BULLETIN DE LA S. M. F.

F. PATRAS

# Construction géométrique des idempotents eulériens. Filtration des groupes de polytopes et des groupes d'homologie de Hochschild

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 119, nº 2 (1991), p. 173-198
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_173_0>

*Bull. Soc. math. France,*
119, 1991, p. 173–198.

# CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES IDEMPOTENTS EULÉRIENS. FILTRATION DES GROUPES DE POLYTOPES ET DES GROUPES D'HOMOLOGIE DE HOCHSCHILD

PAR

F. PATRAS (*)

RÉSUMÉ. — Il est possible de démontrer, par des méthodes entièrement géométriques, l'existence d'une famille d'idempotents orthogonaux dans l'algèbre $\mathbb{Q}[S_n]$, ainsi que certaines propriétés remarquables de ces idempotents (comme la commutativité au bord de Hochschild abstrait). Ces résultats reposent sur l'étude de l'action des homothéties dans des groupes de polytopes.

Ils permettent de retrouver, à la manière de constructions dues à J.-L. Loday, la filtration des groupes d'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative à coefficients dans un bimodule symétrique.

ABSTRACT. — We prove, through geometrical means, the existence of a family of orthogonal idempotents in the algebra $\mathbb{Q}[S_n]$. We also esablish some properties of these idempotents (commutativity with Hochschild's abstract boundary, for example).

Applying this, and following ideas of J.-L. Loday, we construct the filtration of the Hochschild homology of a commutative algebra.

## Introduction

Les travaux récents de Jean-Louis LODAY en homologie de Hochschild et en homologie cyclique [4] montrent l'importance de certaines propriétés de type combinatoire liées aux "battages de cartes" (ou "shuffles"). Lors d'une note récente [5], nous montrions comment il est possible de donner une application géométrique des calculs de [4] et de retrouver par l'intermédiaire des opérations combinatoires liées aux battages certains résultats classiques en théorie des polytopes. Le présent travail adopte le point

(*) Texte reçu le 28 juin 1990.
F. PATRAS, D.M.I., E.N.S., 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 5, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1991/173/$ 5.00

de vue opposé et montre entre autres comment établir, par des arguments élémentaires de géométrie simpliciale, les égalités combinatoires de [4].

L'idée fondamentale reste celle de [5] : faire opérer le $n$-ième groupe symétrique $S_n$ sur les simplexes ordonnés de dimension $n$. Si l'on définit ces opérations sur des groupes de polytopes bien choisis, certains calculs sur l'algèbre sur les rationnels du groupe $S_n$ peuvent s'effectuer de manière purement géométrique.

Après avoir construit un modèle géométrique : “l'anneau des simplexes”, nous permettant d'interpréter les calculs liés aux opérations de battage, nous nous attacherons successivement à établir quelques égalités liées à ces opérations, puis certaines propriétés d'éléments de $\mathbb{Q}[S_n]$- les opérations d'Adams de [5], qui opèrent comme les homothéties sur l'anneau des simplexes et sont, au signe près les $\lambda$-opérations de [4]. Nous démontrons ainsi, entre autres, l'existence pour tout $n$ d'une famille d'idempotents orthogonaux dans $\mathbb{Q}[S_n]$ permettant d'obtenir une décomposition en somme directe de tout groupe muni d'une structure de $\mathbb{Q}[S_n]$-module.

Par l'intermédiaire de raisonnements géométriques élémentaires dans une sous-catégorie $CS$ de la catégorie des ensembles finis pointés, nous retrouvons la filtration des groupes d'homologie de Hochschild des algèbres commutatives établie dans [4]. Nous retrouvons également la décomposition du groupe des polytopes d'un espace euclidien établie dans [5].

De fait, une fois effectuée la construction de l'anneau des simplexes, ces différents résultats découlent tous des propriétés élémentaires des homothéties.

Je tiens tout particulièrement à remercier Pierre CARTIER, pour ses indications quant à la manière d'interpréter certains résultats combinatoires à l'aide de modèles simpliciaux, ainsi que pour ses nombreux conseils lors de l'élaboration de cet article.

Ce dernier est divisé en quatre parties :

I. L'anneau des simplexes $\Delta_\bullet$.
II. Décompositions et opérations sur $\Delta_\bullet$.
III. Filtration de l'anneau des simplexes.
IV. Catégorie $CS$ et applications.

## I. L'anneau des simplexes $\Delta_\bullet$

Ce paragraphe a pour fondement les idées de HADWIGER [3] : celui-ci s'intéressant à la théorie des polytopes dans des espaces affines réels à été amené à établir certaines propriétés d'un produit géométrique, le produit de Minkowski [3, I.2.2]. Ce produit s'interprète facilement en termes d'opérations de type combinatoire sur les simplexes, au travers de la notion de battage.

En fait si, plutôt que de s'intéresser comme HADWIGER à la théorie des polytopes, l'on cherche à établir de manière géométrique des propriétés de type combinatoire, il est profitable de définir ces opérations sur des groupes de polytopes à sommets dans certains sous-ensembles discrets des espaces affines réels. C'est là la motivation initiale de la construction de l'anneau des simplexes $\Delta_\bullet$, quelque intérêt qu'il puisse par ailleurs présenter en lui-même.

### I.1. Définitions préalables.

*I.1.a. Groupes de polytopes.* — Afin d'éviter par la suite toute ambiguïté, nous commençons par rappeler les définitions suivantes.

Soient $M$ un espace affine réel de dimension $n$, et $G$ un groupe de transformations affines de cet espace. On appelle *polytope convexe* de $M$ tout sous-ensemble de $M$ s'écrivant comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Un polytope convexe est dit *dégénéré* (resp. *$k$-dégénéré*, où $k \leq n$) s'il est contenu dans un hyperplan affine de $M$ (resp. dans un sous-espace affine de $M$ de dimension $k-1$).

Plus généralement, on appelle *polytope* de $M$ toute réunion finie de polytopes convexes de $M$. Un polytope est dit *non-dégénéré* s'il contient un polytope convexe non-dégénéré.

Définissons alors le groupe $LP(M)$ comme le $\mathbb{Q}$-module libre sur l'ensemble des polytopes de $M$. On appellera *groupe de polytopes associé à $M$* et on notera $\mathcal{P}(M)$ le groupe quotient de $LP(M)$ par le sous $\mathbb{Q}$-module engendré par les éléments $(Q - \sum_{i=1}^{n} P_i)$ de $LP(M)$, $n$ parcourant $\mathbb{N}^*$, tels que les polytopes $P_i$ et $Q$ appartiennent à $LP(M)$ et satisfassent à :

i) Pour $i, j$ distincts dans $[1, n]$, $P_i \cap P_j$ est un polytope dégénéré de $M$ ;

ii) $\bigcup_{i \in [1,n]} P_i = Q$.

L'action de $G$ sur $M$ induit une action de $G$ sur $\mathcal{P}(M)$. On appellera *groupe de polytopes associé à $M$ et $G$*, et on notera $\mathcal{P}(M, G)$, le groupe $H_0(G, \mathcal{P}(M))$.

REMARQUE 1. — On rappelle que, si $H$ est un groupe et $L$ un $\mathbb{Z}H$-module à gauche, $H_0(H, L)$ désigne le groupe quotient de $L$ par le sous-$\mathbb{Z}H$-module engendré par les éléments $\ell - h \cdot \ell$, où $h$ parcourt $H$ et $\ell$ parcourt $L$.

Si $P$ est un polytope de $M$, nous noterons désormais $[P]$ sa classe dans $\mathcal{P}(M)$ (ou éventuellement dans $\mathcal{P}(M, G)$). Remarquons que si $P$ est un polytope dégénéré, sa classe $[P]$ est nulle, compte tenu des relations i) et ii).

*I.1.b. Polytopes orientés.* — Nous aurons par la suite à parler de polytopes orientés. Choisissons une base ordonnée $(e_1^n, \ldots, e_n^n)$ de $M$, et fixons sur $M$ l'orientation définie par cette base ordonnée. Nous appellerons *polytope orienté* de $M$ la donnée d'un polytope $P$ et d'une orientation de l'espace. Si cette orientation coïncide avec l'orientation fixée sur $M$, nous dirons que $P$ est orienté positivement; nous dirons que $P$ est orienté négativement dans le cas contraire.

En d'autres termes, la donnée d'un polytope orienté de $M$ équivaut à la donnée d'un couple $(P, \varepsilon)$, où $P$ est un polytope et $\varepsilon$ un élément de $\{-1, 1\}$, avec la convention : $\varepsilon = 1$ si l'orientation est positive, $\varepsilon = -1$ sinon.

