BULLETIN DE LA S. M. F.

G. LAUMON

Fibrés vectoriels spéciaux

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 1 (1991), p. 97-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_1_97_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 97–119.

FIBRÉS VECTORIELS SPÉCIAUX

PAR

G. LAUMON (*)

RÉSUMÉ. — On définit et on étudie un analogue de l'application d'Abel-Jacobi pour les fibrés vectoriels de rang n sur une surface de Riemann compacte. En particulier on calcule l'image directe du faisceau constant $\mathbb{C}$ par cette application d'Abel-Jacobi généralisée.

ABSTRACT. — We define and study an analog of the Abel-Jacobi morphism for rank n vector bundles on a compact Riemann surface. In particular, we compute the direct image of the constant sheaf $\mathbb{C}$ by this generalized Abel-Jacobi morphism.

0. Introduction

Soient X une courbe projective, lisse et connexe de genre g sur $\mathbb{C}$ et n un entier ≥ 1.

DÉFINITION 0.1. — *Un fibré vectoriel $\mathcal{L}$ de rang n sur X sera dit* spécial *si $H^0(X,\mathcal{L})$ et $H^1(X,\mathcal{L})$ sont tous deux non nuls.*

L'étude des fibrés vectoriels spéciaux de rang 1 a fait l'objet de très nombreux travaux (*cf.* [A-C-G-H] pour une présentation condensée de ceux-ci et pour une bibliographie). On propose dans cette note d'étendre une partie de cette étude aux fibrés de rang arbitraire.

On définit au numéro 1 un analogue de l'application d'Abel-Jacobi pour les fibrés de rang n. On montre en particulier que l'espace de modules des fibrés spéciaux de rang n est un fermé de codimension ≥ 1 de l'espace de modules de tous les fibrés de rang n.

Au numéro 2, on étudie du point de vue différentiel des analogues des variétés des séries linéaires spéciales.

(*) Texte reçu le 30 avril 1990.
G. LAUMON, Université Paris-Sud, URA D0752 du CNRS, Dépt. de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

Au numéro 3, on démontre des inégalités du type Martens et Clifford pour les fibrés de rang n. On en déduit une expression pour l'image directe du faisceau constant $\mathbb{C}$ par l'application d'Abel-Jacobi généralisée.

Au numéro 4, on généralise la notion de diviseur théta.

Enfin, au numéro 5, on démontre l'irréductibilité des espaces de modules des fibrés spéciaux.

La plupart des démonstrations sont inspirées directement de celles pour les diviseurs, aussi les détails sont en général laissés au lecteur. On laisse aussi le soin au lecteur intéressé d'étendre au cas des fibrés de rang n le théorème de Riemann pour les singularités du diviseur théta et sa généralisation par Kempf; cela ne semble poser aucun problème.

Je remercie l'IHES pour son hospitalité durant la préparation de ce travail.

1. Application d'Abel-Jacobi pour les fibrés vectoriels de rang n

La courbe X et l'entier n sont fixés comme dans l'introduction. Pour tout entier ℓ, on note

$$\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n} = \mathrm{Fib}^{\ell}$$

le champ algébrique sur $\mathbb{C}$ des fibrés vectoriels de rang n et de degré ℓ sur X. C'est un champ connexe et lisse de dimension $n^2(g-1)$.

Sur $X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$, on dispose d'un fibré vectoriel de rang n universel que l'on notera

$$\mathcal{U}^{\ell}_{X,n} = \mathcal{U}^{\ell}$$

et on pose

$$\mathcal{F}^{\ell}_{X,n} = \mathcal{F}^{\ell} = \mathbb{R}^1 \mathrm{pr}_{2*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^{\ell}}}(\mathcal{U}^{\ell}, \mathrm{pr}_1^* \Omega^1_X) \tag{1.1}$$

où $\mathrm{pr}_1 : X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^{\ell} \to X$ et $\mathrm{pr}_2 : X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^{\ell} \to \mathrm{Fib}^{\ell}$ sont les deux projections canoniques. $\mathcal{F}^{\ell}$ est un Module cohérent sur Fib^{ℓ} et pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Fib}^{\ell}(\mathbb{C})$, on a

$$\mathcal{F}^{\ell}_{(\mathcal{L})} = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \Omega^1_X) = H^0(X, \mathcal{L})^* \tag{1.2}$$

d'après le théorème de changement de base et la dualité de Serre.

DÉFINITION 1.3. — *On appelle application d'Abel-Jacobi en degré ℓ (pour les fibrés vectoriels de rang n sur X) et on note*

$$\pi^\ell_{X,n} : \widetilde{W}^\ell_{X,n} \longrightarrow \mathrm{Fib}^\ell_{X,n}$$

(ou plus simplement $\pi^\ell : \widetilde{W}^\ell \to \mathrm{Fib}^\ell$) le fibré projectif au sens de Grothendieck associé au module cohérent $\mathcal{F}^\ell_{X,n}$ sur $\mathrm{Fib}^\ell_{X,n}$.

Il résulte aussitôt de (1.2) que pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Fib}^\ell_{X,n}(\mathbb{C})$, la fibre de $\pi^\ell_{X,n}$ en $\mathcal{L}$ s'identifie canoniquement à l'espace projectif des droites dans l'espace vectoriel

$$H^0(X,\mathcal{L}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\Omega^1_X)^*$$

(dualité de Serre).

THÉORÈME 1.4. — *Le champ algébrique $\widetilde{W}^\ell_{X,n}$ est lisse de dimension $\ell + n(n-1)(g-1) - 1$ sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. — Notons $\dot{\widetilde{W}}^\ell \xrightarrow{\dot{\pi}^\ell} \mathrm{Fib}^\ell$ le complément de la section nulle dans le fibré vectoriel au sens de Grothendieck associé à $\mathcal{F}^\ell$. On a

$$\widetilde{W}^\ell = \dot{\widetilde{W}}^\ell / \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$$

et il suffit donc de montrer que $\dot{\widetilde{W}}^\ell$ est lisse de dimension $\ell+n(n-1)(g-1)$ sur $\mathbb{C}$.

Prouvons d'abord la lissité de $\dot{\widetilde{W}}^\ell$. Soient donc R une $\mathbb{C}$-algèbre, $I \subset R$ un idéal de carré nul, $R_0 = R/I$ et $\mathcal{L}_0$ un fibré vectoriel de rang n sur $X \otimes_{\mathbb{C}} R_0$ muni d'une section σ_0 non identiquement nulle dans chaque fibre de la projection canonique $X \otimes_{\mathbb{C}} R_0 \to \mathrm{Spec}(R_0)$. Il faut montrer que le couple $(\mathcal{L}_0,\sigma_0)$ se relève à $X \otimes_{\mathbb{C}} R$. Il n'y a pas d'obstruction à relever $\mathcal{L}_0$: choisissons arbitrairement un relèvement $\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}_0$ à $X \otimes_{\mathbb{C}} R$. En général, σ_0 ne se relève pas en une section de $\mathcal{L}$ (le morphisme $\pi^\ell_{X,n}$ n'est pas lisse en général) : il y a une obstruction θ dans $H^1(X \otimes_{\mathbb{C}} R_0,\mathcal{L}_0) \otimes_{R_0} I$. Pour lever cette obstruction, il suffit de modifier $\mathcal{L}$ par un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}R_0}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0) \otimes_{R_0} I$ d'image θ par l'application

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}R_0}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0) \otimes_{R_0} I \longrightarrow H^1\big(X \otimes_{\mathbb{C}} R_0,\mathcal{L}_0\big) \otimes_{R_0} I$$

induite par σ_0 (les relèvements de $\mathcal{L}_0$ à $X\otimes_{\mathbb{C}}R$ forment un espace principal homogène sous $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}R_0}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0)\otimes_{R_0}I$). Or l'application

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}R_0}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0)\longrightarrow H^1\big(X\otimes_{\mathbb{C}}R_0,\mathcal{L}_0\big)$$

induite par σ_0 est clairement surjective, d'où la lissité cherchée.

