BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE ARNOUX
GÉRARD RAUZY

Représentation géométrique de suites de complexité $2n + 1$

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 2 (1991), p. 199-215
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_199_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 199–215.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE SUITES DE COMPLEXITÉ 2n + 1

PAR

PIERRE ARNOUX ET GÉRARD RAUZY (*)

RÉSUMÉ. — On montre que toute suite minimale de complexité $2n+1$ satisfaisant à une certaine condition combinatoire peut être représentée par un échange de six intervalles, ce qui généralise le résultat classique sur la représentation des suites sturmiennes par les rotations.

ABSTRACT. — We prove that all minimal sequences of complexity $2n+1$, satisfying to a combinatorial condition, can be represented by an interval exchange on six intervals; this generalizes a classical result on representation of sturmian sequences by rotations.

0. Introduction et exposé du résultat

Quand on étudie un système dynamique (X, T), il est souvent intéressant de considérer une partition finie bien choisie $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de X et les *itinéraires* des points de X pour cette partition, c'est-à-dire les suites $(\nu(T^n x))_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\nu(x) = \alpha$ si $x \in A_\alpha$, qui décrivent les positions des itérés d'un point par rapport à la partition; l'existence d'une telle partition finie associant à chaque point un itinéraire distinct est assurée, dans le cas d'entropie finie, par un résultat de KRIEGER (cf. [Kr]). Si l'on note Ω l'adhérence de ces suites dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, il est facile de vérifier que Ω est invariant par le décalage S qui envoie la suite (x_n) sur la suite (y_n) définie par $y_n = x_{n+1}$, et que l'application qui à un point de X fait correspondre son itinéraire est une semi-conjugaison entre (X, T) et le système dynamique symbolique (Ω, S).

(*) Texte reçu le 5 décembre 1990, révisé le 11 mars 1991.
P. ARNOUX, Université de Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.
G. RAUZY, Faculté des Sciences de Luminy, DMI, 70 route Léon Lachamp, case 901, 13008 Marseille, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1991/199/$ 5.00
© Société mathématique de France

On peut donner comme exemples classiques les automorphismes hyperboliques du tore, munis d'une partition markovienne, qui sont conjugués de cette façon à des sous-shifts de type fini, ou encore la rotation $R_\alpha : [0,1[\to [0,1[\quad x \mapsto (x+\alpha) \bmod 1$, munie de la partition $[0,1-\alpha[$, $[1-\alpha,1[$, qui est conjuguée au système symbolique engendré par une suite sturmienne (voir plus bas).

Nous nous intéressons ici au problème inverse : étant donné un système dynamique symbolique (Ω, S) dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, est-il possible d'en donner une interprétation géométrique? Nous dirons qu'un système (X,T) et une partition finie de X indexée par $\mathcal{A}$ *représentent* le système (Ω, S) si les itinéraires des points de X par rapport à cette partition sont denses dans Ω (on ne peut pas demander que l'application soit surjective, pour des raisons topologiques : il y a en général des "itinéraires impropres" analogues aux développements décimaux impropres des nombres réels).

Notations et définitions.

Commençons d'abord par fixer quelques notations : $\mathcal{A}$ étant l'ensemble fini (alphabet) utilisé, on notera $\mathcal{A}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^k$ le monoïde libre sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans $\mathcal{A}$, on appelle $L(u)$ l'ensemble des *facteurs* de u, c'est-à-dire des mots de la forme $u_i u_{i+1} \dots u_{i+j}$. Il est immédiat que $L(u)$ est factoriel (tout facteur d'un mot de $L(u)$ est dans $L(u)$) et prolongeable à droite (si A est dans $L(u)$, il existe une lettre a telle que Aa est dans $L(u)$).

On notera $L_n(u)$ l'ensemble des facteurs de longueur n. Le cardinal de cet ensemble est particulièrement important pour notre étude :

DÉFINITION. — *On appelle* complexité *de u la suite p telle que $p(n)$ est le nombre de facteurs distincts de longueur n de u.*

A la suite u on associe le système dynamique (Ω, S), où Ω est l'adhérence de l'orbite de u par le décalage S ; le langage $L(u)$ ne caractérise pas u, ni même son orbite, mais il caractérise Ω : une suite dont tous les mots initiaux sont dans $L(u)$ est forcément dans Ω, et réciproquement. On dit que la suite u est *récurrente* si elle est point d'accumulation de son orbite; il faut et il suffit pour cela que tout mot de $L(u)$ apparaisse un infinité de fois dans u, et $L(u)$ est alors prolongeable à gauche.

On dit que la suite est *minimale* si le système associé ne contient pas de fermé invariant non trivial, ou encore si tout point du système est d'orbite dense; si u est minimale, elle est évidemment récurrente. On peut donner un critère simple de minimalité sur $L(u)$: la suite est minimale si et seulement si, pour tout n, il existe N tel que tout mot de longueur N

contienne tout mot de longueur n. En effet, si U est un mot de longueur n tel que, pour tout N, il existe un mot $V_N \in L_N(u)$ ne contenant pas U, on peut, en extrayant de la suite $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convenable et en prenant des facteurs initiaux de longueur croissante de cette sous-suite, construire un élément de Ω dont tous les facteurs sont dans $L(u)$ mais qui ne contient pas U, ce qui contredit la minimalité.

Nous ne considèrerons dans la suite que des suites minimales.

Le graphe associé à une suite.

Pour une étude plus fine de la suite, on peut définir sur $L_n(u)$ des relations, pour $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$:

$$U \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}} V \text{ s'il existe un mot } W \text{ tel que}$$
$$U = \beta W,\ V = W\alpha,\ \beta W\alpha \in L_{n+1}(u).$$

On emploiera également la notation $U \xrightarrow{\alpha} V$ (resp. $U \underset{\beta}{\longrightarrow} V$, $U \to V$) s'il n'est pas utile d'expliciter la lettre β (resp. α, α et β).

