BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE GILLES LEMARIÉ

Base d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 2 (1989), p. 211-232
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_2_211_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 211–232.

BASE D'ONDELETTES SUR LES GROUPES DE LIE STRATIFIÉS

PAR

PIERRE GILLES LEMARIÉ (*)

RÉSUMÉ. — Nous construisons sur les groupes de Lie nilpotents stratifiés une base hilbertienne de L^2 composée de fonctions régulières et oscillantes "uniformément" localisées en espace et en fréquence (théorie des ondelettes). Sur certains groupes cette base est composée d'un nombre fini de fonctions et leurs dilatées-translatées "dyadiques". La méthode de construction de cette base repose sur une analyse multi-échelles composée d'espaces de surfaces-splines généralisées.

ABSTRACT. — We construct, on a stratified nilpotent Lie group, an hilbertian basis of L^2 formed with regulary and oscillating functions, "uniformly" localized in space and frequency (as in the ondelettes theory). On certain groups this basis is composed from finitely many functions and the functions obtained from them by "dyadic" dilations-translations. The way of constructing this basis lies on a multi-scale analysis composed from generalized spline-surfaces spaces.

Plan de l'article

1. Rappel de la situation abélienne et position du problème

Depuis la théorie des ondelettes développée par les équipes de Y. MEYER et A. GROSSMANN on dispose de nombreuses bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R}^n)$

(*) Texte reçu le 5 novembre 1987.
P. G. LEMARIÉ, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

bâties sur le modèle suivant : la base (appelée *base d'ondelettes*) est construite à partir de $2^n - 1$ fonctions ψ_ε $(1 \leq \varepsilon \leq 2^n - 1)$ et s'obtient comme la collection des dilatées-translatées dyadiques des ψ_ε, c'est-à-dire que la base est la collection des $\psi_{\varepsilon,j,k}$ $(1 \leq \varepsilon \leq 2^n - 1,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n)$ avec

$$\psi_{\varepsilon,j,k}(x) = 2^{jn/2}\psi_\varepsilon(2^j x - k). \tag{1}$$

On voit que si on prend des ψ_ε concentrées autour de $x = 0$ et de transformées de Fourier concentrées autour de la raie $|\xi| = 1$, l'ondelette $\psi_{\varepsilon,j,k}$ est concentrée autour du point dyadique $k/2^j$ et autour de la raie de fréquence $|\xi| = 2^j$. Pour le choix des ψ_ε on dispose des possibilités suivantes :

(i) [L-Me] : les ψ_ε sont dans la classe de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ et tous leurs moments $\int x^\alpha \psi_\varepsilon(x)dx$ sont nuls ;

(ii) [L3] : les ψ_ε sont des splines polynômiaux à plusieurs variables ; on peut les choisir splines de degré N avec N arbitraire et alors leurs moments de degré $\leq N$ sont nuls ; de plus ils sont à décroissance exponentielle à l'infini ;

(iii) [Da] : les ψ_ε sont à support compact ; on peut les choisir de classe C^N et avec leurs moments de degré $\leq N + 1$ nuls ;

(iv) [L-Ma-Me] : les trois exemples précédents entrent dans le cadre plus général de l'*analyse multi-échelles* donné par le résultat suivant : si V_j désigne l'espace fermé engendré par les $\psi_{\varepsilon,m,k}$ avec $1 \leq \varepsilon \leq 2^n - 1$, $m \leq j$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors on a :

(a) $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ dense dans L^2

(b) $f \in V_j$ si et seulement si $f(2^{-j}x) \in V_0$

(c) il existe $g \in V_0$ telle que les $g(x - k)$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$ forment une base inconditionnelle de V_0 :l'application $(\lambda_k) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_k g(x - k)$ est un isomorphisme de Banach entre $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ et V_0.

Inversement si V_0 vérifie (c) on peut toujours remplacer g par une fonction φ telle que les fonctions $\varphi(x - k)$ forment une base hilbertienne de V_0 ; de plus si W_0 désigne le supplémentaire orthogonal de V_0 dans V_1 alors il existe une base de W_0 formée de $2^n - 1$ fonctions $\psi_\varepsilon \in W_0$ et de leurs translatées $(\psi_\varepsilon(x - k))_{1\leq\varepsilon\leq 2^n-1,\, k\in\mathbb{Z}}$. Les algorithmes fondamentaux de cette analyse multi-échelles sont décrits dans [Me 2].

Considérons maintenant un groupe de Lie N gradué : on suppose N réel connexe simplement connexe et son algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ se décomposant en sous-espaces $\mathfrak{n}_i$: $\mathfrak{n} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathfrak{n}_i$ avec $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$; on dispose en particulier des dilatations $\delta_t(\sum x_i) = \sum t^i x_i$.

On fait l'hypothèse suivante sur N :

(H) *Il existe une identification de* $\mathfrak{n}_i$ *à* $\mathbb{R}^{d(i)}$ *telle que* $Z = \bigoplus \mathbb{Z}^{d(i)}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{n}$.

On identifie N à $\mathfrak{n}$ par l'application exponentielle. Le problème à considérer est alors le suivant :

(OND) *Existe-t-il des fonctions* $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ *(où* E *est un ensemble d'indices fini à déterminer) telles que les fonctions*

$$\psi_{\varepsilon,j,k}(x) = 2^{\frac{1}{2}\sum_i id(i)} \psi_\varepsilon\big(k^{-1}.\delta_{2^j}(x)\big), \quad \varepsilon \in E,\ j \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in Z,$$

forment une base hilbertienne de $L^2(N)$ *? Si oui, peut-on prendre les fonctions* ψ_ε *régulières, et localisées en espace et en fréquence ?*

Nous verrons que la réponse est *positive* dans le cas où N est stratifié (c'est-à-dire que N vérifie de plus que $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_i] = \mathfrak{n}_{i+1}$).

Dans le cas où l'hypothèse (H) ne serait pas vérifiée (mais où N est encore stratifié) nous verrons que pour toute identification des n_i à des $\mathbb{R}^{d(i)}$, on a en notant à nouveau $Z = \bigoplus_i \mathbb{Z}^{d(i)}$ l'existence d'une base $\psi_{\varepsilon,j,k}$ indexée par $E \times \mathbb{Z} \times Z$ (où E est fini) composée de fonctions régulières “uniformément” localisées en espace autour de $\delta_{2^{-j}}(k)$ et en fréquence (analyse spectrale du sous-laplacien $\mathcal{J} = \int_{[0,+\infty]} \lambda^2 dE_\lambda$) autour de $\lambda = 2^j$ (*cf.* THÉORÈME 1 ci-dessous).

Le problème principal pour répondre à la question (OND) ci-dessus était de trouver un algorithme permettant de calculer ces fonctions ψ_ε. Ce problème a été précisé par la découverte des analyses multi-échelles sous-jacentes aux résultats abéliens : il fallait déterminer quelle analyse multi-échelles introduire sur le groupe N. Ce sera celle des surfaces-splines généralisées à nœuds dans les dilatés de Z. La théorie des surfaces splines sera décrite ci-dessous dans la section 3. (Cette théorie L^2 des surfaces-splines semble déjà nouvelle dans le cas abélien mais nous l'énonçons ici dans le langage des groupes de Lie statifiés. Voir [L4] pour la présentation dans $\mathbb{R}^n$).

Dans la section 2 nous énonçons nos résultats sur les bases hilbertiennes des groupes stratifiés (THÉORÈMES 1 et 2) ; dans la section 3 nous construisons les splines généralisés sur les groupes de Lie stratifiés (THÉORÈMES 3 et 4) ; dans la section 4 nous démontrons les THÉORÈMES 1 et 2 à l'aide d'un lemme de calcul matriciel que nous démontrons dans la section 5 (THÉORÈME 5) et qui généralise essentiellement les résultats de S. DEMKO

[De] sur l'inversion des matrices m-bandées. Enfin dans la section 6 nous établissons quelques majorations supplémentaires pour obtenir des résultats plus précis dans les théorèmes précédents.

2. Énoncé des résultats

Nous nous plaçons sur un groupe de Lie N réel nilpotent connexe et simplement connexe. Nous supposons que N est stratifié, c'est-à-dire que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N admet une décomposition en sous-espaces $\mathfrak{n} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathfrak{n}_i$ avec $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_i] = \mathfrak{n}_{i+1}$. Nous identifions $\mathfrak{n}_i$ à $\mathbb{R}^{d(i)}$ et notons $Z = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathbb{Z}^{d(i)}$.

Nous identifions N à $\mathfrak{n}$ par l'application exponentielle. Nous disposons alors sur N des objets attachés à l'espace vectoriel $\mathfrak{n}$ (espaces de fonctions-tests : espace D des fonctions C^∞ à support compact, espace de Schwartz,..., mesure de Lebesgue dx, qui est aussi la mesure de Haar de N; fonctions polynômes; *etc.*). Nous disposons également des opérations suivantes sur N attachées à sa structure de groupe : multiplication entre deux éléments de N x et y notée xy, dilatation homogène par un facteur $t > 0$ notée δ_t et donnée par $\delta_t(\sum_{1\leq i\leq r} x_i) = \sum_i t^i x_i$. Nous avons également la norme homogène $|x|$ donnée par :

$$\Big|\sum_{i=1}^{r} x_i\Big| = \Big(\sum_{i=1}^{r} \|x_i\|_{\mathbb{R}^{d(i)}}^{(2\,r!/i)}\Big)^{1/(2\,r!)}$$

qui vérifie $|\delta_t x| = t|x|$. De plus nous notons Q la dimension homogène de N donnée par $Q = \sum_i id(i)$ ou encore $d(\delta_t x) = t^Q dx$.

