BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL CONDUCHÉ

Question de Whitehead et modules précroisés

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 3 (1996), p. 401-423
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_3_401_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 401–423.

QUESTION DE WHITEHEAD ET MODULES PRÉCROISÉS

PAR

DANIEL CONDUCHÉ (*)

RÉSUMÉ. — Soient $\partial' : M' \to P$ et $\partial'' : M'' \to P$ deux modules précroisés totalement libres et soit $\partial = \partial' * \partial'' : M = M' * M'' \to P$ leur coproduit (dans la catégorie des P-modules précroisés). Soient ∂^{cr} et ∂'^{cr} les modules croisés induits. Alors, si ∂^{cr} est injectif, le noyau $\mathrm{Ker}(\partial'^{\mathrm{cr}})$ est l'intersection des termes de la série centrale descendante de ∂'^{cr}, la notion de série centrale descendante se généralisant de façon naturelle aux modules croisés. Ce résultat permet d'exprimer le problème d'homotopie de Whitehead en termes de nilpotence résiduelle.

ABSTRACT. — Let $\partial' : M' \to P$ and $\partial'' : M'' \to P$ be two totally free pre-crossed modules and let $\partial = \partial' * \partial'' : M = M' * M'' \to P$ be their coproduct (in the category of pre-crossed P-modules). Let ∂^{cr} and ∂'^{cr} be the induced crossed modules. Then, if ∂^{cr} is injective, the kernel $\mathrm{Ker}(\partial'^{\mathrm{cr}})$ is the intersection of ∂'^{cr}s lower central series, the notion of lower central series having a natural extension to crossed modules. This result allows a translation of Whitehead's homotopy problem in terms of residual nilpotency.

0. Introduction

D'après J.H.C. Whitehead [35] (voir aussi [11], [4]), tout CW-complexe connexe de dimension 2 peut être représenté par un module croisé. La notion de sous-groupe de commutateurs s'étend naturellement aux modules croisés, d'où la notion de série centrale descendante dans ce cadre. Le but de cet article est de montrer que, si X est un CW-complexe asphérique de dimension 2 réduit, c'est-à-dire dont le 0-squelette n'a qu'un point, et Y un sous-CW-complexe, le groupe $\pi_2(Y)$ est l'intersection de la série centrale descendante du module croisé $\pi_2(Y, Y^1) \to \pi_1(Y^1)$.

(*) Texte reçu le 22 février 1995, révisé le 2 mai 1995.
D. CONDUCHÉ, Université de Rennes 1, UFR de Mathématiques, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes CEDEX France. Email : conduche@univ-rennes1.fr.
Classification AMS : 57M20, 20E26, 18G30, 18G35.
Mots clés : Module précroisé, module croisé, CW-complexe, nilpotence résiduelle.

Donc la question de l'asphéricité du sous-CW-complexe Y, posée par Whitehead en 1941 [35] (voir [6] pour une étude générale des travaux sur cette question), se ramène à une question de nilpotence résiduelle dans les modules croisés totalement libres.

Les principaux outils employés sont, dans un module précroisé, les commutateurs de Peiffer [31], voir aussi [3], [4], [11]. Le premier paragraphe rappelle les définitions et donne quelques propriétés des modules (pré)croisés et des commutateurs de Peiffer (voir aussi [4], [15]).

Le deuxième paragraphe rappelle succintement la correspondance entre groupes simpliciaux et modules précroisés via le complexe de Moore (*cf.* [26] par exemple). La construction du module croisé

$$\pi_2(X, X^1) \longrightarrow \pi_1(X^1)$$

(*cf.* [35], [11], [3]) et celle du groupe simplicial libre associé par Kan [25] sont rappelées, ce qui permet d'exprimer la question de Whitehead en termes de modules précroisés.

Dans le troisième paragraphe un groupe simplicial homotopiquement trivial, dû à Quillen [32] et lié au foncteur de décalage, est utilisé pour construire un diagramme commutatif contenant des modules précroisés libres induisant les modules croisés

$$\pi_2(X, X^1) \longrightarrow \pi_1(X^1) \quad \text{et} \quad \pi_2(Y, Y^1) \longrightarrow \pi_1(Y^1).$$

Ce diagramme permet de retrouver des propriétés des sous-groupes de $P = \pi_1(Y^1) = \pi_1(X^1)$ (*cf.* [21]) et du noyau $\mathrm{Ker}(\pi_1(Y) \to \pi_1(X))$ (*cf.* [9]).

Le quatrième paragraphe est consacré à l'étude des relations entre sous-groupes de commutateurs et sous-groupes de Peiffer et à la démonstration du résultat annoncé. Dans le cas particulier où le CW-complexe X est contractible et fini on retrouve un résultat de Bogley [5].