On notera Γ_n le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de $L_n(u)$, et dont les flèches correspondent à ces relations (chaque flèche est donc associée à un élément de $L_{n+1}(u)$). Pour $U \in L_n(u)$, on notera $\partial^+ U$ (resp. $\partial^- U$) le nombre de flèches de Γ_n qui partent de U (resp. qui arrivent à U) ; il est clair que, puisque $L(u)$ est prolongeable des deux côtés, $\partial^+ U$ et $\partial^- U$ sont toujours supérieurs ou égaux à 1. Tout mot de $L_{n+k}(u)$ correspond à un unique chemin de longueur k dans le graphe, mais la réciproque est fausse en général ; par ailleurs, la minimalité du système entraîne que deux sommets du graphe peuvent toujours être joints.

Il est clair que si $\partial^+ U = 1$ pour tout U dans $L_n(u)$, le graphe se réduit à un cycle, et la suite u est périodique, de complexité constante et égale à sa période à partir d'un certain rang. Mais on vérifie que, par définition, le nombre de sommets du graphe Γ_n est égal à $p(n)$, et le nombre de flèches, $\sum_{U\in L_n(u)} \partial^+(U)$, est égal à $p(n+1)$; donc, pour une suite non périodique minimale, la complexité est une fonction strictement croissante de n.

On retrouve ainsi un résultat classique : les suites non périodiques de plus petite complexité sont les suites dites "sturmiennes", de complexité $n+1$. On verra plus bas que ces suites sont représentées par des rotations irrationelles sur l'intervalle unité, avec une partition correspondant aux deux intervalles de continuité de la rotation.

Après les suites sturmiennes, les plus faciles à étudier sont les suites de complexité linéaire ; nous donnons dans ce qui suit une représentation

d'une classe de suites de complexité $2n+1$, qui sont donc définies sur un alphabet à trois symboles que l'on notera $\{1,2,3\}$, puisque $p(1)=3$ (il existe des suites de complexité non linéaire comprise entre $n+1$ et $2n+1$, cf. [R1], mais elle sont probablement plus difficiles à représenter).

On a vu ci-dessus que :

$$\sum_{U\in L_n(u)} (\partial^+(U)-1) = p(n+1)-p(n)$$

et puisque $\partial^+(U)>0$ pour tout U et que dans notre cas $p(n+1)-p(n)=2$, on voit que, pour chaque n, il y a soit un seul U de longueur n tel que $\partial^+U=3$, soit deux mots V,W tels que $\partial^+V=\partial^+W=2$; on vérifie facilement que si, pour une longueur n on est dans le premier cas, c'est encore vrai pour les longueurs $<n$, donc à partir d'un certain rang on est toujours soit dans le premier, soit dans le second cas. La même analyse s'applique à ∂^-U, ce qui partage les suites de complexité $2n+1$ en quatre classes; nous allons étudier celle pour laquelle on a toujours $\partial^+=\partial^-=3$:

DÉFINITION. — *On dit qu'une suite minimale u de complexité $2n+1$ satisfait la condition (*) si, pour tout n, u admet un facteur D_n de longueur n ayant trois prolongements possibles, et un facteur G_n de longueur n ayant trois antécédents possibles (avec les notations précédentes, $\partial^+D_n=3$ (resp. $\partial^-G_n=3$), et donc pour tout autre mot X, on a $\partial^+X=1$ (resp. $\partial^-X=1$)).*

THÉORÈME. — *Si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimale de complexité $2n+1$, satisfaisant à la condition (*), il existe un échange d'intervalles $f : S^1 \to S^1$ défini sur six intervalles A_1,B_1,A_2,B_2,A_3,B_3 et une partition de S^1 en trois intervalles $I_i=A_i\cup B_i$ qui représentent la suite u.*

Remarque 1. — Les itinéraires évitent un nombre dénombrable de points du sous-shift (Ω,S) défini par u; ces points correspondent à des itinéraires impropres, dus au fait qu'il y a un choix arbitraire, aux bornes des intervalles, entre la continuité à gauche et la continuité à droite pour f; on peut faire disparaître cet arbitraire en séparant S^1 le long des orbites des discontinuités, suivant la construction de Keane (cf. [Ke]); on obtient alors un homéomorphisme d'un ensemble de Cantor, dont les itinéraires remplissent Ω.

Remarque 2. — Le théorème s'étend facilement aux suites de complexité $(k-1)n+1$ satisfaisant une généralisation évidente de la condition (*) (il existe un seul mot U tel que $\partial^+U=k$, et un seul mot V tel que

$\partial^- V = k$), qui sont représentées par un échange d'intervalles sur $2k$ intervalles et une partition en k intervalles.

Remarque 3. — Il est probable que ce type de représentation peut se généraliser, d'autant plus qu'il est facile de montrer qu'un échange d'intervalle irrationnel au sens de Keane sur s intervalles, muni de sa partition naturelle en intervalles, donne un système symbolique de complexité $(s-1)n+1$; mais ces systèmes ne sont pas quelconques, et une étude élémentaire montre qu'un échange d'intervalle sur trois intervalles ne peut pas donner un système symbolique du type étudié ci-dessous.

1. Étude des suites minimales de complexité $n+1$.

Nous commençons par traiter ce cas classique parce que c'est une illustration simple de la méthode que nous utilisons, tirée de [R1], et parce que nous aurons besoin du résultat pour finir la démonstration de la proposition du paragraphe suivant.