Considérons l'application :

$$\begin{gathered} LP(M) \times \{-1, 1\} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{P}(M, G) \\ (P, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cdot [P] \ ; \end{gathered}$$

elle permet d'associer à tout polytope orienté un élément de $\mathcal{P}(M, G)$. Par abus, si $P$ est un polytope de $M$, nous appellerons l'élément $-[P]$ de $\mathcal{P}(M, G)$ : *la classe dans $\mathcal{P}(M, G)$ du polytope $P$ affecté d'une orientation négative.*

*I.1.c. Simplexes.* — Un $k$-simplexe de $M$ est un polytope enveloppe convexe de $k+1$ points de $M$. Un *$k$-simplexe ordonné* est alors défini par la donnée d'une suite ordonnée de $k+1$ points $(x_0, \ldots, x_k)$ ou, de manière équivalente, par la donnée d'un point et d'une suite ordonnée de $k$ vecteurs — qui représentent les arêtes successives du $k$-simplexe : $(x_0 / \overline{x_0 x_1} / \cdots / \overline{x_{k-1} x_k})$.

Le *$k$-simplexe sous-jacent* à un $k$-simplexe ordonné est, par définition l'enveloppe convexe des $(k+1)$ points qui définissent ce simplexe.

Soit maintenant $(x_0, \ldots, x_n)$ un $n$-simplexe ordonné non-dégénéré; la suite de vecteurs $(\overline{x_0 x_1}, \ldots, \overline{x_{n-1} x_n})$ définit une orientation de $M$; tout $n$-simplexe ordonné peut donc être considéré comme un simplexe orienté.

La classe dans $\mathcal{P}(M,G)$ d'un $n$-simplexe ordonné $S$, que nous noterons $[S]$, est donnée par la classe du simplexe sous-jacent affecté de l'orientation du $n$-simplexe ordonné $S$.

### I.2. Triangulation du cube.

Nous travaillerons jusqu'à nouvel ordre dans le groupe des polytopes associé à $\mathbb{R}^n$ et au groupe $TE$ des translations entières de $\mathbb{R}^n$ — c'est-à-dire le groupe des translations associées aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées entières. Si $P$ est un polytope, $[P]$ désignera donc la classe de $P$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, TE)$.

Notons $C_n$ le cube unité dans $\mathbb{R}^n$ :

$$C_n = \big\{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid 0 \le t_i \le 1 \ \forall i \in [1,n]\big\}\cdot$$

Si $\sigma$ appartient à $S_n$, notons $Q_\sigma^n$ le $n$-simplexe :

$$Q_\sigma^n = \big\{(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \ldots, t_{\sigma(n)}) \mid 0 \le t_n \le t_{n-1} \le \cdots \le t_1 \le 1\big\};$$

$Q_\sigma^n$ est le $n$-simplexe sous-jacent au $n$-simplexe ordonné $P_\sigma^n$ :

$$\big(0/e^n_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/e^n_{\sigma^{-1}(n)}\big);$$

où $e_i^n$ désigne le $i$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si l'on désigne par $\operatorname{sgn}(\sigma)$ la signature de la permutation $\sigma$ de $S_n$, on a alors :

$$[P_\sigma^n] = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot[Q_\sigma^n],$$

et

$$[C_n] = \sum_{\sigma\in S_n}[Q_\sigma^n] = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)[P_\sigma^n].$$

Nous noterons désormais $\Delta_n$ le sous-$\mathbb{Q}$-module de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, TE)$ engendré par $([P_\sigma^n])_{\sigma\in S_n}$.

Si $t$ et $t'$ sont deux translations de $TE$ et $\sigma$ et $\sigma'$ deux permutations distinctes de $S_n$, $t\cdot Q_\sigma^n \cap t'\cdot Q_{\sigma'}^n$ est un polytope dégénéré de $\mathbb{R}^n$. Le groupe $\Delta_n$ est donc un $\mathbb{Q}$-module libre sur les classes $[Q_\sigma^n]$ non nulles des $n$-simplexes $Q_\sigma^n$.

L'application volume définit (à un scalaire près) un élément de $\operatorname{Hom}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, TE), \mathbb{R})$. Comme les valeurs de cette application sur les classes $[Q_\sigma^n]$ sont non nulles, $[Q_\sigma^n]$ est non nul dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, TE)$ et $\Delta_n$ est un $\mathbb{Q}$-module libre de rang $n!$.

Par ailleurs, le morphisme $\mathbb{Q}$-linéaire $I_n$ de $\mathbb{Q}[S_n]$ dans $\Delta_n$ induit par :

$$\sigma \longmapsto [P_\sigma^n],$$

définit un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-modules. Les applications

$$\tilde{\beta} : [P_\sigma^n] \longmapsto [P_{\beta\cdot\sigma}^n],$$

pour $\beta$ décrivant $S_n$, munissent $\Delta_n$ d'une structure de $S_n$-module, et $I_n$ définit en fait un isomorphisme de $\mathbb{Q}[S_n]$-modules.

**I.3. Structure d'anneau.**

Nous poserons $\Delta_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$, avec la convention : $\Delta_0 = \mathbb{Q}$. Si $m < n$, nous noterons $i_{m,n}$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui fait correspondre $e_{i+n-m}^n$ à $e_i^m$. Définissons le produit des simplexes $Q_\sigma^k$ et $Q_\beta^\ell$ comme le polytope de $\mathbb{R}^{k+\ell}$ :

$$Q_\sigma^k \times Q_\beta^\ell = \{t + i_{\ell,k+\ell}(t') \in \mathbb{R}^{k+\ell} \mid t \in Q_\sigma^k,\ t' \in Q_\beta^\ell\}. \tag{1}$$

Remarque 2. — Si l'on identifie $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ à $\mathbb{R}^{k+\ell}$, $Q_\sigma^k \times Q_\beta^\ell$ désigne simplement le produit cartésien des simplexes $Q_\sigma^k$ et $Q_\beta^\ell$.

Si l'on pose maintenant

$$[Q_\sigma^k] \times [Q_\beta^\ell] = [Q_\sigma^k \times Q_\beta^\ell], \tag{2}$$

on définit par là une application $\mathbb{Q}$-bilinéaire de $\Delta_k \times \Delta_\ell$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{k+\ell}, TE)$. La Proposition 2 montre que cette application est en fait à valeurs dans $\Delta_{k+\ell}$, et on a donc le résultat suivant :

Proposition 1. — *Le produit défini par les formules* (1) *et* (2) *munit $\Delta_\bullet$ d'une structure d'anneau.*

Rappelons maintenant qu'une permutation $\sigma$ de $S_{k+\ell}$ est appelée un *battage* de coefficients $(k,\ell)$ si $\sigma(i) < \sigma(j)$ est vrai dès que $i < j \le k$ ou $k < i < j$. Nous noterons $\mathrm{Sh}(k,\ell)$ l'ensemble des battages de coefficients $(k,\ell)$.

Proposition 2. — *L'égalité suivante est vraie dans $\Delta_{k+\ell}$ :*

$$[Q_1^k] \times [Q_1^\ell] = \sum_{\gamma\in\mathrm{Sh}(k,\ell)} [Q_\gamma^{k+\ell}]. \tag{3}$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
Q_1^k \times Q_1^\ell &= \big\{(t_1, t_2, \ldots, t_{k+\ell}) \mid \\
&\qquad\qquad (t_1, \ldots, t_k) \in Q_1^k \,;\ (t_{k+1}, \ldots, t_{k+\ell}) \in Q_1^\ell\big\} \\
&= \big\{(t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+\ell}) \mid \\
&\qquad\qquad 0 \le t_k \le \cdots \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_{k+\ell} \le \cdots \le t_{k+1} \le 1\big\}.
\end{aligned}
$$

Le polytope de $\mathbb{R}^{k+\ell}$ ainsi obtenu se décompose en simplexes de type $Q_\sigma^{k+\ell}$. L'ensemble des simplexes de cette décomposition est paramétré par les bijections de $[1, k+\ell]$ dans $[1, k+\ell]$ dont les restrictions à $[1, k]$ et $[k+1, k+\ell]$ sont croissantes.