Calculons maintenant la dimension en un point complexe $(\mathcal{L},\sigma)$ de $\dot{\widetilde{W}}{}^\ell$. On a le triangle distingué

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X\big)\to\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L},(\mathcal{L}/\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X\big)&\\ \longrightarrow\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\Omega^1_X)[1]\to&\end{aligned}$$

associé à la suite exacte courte

$$\big(0\longrightarrow\mathcal{O}_X\xrightarrow{\sigma}\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}/\mathcal{O}_X\longrightarrow 0\big)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X$$

et il est clair d'après ce qui précède que ce triangle s'identifie à la fibre en $(\mathcal{L},\sigma)$ du triangle distingué

$$\mathbb{L}(\dot{\pi}^\ell)^*L_{\mathrm{Fib}^\ell/\mathbb{C}}\longrightarrow L_{\dot{\widetilde{W}}{}^\ell/\mathbb{C}}\longrightarrow L_{\dot{\widetilde{W}}{}^\ell/\,\mathrm{Fib}^\ell}\longrightarrow$$

de la théorie du complexe cotangent (*cf.* [Il], II (2.1.5.6)). Par suite, la dimension en $(\mathcal{L},\sigma)$ de $\dot{\widetilde{W}}{}^\ell$ est égale à

$$\chi\big(\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},(\mathcal{L}/\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X)\big)=\ell+n(n-1)(g-1),$$

d'où la conclusion.

Pour tout entier $\ell\leq n(g-1)$, on notera

$$W^\ell_{X,n}=W^\ell \tag{1.5}$$

le fermé réduit de Fib^ℓ image du morphisme projectif

$$\pi^\ell_{X,n}:\widetilde{W}{}^\ell_{X,n}\longrightarrow\mathrm{Fib}^\ell_{X,n}\,.$$

PROPOSITION 1.6. — *Pour tout entier $\ell\leq n(g-1)$, le morphisme*

$$\pi^\ell_{X,n}:\widetilde{W}{}^\ell_{X,n}\longrightarrow W_{X,n}$$

est birationnel et chaque composante connexe non vide de $W^{\ell}_{X,n}$ *est un fermé intègre de* $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$ *de codimension* $n(g-1)-\ell+1$.

Preuve. — Comme $\widetilde{W}^{\ell}$ est lisse sur $\mathbb{C}$, chaque composante connexe est irréductible et, comme les fibres de π^{ℓ} sont connexes, π^{ℓ} induit une bijection des composantes connexes de $\widetilde{W}^{\ell}$ sur celles de W^{ℓ}. Par suite, chaque composante connexe de W^{ℓ} est aussi irréductible.

Fixons maintenant une composante irréductible de W^{ℓ}; soit $\mathcal{L}$ un point complexe de cette composante irréductible tel que $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{L}) = r+1$ soit le plus petit possible. Par définition de W^{ℓ}, on a $r \geq 0$ et pour achever la preuve de la proposition, on doit montrer que $r=0$. Raisonnons par l'absurde en suppposant que $r>0$. Alors on va construire un $\mathbb{C}$-schéma irréductible S, muni de deux points $s_0, s_1 \in S(\mathbb{C})$, et un morphisme $\varphi : S \to \mathrm{Fib}^{\ell}$ tels que

(i) $\varphi(S) \subset W^{\ell}$,

(ii) $\varphi(s_0) = \mathcal{L}$,

(iii) $\varphi(s_1) = \mathcal{L}_1''$ avec $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{L}_1'') = r$,

ce qui contredira la minimalité de $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{L})$. Pour cela, fixons tout d'abord une section non identiquement nulle $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}$, un point x de X tel que $\sigma_{(x)} \neq 0$ et une rétraction $\rho : \mathcal{L}_{(x)} \longrightarrow \mathbb{C}$ de $\sigma_{(x)}$; notons $\mathcal{L}' \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathcal{L}$ le noyau du morphisme composé $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{(x)} \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}$; on a par construction

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{L}') = r$$

et aussi

$$H^1(X,\mathcal{L}) \neq 0$$

puisque

$$r - \chi(X,\mathcal{L}') = r+1-\ell+n(g-1) > 0$$

(L' est un fibré vectoriel de rang n et degré $(\ell-1)$ sur X). Alors, on peut prendre comme schéma S l'espace de modules des modifications élémentaires supérieures du fibré vectoriel $\mathcal{L}'$,

$$\mathcal{L}' \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} \mathcal{L}''$$

($\mathcal{L}''$ est un fibré vectoriel de rang n, α' est une inclusion de $\mathcal{O}_X$-Modules et $\mathcal{L}''/\alpha'(\mathcal{L}')$ est un $\mathcal{O}_X$-module de torsion de longueur 1). S est un fibré projectif de rang constant sur X, donc est irréductible, et on a un morphisme $\varphi : S \to \mathrm{Fib}^{\ell}$ défini par $\varphi(\mathcal{L}' \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} \mathcal{L}'') = \mathcal{L}''$. Pour le point s_0, on prend la modification élémentaire supérieure $\mathcal{L}' \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathcal{L}$ elle-même : on a bien $\varphi(s_0) = \mathcal{L}$. De plus, comme

$$r = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}') \leq \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}'')$$

et que $r > 0$ par hypothèse, $\varphi(S) \subset W^{\ell}$. Pour conclure, il reste à construire le point s_1. Pour ce faire, on choisit un homomorphisme non identiquement nul $\mathcal{L}' \xrightarrow{\rho'} \Omega^1_X$ (on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}', \Omega^1_X) = H^1(X, \mathcal{L}')^* \neq 0$), un point y de X tel que $\rho'_{(y)} \neq 0$ et une section $\sigma' : \Omega^1_{X(y)} \hookrightarrow \mathcal{L}'_{(y)}$ de $\rho'_{(y)}$; l'extension canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}'(-y) \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L}'_{(y)} \longrightarrow 0$$

induit par σ' une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}'(-y) \xrightarrow{\alpha'_1(-y)} \mathcal{L}''_1(-y) \longrightarrow \Omega^1_{X(y)} \longrightarrow 0$$

et on pose $s_1 = (\mathcal{L}' \overset{\alpha'_1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}''_1)$. On a, par construction,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{L}''_1) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{L}') - 1$$

et donc

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}''_1) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}') = r.$$

D'où la conclusion.

Pour $\ell \leq n(g-1)$, un fibré vectoriel $\mathcal{L}$ de rang n et degré ℓ sur X est spécial si et seulement si $H^0(X, \mathcal{L}) \neq 0$, *i.e.* si et seulement si $\mathcal{L} \in \mathrm{ob}\, W^{\ell}_{X,n}(\mathbb{C})$ (par Riemann-Roch, $\chi(X, \mathcal{L}) = \ell - n(g-1)$ et donc $H^1(X, \mathcal{L}) \neq 0$ dès que $\ell < n(g-1)$ ou que $\ell = n(g-1)$ et $H^0(X, \mathcal{L}) \neq 0$). On voit donc que $W^{\ell}_{X,n} \subset \mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$ *paramètre les fibrés spéciaux pour* $\ell \leq n(g-1)$.

Le corollaire suivant de (1.6) éclaire la terminologie “fibré spécial”.