Nous identifions également les éléments de $\mathfrak{n}$ à des opérateurs différentiels invariants à gauche sur N; en particulier nous notons $(X_k)_{1\leq k\leq d(1)}$ une base de $\mathfrak{n}_1$ et $\mathcal{J}$ le sous-laplacien correspondant donné par la formule $J = -\sum_k X_k^2$. L'opérateur J est auto-adjoint positif et hypo-elliptique. Enfin nous notons H^s l'espace $H^s = (Id + J)^{-s/2}L^2$; en particulier, pour $s \in \mathbb{N}$, on a

$$H^s = \Big\{ f \in L^2 \mid \text{pour } 0 \leq \alpha \leq s \\ \text{et } \big(p(1), \dots, p(\alpha)\big) \in \big\{1, \dots, d(1)\big\}^\alpha \quad X_{p(1)} \dots X_{p(\alpha)} \quad f \in L^2 \Big\}.$$

Les propriétés de J et de H^s sont décrites dans [Fo].

Nous nous proposons de montrer les résultats suivants sur N stratifié : nous notons DZ les nombres "dyadiques" sur N : $DZ = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{2^j} Z$.

THÉORÈME 1. — *Pour tout entier $M > \frac{1}{2}Q$ il existe une base hilbertienne de $L^2(N)$ formée de fonctions $(\Psi_z)_{z\in DZ^*}$ indexées par $DZ^* = DZ-\{0\}$ et qui vérifient les propriétés suivantes : en notant pour $z \in DZ^*$ $j(z)$ l'indice j pour lequel $\delta_{2^j}(z) \notin Z$ et $\delta_{2^{j+1}}(z) \in Z$ on a :*

$$\Psi_z = J^M \theta_z \tag{2}$$

où θ_z vérifie pour tout multi-indice $(p(1),\dots,p(\alpha)) \in \{1,\dots,d(1)\}^\alpha$ où $0 \le \alpha < 4M - Q$:

$$\left|X_{p(1)}\dots X_{p(\alpha)}\theta_z(x)\right| \le C2^{j(z)(\frac{1}{2}Q-2M+\alpha)}e^{-\rho|x|} \tag{3}$$

où C et $\rho > 0$ ne dépendent pas de z.

THÉORÈME 2. — *Dans le cas où Z est un sous-groupe de N les θ_z se déduisent les unes des autres par translations-dilatations : plus précisément on a en notant $E = (\delta_{1/2}Z/Z) - \{0\}$ et en choisissant $k_1,\dots,k_{2^Q-1}$ des $2^Q - 1$ éléments de E et en notant $k(z)$ l'élément de E qui est équivalent à $\delta_{2^{j(z)}}z$ on a*

$$\Psi_z(x) = 2^{j(z)Q/2}\Psi_{k(z)}(\{k(z)^{-1}.\delta_{2^{j(z)}}z\}^{-1}.\delta_{2^{j(z)}}x)$$

de sorte que la base Ψ_z se réindexe en $\Psi_{\varepsilon,j,z}$ ($\varepsilon \in E$, $j \in \mathbb{Z}$, $z \in Z$) avec $\Psi_{\varepsilon,j,z}(x) = 2^{jQ/2}\Psi_\varepsilon(z^{-1}.\delta_{2^j}(x))$.

Remarquons que ces fonctions Ψ_z sont bien localisées en espace et en fréquence. Elles sont de la forme

$$\Psi_z(x) = 2^{j(z)\frac{1}{2}Q}\Psi_z^\sharp\big((\delta_{2^{j(z)}}.z)^{-1}.(\delta_{2^{j(z)}}x)\big)$$

où les fonctions $\Psi_z^\sharp$ vérifient $\Psi_z^\sharp = J^M\theta_z^\sharp$ avec $\theta_z^\sharp$ vérifiant uniformément en z : pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| < 4M - Q$ on a :

$$\left|X^\alpha\theta_z^\sharp(x)\right| \le C\exp(-\rho|x|).$$

Les fonctions $\Psi_z^\sharp$ sont donc localisées uniformément en espace et en fréquence : pour la géométrie de N tout d'abord puisque les dérivées d'ordre (homogène) $< 2M - Q$ des $\Psi_z^\sharp$ sont à décroissance rapide à l'infini (d'où la forte localisation en espace) ; de plus il est clair que $\Psi_z^\sharp$ appartient au domaine des opérateurs J^{2M-Q-1} (en fait comme nous le verrons plus bas au domaine de J^σ pour tout $\sigma < 2M - \frac{1}{2}Q$) et J^{-2M} d'où la localisation en fréquence par rapport à l'analyse spectrale de J. De plus, il est clair que pour tout polynôme P de degré (homogène) $< 2M$ l'intégrale de $\Psi_z^\sharp$ contre $P(x)dx$ est nulle. On voit alors que les fonctions $\Psi_z^\sharp$ sont également localisées en espace et en fréquence au sens usuel : en effet $\Psi_z^\sharp$ et ses dérivées d'ordre (usuel) $< (2M - Q)/r$ (où r est le dernier indice i avec $n_i \neq \{0\}$) sont à décroissance rapide à l'infini et l'intégrale de $\Psi_z^\sharp$ contre tout polynôme de degré (usuel) $< 2M/r$ est nulle.

3. Interpolation lagrangienne sur un groupe stratifié

On va construire une théorie d'interpolation lagrangienne sur le groupe stratifié N à l'aide de splines généralisés.

On considère une famille $(x_k)_{k\in K}$ de points de N qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(4) les x_k sont éloignés les uns des autres : $\inf_{k\neq\chi} \mid x_k^{-1}.x_\chi \mid > \delta > 0$;

(5) les x_k "recouvrent" N : $\bigcup_{k\in K} B(x_k, R) = N$.

On cherche alors à résoudre le problème d'interpolation suivant, où s est un réel $> \frac{1}{2}Q$, :

(P) *Pour* $F \in H^s$ *trouver* $f \in H^s$ *telle que* (E) *:* "$\forall k \in K\ f(x_k) = F(x_k)$" *et minimisant parmi toutes les fonctions vérifiant* (E) *la fonctionnelle* $\int |J^{s/2}f|^2 dx$.

Il est clair que le problème n'a pas de sens pour $s \leq \frac{1}{2}Q$ puisqu'alors les fonctions de H^s ne sont définies que presque partout ; pour $s > \frac{1}{2}Q$ nous verrons que l'application $F \to (F(x_k))_{k\in K}$ est une surjection de H^s sur $\ell^2(K)$ et que le problème (P) revient donc à résoudre pour $(y_k) \in \ell^2(K)$ le problème $f(x_k) = y_k$ avec $\|J^{s/2}f\|_2$ minimale.

Pour résoudre (P) on introduit les espaces de surfaces-splines généralisées $V^s = \{f \in L^2 \mid J^{s/2}f$ est une somme de masses de Dirac aux points $x_k\}$. Si $s \leq \frac{1}{2}Q$ $V^s = \{0\}$ et l'on ne considèrera donc que le cas $s > \frac{1}{2}Q$. Nous allons alors démontrer les résultats suivants :

PROPOSITION 1. — *Si* $s > \frac{1}{2}Q$ *alors la norme* H^s *est équivalente à la norme* $|||f|||_s = (\sum_{k\in K} |f(x_k)|^2)^{1/2} + \|J^{s/2}f\|_2$.

PROPOSITION 2. — *Soit* $K^s = \{f \in H^s \mid \forall k \in K\ f(x_k) = 0\}$. *Alors si* $s > \frac{1}{2}Q$ *l'ensemble* $J^{s/2}K^s$ *est fermé dans* L^2. *De plus* V^s *est fermé dans* L^2 *et l'orthogonal de* V^s *est* $J^{s/2}K^s$.

THÉORÈME 3. — *Pour* $s > \frac{1}{2}Q$ *le problème* (P) *admet une et une seule solution* f_0. *Cette solution est l'unique élément de* V^{2s} *vérifiant* $f_0(x_k) = F(x_k)$ *pour tout* k.

En particulier f_0 *s'écrit* $f_0 = \sum_{k\in K} F(x_k)L_k^s$ *où* L_k^s *est l'unique élément de* V^{2s} *vérifiant* $L_k^s(x_j) = \delta_{kj}$.

