Bulletin de la S. M. F.

Marc Chardin

Sur l'annulation de l'homologie du complexe de Koszul gradué

Bulletin de la S. M. F., tome 123, n° 1 (1995), p. 87-105
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_1_87_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 87–105.

SUR L'ANNULATION DE L'HOMOLOGIE DU COMPLEXE DE KOSZUL GRADUÉ

PAR

MARC CHARDIN

RÉSUMÉ. — Si $\mathbb{K}$ est le complexe de Koszul construit avec s polynômes homogènes à coefficients dans un corps k et r la codimension (ou hauteur) de la variété projective associée, on montre classiquement que les modules $H_p(\mathbb{K})$ sont nuls pour $p > s - r$ et que $H_{s-r}(\mathbb{K}) \neq 0$. Le complexe de Koszul est dans ce cas naturellement gradué et le calcul de la dimension du k-espace vectoriel $H_p(\mathbb{K}_\nu)$ (partie homogène de degré ν de $H_p(\mathbb{K})$) est un problème élémentaire d'algèbre linéaire.

Nous fournissons dans cet article une borne sur ν à partir de laquelle $H_{s-r}(\mathbb{K}_\nu) \neq 0$ (sauf dans le cas, simple à étudier, où la variété associée est vide). Indépendamment de son intérêt intrinsèque, cette borne ramène donc le calcul de la (co)dimension à un simple problème d'algèbre linéaire. Du point de vue de l'étude de la complexité du calcul de la dimension, notre résultat donne, dans le pire des cas, une borne sensiblement moins bonne que les meilleures connues (cf. [G-H]) ; en revanche notre borne tient compte de la géométrie de la variété sous-jacente.

Nous rappelons dans la première partie quelques résultats de base sur le complexe de Koszul gradué. La clef de la preuve du théorème central est une étude la plus fine possible des variétés définies par r polynômes « assez généraux » de l'idéal engendré par les polynômes de départ. En plus des théorèmes « classiques » de Macaulay et Bertini, j'utilise pour cela, inspiré par le travail d'Amoroso [A], les notions d'élément superficiel et de clôture intégrale d'un idéal, qui remontent aux travaux de Samuel-Zariski et Northcott-Rees. A partir de là, l'utilisation d'un théorème de Briançon-Skoda-Lipman-Teissier sur la clôture intégrale des idéaux [L-T], joint à notre estimation de la fonction de Hilbert [C], nous permet de conclure.

ABSTRACT. — The central theorem of this paper is a result on the degree where the higher non-zero homology module of the Koszul complex constructed with homogeneous polynomials over a field becomes non trivial. This result has a straightforward corollary on the complexity of the determination of the dimension of a projective variety.

Let us state precisely our result about the Koszul complex. If $P_1, \ldots, P_s$ are

(*) Texte reçu le 5 mai 1993.

M. CHARDIN, Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX.
Email : chardin@polytechnique.fr.

Classification AMS : 13D03, 13A02, 13C15, 13D25, 16W50.

homogeneous polynomials of $A = k[X_0, \dots, X_n]$ and $d_i = \deg P_i$, the Koszul complex :

$$\mathbb{K} := 0 \to \wedge^s A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_s} \wedge^{s-1} A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_{s-1}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_2} \wedge^1 A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_1} A \to 0,$$

$$\mathrm{d}_p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) := \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} P_{i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

(with the notation $A^s = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_s A$) is graded if we put $\deg(P e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \deg P + d_{i_1} + \cdots + d_{i_p}$, and the differentials are of degree zero. If we consider the degree ν part of this complex, we obtain a complex of k-vector spaces of finite dimensions that we shall note $\mathbb{K}_\nu$.

It is well known that if the homogeneous ideal $I = (P_1, \dots, P_s)$ is different from A (i.e. if $\deg P_i > 0$ for all i), then $H_p(\mathbb{K}) = 0$ for all $p > s - \mathrm{ht}(I)$ and $H_p(\mathbb{K}) \neq 0$ for $p = s - \mathrm{ht}(I)$, this is proved for instance in the book of Northcott [N, chap. 8, § 5, thm 6].

As $H_p(\mathbb{K}) = \bigoplus_\nu H_p(\mathbb{K}_\nu)$ we can conclude that $H_p(\mathbb{K}_\nu) = 0$ for all ν if $p > s - \mathrm{ht}(I)$ and $H_p(\mathbb{K}_\nu) \neq 0$ for some ν if $p = s - \mathrm{ht}(I)$.

Our result is an effective version of this last result, namely

THEOREM. — *With the above notations and hypotheses, suppose for example that $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s > 0$, and let us put $r = \mathrm{ht}(I)$ and $\pi_r = d_1 \cdots d_r$, $\sigma_r = d_1 + \cdots + d_r - r$. Then :*

(a) *$H_p(\mathbb{K}_\nu) = 0$ for all ν if $p > s - r$;*

(b) *if $r \leq n$, $H_{s-r}(\mathbb{K}, \nu) \neq 0$ for all*

$$\nu \geq \max\left\{\sigma_r + 1, \frac{(n-r)\pi_r\sigma_r}{2\deg I}\right\} + r d_{r+1} + d_{r+2} + \cdots + d_s \ ;$$

(c) *if $r = n+1$, there exists $\nu \leq d_1 + \cdots + d_s - r$ such that $H_{s-r}(\nu) \neq 0$.*

Let us remark that it is easy to determine if we are in the case (*c*), as in this case $I_\nu = A_\nu$ for all $\nu > \sigma_r$ (and reciprocally).

As $\deg I \geq 1$ we know that for $\nu = \max\{\sigma_r + 1, \frac{1}{2}(n-r)\pi_r\sigma_r\} + r\mathrm{d}_{r+1} + \mathrm{d}_{r+2} + \cdots + \mathrm{d}_s$, $H_{s-r}(\mathbb{K}_\nu) = 0$ if and only if $\mathrm{ht}(I) \neq r$. The determination of $H_{s-r}(\mathbb{K}_\nu)$ is easy linear algebra over k, as the linear maps are defined by the formula above, and so the expression on the natural bases of the k-vector spaces $(\wedge^p A^s)_\nu$ is simple and the corresponding matrices are block matrices, each block is either zero or corresponds to the multiplication by one of the P_i's in a degree $\leq \nu$.

The idea for proving the theorem is to take r general linear combinations of the generators and to examine how deep they are close to the ideal on the components of maximal dimension of the variety defined by I, and what they define outside. Our results were greatly inspired by the work of Amoroso [A].