Remarquons d'abord que, puisque $p(1) = 2$, une telle suite est construite sur un alphabet à deux lettres, que nous noterons $\{1,2\}$. Les graphes Γ_n sont particulièrement simples : ils possèdent un seul sommet, D_n, d'où partent deux flèches, et un seul sommet G_n où arrivent deux flèches, et sont donc constitués de deux boucles, recollées en un point si $D_n = G_n$, et suivant l'arête qui joint G_n à D_n sinon. Tout chemin sur le graphe peut se décomposer en ces deux boucles, ce qui conduit à la définition suivante :

DÉFINITION. — *On appelle n-segment pour la suite u une suite finie $A_0, \dots, A_k$ de mots de $L_n(u)$ tels que $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} A_i$, $1 \leq i \leq k$, $\partial^+ A_0 > 1$, $\partial^+ A_k > 1$, $\partial^+ A_i = 1$, $0 < i < k$. Le nom du n-segment sera le mot $\alpha_1 \dots . \alpha_k$, constitué des étiquettes des flèches formant le chemin sur le graphe qui correspond au n-segment.*

Ici on a évidemment $A_0 = A_k = D_n$, et il n'y a que deux n-segments ; puisque tout mot de $L(u)$ correspond à un chemin sur le graphe, il peut toujours s'écrire $AB_1 \dots B_k C$, où les B_i sont des noms de n-segments, A un suffixe de nom, et C un préfixe de nom. Bien entendu, l'ordre dans lequel peuvent se succéder ces noms n'est pas arbitraire, sinon la complexité serait exponentielle. On montrera que la longueur des n-segments tend vers l'infini avec n, et qu'il suffit donc de montrer comment ils sont obtenus pour caractériser le langage $L(u)$.

On notera U, V les noms des n-segments de Γ_n, et U', V' ceux de Γ_{n+1} ; nous allons expliquer comment on passe du graphe Γ_n au graphe Γ_{n+1} et de (U, V) à (U', V'). Il y a deux cas à considérer :

a) Fente : $G_n \neq D_n$.

Le graphe Γ_{n+1} est alors complètement déterminé par Γ_n : pour tout mot X de $L_n(u)$ différent de G_n, il existe un unique mot αX dans $L_{n+1}(u)$, et il découle directement de la définition que si $\alpha X \to \beta Y$, alors $X \to Y$, on peut donc projeter de cette façon Γ_{n+1} sur Γ_n. Le seul sommet de Γ_n auquel correspondent deux sommets de Γ_{n+1} est G_n, suffixe par définition de $1G_n$ et $2G_n$, et puisque les flèches sont préservées, le seul sommet de Γ_{n+1} d'où partent deux flèches doit être de la forme δD_n (puisque d'aucun autre sommet ne peuvent partir deux flèches, et qu'il doit y en avoir au moins un de ce type, car la complexité est croissante) ; on a donc $D_{n+1} = \delta D_n$, et de même $G_{n+1} = G_n\gamma$.

Le nouveau graphe vient donc du précédent en "fendant" d'un cran l'arête qui joint G_n à D_n. En particulier, la longueur des n-segments et leur nom sont préservés, on a $U' = U$, $V' = V$. Comme la longueur de l'arête diminue à chaque fois, on doit arriver en un temps fini à l'autre cas, qui se présente donc une infinité de fois.

b) Éclatement : $G_n = D_n$.

Il y a encore deux boucles correspondant aux n-segments de Γ_n, que nous noterons :

$$D_n \xrightarrow{\alpha} \cdots \underset{1}{\longrightarrow} D_n, \qquad D_n \xrightarrow{\beta} \cdots \underset{2}{\longrightarrow} D_n,$$

où α, β sont deux nombres distincts (les noms des n-segments peuvent avoir une initiale et une finale égales ou distinctes, c'est pourquoi on doit laisser indéterminée la valeur de α).

On peut refaire la même construction que ci-dessus ; pour la même raison, G_{n+1} sera de la forme $D_n\gamma$, et D_{n+1} de la forme δD_n, mais ici il y a indétermination ; le graphe Γ_{n+1} n'est plus complètement déterminé par Γ_n. On peut supposer que $D_{n+1} = 1D_n$; l'indétermination est alors levée. En effet, il suffit de décider de D_{n+1} pour connaître Γ_{n+1} ; si l'on pose $G_{n+1} = D_n\beta$, il est immédiat (voir la figure 1) que le graphe n'est plus transitif : il est impossible de passer de $D_n\beta$ à $1D_n$, ce qui contredit la minimalité de la suite. On a donc $D_{n+1} = D_n\alpha$, et en particulier l'unique

