BULLETIN DE LA S. M. F.

ABOUBEKER ZAHID

Les endomorphismes k-finis des modules de Whittaker

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 4 (1989), p. 451-477
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_4_451_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 451–477.

LES ENDOMORPHISMES $\mathfrak{k}$-FINIS DES MODULES DE WHITTAKER

PAR

ABOUBEKER ZAHID (*)

RÉSUMÉ. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, Wh un module de Whittaker simple. On donne une décomposition de l'algèbre des endomorphismes $\mathfrak{k}$-finis, de Wh dans Wh, en somme directe de modules de Harish-Chandra simples, suivant le groupe $P(R)/Q(R)$. Ceci étant fait, pour un choix très particulier du caractère central du module de Whittaker, on peut par un principe de translation par les éléments de $P(R)$, récupérer le résultat pour les autres caractères. On obtient en particulier une famille de suralgèbres $\mathfrak{k}$-finis de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Ces suralgèbres semblent très intéressantes à étudier; en effet on obtient dans le cas de $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, soit l'algèbre de Weyl A_1, soit en translatant, l'algèbre des opérateurs différentiels sur une courbe singulière. Dans le cas de $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_3(\mathbb{C})$, on obtient le quotient de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie exceptionnelle de dimension 14, par un idéal primitif complètement premier.

ABSTRACT. — Let $\mathfrak{g}$ be a complex semisimple Lie algebra, and let Wh a simple Whittaker module. We give a decomposition of the algebra of $\mathfrak{k}$-finite vectors of $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Wh})$, as direct sum of Harish-chandra submodules. We then obtain a family of over rings of certain primitives quotients of enveloping algebras. In the cases $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ and $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_3(\mathbb{C})$ the structure of this rings is uniquely determined by their structure of $\mathfrak{g}$-module.

Je ne veux pas manquer d'exprimer ici ma très grande reconnaissance à A. JOSEPH, qui a dirigé et encouragé mon travail avec beaucoup de patience et d'attention.

Je remercie aussi C. MŒGLIN pour les discussions utiles que j'ai eu avec elle.

Introduction

1.1. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soient R un système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $R^+ \subset R$ l'ensemble des racines positives, $B \subset R^+$ l'ensemble des racines

(*) Texte reçu le 9 janvier 1989, révisé le 12 mai 1989.
A. ZAHID, 1 boulevard Jourdan, 75690 Paris Cedex 14, France.

© Société mathématique de France

simples, ρ la demi-somme des racines positives, $S_\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}^*)$ la réflexion correspondante à la racine $\alpha \in R$ et W le groupe (de Weyl) engendré par les S_α, $\alpha \in B$.

Soit X_α l'élément de la base de Chevalley correspondant à la racine α et soient :

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in R^+} \mathbb{C}X_\alpha, \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in R^+} \mathbb{C}X_{-\alpha}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

On note $X \mapsto {}^tX$ l'antiautomorphisme de Chevalley défini par les conditions ${}^tX_\alpha = X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in R$.

1.2. — On note $Q(R) = ZR$ l'ensemble des poids radiciels de R, où $P(R)$ est l'ensemble des poids de R

$$P(R) = \left\{\lambda \in \mathfrak{h}^* : 2\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}, \ \forall \alpha \in R\right\}.$$

Pour tout $\alpha \in R$, on note $\check{\alpha} = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$. On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est *régulier* (resp. *dominant*) si $(\lambda,\alpha) \neq 0$ (resp. si $(\lambda,\check{\alpha}) \notin \{-1,-2,\cdots\}$) pour tout $\alpha \in R^+$. On note $P(R)^+$, l'ensemble des poids dominants de $P(R)$. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose $R_\lambda = \{\alpha \in R : 2(\alpha,\lambda)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}\}$. Si $B = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ désigne une base de R, on notera $\{\varpi_1,\ldots,\varpi_\ell\}$, la base formée par les poids fondamentaux correspondants. On a $Q(R) \subset P(R)$ et on considèrera $P(R)/Q(R)$ comme un groupe additif. Les représentants dans $P(R)$ des éléments non nuls de $P(R)/Q(R)$ seront toujours choisis parmi les ϖ_i tels que $1 \leq i \leq \ell$.

1.3. — Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soit $M(\lambda)$ le module de Verma de plus haut poids $\lambda - \rho$ et $L(\lambda)$ l'unique sous-quotient simple de $M(\lambda)$. On désigne par χ_λ le caractère central de $M(\lambda)$. Soit $\widehat{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie. L'application qui, à tout $\lambda \in P(R)^+$, associe la classe d'isomorphisme $[L(\lambda+\rho)]$ des $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie et de plus haut poids λ, est une bijection de $P(R)^+$ sur $\widehat{\mathfrak{g}}$. On note $E(\lambda)$ un représentant de $[L(\lambda+\rho)]$. Si V est un $\mathfrak{g}$-module, on notera par V_μ le sous-espace de poids μ de V.

1.4. — Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et soient $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Max}\, Z(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux maximaux de $Z(\mathfrak{g})$.

Soit $u \to \check{u}$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{g})$. Si M et N sont deux $\mathfrak{g}$-modules alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$ est un $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$-module sous l'action

$$\big((a \otimes b) \cdot x\big)(m) = ax(\check{b}m)$$

pour tous a et b dans $U(\mathfrak{g})$, x dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$ et m dans M.

On identifie $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ avec $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$. Soit $j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ défini par

$$j(X) = (X, X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

On pose $\mathfrak{k} = j(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{k}$ est alors isomorphe à $\mathfrak{g}$, et est donc semi-simple.

On définit le module des vecteurs $\mathfrak{k}$-finis de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$ par

$$L(M,N) = \{x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N) : \dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{k})x < \infty\}.$$

On vérifie facilement, que $L(M,N)$ est un $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$-sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$.

1.5. — Soit V un $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$-module et soit E un $\mathfrak{k}$-module simple de dimension finie. On peut considérer V comme un $\mathfrak{k}$-module et on désignera par $[V : E]_{\mathfrak{k}}$ la multiplicité de E dans une suite de Jordan-Hölder de V. Comme $\mathfrak{k}$ est semi-simple on a :

$$[V : E]_{\mathfrak{k}} = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(E, V).$$

On dit que V est un module de Harish-Chandra pour la paire $(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ si :

(i) $\dim_{\mathbb{C}}(Z(\mathfrak{g}) \otimes Z(\mathfrak{g}) / \mathrm{Ann}_{Z(\mathfrak{g}) \otimes Z(\mathfrak{g})} V) < \infty$;

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{k})v < \infty$, pour tout $v \in V$.

Puisque $\mathfrak{k}$ est semi-simple, ceci équivaut à dire que V est somme directe de $U(\mathfrak{k})$-sous-modules simples de dimensions finies de V et on impose :

(iii) $[V : E]_{\mathfrak{k}} < \infty$ pour tout $U(\mathfrak{k})$-module simple E.

On notera par $\mathcal{H}$, la catégorie des modules de Harish-Chandra. Les objets de $\mathcal{H}$ sont de longueur finie (*cf.* [1, 5.7]). Lorsque M et N sont deux $U(\mathfrak{g})$-modules de longueurs finies, alors $L(M,N)$ est un module de Harish-Chandra (*cf.* [1, 6.2]).

1.6. — On identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ grâce à l'isomorphisme j de 1.4, on a alors

$$\mathfrak{k}\widehat{\ } = \{E(\lambda) : \lambda \in P(R)^+\}.$$

D'autre part, on peut écrire $\mathfrak{k}\widehat{\ }$ comme réunion disjointe :

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}\widehat{\ } &= \bigcup_{\gamma \in P(R)/Q(R)} C_\gamma \\ &:= \bigcup_{\gamma \in P(R)/Q(R)} \{E(\lambda) : \lambda \in P(R)^+ \cap (\gamma + Q(R)\}. \end{aligned}$$

Pour chaque module de Harish-Chandra V et pour tout élément $\gamma \in P(R)/Q(R)$, on définit la composante V_γ de V comme étant la somme directe des $U(\mathfrak{k})$-sous-modules simples de dimensions finies, de type appartenant à C_γ. D'après (*cf.* [10, 3.7]) V_γ est un $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$-sous-module de V ; de plus il est clair que V_γ est un module de Harish-Chandra.

En particulier, si M et N sont deux $U(\mathfrak{g})$-modules simples, on a la décomposition :

$$L(M,N) = \bigoplus_{\gamma \in P(R)/Q(R)} L(M,N)_\gamma$$

en somme directe de $U(\mathfrak{g})$-sous-bimodules.