The first remark is that r linear combinations defines a regular sequence (this is due to Kronecker), and so, by a theorem of Macaulay, the associated ideal I_r is unmixed of height r. The second fact is that I_r is reduced (and even smooth) outside the support of I ; this is consequence of a refined version of Bertini's theorem that can be found in the book of JOUANOLOU [J]. And the third property comes from the study of the blowing-up of the ideal I and says that for all prime $\mathfrak{P}$ associated to I of height r, the integral closures of the localizations of I and I_r at $\mathfrak{P}$ are the same (this is mostly contained in [Z-S, vol. 2, chap. VII, § 8] and [N-R]).

From that point, the proof is going on this way :

1) By a classical lemma (proved e.g. in [N] in the way of proving that $H_{s-r}(\mathbb{K}) \neq 0$) as I_r is given by a regular sequence, $H_{s-r}(\mathbb{K}_\nu)$ is isomorphic to

$H_s(\overline{\mathbb{K}}_{\nu+\mathrm{d}_1+\cdots+\mathrm{d}_r}) = \{P \in (A/I_r)_{\nu-(\mathrm{d}_{r+1}+\cdots+\mathrm{d}_s)} \mid \forall i,\ PP_i \in I_r\}$ (here $\overline{\mathbb{K}}$ denotes the Koszul complex constructed on the quotient ring A/I_r).

2) From the second result quoted above, there exists two pure dimensional ideals I' and J of height r such that $I_r = I' \cap J$ with $\mathrm{Supp}(I') \subseteq \mathrm{Supp}(I)$, $J = \sqrt{J}$ and the primes associated to J are not in the support of I (it is also possible that $I_r = I'$ in which case the proof is simpler and essentially skips the next step).

3) The Hilbert function of I_r is easily expressible in terms of $d_1, \ldots, d_r$. Using the upper bound of [C] for the Hilbert function of the ideal J and comparing to the expression for I_r, we are able to prove that for $\nu \geq \max\{\sigma_r + 1, (n-r)\pi_r\sigma_r/(2\deg I)\}$, $(J/I_r)_\nu \neq 0$.

4) From a result of Briançon and Skoda on the integral closure of ideals, that was generalized by Lipman and Teissier [L-T], and the third property of general linear combinations quoted before, we deduce that $JI^r \subseteq I_r$ and the theorem follows.

I. Quelques rappels sur le complexe de Koszul gradué

Soit A un anneau commutatif unitaire et E un A-module. Si $P_1, \ldots, P_s$ sont des éléments de A nous noterons I l'idéal engendré par les P_i et

$$\mathbb{K}(P_1, \ldots, P_s; E)$$

le complexe de Koszul associé à la suite $(P_1, \ldots, P_s)$:

$$0 \to E \otimes_A \bigwedge^s A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_s} E \otimes_A \bigwedge^{s-1} A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_{s-1}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_2} E \otimes_A \bigwedge^1 A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_1} E \to 0.$$

Précisons que $\mathbb{K}(\cdot\,; E)$ est le complexe $0 \to E \to 0$.

On posera :

$$K_p(s; E) = E \otimes_A \bigwedge^p A^s.$$

Les différentielles d_p sont A-linéaires ; on les définit en posant :

$$\mathrm{d}_p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} P_{i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

avec la notation

$$A^s = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_s A.$$

Lorsque A est gradué, E un A-module gradué et les P_i sont homogènes de degrés $d_i = \deg P_i$, ce complexe est gradué et les différentielles homogènes de degré zéro si l'on pose :

$$\deg(P e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \deg P + d_{i_1} + \cdots + d_{i_p}.$$

Nous noterons alors

$$K_p(d_1, \ldots, d_s; E; \nu)$$

la composante homogène de degré ν de $K_p(s; E)$.

Par exemple,

$$K_s(d_1,\dots.d_s;E;\nu)\simeq E_{\nu-(d_1+\cdots+d_s)}$$

est la composante de degré $\nu-(d_1+\cdots+d_s)$ de E.

Un premier résultat concernant ce complexe est que son homologie est à support dans le support de I. En effet :

PROPOSITION 1. — *Pour tout p, I annule $H_p(\mathbb{K}(P_1,\dots,P_s;E))$.*

Une démonstration très simple se trouve dans [No, p. 364] ; elle consiste à vérifier que les applications

$$\sigma_p^j : K_p(s;E)\to K_{p+1}(s;E)$$

définies par

$$\sigma_p^j(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})=e_j\wedge e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

vérifient

$$\mathrm{d}_{p+1}\sigma_p^j(x)=P_jx-\sigma_{p-1}^j\mathrm{d}_p(x).$$

Remarquons que dans le cas gradué σ_p^j est homogène de degré d_j.

Pour comprendre l'homologie du complexe de Koszul, au moins trois suites de complexes sont très utiles. La première est toujours exacte. Nous décrirons ces suites dans le cas gradué. Une bonne référence est le livre de Northcott [No], dont ce qui suit est extrait. Pour simplifier l'écriture nous poserons :

- $\mathbb{K}(s;E;\nu)=\mathbb{K}(P_1,\dots,P_s;E;\nu)$,
- $H_p(s;E;\nu)=H_p(\mathbb{K}(s;E;\nu))$,
- $\overleftarrow{\mathbb{K}}$ le complexe de Koszul décalé, c'est-à-dire le complexe $\mathbb{K}'$ tel que $K'_p=K_{p-1}$ et $\mathrm{d}'_p=\mathrm{d}_{p-1}$.

Première suite exacte.

$$0\to\mathbb{K}(s-1;E;\nu)\xrightarrow{\ i\ }\mathbb{K}(s;E;\nu)\xrightarrow{\ s\ }\overleftarrow{\mathbb{K}}(s-1;E;\nu-d_s)\to 0.$$

Ici, i est l'inclusion et s_p est l'application :

$$s_p : Qe_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\longmapsto\begin{cases} Qe_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{p-1}} & \text{si } i_p=s,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Deuxième suite.

$$0\to\mathbb{K}(s;E;\nu-d)\xrightarrow{\times P}\mathbb{K}(s;E;\nu)\xrightarrow{\ s\ }\mathbb{K}(s;E/PE;\nu)\to 0.$$

Ici, $\times P$ est l'extension au R-module libre $\wedge^p R^n$ de la multiplication par P, $d = \deg P$ et s la surjection canonique. Cette suite est exacte lorsque $\times P$ est injectif.

Troisième suite.

$$0 \to \mathbb{K}(s; E; \nu) \xrightarrow{f} \mathbb{K}(P_1, \dots, P_{s-1}, 1; E; \nu) \xrightarrow{g} \overleftarrow{\mathbb{K}}(s-1; E/P_sE; \nu) \to 0.$$

Les application f et g sont ici :

$$f_p : Qe_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \longmapsto \begin{cases} P_sQe_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} & \text{si } i_p = s, \\ Qe_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} & \text{sinon}; \end{cases}$$

$$g_p : Qe_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \longmapsto \begin{cases} \overline{Q}e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{p-1}} & \text{si } i_p = s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est exacte lorsque $\times P_s$ est injective.