THÉORÈME 4. — *Si de plus* s *est entier alors la fonction* L_k^s *est à décroissance rapide à l'infini ainsi que ses dérivées d'ordre (homogène) strictement inférieur à* $2s - Q$. *Plus précisément on a :*

$$(6) \qquad \left|X^\alpha L_k^s(x)\right| \leq C \exp(-\rho|x_k^{-1}.x|) \quad \text{pour } |\alpha| < 2s - Q$$

pour deux constantes positives C et ρ indépendantes de k.

a) *Étude de la norme* $||| \ |||_s$: La démonstration de l'équivalence des normes $||| \ |||_s$ et H^s repose essentiellement sur l'injection de Sobolev $H^s \subset C_0$ pour $s > \frac{1}{2}Q$. Pour démontrer cette équivalence on va démontrer les deux inégalités suivantes :

$$\Big(\sum_{k\in K} |f(x_k)|^2\Big)^{1/2} \le C_s \|f\|_{H^s} \quad \text{pour } s > \frac{1}{2}Q\,; \tag{7}$$

$$\|f\|_{L^2} \le C_s \Big\{ \Big(\sum_{k\in K} |f(x_k)|^2\Big)^{1/2} + \|J^{s/2} f\|_L \Big\} \quad \text{pour } s > \frac{1}{2}Q. \tag{8}$$

Pour montrer la première inégalité on introduit une fonction $\varphi \in D(N)$ (fixée indépendamment de f) valant 1 en 0 et 0 en dehors de la boule $B(0,1)$. On pose alors $\varphi_k(x) = \varphi(\delta_{\delta/2}^{-1}\{x_k^{-1}.x\})$; φ_k est portée par la boule $B(x_k, \frac{1}{2}\delta)$ et vaut 1 en x_k. D'après l'injection de Sobolev on a (si $s > \frac{1}{2}Q$) $|f(x_k)| \le C\|f\varphi_k\|_{H^s}$. Or l'application $f \to (f\varphi_k)_{k\in K}$ est continue de H^s dans $\ell^2(H^s)$ pour $s \ge 0$: si s est entier on voit facilement que la norme $\ell^2(H^s)$ de $(f\varphi_k)$ est équivalente à la norme H^s de $f\sum_k \varphi_k$ puisque les φ_k sont à supports disjoints deux à deux, comme de plus la fonction $\sum_k \varphi_k$ est bornée ainsi que toutes ses dérivées on voit que c'est un multiplicateur de H^s de sorte que la continuité de $f \mapsto (f\varphi_k)$ est établie pour s entier, d'où pour tout $s \ge 0$ par interpolation. On a donc :

$$\Big\{\sum_k |f(x_k)|^2\Big\}^{1/2} \le C\Big\{\sum_k \|f\varphi_k\|_{H^s}^2\Big\}^{1/2} \le C'\|f\|_{H^s}.$$

Pour démontrer la deuxième inégalité on reprend la fonction φ précédente que l'on suppose positive et valant identiquement 1 sur $B(0,\frac{1}{2})$. On pose alors $\theta_k(x) = \varphi(\delta_{2R}^{-1}\{x_k^{-1}.x\})$ et $\omega_k(x) = \theta_k(x)/\sum_{j\in K}\theta_j(x)$. Les ω_k forment une partition de l'unité et on a donc

$$f = \sum_k f\omega_k = \sum_k f(x_k)\omega_k + \sum_k \big(f(x) - f(x_k)\big)\omega_k.$$

Or $|\omega_k| \le 1$ et la famille ω_k est localement finie : plus précisément le nombre d'indices k vérifiant $\omega_k(x) \ne 0$ se majore à x fixé par $C(1 + 4R/\delta)^Q$: en effet pour ces indices k les boules $B(x_k, \frac{1}{2}\delta)$ sont disjointes et contenues dans la boule $B(x, C(2R + \frac{1}{2}\delta))$. D'où :

$$\|f\|_{L^2} \le C\Big\{\Big(\sum_{k\in K}|f(x_k)|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{k\in K}\int_{B(x_k,2R)} |f(x) - f(x_k)|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big\}.$$

Nous allons montrer que pour $f \in D$ on a la majoration suivante :

$$\Big\{\sum_{k\in K}\int_{B(x_k,2R)} \big|f(x)-f(x_k)\big|^2\,dx\Big\}^{1/2} \le C_\sigma \|J^{\sigma/2} f\|_{L^2}$$

pour $0<\sigma<1$.

En effet, on réalise f comme l'intégrale : $f = C_\sigma \int_0^\infty P_t J^{\sigma/2} f t^\sigma \, dt/t$, où $P_t = e^{-t\sqrt{J}}$ est le noyau de Poisson sur N. On obtient alors :

$$f(x)-f(x_k) = C_\sigma \int_0^\infty \int_N \big(p_t(x,z)-p_t(x_k,z)\big) J^{\sigma/2} f(x) t^\sigma \frac{dt}{t}\,dz,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\big|f(x)-f(x_k)\big| \le C_\sigma &\Big\{\int_0^\infty\int_N \big|p_t(x,z)-p_t(x_k,z)\big| \times \big|J^{\sigma/2}f(z)\big|^2 t^\sigma \frac{dt}{t} dz\Big\}^{1/2} \\ &\times \Big\{\int_0^\infty\int_N \big|p_t(x,z)-p_t(x_k,z)\big| t^\sigma \frac{dt}{t} dz\Big\}^{1/2}.\end{aligned}$$

La seconde intégrale converge pourvu que $0<\sigma<1$: on majore $|p_t(x,z)-p_t(x_k,z)|$ par $C\inf(R/t,1)(q_t(x,z)+q_t(x_k,z))$ où $q_t(x,z) = t^{-Q}(1+|x^{-1}.z|/t)^{-Q-1}$ et la convergence est immédiate. Il reste à majorer :

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in K}\int_{B(x_k,R)}\int_0^\infty\int_N \inf\Big(\frac{R}{t},1\Big)\big(q_t(x,z)+q_t(x_k,z)\big)|J^{\sigma/2}f(z)|^2\,dz t^\sigma \frac{dt}{t} \\ &\le C\int_0^\infty\int_N \inf\Big(\frac{R}{t},1\Big)|J^{\sigma/2}f(z)|^2 dz t^\sigma \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

d'après les majorations suivantes faciles à obtenir : $\int q_t(x,z)\,dx = \mathrm{C^{te}}$ et $\sum_{k\in K} q_t(x_k,z) \le \mathrm{C^{te}}$. On utilise ensuite l'inégalité :

$$\|J^{\sigma/2}f\|_2 \le C_{s,\sigma}\Big(\varepsilon^\sigma\|f\|_2 + \Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{s-\sigma}\|J^{S/2}f\|_2\Big)$$

pour $0\le\sigma\le s$ et $\varepsilon>0$. On obtient donc :

$$\|f\|_2 \le C\Big\{\Big(\sum_{k\in K}\big|f(x_k)\big|^2\Big)^{1/2} + \Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{s-\sigma}\|J^{s/2}f\|_2 + \varepsilon^\sigma\|f\|_2\Big\}$$

avec une constante C *indépendante de* ε (mais dépendante de s et de σ choisi dans $]0,1[\cap[0,s]$). De là on tire (8) en prenant ε suffisamment petit et la Proposition 1 est démontrée.

(b) *Étude des espaces $J^{s/2}K^s$ et V^s* : Remarquons tout d'abord que dans H^{-s} $(s > \frac{1}{2}Q)$ la norme de $\sum_{k\in K} a_k\delta(x_k^{-1}.x)$ est équivalente à celle de $(a_k)_{k\in K}$ dans $\ell^2(K)$. En effet les φ_k étant à support disjoints deux à deux, il est facile de vérifier pour $s \in \mathbb{N}$ (et donc pour tout $s \geq 0$) que la norme H^s de $\sum_k a_k\varphi_k$ est équivalente à $(\sum_k |a_k|^2)^{1/2}$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in K} |a_k|^2 &= \Big\langle \sum_{k\in K} a_k\delta(x_k^{-1}.x) \mid \sum_{k\in K} a_k\varphi_k \Big\rangle \\ &\leq \Big\| \sum_{k\in K} a_k\delta(x_k^{-1}.x)\Big\|_{H^{-s}} C_s\Big(\sum_{k\in K} |a_k|^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Inversement, si $s > \frac{1}{2}Q$ on a (d'après la PROPOSITION 1) :

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle \sum_{k\in K} a_k\delta(x_k^{-1}.x) \mid f\Big\rangle\Big| &\leq \Big(\sum_{k\in K} |a_k|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k\in K} |f(x_k)|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq C_s\Big(\sum_{k\in K} |a_k|^2\Big)^{1/2} \|f\|_{H^s}.\end{aligned}$$

En particulier le sous-espace fermé de H^{-s} engendré par les $\delta(x_k^{-1}.x)$ est l'espace des combinaisons linéaires des $\delta(x_k^{-1}.x)$ avec des coefficients a_k dans ℓ^2. Cela montre que V^s est un sous-espace fermé de L^2 composé de fonctions régulières : si $f \in V^s$ alors $J^{s/2}f = \sum_k a_k(f)\delta(x_k^{-1}.x)$ est dans H^{-s} de sorte que $\sum_k |a_k(f)|^2 < +\infty$ et donc $J^{s/2}f$ est dans $H^{-\sigma}$ pour tout $\sigma > \frac{1}{2}Q$ et au total (puisque $f \in L^2$) $f \in H^\sigma$ pour tout $\sigma < s - \frac{1}{2}Q$.