2. Modules de Whittaker

2.1. — Soit $\eta : \mathfrak{n}^+ \to \mathbb{C}$ un homomorphisme d'algèbres de Lie tel que $\eta(X_\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in B$. Cet homomorphisme se prolonge en un homomorphisme, noté encore η, de $U(\mathfrak{n}^+)$ dans $\mathbb{C}$. On note $\operatorname{Ker}\eta$ son noyau dans $U(\mathfrak{n}^+)$. Soit V un $U(\mathfrak{g})$-module. Un vecteur $w \in V$ est appelé *vecteur de Whittaker* si

$$X \cdot w = \eta(X)w, \quad \forall X \in \mathfrak{n}^+.$$

Un $U(\mathfrak{g})$-module V est appelé *module de Whittaker* s'il est engendré par un vecteur de Whittaker w. On a alors :

$$V = U(\mathfrak{g}) \cdot w.$$

Soit I_w l'annulateur de w dans $U(\mathfrak{g})$ on a :

$$V \simeq U(\mathfrak{g})/I_w.$$

D'autre part il est clair que :

$$U(\mathfrak{g}) \operatorname{Ann}_{Z(\mathfrak{g})} V + U(\mathfrak{g}) \operatorname{Ker}\eta \subset I_w.$$

D'après [11, 3.1], on a en fait égalité et tout module de Whittaker est alors déterminé, à isomorphisme près, par son annulateur dans $Z(\mathfrak{g})$, d'où une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de modules de Whittaker et l'ensemble des idéaux de $Z(\mathfrak{g})$ (*cf.* [11, 3.2]). De plus, si V est un module de Whittaker, il existe une bijection, entre les sous-modules de V, et les idéaux de $Z(\mathfrak{g})$ contenant $\operatorname{Ann}_{Z(\mathfrak{g})} V$ (*cf.* [11, 3.7]). Donc V est

un module de Whittaker simple si et seulement si $\mathrm{Ann}_{Z(\mathfrak{g})} V \in \mathrm{Max}\, Z(\mathfrak{g})$ (*cf.* [11, théorème 3.6.1]).

On désigne par Wh l'ensemble des classes d'isomorphismes des modules de Whittaker simples. Pour chaque $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soit $\widehat{\lambda}$ l'orbite de λ sous l'action de W. On considère :

$$V = U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,\mathrm{Ker}\,\chi_\lambda + U(\mathfrak{g})\,\mathrm{Ker}\,\eta,$$

muni de la représentation régulière gauche; il est clair que V est un module de Whittaker. D'autre part V est simple, puisque $\mathrm{Ker}\,\chi_\lambda$ est un idéal maximal de $Z(\mathfrak{g})$. On note alors $\mathrm{Wh}(\widehat{\lambda})$, la classe d'isomorphisme de V. L'application de $\mathfrak{h}^*/W$ dans Wh, qui à $\widehat{\lambda}$ associe $\mathrm{Wh}(\widehat{\lambda})$, est alors une bijection; en effet ceci résulte de ce qui précède et du fait que $\widehat{\lambda} \to \mathrm{Ann}_{Z(\mathfrak{g})}\mathrm{Wh}(\widehat{\lambda}) = \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda$ est une bijection de $\mathfrak{h}^*/W$ sur $\mathrm{Max}\, Z(\mathfrak{g})$ (*cf.* [4, 7.4.7, 7.4.8]).

2.2. — Soit E un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie n. On désigne par $\Omega(E)$, l'ensemble des poids de E. On a alors :

THÉORÈME (*cf.* [11, 4.6]). — *Le $\mathfrak{g}$-module $E \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\lambda})$ possède une suite de Jordan-Hölder de longueur n, avec des quotients simples isomorphes à $\mathrm{Wh}((\lambda+\nu)\widehat{\ })$, où $\nu \in \Omega(E)$.*

3. Quelques propriétés des racines d'une algèbre de Lie semi-simple

(Pour toutes les notations, concernant ce paragraphe, voir (*cf.* [2]).)

3.1. — Soit $\overline{H}$ un sous-groupe de $P(R)/Q(R)$, il existe un système de représentants noté H, tel que les éléments non nuls de $\overline{H}$ aient pour représentants des poids fondamentaux. Ce choix particulier sera toujours adopté par la suite. On définit alors, pour tout sous-groupe $\overline{H}$ de $P(R)/Q(R)$, l'élément μ_H de $\mathfrak{h}^*$ par :

$$\mu_H = \frac{1}{|H|} \sum_{\varpi \in H} \varpi.$$

PROPOSITION. — *Il existe un homomorphisme de groupes*

$$\phi : P(R)/Q(R) \longrightarrow W$$

vérifiant, pour tout sous-groupe $\overline{H}$ de $P(R)/Q(R)$, les propriétés suivantes :

(i) $\mu_H - \phi(\varpi)\mu_H = \varpi$ *pour tout* $\varpi \in H$;

(ii) $(\mu_H - W \cdot \mu_H) \cap Q(R) = \{0\}$;

(iii) $(\mu_H - W \cdot \mu_H) \cap P(R) = H$.

L'existence de ϕ, ainsi que le (i) et le (ii) de la PROPOSITION, vont se faire en se ramenant chaque fois à une algèbre de Lie simple, de type A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ et D_ℓ. Pour E_6 et E_7 on donnera une démonstration directe. Pour les autres types d'algèbres simples, le groupe $P(R)/Q(R)$ est trivial.

Montrons que (i) et (ii) entraînent (iii).

a) Supposons que $\overline{\Gamma} = P(R)/Q(R)$ n'a pour sous-groupes que $\{0\}$ et lui même. Soit $\mu = \mu_\Gamma$. Si $y \in W$ et $\mu - y\mu \in P(R)$. Alors

$$\mu - y\mu = \varpi + q \quad \text{avec } \varpi \in \Gamma \text{ et } q \in Q(R).$$

D'après (i), on a alors $\mu - y\mu = \mu - \phi(\varpi)\mu + q$. D'où $\phi(\varpi)^{-1}q = \mu - \phi(\varpi)^{-1}y\mu \in Q(R)$. On a donc d'après (ii) $q = 0$, d'où (iii).

b) Soit $\overline{H}$ un sous-groupe propre de $\overline{\Gamma} = P(R)/Q(R)$. On peut alors supposer R de type A_ℓ ou D_ℓ, et que $\check{\beta} = \beta$ pour tout $\beta \in R$.

Soit $\mu = \mu_H$, on a alors le lemme suivant qui est une simple vérification.

LEMME. — *Pour tout β dans R, on a :*

$$(\mu, \beta) \in \mathbb{Z} \iff (\mu, \beta) = 0.$$

Si $y \in W$ et $\mu - y\mu \in P(R)$. Alors

$$\mu - y\mu = \sum_{\varpi \in \Gamma} a_i \varpi_i, \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i.$$

Soit $\alpha_i \in B$ tel que $\varpi_i \notin H$. Alors

$$a_i = (\mu - y\mu, \alpha_i) = (\mu, \alpha_i) - (\mu, y^{-1}\alpha_i) = -(\mu, y^{-1}\alpha_i).$$

On a donc d'après le LEMME $a_i = 0$. D'où

$$\mu - y\mu = \sum_{\varpi \in H} a_i \varpi_i \in \varpi + Q(R) \quad \text{avec } \varpi \in H.$$

Le raisonnement du a) permet alors de conclure.