Comme $H_p(\mathbb{K}(P_1, \dots, P_{s-1}, 1; E; \nu)) = 0$, pour tout p, on a alors :

$$H_p(s; E; \nu) \simeq H_p\big(s-1; E/P_sE; \nu\big).$$

De la première suite découle la suite exacte suivante pour l'homologie :

$$\cdots \xrightarrow{\bar{s}} H_p(s-1; \nu - d_s) \xrightarrow{\times(-1)^p P_s} H_p(s-1; \nu)$$
$$\xrightarrow{\bar{\imath}} H_p(s; \nu) \xrightarrow{\bar{s}} H_{p-1}(s-1; \nu - d_s) \xrightarrow{\times(-1)^{p-1} P_s} \cdots.$$

Notons tout de suite deux corollaires à l'exactitude de cette suite.

- En posant $\chi(s; \nu) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \dim H_i(s; \nu)$, on a :

$$\chi(s; \nu) = \chi(s-1; \nu) - \chi(s-1; \nu - d_s).$$

- Si $H_p(s; \nu) = 0$, alors $H_p(s-1; \nu) = P_sH_p(s-1; \nu - d_s)$. Donc $H_p(s-1, \nu) \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, m \geq 0,\; H_p(s, \nu - md_s) \neq 0$.

De la deuxième suite il découle que si $\times P$ est injective en degrés $\leq \nu$, alors on a la suite exacte suivante d'homologie :

$$\cdots \to H_p(s; E; \nu - d) \xrightarrow{\times P} H_p(s; E; \nu) \longrightarrow H_p(s; E/PE; \nu)$$
$$\longrightarrow H_{p-1}(s; E; \nu - d) \xrightarrow{\times P} \cdots.$$

En conséquence :

• Si P annule $H_p(s;E;\nu)$, par exemple si P appartient à $(P_1,\dots,P_s)$, l'homomorphisme $\times P$ est nul et on a la suite exacte :

$$0 \to H_p(s;E;\nu) \longrightarrow H_p(s;E/PE;\nu) \longrightarrow H_{p-1}(s;E;\nu-d) \to 0.$$

On en déduit que si $Q_1,\dots,Q_r$ sont des polynômes homogènes de I qui forment une suite régulière dans E et $q_i = \deg Q_i$, en posant $I_r = (Q_1,\dots,Q_r)$, on a :

$$H_p\big(s;E/I_rE;\nu\big) \simeq \bigoplus_{i_1,\dots,i_r\in\{0,1\}} H_{p-(i_1+\cdots+i_r)}\big(s;E;\nu-(i_1q_1+\cdots+i_rq_r)\big).$$

En particulier :

Lemme 1. — *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on a :*

• $H_p(s;E) = \bigoplus_\nu H_p(s;E;\nu) = 0$ *si* $p > s-r$,

• $H_s(s;E/I_rE;\nu) \simeq H_{s-r}\big(s;E;\nu-(q_1+\cdots+q_r)\big)$.

Si $E = A$ et $I \neq A$ est un idéal de A, soit r la longueur de la plus longue suite régulière dans A formée d'éléments de I. Notons que $r = \mathrm{ht}(I)$ si A est un anneau de Cohen-Macaulay (par exemple si $A = k[X_0,\dots,X_n]$). On a alors $H_p(s;A;\nu) = 0$ pour tout ν si $p > s-r$.

Il est facile de voir que $H_{s-r}(s;A)$ est n'est pas nul. En effet, si $Q_1,\dots,Q_r$ est une telle suite, ce module est isomorphe à

$$H_s(s;A/I_r) = \{P \in A/I_r \mid \forall i,\ PP_i \in I_r\}$$

et puisque la suite régulière est maximale, chaque P_i divise zéro dans I_r.

Nous allons donner une version effective de cette proposition, c'est-à-dire montrer qu'il existe un polynôme $P \in A - I_r$ de degré effectivement majoré tel que PP_i appartienne à I_r pour tout i, et ceci pour un I_r judicieux de degré effectivement majoré.

II. Trois propriétés clefs des idéaux engendrés par des éléments «généraux» d'un idéal

FAIT. — *Soit A une algèbre graduée à degrés positifs, $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_t$ des idéaux premiers homogènes de A tels que $(A/\mathfrak{P}_i)_1 \neq 0$ et $P_1, \dots, P_s$ des éléments homogènes de A, $d_i = \deg P_i$ et $d = \max_i d_i$. Si il existe des polynômes homogènes $F_1, \dots, F_s$ tels que*

$$P = F_1 P_1 + \cdots + F_s P_s$$

soit homogène et P n'appartienne pas à la réunion $\bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{P}_i$, alors il existe un ouvert non vide Ω du k-espace vectoriel $\bigoplus_{i=1}^{t} A_{d-d_i}$ tel que si $\omega = (G_1, \dots, G_s)$ est un élément de Ω, on ait :

$$P_\omega = G_1 P_1 + \cdots + G_s P_s \notin \bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{P}_i.$$

Pour montrer ce fait, on remarque que :

1) La condition d'appartenance à un $\mathfrak{P}_i$ est k-linéaire; il suffit donc de voir que $\Omega_i = A_d - \mathfrak{P}_i \neq \emptyset$ pour tout i.

2) Si $F_1 P_1 + \cdots + F_s P_s$ n'est pas dans $\mathfrak{P}_i$, il existe $j(i)$ tel que $P_{j(i)} \notin \mathfrak{P}_i$.

3) Comme $(A/\mathfrak{P}_i)_1 \neq 0$, on a $(A/\mathfrak{P}_i)_{d-d_{j(i)}} \neq 0$, et si H_i appartient à $A_{d-d_{j(i)}} - \mathfrak{P}_i$, on a $H_i P_{j(i)} \in \Omega_i$.

• Si I est un idéal d'un anneau A, nous noterons $\mathcal{A}_r$ les idéaux premiers minimaux associés à I de codimension $\leq r$ et

$$\mathrm{Supp}_r(I) = \left\{ \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A,\ \exists \mathfrak{P}_i \in \mathcal{A}_r,\ \mathfrak{P}_i \subseteq \mathfrak{P} \right\} = \bigcup_{\mathfrak{P}_i \in \mathcal{A}_r} \mathrm{Supp}(\mathfrak{P}_i).$$

• Lorsque nous parlerons de *localisation* dans un anneau gradué, il s'agira de localisation au sens gradué (i.e. on ne considère que des quotients de polynômes homogènes) comme décrit, par exemple, dans [K, chap. III], ou dans [BAC, chap. II, III et IV], auxquels nous renvoyons pour tous les résultats de base sur cette question.