En d'autres termes, cette décomposition est paramétrée par les battages de coefficients $(k, \ell)$ et

$$
\begin{aligned}
Q_1^k \times Q_1^\ell &= \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Sh}(k,\ell)} \Big\{(t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+\ell} \\
&\qquad\qquad \mid 0 \le t_{\gamma^{-1}(k+\ell)} \le \cdots \le t_{\gamma^{-1}(1)} \le 1\Big\} \\
&= \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Sh}(k,\ell)} Q_\gamma^{k+\ell}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$[Q_1^k] \times [Q_1^\ell] = \sum_{\gamma \in \mathrm{Sh}(k,\ell)} [Q_\gamma^{k+\ell}]$$

et

$$[P_1^k] \times [P_1^\ell] = \sum_{\gamma \in \mathrm{Sh}(k,\ell)} \mathrm{sgn}(\gamma) \cdot [P_\gamma^{k+\ell}].$$

Notons maintenant $\star$ l'application de $S_k \times S_\ell$ dans $S_{k+\ell}$ telle que

$$(\sigma \star \beta)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \le k, \\ \beta(i-k) + k & \text{si } i > k. \end{cases}$$

On vérifie de la même manière le résultat suivant :

$$Q_\sigma^k \times Q_\beta^\ell = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Sh}(k,\ell)} Q_{\gamma \cdot (\sigma \star \beta)}^{k+\ell}.$$

PROPOSITION 3. — *Dans $\Delta_\bullet$, le produit des simplexes est donné par les formules suivantes :*

$$[Q_\sigma^k] \times [Q_\beta^\ell] = \sum_{\gamma \in \mathrm{Sh}(k,\ell)} \big[Q_{\gamma \cdot (\sigma \star \beta)}^{k+\ell}\big], \tag{4}$$

$$[P_\sigma^k] \times [P_\beta^\ell] = \sum_{\gamma \in \mathrm{Sh}(k,\ell)} \mathrm{sgn}(\gamma) \cdot \big[P_{\gamma \cdot (\sigma \star \beta)}^{k+\ell}\big]. \tag{5}$$

Posons $S_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}[S_n]$. Compte tenu des isomorphismes $I_n$ de I.2, la structure d'anneau de $\Delta_\bullet$ permet de munir $S_\bullet$ d'une multiplication $\times$ et d'une structure d'anneau. Nous appellerons $(S_\bullet, +, \times)$ *l'anneau géométrique* du groupe symétrique pour différencier cette structure de la structure usuelle $(S_\bullet, +, \star)$. Nous noterons $\cdot$ la multiplication usuelle dans le groupe symétrique $S_n$.

REMARQUE 3. — Si $(\sigma, \beta) \in S_k \times S_\ell$, nous aurons donc, par définition :

$$\sigma \times \beta = \sum_{\gamma\in \mathrm{Sh}(k,\ell)} \mathrm{sgn}(\gamma)\cdot\gamma\cdot(\sigma\star\beta). \tag{6}$$

## II. Décompositions et opérations sur $\Delta_\bullet$

L'anneau $\Delta_\bullet$ étant défini à l'aide de groupes de polytopes, les homothéties à coefficients entiers opèrent sur $\Delta_\bullet$. Notons $\Psi^k$ l'opération sur $\Delta_\bullet$ induite par l'homothétie de rapport $k$. Compte tenu des propriétés géométriques des homothéties, $\Psi^k$ définit un endomorphisme de l'anneau $\Delta_\bullet$.

Par abus, l'opération induite par l'homothétie de rapport $k$ sur les polytopes et sur les différents groupes $\mathcal{P}(M, G)$ sera également notée $\Psi^k$.

L'opérateur $\Psi^k$ stabilise la décomposition $\Delta_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ ; nous noterons $\Psi_i^k$ sa restriction à $\Delta_i$.

### II.1. Premières décompositions.

Nous renvoyons à [3, I.2.6] pour une représentation géométrique des calculs qui vont suivre.

PROPOSITION 4. — *On a les relations suivantes :*

$$\Psi^k \circ \Psi^\ell = \Psi^\ell \circ \Psi^k = \Psi^{k\cdot\ell} \tag{7}$$

$$\Psi^{k+\ell}([Q_1^i]) = \sum_{r+s=i} \Psi^k([Q_1^r]) \times \Psi^\ell([Q_1^s]). \tag{8}$$

La formule (7) est évidente, par définition des $\Psi^k$.

La formule (8) est la conséquence de la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
&\Psi^{k+\ell}(Q_1^i)\\
&\quad= \{(t_1,\dots,t_i) \mid 0 \le t_i \le \dots \le t_1 \le k+\ell\}\\
&\quad= \bigcup_{j\le i} \{(t_1,\dots,t_i) \mid 0 \le t_i \le \dots \le t_{j+1} \le k \le t_j \le \dots \le t_1 \le k+\ell\}\\
&\quad= \bigcup_{j\le i} \{(k+t_1,\dots,k+t_j,t_{j+1},\dots,t_i) \mid 0 \le t_i \le \dots \le t_{j+1} \le k;\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le t_j \le \dots \le t_1 \le \ell\}.
\end{aligned}$$

Comme par ailleurs le polytope

$$\begin{aligned}
&\{(k+t_1,\dots,k+t_j,t_{j+1},\dots,t_i) \mid\\
&\qquad\qquad 0 \le t_i \le \dots \le t_{j+1} \le k\,;\ 0 \le t_j \le \dots \le t_1 \le \ell)\}
\end{aligned}$$

se déduit par translation du polytope :

$$\begin{aligned}
&\{(t_1,\dots,t_i) \mid 0 \le t_i \le \dots \le t_{j+1} \le k\,;\ 0 \le t_j \le \dots \le t_1 \le \ell\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \Psi^k(Q_1^j) \times \Psi^\ell(Q_1^{i-j}),
\end{aligned}$$

cette égalité se réécrit dans $\Delta_i$ sous la forme :

$$\Psi^{k+\ell}([Q_1^i]) = \sum_{j\le i} \Psi^k([Q_1^j]) \times \Psi^\ell([Q_1^{i-j}]). \quad \square$$

PROPOSITION 5. — *Il existe dans $\mathbb{Z}[S_i]$ une famille d'éléments $({}^s\Psi_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$, telle que ${}^s\Psi_i^k$ opère comme $\Psi_i^k$ sur $\Delta_i$.*

Nous noterons ${}^s\Psi_i^k$ l'élément $I_i^{-1}(\Psi_i^k([P_1^i]))$ de $\mathbb{Z}[S_i]$ ($I_i$ ayant été défini au I.2). Nous avons vu au I.2 que $\Delta_i$ est un $\mathbb{Z}[S_i]$-module; ${}^s\Psi_i^k$ définit donc un opérateur dans $\Delta_i$. Nous allons montrer que ${}^s\Psi_i^k$ opère comme $\Psi_i^k$ dans $\Delta_i$. Il suffit pour cela de prouver que, pour tout $\sigma \in S_i$, $\Psi_i^k([P_\sigma^i]) = {}^s\Psi_i^k([P_\sigma^i])$.

Notons $\Psi_i^k([P_1^i]) = \sum_{\beta\in S_i} c_\beta^{i,k} \cdot [P_\beta^i]$ la décomposition de $\Psi_i^k([P_1^i])$ dans $\Delta_i$. Par définition, on a :

$${}^s\Psi_i^k = \sum_{\beta\in S_i} c_\beta^{i,k} \cdot \beta.$$

Il s'agit donc de prouver que $\Psi_i^k([P_\sigma^i])$ est égal à $\sum_{\beta\in S_i} c_\beta^{i,k} [P_{\beta\cdot\sigma}^i]$.

Remarquons pour cela qu'il existe pour tout $i$ un morphisme de groupes $\phi_i$ de $S_i$ dans $\mathrm{GL}_i(\mathbb{R})$ qui, à toute permutation de $[1,i]$ associe la permutation correspondante des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^i$ :

$$\phi_i(\sigma)\cdot e_j = e_{\sigma(j)}.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} Q^i_\sigma &= \Big\{ \sum_{j=1}^{i} t_{\sigma(j)} e_j \mid 0 \le t_i \le \cdots \le t_1 \le 1 \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{j=1}^{i} t_j \cdot e_{\sigma^{-1}}(j) \mid 0 \le t_i \le \cdots \le t_1 \le 1 \Big\} \\ &= \phi_i(\sigma^{-1}) \cdot Q^i_1, \end{aligned}$$

et que les homothéties sont dans le centre de $M_i(\mathbb{R})$ (l'anneau des matrices $i \times i$ à coefficients réels), on a encore :

$$\Psi^k_i(Q^i_\sigma) = \Psi^k_i \circ \phi_i(\sigma^{-1})(Q^i_1) = \phi_i(\sigma^{-1}) \circ \Psi^k_i(Q^i_1).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \phi_i(\sigma^{-1})(Q^i_\beta) &= \Big\{ \sum_{j=1}^{i} t_{\beta(j)} \cdot e_{\sigma^{-1}(j)} \mid 0 \le t_i \le \cdots \le t_1 \le 1 \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{j=1}^{i} t_{\beta\cdot\sigma(j)} \cdot e_j \mid 0 \le t_i \le \cdots \le t_1 \le 1 \Big\} = Q^i_{\beta\cdot\sigma} \ ; \end{aligned}$$

par conséquent, en notant encore $\phi_i(\sigma^{-1})$ l'opérateur sur $\Delta_i$ défini par :

$$\phi_i(\sigma^{-1})\big([Q^i_\beta]\big) = [Q^i_{\beta\cdot\sigma}],$$

on a l'égalité suivante dans $\Delta_i$ :

$$\begin{aligned} \Psi^k_i\big([P^i_\sigma]\big) &= \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\phi_i(\sigma^{-1}) \circ \Psi^k_i\big([P^i_1]\big) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\phi_i(\sigma^{-1}) \circ {}^s\Psi^k_i\big([P^i_1]\big) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\phi_i(\sigma^{-1}) \cdot \Big(\sum_\beta c^{i,k}_\beta [P^i_\beta]\Big) \\ &= \sum_\beta c^{i,k}_\beta [P^i_{\beta\cdot\sigma}] = {}^s\Psi^k_i \cdot [P^i_\sigma], \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

Cette proposition nous permet de considérer désormais $\Psi_i^k$ comme un élément de $\mathbb{Z}[S_i]$. Les relations suivantes sont donc vraies dans $(S_\bullet, +, \times)$ :

$$\Psi_i^k \cdot \Psi_i^\ell = \Psi_i^{k\cdot\ell} \tag{7bis}$$

$$\Psi_i^{k+\ell} = \sum_{r+s=i} \Psi_r^k \times \Psi_s^\ell. \tag{8bis}$$

Notons maintenant $\mathrm{Sh}_i^k$ l'élément de $\mathbb{Z}[S_i]$ tel que :

$$\mathrm{Sh}_i^k \cdot \bigl([P_1^i]\bigr) = \sum \bigl[P_1^{j_1} \times \cdots \times P_1^{j_k}\bigr], \tag{9}$$

où la somme porte sur tous les $k$-uplets $(j_\ell)_{\ell\in[1,k]}$ d'entiers non nuls tels que $j_1 + \cdots + j_k = i$.

