contact structures with no symplectic fillings, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 609–626.

[27] E. Giroux – Convexité en topologie de contact, *Comment. Math. Helv.* **66** (1991), p. 637–677.

[28] ———, Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg), Séminaire Bourbaki (1992/93), exposé n° 760, *Astérisque* **216** (1993), p. 7–33.

[29] ———, Une infinité de structures de contact tendues sur une infinité de variétés, *Invent. Math.* **135** (1999), p. 789–802.

[30] ———, Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces, *Invent. Math.* **141** (2000), p. 615–689.

[31] ———, Structures de contact sur les variétés fibrées en cercles audessus d'une surface, *Comment. Math. Helv.* **76** (2001), p. 218–262.

[32] ———, Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, Higher Ed. Press, 2002, p. 405–414.

[33] ———, Structures de contact, livres ouverts et tresses, en préparation.

[34] E. Giroux & N. Goodman – On the stable equivalence of open books in three-manifolds, *Geom. Topol.* **10** (2006), p. 97–114.

[35] E. Giroux & J.-P. Mohsen – Structures de contact et fibrations symplectiques au-dessus du cercle, en préparation, corrigendum.

[36] N. Goodman – Overtwisted open books from sobering arcs, *Algebr. Geom. Topol.* **5** (2005), p. 1173–1195.

[37] H. Grauert – On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, *Ann. of Math.* **68** (1958), p. 460–472.

[38] J. W. Gray – Some global properties of contact structures, *Ann. of Math.* **69** (1959), p. 421–450.

[39] M. Gromov – Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), p. 307–347.

[40] K. Honda – On the classification of tight contact structures. I, *Geom. Topol.* **4** (2000), p. 309–368.

[41] ———, On the classification of tight contact structures. II, *J. Differential Geom.* **55** (2000), p. 83–143.

[42] ———, Gluing tight contact structures, *Duke Math. J.* **115** (2002), p. 435–478.

[43] K. Honda, W. H. Kazez & G. Matić – Convex decomposition theory, *Int. Math. Res. Not.* **2002** (2002), p. 55–88.

[44] ———, Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary, *Invent. Math.* **169** (2007), p. 427–449.

[45] A. Ibort, D. Martínez-Torres & F. Presas – On the construction of contact submanifolds with prescribed topology, *J. Differential Geom.* **56** (2000), p. 235–283.

[46] P. Kronheimer & T. Mrowka – Witten's conjecture and property P, *Geom. Topol.* **8** (2004), p. 295–310.

[47] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth & Z. Szabó – Monopoles and lens space surgeries, *Ann. Math.* **165** (2007), p. 457–546.

[48] A. Loi & R. Piergallini – Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4, *Invent. Math.* **143** (2001), p. 325–348.

[49] J. Milnor – *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Math. Studies, No. 51, Princeton Univ. Press, 1963.

[50] ———, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Math. Studies, No. 61, Princeton Univ. Press, 1968.

[51] W. Neumann & L. Rudolph – Unfoldings in knot theory, *Math. Ann.* **278** (1987), p. 409–439.

[52] P. Ozsváth & Z. Szabó – Heegaard Floer homology and contact structures, *Duke Math. J.* **129** (2005), p. 39–61.

[53] F. Quinn – Open book decompositions, and the bordism of automorphisms, *Topology* **18** (1979), p. 55–73.

[54] L. Siebenmann – Les bissections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer, prépublication (Orsay), 1979.

[55] J. Stallings – On fibering certain 3-manifolds, in *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, Prentice-Hall, 1962, p. 95–100.

[56] W. Thurston & H. E. Winkelnkemper – On the existence of contact forms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52** (1975), p. 345–347.

[57] I. Torisu – Convex contact structures and fibered links in 3-manifolds, *Int. Math. Res. Not.* **2000** (2000), p. 441–454.

Vincent COLIN

Laboratoire de mathématiques Jean Leray
UMR CNRS-UN-ÉCN 6629
Université de Nantes
Faculté des Sciences et Techniques
2, rue de la Houssinière
B.P. 92208
F- 44322 Nantes Cedex 03
E-mail : Vincent.Colin@math.univ-nantes.fr