• Si I est un idéal d'un anneau A, nous noterons $G_I(A)$ l'anneau

$$G_I(A) = \bigoplus_{k \geq 0} I^k / I^{k+1}$$

avec la convention $I^0 = A$. Si A est gradué et I homogène, alors $G_I(A)$ est naturellement gradué :

$$G_I(A)_\nu = \bigoplus_{k\geq 0}(I^k/I^{k+1})_\nu.$$

L'anneau $G_I(A)$ est une A/I algèbre et si $P_1,\dots,P_s$ engendrent I, on a une surjection naturelle de $(A/I)[Y_1,\dots,Y_s]$ sur $G_I(A)$ qui envoie Y_i sur P_i. Dans le cas gradué on rend cet épimorphisme gradué de degré zéro en posant $\deg Y_i = \deg P_i$; notons que cette application est un isomorphisme si et seulement si $P_1,\dots,P_s$ est une suite régulière dans A (voir [BA, chap. 10, § 9], n° 7, th. 1], ou [K, chap. V, § 5, prop. 5.10 et prop. 5.12]).

• Lorsque $\bigcap_{n\geq 0} I^n = (0)$ (par exemple si A est gradué et $I \cap A_0 = (0)$), à tout élément $x \in A$ on associe l'ordre $v(x) \in \mathbb{N}$ de x défini par

$$v(x) = \inf\{k \mid x \in I^k \text{ et } x \notin I^{k+1}\}.$$

La fonction v définit une valuation sur A. D'autre part nous noterons $\bar{x}$ la classe de x dans $I^{v(x)}/I^{v(x)+1} \subset G_I(A)$.

• Soit $\mathfrak{I} = \bigoplus_{k>0} I^k/I^{k+1} = \{x \in G_I(A) \mid v(x) > 0\}$. Alors $\mathfrak{I}$ est un idéal de $G_I(A)$ qui est homogène si I est homogène.

• Si A est nœthérien, il en est de même de $G_I(A)$. L'idéal (0) de $G_I(A)$ admet donc une décomposition primaire réduite, soit

$$(0) = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_e \cap \mathfrak{E}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{E}_f$$

où les les idéaux premiers $\mathfrak{P}_i$ associés aux $\mathfrak{Q}_i$ contiennent $\mathfrak{I}$ et où les $\mathfrak{F}_j$ qui sont associés aux $\mathfrak{E}_j$ ne contiennent pas $\mathfrak{I}$ (ici encore, on considère une décomposition homogène lorsque A est gradué et I homogène).

• Si $P_1,\dots,P_s$ sont des générateurs de I et $d = \max\deg P_i$, il existe un ouvert de Zariski Ω du k-espace vectoriel I_d (en fait le complémentaire d'une réunion finie d'hyperplans) tel que si $P = \sum_i F_iP_i$ est dans Ω, alors $\overline{P}$ n'est pas dans $\mathfrak{F}_j$ pour tout j. Un tel élément est superficiel d'ordre 1 pour I, c'est-à-dire vérifie $(I^n : (P)) \cap I^c = I^{n-1}$ pour un certain $c \in \mathbb{N}$ et n grand ; en fait on peut prendre ici $c = \inf\{e \mid \mathfrak{I}^e \subset \bigcap_i \mathfrak{Q}_i\}$ et $n > c$. Pour une preuve détaillée on peut consulter [Z-S2, chap. VIII, § 8, Lemma 5], ou [BAC, chap. 8, § 7, n° 5, rem. 4 suivant la définition 2].

Généralisant la notion d'élément superficiel, on définit comme le fait AMOROSO :

DÉFINITION 1. — Un idéal J d'un anneau nœthérien R est dit *superficiel* pour un idéal $I \neq R$ si $J \subseteq I$ et l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) $I^n \cap J = JI^{n-1}$ pour $n \gg 0$;

(ii) il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $I^n \cap JI^c = JI^{n-1}$ pour $n \gg 0$.

On dira que J est une *réduction* de I si on a :

(iii) $I^n = JI^{n-1}$ pour $n \gg 0$.

Si $(R, \mathfrak{P})$ est local et si $\sqrt{I} = \sqrt{J} = \mathfrak{P}$, les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. Seule l'équivalence entre (i) et (ii) n'est pas évidente : elle découle du lemme d'Artin-Rees.

Avec cette définition, si $P \in I$ est superficiel; l'idéal (P) est superficiel, la réciproque est vraie si P est non diviseur de zéro. D'autre part, on a la propriété suivante.

LEMME 2. — *Soient $J \subseteq I$ deux idéaux d'un anneau A. Si J est superficiel pour I et si $P \in I$ est tel que sa classe dans A/J est un élément superficiel pour I/J, alors (J, P) est superficiel pour I.*

Ce lemme est démontré dans [A, § 2, Lemma 1].

Rappelons également la notion d'élément entier sur un idéal.

DÉFINITION 2. — Soit I un idéal d'un anneau A. On dit que $x \in A$ est *entier* sur I si il existe $b_1, \dots, b_n$ tels que :

- $b_i \in I^i$ et
- $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$.

L'ensemble des éléments de A entiers sur I est un idéal qui sera noté $\bar{I}$.

Rassemblons en une proposition les propriétés importantes concernant les réductions et la clôture intégrale d'un idéal I.

PROPOSITION 2. — *Soient $(R, \mathfrak{P})$ un anneau local, $K = R/\mathfrak{P}$ et $J \subseteq I \neq R$ deux idéaux de R. Alors :*

(i) *Si J est une réduction de I, il existe $J' \subseteq J$ réduction minimale (pour l'inclusion) de I.*

(ii) *Soit $\ell(I) = 1 + \deg \phi_I$ où ϕ_I est le polynôme tel que $\phi_I(s) = \dim_K(I^s/\mathfrak{P}I^s)$ pour $s \gg 0$. Alors tout système minimal de générateurs d'une réduction minimale de I possède $\ell(I)$ éléments.*

(iii) *Toute réduction de I possède au moins $\ell(I)$ éléments; si elle en possède $\ell(I)$, elle est minimale.*

(iv) *On a* $\mathrm{ht}(I) \le \ell(I) \le \dim_K(I/I\mathfrak{P})$.

(v) *Soient* $P_1, \dots, P_s$ *des générateurs de* I ; *il existe une sous-variété stricte* $V_I \subsetneq (\mathbb{P}_{s-1}(K))^{\ell(I)}$ *telle que les polynômes* $F_i = \sum_j a_{ij} P_j$ *engendrent une réduction minimale de* I *si et seulement si* $a = (a_{ij}) \notin V_I$.