Nous allons établir certaines égalités entre les $\Psi_i^k$ et les $\mathrm{Sh}_i^k$, dont nous déduirons par la suite l'existence d'une famille d'idempotents orthogonaux dans $\mathbb{Q}[S_i]$.

L'anneau $\Delta_\bullet$ peut être plongé dans $\widehat{\Delta}_\bullet = \prod_i \Delta_i$. La multiplication dans $\widehat{\Delta}_\bullet$ est définie par

$$\sum_i [R^i] \times \sum_j [T^j] = \sum_n \Bigl( \sum_{i+j=n} [R^i] \times [T^j]\Bigr),$$

où $[R^i]$ et $[T^j]$ désignent respectivement des éléments de $\Delta_i$ et $\Delta_j$. Définissons dans cet anneau $P^\bullet$ et $\widetilde{P}^\bullet$ par les égalités :

$$P^\bullet = 1 + \widetilde{P}^\bullet = \sum_{i\in\mathbb{N}} [P_1^i].$$

La formule (8) montre que :

$$\Psi^{k+\ell}(P^\bullet) = \Psi^k(P^\bullet) \times \Psi^\ell(P^\bullet),$$

et donc que :

$$\Psi^k(P^\bullet) = (P^\bullet)^k = (1+\widetilde{P}^\bullet)^k = \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{k}{i} (\widetilde{P}^\bullet)^i.$$

Par ailleurs, l'opérateur $\Psi^k$ préserve la décomposition $\Delta_\bullet = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \Delta_i$. D'après la formule précédente et la définition de $\mathrm{Sh}_i^k$, on a donc :

$$\Psi_i^k\bigl([P_1^i]\bigr) = \sum_{j\le i} \binom{k}{j} \mathrm{Sh}_i^j\bigl([P_1^i]\bigr).$$

D'où l'égalité dans $\mathbb{Z}[S_i]$ :

$$\Psi_i^k = \sum_{j\le i} \binom{k}{j} \mathrm{Sh}_i^j . \tag{10}$$

COROLLAIRE 1. — *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une famille $(\Psi_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[S_i]$, telle que :*

i) *L'application de $\Delta_\bullet$ dans $\Delta_\bullet$ qui coïncide avec $\Psi_i^k$ sur $\Delta_i$ est un endomorphisme de l'anneau $\Delta_\bullet$.*

ii) *On a les formules suivantes :*

$$\Psi_i^1 = 1, \quad \Psi_i^k \cdot \Psi_i^\ell = \Psi_i^{k\cdot\ell}, \quad \Psi_i^k = \sum_{j\le i} \binom{k}{j} \mathrm{Sh}_i^j .$$

REMARQUE 4. — Les éléments $\Psi_i^k$ et $\mathrm{Sh}_i^k$ que nous définissons sont très proches des $\lambda$-opérations et des shuffle-opérations de [4]. Toutefois, nous avons adopté des conventions de signes différentes de celles de J.-L. Loday. Nous donnons ici une table de correspondance entre les deux systèmes de conventions :

| cet article | [4] |
|---|---|
| $\Psi_i^k$ | $(-1)^{k-1}\lambda_i^k$ |
| $\mathrm{Sh}_i^k$ | $(-1)^{k-1}\mathrm{sh}_i^k$ |

### II.2. Idempotents orthogonaux de $\mathbb{Q}[S_i]$.

D'après II.1, COROLLAIRE 1, on a :

$$\Psi_i^k = \sum_{j\le i} \binom{k}{j} \mathrm{Sh}_i^j ;$$

donc, d'après la définition des nombres de Stirling de première espèce $s(j,p)$ (cf. [1]) :

$$\Psi_i^k = \sum_{1\le p\le j\le i} s(j,p) \cdot \frac{\mathrm{Sh}_i^j}{j!} \cdot k^p = \sum_{p=1}^{i} \Big[\sum_{j=p}^{i} s(j,p) \cdot \frac{\mathrm{Sh}_i^j}{j!}\Big] \cdot k^p .$$

Définissons alors pour $p \in [1,n]$ :

$$e_i^p = \sum_{j=p}^{i} s(j,p) \cdot \frac{\mathrm{Sh}_i^j}{j!} . \tag{11}$$

On a $\Psi_i^k = \sum_{p=1}^{i} k^p \cdot e_i^p$.

THÉORÈME 1. — *Les éléments* $(e_i^p)_{1\le p\le i}$ *de* $\mathbb{Q}[S_i]$ *définissent une famille d'idempotents deux à deux orthogonaux de* $\mathbb{Q}[S_i]$ *de somme* 1.

En effet, d'une part $\Psi^1 = 1$ et donc $1 = \sum_{p=1}^{i} e_i^p$.

D'autre part, $\Psi_i^m \cdot \Psi_i^\ell = \Psi_i^{m\cdot\ell}$ implique :

$$\Big(\sum_{1\le p\le i} e_i^p \cdot m^p\Big)\cdot\Big(\sum_{1\le p'\le i} e_i^{p'} \cdot \ell^{p'}\Big) = \sum_{1\le p\le i} e_i^p \cdot (m\cdot\ell)^p.$$

Et donc

$$e_i^p \cdot e_i^{p'} = \delta_p^{p'} \cdot e_i^p.$$

COROLLAIRE 2. — *Tout groupe* $M$ *muni d'une structure de* $\mathbb{Q}[S_i]$*-module se décompose sous l'action des idempotents orthogonaux* $(e_i^p)_{1\le p\le i}$ *et* $\Psi_i^k$ *opère sur* $e_i^p \cdot M$ *comme* $k^p$.

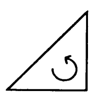
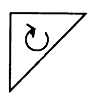
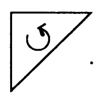
REMARQUE 5. — Nous avons vu que $\Delta_i$ est muni d'une structure de $\mathbb{Q}[S_i]$-module. Nous allons donner, dans le cas $i = 2$, une représentation de la décomposition de $\Delta_2$ induite par les idempotents orthogonaux.

Si l'on note $\sigma$ l'élément de $S_2$ différent de 1, le $\mathbb{Q}[S_2]$-module $\Delta_2$ est engendré par deux triangles, que nous noterons $[P_1^2]$ et $[P_\sigma^2]$. Le $\mathbb{Q}$-module $\Delta_2$ est donc également engendré par les éléments $[P_1^2] + [P_\sigma^2]$ et $[P_1^2] - [P_\sigma^2]$, et l'on peut écrire :

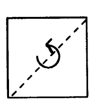
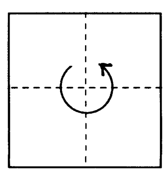
$$\Delta_2 = \mathbb{Q}([P_1^2] - [P_\sigma^2]) \oplus \mathbb{Q}([P_1^2] + [P_\sigma^2]).$$

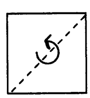
Nous allons montrer que cette décomposition coïncide avec la décomposition de $\Delta_2$ comme $\mathbb{Q}[S_2]$-module sous l'action des idempotents orthogonaux.

Donnons tout d'abord une représentation géométrique du groupe $\Delta_2$ :

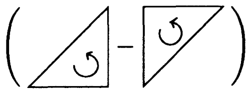
$[P_1^2] =$  $[P_\sigma^2] =$  $= -$  .

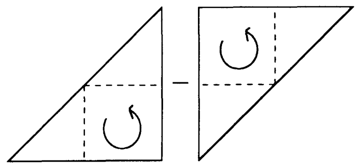
Alors, on peut écrire :

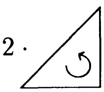
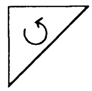
$\Psi_2^2 \cdot ([P_1^2] - [P_\sigma^2]) = \Psi_2^2 \cdot \Big($  $\Big) = \Big($  $\Big)$

$= 4 \cdot \Big($  $\Big) = 2^2([P_1^2] - [P_\sigma^2])$ ;

et, de la même manière :

$\Psi_2^2 \cdot ([P_1^2] + [P_\sigma^2]) = \Psi_2^2 \cdot$ 

$=$ 

$= 2 \cdot$  $- 2 \cdot$  $= 2^2([P_1^2] + [P_\sigma^2]),$

d'où la décomposition annoncée.