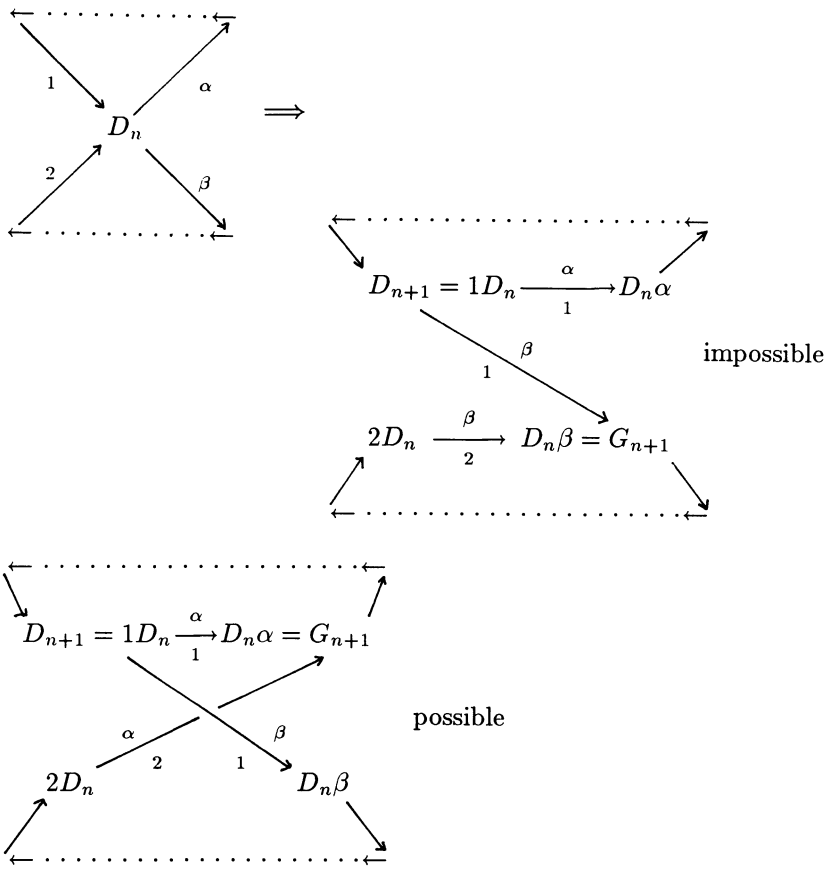


Figure 1.

flèche issue de $2D_n$ aboutit en $D_n\alpha$; les chemins correspondant aux $(n+1)$-segments sont donc, avec les notations définies plus haut :

$$1D_n \xrightarrow[1]{\alpha} D_n\alpha \to \cdots \to 1D_n$$

$$1D_n \xrightarrow[1]{\beta} D_n\beta \to \cdots \to 2D_n \xrightarrow[2]{\alpha} D_n\alpha \to \cdots \to 1D_n$$

et l'on vérifie facilement que l'on détermine les noms des segments par :

$$U' = U, \quad V' = VU,$$

naturellement, si $D_{n+1} = 2D_n$, on aura la formule obtenue en échangeant U et V.

La discussion précédente permet de caractériser complètement les suites sturmiennes ; si l'on note (U_k, V_k) la suite de couples distincts de noms de n-segments, et τ_1, τ_2 les substitutions sur deux lettres (morphismes du monoïde libre $\{1,2\}^*$) définies par :

$$\tau_1(1) = 1, \qquad \tau_2(1) = 12,$$
$$\tau_1(2) = 21, \qquad \tau_2(2) = 2,$$

on a la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Pour toute suite minimale de complexité $n+1$, il existe une suite $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\{1,2\}$, prenant chaque valeur une infinité de fois, telle que :*

$$U_k = \tau_{i_0}\tau_{i_1}\dots\tau_{i_k}(1), \quad V_k = \tau_{i_0}\tau_{i_1}\dots\tau_{i_k}(2).$$

Preuve. — Supposons que la suite est déterminée à l'ordre k, posons $\phi = \tau_{i_0}\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_k}$; avec les notations ci-dessus, on a $U = \phi(1)$, $V = \phi(2)$, donc $U' = U = \phi\tau_1(1)$ et $V' = VU = \phi(2)\phi(1) = \phi(21) = \phi\tau_1(2)$, donc le cas étudié correspond à $i_{k+1} = 1$, et l'autre cas ($U' = UV$, $V' = V$) à $i_{k+1} = 2$. Si la suite ne prend pas chaque valeur une infinité de fois, elle est constante à partir d'un certain rang n, par exemple de valeur 1, et on a : $V_{n+k} = V_n U_n^k$; les mots U_n^k sont donc dans $L(u)$, pour tout k, ce qui entraîne que le système engendré contient une suite périodique, et contredit la minimalité de la suite. □

La suite (i_k) possède une interprétation très simple : si l'on écrit le développement de U_n sous la forme $U_n = \tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}\tau_1^{n_3}\tau_2^{n_4}\cdots(1)$, c'est-à-dire que les n_i sont les longueurs des plages successives où la suite i_n est constante, alors la suite (n_i) est le développement en fraction continue d'un unique nombre α entre 0 et 1, et la rotation d'angle α modulo 1 représente au sens de l'introduction la suite sturmienne donnée ; le nombre α est alors la proportion de 2 dans cette suite.

2. Combinatoire des suites minimales de complexité $2n+1$ satisfaisant à la condition (*).

Dans le cas que nous considérons ($\partial^+ D_n = 3$, $\partial^- G_n = 3$), les graphes Γ_n ressemblent à ceux du paragraphe précédent : ce sont des bouquets de trois cercles, recollés en un point si $D_n = G_n$, recollés le long d'un segment allant de G_n à D_n sinon (cf. figure 2). Nous allons

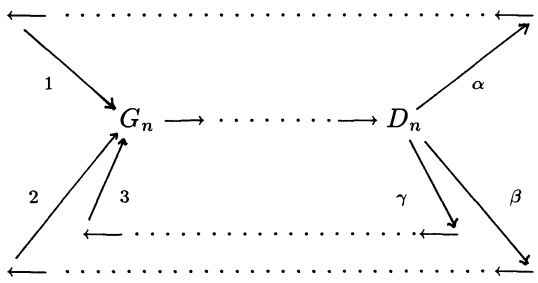


Figure 2.

comme ci-dessus étudier l'évolution du graphe Γ_n pour trouver les noms des n-segments.

Ici encore, on a évidemment $A_0 = A_k = D_n$ sur tout n-segments, et il ne peut donc y avoir que trois n-segments, correspondant aux trois boucles du graphe; on notera U, V, W les noms des n-segments de Γ_n, U', V', W' ceux de Γ_{n+1}. Comme les n-segments recouvrent la totalité du graphe Γ_n, on voit que la somme de leurs longueurs est minorée par $2n+3$, nombre de flèches du graphe, donc tend vers l'infini; on verra en fait que la longueur de chacun d'entre eux tend vers l'infini avec n. Il suffit d'étudier l'évolution de ces n-segments quand n varie.

Pour passer du graphe Γ_n au graphe Γ_{n+1}, il faut ici aussi distinguer deux cas :

a) Fente : $G_n \neq D_n$.