(vi) *Si* I *est* $\mathfrak{P}$*-primaire, on a* $\ell(I) = \mathrm{ht}(I) = \dim R$.

(vii) *Si* I *est* $\mathfrak{P}$*-primaire, et si* $a = (a_{ij}) \notin V_I$, *alors* $F = (F_1, \dots, F_{\ell(I)})$ *est un système de paramètres et* $e(I) = e(F)$.

(viii) *Si* I *possède un non diviseur de zéro, on a* $\overline{I} = \overline{J}$ *si et seulement si* J *est une réduction de* I.

(ix) *Si* I *est* $\mathfrak{P}$*-primaire et possède un non diviseur de zéro, et si* J *est engendré par* $\mathrm{ht}(I)$ *éléments, alors* J *est réduction de* I *si et seulement si c'est une réduction minimale.*

(x) *On a* $\overline{I} = \overline{J}$ *si et seulement si* $G_I(R)$ *est entière sur* $G_J(R)$.

(xi) *Si* J *est engendré par* $\dim R$ *éléments* $P_1, \dots, P_r$, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *on a* $\overline{I} = \overline{J}$;

(b) *on a* $v(P_i) = 1$ *pour tout* i *et* $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_r$ *est une suite sécante maximale pour* $G_I(R)$.

Les points (i) à (ix) sont un résumé des résultats nous intéressent ; (x) et (xi) proviennent de [BAC, chap. VIII, § 7, ex. 11].

Une des clefs de la preuve est le théorème ci-dessous dû à Briançon et Skoda dans le cas complexe et généralisé par Lipman et Teissier.

Théorème 1. — *Soient* $(R, \mathfrak{P})$ *un anneau local régulier de dimension* r *et* $I \subseteq R$ *un idéal tel que* $\sqrt{I} = \mathfrak{P}$. *Alors on a* $\overline{I}^{\,r} \subseteq I$.

On trouvera la preuve dans [L-T]. □

Les deux autres résultats importants que nous utiliserons sont les suivants.

Théorème 2. — *Soit* I *un idéal homogène équidimensionnel et géométriquement réduit de dimension* D. *Alors, pour tout* $\nu \ge 0$, *on a la majoration :*

$$H_I(\nu) \le \binom{\nu + D}{D} \deg I.$$

On trouvera la preuve dans [C].

Théorème 3. — *Soit* $I = (P_1, \dots, P_s)$ *un idéal homogène de l'anneau* $A = k[X_0, \dots, X_n]$. *On suppose les* P_i *homogènes et* $d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_s$. *Pour tout* $1 \le r \le \min\{n+1, s\}$, *il existe alors un ouvert non vide* Ω

de $I_{d_1} \times \cdots \times I_{d_r}$ tel que si ω appartient à Ω, l'idéal $I_\omega = (P_{\omega_1}, \ldots, P_{\omega_r})$ vérifie :

(1) *si $r \leq \mathrm{ht}(I)$, alors I_ω est une intersection complète; plus généralement, I_ω est localement intersection complète hors de* $\mathrm{Supp}_{(r-1)}(I)$;

(2) *$(I_\omega : I^\infty)$ est soit A, soit réduit purement de codimension r,*

(3) *pour tout premier minimal $\mathfrak{P}$ associé à I de hauteur au plus r, on a l'égalité $\overline{I_{\mathfrak{P}}} = \overline{(I_\omega)_{\mathfrak{P}}}$.*

Preuve. — Le (1) est très classique et remonte à KRONECKER ; c'est une conséquence facile de la première remarque du chapitre II, à l'aide d'une récurrence sur r.

Il entraîne une partie du (2), à savoir que $(I_\omega : I^\infty)$ est soit égal à A, soit purement de codimension r, par le théorème de Macaulay [Z-S2, chap. VII, § 8, th 26].

Le reste de (2) est une conséquence de [J, § 6, cor. 6.11]. En effet, soient

$$X = \bigcap_{\mathfrak{P} \not\supseteq I} A_{\mathfrak{P}}$$

et le morphisme $f : X \to \mathbf{P}^{m-1}$ défini par

$$f(x) = \big(F_1(x), \ldots, F_m(x)\big),$$

où $(F_1, \ldots, F_m)$ est une base du k-espace vectoriel I_{d_1} et $d = 1$. On obtient l'existence d'un ouvert Ω_1 de I_{d_1} tel que, si P_{ω_1} est dans Ω_1, la variété définie par P_{ω_1} est réduite sur X ou est vide (autrement dit, P_{ω_1} n'a pas de facteurs carrés autres que ceux apparaissant éventuellement dans le pgcd des P_i). Quitte à restreindre Ω_1, on peut de plus imposer

$$P_{\omega_1} = aP_1 + \sum_{i>1} A_i P_i\,, \qquad a \in k - \{0\}.$$

On opère ensuite par récurrence sur r. Si $\Omega_{r-1} \subseteq I_{d_1} \times \cdots \times I_{d_{r-1}}$ est construit, pour tout $\omega \in \Omega_{r-1}$, le schéma

$$X_\omega = X \cap \big\{P_{\omega_1} = \cdots = P_{\omega_{r-1}} = 0\big\}$$

est réduit purement de codimension r (ou vide). En appliquant le résultat de [J] déjà mentionné au morphisme $f_\omega : X_\omega \to \mathbf{P}^{m'-1}$ défini par

$$f_\omega(x) = \big(G_1(x), \ldots, G_{m'}(x)\big),$$

où $(G_1, \ldots, G_{m'})$ est une base de I_{d_r} (et contient donc des générateurs de I modulo $P_{\omega_1}, \ldots, P_{\omega_{r-1}}$), on montre l'existence d'un ouvert Ω_r^ω tel que $P_{\omega_1}, \ldots, P_{\omega_r}$ vérifie (2) pour $P_{\omega_r} \in \Omega_r^\omega$ et

$$P_{\omega_r} = aP_r + \sum_{i>r} A_i' P_i\,, \quad a \in k - \{0\}.$$

Le théorème de constructibilité de Chevalley cité dans [J, § 4, th. 4.10], entraîne que l'ensemble des ω vérifiant la propriété (2) est un ensemble constructible $\mathcal{C}$ et, puisque $\mathcal{C}$ contient $\bigcup_{\omega \in \Omega_{r-1}} \omega \times \Omega_r^\omega$, nécessairement $\mathcal{C}$ contient un ouvert non vide Ω_r.