D'après la PROPOSITION 1

(9) *Les normes $\|f\|_{H^s}$ et $\|J^{s/2}f\|_2$ sont équivalentes sur K^s*

(pour $s > \frac{1}{2}Q$) puisque le terme $\sum_k |f(x_k)|^2$ disparaît de la norme $|||f|||_s$. Or K^s est fermé dans H^s puisque les applications $f \mapsto f(x_k)$ sont continues ; on en conclut que K^s muni de la norme H^s est un espace de Banach et que l'application $f \mapsto J^{s/2}f$ est un isomorphisme de Banach entre K^s et l'espace $J^{s/2}K^s$ muni de la norme L^2 ; en particulier $J^{s/2}K^s$ est bien un espace de Banach et est donc fermé dans L^2.

Montrons maintenant que les espaces V^s et $J^{s/2}K^s$ sont bien orthogonaux : si $f \in V^s$ et si $g = J^{s/2}h \in \mathcal{J}^{s/2}K^s$ on a : $\langle f \mid g\rangle = \sum_k a_k(f)h^*(x_k) = 0$; inversement si $f \in (J^{s/2}K^s)^\perp$ et si $g \in D$ on a : $g - \sum_k g(x_k)\varphi_k \in K^s$ et donc $\langle f \mid J^{s/2}g\rangle = \sum_k g^*(x_k)\langle f \mid \varphi_k\rangle$ ou encore $J^{s/2}f = \sum_k \langle f \mid \varphi_k\rangle\delta(x_k^{-1}.x)$ d'où $f \in V^s$. La PROPOSITION 2 est donc démontrée.

(c) *Résolution du problème* (P) : On peut maintenant résoudre le problème d'interpolation lagrangienne (P). Supposons que f_0 solution de (P) soit connue; alors f est une autre fonction de H^s qui vérifie $f(x_k) = F(x_K)$ $\forall k \in K$ si et seulement si $f - f_0 \in K^s$; comme

$$\|J^{s/2}(f_0+\lambda h)\|_2^2 = \|J^{s/2}f_0\|_2^2 + 2\Re e\Big\{\lambda^*\big\langle J^{s/2}f_0 \mid J^{s/2}h\big\rangle\Big\} + |\lambda|^2\|J^{s/2}h\|_2^2,$$

on voit que pour que $\|J^{s/2}f_0\|_2$ soit minimale il faut et il suffit que $J^{s/2}f_0$ soit orthogonale à $J^{s/2}K^s$; comme $F - f_0 \in K^s$ on voit que $J^{s/2}(F - f_0)$ doit être le projeté orthogonal de $J^{s/2}F$ sur $J^{s/2}K^s$. On obtient donc f_0 par le procédé suivant : on dérive F en $J^{s/2}F$ puis on le projette sur $J^{s/2}K^s$ sur une fonction $J^{s/2}h$ avec $h \in K^s$, on a alors $f_0 = F - h$ (par injectivité de $J^{s/2}$ de H^s dans L^2). L'existence et l'unicité de f_0 a donc été établie.

De plus on a vu que $J^{s/2}f_0$ était orthogonale à $J^{s/2}K^s$ et donc on a que $J^{s/2}f_0 \in V^s$ et donc $f_0 \in V^{2s}$.

Nous allons maintenant pouvoir préciser la structure de l'espace V^{2s}. Nous savons déjà que V^{2s} est inclus dans H^s (puisque $s < 2s - \frac{1}{2}Q$) et, en corollaire, que les normes $\|f\|_2$ et $\|f\|_{H^s}$ sont équivalentes sur V^{2s}. De plus ces deux normes sont encore équivalentes à $(\sum_k |f(x_k)|^2)^{1/2}$: en effet, on sait d'une part que $(\sum_k |f(x_k)|^2)^{1/2}$ se majore par la norme de f dans H^s et d'autre part si $f \in V^{2s} f$ est entièrement déterminée par les $f(x_k)$ (puisqu'elle minimise $\|J^{s/2}g\|_2$ parmi les fonctions $g \in H^s$ vérifiant $g(x_k) = f(x_k)$) et c'est plus précisément le spline d'interpolation de $\sum_k f(x_k)\varphi_k$; on sait qu'on contrôle $\|f\|_2$ par $\|J^{s/2}f\|_2 + (\sum_k |f(x_k)|^2)^{1/2}$ or $J^{s/2}f$ est le projeté de $J^{s/2}\sum_k f(x_k)\varphi_k$ d'où un contrôle de $\|J^{s/2}f\|_2$ par $\|J^{s/2}(\sum_k f(x_k)\varphi_k)\|_2 \leq C(\sum_k |f(x_k)|^2)^{1/2}$.

On en conclut immédiatement que $f \in V^{2s}$ se décompose dans V^{2s} (et donc en norme H^s) en $f = \sum_k f(x_k)L_k^s$ où L_k^s est l'unique élément de V^{2s} valant 1 en x_k et 0 aux autres points x_j. Le THÉORÈME 3 est alors complètement démontré.

(d) *Approximation des fonctions L_k^s par des fonctions à support compact* : Nous supposons maintenant *s entier*. On va construire une approximation des L_k^s par des fonctions à support compact en utilisant une modélisation du problème (P) sur un ouvert borné. Pour $j \geq 0$ et $R > 0$ fixé que nous préciserons plus bas, on pose $\Omega(k,j) = B(x_k, jR)$ la boule ouverte de centre x_k et de rayon jR. On étudie le problème suivant :

Problème ($\mathrm{P}_{k,j}^s$) : *"Trouver une solution de* ($\mathrm{E}_{k,j}^s$) *: " $f \in H^s$, $f(x_k) = 1$, $f(x_p) = 0$ pour $p \neq k$ et f est identiquement nulle en dehors de $\Omega(k,j)$ "qui mimimise parmi les solutions de* ($\mathrm{E}_{k,j}^s$) *la norme $\|J^{s/2}f\|_2$."*

Pour résoudre ce problème on pose $K^s_{k,j} = \{f \in H^s \mid f(x_p) = 0$ pour tout p dans K et f identiquement nulle en dehors de $\Omega(k,j)\}$ et $J^{s/2}K^s_{k,j}$ l'ensemble $J^{s/2}K^s_{k,j} = \{f \in L^2 \mid \exists h \in K^s_{k,j}\ f = J^{s/2}h\}$. Il est clair que $K^s_{k,j}$ est un sous-espace fermé de K^s (puisque l'application $f \mapsto f(x)$ est continue à x fixée de H^s dans $\mathbb{C}$) et donc que $J^{s/2}K^s_{k,j}$ est fermé dans L^2.

Le problème $(\mathrm{P}^s_{k,j})$ a alors une et une seule solution $\theta^s_{k,j}$ donnée par l'algorithme suivant : on part de φ_k qu'on dérive en $J^{s/2}\varphi_k$ puis qu'on projette sur $J^{s/2}K^s_{k,j}$ en $J^{s/2}h^s_{k,j}$ et on a alors $\theta^s_{k,j} = \varphi_k - h^s_{k,j}$.

Nous allons montrer que $\theta^s_{k,j}$ converge dans H^s, quand $j \to +\infty$, vers L^s_k. Pour cela nous allons vérifier que la série $\theta^s_{k,0} + \sum_{j\geq 0}(\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j})$ converge normalement dans H^s. On en déduit alors tout de suite que sa limite θ vaut L^s_k : en effet $\theta(x_p) = \lim_{j\to+\infty} \theta^s_{k,j}(x_p) = \delta_{k,p}$ et de plus si $g \in D$ vérifie $g(x_p) = 0$ pour tout p alors pour j assez grand $g \in K^s_{k,j}$ de sorte que $\langle \theta \mid J^s g\rangle = \langle J^{s/2}\theta \mid J^{s/2}g\rangle = \lim_{j\to+\infty}\langle J^{s/2}\theta^s_{k,j} \mid J^{s/2}g\rangle = 0$, ce qui montre que $\theta \in V^{2s}$ et donc que $\theta = L^s_k$.

Pour établir la convergence de la série $\theta^s_{k,0} + \sum_{j\geq 0}(\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j})$ dans H^s, il suffit d'établir la convergence L^2 de la série

$$\Sigma = \sum_{j\geq 0} J^{s/2}(\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j}).$$

En effet $\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j} \in K^s$ et sur K^s les normes $\|f\|_{H^s}$ et $\|J^{s/2}f\|_2$ sont équivalentes d'après (9). Remarquons enfin que les termes de la série Σ sont deux à deux orthogonaux puisque lorsque $j < p$ on a $\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j} \in K^s_{k,p}$. On est donc ramené à étudier la convergence de la série

$$\Sigma' = \sum_{j\geq 1} \big\| J^{s/2}\big(\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j}\big)\big\|_2^2.$$

Pour cela on considère $\psi_{k,j}$ (que nous fixerons plus bas) égale à 1 au voisinage de $\Omega(k,j-1)$ et à support compact contenu dans $\Omega(k,j)$ et on écrit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\big\| J^{/2}\big(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1}\big)\big\|_2^2 &= \Big\langle J^{s/2}\big(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1}\big) \mid J^{s/2}\big(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1}\big)\Big\rangle \\
&= \Big\langle J^{s/2}\big(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1}\big) \mid J^{s/2}\theta^s_{k,j}\Big\rangle \qquad (\text{car } \theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1} \in K^s_{k,j+1}) \\
&= \Big\langle J^{s/2}\{(1-\psi_{k,j})(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1})\} \mid J^{s/2}\theta^s_{k,j}\Big\rangle \\
&\qquad\qquad (\text{car } \psi_{k,j}(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1}) \in K^s_{k,j}) \\
&= \Big\langle J^{s/2}\{(1-\psi_{k,j})(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1})\} \mid J^{s/2}(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j-1})\Big\rangle
\end{aligned}$$