L'analyse est exactement semblable à celle du § 1 (la figure 3 montre mieux ce qui se passe qu'une longue explication). On voit que les noms des $(n+1)$-segments sont les mêmes que ceux des n-segments; la transformation consiste juste à "fendre" le graphe Γ_n d'un cran le long de l'arête G_nD_n, et on est donc ramené en un nombre fini d'étapes au cas suivant.

b) Éclatement : $G_n = D_n$.

Ici, à tout X différent de D_n correspond un seul mot αX et $X\omega$ dans $L_{n+1}(u)$; par contre, les mots $1D_n$, $2D_n$, $3D_n$ et D_n1, D_n2, D_n3 sont tous présents; on voit facilement que D_{n+1} doit être du type αD_n; on peut supposer sans perte de généralité que c'est $1D_n$. De chacun des sommets $D_n\omega$ est issu un chemin qui arrive sur l'un des αD_n; notons $D_n\omega_i$ le sommet correspondant à iD_n (voir la figure 4).

Si G_{n+1} est différent de $D_n\omega_1$, le graphe n'est pas transitif, puisqu'il est impossible de parvenir en D_{n+1} à partir de G_{n+1}; en fait, tout chemin est alors ultimement périodique, ce qui est absurde; on a donc $G_{n+1} = D_n\omega_1$,

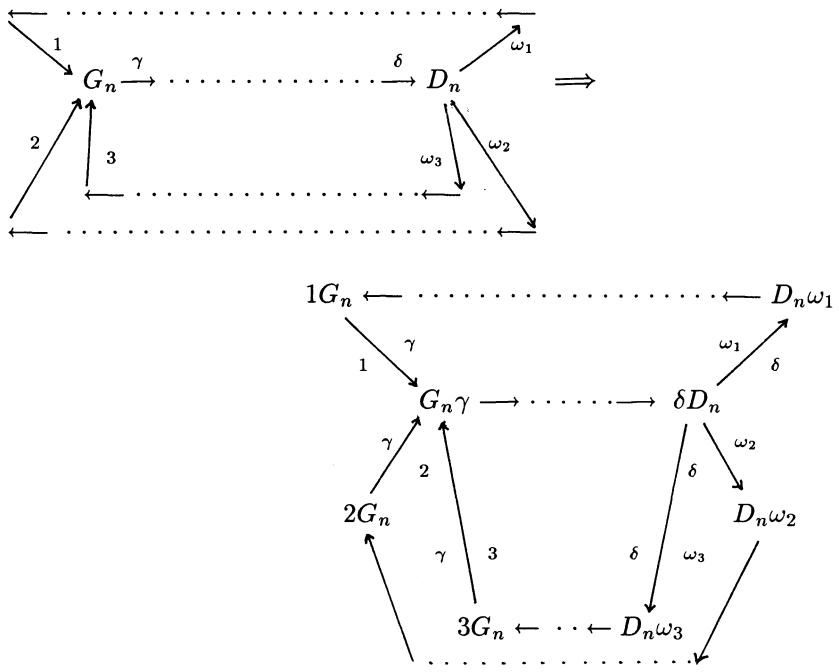


Figure 3.

et l'on peut écrire complètement les $(n+1)$-segments ; on voit que les noms de ces $n+1$-segments sont donnés par :

$$U_{n+1} = U_n, \quad V_{n+1} = V_n U_n, \quad W_{n+1} = W_n U_n .$$

De cette analyse, on déduit une description complète des n-segments : soit (U_k, V_k, W_k) la suite des triplets distincts de noms de n-segments, et soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les trois substitutions sur trois lettres définies par :

$$\begin{aligned} &\sigma_1(1) = 1, \quad &&\sigma_2(1) = 12, \quad &&\sigma_3(1) = 13, \\ &\sigma_1(2) = 21, \quad &&\sigma_2(2) = 2, \quad &&\sigma_3(2) = 23, \\ &\sigma_1(3) = 31, \quad &&\sigma_2(3) = 32, \quad &&\sigma_3(3) = 3. \end{aligned}$$

On a la proposition suivante, qui généralise celle du § 1 :

PROPOSITION. — *Soit u une suite minimale de complexité $2n+1$ vérifiant la condition (*), et soit U_k, V_k, W_k la suite des noms des n-segments ; alors il existe une suite i_k, à valeur dans $\{1,2,3\}$ et prenant*

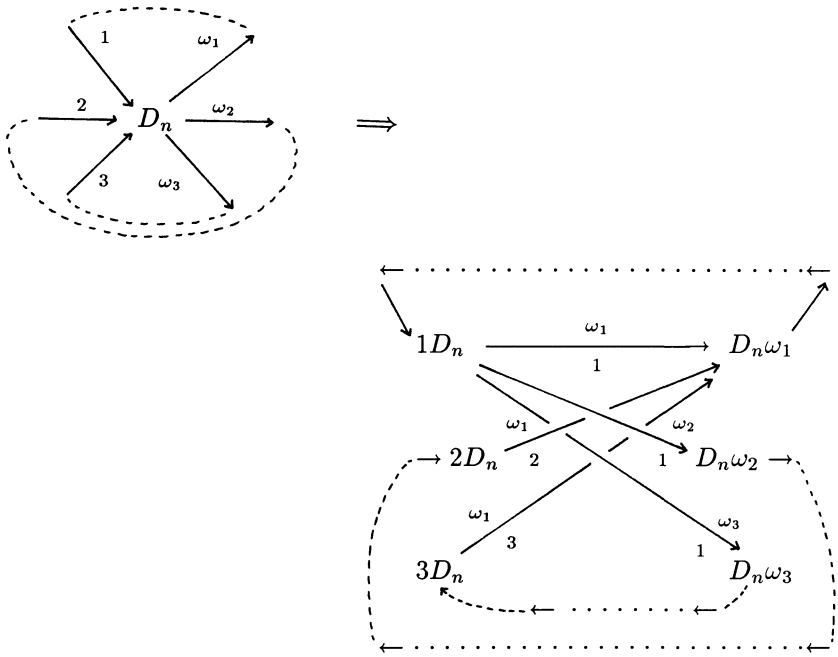


Figure 4.