3.2. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type A_ℓ, où $\ell \geq 1$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Considérons dans $\mathbb{R}^{\ell+1}$, muni de sa base

canonique $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq \ell+1}$, l'hyperplan V formée des points dont la somme des coordonnées est nulle. On peut alors construire le système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dans V. Une base de R est alors :

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \; ; \; \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \; ; \; \cdots \; ; \; \alpha_\ell = \varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+1}.$$

On a alors :

$$Q(R) = \Big\{ x = \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i \varepsilon_i \in V : \quad x_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i = 0 \Big\}$$

$$P(R) \text{ est engendré par } Q(R) \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 - \frac{1}{\ell+1} \sum_{i=1}^{\ell+1} \varepsilon_i.$$

D'autre part, $P(R)/Q(R)$ est un groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}_{\ell+1}$ et engendré par l'image de ϖ_1. En effet, on a

$$i\varpi_1 \equiv \varpi_i \mod Q(R) \qquad \forall i : 1 \leq i \leq \ell.$$

Notant $\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\ell\}$, on a alors

$$\overline{\Gamma} = P(R)/Q(R).$$

Soit C la transformation de Coxeter :

$$C = S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \cdots S_{\alpha_\ell},$$

elle est d'ordre $\ell+1$ dans W et il est clair qu'on obtient un homomorphisme ϕ de $P(R)/Q(R)$ dans W en posant

$$\phi(\varpi) = C.$$

LEMME 1. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu = \mu_\Gamma = \frac{1}{|H|} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \frac{1}{\ell+1} \sum_{i=1}^{\ell} \varpi_i = \frac{1}{\ell+1} \rho.$$

On a

(i) $\mu - C^i \mu = \varpi_i$ *pour tout i tel que* $1 \leq i \leq \ell$ *;*

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

On a

$$\begin{aligned}(\ell+1)C\mu &= \{C\varpi_1 + C\varpi_2 + \cdots + C\varpi_\ell\}\\ &= \{\varpi_1 - \alpha_1 + \varpi_2 - (\alpha_1+\alpha_2) + \cdots\\ &\qquad\qquad + \varpi_\ell - (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\ell)\}\\ &= \Big\{(\varpi_1+\varpi_2+\cdots+\varpi_\ell)\\ &\qquad - \big(\ell\alpha_1 + (\ell-1)\alpha_2 + \cdots + (\ell-i+1)\alpha_i + \cdots + \alpha_\ell\big)\Big\}.\\ &= (\ell+1)(\mu - \varpi_1).\end{aligned}$$

D'où

$$\mu - C\mu = \varpi_1.$$

Supposons que $\mu - C^i\mu = \varpi_i$, alors :

$$\begin{aligned}\mu - C^{i+1}\mu &= \mu - C(C^i\mu) = \mu - C(\mu - \varpi_i)\\ &= \mu - C\mu + C\varpi_i = \varpi_1 + \varpi_i - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_i)\\ &= \varpi_1 + \varpi_i - (\varpi_1 + \varpi_i - \varpi_{i+1})\\ &= \varpi_{i+1}.\end{aligned}$$

Ceci montre (i). On a

$$\mu = \frac{1}{2(\ell+1)}\sum_{i=1}^{\ell+1}\big(\ell - 2(i-1)\big)\varepsilon_i.$$

Si $\omega \in W$, on pose $\mu - \omega\mu = \sum_{k=1}^{\ell+1} x_k\varepsilon_k$. On a alors :

$$\mu - \omega\mu \in Q(R) \iff x_k \in \mathbb{Z} \quad \forall k : 1 \le k \le \ell+1 \text{ et } \sum_{k=1}^{\ell+1} x_k = 0.$$

Comme W agit par permutations des ε_i, x_k est de la forme

$$\begin{aligned}x_k &= \frac{1}{2(\ell+1)}\Big\{\big(\ell - 2(k-1)\big) - \big(\ell - 2(\sigma(k)-1)\big)\Big\}\\ &= \frac{\sigma(k)-k}{\ell+1}\end{aligned}$$

où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, \ell+1\}$. Il est alors clair que

$$x_k \in \mathbb{Z} \iff x_k = 0.$$

Ceci montre (ii).

Soit maintenant $\overline{H}$ un sous groupe de $P(R)/Q(R)$ et supposons que

$$t = |\overline{H}| \qquad \text{avec} \quad t \cdot i = \ell + 1.$$

Le sous-groupe $\overline{H}$, qui est engendré par l'image de ϖ_i, est tel que

$$H = \{0, \varpi_i, \varpi_{2i}, \ldots, \varpi_{(t-1)i}\}.$$

Avec ces notations on a le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit μ_H l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu_H = \frac{1}{t} \sum_{\varpi \in H} \varpi = \frac{1}{t}(\varpi_i + \varpi_{2i} + \cdots + \varpi_{(t-1)i}).$$

On a

(i) $\mu_H - C^{k \cdot i}\mu_H = \varpi_{k \cdot i}$ *pour tout k tel que* $1 \leq k \leq t-1$;

(ii) $(\mu_H - W \cdot \mu_H) \cap Q(R) = \{0\}$.

D'après le LEMME 1 (i)

$$t\mu_H = \sum_{s=1}^{t-1} \varpi_{s \cdot i} = \sum_{s=1}^{t-1} (\mu - C^{s \cdot i}\mu).$$

D'où pour tout k $(1 \leq k \leq t-1)$:

$$\begin{aligned} t(\mu_H - C^{k \cdot i}\mu_H) &= \sum_{s=1}^{t-1} (\mu - C^{s \cdot i}\mu) - \sum_{s=1}^{t-1} (C^{k \cdot i}\mu - C^{(k+s)i}\mu) \\ &= \sum_{s=1}^{t-1} (\mu - C^{k \cdot i}\mu) + \sum_{s=1}^{t-1} (C^{(k+s)i}\mu - C^{s \cdot i}\mu) \\ &= (t-1)(\mu - C^{k \cdot i}\mu) + (\mu - C^{k \cdot i}\mu) \\ &= t(\mu - C^{k \cdot i}\mu) \\ &= t\varpi_{k \cdot i}. \end{aligned}$$

D'où (i). On a :

$$\mu_H = \frac{1}{2t} \sum_{r=1}^{t} \sum_{k=(r-1)i+1}^{r \cdot i} (t - 2r + 1)\varepsilon_k.$$

Si $w \in W$, on pose $\mu_H - w\mu_H = \sum_{k=1}^{\ell+1} x_k \varepsilon_k$. Comme W agit par permutations des ε_i, x_k est de la forme

$$x_k = \frac{1}{2t}\Big\{\big((t-2r+1)-(t-2\sigma(r)+1)\big)\Big\} = \frac{\sigma(r)-r}{t}$$

où σ est une permutation de $\{1,\dots,t\}$ et où $r \in \{1,\dots,t\}$. Il est clair que

$$x_k \in \mathbb{Z} \iff x_k = 0$$

d'où (ii).

3.3. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type B_ℓ, avec $\ell \geq 2$; $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. On peut construire le système de racines R dans $\mathbb{R}^\ell$, muni de sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq \ell}$. Une base $B = \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ de R est donnée par :

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots,\ \ \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell,\ \ \alpha_\ell = \varepsilon_\ell.$$

On a alors

$$Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varepsilon_i, \qquad P(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell}\varepsilon_i\Big).$$

Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, engendré par l'image de ϖ_ℓ. On note $\Gamma = \{0, \varpi_\ell\}$. Soit w_0 l'élément du groupe de Weyl, qui échange B en $-B$. On définit l'homomorphisme ϕ en posant $\phi(\varpi_\ell) = w_0$.

LEMME. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu = \mu_\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\varpi\in\Gamma}\varpi = \frac{1}{2}\varpi_\ell.$$

On a :

(i) $\mu - w_0\mu = \varpi_\ell$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

(i) est clair. D'autre part, comme W agit par permutations des ε_i et par changement de signe $\varepsilon_i \to (\pm)_i\varepsilon_i$, et que $\mu = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell}\varepsilon_i$, il est clair que pour tout $w \in W$

$$\mu - w\mu \in Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell}\mathbb{Z}\varepsilon_i \iff \mu - w\mu = 0.$$

D'où (ii).

3.4. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type C_ℓ, avec $\ell \geq 2$, $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On peut construire le système de racines R, dans $\mathbb{R}^\ell$ muni de sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq \ell}$. Une base de R est alors

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \ \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \ \alpha_\ell = 2\varepsilon_\ell.$$

Les poids fondamentaux correspondants sont donnés par :

$$\varpi_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i, \qquad \forall i : 1 \leq i \leq \ell,$$

et on obtient

$$Q(R) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \varepsilon_i : x_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \sum_{i=1}^{\ell} x_i \text{ pair} \right\};$$

$$P(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varepsilon_k.$$

Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, engendré par l'image de ϖ_1. On note $\Gamma = \{0, \varpi_1\}$ et on définit ϕ en posant

$$\phi(\varpi) = S_\beta,$$

où β est la plus grande racine de R. S_β laisse fixes les ε_i avec $i \neq 1$ et envoie ε_1 sur $-\varepsilon_1$.

LEMME. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu = \mu_H = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \frac{1}{2}\varpi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1.$$

Alors :

(i) $\mu - S_\beta \mu = \varpi_1$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

Preuve. — (i) est clair. D'autre part, comme W agit par permutations des ε_i avec changement de signe $\varepsilon_i \mapsto (\pm)_i \varepsilon_i$, et que $Q(R)$ est constitué de vecteurs à coordonnées entières dont la somme est paire, on a pour tout $w \in W$

$$\mu - w\mu \in Q(R) \iff \mu - w\mu = 0.$$

D'où (ii).