((car $\psi_{k,j} = 1$ sur $\Omega(k,j-1)$ et l'opérateur J^s est propre puisque différentiel)). On utilise alors la remarque que :

$$\left\langle J^{s/2}(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j+1}) \mid J^{s/2}\{(1-\psi_{k,j})(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j-1})\}\right\rangle = 0$$

du fait que $(1-\psi_{k,j})(\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j-1}) \in K^s_{k,j}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}(10)\quad & \left\| J^{s/2}(\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j})\right\|_2^2 \\ &= \left\langle \left[J^s, (1-\psi_{k,j})\right](\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j}) \mid (\theta^s_{k,j} - \theta^s_{k,j-1})\right\rangle \\ &\leq \left\| \left[J^s, (1-\psi_{k,j})\right]\right\|_{L(H^s,H^{-s})} \left\|\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j}\right\|_{H^s} \left\|\theta^s_{k,j-1} - \theta^s_{k,j}\right\|_{H^s}.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant procéder au choix des fonctions $\psi_{k,j}$ et du nombre R (c'est-à-dire des ouverts $\Omega(k,j)$). Pour cela on fixe ζ une fonction dans $D(\mathbb{R})$ valant 1 sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ et 0 en dehors de $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ et ζ_j la fonction dans $D(N)\zeta_j(x) = \zeta(|x| - j)$ si $|x| \geq j$ et 1 si $|x| \leq j$. Les fonctions ζ_j ont leurs dérivées uniformément bornées par rapport à j (c'est-à-dire qu'on a $\|X^\alpha \zeta_j\|_\infty \leq C_\alpha$ indépendamment de j) et elles vérifient que $\zeta_j(x) = 1$ au voisinage de la boule $B(0,j)$ et que $\zeta_j(x)$ est à support compact dans la boule $B(0, j+1)$; on pose enfin $\psi_{k,j}(x) = \zeta_{j-1}(\delta_{1/R}\{x_k^{-1}.x\})$ de sorte que les conditions de support de $\psi_{k,j}$ sont immédiatement vérifiées.

Or nous avons pour ce choix des $\psi_{k,j}$ (et en faisant varier $R \geq 1$) :

$$(11)\qquad \left\| \left[J^s, (1-\psi_{k,j})\right]\right\|_{L(H^s,H^{-s})} \leq \frac{C}{R} = \varepsilon(R)$$

où C est indépendante de R (il suffit de développer le commutateur et de remarquer que l'on dérive dans chaque terme au moins une fois $\psi_{k,j}$). Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}(12)\quad & \left\| J^{s/2}(\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j})\right\|_2^2 \\ &\leq \varepsilon(R) \left\|\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j}\right\|_{H^s} \left\|\theta^s_{k,j-1} - \theta^s_{k,j}\right\|_{H^s} \\ &\leq C'\varepsilon(R) \left\| J^{s/2}(\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j})\right\|_2 \left\| J^{s/2}(\theta^s_{k,j-1} - \theta^s_{k,j})\right\|_2.\end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir R suffisamment grand pour obtenir que $C'\varepsilon(R) = \rho$ soit strictement inférieur à 1. On a alors :

$$(13)\qquad \left\| J^{s/2}(\theta^s_{k,j+1} - \theta^s_{k,j})\right\|_2 \leq C\rho^j$$

avec une constante C indépendante (de k et) de j. On en conclut que $\theta^s_{k,j}$ converge bien vers L^s_k quand $j \to +\infty$.

(e) *décroissance à l'infini des* L_k^s : De l'estimation (13) on tire que L_k^s décroît rapidement à l'infini. Plus précisément si $|x_k^{-1}.x| \geq \alpha R$, on a :

$$L_k^s(x) = \sum_{j \geq \alpha} (\theta_{k,j+1}^s - \theta_{k,j}^s)(x) \quad \text{et donc}$$

$$|L_k^s(x)| \leq \sum_{j \geq \alpha} \left\| \theta_{k,j+1}^s - \theta_{k,j}^s \right\|_\infty \leq C_s \sum_{j \geq \alpha} \left\| \theta_{k,j+1}^s - \theta_{k,j}^s \right\|_{H^s}$$

(puisque $s > \frac{1}{2}Q$). D'où pour $\alpha R \leq |x_k^{-1}.x| \leq (\alpha + 1)R$:

$$|L_k^s(x)| \leq C\rho^\alpha \leq C' e^{-\log(1/\rho)|x_k^{-1} x|}. \tag{14}$$

Le même raisonnement appliqué aux dérivées de L_k^s donnerait les mêmes estimations pourvu qu'on puisse utiliser les informations sur la taille de $\|\theta_{k,j+1}^s - \theta_{k,j}^s\|_{H^s}$, d'où des résultats de décroissance pour les dérivées d'ordre $< s - \frac{1}{2}Q$. Or nous voulons des informations sur bien plus de dérivées (d'ordre $< 2s - Q$). Pour cela nous allons revenir à la définition de L_k^s et calculer $J^s L_k^s$. On sait que $J^s L_k^s = \sum_p a_k^s(p)\delta(x_p^{-1}.x)$ et on a en particulier $a_k^s(p) = \langle L_k^s \mid J^s \varphi_p \rangle$ et en appliquant (14) :

$$|a_k^s(p)| \leq C \exp(-\beta |x_k^{-1}.x_p|) \tag{15}$$

en posant $\beta = \log(1/\rho)$. Nous avons donc obtenu :

THÉORÈME 4 Bis. — *Lorsque s est entier, la fonction L_k^s est à décroissance rapide à l'infini ainsi que ses dérivées d'ordre (homogène) $< s - \frac{1}{2}Q$. Plus précisément on a :*

Pour $|\alpha| < s - \frac{1}{2}Q$, $|X^\alpha L_k^s(x)| \leq C \exp(-\rho |x_k^{-1}.x|)$
et de plus on a $J^s L_k^s = \sum_{p \in K} a_k^s(p)\delta(x_k^{-1}.x)$ avec :

$$|a_k^s(p)| \leq C e^{-\rho |x_k^{-1}.x_p|}$$

où C et $\rho > 0$ ne dépendent pas de k.

Nous verrons dans la section 4 comment déduire du THÉORÈME 4 bis le THÉORÈME 4 sur la décroissance des dérivées d'ordre $< 2s - Q$.

4. Construction de la base d'ondelettes

On peut maintenant démontrer les THÉORÈMES 1 et 2. Pour cela on utilise l'analyse multi-échelles basée sur les espaces V_j de splines suivants : on fixe un réel $s > \frac{1}{2}Q$ et V_j est l'espace $V_j = V^s(\delta_{2^{-j}}Z)$ des splines à nœuds dans $\delta_{2^{-j}}Z$.

Commençons par vérifier que $\bigcup_j V_j$ est dense dans L^2 et que $\bigcap_j V_j = \{0\}$: en effet si $f \in \bigcap_j V_j$ alors $J^s f$ doit être une somme de masses de Dirac aux points de $\bigcap_j \delta_{2^{-j}}Z = \{0\}$ or f doit appartenir à L^2 et $\delta_0 \notin J^s L^2$ de sorte que $f = 0$; de même si $f \in (\bigcup_j V_j)^\perp = \bigcap_j V_j^\perp$ alors f doit être de la forme $f = J^s h$ où $h \in H^s$ doit être nulle aux points de $\bigcup_j \delta_{2^{-j}}Z$ qui est dense dans N de sorte que $h = 0$ et donc $f = 0$.

On note W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} et on a donc $L^2 = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$ de sorte que l'on doit construire une base de W_j. Le problème à l'échelle 2^j se déduit de celui à l'échelle 1 par dilatation et l'on se borne donc à étudier une base de W_0.

Si $f \in W_0$ on dispose de deux renseignements sur f :

(i) f est un spline à nœuds dans $\delta_{1/2}Z$

(ii) f doit être de la forme $J^{s/2}h$ avec h nulle aux points de Z;

on en conclut que :

$$f(x) = \sum_{z\in\delta_{1/2}Z} h(z) J^{s/2} L_z^s(x) = \sum_{z\in\delta_{1/2}Z, z\notin Z} h(z) J^{s/2} L_z^s(x)$$

(où les L_z^s sont les splines d'interpolation pour le problème à nœuds dans $\delta_{1/2}Z$) et donc que $J^{s/2}L_z^s$, $z \in \delta_{1/2}Z - Z$, est une base de W_0 : comme h est nulle aux points de Z on sait que sa norme H^s est équivalente à la norme L^2 de $J^{s/2}h = f$ et comme h est un spline d'interpolation à nœuds dans $\delta_{1/2}Z$ on sait que sa norme H^s est équivalente à la norme ℓ^2 de $(h(z))$ de sorte que, en notant $T = \delta_{1/2}Z - Z$, les normes suivantes sont équivalentes :

$$\Big\|\sum_{z\in T} \alpha_z J^{s/2} L_z^s\Big\|_2 \quad \text{et} \quad \Big\{\sum_{z\in T} |\alpha_z^2|\Big\}^{1/2}.$$

Jusqu'ici le raisonnement est valable quelque soit s réel $> \frac{1}{2}Q$ et nous avons obtenu une base inconditionnelle de W_0.