chaque valeur une infinité de fois, telle que :

$$U_k = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k}(1), \quad V_k = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k}(2), \quad W_k = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k}(3).$$

Réciproquement, si (i_k) est une suite à valeurs dans $\{1,2,3\}$ prenant chaque valeur une infinité de fois, et si U_k, V_k, W_k sont les mots définis par les égalités précédentes, l'ensemble des facteurs des mots U_k, $k \geq 0$, est le même que celui des mots V_k ou W_k, et il correspond à un système dynamique minimal dont tout point est une suite de complexité $2n+1$ satisfaisant à la condition (*).

Preuve. — Le graphe Γ_0 est réduit à un point : le mot vide, et donc on peut poser $U_0 = 1, V_0 = 2, W_0 = 3$; supposons l'existence de la suite i_k prouvée jusqu'à l'ordre k; on a donc $U_k = \sigma_{i_0}\ldots\sigma_{i_k}(1) = \tau(1)$, et de même pour les autres noms; pour passer à U_{k+1}, il faut appliquer la transformation donnée ci-dessus, ou un de ses deux symétriques; pour la transformation donnée ci-dessus, on aura $U_{k+1} = U_k = \tau(1) = \tau\cdot\sigma_1(1)$, et aussi $V_{k+1} = V_k\cdot U_k = \tau(2)\cdot\tau(1) = \tau(2.1) = \tau\cdot\sigma_1(2)$, et de même

$W_{k+1} = \tau \cdot \sigma_1(3)$, ce qui prouve l'existence de la suite i_k. Si cette suite ne prenait qu'une seule valeur (par exemple 1) à partir d'un certain rang n, au dela de ce rang les noms seraient de la forme $U_{n+p} = U_n$, $V_{n+p} = V_n \cdot U_n \cdots U_n$, $W_{n+p} = W_n \cdot U_n \cdots U_n$, et donc le système contiendrait une suite périodique, ce qui contredit la minimalité de u. Si la suite i_k ne prend que deux valeurs à partir d'un certain rang, par exemple 1 et 2, les éclatements de graphes n'ont lieu que selon les n-segments correspondant à U et V ; il suffit alors de considérer les sous-graphes Γ'_n de Γ_n obtenus en supprimant la boucle correspondant au n-segment de nom W pour trouver un système du même type que ceux considérés au paragraphe 1 (graphes à deux boucles, avec les mêmes types d'éclatement : on prend la restriction de τ_1 et τ_2 à $\{1,2\}$). On en déduit un système de complexité $n + C$, où C est une constante dépendant du rang à partir duquel τ_3 disparaît, et contenu dans le système initial; ceci contredit la minimalité de la suite u.

Il reste à montrer que toute telle suite définit bien un système de complexité $2n+1$ vérifiant la condition (*) ; mais la donnée de la suite i_k permet de reconstruire les graphes Γ_n, d'où l'on déduit immédiatement un langage factoriel prolongeable de complexité $2n + 1$, donc un système dynamique. □

On a ainsi construit une sorte de généralisation abstraite du développement en fraction continue pour les suites sturmiennes; le paragraphe suivant est consacré à une réalisation géométrique de ce modèle.

3. Représentation par des échanges d'intervalles.

On considère une suite (u_n) de complexité $2n + 1$ et satisfaisant la condition (*), et on veut représenter par un échange d'intervalles le système dynamique (Ω, S) associé; on notera encore (σ_{i_k}) la suite de substitutions associée à (u_n) par la proposition précédente.

Donnons d'abord une étape de la construction par récurrence qui nous permettra de représenter (Ω, S) ; nous généralisons la construction de [AY].

a) Une étape de la construction correspondant à σ_1.

Soient α, β, γ trois réels positifs vérifiant $\alpha > \beta + \gamma$; on va définir sur le cercle de longueur $\alpha+\beta+\gamma$ un échange d'intervalles f à six intervalles : on divise le cercle en trois intervalles I_1, I_2, I_3 de longueurs respectives α, β, γ, on coupe chacun de ces intervalles en deux parties égales, on permute ces deux parties sur chacun des intervalles en préservant l'orientation, puis on fait une rotation d'un demi-tour (voir la figure 5).

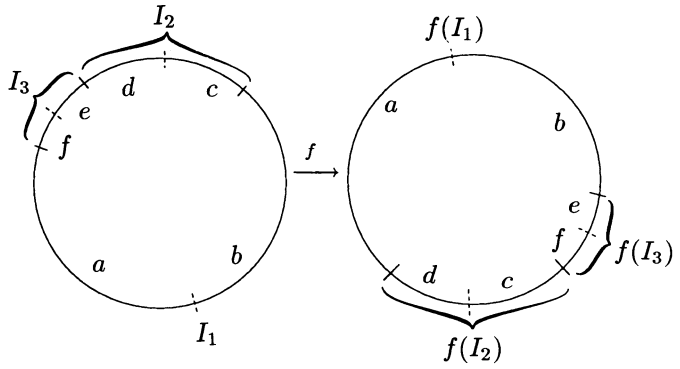


Figure 5.