3.5. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type D_ℓ, avec $\ell \geq 3$, $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On peut construire le système de racines R, dans $\mathbb{R}^\ell$ muni de sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq \ell}$. Une base de R est donnée par

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots,\ \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell,\ \alpha_\ell = \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell.$$

Les poids fondamentaux correspondants sont donnés par :

$$\begin{aligned} \varpi_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i, && \forall i : 1 \leq i \leq \ell, \\ \varpi_{\ell-1} &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell-1} \varepsilon_k - \tfrac{1}{2}\varepsilon_\ell, && \varpi_\ell = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell-1} \varepsilon_k + \tfrac{1}{2}\varepsilon_\ell. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} Q(R) &= \Big\{ x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \varepsilon_i : \ x_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \sum_{i=1}^{\ell} x_i \text{ pair} \Big\}; \\ P(R) &= \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varepsilon_k + \mathbb{Z}\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell} \varepsilon_k\Big). \end{aligned}$$

D'autre part, le groupe de Weyl agit par permutations des ε_i, avec changement de signe $\varepsilon_i \to (\pm 1)_i \varepsilon_i$, vérifiant $\prod_i (\pm 1)_i = 1$. On pose, en désignant par S_i la réflexion S_{α_i} :

$$\begin{aligned} x_i &= S_{\ell-2} S_{\ell-3} \cdots S_{i+1} S_i, && \forall i : 1 \leq i \leq \ell - 2, \quad x_{\ell-1} = 1; \\ X_i^{i+1} &= S_\ell x_i S_{\ell-1} x_{i+1}, && \forall i : 1 \leq i \leq \ell - 2. \end{aligned}$$

L'élément x_i n'est autre que le cycle $(\varepsilon_{\ell-1}, \varepsilon_{\ell-2}, \ldots, \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i)$ et X_i^{i+1} est l'application définie par :

$$\begin{aligned} X_i^{i+1}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_k, && \forall k : 1 \leq k \leq i - 1; \\ X_i^{i+1}(\varepsilon_i) &= -\varepsilon_\ell, && X_i^{i+1}(\varepsilon_{i+1}) = -\varepsilon_{\ell-1}; \\ X_i^{i+1}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_{k-2} && \forall k : i + 2 \leq k \leq \ell. \end{aligned}$$

3.5.1. — Supposons dans cette partie que ℓ est impair. Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à Z_4, engendré par l'image de ϖ_ℓ. En effet

$$\varpi_1 \equiv 2\varpi_\ell\big(Q(R)\big) \quad \text{et} \quad \varpi_{\ell-1} \equiv 3\varpi_\ell\big(Q(R)\big).$$

On pose $\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_{\ell-1}, \varpi_\ell\}$. Soit z l'élément du groupe de Weyl W

$$z = X_1^2 X_3^4 \cdots X_{\ell-4}^{\ell-3} X_{\ell-2}^{\ell-1}.$$

On vérifie que $z(\varepsilon_1) = -\varepsilon_\ell$, $z(\varepsilon_\ell) = \varepsilon_1$, $z(\varepsilon_k) = -\varepsilon_{\ell-k+1}$ pour tout k satisfaisant $2 \leq k \leq \ell - 1$ et que z est d'ordre 4. On pose alors $\phi(\varpi_\ell) = z$.

LEMME 1. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu = \mu_H = \frac{1}{\Gamma} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \frac{1}{4}(\varpi_1 + \varpi_{\ell-1} + \varpi_\ell).$$

On a :

(i) $\mu - z\mu = \varpi_\ell$, $\mu - z^2\mu = \varpi_1$ *et* $\mu - z^3\mu = \varpi_{\ell-1}$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

On a $\mu = \frac{1}{4}(2\varepsilon_1 + \sigma)$ où $\sigma = \sum_{k=2}^{\ell-1} \varepsilon_k$. Comme $z(\varepsilon_1) = -\varepsilon_\ell, z(\varepsilon_\ell) = \varepsilon_1$ et $z(\sigma) = -\sigma$, (i) devient une simple vérification.

Supposons que $\mu - w\mu = \sum_{k=1}^{\ell} x_k \varepsilon_k$, avec $w \in W$. Comme W agit par permutation des ε_i avec changement de signe pair, les seules possibilités pour les x_k d'être entiers sont soit $x_k = 0$ si $k \geq 2$, soit $x_k = 1$ pour $k = 1$. Comme $\varepsilon_1 \notin Q(R)$, on a bien (ii).

Il existe un seul sous groupe propre $\overline{H}$ de $P(R)/Q(R)$, engendré par l'image de ϖ_1, on pose $H = \{0, \varpi_1\}$.

LEMME 2. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu = \mu_H = \frac{1}{|H|} \sum_{\varpi \in H} \varpi = \frac{1}{2}\varpi_1.$$

On a :

(i) $\mu - z^2\mu = \varpi_1$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

3.5.2. — On suppose dans cette partie que ℓ est pair, on a alors $P(Q)/Q(R) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, formé par 0 et par les images de $\varpi_1, \varpi_{\ell-1}$ et ϖ_ℓ, qui sont chacune d'ordre 2. On pose $\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_{\ell-1}, \varpi_\ell\}$. Soient dans W les éléments suivants :

$$\tau_1 = S_1 S_2 \cdots S_{\ell-2} S_{\ell-1} S_\ell S_{\ell-2} \cdots S_2 S_1;$$
$$\tau_2 = X_1^2 X_3^4 \cdots X_{\ell-3}^{\ell-2} S_\ell;$$
$$\tau_3 = \tau_1 \tau_2.$$

On vérifie aussitôt que les τ_i (pour $i = 1, 2$) s'expriment sur la base ε_k de la façon suivante :

$$\tau_1(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1, \quad \tau_1(\varepsilon_k) = -\varepsilon_k, \quad \forall k : 2 \leq k \leq \ell - 1 \text{ et } \tau_1(\varepsilon_\ell) = -\varepsilon_\ell;$$
$$\tau_2(\varepsilon_k) = -\varepsilon_{\ell-k+1} \qquad \forall k : 1 \leq k \leq \ell.$$

On a alors

$$\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1, \quad \tau_3 = \tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1, \quad \tau_3^2 = 1,$$

et par conséquent $\{1, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ forme un sous groupe de W, isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. On définit alors l'homomorphisme ϕ en posant $\phi(\varpi_1) = \tau_1$, $\phi(\varpi_\ell) = \tau_2$ et $\phi(\varpi_{\ell-1}) = \tau_1\tau_2$. (On a $\phi(\varpi_{\ell-1}) = \phi(\varpi_1)\phi(\varpi_\ell)$ puisque $\varpi_{\ell-1} \equiv \varpi_\ell + \varpi_1$ modulo $Q(R)$.)

LEMME 1. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu = \mu_H = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \frac{1}{4}(\varpi_1 + \varpi_{\ell-1} + \varpi_\ell).$$

On a :

(i) $\mu - \tau_1\mu = \varpi_1$, $\mu - \tau_2\mu = \varpi_\ell$ *et* $\mu - \tau_3\mu = \varpi_{\ell-1}$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

Les sous groupes propres de $P(R)/Q(R)$ sont $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$ et $\overline{H}_3$ avec $H_1 = \{0, \varpi_1\}$, $H_2 = \{0, \varpi_\ell\}$ et $H_3 = \{0, \varpi_{\ell-1}\}$.

LEMME 2. — *Soit μ_i l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu_i = \frac{1}{|H_i|} \sum_{\varpi \in H_i} \varpi, \qquad i = 1, 2, 3.$$

On a :

(i) $\mu_1 - \tau_1\mu_1 = \varpi_1$, $\mu_2 - \tau_2\mu_2 = \varpi_\ell$ *et* $\mu_3 - \tau_3\mu_3 = \varpi_{\ell-1}$.

(ii) $(\mu_i - W\mu_i) \cap Q(R) = \{0\}$, $i = 1, 2, 3$.

3.6. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type E_6, $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ une base de racines. Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_3$, engendré par l'image de ϖ_6 (par exemple). On pose $\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_6\}$ et on note s_{α_k} par k. On définit l'homomorphisme ϕ en posant

$$z = \phi(\varpi_6) = 6543245134625431.$$

Soit $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de R, *i.e.* $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$. On a alors :

$$z(\alpha_1) = -\tilde{\alpha}, \quad z(\alpha_2) = \alpha_5, \quad z(\alpha_3) = \alpha_2,$$
$$z(\alpha_4) = \alpha_4, \quad z(\alpha_5) = \alpha_3, \quad z(\alpha_6) = \alpha_1.$$

On vérifie que $z^3 = 1$.