COROLLAIRE 1.7. — *Pour tous les entiers $n \geq 1$ et ℓ, le fibré générique de rang n et degré ℓ sur X n'est pas spécial.*

Preuve. — Si $\ell \leq n(g-1)$, cela résulte de ce qui précède et (1.6). Si $\ell \geq n(g-1)$, $\mathcal{L}$ est spécial si et seulement si le fibré vectoriel $\mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ est spécial (par dualité de Serre) et on est ramené au cas précédant.

Terminons ce numéro par un lemme qui permet de mieux situer les fibrés spéciaux.

LEMME 1.8. — *Soit $\mathcal{L}$ un fibré vectoriel spécial de rang n et degré ℓ sur X. Alors*

(i) *si $\mathcal{L}$ est semi-stable (pour tout sous-fibré $\mathcal{L}' \hookrightarrow \mathcal{L}$ de rang n' et degré ℓ', on a $\ell'/n' \leq \ell/n$), alors on a nécessairement $0 \leq \ell \leq 2n(g-1)$;*

(ii) *si $\mathcal{L}$ est très stable (il n'y a pas d'homomorphisme non nul nilpotent de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$, cf.* [Dr] *ou* [La] 6), *alors on a nécessairement*

$$(n-1)(g-1) \leq \ell \leq (n+1)(g-1).$$

Preuve. — Pour la partie (i), on a par définition $\ell \geq 0$ et, comme $\mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ est aussi semi-stable et spécial, on a $n(2g-2) - \ell \geq 0$, d'où la conclusion.

Pour la partie (ii), il suffit comme pour la partie (i) de démontrer l'inégalité $\ell \geq (n-1)(g-1)$, l'autre s'en déduisant en remarquant que $\mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ est aussi très stable et spécial. Pour montrer l'inégalité $\ell \geq (n-1)(g-1)$, raisonnons par l'absurde. Supposons donc $\ell < (n-1)(g-1)$ et choisissons une inclusion $\mathcal{O}_X \xrightarrow{v} \mathcal{L}$. On a alors

$$\chi(X, \mathcal{L}/\mathcal{O}_X) = \ell - (n-1)(g-1) < 0$$

et donc

$$H^1(X, \mathcal{L}/\mathcal{O}_X) \neq 0.$$

Par dualité de Serre, on en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}/\mathcal{O}_X, \Omega_X^1) \neq 0,$$

ce qui contredit $\mathcal{L}$ très stable : si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}/\mathcal{O}_X, \Omega_X^1)$, $u \neq 0$, l'homomorphisme composé

$$\mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathcal{L}/\mathcal{O}_X \xrightarrow{u} \Omega_X^1 \xrightarrow{v \otimes \mathrm{id}_{\Omega_X^1}} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$$

est clairement nilpotent.

REMARQUE 1.9. — Par contre, plus $\mathcal{L}$ est instable plus l'intervalle (centré en $n(g-1)$) des degrés possibles pour les fibrés vectoriels spéciaux de rang n sur X s'élargit. Par exemple, si $\mathcal{A}$ est un fibré en droites sur X de degré $\geq g$, le fibré vectoriel de rang 2 sur X,

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus (\Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^{-1})$$

est spécial. Plus généralement, si $n \geq 2$, $W_{X,n}^\ell$ est non vide pour tout entier ℓ (si $\mathcal{A}$ est un fibré vectoriel de rang 1 et de degré ℓ sur X, $\mathcal{O}_X^{n-1} \oplus \mathcal{A} \in \mathrm{ob}\, W_{X,n}^\ell(\mathbb{C})$). Pour $n = 1$, $W_{X,n}^\ell$ est non vide si et seulement si $\ell \geq 0$.

2. Les sous-champs fermés $\mathbf{W}^{\mathbf{l},\mathbf{r}}_{\mathbf{X},\mathbf{n}}$ de $\mathbf{Fib}^{\mathbf{l}}_{\mathbf{X},\mathbf{n}}$ et leurs éclatements canoniques

Considérons la suite décroissante des sous-champs fermés de $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$

$$\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n} \supset W^{\ell,0}_{X,n} \supset W^{\ell,1}_{X,n} \supset \cdots \supset W^{\ell,r}_{X,n} \supset \cdots \tag{2.1}$$

définis par les Idéaux de Fitting du Module cohérent $\mathcal{F}^{\ell}_{X,n}$ et leurs éclatements canoniques

$$\pi^{\ell,r}_{X,n} : \widetilde{W}^{\ell,r}_{X,n} \longrightarrow W^{\ell,r}_{X,n}. \tag{2.2}$$

Rappelons que $\widetilde{W}^{\ell,r}_{X,n}$ est le fibré grassmannien au sens de Grothendieck des quotients localement libres de rang r du Module cohérent $\mathcal{F}^{\ell}_{X,n}$, que le morphisme composé

$$\widetilde{W}^{\ell,r}_{X,n} \xrightarrow{\pi^{\ell,r}_{X,n}} W^{\ell,r}_{X,n} \hookrightarrow \mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$$

est la projection canonique de ce fibré grassmannien, que $\pi^{\ell,r}_{X,n}$ est surjectif et que, localement sur $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$, pour toute présentation (locale)

$$\mathcal{O}^{N_0}_{\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}} \xrightarrow{A} \mathcal{O}^{N_1}_{\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}} \longrightarrow \mathcal{F}^{\ell}_{X,n} \longrightarrow 0,$$

$W^{\ell,r}_{X,n} \subset \mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$ est défini par l'annulation des $(N_1 - r) \times (N_1 - r)$ mineurs de la matrice A.

De façon ensembliste,

$$\mathrm{ob}\, W^{\ell,r}_{X,n}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{ob}\, \mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}(\mathbb{C})$$

est l'ensemble des fibrés vectoriels de rang n et degré ℓ sur X tels que

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(H^0(X,\mathcal{L})\big) \geq r + 1$$

et

$$\mathrm{ob}\, \widetilde{W}^{\ell,r}_{X,n}(\mathbb{C})$$

s'identifie canoniquement à l'ensemble des couples $(\mathcal{L}, V)$ où $\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de rang n et degré ℓ sur X et où

$$V \subset H^0(X,\mathcal{L})$$

est un sous-espace de dimension $r+1$.

Dans la suite, on laissera tomber les indices X et n quand aucune confusion n'en résultera.

Comme $W^{\ell,r} = \mathrm{Fib}^\ell$ dès que $r+1 \leq \ell - n(g-1)$ (si $\mathcal{L} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Fib}^\ell(\mathbb{C})$, on a $\chi(X,\mathcal{L}) = \ell - n(g-1)$ et donc $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{L}) \geq \ell - n(g-1)$), on supposera dans la suite que :

$$r+1-\ell+n(g-1) > 0 \tag{2.3}$$

(cette condition est d'ailleurs automatique si $\ell \leq n(g-1)$ et $r \geq 0$). On posera alors :

$$\rho_{X,n}(\ell,r) = \rho(\ell,r) = n^2(g-1) - (r+1)\big(r+1-\ell+n(g-1)\big). \tag{2.4}$$

LEMME 2.5. — *Toute composante irréductible de $W^{\ell,r}_{X,n}$ ou de $\widetilde{W}^{\ell,r}_{X,n}$ est de dimension supérieure ou égale à $\rho_{X,n}(\ell,r)$.*

Preuve. — On peut représenter, localement sur Fib^ℓ, l'objet

$$\mathbb{R}\,\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\times_{\mathbb{C}}\mathrm{Fib}^\ell}}(\mathcal{U}^\ell, \mathrm{pr}_1^*\,\Omega^1_X)$$

de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell})$ par un complexe de la forme

$$\big[\mathcal{O}^{N_0}_{\mathrm{Fib}^\ell} \xrightarrow{A} \mathcal{O}^{N_1}_{\mathrm{Fib}^\ell}\big]$$

où A est une matrice $N_1 \times N_0$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell}$.