COROLLAIRE 3. — *La signature de l'élément $e_i^p$ de $\mathbb{Q}[S_i]$ est égale à $\delta_i^p$.*

En effet, considérons le groupe $\Delta_i$. Ce groupe est muni d'une structure de $\mathbb{Q}[S_i]$-module. L'application Vol, qui associe à un polytope orienté son volume orienté, permet de définir un morphisme de groupes que nous noterons encore Vol de $\Delta_i$ dans $\mathbb{Q}$, avec la convention $\mathrm{Vol}([P_1^i]) = 1$. Alors, si $\sigma \in S_i$, on a :

$$\mathrm{Vol}\big(\sigma \cdot [P_1^i]\big) = \mathrm{Vol}\big([P_\sigma^i]\big) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{Vol}\big([Q_\sigma^i]\big) = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Par conséquent, pour tout $k$, on a :

$$\mathrm{Vol}\big(\Psi_i^k \cdot [P_1^i]\big) = k^i$$

et, d'autre part :

$$\mathrm{Vol}\big(\Psi_i^k \cdot [P_1^i]\big) = \mathrm{Vol}\Big(\sum_{p \leq i} k^p \cdot e_i^p \cdot [P_1^i]\Big) = \sum_{p \leq i} \mathrm{sgn}(e_i^p) \cdot k^p,$$

d'où le corollaire.

Nous noterons désormais $e^p$ l'opérateur $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} e_i^p$ sur $\Delta_\bullet$.

## III. Filtration de l'anneau des simplexes

Les $\mathbb{Q}$-modules $\Delta_\bullet$ et $S_\bullet$ se décomposent sous l'action des idempotents orthogonaux. Nous poserons

$$\Delta_\bullet^p = \bigoplus_{j \geq p} e^j \cdot \Delta_\bullet, \quad S_\bullet^p = \bigoplus_{j \geq p} e^j \cdot S_\bullet \quad \text{et} \quad S_\ell^p = \bigoplus_{\ell \geq j \geq p} e_\ell^j \cdot \mathbb{Q}[S_\ell].$$

Ce paragraphe cherche à donner une construction simple de la filtration :

$$\cdots \subset S_\bullet^{p+1} \subset S_\bullet^p \subset \cdots \subset S_\bullet.$$

REMARQUE 6. — Dans la mesure où les opérateurs $e^j$ stabilisent la décomposition $S_\bullet = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[S_\ell]$, cette construction permet de construire également la filtration :

$$\cdots \subset S_\ell^{p+1} \subset S_\ell^p \subset \cdots \subset S_\ell.$$

Soit alors $M$ un $\mathbb{Q}[S_\ell]$-module; l'action des idempotents orthogonaux de $\mathbb{Q}[S_\ell]$ induit une filtration de $M$-associée à la décomposition de $M$ donnée au COROLLAIRE 2. Cette filtration est définie par :

$$S_\ell^\ell \cdot M \subset S_\ell^{\ell-1} \cdot M \subset \cdots \subset S_1^2 \cdot M \subset S_\ell \cdot M = M.$$

La construction que nous allons donner permet donc d'obtenir des informations sur la filtration associée aux $\mathbb{Q}[S_\ell]$-modules.

Définissons l'idéal $J$ de $(S_\bullet, +, \times)$ par $J = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Q}[S_\ell]$ et posons $J_p = J \cap S_\bullet^p$. Définissons le groupe d'opérateurs $\widetilde{\Phi}$ sur $J$ comme la restriction à $J$ du groupe d'opérateurs $\prod_{i \geq 1} \phi_i(S_i)$ sur $\prod_{i \geq 1} \mathbb{Q}[S_i]$, avec les notations de II.1 PROPOSITION 5, où l'on a identifié les groupes $\mathbb{Q}[S_k]$ et $\Delta_k$ à l'aide des isomorphismes $I_k$ de I.2.

THÉORÈME 2. — *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $J_p = \widetilde{\Phi}(J^p)$, où $J^p$ désigne la puissance $p$-ième de l'idéal $J$.*

*Démonstration.* — Il suffit en fait de prouver que, pour tout $i$, $S_i^p$ est égal à la composante de degré $i$ de $\widetilde{\Phi}(J^p)$, que nous noterons $\widetilde{J}_i^p$. Considérons tout d'abord l'inclusion $S_i^p \subset \widetilde{J}_i^p$. Nous identifierons systématiquement dans la suite de cette démonstration les groupes $\Delta_i$ et $\mathbb{Q}[S_i]$, ainsi que tous les sous-groupes et sous-anneaux de $\Delta_\bullet$ et $S_\bullet$ deux à deux isomorphes. Par définition, $\Delta_i^p = \bigoplus_{j\geq p} e_i^j \cdot \Delta_i$. D'après la définition (11) des $e_i^j$, on a donc :

$$\Delta_i^p \subset \bigoplus_{j\geq p} \mathrm{Sh}_i^j \cdot \Delta_i.$$

Or, si $\sigma \in S_i$, on a :

$$\mathrm{Sh}_i^j \cdot ([P_\sigma^i]) = \mathrm{Sh}_i^j \circ \phi_i(\sigma^{-1})([P_1^i]) = \phi_i(\sigma^{-1}) \circ \mathrm{Sh}_i^j([P_1^i]),$$

puisque $\phi_i(\sigma^{-1})$ commute à $\Psi_i^m$ pour tout $m$, et que, comme on a :

$$\Psi_i^m = \sum_{j\leq i} \binom{m}{j} \cdot \mathrm{Sh}_i^j,$$

$\mathrm{Sh}_i^j$ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'opérateurs $\Psi_i^m$.

Par ailleurs $\phi_i(\sigma^{-1}) \in \widetilde{\Phi}$ et, d'après la définition (9) de $\mathrm{Sh}_i^j$, $\mathrm{Sh}_i^j$ appartient à $J^j$ : on a donc finalement l'inclusion $S_i^p \subset \widetilde{J}_i^p$.

Réciproquement, soit $([P_j])_{j\leq k}$ une famille d'éléments de $\Delta_\bullet$ telle que $[P_j] \in \Delta_{d(j)}$, avec $d(j) \geq 1$ et $\sum_{j\leq k} d(j) = i$. Alors, on a :

$$\Psi_{d(j)}^\ell([P_j]) = \sum_{p=1}^{d(j)} \ell^p \cdot e_{d(j)}^p \cdot ([P_j]) \ ;$$

et par conséquent, pour tout $\sigma \in S_i$ :

$$\begin{aligned}\Psi_i^\ell(\phi_i(\sigma)\cdot([P_1]\times\cdots\times[P_k])) &= \phi_i(\sigma)\cdot\Psi_i^\ell([P_1]\times\cdots\times[P_k]) \\ &= \phi_i(\sigma)\{\Psi_{d(1)}^\ell([P_1])\times\cdots\times\Psi_{d(k)}^\ell([P_k])\}\end{aligned}$$

est un polynôme en $\ell$ à coefficients dans $\Delta_\bullet$ divisible par $\ell^k$. Le théorème est alors conséquence du COROLLAIRE 2.

## IV. Catégorie $CS$ et applications

D'après [4], le cadre idéal d'étude de la filtration de l'homologie de Hochschild associée aux idempotents orthogonaux est fourni par la catégorie des ensembles finis. Ayant été amené dans [5] à envisager les opérations combinatoires associées à ces filtrations comme des opérations géométriques, il est apparu qu'il était possible de donner une construction de cette filtration, ainsi que de la filtration de certains groupes de polytopes, par l'intermédiaire d'arguments fonctoriels liés à une catégorie dont les objets sont simpliciaux et les flèches des opérations géométriques.

Nous en donnons ici la construction.

### IV.1. Catégorie $CS$.

Rappelons que, par définition, la catégorie Fin$'$ a pour objets les ensembles $[0, n]$ et pour flèches les applications ensemblistes qui respectent le point base 0 (i.e. $f(0) = 0$).

On s'intéresse à la sous-catégorie Fin$''$ de Fin$'$ dont les objets sont les ensembles $[0, n]$ et les flèches les applications surjectives respectant le point-base. Nous allons tout d'abord donner une réalisation géométrique de la catégorie Fin$''$.

Nous poserons $\mathbb{R}^{(\infty)} = \varinjlim \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{Z}^{(\infty)} = \varinjlim \mathbb{Z}^m$. Nous définirons le groupe $CS_k^m$ comme le $\mathbb{Q}$-module sur l'ensemble des $k$-simplexes ordonnés non-$k$-dégénérés de $\mathbb{R}^m$ (cf. I.1.a) à sommets dans $\mathbb{Z}^m$, soit encore comme le $\mathbb{Q}$-module sur l'ensemble des $(k+1)$-uplets : $(a/x_1/x_2/\cdots/x_k)$, où $a \in \mathbb{Z}^m$ et où $(x_i)_{i\in[1,k]}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ à coordonnées entières.