Supposons maintenant s *entier pair* $> Q$ $(s = 2M)$. En appliquant le THÉORÈME 4, nous observons que la base $J^{s/2}L_z^s$ est une base de fonctions bien localisées en espace et en fréquence puisque nous savons que les dérivées d'ordre $< 2s - Q$ de L_z^s (et donc d'ordre $< s - Q$ de $J^{s/2}L_z^s$) sont à décroissance rapide à l'infini.

Le problème est maintenant d'orthonormaliser cette base tout en conservant cette double localisation. Le procédé d'orthonormalisation est décrit par le THÉORÈME 5 de la section suivante : on calcule la matrice de Gram $G = (\langle J^{s/2}L_z^s \mid J^{s/2}L_\zeta^s\rangle)_{z\in T,\zeta\in T}$ des $(J^{s/2}L_z^s)$ et on forme $G^{-1/2} = (\mu_{z,\zeta})_{z\in T,\zeta\in T}$. Alors, du contrôle de $|\langle J^{s/2}L_z^s \mid J^{s/2}L_\zeta^s\rangle|$ en $C\exp(-\rho|z^{-1}.\zeta|)$ on concluera que $|\mu_{z,\zeta}|$ se contrôle en $C\exp(-\beta|z^{-1}.\zeta|)$ et l'on en déduira que

$$\psi_z^s = \sum_{\zeta\in T} \mu_{z,\zeta} J^{s/2} L_\zeta^s$$

est une base orthonormée de W_0 qui vérifie bien les estimations (2) et (3). Le THÉORÈME 1 est alors démontré.

L'estimation fondamentale est donc :

$$\big|\langle J^{s/2}L_z^s \mid J^{s/2}L_\zeta^s\rangle\big| \le C\exp\big(-\rho|z^{-1}.\zeta|\big) \tag{16}$$

qui se déduit du seul THÉORÈME 4 bis puisque

$$\langle J^{s/2}L_z^s \mid J^{s/2}L_\zeta^s\rangle = \langle J^s L_z^s \mid L_\zeta^s\rangle = a_z^s(\zeta).$$

Pour démontrer le THÉORÈME 2 il suffit de vérifier les propriétés suuivantes (qui sont évidentes) lorsque Z est un sous-groupe de N : Pour $z = \delta_{2^{-j}}\zeta$ avec $\zeta \in Z$ on a en notant $L_z^{s,j}$ le spline d'interpolation associé à Z et à nœuds dans $\delta_{2^{-j}}Z$: $L_z^{s,j}(x) = L_0^{s,0}(\zeta^{-1}.\delta_{2^j}x)$. Comme le procédé d'orthonormalisation respecte les symétries de la base de départ (puisqu'on utilise un calcul symbolique), et que les translations par un élément de Z opèrent sur T, on établit immédiatement les symétries décrites dans le THÉORÈME 2.

5. Un lemme de calcul matriciel

Nous considérons un ensemble d'indices K muni d'une fonction φ de $K\times K$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(H1) $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ et $\varphi(x,y) \ge 0$

(H2) Il existe une constante ω_0 telle que l'on ait l'inégalité "triangulaire" :

$$\varphi(x,y) \le \varphi(x,z) + \omega_0\varphi(z,y)$$

(H3) Les nombres S_E pour $E > 0$ sont tous finis, où :

$$S_E = \sup_{x\in K} \sum_{y\in K} e^{-E\varphi(x,y)}.$$

Nous considérons alors l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M = (m_{xy})_{x\in K,\, y\in K}$ des matrices indexées par K qui vérifient la propriété suivante : il existe deux constantes C et $E > 0$ (dépendant de M mais pas de x ni de y) telle que :

(H4) $|m_{xy}| \leq Ce^{-E\varphi(x,y)}$.

D'après l'hypothèse (H3) les éléments de $\mathcal{M}$ sont toutes continues sur ℓ^1 et sur c_0. De plus par (H3) et (H2) les éléments de $\mathcal{M}$ forment une algèbre de matrices; cela revient à montrer que si s_E désigne la matrice $s_E = (e^{-E\varphi(x,y)})_{x\in K, y\in K}$ alors la matrice $s_E s_D$ est encore dans $\mathcal{M}$. D'où le LEMME :

LEMME. — *Si* $0 < E < D/\omega_0$ *alors la matrice* $s_E s_D = (\sigma_{xy})$ *vérifie*

$$|\sigma_{xy}| \leq S_F e^{-E\varphi(x,y)} \quad \text{avec } F = D - E\omega_0. \tag{17}$$

(Si $E \geq D/\omega_0$ on majore $s_E(x,y)$ par $s_G(x,y)$ où G est choisi de manière à ce que $G < D/\omega_0$. On voit donc bien que $\mathcal{M}$ est une algèbre.)

La démonstration du lemme est aisée : il s'agit en effet de majorer $\sigma_{xy} = \sum_{z\in K} e^{-E\varphi(x,z)} e^{-D\varphi(z,y)}$. Pour cela il faut minorer $\varphi(x,z)$ en utilisant (H2) : $\varphi(x,y) - \varphi(z,y)\omega_0 \leq \varphi(x,z)$, ce qui donne immédiatement (17).

COROLLAIRE. — *La matrice* $s_D^n (n \in \mathbb{N})$ *vérifie que son terme général* $\sigma_{xy}^{(n)}$ *se majore par :*

$$|\sigma_{xy}^{(n)}| \leq (S_F)^{n-1} e^{-E\varphi(x,y)} \tag{18}$$

quel que soit E *tel que* $0 < E < D/\omega_0$ *(en posant* $F = D - \omega_0 E$*).*

Nous pouvons maintenant montrer le résultat essentiel de ce paragraphe : l'algèbre $\mathcal{M}$ est stable par passage à l'inverse dans $L(\ell^2, \ell^2)$.

THÉORÈME 5. — (a) *Soit* M *une matrice* $M = (m_{km})_{k\in K, m\in K}$ *sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :*

(i) *M est un isomorphisme de $\ell^2(K)$ et l'on a pour tout $(\lambda_k) \in \ell^2$*

$$A\|(\lambda_k)\|_{\ell^2} \leq \|M(\lambda_k)\|_{\ell^2} \leq B\|(\lambda_k)\|_{\ell^2} \quad (\textit{où } 0 < A \leq B) \tag{19}$$

(ii) *Les coefficients de* M *vérifient l'estimation suivante :*

$$|m_{km}| \leq Ce^{-D\varphi(k,m)} \quad (\textit{avec } C \geq 0 \textit{ et } D > 0). \tag{20}$$

Alors la matrice $M^{-1} = (p_{km})_{k\in K, m\in K}$ *vérifie pour des constantes* C_1 *et* $D_1 > 0$ *ne dépendant que de* A*,* B*,* C *et* D *:*

$$|p_{km}| \leq C_1 e^{-D_1\varphi(k,m)}. \tag{21}$$

(b) *On suppose plus précisément que de plus la matrice M est accrétive :*

$$A\|\lambda_k\|_{\ell^2}^2 \leq \Re e\langle M(\lambda_k) \mid (\lambda_k)\rangle \tag{22}$$

alors la matrice $M^{-1/2} = (q_{km})_{k\in K, m\in K}$ (qui est la seule matrice accrétive telle que $M^{-1/2} \times M^{-1/2} = M^{-1}$) vérifie :

$$|q_{km}| \leq C_2 e^{-D_2\varphi(k,m)}. \tag{23}$$

pour des constantes C_2 et $D_2 > 0$ ne dépendant que de A, B, C et D.

Démonstration. — Démontrons (21). On peut supposer que M est auto-adjointe positive; en effet on a $M^{-1} = M^*(MM^*)^{-1}$ et nous avons vu que le produit de deux matrices de $\mathcal{M}$ est encore une matrice de $\mathcal{M}$.