LEMME. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu = \mu_\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\varpi\in\Gamma}\varpi = \frac{1}{3}(\varpi_1 + \varpi_6).$$

On a :

(i) $\mu - z\mu = \varpi_6$ *et* $\mu - z^2\mu = \varpi_1$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap P(R) = \{0, \varpi_1, \varpi_6\}$.

Preuve. — (i) est une simple vérification. Pour tout $\beta \in R$, on a $(\mu, \check{\beta}) = (\mu, \beta) = 0, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$. Posons $S_i = \{\beta \in R \mid (\mu, \beta) = \frac{1}{3}i\}$, pour $i = 0, \pm 1, \pm 2$.

Soit $y \in W$ tel que $\mu - y\mu \in P(R)$, on a alors $\mu - y\mu = \sum_{i=1}^{6} a_i\varpi_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i $1 \leq i \leq 6$. Donc, pour tout $\beta \in R$, on a $(\mu - y\mu, \beta) = (\mu, \beta) - (\mu, y^{-1}\beta) \in \mathbb{Z}$. On en déduit $y^{-1}\alpha_1, y^{-1}\alpha_6 \in S_1 \cup S_{-2}$, $y^{-1}\alpha_i \in S_0$ pour $2 \leq i \leq 5$ et par conséquent $\mu - y\mu = a_1\varpi_1 + a_6\varpi_6$. Il est impossible d'avoir $y^{-1}\alpha_1 \in S_{-2}$ et $y^{-1}\alpha_6 \in S_{-2}$ car ceci entraîne $y\mu = -2\mu$ ce qui est impossible. Donc les seuls cas restant sont :

$$\begin{aligned}
y^{-1}\alpha_1 \in S_1 \quad &\text{et} \quad y^{-1}\alpha_6 \in S_1 \implies \mu - y\mu = 0,\\
y^{-1}\alpha_1 \in S_1 \quad &\text{et} \quad y^{-1}\alpha_6 \in S_2 \implies \mu - y\mu = \varpi_6,\\
y^{-1}\alpha_1 \in S_2 \quad &\text{et} \quad y^{-1}\alpha_6 \in S_1 \implies \mu - y\mu = \varpi_1.
\end{aligned}$$

Ceci démontre (ii).

3.7. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type E_7, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$ une base de racines. Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, engendré par l'image de ϖ_7. On pose $\Gamma = \{0, \varpi_7\}$. On note s_{α_k} par k. On définit l'homomorphisme ϕ en posant

$$t = \phi(\varpi_7) = 7654324561345243765412345 67.$$

Soit $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de R, *i.e.* $\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&t(\alpha_1) = \alpha_6, \quad t(\alpha_2) = \alpha_2, \quad t(\alpha_3) = \alpha_5,\\
&t(\alpha_4) = \alpha_4, \quad t(\alpha_5) = \alpha_3, \quad t(\alpha_6) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad t(\alpha_7) = -\tilde{\alpha}.
\end{aligned}$$

On vérifie que $t^2 = 1$.

LEMME. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu = \mu_\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \tfrac{1}{2}\varpi_7.$$

On a :

(i) $\mu - t\mu = \varpi_7$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap P(R) = \{0, \varpi_7\}$.

Preuve. — (i) est une simple vérification.

Pour tout $\beta \in R$, on a $(\mu, \check{\beta}) = (\mu, \beta) = 0, \pm\frac{1}{2}$. Posons $S_i = \{\beta \in R \mid (\mu, \beta) = \frac{1}{2}i\}$. Soit $y \in w$ tel que $\mu - y\mu \in P(R)$, on a alors $\mu - y\mu = a\varpi_7$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Comme dans 3.6 on trouve $y^{-1}\alpha_7 \in S_1$ et $y^{-1}\alpha_i \in S_0$, avec $1 \leq i \leq 6$, et par conséquent $\mu - y\mu = \varpi_7$.

Ceci montre (ii).

3.8. — Soient $\overline{H}$ un sous groupe de $P(R)/Q(R)$ et $\mu = \mu_H = 1/|H| \sum_{\varpi \in H} \varpi$. D'après la PROPOSITION 3.1, l'ensemble $W_\mu = \{w \in W \mid \mu - w\mu \in Q(R)\}$ est réduit au stabilisateur de μ dans W.

LEMME 1.

(i) *Le module de Verma $M(y\mu)$ est simple pour tout $y \in W$.*

(ii) *Les modules de Harish-Chandra simples V, avec $\ell \operatorname{Ann}_{Z(g)} V = \operatorname{Ker} \chi_\mu$ et $r \operatorname{Ann}_{Z(g)} V = \operatorname{Ker} \chi_{-\mu}$ sont, à isomorphisme près, les modules $L(M(\phi(\varpi)\mu), M(\mu))$ avec $\varpi \in H$.*

Preuve.

(i) résulte de (*cf.* [4, 7.6.24]) et du fait que $(y\mu, \check{\alpha}) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (y\mu, \check{\alpha}) = 0$ pour tout $y \in W$.

(ii) résulte de la classification des modules de Harish-Chandra simples (*cf.* [5, 4.1]) et de la PROPOSITION 3.1.

LEMME 2. — *Supposons que $\varpi + \varpi' \equiv 0$ modulo $Q(R)$, avec ϖ et ϖ' dans H. Alors*

$$\phi(\varpi') \cdot \varpi = -\varpi'.$$

En effet on a $\varpi = \mu - \phi(\varpi)\mu$. D'où $\phi(\varpi')\varpi = \phi(\varpi')\mu - \phi(\varpi')\phi(\varpi)\mu$ ou encore $\phi(\varpi')\varpi = \phi(\varpi')\mu - \mu = -\varpi'$.

4. Endomorphismes $\mathfrak{k}$-finis des modules de Whittaker simples

4.1. — Soient $\overline{H}$ un sous groupe de $P(R)/Q(R)$ et $\mu = \mu_H$. Le théorème suivant donne une décomposition, suivant le groupe $\overline{H}$, de l'algèbre des

endomorphismes $\mathfrak{k}$-finis, d'un module de Whittaker simple $\mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$, en somme directe de sous modules de Harish-Chandra simples, deux à deux non isomorphes.

THÉORÈME. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi simple complexe. Pour tout sous groupe $\overline{H}$ de $P(R)/Q(R)$ on a*

$$L\big(\mathrm{Wh}(\widehat{\mu}), \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})\big) \cong \bigoplus_{\varpi \in H} L\big(M(\phi(\varpi)\mu), M(\mu)\big).$$

Preuve. — D'après 1.6, $L := L(\mathrm{Wh}(\widehat{\mu}), \mathrm{Wh}(\widehat{\mu}))$ s'écrit $L = \bigoplus_{\varpi \in \Gamma} L_\varpi$ où $\overline{\Gamma} = P(R)/Q(R)$.

a) Soient $\varpi \in \Gamma$ et $\lambda \in (\varpi + Q(R)) \cap P(R)^+$. On a

$$\begin{aligned}[L_\varpi : E(\lambda)]_{\mathfrak{k}} &= [L : E(\lambda)]_{\mathfrak{k}} \\ &= \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}\big(E(\lambda), L\big) \\ &= \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\big(E(\lambda) \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\mu}), \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})\big).\end{aligned}$$

D'après 2.2, le module $E(\lambda) \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$ possède une suite de Jordan-Hölder, avec des quotients simples isomorphes à $\mathrm{Wh}((\mu+\nu)\widehat{\ })$ où $\nu \in \Omega(E(\lambda))$, tel que $[E(\lambda) \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\mu}) : \mathrm{Wh}((\mu+\nu)\widehat{\ })]$ soit égale à la multiplicité de ν dans $E(\lambda)$. On en déduit donc que $[L_\varpi : E(\lambda)]_{\mathfrak{k}} \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$ est isomorphe à un sous-quotient de $E(\lambda) \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$. D'où

$$\begin{aligned}\big[L_\varpi : E(\lambda)\big]_{\mathfrak{k}} \neq 0 &\iff \exists\, \nu \in \Omega\big(E(\lambda)\big) \quad \text{avec} \quad \widehat{\mu} = (\mu+\nu)\widehat{\ } \\ &\iff \exists\, \nu \in \Omega\big(E(\lambda)\big) \quad \text{et} \quad \exists\, y \in W : \mu - y\mu = -\nu.\end{aligned}$$

D'après la PROPOSITION 3.1, ceci est encore équivalent à :

$$\exists\, \varpi' \in H : -\varpi' \in \Omega\big(E(\lambda)\big).$$

Or, si ϖ' existe, il doit vérifier $\varpi + \varpi' \in Q(R)$. Ceci montre, d'une part que

$$L_\varpi \neq 0 \iff \varpi \in H$$

et d'autre part que

$$\big[L_\varpi : E(\lambda)\big]_{\mathfrak{k}} \leq \dim E(\lambda)_{-\varpi'}$$

où $\varpi' \in H$ doit vérifier $\varpi + \varpi' \equiv O \bmod Q(R)$.