Nous poserons enfin $CS_k = \varinjlim H_0(TE^m, CS_k^m)$, où $TE^m$ désigne le groupe des translations à coefficients entiers de $\mathbb{R}^m$. Nous noterons $[(x_1/\cdots/x_k)]$ la classe dans $CS_k$ du $k$-simplexe ordonné $(a/x_1/\cdots/x_k)$.

En d'autres termes, $CS_k$ n'est autre que le $\mathbb{Q}$-module sur l'ensemble des $k$-simplexes ordonnés non-$k$-dégénérés de $\mathbb{R}^{(\infty)}$ à sommets dans $\mathbb{Z}^{(\infty)}$, modulo l'action des translations à coefficients entiers.

Le groupe $S_k$ opère alors sur $CS_k$ par permutations des vecteurs-arêtes :

$$\sigma \cdot \big[(x_1/\cdots/x_k)\big] = \big[x_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/x_{\sigma^{-1}(k)}\big].$$

Considérons maintenant les applications $d_i^k$ qui, à un $k$-simplexe ordonné $(a/x_1/\cdots/x_k)$ associent sa $i$-ème face :

$$d_i^k\big(a/x_1/\cdots/x_k\big) = \big(a/x_1/\cdots/x_i + x_{i+1}/\cdots/x_k\big)\,;$$

avec $$d_0^k\big(a/x_1/\cdots/x_k\big) = \big(a+x_1/x_2/\cdots/x_k\big)\ ;$$

et $$d_k^k\big(a/x_1/\cdots/x_k\big) = \big(a_k/x_1/\cdots/x_{k-1}\big).$$

Ces applications définissent par passage au quotient une famille de morphismes que nous appellerons encore *applications face* :

$$d_i^k : CS_k \longrightarrow CS_{k-1}.$$

Par définition, la catégorie $CS$ sera la catégorie dont les objets sont les $CS_k$ et les flèches, les applications obtenues par composition de permutations et d'applications face.

PROPOSITION 6. — *Les catégories* Fin$''$ *et* $CS$ *sont isomorphes.*

Soit $f$ une flèche de Fin$''$, $f$ est une application surjective de $[0,m]$ dans $[0,n]$. On définira $T(f)$ comme l'application de $CS_m$ dans $CS_n$ telle que :

$$T(f)\big[(x_1/\cdots/x_m)\big] = \big[(y_1/\cdots/y_n)\big],$$

avec $y_i = \sum_{f(j)=i} x_j$.

De la même manière, soit $g$ une flèche de $CS$ de source $CS_m$ et de but $CS_n$. On peut décrire de manière univoque $g$ par son action sur les simplexes sous la forme :

$$g\big[(x_1/\cdots/x_m)\big] = \Big[\Big(\sum_{i\in\mathcal{P}_1} x_i/\sum_{i\in\mathcal{P}_2} x_i/\cdots/\sum_{i\in\mathcal{P}_n} x_i\Big)\Big],$$

où $(\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_n)$ est une famille de sous-ensembles disjoints non vides de $[1,m]$.

On définira $T'(g)$ comme l'application de $[0,m]$ dans $[0,n]$ telle que :

$$T'(g)(i) = \begin{cases} j & \text{si } i \text{ appartient à } \mathcal{P}_j,\\ 0 & \text{si } i \text{ appartient au complémentaire de } \bigcup_{j\in[1,n]}\mathcal{P}_j \text{ dans } [1,m]. \end{cases}$$

Les transformations $T$ et $T'$ ainsi définies sont bien fonctorielles et $TT' = 1$, $T'T = 1$. L'étude de l'algèbre sur $\mathbb{Z}$ des flèches de Fin$''$ se ramène donc à celle de l'algèbre sur $\mathbb{Z}$ des flèches de $CS$, que nous noterons $A(CS)$. Dans $A(CS)$, si $k \in \mathbb{N}^*$, nous poserons $d^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i^k$. Comme précédemment, $\Psi_n^k$ désigne l'élément de $\mathbb{Z}[S_n]$ défini au II.1.

PROPOSITION 7. — *Dans $A(CS)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\Psi_{k-1}^m \cdot d^k = d^k \cdot \Psi_k^m. \tag{12}$$

Avant d'en venir à la preuve de cette proposition, remarquons que si $F = (f_1, \ldots, f_k)$ est une famille libre de rang $k$ de vecteurs de $\mathbb{Z}^{(\infty)}$, le $\mathbb{Q}$-module $\Delta_F$ sur les classes $\{P_\beta^F\}$ dans $CS_k$ des simplexes

$$(0/f_{\beta^{-1}(1)}/\cdots/f_{\beta^{-1}(k)}),$$

où $\beta$ parcourt $S_k$, est un sous-$\mathbb{Q}$-module de $CS_k$. L'opération de $S_k$ sur $\Delta_F$ définie sur les simplexes $\{P_\beta^F\}$ (que nous appellerons *fondamentaux*) par

$$\sigma \cdot \{P_\beta^F\} = \{P_{\sigma\cdot\beta}^F\}$$

est induite par les opérations de $S_k$ sur $CS_k$.

Nous allons commencer par établir les lemmes suivants.

LEMME 1. — *Si $\sigma \neq \beta$ et si $\{P_\sigma^F\}$ et $\{P_\beta^F\}$ ont une face commune (i.e. s'il existe $i$ et $j$ tels que $d_i^k(\{P_\sigma^F\}) = d_j^k(\{P_\beta^F\})$), alors il existe une transposition $\tau = (i, i+1)$ ou un $k$-cycle $\tau = (1, 2, \ldots, k)$ dans $S_k$ tel que $\sigma = \tau \cdot \beta$ ou $\beta = \tau \cdot \sigma$.*

En effet, cette face s'écrit :

- Soit sous la forme

$$\big[(f_{\gamma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\gamma^{-1}(i)} + f_{\gamma^{-1}(i+1)}/\cdots/f_{\gamma^{-1}(k)})\big],$$

auquel cas $\sigma^{-1}(i) = \beta^{-1}(i+1)$, $\beta^{-1}(i) = \sigma^{-1}(i+1)$ ; et $\sigma^{-1}(k) = \beta^{-1}(k)$ si $k \neq i$ et $k \neq i+1$. Par conséquent $\sigma^{-1} \circ \tau = \beta^{-1}$ et $\beta = \tau \circ \sigma$, où $\tau = (i, i+1)$.

- Soit sous une des formes :

$$\big[(f_{\gamma^{-1}(2)}/\cdots/f_{\gamma^{-1}(k)})\big] \quad \text{ou} \quad \big[(f_{\gamma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\gamma^{-1}(k-1)})\big],$$

auquel cas $\sigma^{-1}(i) = \beta^{-1}(i+1)$ ou $\sigma^{-1}(i+1) = \beta^{-1}(i)$, et donc, si on note $\tau = (1, 2, \ldots, k)$, $\beta = \tau \cdot \sigma$ ou $\sigma = \tau \cdot \beta$.

LEMME 2. — *Si $\sigma = \tau \cdot \beta$ où $\tau = (i, i+1)$ (resp. $\tau = (1, 2, \dots, k)$), alors*

$$d_i^k\big(\{P_\sigma^F\} - \{P_\beta^F\}\big) = 0 \quad \big(\textit{resp. } d_0^k\big(\{P_\sigma^F\}\big) - d_k^k\big(\{P_\beta^F\}\big) = 0\big).$$

Le lemme est immédiat, par définition des opérateurs $d_i^k$.

Notons maintenant $\mathrm{Vect}(F)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $k$ engendré par les vecteurs $f_1, \dots, f_k$, et remarquons que le $\mathbb{Q}$-module $\Delta_F$ est isomorphe au sous-$\mathbb{Q}$-module $\widetilde{\Delta}_F$ de $\mathcal{P}(\mathrm{Vect}(F), TE)$ engendré par les classes des simplexes $(0/f_{\beta^{-1}(1)}/\cdots/f_{\beta^{-1}(k)})$. Tout polytope de $\widetilde{\Delta}_F$ définit donc de manière univoque un élément de $\Delta_F$.

Fixons $\widetilde{\Delta}_F$. Si $R$ est un $k$-simplexe ordonné de $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ dont les vecteurs-arêtes sont dans $\mathrm{Vect}(F)$, $R$ peut être considéré comme un simplexe de $\mathcal{P}(\mathrm{Vect}(F), TE)$. Si, en outre, sa classe dans $\mathcal{P}(\mathrm{Vect}(F), TE)$ appartient à $\widetilde{\Delta}_F$, nous dirons par abus que “la classe de $R$ appartient à $\widetilde{\Delta}_F$”. Par ailleurs, nous noterons $R_i$ la $i$-ième face ordonnée de $R$.