Alors, $W^{\ell,r}$ est défini, localement sur Fib^ℓ, par l'annulation des

$$(N_1 - r) \times (N_1 - r)$$

mineurs de A et par suite chaque composante irréductible de $W^{\ell,r}$ est de codimension inférieure ou égale à

$$\big(N_1 - (N_1 - r - 1)\big)\big(N_0 - (N_1 - r - 1)\big)$$

dans Fib^ℓ.

De même, on peut, localement sur Fib^ℓ, indentifier $\widetilde{W}^{\ell,r}$ à un sous-champ fermé de

$$\mathrm{Fib}^\ell \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Grass}_{\mathbb{C}}(N_1, r+1),$$

où $\mathrm{Grass}_{\mathbb{C}}(N_1, r+1)$ est la grassmanienne des espaces vectoriels complexes de dimension $r+1$ quotients de $\mathbb{C}^{N_1}$, et ce sous-champ fermé est défini, localement sur $\mathrm{Fib}^\ell \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Grass}_{\mathbb{C}}(N_1, r+1)$, par $(r+1)N_0$ équations ; par suite, chaque composante irréductible de $\widetilde{W}^{\ell,r}$ est de codimension inférieure ou égale à

$$(r+1)N_0$$

dans $\mathrm{Fib}^\ell \times \mathrm{Grass}_{\mathbb{C}}(N_1, r+1)$ (localement sur Fib^ℓ).

Le lemme en résulte, car $N_0 - N_1 = n(g-1) - \ell$ par Riemann-Roch.

LEMME 2.6. — *Aucune composante irréductible de* $W_{X,n}^{\ell,r}$ *n'est entièrement contenue dans* $W_{X,n}^{\ell,r+1}$.

Preuve. — La démonstration est identique à celle de (1.6).

COROLLAIRE 2.7. — *Supposons que* $\widetilde{W}_{X,n}^{\ell,r}$ *soit lisse sur* $\mathbb{C}$, *purement de dimension* $\rho_{X,n}(\ell,r)$. *Alors* $W_{X,n}^{\ell,r}$ *est aussi purement de dimension* $\rho_{X,n}(\ell,r)$, *Cohen-Macaulay et réduit et son lieu singulier est contenu dans* $W_{X,n}^{\ell,r+1}$.

Preuve. — $W^{\ell,r} - W^{\ell,r+1}$ est isomorphe à $\widetilde{W}^{\ell,r} - (\pi^{\ell,r})^{-1}(W^{\ell,r+1})$, donc est lisse sur $\mathbb{C}$, purement de dimension $\rho(\ell,r)$. D'après (2.6), $W^{\ell,r}$ est donc purement de dimension $\pi(\ell,r)$ et par suite est Cohen-Macaulay (en tant que "variété" déterminentielle de la "bonne" dimension). Il s'en suit que $W^{\ell,r}$ n'a pas de composantes immergées et donc est réduit.

COROLLAIRE 2.8. — *Pour* $\ell \leq n(g-1)$, *le morphisme*

$$\pi_{X,n}^{\ell,0} : \widetilde{W}_{X,n}^{\ell,0} \longrightarrow W_{X,n}^{\ell,0}$$

coïncide avec le morphisme

$$\pi_{X,n}^{\ell} : \widetilde{W}_{X,n}^{\ell} \longrightarrow W_{X,n}^{\ell}$$

défini au numéro 1.

Preuve. — La seule chose à vérifier est que $W_{X,n}^{\ell,0}$ est réduit, ce qui résulte de (1.4) et (2.7).

Passons maintenant à l'étude différentielle des morphismes $\pi_{X,n}^{\ell,r}$. Comme dans la preuve (1.4), il est plus commode de travailler avec le "fibré de Stiefel" au sens de Grothendieck,

$$\dot{\pi}_{X,n}^{\ell,r} : \dot{\widetilde{W}}_{X,n}^{\ell,r} \longrightarrow W_{X,n}^{\ell,r} \subset \mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell} \tag{2.9}$$

des épimorphismes de $\mathcal{F}_{X,n}^{\ell}$ sur $\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell}}^{r+1}$, le groupe algébrique $GL_{r+1,\mathbb{C}}$ agit de manière évidente sur ce dernier fibré et

$$\widetilde{W}_{X,n}^{\ell,r} = \dot{\widetilde{W}}_{X,n}^{\ell,r} / GL_{r+1,\mathbb{C}}.$$

De façon ensembliste,

$$\mathrm{ob}\, \dot{\widetilde{W}}_{X,n}^{\ell,r}(\mathbb{C})$$

s'identifie canoniquement à l'ensemble des homomorphismes

$$\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L},$$

où $\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de rang n et de degré ℓ sur X, tels que $H^0(X,\sigma)$ soit injectif (par contre, pour $r > 0$, σ n'est pas injectif en général).

Proposition 2.10. — *Soit* $(\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L})$ *un point complexe de* $\dot{\widetilde{W}}{}_{X,n}^{\ell,r}$. *Alors, la fibre en* $(\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L})$ *du triangle distingué*

$$\mathbb{L}(\dot{\pi}_{X,n}^{\ell,r})^* L_{\mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell}/\mathbb{C}} \longrightarrow L_{\dot{\widetilde{W}}{}_{X,n}^{\ell,r}/\mathbb{C}} \longrightarrow L_{\dot{\widetilde{W}}{}_{X,n}^{\ell,r}/\,\mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell}} \longrightarrow$$

de la théorie du complexe cotangent (*cf.* [*II*, *II*(2.1.5.6)]) *s'identifie canoniquement au triangle distingué*

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) \longrightarrow \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, [\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) \\ \longrightarrow \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, (\Omega_X^1)^{r+1})[1] \longrightarrow$$

associé à la suite exacte courte de complexes

$$\big(0 \to \mathcal{L} \to [\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}] \to \mathcal{O}_X^{r+1}[1] \to 0\big) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1,$$

où le complexe $[\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}]$ *est concentré en degré* -1 *et* 0.

Preuve. — La preuve est similaire à celle de (1.4) et les détails sont laissés au lecteur.

Plus concrètement, on a la suite exacte longue

$$0 \to \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{-1}(\mathcal{L}, [\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, (\Omega_X^1)^{r+1}) \\ \xrightarrow{\mu_\sigma^0} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{0}(\mathcal{L}, [\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{1}(\mathcal{L}, (\Omega_X^1)^{r+1}) \xrightarrow{\mu_\sigma^1} \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{1}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{1}(\mathcal{L}, [\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) \longrightarrow 0$$

et le noyau (resp. le conoyau) de l'homomorphisme

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, (\Omega_X^1)^{r+1}) \xrightarrow{\mu_\sigma^0} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)$$

$$\big(\text{resp. } \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{1}(\mathcal{L}, (\Omega_X^1)^{r+1}) \xrightarrow{\mu_\sigma^1} \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{1}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)\big)$$

induit par $\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}$ est l'obstruction à la lissité de $\dot{\widetilde{W}}{}_{X,n}^{\ell,r}$ sur $\mathbb{C}$ en $(\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L})$ (resp. l'algèbre de Lie du groupe algébrique sur $\mathbb{C}$ des automorphismes de $(\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L})$).

COROLLAIRE 2.11

(i) *Soit* $(\mathcal{O}_X^{r+1} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L})$ *un point complexe de* $\dot{\widetilde{W}}{}^{\ell,r}_{X,n}$. *Alors :*

(a) *la dimension de* $\dot{\widetilde{W}}{}^{\ell,r}_{X,n}$ *en ce point est inférieure ou égale à*

$$n^2(g-1) - (r+1)\big(n(g-1) - \ell\big) + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \mu^0_\sigma;$$

(b) $\dot{\widetilde{W}}{}^{\ell,r}_{X,n}$ *est lisse sur* $\mathbb{C}$, *de dimension*

$$n^2(g-1) - (r+1)(n(g-1) - \ell),$$

en ce point si et seulement si $\operatorname{Ker} \mu^0_\sigma = 0$.