b) Soit $\varpi \in H$; d'après a), L_ϖ est un module de Harish-Chandra non nul. Soit $V \neq 0$ un sous-module simple de L_ϖ. D'après 3.8, V est nécessairement isomorphe à $L(M(\phi(\varpi)\mu), M(\mu))$. D'autre part, on a pour tout $E \in \mathfrak{k}^\widehat{}$ (*cf.* [3, 6.8]),

$$[V : E]_{\mathfrak{k}} = \big[L(M(\mu - \varpi), M(\mu)) : E\big]_{\mathfrak{k}} = \dim E_\varpi.$$

Donc si $\lambda \in (\varpi + Q(R)) \cap P(R)^+$ on a, d'après a) et d'après le LEMME 2 du paragraphe 3.8

$$\begin{aligned}\dim E(\lambda)_{-\varpi'} = \dim E(\lambda)_\varpi &= [V : E(\lambda)]_{\mathfrak{k}} \\ &\leq [L_\varpi : E(\lambda)]_{\mathfrak{k}} \leq \dim E(\lambda)_{-\varpi'}.\end{aligned}$$

D'où finalement

$$L_\varpi = V \simeq L\big(M(\mu - \varpi), M(\mu)\big) = L\big(M(\phi(\varpi)\mu), M(\mu)\big).$$

En particulier, on a pour tout $\lambda \in (\varpi + Q(R)) \cap P(R)^+$

$$[L_\varpi : E(\lambda)] = \dim E(\lambda)_\varpi.$$

4.2. — Soit $\mu = \mu_H$. Posons $M = \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$ et $L = L(M, M)$. Alors

$$L = \bigoplus_{\varpi \in H} L_\varpi.$$

Soient ϖ_1 et ϖ_2 deux éléments de H. D'après la simplicité de M on a

$$L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2} M = L_{\varpi_1} M = M.$$

D'où $L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2} \neq 0$. D'autre part, puisque les poids de $U(g)$ pour l'action adjointe de $\mathfrak{g}$, n'appartiennent qu'à $Q(R)$, on a

$$L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2} \subset L_{\varpi_1 + \varpi_2}.$$

Comme $L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2}$ est un $U(g)$-bimodule et que $L_{\varpi_1+\varpi_2}$ est simple on a

$$L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2} = L_{\varpi_1 + \varpi_2}$$

ainsi L est un anneau (fortement) gradué par le groupe $\overline{H}$.

PROPOSITION.

(i) $L_0 = U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M$ *est un sous-anneau simple complètement premier de* L.

(ii) *L est simple.*

(iii) *Tout élément homogène de L est non diviseur de* 0.

L'action de $U(\mathfrak{g})$ sur M, permet par passage au quotient, de plonger $U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M$ dans $L(M,M)$. D'autre part

$$U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M = U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M(\mu) \simeq L\big(M(\mu), M(\mu)\big).$$

Comme $I(\mu) = U(\mathfrak{g})\operatorname{Ker}\chi_\mu = \operatorname{Ann} M(\mu)$, est un idéal primitif complètement premier, on a $L_0 = U(\mathfrak{g})/I(\mu)$ est intègre; d'autre part L_0 est simple, puisqu'il est simple comme $U(\mathfrak{g})$-bimodule. Ceci montre (i).

Soit K un idéal de L, alors K est un $U(\mathfrak{g})$-sous-bimodule de L, qui est somme directe de sous-modules simples L_ϖ, deux à deux non isomorphes, et par conséquent K contient ses composantes homogènes.

Supposant $K \neq 0$, on a $L_\varpi \subset K$ avec $\varpi \in H$. D'où $L_{-\varpi}L_\varpi = L_0 \subset K$ et puis $K = L$. Ceci montre (ii).

Soient ϖ_1 et ϖ_2 dans H, $a \in L_{\varpi_1}$ et $b \in L_{\varpi_2}$, a et b non nuls. On a

$$L_{-\varpi_1}a \neq 0 \quad \text{et} \quad bL_{-\varpi_2} \neq 0.$$

En effet $L_{-\varpi_1}a = 0$ entraîne $L_{\varpi_1}L_{-\varpi_1}a = L_0 a = 0$, puis $L_0 aM = 0$, d'où aM est un sous-module de M, ce qui donne $a = 0$ ou $L_0 M = 0$, ce qui est impossible.

De même $bL_{-\varpi_2} = 0$ entraîne $bL_{-\varpi_2}M = bM = 0$, d'où $b = 0$, ce qui est impossible.

Il existe donc $a' \in L_{-\varpi_1}$ et il existe $b' \in L_{-\varpi_2}$ tels que $a'a \neq 0$ et $bb' \neq 0$. Comme L_0 est intègre on a

$$(aa')(bb') = a'(ab)b' \neq 0.$$

D'où $ab \neq 0$. Ceci montre (iii).

5.1. Le cas de $g = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$. (*cf.* [9, 2.3]). — On a dans ce cas $\Gamma = \{0, \varpi\}$ et $\mu = \frac{1}{2}\varpi = \frac{1}{2}\rho = \frac{1}{4}\alpha$. On pose $M = \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$, le module de Whittaker simple, de caractère χ_μ. D'après le THÉORÈME 4.1, l'algèbre $L = L(M,M)$ se décompose en somme directe de sous -$U(\mathfrak{g})$-bimodules simples

$$L = L_0 \oplus L_1$$

et on a

$$[L : E(\varpi)] = 1.$$

On notera alors F_1 le $\mathfrak{k}$-type minimal de L isomorphe à $E(\varpi)$. Il est de dimension 2. On note F_0 l'image de $\mathfrak{g}$ dans L_0.

Soient E un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, et $p \geq 2$ un entier naturel. On désigne par $A^p(E)$ (resp. $S^p(E)$), le sous-$\mathfrak{g}$-module de $\bigotimes^p E$, formé des tenseurs antisymétriques (resp. symétriques). On a besoin du lemme suivant qui se déduit de (*cf.* [7, 5.9.]).

LEMME. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi simple complexe, U un quotient primitif de $U(\mathfrak{g})$, et F un* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$*-sous-module non nul de U. Si $[F, F] = 0$ alors $F = \mathbb{C} \cdot 1$.*

Preuve. — Sinon la sous-algèbre de U engendrée par F, serait commutative, $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$-stable et non réduite aux scalaires, ce qui est exclu par (*cf.* [7, 5.9]).

PROPOSITION. — *L'algèbre L est isomorphe à l'algèbre de Weyl A_1.*

Preuve. — D'après la formule des caractères de Weyl

$$F_1 \otimes F_2 \equiv E(0) \oplus E(2\varpi) = E(0) \oplus E_{\mathrm{ad}}.$$

D'après la PROPOSITION 4.2(iii)

$$F_1^2 \neq 0.$$

Comme on a

$$S^2(F_1) \cong E_{\mathrm{ad}} \longrightarrow F_1^2 \longrightarrow 0,$$

F_1^2 est isomorphe à E_{ad}. Si $[F_1, F_1] = 0$, alors F_1^2 serait $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$-stable commutative non réduite aux scalaires, ce qui contredit le lemme. Donc

$$[F_1, F_1] \neq 0.$$

D'autre part on a

$$A^2(F_1) \cong E(0) \longrightarrow [F_1, F_1] \longrightarrow 0.$$

On en déduit que

$$[F_1, F_1] = \mathbb{C} \cdot 1$$

on peut alors choisir une base $\{p, q\}$ de F_1 telle que

$$[p, q] = 1.$$

On a alors

$$\mathbb{C}q^2 + \mathbb{C}(qp + pq) + \mathbb{C}p^2 \cong S^2(F_1) \cong E_{\mathrm{ad}}.$$

Comme on a $[L : E_{\mathrm{ad}}]_{\mathfrak{k}} = 1$, il résulte que

$$F_0 = \mathbb{C}q^2 + \mathbb{C}(qp + pq) + \mathbb{C}p^2.$$

D'où la proposition puisque L est engendré par F_0 et F_1.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On peut montrer facilement que

$$L = L\big(\mathrm{Wh}\big((\mu + n\varpi)\widehat{\ }\big), \mathrm{Wh}((\mu + n\varpi)\widehat{\ })\big)$$

admet la même structure de $U(\mathfrak{g})$-bimodules que $L(\mathrm{Wh}(\widehat{\mu}), \mathrm{Wh}(\widehat{\mu}))$. Pour $n = 1$, un calcul simple montre que L est isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels sur la courbe $x^2 = y^3$. (*cf.* Smith).