Si la classe de $R$ appartient à $\widetilde{\Delta}_F$, par définition de $\widetilde{\Delta}_F$, il existe un $k$-simplexe ordonné $P_\sigma^F$ et un entier $j$ tels que $R_i$ et la $j$-ième face de $P_\sigma^F$ soient portés par deux hyperplans parallèles. Par ailleurs, $d_j^k(P_\sigma^F)$ est un $(k-1)$-simplexe ordonné dont la suite ordonnée des vecteurs-arêtes définit une famille de $(k-1)$ vecteurs $F'$. La classe de $R_i$ dans $\mathcal{P}(\mathrm{Vect}(F'), TE)$ appartient alors à $\widetilde{\Delta}_{F'}$ : nous appellerons “classe dans $CS_{k-1}$ de $R_i$ associée à $\Delta_F$”, et nous noterons $\{R_i\}_F$ l'élément de $\Delta_{F'} \subset CS_{k-1}$ défini par la classe de $R_i$ dans $\widetilde{\Delta}_{F'}$, via l'isomorphisme canonique entre $\Delta_{F'}$ et $\widetilde{\Delta}_{F'}$.

Si $P$ est un simplexe ordonné $(p_1/\cdots/p_k)$ de $CS_k$ dont la classe appartient à $\widetilde{\Delta}_F$, nous dirons que $P$ est *orienté positivement* dans $\widetilde{\Delta}_F$ si, en notant $(f_1, \dots, f_k)$ la base ordonnée associée à $\widetilde{\Delta}_F$, on a

$$p_1 \wedge \cdots \wedge p_k = m \cdot f_1 \wedge \cdots \wedge f_k,$$

avec $m \geq 0$. Nous écrirons alors $O(P) = 1$. Si $m < 0$, $P$ est orienté négativement et nous écrirons $O(P) = -1$.

LEMME 3. — *Soit $R$ un $k$-simplexe ordonné de $\mathbb{R}^{(\infty)}$, tel que la classe de $R$ appartienne à $\widetilde{\Delta}_F$. Il se décompose sous la forme $[R] = \sum_{\sigma \in S_k} j_\sigma \cdot [P_\sigma^F]$ dans la base canonique associée aux simplexes fondamentaux de $\widetilde{\Delta}_F$. Alors, si $j_\sigma \neq 0$, le signe de $j_\sigma$ est donné par $O(R) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma)$ et l'égalité suivante est vraie dans $CS_{k-1}$ :*

$$(13) \qquad \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \{R_i\}_F = \sum_{\sigma \in S_k} j_\sigma \cdot \Big\{\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot d_i^k\big(\{P_\sigma^F\}\big)\Big\}.$$

La condition sur le signe de $j_\sigma$ est immédiate d'après I.1.b.

Comme la classe de $R$ appartient à $\widetilde{\Delta}_F$, $R$ se décompose dans le groupe $\mathcal{P}(\mathrm{Vect}(F))$ sous la forme :

$$O(R)\cdot[R] = \sum_{\sigma\in S_k}\Big\{\sum_{x\in S_\sigma}[x+Q_\sigma^F]\Big\}, \tag{14}$$

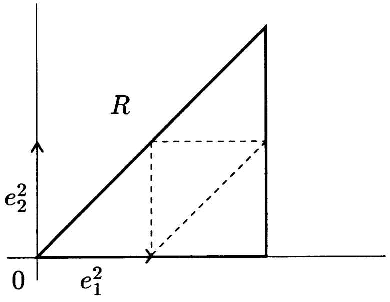
où $S_\sigma$ est un ensemble de points de $\mathbb{R}^{(\infty)}$ à coordonnées entières et où $[x+Q_\sigma^F]$ désigne la classe dans $\mathcal{P}(\mathrm{Vect}(F))$ du $k$-simplexe sous-jacent à $(x/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$ (cf. figure ci-après dans le cas de la dimension 2).

On a alors, en réécrivant (14) dans $\mathcal{P}(\mathrm{Vect}(F),TE)$ :

$$O(R)\cdot[R] = \sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot|S_\sigma|\cdot[P_\sigma^F]. \tag{15}$$

Pour l'essentiel, (14) signifie que le simplexe sous-jacent à $R$ se décompose géométriquement en simplexes qui se déduisent par translation des simplexes sous-jacents aux simplexes $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$.

La démonstration procède alors de la remarque suivante : puisque $R$ se décompose *géométriquement* en simplexes, les faces de ces simplexes sont les unes intérieures à $R$, les autres sur le bord de $R$ — nous appellerons ces faces les faces $R$-extérieures. Chaque face intérieure appartient simultanément à deux simplexes du membre droit de (14), tandis que l'union des faces $R$-extérieures n'est autre que le bord de $R$, comme le montre la figure ci-dessous en dimension 2.




*Les notations de cette figure sont celles de la remarque 5.*

Les faces intérieures sont dessinées en pointillés; elles appartiennent toutes simultanément aux bords de deux simplexes fondamentaux distincts. Les faces extérieures (en gras) délimitent le bord de $R$. L'égalité (14) s'écrit :

$$[R] = [Q_1^2] + [e_1^2 + Q_1^2] + [e_1^2 + e_2^2 + Q_1^2] + [e_1^2 + Q_\sigma^2].$$

Revenons-en à la démonstration du lemme; il s'agit de prouver que les faces intérieures s'annulent algébriquement deux à deux dans (13), tandis que les faces $R$-extérieures décomposent algébriquement les $\{R_i\}_F$ dans $CS_{k-1}$.

Soit alors $[x+Q_\sigma^F]$ la classe dans $\mathcal{P}(\mathrm{Vect}(F))$ d'un simplexe intervenant dans la décomposition de $R$.

Supposons tout d'abord $i \in [1, k-1]$ :

• Si la $i$-ème face de $[x+Q_\sigma^F]$ est intérieure à $R$, il existe un simplexe $[y+Q_\beta^F]$ intervenant dans la décomposition (14) de $R$ dont la $j$-ième face coïncide avec la $i$-ième face de $[x+Q_\sigma^F]$. D'après les LEMMES 1 et 2, on a :

$$i = j \quad \text{et} \quad d_i^k\big(\{P_\sigma^F\} - \{P_\beta^F\}\big) = 0.$$

Comme dans (15), les simplexes $P_\sigma^F$ et $P_\beta^F$ sont affectés de signes opposés, les deux faces affectées des signes correspondants s'annulent dans le terme droit de (13).

• Si la $i$-ème face de $[x+Q_\sigma^F]$ est $R$-extérieure, elle appartient à une face $R_j$ de $R$. Comme cette face est de manière ensembliste la réunion des faces $R$-extérieures qu'elle contient, il suffit pour prouver (13) de vérifier que, dans (13), le terme $d_i^k(\{P_\sigma^F\})$ provenant de $[x+Q_\sigma^F]$ apparaît affecté du bon signe; c'est-à-dire que $R_j$ a pour orientation $(-1)^{i+j}\cdot\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot O(R)$ fois l'orientation de $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(i)} + f_{\sigma^{-1}(i+1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$ dans le sous-espace affine de dimension $(k-1)$ correspondant de $\mathbb{R}^{(\infty)}$. Cela résulte de ce que $R$ a pour orientation $O(R)\cdot\mathrm{sgn}(\sigma)$ fois l'orientation de $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$.

Si maintenant $i = k$ (resp. $i = 0$), la vérification est identique, à cela près qu'il faut distinguer les cas où $k$ est pair et $\mathrm{sgn}(1,2,\ldots,k) = -1$, et les cas où $k$ est impair et $\mathrm{sgn}(1,2,\ldots,k) = 1$.

D'où la preuve du LEMME 3.

D'où enfin la preuve de la PROPOSITION 7 : les morphismes de la catégorie $CS$ sont caractérisés par leur action sur les simplexes fondamentaux des groupes $\Delta_F$ ; pour établir (12), il suffit donc de prouver que $\Psi_{k-1}^m \circ d^k$ et $d^k \circ \Psi_k^m$, considérés comme morphismes de $CS_k$ dans $CS_{k-1}$, ont même action sur ces simplexes fondamentaux.

Soit donc $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$ un $k$-simplexe ordonné, dont la classe dans $\Delta_F$ est un simplexe fondamental. Le simplexe ordonné $(0/m\cdot f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/m\cdot f_{\sigma^{-1}(k)})$, obtenu par homothétie de rapport $m$ à partir du simplexe $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$ satisfait aux hypothèses du LEMME 3 et sa classe dans $\widetilde{\Delta}_F$ est égale à $\Psi_k^m([P_\sigma^F])$.