On suppose donc M auto-adjointe positive. Le spectre de M est alors porté par l'intervalle $[A, B]$ et l'on écrit $M = B\ (\mathrm{Id} - R)$. Le spectre de R est porté par $[0, 1 - A/B]$ et en posant $\rho = 1 - A/B$ on a $\|R\|_{op} \leq \rho < 1$; on écrit alors $M^{-1} = 1/B \sum_{p\in\mathbb{N}} R^p$ et donc si $R^p = (r_{km}^{(p)})_{k\in K,\, m\in K}$ $p_{km} = 1/B \sum_{p\in\mathbb{N}} r_{km}^{(p)}$. Or nous pouvons majorer $r_{km}^{(p)}$ de deux manières différentes : $|r_{km}^{(p)}| \leq \|R^p\|_{op} \leq \rho^p$ d'une part et d'autre part en choisissant E tel que $0 < E < D/\omega_0$ et posant $F = D - E\omega_0$ on a, d'après le COROLLAIRE ci-dessus, en partant de $|r^{(l)}| \leq C_0 s_D$, $|r^{(p)}| \leq (C_0)^p s_D^p \leq C_0(C_0 S_F)^{p-1} s_E$ d'où :

$$\begin{aligned} |p_{km}| \leq \sum_{p=0}^{p_0} \frac{1}{B}(C_0 S_F)^p e^{-E\varphi(k,m)} \\ + \sum_{p_0+1}^{+\infty} \frac{1}{B}\rho^p \leq C_3\big(C_4^{p_0} e^{-E\varphi(k,m)} + \rho^{p_0}\big) \end{aligned} \tag{24}$$

d'où en choisissant p_0 de la forme $p_0 = \varepsilon\varphi(k,m)$ avec $0 < \varepsilon \log(C_4) \leq \frac{1}{2}E$ on obtient l'estimation voulue avec $D_1 = \inf(\frac{1}{2}E, -\varepsilon \log \rho)$. $\square$

Démontrons maintenant (23) avec l'hypothèse M accrétive. Alors $M^{-1/2}$ se calcule par la formule :

$$M^{-1/2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \big(\mathrm{Id}\ + t^2 M\big)^{-1} dt. \tag{25}$$

Or nous savons estimer la taille des coefficients de $M_t = (\mathrm{Id}\ + t^2 M)^{-1}$ grâce au point (i) de la PROPOSITION. En effet on a :

(i) $(1 + t^2 A)\|(\lambda_k)\|_{\ell 2} \leq \|M_t(\lambda_k)\|_{\ell 2} \leq (1 + t^2 B)\|(\lambda_k)\|_{\ell 2}$

(ii) les coefficients m^t_{km} de M_t vérifient $|m^t_{km}| \leq (1+t^2C)e^{-D\varphi(k,m)}$ de sorte que la matrice $M_t^{-1} = (p^t_{km})_{k\in K,\, m\in K}$ vérifie pour des constantes C_3 et $D_3 > 0$ ne dépendant que de A, B, C et D : $|p^t_{km}| \leq C_3(1+t^2B)^{-1}e^{-D_3\varphi(k,m)}$. Comme $q_{km} = 2/\pi \int p^t_{km}dt$ on obtient :

$$|q_{km}| \leq \frac{2C_3}{\pi}\int \frac{e^{-D_3\varphi(k,m)}dt}{(1+t^2B)} \leq C_3\frac{e^{-D_3\varphi(k,m)}}{\sqrt{B}}. \qquad \square$$

Exemple. — Nous supposons que K est un espace quasi-métrique avec une quasi-distance $d(x,y)$ qui vérifie $|d(x,y)-d(x,z)| \leq K_0 d(z,y)$ et que de plus on a pour un exposant $Q > 0$:

$$\sup_{x\in K}\sup_{r>0} r^{-Q}\ \mathrm{Card}\{y \in K \mid y \neq x \text{ et } d(x,y) < r\} < +\infty. \tag{26}$$

Alors K vérifie les hypothèses (H1) (H2) et (H3) pour la fonction $\varphi = d(x,y)$.

Nous appliquons ce résultat ici au groupe N dont la quasi-distance est lipschitzienne et au sous-ensemble $T = \delta_{1/2}Z - Z$ qui vérifie bien l'hypothèse (26).

6. Dernières estimations

Il s'agit de démontrer le THÉORÈME 4 à partir du THÉORÈME 4 bis. Pour cela nous allons utiliser une base d'ondelettes,... ce qui peut sembler contradictoire puisque la base que nous avons construite à la section 4 s'appuyait sur le THÉORÈME 4.

Nous allons donc d'abord construire une base d'ondelettes qui s'appuie sur le THÉORÈME 4 bis, ce qui nous donnera le THÉORÈME 1 bis ci-dessous, puis utiliser cette base d'ondelettes pour démontrer le THÉORÈME 4. De là nous obtiendrons la base d'ondelettes du THÉORÈME 1 (qui sera évidemment meilleure que celle du THÉORÈME 1 bis).

On considère un entier σ *pair* > 0 et, comme dans la section 4, les espaces $V_j = V^\sigma(\delta_{2^{-j}}Z)$ et $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. On cherche à construire une base de W_0 constituée de fonctions localisées en espace (la localisation en fréquence provenant de l'appartenance à W_0). On note L^σ_z, $z \in \delta_{1/2}Z$, les splines d'interpolation $H^{\sigma/2}$ à nœuds dans $\delta_{1/2}Z$ et Λ^σ_z, $z \in Z$, ceux à nœuds dans Z.

Les L^σ_z forment une base inconditionnelle de V_1 d'après le THÉORÈME 3; mais il en va de même pour la famille $(L^\sigma_z)_{z\in T} \cup (\Lambda^\sigma_z)_{z\in Z}$ (où $T = \delta_{1/2}Z - Z$) : en effet les formules de changement de base sont immédiates puisque $\Lambda^\sigma_z = L^\sigma_z + \sum_{\zeta\in T}\Lambda^\sigma_z(\zeta)L^\sigma_\zeta$. On en conclut que si P désigne le projecteur orthogonal de L^2 sur V_0, alors les fonctions $N_z^\sigma = (\mathrm{Id} - P)L_z^\sigma$, $z \in T$, forment une base inconditionnelle de W_0.

Par le THÉORÈME 4 bis nous contrôlons la taille des fonctions L_z^σ et de leurs dérivées d'ordre (homogène) $< \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}Q$. Nous allons vérifier, grâce au THÉORÈME 5, que ce contrôle se transmet aux fonctions N_z^σ puis que l'on peut orthonormaliser les fonctions N_z^σ en conservant ce contrôle de taille. Pour cela on calcule P par le procédé suivant : on forme la matrice de Gram des Λ_ζ^σ $G = (\langle \Lambda_\zeta^\sigma \mid \Lambda_\tau^\sigma \rangle)_{\zeta \in Z,\, \tau \in Z}$ qu'on inverse en $G^{-1} = (\lambda_{\zeta,\tau})_{\zeta \in Z, \tau \in Z}$ et on a alors

$$N_z^\sigma = L_z^\sigma - \sum_{\zeta \in Z} \sum_{\tau \in Z} \lambda_{\zeta,\tau} \langle L_z^\sigma \mid \Lambda_\zeta^\sigma \rangle \Lambda_\tau^\sigma \, ;$$

le contrôle de taille des L_z^σ et des Λ_ζ^σ par le THÉORÈME 4 bis et celui des $|\lambda_{\zeta,\tau}|$ en $C\exp(-\rho|\zeta^{-1}.\tau|)$ par le THÉORÈME 5 permet alors de conclure qu'on a :

$$\text{(27)} \qquad \text{Pour } |\alpha| < \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}Q \quad |X^\alpha N_z^\alpha(x)| \le C\exp(-\beta \mid z^{-1}.x|)$$

pour un β indépendant de z; de même on orthonormalise les N_z^σ en formant la matrice $(\langle N_z^\sigma \mid N_\zeta^\sigma \rangle)^{-1/2} = (\mu_{z,\zeta})_{z \in T, \zeta \in T}$ et l'on contrôle la taille des $\mu_{z,\zeta}$ à l'aide de (27) et du THÉORÈME 5; on dispose alors de la base hilbertienne de $W_0 (\nu_z^\sigma)_{z \in T}$ donnée par : $\nu_z^\sigma = \sum_{\zeta \in T} \mu_{z,\zeta} N_\zeta^\sigma$ et l'on contrôle ν_z^σ et ses dérivées d'ordre $< \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}Q$ en $\exp(-\beta'|z^{-1}.x|)$.

On a par ailleurs une autre base de W_0 qui est la base des $J^{\sigma/2}M_z^\sigma$, $z \in T$, où les M_z^σ sont les splines d'interpolation H^σ à nœuds dans $\delta_{1/2}Z$. On ne contrôle (pour le moment) les dérivées de M_z^σ que pour des ordres $< \sigma - \frac{1}{2}Q$ de sorte qu'on ne sait rien sur la tailles de $J^{\sigma/2}M_z^\sigma$.

Néanmoins on a vu que l'on savait contrôler la taille des coefficients $|\langle J^{\sigma/2}M_z^\sigma \mid J^{\sigma/2}M_\zeta^\sigma \rangle| = |\langle J^\sigma M_z^\sigma \mid M_\zeta^\sigma \rangle|$ d'après le THÉORÈME 4 bis (*cf.* (16)) ce qui nous permet de construire la matrice de changement de base des ν_z^σ : on note $(\langle J^{\sigma/2}M_\zeta^\sigma \mid J^{\sigma/2}M_\tau^\sigma \rangle|)^{-1} = (\nu_{\zeta,\tau})_{\zeta \in T,\, \tau \in T}$ et on a alors

$$\nu_z^\sigma = \sum_{\zeta \in T} \sum_{\tau \in T} \nu_{\zeta,\tau} \langle \nu_z^\sigma \mid J^{\sigma/2}M_\zeta^\sigma \rangle J^{\sigma/2}M_\tau^\sigma.$$

Par le THÉORÈME 5 et (16) on contrôle la taille de $\nu_{\zeta,\tau}$ en

$$|\nu_{\zeta,\tau}| \le Ce^{-\rho|\zeta^{-1}\tau|} \, ;$$

de plus par le THÉORÈME 4 bis on contrôle $J^{\sigma/2}L_z^\sigma$ et $J^{\sigma/2}\Lambda_z^\sigma$ d'où $J^{\sigma/2}N_z^\sigma$ et enfin $J^{\sigma/2}\nu_z^\sigma$:

$$J^{\sigma/2}\nu_z^\sigma(x) = \sum_{\zeta \in \delta_{1/2}Z} A_z^\sigma(\zeta)\delta(\zeta^{-1}.z) \quad \text{avec } |A_z^\sigma(\zeta)| \le C\exp(-\rho|z^{-1}.\zeta|)$$

d'où : $|\langle \nu_z^\sigma \mid J^{\sigma/2} M_\zeta^\sigma \rangle| = |A_z^\sigma(\zeta)| \leq C \exp(-\rho|z^{-1}.\zeta|)$ et enfin :

$$\nu_z^\sigma = \sum_{\zeta \in T} B_z^\sigma(\zeta) J^{\sigma/2} M_\zeta^\sigma \quad \text{avec } |B_z^\sigma(\zeta)| \leq C e^{-\beta|z^{-1}.\zeta|}.$$

On a donc établi :

THÉORÈME 1 bis.