5.2. Le cas de $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_3(\mathbb{C})$. — On a dans ce cas

$$\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_2\} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{3}(\varpi_1 + \varpi_2) = \frac{1}{3}\rho.$$

On pose $M = \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$, le module de Whittaker simple, de caractère χ_μ. D'après le THÉORÈME 4.1, l'algèbre $L = L(M, M)$ se décompose en somme directe de sous-$U(\mathfrak{g})$-bimodules simples

$$L = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$$

et on a

$$[L : E(\varpi_i)]_{\mathfrak{k}} = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

On notera alors F_i le $\mathfrak{k}$-type minimal de L_i isomorphe à $E(\varpi_i)$. On note F_0 l'image de $\mathfrak{g}$ dans L_0. Soit $\mathfrak{g}_2$ l'algèbre de Lie simple exceptionnelle de dimension 14. D'après (*cf.* [8, 6.3, Table]) il existe un unique idéal primitif complètement premier J_0 ; vérifiant $GK\dim(U(g)/J_0) = 6$.

Si on désigne par ϖ_α et ϖ_β, les poids fondamentaux de $\mathfrak{g}_2$, correspondants à α racine courte et β racine longue, on a

$$J_0 = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}\, L(\varpi_\alpha + \frac{1}{3}\varpi_\beta).$$

PROPOSITION. — *$\mathcal{L} := F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$ est une algèbre de Lie simple, isomorphe à $\mathfrak{g}_2$. De plus on a*

$$L \cong U(\mathfrak{g}_2)/J_0.$$

En particulier L est intègre.

Preuve.

a) Il est clair que $[F_0, F_i] \subset F_i$ pour $i = 1, 2$.

b) D'après la formule de caractères de Weyl

$$F_1 \otimes F_1 \cong E(\varpi_2) \oplus E(2\varpi_1);$$

$$\bigotimes^3 F_1 \cong E(0) \oplus E(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus E(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus E(3\varpi_1).$$

D'autre part, $A^2(F_1)$ est un $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$-module non nul de dimension 3 isomorphe $E(\varpi_2)$. D'où

$$E(\varpi_2) \cong A^2(F_1) \longrightarrow [F_1, F_1] \longrightarrow 0.$$

Comme $E(\varpi_2)$ est de multiplicité 1 dans L, on a $[F_1, F_1] \subset F_2$.

Si $[F_1, F_1] = 0$, alors d'après la PROPOSITION 4.2 (iii) $0 \neq F := F_1^3 \subset L_0$, satisfait à l'hypothèse du lemme, d'où $F = \mathbb{C} \cdot 1$. D'autre part, $S^3(F_1)$ est un $\mathfrak{g}$-module non nul de dimension 10 isomorphe à $E(3\varpi_1)$, d'où

$$E(3\varpi_1) \cong S^3(F_1) \longrightarrow F_1^3 \longrightarrow 0.$$

Ceci contredit $F_1^3 = \mathbb{C}\cdot 1$. On a donc $[F_1, F_1] = F_2$. De même, $[F_2, F_2] = F_1$.

c) Montrons que $[F_1, F_2] = F_0$, ce qui établira que $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie simple de dimension 14, isomorphe à $\mathfrak{g}_2$. On a

$$F_2 = [F_1, F_1] = \big[F_1, [F_2, F_2]\big].$$

D'après l'identité de Jacobi on a

$$F_2 \subset \big[[F_1, F_2], F_2\big],$$

de telle sorte que $[F_1, F_2]$ est non nul. Soit q_1 un vecteur de plus haut poids ϖ_1 dans F_1. On pose

$$q_2 = [X_{-\alpha_1}, q_1], \quad q_3 = [X_{-\alpha_2}, q_2].$$

Le système $\{q_i\}_{i=1,2,3}$ est alors une base de F_1, formée de vecteurs de poids. On pose $p_3 = [q_1, q_2]$. C'est un vecteur de poids ϖ_2 dans F_2. On définit enfin

$$p_2 = [X_{-\alpha_2}, p_3], \quad p_1 = [X_{-\alpha_1}, p_1].$$

On a alors

$$p_2 = [q_1, q_3], \quad p_1 = [q_2, q_3].$$

Le système $\{p_i\}_{i=1,2,3}$ est alors une base de F_2, formée de vecteurs de poids. D'après la formule de caractères de Weyl

$$E(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus E(0) \cong F_1 \otimes F_2 \longrightarrow [F_1, F_2] \longrightarrow 0.$$

La représentation triviale de $[F_1, F_2]$ étant égale à

$$\sum_{i=1}^{3} [q_i, p_i] = \big[q_1, [q_2, q_3]\big] + \big[q_2, [q_1, q_3]\big] + \big[q_3, [q_1, q_2]\big] = 0$$

on a

$$[F_1, F_2] \cong E(\varpi_1 + \varpi_2).$$

Montrons que $\sum_{i=1}^{3} q_i p_i$ est non nul. Comme F_1F_2 est $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$-stable non nul, $F_1F_2U(g)$ est un sous-bimodule non nul de L_0, donc égal à L_0. On en déduit que la représentation triviale de L, qu'on note T se trouve dans F_1L_2, il existe alors un module N simple de dimension finie dans L_2, tel que

$$T \subset F_1N \quad \text{et} \quad F_1 \otimes N \longrightarrow F_1N \longrightarrow 0.$$

D'où

$$N \cong F_1^* \cong E(\varpi_2)$$

et puis $N = F_2$, puisque $[E(\varpi_2) : L]_{\mathfrak{k}} = 1$. On a donc $\sum_{i=1}^{3} q_i p_i = 1$ à un scalaire non nul près.

Montrons que $m := [F_1F_2 + F_2F_1 : E(\varpi_1 + \varpi_2)]_{\mathfrak{k}} = 2$. On a :

$$0 \neq m \leq \left[L, E(\varpi_1 + \varpi_2)\right]_{\mathfrak{k}} = 2 \qquad \left(E(\varpi_1 + \varpi_2) = E_{\mathrm{ad}}\right).$$

Si $m = 1$, il existe un homomorphisme entre la copie de E_{ad} dans F_1F_2 et celle dans F_2F_1, par conséquent il existe un scalaire α, tel que l'on ait (par exemple)

$$q_1p_2 = \alpha p_2q_1 \quad \text{et} \quad q_3p_2 = \alpha p_2q_3.$$

D'où

$$p_2^2 = (q_1q_3 - q_3q_1)p_2 = \alpha^2 p_2(q_1q_3 - q_3q_1) = \alpha^2 p_2^2.$$

Comme $p_2^2 \neq 0$ on a $\alpha^2 = 1$.

Supposons que $\alpha = 1$. Comme $\sum_{i=1}^{3}[q_i, p_i] = 0$, on aura $[F_1, F_2] = 0$, ce qui est impossible. Supposons $\alpha = -1$. On trouve

$$q_1p_2 + p_2q_1 = 0.$$

D'où

$$[q_1^2, q_3] = q_1p_2 + p_2q_1 = 0$$
$$[q_1^2, q_2] = q_1p_3 + p_3q_1 = 0$$

de sorte que

$$[q_1^2, F_1] = 0.$$

Mais q_1^2 est le générateur de $F := S^2(F_1) \cong E(2\varpi_1)$, qui est un module simple. Donc $[F, F_1] = 0$, et par conséquent $[F, F] = 0$.

On pose $G = F^3$, il contient le vecteur q_1^6 qui est non nul, et qui engendre un sous $\operatorname{ad} g$-module simple isomorphe à $E(6\varpi_1)$ contenu dans L_0. Comme $[G, G] = 0$, il y a contradiction avec le lemme. On a donc $m = 2$ de telle sorte que F_0 est un sous-module de $F_1F_2 + F_2F_1$.