(ii) *Soit* $(\mathcal{L}, V \subset H^0(X, \mathcal{L}))$ *un point complexe de* $\widetilde{W}^{\ell,r}_{X,n}$. *Alors :*

(a) *la dimension de* $\widetilde{W}^{\ell,r}_{X,n}$ *en ce point est inférieure ou égale à*

$$\rho_{X,n}(\ell, r) + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \mu^0_{\mathcal{L},V},$$

où $\mu^0_{\mathcal{L},V} : V \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \Omega^1_X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X)$ *est la restriction à* $V \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \Omega^1_X)$ *du cup-produit*

$$\mu^0_{\mathcal{L}} : H^0(X, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \Omega^1_X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X\big)\ ;$$

(b) $\widetilde{W}^{\ell,r}_{X,n}$ *est lisse sur* $\mathbb{C}$, *de dimension* $\rho_{X,n}(\ell, r)$, *en ce point si et seulement si* $\operatorname{Ker} \mu^0_{\mathcal{L},V} = 0$.

(iii) *Soit* $\mathcal{L}$ *un point complexe de* $W^{\ell,r}_{X,n} - W^{\ell,r+1}_{X,n}$. *Alors :*

(a) *la dimension de* $W^{\ell,r}_{X,n}$ *en* $\mathcal{L}$ *est inférieure ou égale à*

$$\rho_{X,n}(\ell, r) + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \mu^0_{\mathcal{L}};$$

(b) $W^{\ell,r}_{X,n}$ *est lisse sur* $\mathbb{C}$, *de dimension* $\rho_{X,n}(\ell, r)$, *en ce point si et seulement si* $\operatorname{Ker} \mu^0_{\mathcal{L}} = O$; *de plus, si tel est le cas, le conormal en* $\mathcal{L}$ *à l'inclusion*

$$W^{\ell,r}_{X,n} \hookrightarrow \operatorname{Fib}^{\ell}_{X,n}$$

s'identifie canoniquement à $\operatorname{Im} \mu^0_{\mathcal{L}}$.

Preuve. — (ii) (resp. (iii)) résulte immédiatement de (i) (resp. (ii)). Quant à (i), il suffit de remarquer que, pour tout champ algébrique S sur $\mathbb{C}$ et pour tout $s \in \operatorname{ob} S(\mathbb{C})$, on a

$$\dim_s S \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^0\big(L_{S(s)}\big) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^1\big(L_{S(s)}\big)$$

(la dimension en un point d'un schéma est majoré par de dimension de l'espace tangent de Zariski en ce point).

3. Estimations sur la dimension des $\mathbf{W}^{\mathbf{l},\mathbf{r}}_{\mathbf{X},\mathbf{n}}$

Les résultats de ce numéro sont basés sur le lemme suivant dû à HOPF (*cf.* [Ho]).

LEMME 3.1 (HOPF). — *Soient A, B, C trois espaces vectoriels complexes de dimension finie et $\mu : A \otimes_{\mathbb{C}} B \to C$ une application bilinéaire de $A \times B$ dans C vérifiant la condition suivante : pour tous les $a \in A$, $b \in B$, on a $\mu(a \otimes b) = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$. Alors, on a l'inégalité*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mu(A \otimes_{\mathbb{C}} B) \geq \dim_{\mathbb{C}} A + \dim_{\mathbb{C}} B - 1$$

et a fortiori l'inégalité

$$\dim_{\mathbb{C}} C \geq \dim_{\mathbb{C}} A + \dim_{\mathbb{C}} B - 1$$

PROPOSITION 3.2. — *Pour tout entier $\ell \leq n(g-1)$ et $r \geq 0$, chacune des composantes irréductibles de $W^{\ell,r}_{X,n}$ est de codimension supérieure ou égale à $2r$ dans $W^{\ell}_{X,n} = W^{\ell,0}_{X,n}$.*

Preuve. — Soit $\mathcal{L}$ un point complexe de $W^{\ell,r} - W^{\ell,r+1}$ et soit

$$\mu : H^0(X, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \Omega^1_X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X\big)$$

le cup-produit correspondant. Il résulte de (2.11) que la dimension de $W^{\ell,r}$ en $\mathcal{L}$ est inférieure ou égale à

$$\rho(\ell, r) + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \mu.$$

Par suite, il suffit de montrer que

$$\rho(\ell, r) + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \mu \leq \dim W^{\ell} - 2r,$$

i.e. que

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \mu \leq r\big(r - \ell + n(g-1)\big)$$

d'après (1.6). Or le cup-produit μ vérifie clairement les conditions d'applications du lemme de Hopf rappelé ci-dessus : pour $u : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ et $v : \mathcal{L} \to \Omega^1_X$, $\mu(u \otimes v)$ est l'homomorphisme composé

$$\mathcal{L} \xrightarrow{v} \Omega^1_X \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}_{\Omega^1_X}} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$$

et $\mu(u \otimes v) = 0$ si et seulement si $u = 0$ ou $v = 0$. On a donc

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} \mu \geq \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}) + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \Omega^1_X) - 1$$

soit

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} \mu \geq 2r + 1 - \ell + n(g-1)$$

puisque $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}) = r + 1$ par hypothèse et donc

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \Omega_X^1) = r + 1 - \ell + n(g-1)$$

par dualité et Riemann-Roch. Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$r\big(r - \ell + n(g-1)\big) + \big(2r + 1 - \ell + n(g-1)\big)$$
$$= (r+1)\big(r + 1 - \ell + n(g-1)\big).$$

COROLLAIRE 3.3. — *Pour tout entier ℓ et $r \geq 0$ avec*

$$r + 1 - \ell + n(g-1) > 0$$

(*condition* (2.3)), *on a*

$$\dim W_{X,n}^{\ell,r} \leq n^2(g-1) - \big(2r + 1 - \ell + n(g-1)\big).$$

Preuve. — Pour $\ell \leq n(g-1)$, ce n'est autre qu'une reformulation de (3.2). Pour $\ell > n(g-1)$, on se ramène au cas précédant par le lemme suivant :

LEMME 3.4. — *L'isomorphisme*

$$\iota : \operatorname{Fib}_{X,n}^{\ell} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Fib}_{X,n}^{\ell'},$$

où $\ell + \ell' = 2n(g-1)$ défini par

$$\iota(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$$

induit pour tout entier $r \geq 0$ tel que $r+1-\ell+n(g-1) > 0$ un isomorphisme de $W_{X,n}^{\ell,r}$ sur $W_{X,n}^{\ell',r'}$ où

$$r' = r - \ell + n(g-1).$$

Preuve. — Il est clair que ι induit une équivalence de catégories entre $W^{\ell,r}(\mathbb{C})$ et $W^{\ell',r'}(\mathbb{C})$ puisque