L'intérêt de cette construction est dans le lemme suivant :

LEMME. — *Soit f' l'application induite de f sur $f(I_1)$, c'est-à-dire l'application de premier retour en $f(I_1)$, qui à x associe $f^{n_x}(x)$, où $n_x = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid f^n(x) \in f(I_1)\}$. En identifiant les extrémités de $f(I_1)$, f' est un échange d'intervalles du même type, associé aux trois réels $\alpha' = \alpha - \beta - \gamma$, $\beta' = \beta$, et $\gamma' = \gamma$.*

Preuve. — En effet, on remarque d'abord que, par construction, on a $f(I_2) \subset I_1$ et $f(I_3) \subset I_1$ (c'est ici qu'il faut avoir $\alpha > \beta + \gamma$) ; si l'on pose $I_1' = I_1 \cap f(I_1)$, il est clair que I_1' est formé de deux intervalles de même longueur $\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma)$, et que $f' = f$ sur I_1'. Une fois les extrémités de $f(I_1)$ identifiées, l'effet de f' sur I_1' est bien de permuter les deux moitiés de cet intervalle puis de faire un demi-tour. Sur I_2 et I_3, on a immédiatement $f' = f^2$, la première application de f permute les moitiés de chaque intervalle, la seconde introduit une discontinuité en $\frac{1}{2}\alpha$ qui va sur les extrémités de l'intervalle $f(I_1)$ et s'efface avec l'identification des extrémités.

Prenons maintenant comme partition pour f les trois intervalles I_1, I_2 et I_3, et la partition correspondante pour f' en I_1', I_2 et I_3 ; le raisonnement fait pour calculer l'induction montre que, si $x \in I_1'$, alors $f(x) = f'(x) \in f(I_1)$, et si $x \in I_2 \cup I_3$, alors $f(x) \in I_1$ et $f^2(x) = f'(x) \in f(I_1)$; si l'on note ν la fonction de numérotation associée à la partition de f, définie par $\nu(x) = k$ si $x \in I_k$ (la suite $(\nu(f^n(x)))$ est l'*itinéraire* de x au sens de l'introduction), et ν' la fonction de numérotation associée à celle de f', on a donc :

COROLLAIRE. — *Pour tout point x de $f(I_1)$, les itinéraires de x pour les deux fonctions et les partitions correspondantes sont reliés par :* $(\nu(f^n(x))) = \sigma_1(\nu'(f^n(x)))$.

b) Représentation du système (Ω, S).

Il suffit maintenant d'itérer cette construction : on définit les trois matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour la suite (i_k) définie dans la section précédente, on prend un triplet (α, β, γ) dans l'intersection des images du cône positif par les produits de matrices $M_{i_0} \cdot M_{i_1} \cdots M_{i_k}$ (les matrices du type $M_i M_j^n M_k$, avec i, j, k disticts, interviennent une infinité de fois dans le produit, et on vérifie facilement qu'elles sont strictement contractantes sur les directions du cône positif, avec un rapport de contraction majoré par une constante inférieure à 1 : ce triplet est donc unique à homothétie près) ; on peut alors continuer indéfiniment l'opération d'induction, car cette condition garantit qu'à chaque étape l'un des trois intervalles aura un longueur supérieure à la somme des deux autres.

On obtient ainsi une suite $f^{(k)}$ d'échanges d'intervalles, avec $f^{(0)} = f$, chacun muni d'une partition $I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, I_3^{(k)}$. Ces intervalles $I_i^{(k)}$ proviennent chacun d'un ensemble $J_i^{(k)}$ sur le cercle de départ, après identification d'un nombre fini de points ; on a en fait :

LEMME. — *$J_i^{(k)}$ est soit égal à I_i, soit complémentaire dans I_i d'un intervalle centré sur le milieu de I_i ; si k est assez grand, on est toujours dans le second cas.*

Preuve. — La première affirmation se prouve par récurrence ; elle est évidemment vraie pour la première étape, d'après l'étude précédente. Supposons la vraie pour $f^{(k)}$, et supposons que le plus grand des trois intervalles est $I_i^{(k)}$; alors $I_i^{(k+1)}$ se déduit de $I_i^{(k)}$ en supprimant un intervalle centré sur son milieu et en identifiant ses bords, et les deux autres intervalles restent inchangés. Or par hypothèse l'ensemble $J_i^{(k)}$ correspondant est soit égal à I_i, et dans ce cas l'affirmation est immédiatement vraie pour $J_i^{(k+1)}$, soit le complémentaire dans I_i d'un intervalle K ; le milieu de $I_i^{(k)}$ correspond aux bords de K, est on obtient donc $J_i^{(k+1)}$ comme

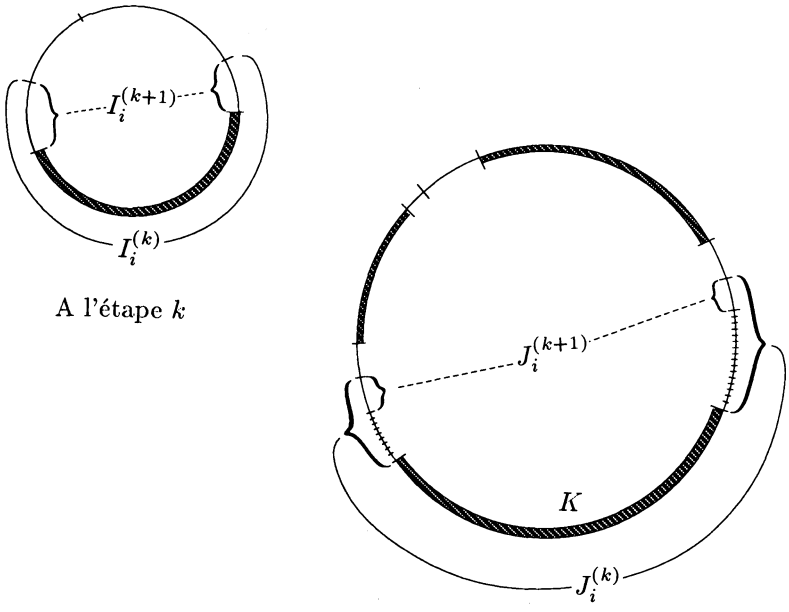


Figure 6.

complémentaire dans $J_i^{(k)}$ de deux intervalles de même longueur situés de part et d'autre de K (voir figure 6).