Il existe donc un scalaire α tel que

$$q_1p_2 = \alpha p_2q_1 + e_{12}$$

où $e_{12} \in F_0$ est un vecteur de poids α_1. Comme e_{12} est proportionnel à $X_{\alpha_1}, [q_1, e_{12}] = 0$. D'où

$$q_1^2 p_2 = \alpha q_1 p_2 q_1 + q_1 e_{12} \quad \text{et} \quad q_1 p_2 q_1 = \alpha p_2 q_1^2 + e_{12} q_1.$$

De sorte que

$$q_1^2 p_2 - q_1 p_2 q_1 = \alpha(q_1 p_2 q_1 - p_2 q_1^2).$$

Ou encore

$$q_1 [q_1, p_2] = \alpha [q_1, p_2] q_1 \quad \text{et} \quad q_1^3 [q_1, p_2] = \alpha^3 [q_1, p_2] q_1^3.$$

La filtration de L_0, induite par la filtration canonique de $U(g)$, est telle que le gradué $\operatorname{gr} L_0$ est commutatif intègre, donc puisque q_1^3 et $[q_1, p_2]$ sont deux éléments non nuls de L_0, on a

$$\begin{aligned}(\operatorname{gr} q_1^3) \operatorname{gr}([q_1, p_2]) &= \operatorname{gr}(q_1^3 [q_1, p_2]) \\ &= \alpha^3 \operatorname{gr}([q_1, p_2] q_1^3) \\ &= \alpha^3 \operatorname{gr}([q_1, p_2]) \operatorname{gr} q_1^3.\end{aligned}$$

D'où $\alpha^3 = 1$. Supposons $\alpha \neq 1$. Alors $[q_1, p_2]$ s'exprime comme somme de deux contributions, de bons poids, des deux représentations adjointes. On a alors

$$[q_1, p_2] = a e_{12} + b(H e_{12} + e_{13} e_{32}),$$

avec a et b scalaires et $H = [e_{12}, e_{21}] + 2[e_{23}, e_{32}] \in \mathfrak{h}$. Comme $[q_1, e_{12}] = [q_1, e_{13}] = [q_1, e_{32}] = 0$, on a

$$[q_1^3, [q_1, p_2]] = 0 \Longrightarrow [q_1^3, H] = 0.$$

D'où la contradiction. On a donc $\alpha = 1$ et $[q_1, p_2] = e_{12}$. Par conséquent :

$$[F_1, F_2] = F_0.$$

d) Il est clair que la sous algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est encore une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_2$. On note $\mathcal{R} = R(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h})$ le système de racines de $\mathfrak{g}_2$ relativement à $\mathfrak{h}$. On pose

$$\alpha = \varpi_1 - \alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta = \alpha_1.$$

On vérifie alors que $\{\alpha, \beta\}$ constitue une base de racines de $\mathcal{R}$, avec α racine courte et β racine longue. On désigne par ϖ_α et ϖ_β les poids fondamentaux correspondants. On a alors le tableau suivant :

Racines positives longues	Racines positives courtes
$\beta = \alpha_1$	$\alpha = \varpi_1 - \alpha_1$
$3\alpha + \beta = \alpha_2$	$\alpha + \beta = \varpi_1$
$3\alpha + 2\beta = \alpha_1 + \alpha_2$	$2\alpha + \beta = \varpi_2$

Poids fondamentaux

$$\varpi_\alpha = 2\alpha + \beta = \varpi_2$$
$$\varpi_\beta = 3\alpha + 2\beta = \varpi_1 + \varpi_2 = \rho$$

Posons $\mathfrak{m}^+ = \oplus_{\nu \in \mathcal{R}^+} \mathbb{C} X_\nu$ $\mathfrak{m}^- = {}^t\mathfrak{m}^+$, comme $R^+ \subset \mathcal{R}^+$ on a $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{m}^+$.

e) L'injection de $\mathfrak{g}_2$ dans L, se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de $U(\mathfrak{g}_2)$ dans L. Cet homomorphisme est surjectif puisque chaque composante de L est engendré par son $\mathfrak{k}$-type minimal. D'autre part, M étant un L-module simple fidèle, L est une algèbre primitive. L'idéal I de $U(\mathfrak{g}_2)$ tel que L soit isomorphe $U(\mathfrak{g}_2)/I$ est alors un idéal primitif. D'après le théorème de Duflo, il existe λ dans h^* tel que $I = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g}_2)} L(\lambda) = I(\lambda)$, où $L(\lambda)$ est l'unique quotient simple du module de Verma $M(\lambda)$ associé à $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}, \mathfrak{m}^+, \lambda$. Comme on a un plongement de $L_O = U(\mathfrak{g}))/I(\mu)$ dans $U(\mathfrak{g}_2)/I(\lambda)$, il vient que $I(\lambda) \cap U(\mathfrak{g}) = I(\mu)$.

Soit $e_\lambda \in L(\lambda)$, un vecteur non nul de plus haut poids $\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2}$. Puisque $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{m}^+$ et d'après (*cf.* [4, 7.1.8]) on a $U(\mathfrak{g})e_\lambda$ est une image du module de Verma $M(\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2} + \rho)$ associé à $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+$, $\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2}$. On en déduit alors

$$\chi_\mu = \chi_{\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2} + \rho} = \chi_{\lambda - \varpi_\alpha}.$$

D'où

$$\exists\ y \in W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) : \lambda = y\mu + \varpi_\alpha.$$

Posons

$$\theta_1 = \varpi_\alpha + \tfrac{1}{3}\varpi_\beta, \quad \theta_2 = 2\varpi_\alpha - \tfrac{2}{3}\varpi_\beta, \quad \theta_3 = \varpi_\alpha + \tfrac{1}{3}\varpi_\beta.$$

On montre par un calcul simple que

$$\lambda \in \{\theta_1, S_\beta\theta_1, \theta_2, S_\beta\theta_2, \theta_3, S_\beta\theta_3\}.$$

Comme $\beta \notin \mathcal{R}_{\theta_i} : i = 1, 2, 3$ et d'après (*cf.* [6, 5.14]) on a

$$I(\theta_i) = I(S_\beta\theta_i) : i = 1, 2, 3.$$

Par conséquent $\lambda \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$.

Soit $e_\lambda \in L(\lambda)$, un vecteur non nul de poids $\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2}$, et soit C l'élément de $U(\mathfrak{g})$:

$$C = \sum_{\alpha \in R} X_{-\alpha} X_\alpha + H_{\alpha_1}\left(\tfrac{2}{3}H_{\alpha_1} + \tfrac{1}{3}H_{\alpha_2}\right) + H_{\alpha_2}\left(\tfrac{1}{3}H_{\alpha_1} + \tfrac{2}{3}H_{\alpha_2}\right).$$

D'après (*cf.* [3, 7.8.5]), $C \in Z(g)$. D'où

$$C - \chi_\mu(C) \in I(\mu) = U(\mathfrak{g}) \cap I(\lambda)$$

et par suite

$$0 = \left[C - \chi_\mu(C)\right] \cdot e_\lambda = C \cdot e_\lambda - \chi_\mu(C) e_\lambda.$$

On vérifie alors que nécessairement $\lambda = \theta_1 = \varpi_\alpha + \frac{1}{3}\varpi_\beta$.

Finalement $I = I(\varpi_\alpha + \frac{1}{3}\varpi_\beta) = J_0$ est l'idéal de Joseph, c'est l'unique idéal primitif complètement premier, de dimension Gelfand-Kirillov égale à 6 (*cf.* [8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bernstein (J.) and Gelfand (S.I.). — Tensor product of finite and infinite dimensional representations of semi-simple Lie algebras, *Compositio Math.*, t. **41**, 1981, p 245–285.

[2] Bourbaki (N.). — Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V, VI.

[3] Conze (N.). — Algèbres d'opérateurs différentiels et quotients des algèbres enveloppantes, *Bull. Soc. Math. France*, t. **102**, 1974, p 379–415.

[4] Dixmier (J.). — *Algèbres enveloppantes, Cahiers scientifiques XXXVII.* — Gauthiers-Villars, Paris, 1974.

[5] Duflo (M.). — Représentations irréductibles des groupes semi simples complexes, *Lecture Notes in Math.*, t. **497**, 1975, p 26–88.

[6] Jantzen (J.C.). — Einhüllenden Algebren helbeinfacher Lie-Algebren, *Ergebbnisse der Mathematik, Berlin Springer*, 1983.

[7] JOSEPH (A.). — On the Gelfand-Kirrillov conjecture, for induced ideals in the semi simple case, *Bull. Soc. Math. France*, t. **107**, 1979, p 139–159.

[8] JOSEPH (A.). — The minimal orbit in a simple Lie algebra and its assiciated maximal ideal, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, t. **9**, 1976, p 1–30.

[9] JOSEPH (A.). — Kostant's problem and Goldie rank, *Lecture Notes in Math.*, t. **880**, 1981, p 249–266.

[10] JOSEPH (A.) and STAFFORD (J.T.). — Modules of $\mathfrak{k}$-finite vectors over semi simple Lie algebras, *London Math. Soc. (3)*, t. **49**, 1984, p 361–384.

[11] KOSTANT (B.). — On Whittaker vectors, and representation theory, *Invent. Math.*, t. **48**, 1978, p 101–184.