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0\big(X, \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1\big) + \ell - n(g-1)$$

pour tout $\mathcal{L} \in \operatorname{ob} \operatorname{Fib}^{\ell}(\mathbb{C})$. Pour prouver le lemme, il faut montrer que le r-ième Idéal de Fitting de

$$\mathbb{R}^1 \operatorname{pr}_{2*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \operatorname{Fib}^{\ell}}}\big(\mathcal{U}^{\ell}, \operatorname{pr}_1^* \Omega_X^1\big)$$

coïncide avec le r'-ième Idéal de Fitting de

$$\mathbb{R}^1 \operatorname{pr}_2 \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^\ell}}\big((\mathcal{U}^\ell)^* \otimes \operatorname{pr}_1^* \Omega_X^1, \operatorname{pr}_1^* \Omega_X^1\big)$$

i.e. de

$$\mathbb{R}^1 \operatorname{pr}_{2*} \mathcal{U}^\ell.$$

Ce problème est local sur Fib^ℓ. Or, localement sur Fib^ℓ, on peut représenter l'objet

$$\mathbb{R} \operatorname{pr}_{2*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}^\ell}}(\mathcal{U}^\ell, \operatorname{pr}_1^* \Omega_X^1)$$

de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell})$ par un complexe de la forme

$$\big[(\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell})^{N_0} \xrightarrow{A} (\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell})^{N_1}\big],$$

où A est une matrice $N_1 \times N_0$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell}$ et où

$$N_0 - N_1 = n(g-1) - \ell.$$

Mais alors, l'objet

$$R \operatorname{pr}_{2*} \mathcal{U}^\ell$$

de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell})$ est représenté, localement sur Fib^ℓ, par le complexe

$$\big[(\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell})^{N_1} \xrightarrow{{}^tA} (\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^\ell})^{N_0}\big]$$

(dualité de Serre) et tout revient à voir que l'Idéal engendré par les $(N_1 - r) \times (N_1 - r)$ mineurs de A coïncide avec l'Idéal engendré par les $(N_0 - r') \times (N_0 - r')$ mineurs de ${}^tA$, ce qui est immédiat.

Appliquons maintenant (3.3) au calcul de l'objet

$$K^\ell_{X,n} = \mathbb{R}(\pi^\ell_{X,n})_* \underline{\mathbb{C}}\,[\ell + n(n-1)(g-1) - 1] \tag{3.5}$$

de $D_c(\mathrm{Fib}^\ell_{X,n}, \mathbb{C})$, image directe (à un décalage près) du faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}$ sur $\widetilde{W}^\ell_{X,n}$ par l'application d'Abel-Jacobi $\pi^\ell_{X,n} : \widetilde{W}^\ell_{X,n} \to \mathrm{Fib}^\ell_{X,n}$.

Comme $\widetilde{W}^\ell_{X,n}$ est lisse sur $\mathbb{C}$, de dimension pure $\ell + n(n-1)(g-1) - 1$ (*cf.* (1.4)) et que $\pi^\ell_{X,n}$ est un morphisme projectif, $K^\ell_{X,n}$ a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 3.6

(i) *$K^{\ell}_{X,n}$ est autodual.*

(ii) *$K^{\ell}_{X,n}$ est isomorphe dans $D_c(\mathrm{Fib}_{X,n},\mathbb{C})$ à la somme directe*

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^i(K^{\ell}_{X,n})[-i]$$

de ses faisceaux de cohomologie pervers.

(iii) *Chaque faisceau de cohomologie pervers ${}^p\mathcal{H}^i(K^{\ell}_{X,n})$ est semi-simple.*

Preuve. — Cela résulte du théorème de dualité pour les morphismes propres ([SGA4] XVIII 3) et du théorème de décomposition de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber ([B-B-D] (6.2.5)).

Il reste à calculer les constituants des ${}^p\mathcal{H}^i(K^{\ell}_{X,n})$. Pour cela nous utiliserons les notations suivantes :

NOTATIONS 3.7

(i) *Pour tout entier $r \geq 0$ tel que $r+1-\ell+n(g-1) > 0$, on note $(W^{\ell,r}_{X,n,\alpha})_{\alpha\in A_r}$ la famille des composantes irréductibles de $W^{\ell,r}_{X,n}$ de dimension exactement $n^2(g-1)-\big(2r+1-\ell+n(g-1)\big)$.*

(ii) *Si $W \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{Fib}^{\ell}$ est un sous-champ fermé irréductible de dimension w, on note simplement $\underline{\mathrm{IC}}(W,\mathbb{C})$ le complexe d'intersection de W prolongé par zéro à Fib^{ℓ} tout entier, i.e. le faisceau pervers*

$$i_* j_{!*}\underline{\mathbb{C}}[w]$$

où $j : W^0 \hookrightarrow W$ est un ouvert dense arbitraire tel que $(W^0)_{\mathrm{red}}$ soit lisse sur $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 3.8

(i) *Pour $\ell \leq n(g-1)$, $K^{\ell}_{X,n}$ est en fait un faisceau pervers et plus précisément*

$$K^{\ell}_{X,n} = \bigoplus_{r\geq 0}\bigoplus_{\alpha\in A_r} \underline{\mathrm{IC}}(W^{\ell,r}_{X,n,\alpha},\mathbb{C}).$$

(ii) *Pour $\ell > n(g-1)$, on a*

$$K^{\ell}_{X,n} = \bigoplus_{i=0}^{\ell-n(g-1)-1} \underline{\mathbb{C}}\big[n(n-1)(g-1)+\ell-1-2i\big] \oplus \overline{K}^{\ell}_{X,n}$$

où $\overline{K}^{\ell}_{X,n}$ est un faisceau pervers autodual. Plus précisément, on a

$$\overline{K}^{\ell}_{X,n} = \bigoplus_{r\geq \ell-n(g-1)}\bigoplus_{\alpha\in A_r} \underline{IC}(W^{\ell,r}_{X,n,\alpha},\mathbb{C}).$$

Preuve. — Supposons tout d'abord $\ell \leq n(g-1)$. Comme π^ℓ est un fibré projectif de rang constant r au dessus de $W^{\ell,r} - W^{\ell,r+1}$ pour tout $r \geq 0$, on voit que

$$\mathcal{H}^i(K^\ell) = 0$$

dès que $i+\ell+n(n-1)(g-1)+1$ est impair ou que $i < -\ell-n(n-1)(g-1)+1$ et que, pour tout $r \geq 0$,

$$\operatorname{Supp} \mathcal{H}^{2r-\ell-n(n-1)(g-1)+1}(K^\ell) = W^{\ell,r}.$$

D'après (3.3), on en déduit que

$$\operatorname{Supp} \mathcal{H}^i(K^\ell) \leq -i$$

pour tout i et donc que K^ℓ est pervers puisque K^ℓ est autodual. De plus, la restriction de $\mathcal{H}^i(K^\ell)$ à $W^{\ell,r} - W^{\ell,r+1}$ est, soit nulle, soit constante de valeur $\mathbb{C}$. La décomposition annoncée de K^ℓ en somme directe de complexes d'intersection en résulte aussitôt.

Supposons maintenant $\ell > n(g-1)$. Comme π^ℓ est un fibré projectif de rang constant $\ell - n(g-1) - 1$ sur l'ouvert dense $\mathrm{Fib}^\ell - W^{\ell,\ell-n(g-1)}$ de Fib^ℓ, on peut décomposer K^ℓ en

$$K^\ell = \bigoplus_{i=0}^{\ell-n(g-1)-1} \underline{\mathbb{C}}\big[n(n-1)(g-1)+\ell-1-2i\big] \oplus \overline{K}^\ell,$$

où $\overline{K}^\ell \in \operatorname{ob} D_c(\mathrm{Fib}^\ell, \mathbb{C})$; de plus, comme K^ℓ est autodual, $\overline{K}^\ell$ l'est aussi. On termine la démonstration comme dans le cas $\ell \leq n(g-1)$.