La partie (3) peut se démontrer de plusieurs façons distinctes :

• soit en reprenant les arguments de NORTHCOTT et REES aboutissant au (v) de la PROPOSITION 2 dans le cas gradué et avec les précisions qui nous intéressent ;

• soit en utilisant le début du chapitre II et le (xi) de la PROPOSITION 2 ;

• soit en utilisant le (x) de la PROPOSITION 2 et en montrant un « lemme de normalisation » adapté (en suivant le schéma classique de la preuve du lemme de normalisation de E. Nœther) ;

• soit encore en reprenant les arguments de AMOROSO dans le cas gradué ;

• soit — ce que nous allons détailler ci-dessous car c'est l'argument le plus court — en montrant que la situation graduée se déduit facilement de la situation affine.

Dans tous les cas, on applique l'argument aux localisations de I en tous les éléments de $\mathcal{A}_r$ (en nombre fini) et on prend comme ouvert l'intersection du nombre fini d'ouverts ainsi construits.

Montrons donc comment le résultat se déduit de l'énoncé affine correspondant (qui est une conséquence directe du (v) de la PROPOSITION 2 et que démontre également AMOROSO [A, prop. 1]). Pour cela on remarque que si $\mathfrak{M} = (X_0, \ldots, X_n)$ et $\mathfrak{P}$ est un idéal premier homogène distinct de $\mathfrak{M}$ alors $I_{\mathfrak{P}} = (I : \mathfrak{M}^\infty)_{\mathfrak{P}}$. On choisit une forme linéaire L n'appartenant à aucun idéal premier associé à I autre que (éventuellement) $\mathfrak{M}$. Quitte à se placer sur un ouvert de $I_{d_1} \times \cdots \times I_{d_r}$, on peut supposer que L n'est dans aucun des premiers associés à I_ω. Modulo un changement linéaire de variables, on peut supposer que $L = X_0$. Notant avec un chapeau les opérations de déshomogénéisation et d'homogénéisation des idéaux relativement à X_0, on a si $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{M}$:

$$I_{\mathfrak{P}} = \widehat{(\widehat{I})_{\widehat{\mathfrak{P}}}} \quad \text{et} \quad (I_\omega)_{\mathfrak{P}} = \widehat{(\widehat{I_\omega})_{\widehat{\mathfrak{P}}}}.$$

Si $\mathfrak{M}$ est un premier minimal associé à I, on a $\sqrt{I} = \mathfrak{M}$ et donc $I_{\mathfrak{M}} = (I_\omega)_{\mathfrak{M}} = A_{\mathfrak{M}}$ dès que (1) est vérifiée.

Sinon, on applique le résultat affine à $\widehat{I}_{\widehat{\mathfrak{P}}}$, ce qui montre l'existence d'un ouvert de k^{rs} tel que les polynômes

$$Q_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} \widehat{P_j}$$

engendrent un idéal J de même cloture intégrale que $\widehat{I}_{\widehat{\mathfrak{P}}}$. Quitte à restreindre cet ouvert, on peut supposer que la matrice des λ_{ij} pour $1 \leq i, j \leq r$ est inversible, et donc que J est engendré par des polynômes

$$Q_i' = \sum_{j \geq i} \lambda_{ij} P_j.$$

On prend alors pour P_{ω_i} l'homogénéisé de Q_i'. Par ce qui est au-dessus, on a $\overline{I_{\mathfrak{P}}} = \overline{(I_\omega)_{\mathfrak{P}}}$, car si $\mathfrak{A}$ est un idéal affine, on a $\overline{\widehat{\mathfrak{A}}} = \widehat{\overline{\mathfrak{A}}}$.

Les $\omega \in I_{d_1} \times \cdots \times I_{d_r}$ vérifiant $\overline{I_{\mathfrak{P}}} = \overline{(I_\omega)_{\mathfrak{P}}}$ forment un ouvert $\Omega_{\mathfrak{P}}$, que nous venons de montrer être non vide. D'où (3), avec :

$$\Omega_r^{(3)} = \bigcap_{\mathfrak{P} \in \mathcal{A}_r} \Omega_{\mathfrak{P}}.$$

Pour finir, on prend pour Ω l'intersection des deux ouverts construits pour vérifier les propriétés (1), (2) et (3) . $\square$

COROLLAIRE. — *Avec les notations du théorème, soit* $r = \mathrm{ht}(I)$. *Il existe des polynômes homogènes* A_{ij} , *avec* $\deg A_{ij} = d_i - d_j$ *pour* $i \geq j$, $A_{ii} \neq 0$ *et* $A_{ij} = 0$ *si* $i < j$, *tels que posant*

$$Q_i = \sum_{j \geq i} A_{ij} P_j \, ,$$

on ait :

(a) $(Q_1, \ldots, Q_r)$ *est une suite régulière dans* A ;

(b) $(Q_1, \ldots, Q_r) = J \cap \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_t$ *avec* J *pur de hauteur* r *et réduit, et les* $\mathfrak{Q}_i$ *primaires pour un premier* $\mathfrak{P}_i$ *de hauteur* r *appartenant aux premiers minimaux associés à* I ;

(c) *Si* $F_1, \ldots, F_r$ *sont dans* $\bar{I}$ (*en particulier, si les* F_i *sont dans* I), *alors* $F_1 \cdots F_r$ *appartient à* $\mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_t$.

En appliquant le théorème, on obtient les polynômes Q_i du COROLLAIRE. La propriété (a) est la propriété (1) du théorème ; (b) découle de (2) et de (3) (car l'égalité de la clôture intégrale de deux idéaux implique l'égalité de leurs supports).

Il reste à vérifier (c). Pour cela, notons que le problème est local en chaque $\mathfrak{P}_i$, car — d'une manière générale — si J est un idéal, on a :

$$J \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{P}\in \mathrm{Ass}(J)} J_{\mathfrak{P}}.$$

Comme A est régulier, il en est de même de $A_{\mathfrak{P}_i}$ qui est de dimension $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}_i) = r$. Le théorème de Briançon-Skoda-Lipman-Teissier ci-dessus, entraîne donc le résultat puisque

$$\overline{(\mathfrak{Q}_i)}_{\mathfrak{P}_i} = \overline{(I_\omega)_{\mathfrak{P}_i}} = \overline{I_{\mathfrak{P}_i}}\,.$$

Ici, comme dans la preuve du THÉORÈME 3, on se ramène au cadre affine de l'énoncé du théorème de Briançon-Skoda-Lipman-Teissier par le choix d'une forme linéaire n'appartenant à aucun des $\mathfrak{P}_i$. □

III. Le théorème principal

Énonçons maintenant le résultat qui nous intéresse.