Enfin, la dernière assertion du lemme est claire, car l'induction sur l'intervalle numéro i correspond à la substitution σ_i, or la suite i_k prend toutes les valeurs; dès qu'elle a pris les trois valeurs, on est dans le second cas. □

Posons $J^{(k)} = \bigcup_i J_i^{(k)}$ l'ensemble sur lequel on induit à l'étape k, il est clair que cet ensemble est constitué de trois intervalles, et que l'intersection des $J^{(k)}$ est constituée de trois points, qui sont les bornes des intervalles de départ. Nous voulons calculer les itinéraires de ces trois points pour la partition initiale; il y a une difficulté, due à la discontinuité de la fonction, que l'on peut tourner en choisissant les intervalles semi-ouverts suivant une certaine convention, ou, de façon plus agréable, en se ramenant à un homéomorphisme par la construction de KEANE (cf. [Ke]), ce qui revient à remplacer chacune de ces bornes par une borne à droite et une borne à gauche; nous n'insisterons pas sur ce point et nous admettrons les deux

itinéraires possibles pour chacun de ces points; le corollaire de la section précédente entraine immédiatement :

LEMME. — *L'itinéraire pour f d'un point de $J_i^{(k)}$ commence par $\sigma_{i_1}.\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}(i)$.*

d'où l'on déduit :

PROPOSITION. — *Les deux itinéraires possibles pour le point commun aux intervalles I_i et I_j sont les deux suites points fixes de la suite de substitutions σ_{i_k} commençant par i et j*

Il est alors clair, par minimalité de f, que l'échange d'intervalles f et la partition I_1, I_2, I_3 représentent le système (Ω, S), ce qui démontre le théorème.

4. Quelques remarques.

On a ainsi défini une sorte de "développement simultané en fraction continue" pour un triplet de nombres, mais ce n'est valable que sur un ensemble très particulier : les conditions du type $\alpha > \beta + \gamma$, pour toutes les applications induites successives, font que l'on ne peut induire indéfiniment que sur un ensemble de mesure nulle, du genre "tapis de Sierpinski" ; pour pouvoir opérer sur les autres nombres, il faudrait peut-être considérer le cas $\partial^+ = 2$.

La construction faite aux §§ 2 et 3 peut se répéter de façon tout-à-fait identique pour donner une représentation par un échange d'intervalles sur $2k$ intervalles d'une suite de complexité $kn + 1$ satisfaisant à la condition $\partial^+ = \partial^- = k + 1$; ce qui rend les choses faciles dans toutes ces constructions, c'est qu'il n'y a qu'un seul point de divergence dans le graphe, la suite des éclatements est donc facile à construire.

On peut voir directement de façon géométrique les opérations de fente et d'éclatement faites sur les n-graphes aux §§ 1) et 2); elles sont tout-à-fait semblables aux opérations de glissement d'embranchement que l'on pratique sur les "réseaux ferroviaires" à la Thurston; la différence est que les glissements permis sur les graphes sont beaucoup plus étendus que ceux permis sur les réseaux. Ainsi, on peut faire un réseau à trois boucles sur un échange de trois intervalles, mais il est alors impossible de préserver une condition du type $\partial^+ = 3$, pour des raisons de conservation de longueur, en tout cas pour l'intervalle du milieu; le principe de la construction présentée ici est de fournir un réseau plus complexe, mais se projetant sur un graphe à trois boucles, qui permet tous les glissements nécessaires. Une

généralisation de cette construction permettrait peut-être de représenter toutes les suites à croissance linéaire.

L'analogue du théorème de Lagrange, qui affirme que les nombres dont le développement en fraction continue est périodique (ou périodique à partir d'un certain rang) sont des nombres quadratiques, est encore valable ici. Il correspond au cas où la suite (i_k), qui donne l'ordre dans lequel se succèdent les substitutions σ, est périodique (ou périodique à partir d'un certain rang). Dans ce cas, le système dynamique symbolique correspondant est engendré par une substitution sur trois lettres (primitive vu les conditions imposées) dont la valeur propre dominante est cette fois un nombre algébrique θ du troisième degré; les longueurs des intervalles (qui correspondent au vecteur propre associé) sont alors dans $\mathbb{Q}(\theta)$. Le cas particulier où $i_{3k} = 1$, $i_{3k+1} = 2$, $i_{3k+2} = 3$ correspond ainsi à la transformation inverse de celle étudiée dans [A], [IK] et [R2]; dans ce cas le système dynamique associé est représenté par une rotation sur le tore $\mathbb{T}^2$. Ce résultat subsiste d'ailleurs à quelques modifications près dans le cas général où la suite (i_k) est périodique (cf. [R3]).

BIBLIOGRAPHIE

[A] ARNOUX (P.). — Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une rotation sur le tore, *Bull. Soc. Math. France*, t. **116**, 1986, p. 489–500.

[AY] ARNOUX (P.) et YOCCOZ (J.C.). — Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov, *C.R.A.S.*, t. **292**, 1981, p. 75–78.

[IK] ITO (S.) et KIMURA (M.). — On Rauzy fractal, *prépublication*.

[Ke] KEANE (M.). — Interval exchange transformations, *Math. Z.*, t. **141**, 1975, p. 25–31.

[Kr] KRIEGER (W.). — On entropy and generators of measure-preserving transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **149**, 1970, p. 453–464.

[R1] RAUZY (G.). — Suites à termes dans un alphabet fini, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, t. **25**, 1983, p. 1–16.

[R2] RAUZY (G.). — Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, t. **110**, 1982, p. 147–178.

[R3] RAUZY (G.). — Rotations sur les groupes, nombres algébriques et substitutions, *prépublication*.