Corollaire 3.9. — *Pour tout couple d'entiers (ℓ, ℓ') avec*

$$\ell \leq n(g-1) \leq \ell' \quad \textit{et} \quad \ell + \ell' = 2n(g-1),$$

l'objet

$$\iota^* K^{\ell'}_{X,n}$$

de $D_c(\mathrm{Fib}^\ell, \mathbb{C})$, où $\iota : \mathrm{Fib}^\ell_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}^{\ell'}_X$ est l'isomorphisme canonique défini par $\iota(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ est isomorphe à

$$K^\ell_{X,n} \oplus \bigoplus_{i=0}^{\ell-n(g-1)-1} \underline{\mathbb{C}}\big[n(n-1)(g-1)+\ell-1-2i\big].$$

Preuve. — En d'autres termes $\iota^* \overline{K}^{\ell'}_{X,n}$ est isomorphe à $K^\ell_{X,n}$, ce qui résulte aussitôt de (3.8) et (3.4).

Terminons ce numéro par une autre conséquence du lemme de Hopf.

PROPOSITION 3.10. — *Pour tout fibré vectoriel spécial $\mathcal{L}$ de rang n et de degré ℓ, on a l'inégalité*

$$r(\mathcal{L}) \leq \tfrac{1}{2}n(n-1)(g-1) + \tfrac{1}{2}\ell + \tfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}) - 1$$

où on a posé

$$r(\mathcal{L}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{L}) - 1.$$

Preuve. — On a d'une part

$$r(\mathcal{L}) - r\big(\mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X\big) = \ell - n(g-1)$$

(dualité et Riemann-Roch). D'autre part, on peut appliquer le lemme de Hopf au cup-produit

$$\mu : H^0(X,\mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\Omega^1_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X\big)$$

(voir la preuve de (3.2)) de sorte que

$$r(\mathcal{L}) + r\big(\mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X\big) + 1 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X\big).$$

Or

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X\big) = n^2(g-1) + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}),$$

d'où la conclusion.

4. Diviseur thêta pour les fibrés vectoriels de rang n

Considérons la composante connexe $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}$ du champ algébrique des fibrés vectoriels de rang n sur X, le sous-champ fermé

$$W^{n(g-1)}_{X,n} \subset \mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}$$

et son éclatement canonique

$$\pi^{n(g-1)}_{X,n} : \widetilde{W}^{n(g-1)}_{X,n} \longrightarrow W^{n(g-1)}_{X,n}.$$

On a démontré dans les paragraphes précédents les propriétés suivantes de $W^{n(g-1)}_{X,n}$ et $\pi^{n(g-1)}_{X,n}$:

4.1 Propriétés de $W^{n(g-1)}_{X,n}$ et $\pi^{n(g-1)}_{X,n}$.

(i) $\widetilde{W}^{n(g-1)}_{X,n}$ *est lisse sur* $\mathbb{C}$, *purement de dimension* $n^2(g-1)-1$, $\pi^{n(g-1)}_{X,n}$ *est birationnel et chaque composante connexe de* $W^{n(g-1)}_{X,n}$ *est irréductible et de codimension* 1 *dans* $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}$.

(ii) $W^{n(g-1)}_{X,n}$ *est réduit, Cohen-Macaulay et normal; son lieu singulier est contenu dans le fermé de codimension* ≥ 2 $W^{n(g-1),1}_{X,n}$ *de* $W^{n(g-1)}_{X,n}$.

(iii) $W^{n(g-1)}_{X,n}$ *est stable par l'involution* $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ *de* $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}$.

Seule la normalité n'est pas explicitement mentionnée dans les paragraphes précédents mais elle résulte des autres propriétés de $W^{n(g-1)}_{X,n}$.

Considérons d'autre part le fibré déterminant

$$\mathcal{D}_{X,n} = \det\big(R\,\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{U}^{n(g-1)}_{X,n}[1]\big) \tag{4.2}$$

de l'objet $R\,\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{U}^{n(g-1)}_{X,n}[1] \in \mathrm{ob}\,D^b_{coh}(\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}})$ (*cf.* [K-M]). C'est un Module inversible sur $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}$ dont la fibre en un point complexe $\mathcal{L}$ de $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel complexe de dimension 1.

$$\det\big(R\Gamma(X,\mathcal{L})\big)^* = \Big(\bigwedge\nolimits^{h(\mathcal{L})} H^0(X,\mathcal{L})\Big)^* \otimes_{\mathbb{C}} \Big(\bigwedge\nolimits^{h(\mathcal{L})} H^1(X,\mathcal{L})\Big)$$

où

$$h(\mathcal{L}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{L}) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{L})$$

(par Riemann-Roch, on a $\chi(X,\mathcal{L}) = 0$). Par dualité de Grothendieck, on a aussi

$$\mathcal{D}^{-1}_{X,n} = \det\Big(\mathbb{R}\,\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}}}\big(\mathcal{U}^{n(g-1)}_{X,n}, \mathrm{pr}_1^*\,\Omega^1_X\big)\Big). \tag{4.3}$$

Comme $R\,\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{U}^{n(g-1)}_{X,n}$ est identiquement nul sur l'ouvert complémentaire de $W^{n(g-1)}_{X,n}$ dans $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n}$, $\mathcal{D}_{X,n}$ est muni d'une trivialisation canonique

$$\theta : \mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n} - W^{n(g-1)}_{X,n}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{X,n}\big|\big(\mathrm{Fib}^{n(g-1)}_{X,n} - W^{n(g-1)}_{X,n}\big)$$

au-dessus de cet ouvert.

PROPOSITION 4.5. — *La trivialisation θ ci-dessus se prolonge en une section canonique notée encore*

$$\theta : \mathcal{O}_{\mathrm{Fib}_{X,n}^{n(g-1)}} \hookrightarrow \mathcal{D}_{X,n}$$

dont le diviseur des zéros est exactement le sous-champ fermé réduit $W_{X,n}^{n(g-1)}$ *de* $\mathrm{Fib}_{X,n}^{n(g-1)}$.

Preuve. — Le problème est local sur $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}$. Or, localement sur $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}$, l'objet

$$R\,\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{U}_{X,n}^{n(g-1)}[1]$$

de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^{n(g-1)}})$ peut être représenté par un complexe de la forme

$$[\mathcal{E}^1 \xrightarrow{A} \mathcal{E}^0],$$

où

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^0 = \big(\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^{n(g-1)}}\big)^N$$

et A est une matrice carrée d'ordre N à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^{n(g-1)}}$, et $W^{n(g-1)}$ est défini par l'équation

$$\det(A) = 0$$

dans $\mathrm{Fib}^{n(g-1)}$. Comme le déterminant du complexe $[\mathcal{E}^1 \xrightarrow{A} \mathcal{E}^0]$ est canoniquement isomorphe à

$$\big(\Lambda^N \mathcal{E}^1\big)^* \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^{n(g-1)}}} \big(\Lambda^N \mathcal{E}^0\big),$$

$\det(A)$ définit une section de $\det([\mathcal{E}^1 \xrightarrow{A} \mathcal{E}^0])$. D'où la conclusion.

Cette proposition justifie la définition suivante :

DÉFINITION (4.6). — *On appellera* diviseur théta *pour les fibrés vectoriels de rang n sur X le diviseur de Cartier* $W_{X,n}^{n(g-1)}$ *de* $\mathrm{Fib}_{X,n}^{n(g-1)}$.

5. Connexité des $\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbf{l}}_{\mathbf{X,n}}$ et irréductibilité des $\mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{\mathbf{X,n}}$

L'objet de ce numéro est de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — *Pour tout entier ℓ, le champ algébrique $\widetilde{W}^{\ell}_{X,n}$ est connexe.*

Compte-tenu de (1.4), cette proposition admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.2. — *Pour tout entier $\ell \leq n(g-1)$, le sous-champ fermé réduit $W^{\ell}_{X,n}$ de $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X,n}$ est irréductible (ou vide). En particulier, le diviseur thêta $W^{n(g-1)}_{X,n}$ est intègre.*

REMARQUE 5.3. — On a vu en (1.9) que $W^{\ell}_{X,n} \neq \emptyset$ sauf pour $n = 1$ et $\ell < 0$.