THÉORÈME 4. — *Soient k un corps, $A = k[X_0,\dots,X_n]$, $I = (P_1,\dots,P_s)$ un idéal homogène de A et $r = \mathrm{ht}(I)$. On suppose les P_i homogènes et on pose $d_i = \deg P_i$. Soit $\mathbb{K}$ le complexe de Koszul gradué associé à la suite $(P_1,\dots,P_s)$. On suppose $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s > 0$, et on note $\pi_r = d_1\cdots d_r$, $\sigma_r = d_1+\cdots+d_r-r$. Alors :*

(a) *on a $H_p(\mathbb{K}) = 0$ pour $p > s-r$;*

(b) *si $r \leq n$, on a $H_{s-r}(\mathbb{K}_\nu) \neq 0$ pour*

$$\nu \geq \max\Big\{\sigma_r+1,\ \frac{1}{2}(n-r)\frac{\pi_r}{\deg I}\,\sigma_r\Big\} + rd_{r+1} + d_{r+2} + \cdots + d_s\,;$$

(c) *si $r = n+1$, il existe $\nu \leq d_1+\cdots+d_s-r$ tel que $H_{s-r}(\mathbb{K}_\nu) \neq 0$.*

LEMME 3. — *Soit $P_1,\dots,P_s \in A = k[X_0,\dots,X_n]$ des polynômes homogènes de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s$ et A_{ij} des polynômes homogènes tels que $\deg A_{ij} = d_i - d_j$ pour $i \geq j$, $A_{ii} \neq 0$ et $A_{ij} = 0$ si $i < j$, et*

$$Q_i = \sum_{j\leq i} A_{ij}P_j.$$

Alors

$$H_p\big(\mathbb{K}(P_1,\dots,P_s;A;\nu)\big) \simeq H_p\big(\mathbb{K}(Q_1,\dots,Q_s;A;\nu)\big)$$

pour tout p et pour tout ν.

Preuve. — On a un isomorphisme de complexes gradués entre

$$\mathbb{K}(P_1,\dots,P_s;A) \quad \text{et} \quad \mathbb{K}(Q_1,\dots,Q_s;A)$$

qui se définit de la manière suivante : si $K_p(P_1,\dots,P_s;A) = \bigwedge^p E$ et $K_p(Q_1,\dots,Q_s;A) = \bigwedge^p E'$ on pose

$$\phi_1(e'_i) = \sum_{j\le i} A_{ij} e_j$$

et plus généralement

$$\phi_p = \bigwedge^p \phi_1 : \ e'_{i_1} \wedge \cdots \wedge e'_{i_p} \longmapsto \phi_1(e'_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \phi_1(e'_{i_p}).$$

Le fait qu'il s'agisse d'un morphisme de complexes est, par exemple, montré dans [L, chap. XVI, § 10]. □

LEMME 4. — *Soient $d = (d_1,\dots,d_r)$ un r-uplet d'entiers et $n \ge r$. Posons :*

$$D = n - r, \quad \pi_r = d_1 \cdots d_r, \quad \sigma_r = d_1 + \cdots + d_r - r.$$

et

$$H_d(\nu) = \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{i_r=0}^{d_r-1} \binom{\nu + D - (i_1 + \cdots + i_r)}{D}.$$

Alors, pour $\nu > \sigma_r$, on a la minoration suivante

$$H_d(\nu) \ge \pi_r \binom{\nu + D}{D} - \tfrac{1}{2}\pi_r\sigma_r \binom{\nu + D}{D-1}$$

qui est une égalité lorsque $r = n$ ou $r = n - 1$.

Preuve. — Posons :

$$f_D(x) = \binom{x + D}{D}.$$

Pour $x \ge k \ge 0$, on a $f_0(x-k) = 1$, $f_1(x-k) = f_1(x) - k$ et par la formule de Taylor il existe $\xi \ge 0$ tel que pour $D \ge 2$ on ait :

$$\begin{aligned}
f_D(x-k) &= f_D(x) - k f'_D(x) + \tfrac{1}{2}k^2 f''_D(\xi) \\
&= f_D(x)\Big(1 - k\sum_{i=1}^{D} \frac{1}{x+i} + \tfrac{1}{2}k^2 \sum_{\substack{i,j\in[1,D] \\ i\ne j}} \frac{1}{(\xi+i)(\xi+j)}\Big) \\
&\ge f_D(x)\Big(1 - \frac{kD}{x+1}\Big) \\
&\ge \binom{x+D}{D} - k\binom{x+D}{D-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi le lemme découle du fait que

$$\sum_{i_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{i_r=0}^{d_r-1} (i_1 + \cdots + i_r) = \tfrac{1}{2}\pi_r\sigma_r. \quad \square$$

LEMME 5. — *Soient $Q_1, \ldots, Q_r$ des polynômes de $k[X_0, \ldots, X_n]$ formant une suite régulière et I_r l'idéal qu'ils engendrent. On suppose $r \leq n$; on note $d_r = \deg Q_r$, $D = n-r$ et π_r, σ_r comme précédemment. Si $J \supsetneqq I_r$ est un idéal équidimensionnel et géométriquement réduit de codimension r, il existe $P \in J - I_r$ avec :*

$$\deg P \leq \max\Big\{\sigma_r + 1, \frac{D\pi_r\sigma_r}{2(\pi_r - \deg J)}\Big\}.$$

Preuve. — Dire que $J_\nu \neq (I_r)_\nu$, c'est dire que $H_{I_r}(\nu) > H_J(\nu)$. Rappellons que $H_{I_r}(\nu) = H_{(d_1,\ldots,d_r)}(\nu)$. D'après le lemme précédent et le THÉORÈME 2, il suffit de résoudre (lorsque $r < n$) l'inégalité suivante :

$$\pi_r\binom{\nu + D}{D} - \tfrac{1}{2}\pi_r\sigma_r\binom{\nu + D}{D-1} > \binom{\nu + D}{D}\deg J,$$

ce qui amène après simplification à

$$(\pi_r - \deg J)(\nu + 1) > \tfrac{1}{2}D\pi_r\sigma_r\,,$$

d'où le résultat pour $r < n$.

Le cas $r = n$ est facile car on a $H_{I_r}(\sigma_r + 1) = d_1 \cdots d_r > \deg J$ et $\deg J \geq H_J(\nu)$ pour tout ν puisque J est réduit de dimension zéro. $\square$

Passons maintenant à la preuve du THÉORÈME 4.

En utilisant le COROLLAIRE du THÉORÈME 3 et en posant $Q_i = P_i$ pour $i > r$, on voit que l'on peut se ramener, grâce au LEMME 3, au cas de polynômes $Q_1, \ldots, Q_s$ vérifiant les trois propriétés du COROLLAIRE du THÉORÈME 3.

Le LEMME 1 montre le (a) du théorème et nous ramène à montrer pour le (b) que, notant $I_r = (Q_1, \ldots, Q_r)$, il existe $P \notin I_r$ de degré au plus

$$\max\Big\{\sigma_r + 1, \frac{(n-r)\pi_r\sigma_r}{2\deg I}\Big\} + (r-1)d_{r+1}$$

vérifiant $PQ_i \in I_r$ pour tout i.