(i) *Il existe une base* $X_{j,z}^\sigma$, $z \in \delta_{2^{-j}} Z$, *de* V_j (*obtenue par orthonormalisation des splines d'interpolations* $L_{j,z}^\sigma$ *à nœuds dans* $\delta_{2^{-j}} Z$) *qui vérifie pour* $0 \leq |\alpha| < \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}Q$:

$$\left|X^\alpha X_{j,z}^\alpha(x)\right| \leq C\, 2^{j(\frac{1}{2}Q+|\alpha|)} \exp(-\rho 2^j |z^{-1}.x|).$$

(ii) *Il existe une base hilbertienne des* $W_j(\nu_{j,z}^\sigma)$, $z \in \delta_{2^{-j-1}} Z - \delta_{2^{-j}} Z$, *vérifiant pour* $0 \leq |\alpha| < \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}Q$:

$$\left|X^\alpha \nu_{j,z}^\alpha(x)\right| \leq C\, 2^{j(\frac{1}{2}Q+|\alpha|)} \exp(-\rho 2^j |z^{-1}.x|)$$

et de plus, en notant $M_{j,z}^\sigma$ *le spline d'interpolation* H^σ *à nœuds dans* $\delta_{2^{-j-1}} Z$,

$$\nu_{j,z}^\sigma = \sum_{\substack{\zeta \in \delta_{2^{-j-1}} Z \\ \zeta \notin \delta_{2^{-j}} Z}} B_{j,z}^\sigma(\zeta) J^{\sigma/2} M_{j,\zeta}^\sigma$$

avec $|B_z^\sigma(\zeta)| \leq C\, 2^{j(\frac{1}{2}Q-\sigma)} \exp(-\beta 2^j |z^{-1}.\zeta|)$.

A l'aide de ce THÉOREME, on établit maintenant le THÉOREME 4. En effet considérons le spline L_k^s à nœuds aux points $(x_p)_{p\in K}$ dont nous savons par le THÉOREME 4 bis contrôler la taille ainsi que celle de $J^s L_k^s$.

On écrit simplement :

$$L_k^s = \sum_{z\in Z} \langle L_k^s \mid X_{0,z}^\sigma \rangle X_{0,z}^\sigma + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{z \in \delta_{2^{-j-1}} Z \\ z \notin \delta_{2^{-j}} Z}} \langle L_k^s \mid \nu_{j,z}^\sigma \rangle \nu_{j,z}^\sigma$$

or on contrôle les dérivées des $X_{0,z}^\sigma$ et des $\nu_{j,z}^\sigma$ jusqu'à l'ordre $\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}Q$ (et on va bien sûr choisir σ plus grand que $4s - Q$) ; de plus on contrôle les produits scalaires de L_k^s avec $X_{0,z}^\sigma$ et $\nu_{j,z}^\sigma$ grâce aux THÉORÈMES 4 bis et 1 bis :

$$\left|\langle L_k^s \mid X_{0,z}^\sigma \rangle\right| \leq C \exp(-\tau |x_k^{-1}.z|)$$

$$\langle L_k^s \mid \nu_{j,z}^\sigma \rangle = \sum_{\substack{\zeta \in \delta_{2^{-j-1}} Z \\ \zeta \notin \delta_{2^{-j}} Z}} B_{j,z}^\sigma(\zeta) \langle J^s L_k^s \mid J^{\sigma/2-s} M_{j,\zeta}^\sigma \rangle$$

d'où $|\langle L_k^s \mid \nu_{j,z}^\sigma\rangle| \leq C\, 2^{j(\frac{1}{2}Q-2s)} \exp(-\tau|x_k^{-1}z|)$ (puisque $\sigma - 2s < \sigma - \frac{1}{2}Q$ et qu'on contrôle donc $J^{\sigma/2-s}M_{j,\zeta}^\sigma$) et donc :

$$\left|X^\alpha L_k^s(x)\right| \leq C\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{j(\frac{1}{2}Q-2s)}2^{j(\frac{1}{2}Q-|\alpha|)}\Big)e^{-\theta|x_k^{-1}.x|}$$

d'où le contrôle des dérivées d'ordre α avec $|\alpha| < 2s - Q$. Le THÉORÈME 4 est donc enfin démontré.

7. Exemples d'applications

Nous allons décrire brièvement deux exemples d'applications. Comme dans le cas abélien, les bases d'ondelettes sont adaptées à la théorie des opérateurs et des espaces où interviennent les notions de dilatation et de translation : c'est en particulier le cas des opérateurs d'intégrales singulières et des espaces de Besov.

C'est-à-dire que notre base permet l'étude des opérateurs de KNAPP et STEIN [K–St] qui sont presque diagonaux dans cette base : si T est un opérateur de convolution

$$Tf = \int k(y^{-1}x)f(y)\,dy$$

continu sur L^2 dont le noyau k vérifie les estimations

(i) $|k(x)| \leq C|x|^{-Q}$

(ii) pour $i = 1, \ldots, p$ $|X_i k(x)| \leq C|x|^{-Q-1}$

alors les coefficients de la matrice de T dans la base $(\psi_z)_{z\in DZ^*}\tau_{z,w}$ vérifient (pour $C \geq 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ indépendants de z et de w) :

$$|\tau_{z,w}| \leq C\, 2^{j(z)\frac{1}{2}Q}2^{j(w)\frac{1}{2}Q}\inf\big(2^{-j(z)}, 2^{-j(w)}\big)^\alpha \big(2^{j(z)}+2^{j(w)}+|z^{-1}w|\big)^{-Q-\alpha}$$

(*cf.* [L5] pour le cas abélien et [L1] pour la “théorie des molécules” sur les groupes de Lie, l'inégalité ci-dessus exprimant que T est un opérateur qui conserve les molécules).

De même de l'opérance des opérateurs d'intégrales singulières sur les espaces de Besov (étudiée dans [L2]) on déduit de la même manière que pour $\mathbb{R}^n$ que les ψ_z forment une base inconditionnelle des espaces de Besov homogènes $B_{p,q}^s(N)$ pour $|s| < 2M - \frac{1}{2}Q$. (Voir pour les espaces de Besov [Sa], pour les opérateurs d'intégrales singulières [L2] et pour les propriétés de base inconditionnelle [L–Me] et [Me1]).

BIBLIOGRAPHIE

[Da] Daubechies (I.). — Communication personnelle.

[De] Demko (S.). — Inverses of band-matrices and local convergence of spline projections, *SIAM J. Numer. Anal.*, t. **14**, 1977, p. 616–619.

[Fo] Folland (G.B.). — Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, *Ark. Mat.*, t. **13**, 1975, p. 161–207.

[K–St] Knapp (A.W.) and Stein (E.M.). — Intertwining operators for semi-simple groups, *Ann. of Math.*, t. **93**, 1971, p. 489–578.

[L1] Lemarié (P.G.). — *Algèbres d'opérateurs et semi-groupes de Poisson sur un espace de nature homogène.* — Publications Math. d'Orsay, 1984.

[L2] Lemarié (P.G.). — Continuité des opérateurs définis par des intégrales singulières, *Ann. Inst. Fourier*, t. **35, 4**, 1985, p. 175–187.

[L3] Lemarié (P.G.). — Ondelettes à localisation exponentielle, à paraître au J. Math. Pures Appl.

[L4] Lemarié (P.G.). — Théorie L^2 des surfaces-splines, Preprint, Ecole Normale Supérieure.

[L5] Lemarié (P.G.). — Isomorphie des algèbres A_b, Preprint, 1987.

[L–Ma–Me] Lemarié (P.G.), Mallat (S.) et Meyer (Y.). — Analyse multi-échelles, ondelettes et fonctions splines, Preprint, Université Paris IX-Dauphine.

[L–Me] Lemarié (P.G.) et Meyer (Y.). — Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana*, t. **2, 1**, 1986, p. 1–17.

[Me1] Meyer (Y.). — Exposé au Séminaire Bourbaki, février 1986.

[Me2] Meyer (Y.). — Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées, Preprint Université Paris IX-Dauphine.

[Sa] Saka (K.). — Besov spaces and Sobolev spaces on a nilpotent Lie group, *Tôhoku Math. J.*, t. **31**, 1979, p. 383–437.