Preuve de la Proposition. — Pour $n = 1$ et $\ell < 0$, $\widetilde{W}^{\ell}$ est vide; pour $n = 1$ et $\ell \geq 0$, la puissance symétrique ℓ-ième de X est un $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$-torseur au dessus de $\widetilde{W}^{\ell}$. D'où la proposition pour $n = 1$.

On peut donc supposer $n \geq 2$. On peut aussi remplacer $\widetilde{W}^{\ell}$ par $\dot{\widetilde{W}}^{\ell}$, qui est un $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$-torseur sur $\widetilde{W}^{\ell}$ (*cf.* preuve de (1.4)). Considérons alors l'ouvert $(\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$ de $\dot{\widetilde{W}}^{\ell}$ dont les points complexes sont les inclusions $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{L}$ qui sont maximales, *i.e.* telles que $\mathcal{L}/\mathcal{O}_X$ soit sans torsion et donc soit un fibré vectoriel de rang $(n-1)$ et degré ℓ sur X. Cet ouvert est dense dans $\dot{\widetilde{W}}^{\ell}$. En effet, d'après (1.4), $\dot{\widetilde{W}}^{\ell}$ est lisse sur $\mathbb{C}$, purement de dimension $\ell + n(n-1)(g-1)$, donc il suffit de montrer que la dimension du fermé complémentaire est majorée par $\ell + n(n-1)(g-1) - 1$. Or, si $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{L}$ n'est pas maximale, il existe $x \in X$ tel que l'inclusion $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{L}$ se factorise en $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{L}(-x) \hookrightarrow \mathcal{L}$; par suite, la dimension de $\dot{\widetilde{W}}^{\ell} - (\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$ est majorée par

$$\dim X + \dim \dot{\widetilde{W}}^{\ell-n} = \ell + n(n-1)(g-1) - (n-1),$$

d'où l'assertion.

On est donc ramené à prouver la connexité de $(\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$. Pour cela, considérons le morphisme (non représentable) de champs

$$\varphi : (\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0 \longrightarrow \mathrm{Fib}^{\ell}_{n-1}$$

défini par

$$\varphi(\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{L}) = \mathcal{L}/\mathcal{O}_X.$$

Il est clair que ce morphisme φ identifie $(\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$ au champ des extensions

$$e = \big(0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0\big)$$

où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont des fibrés vectoriels sur X de rang n et $(n-1)$ respectivement et de degré ℓ. Il s'en suit que $(\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0/\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}$ est le champ de Picard relatif associé à l'objet

$$\mathbb{R}\operatorname{pr}_{2*}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}}}(\mathcal{U}_{n-1}^{\ell},\mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}})[1]$$

de $D_{\mathrm{coh}}^{[-1,0]}(\mathcal{O}_{\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}})$ (*cf.* [SGA 4, XVIII 1.4]). En termes plus concrets, représentons au dessus d'un ouvert de $\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}$ l'objet ci-dessus de

$$D_{\mathrm{coh}}^{[-1,0]}(\mathcal{O}_{\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}})$$

par un complexe de la forme

$$[\mathcal{E}^{-1}\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathcal{E}^0]$$

où $\mathcal{E}^{-1}$ et $\mathcal{E}^0$ sont deux $\mathcal{O}_{\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}}$-Modules localement libres. Alors, au-dessus de cet ouvert de $\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}$, $(\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$ est le champ relatif associé au préchamp relatif suivant : pour tout schéma S au-dessus de l'ouvert considéré de $\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}$, la catégorie des sections du préchamp est la catégorie dont les objets sont les sections de $\mathcal{E}^0$ et dont les flèches entre deux objets $s_1, s_2 \in \mathcal{E}^0(S)$ sont les sections t de $\mathcal{E}^{-1}$ telles que

$$s_2 - s_1 = \mathrm{d}(t).$$

En particulier, la restriction de $(\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$ à l'ouvert de $\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}$ considéré est dominée par le fibré vectoriel usuel $\mathbb{V}((\mathcal{E}^0)^*)$ des sections de $\mathcal{E}^0$: on a un morphisme représentable, lisse et surjectif

$$\mathbb{V}((\mathcal{E}^0)^*)\longrightarrow\Big((\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0|_{\text{ouvert considéré de }\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}}\Big).$$

Par suite, si dans la construction précédente on choisit dès le départ un ouvert connexe de $\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}$, la restriction de $(\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$ à cet ouvert sera connexe.

On termine alors la démonstration comme suit. Pour tout diviseur effectif E sur X, soit $\operatorname{Fib}_{n-1,E}^{\ell}$ l'ouvert de $\operatorname{Fib}_{n-1}^{\ell}$ formé des $\mathcal{L}'$ tels que

$$H^0(X,\mathcal{L}'(-E)) = 0\,;$$

$\mathrm{Fib}^{\ell}_{n-1}$ est clairement la réunion filtrante croissante des ouverts $\mathrm{Fib}^{\ell}_{n-1,E}$ et chacun de ces ouverts est connexe puisque $\mathrm{Fib}^{\ell}_{n-1}$ l'est. Au dessus de $\mathrm{Fib}^{\ell}_{n-1,E}$, on peut représenter

$$\mathbb{R}\,\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{H}om(\mathcal{U}^{\ell}_{n-1},\mathcal{O})[1] \in \mathrm{ob}\,D^{[-1,0]}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O})$$

par le complexe

$$\Big[\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{U}^{\ell}_{n-1}/\mathcal{U}^{\ell}_{n-1}(-\mathrm{pr}_1^*E),\mathcal{O}) \xrightarrow{\partial} \mathbb{R}^1\,\mathrm{pr}_{2*}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{U}^{\ell}_{n-1}(-\mathrm{pr}_1^*E),\mathcal{O})\Big]$$

à composantes localement libres sur $\mathcal{O}_{\mathrm{Fib}^{\ell}_{n-1,E}}$ ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Fib}^{\ell}_{n-1}}$). Par suite, $\varphi^{-1}(\mathrm{Fib}^{\ell}_{n-1,E}) \subset (\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$ est un ouvert connexe et $(\dot{\widetilde{W}}^{\ell})^0$ est connexe en tant que réunion filtrante croissante d'ouverts connexes.

BIBLIOGRAPHIE

[A-C-G-H] ARBARELLO (E.), CORNALBA (M.), GRIFFITHS (P.A.) and HARRIS (J.). — *Geometry of Algebraic Curves, vol. I.* — Springer-Verlag, 1984.

[B-B-D] BEILINSON (A.A.), BERNSTEIN (J.) et DELIGNE (P.). — *Faisceaux pervers.* — Astérisque 100.

[Dr] DRINFELD (C.G.). — *Lettre à P. Deligne du 22 juin 1981.*

[Ho] HOPF (H.). — Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra, *Comment. Math. Helv.*, t. **13**, 1940–41, p. 219–239.

[Il] ILLUSIE (L.). — Complexe cotangent et déformations I, *Lecture Notes in Math.*, t. **239**, 1971.

[K-M] KNUDSEN (F.) and MUMFORD (D.). — The projectivity of the moduli space of stable curves I, *Math. Scand.*, t. **39**, 1976, p. 19–55.

[L] LAUMON (G.). — Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions, *Duke Math. J.*, t. **54**, 1987, p. 309–359.

[SGA4] ARTIN (M.), GROTHENDIECK (A.) and VERDIER (J.L.). — Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1963–64. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, *Lecture Notes in Math.*, t. **305**, 1973.