Si $J = A$, il existe P de degré 1 dans $J - I_r$; sinon, en apliquant le LEMME 5 à l'idéal J décrit par le (b) du COROLLAIRE du THÉORÈME 3, et en remarquant que

$$\pi_r - \deg J = \deg \mathfrak{Q}_1 + \cdots + \deg \mathfrak{Q}_t \geq \deg I,$$

on obtient un polynôme $P \in J - I_r$ de degré au plus

$$\max\Big\{\sigma_r + 1, \frac{(n-r)\pi_r\sigma_r}{2\deg I}\Big\}.$$

Si PQ_i est dans I_r pour tout i on a fini ; sinon, il existe $i_1 > r$ tel que $P_{(1)} = PQ_{i_1}$ ne soit pas dans I_r. Si $P_{(1)}Q_i$ est dans I_r pour tout i, on a fini ; sinon on fabrique de même $P_{(2)} = P_{(1)}Q_{i_2} \notin I_r$, etc. On sait par le (c) du COROLLAIRE du THÉORÈME 3 que le processus s'arrête nécessairement au plus tard à $P_{(r-1)}$. D'où le résultat.

Enfin, dans le cas $r = n + 1$, on a $H_{I_r}(\nu) = 0$ pour $\nu > \sigma_r$. Or

$$H_{s-r}(\mathbb{K}_\nu) \simeq H_s(s; A/I_rA; \nu + d_1 + \cdots + d_r) \subseteq (A/I_rA)_{\nu-(d_{r+1}+\cdots+d_s)}$$

montre la nullité de $H_{s-r}(\mathbb{K}_\nu)$ pour $\nu > d_1 + \cdots + d_s - r$ et la conclusion puisque $H_{s-r}(\mathbb{K}) \neq 0$. □

IV. Calcul de la dimension des variétés projectives

Soient $A = k[X_0, \ldots, X_n]$ et $I = (P_1, \ldots, P_s)$ un idéal de A, avec les P_i homogènes de degrés $d_i = \deg P_i$ vérifiant $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s > 0$. Soit

$$\sigma_h = \sum_{i=1}^{h}(d_i - 1), \quad \pi_h = d_1 \cdots d_h, \quad \varepsilon_h = hd_{h+1} + d_{h+2} + \cdots + d_s.$$

On a les propriétés suivantes :

(1) $\mathrm{ht}(I) = n + 1 \Leftrightarrow H_I(\sigma_{n+1} + 1) = 0$;

(2) lorsque $\mathrm{ht}(I) \leq n$ et $\nu \geq \max_{h\leq r}(\sigma_h + \varepsilon_h)$, si $H_p(\nu)$ est nul pour tout $p > s - r$ on a l'alternative suivante :

- soit $\mathrm{ht}(I) > r$,
- soit $\mathrm{ht}(I) = h \leq r$ et $\deg I < \dfrac{1}{2}(n-h)\dfrac{\sigma_h\pi_h}{\nu - \varepsilon_h}$.

Ayant toujours $\deg I \geq 1$, sous les hypothèses de (2) on peut affirmer que si

$$\nu \geq \max_{h\leq r} \tfrac{1}{2}(n-h)\pi_h\sigma_h + \varepsilon_h,$$

alors $\mathrm{ht}(I) > r$.

Ainsi, le calcul de $H_I(\sigma_{n+1}+1)$ permet de savoir si la variété associée est vide et l'étude de l'homologie du morceau de complexe :

$$0 \to \bigwedge^s A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_s} \bigwedge^{s-1} A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_{s-1}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_{s-r+1}} \bigwedge^{s-r} A^s \xrightarrow{\mathrm{d}_{s-r}} \bigwedge^{s-r-1} A^s$$

en degré

$$\nu = \max_{h \le r} \tfrac{1}{2}(n-h)\pi_h\sigma_h + \varepsilon_h$$

permet de déterminer si la hauteur de I est inférieure ou égale à r, et dans ce cas de la calculer.

En se plaçant en degré ν plus petit, on obtient une alternative du type « soit la hauteur est plus grande que..., soit le degré est plus petit que... ». Il est assez naturel que l'on obtienne ce type de résultat, car en degré ν petit, il est par exemple difficile de différencier une courbe de petit degré d'une multitude de points de la courbe, les fonctions s'annulant sur les deux variétés étant identiques.

REMARQUE. — Comme me l'a signalé Jean-Pierre JOUANOLOU, les propriétés d'acyclicité du complexe de Koszul générique permettent de définir, quel que soit ν, les modules $H_p(\mathbb{K}_\nu)$ *via* le foncteur Tor pour $p \ge s-n$. Cette définition a comme corollaire immédiat que pour tout ν, si $p > q \ge s-n$, alors $H_p(\mathbb{K}_\nu) \neq 0$ implique $H_q(\mathbb{K}_\nu) \neq 0$. Pour la même raison, on a également cette implication quels que soient $p > q \ge 0$ si $\nu \ge d_1 + \cdots + d_s - n$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] AMOROSO (F.). — *On a conjecture of C. Berenstein and A. Yger*, Preprint Univ. Padova, 1992 (à paraître dans les actes de MEGA'94).

[BA] BOURBAKI (N.). — *Algèbre.* — Masson & CCLS, 1970, 1980 et 1981.

[BAC] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative.* — Masson, 1983, 1985.

[C] CHARDIN (M.). — *Une majoration pour la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique*, Bull. Soc. Math. France, t. **117**, 1989, p. 305–318.

[G-H] GIUSTI (M.) et HEINTZ (J.). — *La détermination de la dimension et des points isolés d'une variété algébrique peuvent s'effectuer en temps polynomial*, Computing in Algebraic Geometry, D. Eisenbud & L. Robbiano (eds), Cambridge University Press, 1993.

[J] JOUANOLOU (J.-P.). — *Théorèmes de Bertini et applications.* — Progress in Math., Birkhäuser, Boston, 1983.

[K] KUNTZ (E.). — *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* — Birkhäuser, 1985.

[L] LANG (S.). — *Algebra.* — Second Edition, Addison-Wesley, 1984.

[N] NORTHCOTT (D.G.). — *Lessons on rings, modules and multiplicities.* — Cambridge Univ. Press, 1968.

[N-R] NORTHCOTT (D.G.) and REES (D.). — *Reductions of ideals in local rings*, Proc. Cambridge Phil. Soc., t. **50**, 1954, p. 145–158.

[L-T] LIPMAN (J.) and TEISSIER (B.). — *Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals*, Michigan Math. J., t. **28**, 1981, p. 97–116.

[Z-S] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — *Commutative Algebra*, vol. 2, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1986 (reprint of the 1960 edition).