D'après le LEMME 3, $d^k \circ \Psi^k_m(\{P^F_\sigma\})$ est égal dans $CS_{k-1}$ à la somme alternée des classes associées à $\Delta_F$ des faces ordonnées de $(0/m \cdot f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/m \cdot f_{\sigma^{-1}(k)})$. Les $(k-1)$-simplexes ordonnés qui définissent ces faces s'écrivent :

$$(0/m \cdot f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/m \cdot (f_{\sigma^{-1}(i)} + f_{\sigma^{-1}(i+1)})/\cdots/m \cdot f_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Ce sont les images par homothétie de rapport $m$ des faces ordonnées de $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$. La classe associée à $\Delta_F$ dans $CS_{k-1}$ de leur somme alternée est donc égale à $\Psi^m_{k-1} \circ d^k(\{P^F_\sigma\})$, ce qui termine la démonstration.

### IV.2. Décomposition du groupe des polytopes d'un espace euclidien.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Nous définirons $C^m(\mathbb{R}^n)$ comme le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les éléments $(x_1/\cdots/x_m)$, où $x_i \in \mathbb{R}^n$.

REMARQUE 7. — Géométriquement, $(x_1/\cdots/x_m)$ représente, à translation près, le $m$-simplexe ordonné d'arêtes successives $x_1,\ldots,x_m$.

Nous définirons de même $C^m_{(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ comme le sous-groupe de $C^m(\mathbb{R}^n)$ engendré par les éléments $(x_1/\cdots/x_m)$ tels que les vecteurs $x_1,\ldots,x_m$ engendrent un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension au plus $(n-1)$.

Si $G$ est un groupe de déplacements de $\mathbb{R}^n$ contenant le groupe $T$ des translations; $G$ s'écrit comme le produit semi-direct de $T$ et d'un groupe $\widetilde{G}$ de transformations vectorielles de $\mathbb{R}^n$. En notant $\tilde{g}$ l'élément de $\widetilde{G}$ associé à l'élément $g$ de $G$ dans la décomposition en produit semi-direct, $G$ opère sur $C^m(\mathbb{R})$ par :

$$g(x_1/\cdots/x_m) = (\tilde{g}(x_1)/\cdots/\tilde{g}(x_m)). \tag{16}$$

On peut alors définir un foncteur $F$ (resp. $F_{(n-1)}$) de $CS$ vers les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, qui associe :

- à $CS_m$ le groupe $C^m(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C^m_{(n-1)}(\mathbb{R}^n)$) ;
- à une flèche de $CS_m$ dans $CS_n$ dont l'action sur les simplexes de $CS_m$ est donnée par :

$$g[(x_1/\cdots/x_m)] = \Big[\Big(\sum_{i\in\mathcal{P}_1} x_i/\cdots/\sum_{i\in\mathcal{P}_n} x_i\Big)\Big]$$

(avec les notations de la PROPOSITION 6), l'application correspondante sur les simplexes de $C^m(\mathbb{R}^n)$.

Le fait que l'on définisse de la sorte un foncteur est immédiat, compte tenu de la définition de la catégorie $CS$.

On sait (cf. [2]) que les opérations $d^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i d_i^k$ permettent de définir des complexes de chaînes $C^*$ et $C^*_{(n-1)}$ :

$$\longrightarrow C^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} C^{m-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} \mathbb{Q} \longrightarrow 0,$$

$$\longrightarrow C^m_{(n-1)}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} C^{m-1}_{(n-1)}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

et que, si $T \subset G$ :

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G) \cong H_0\big(G, H_n(C^*/C^*_{(n-1)})\big).$$

D'après IV.1 PROPOSITON 7, les opérateurs $\Psi^k_m$ de $\mathbb{Q}[S_m]$, définis à l'aide du foncteur $F$ sur $C^m(\mathbb{R}^n)$, commutent aux opérateurs bord de ces complexes :

$$\Psi^k_{m-1} \circ d^m = d^m \circ \Psi^k_m.$$

Les opérateurs $\Psi^k_n$ agissent donc sur $H_n(C^*/C^*_{(n-1)})$. D'après (16), $T$ opère trivialement sur $H_n(C^*/C^*_{(n-1)})$. Les opérateurs $\Psi^k_n$ sont donc bien définis sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, T)$. D'après leur définition au II, ils opèrent comme les homothéties sur ce groupe de polytopes.

On sait par ailleurs que l'action des homothéties commute à l'action de tout groupe de déplacements $G$. L'action des opérateurs $\Psi^k_n$ est donc bien définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G)$. Enfin, compte tenu des relations $\Psi^k_n = \sum_{1\leq p\leq n} k^p \cdot e^p_n$ qui existent entre dilatations et idempotents, les idempotents orthogonaux $e^k_n$ agissent sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G)$ . Le groupe $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G)$ se décompose donc sous l'action des opérateurs $\Psi^k_n$ (c'est-à-dire des homothéties de rapport $k$, cf. [3]).

PROPOSITION 8. — *Le groupe des polytopes d'un espace euclidien de dimension $n$ se décompose sous l'action des homothéties (i.e. des opérateurs $\Psi^k_n$ de $\mathbb{Q}[S_n]$) :*

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{P}^i(\mathbb{R}^n, G), \tag{17}$$

*où $\mathcal{P}^i(\mathbb{R}^n, G) = e^i_n \cdot \mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G)$.*

*L'homothétie de rapport $k$ opère comme $i^k$ sur $\mathcal{P}^i(\mathbb{R}^n, G)$.*

### IV.3. Décomposition de l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative sur un corps de caractéristique nulle.

REMARQUE 8. — Comme les opérateurs $\Psi_k^m$ et $\mathrm{Sh}_k^m$ appartiennent à $\mathbb{Z}[S_k]$, ils permettent de définir une filtration du complexe de Hochschild pour une algèbre commutative sur un anneau commutatif quelconque. Nous renvoyons pour ce calcul à [4].

Soit $A$ une algèbre commutative sur un corps $K$ de caractéristique nulle et $M$ un $A$-bimodule symétrique. Le complexe de Hochschild associé à $M$ a pour $n$-ième composante le $K$-espace vectoriel $M \otimes A^{\otimes n}$ et pour bord :

$$d : M \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow M \otimes A^{\otimes (n-1)}$$

$$\begin{aligned} m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto m \cdot a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n & \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes \cdots \otimes a_i \cdot a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n & \\ + (-1)^n a_n \cdot m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}. & \end{aligned}$$

L'homologie de Hochschild de $A$ à coefficients dans $M$ est donnée par les groupes d'homologie de ce complexe.

On peut, comme dans le cas des polytopes, définir un foncteur $F$ de $CS$ vers les $K$-espaces vectoriels en associant :

- à $CS_k$, le $K$-espace vectoriel $M \otimes A^{\otimes k}$ ;
- à une flèche $\Psi$ de $CS_\ell$ dans $CS_k$ définie par :

$$\Psi\big([(f_1/\cdots/f_\ell)]\big) = \Big[\Big(\sum_{i\in\mathcal{P}_1} f_i/\cdots/\sum_{i\in\mathcal{P}_k} f_i\Big)\Big],$$

avec les notations de la PROPOSITION 6, la flèche correspondante $\widetilde{\Psi}$ de $M \otimes A^\ell$ dans $M \otimes A^k$ donnée par :

$$\widetilde{\Psi}\big(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_\ell\big) = \prod_{i\in\mathcal{P}^c} a_i \cdot m \otimes \prod_{i\in\mathcal{P}_1} a_i \otimes \cdots \otimes \prod_{i\in\mathcal{P}_k} a_i, \tag{18}$$

où l'on note $\mathcal{P}^c$ le complémentaire de $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$ dans $[1,\ell]$.

Compte tenu de l'existence de $F$, les opérations $\Psi_k^m$ définies sur le terme $M \otimes A^{\otimes k}$ du complexe de Hochschild, commutent aux bords de ce complexe. Elles peuvent donc être définies sur ses groupes d'homologie, et l'action des idempotents orthogonaux définit une décomposition de l'homologie de Hochschild de toute algèbre commutative sur un corps de caractéristique nulle [4].

PROPOSITION 9. — *L'homologie de Hochschild de $A$ à coefficients dans $M$ se décompose sous l'action des opérations $\Psi_n^k$ :*

$$H_n(A,M) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} H_n^i(A,M)$$

*où $H_n^i(A,M) = e_n^i \cdot H_n(A,M)$.*

*L'élément $\Psi_n^k$ de $\mathbb{Z}[S_n]$ opère comme $k^i$ sur $H_n^i(A,M)$.*

## BIBLIOGRAPHIE


[1] COMTET (L.). — *Analyse combinatoire.* — P.U.F., 1970.

[2] DUPONT (J.-L.). — Algebra of polytopes and homology of flag complexes, *Osaka J. of Math.*, t. **19**, 1982, p. 599–641.

[3] HADWIGER (H.). — *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* — Springer Verlag, Grund. der Math. Wiss. Band XCIII, 1957.

[4] LODAY (J.-L.). — Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives, *Invent. Math.*, t. **96**, 1989, p. 205–230.

[5] PATRAS (F.). — Filtration du groupe des polytopes et $\lambda$-structure du groupe symétrique., *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, **1**, **7**, 1990, p. 501–504.