Conventions et notations

Étant donné un groupe H, un groupe G est un *H-groupe* si une opération du groupe H sur le groupe G est donnée ; cette opération se fait à gauche et l'action de l'élément $\alpha \in H$ sur l'élément $x \in G$ est notée ${}^{\alpha}x$. Le produit semi-direct correspondant est noté $K = G \rtimes H$, ou $G \rtimes iH$ si l'injection i du groupe quotient H dans le groupe K a besoin d'être précisée. Un commutateur ordinaire est noté $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Le sous-groupe normal engendré par un sous-groupe G' d'un groupe G est noté $\widehat{G'}$. Pour tout H-groupe G et tout sous-groupe G' de G, on note $[H, G']$ le sous-groupe de G engendré par les éléments ${}^{\alpha}xx^{-1}$ pour

$\alpha \in H$ et $x \in G'$; si G' est un sous-groupe de H, l'opération se fait par conjugaison et le sous-groupe $[H, G']$ est le sous-groupe de commutateurs habituel. Soit $\gamma_n(H, G')$ la famille de sous-groupes de G définie récursivement par

$$\gamma_1(H, G') = G' \quad \text{et} \quad \gamma_n(H, G') = \big[H, \gamma_{n-1}(H, G')\big] ;$$

pour $H = G'$, on retrouve la série centrale descendante

$$\gamma_n(H) = \gamma_n(H, H).$$

La définition du complexe de Moore, un peu différente de celle utilisée dans [16] et [26], est celle utilisée dans [27] et [14] : si $G_\bullet$ est un groupe simplicial, son complexe de Moore est donné en dimension n par

$$N(G)_n = \bigcap_{i \leq n-1} \operatorname{Ker}(\mathrm{d}_i).$$

L'expression « coproduit » a été préférée à celle de « produit libre » et est notée « $*$ ». La notation « $\square$ » indique la fin d'une démonstration ou son absence.

1. Modules précroisés et commutateurs de Peiffer.

DÉFINITION 1.1. — Un *module précroisé* est la donnée d'un morphisme de groupes $\partial : M \to P$ et d'une opération du groupe P sur le groupe M qui vérifient, pour tout $x \in M$ et tout $\alpha \in P$,

(i) $\partial({}^{\alpha}x) = \alpha\, \partial(x)\, \alpha^{-1}$.

Le P-groupe M est appelé un *P-module précroisé.* Si, de plus, l'égalité

(ii) ${}^{\partial(x)}y = x\, y\, x^{-1}$

est vérifiée pour tout x et tout $y \in M$, le morphisme ∂ est un *module croisé* et le groupe M est un *P-module croisé.*

DÉFINITION 1.2. — Soit $\partial : M \to P$ un module précroisé. On appelle *commutateur de Peiffer* un élément de la forme

$$\langle x, y \rangle = x\, y\, x^{-1}\, {}^{\partial x}y^{-1}, \qquad x, y \in M.$$

Le *sous-groupe de Peiffer* de M (ou de ∂), $P_2(M)$ est le sous-groupe engendré par les commutateurs de Peiffer.

Le *module croisé induit* par ∂ est le morphisme

$$\partial^{\mathrm{cr}} : M^{\mathrm{cr}} = \frac{M}{P_2(M)} \longrightarrow P.$$

PROPOSITION 1.3. — *Soit $\partial : M \to P$ un module précroisé. Les commutateurs de Peiffer vérifient les relations suivantes, pour $x, y, z \in M$, $\alpha \in P$ et $k \in \operatorname{Ker}\partial$,*

1) $\langle x, yz\rangle = \langle x, y\rangle\, {}^{\partial x}y\, \langle x, z\rangle\, {}^{\partial x}y^{-1} = \langle x, y\rangle\langle x, z\rangle\big\langle \langle x, z\rangle^{-1},\, {}^{\partial x}y\big\rangle$;

2) $\langle xy, z\rangle = x\,\langle y, z\rangle\, x^{-1}\langle x, {}^{\partial y}z\rangle = \big\langle \langle y, z\rangle, x\big\rangle^{-1}\langle y, z\rangle\langle x, {}^{\partial y}z\rangle$;

3) ${}^{\alpha}\langle x, y\rangle = \langle {}^{\alpha}x, {}^{\alpha}y\rangle$;

4) $\langle k, x\rangle = [k, x]$;

5) $\langle x, y\rangle = [x, y]\, y\, {}^{\partial x}y^{-1}$. ▯

Les commutateurs de Peiffer utilisés ici correspondant à des opérations à gauche, ces formules diffèrent de celles de [4] mais sont les mêmes que dans [15].

DÉFINITION 1.4. — Un sous-groupe de M est un *sous-module précroisé* s'il est stable par l'opération de P.

Contrairement à ce qui se passe pour les modules croisés, un sous-module précroisé de M n'est pas toujours un sous-groupe normal de M. Ainsi M peut être le coproduit $M = M' * M''$ de deux sous-modules précroisés. La vérification du lemme suivant est purement formelle.

LEMME 1.5. — *Étant donné un groupe P, le coproduit d'une famille de P-modules précroisés est égal à leur coproduit comme P-groupes et aussi à leur coproduit comme groupes.* ▯

REMARQUE 1.6. — La situation est très différente pour les P-modules croisés (*cf.* [10], [17]).

Si M' et M'' sont deux sous-modules précroisés de M, le sous-groupe de M engendré par les éléments $\langle x, y\rangle$ pour $x \in M'$ et $y \in M''$ est noté $\langle M', M''\rangle$. En particulier,

$$P_2(M') = \langle M', M'\rangle.$$

Le sous-groupe $\langle M', M''\rangle$ est un sous-module précroisé de M. La propriété suivante résulte des égalités (1.3.1) et (1.3.2) :

PROPOSITION 1.7. — *Soient $\partial : M \to P$ un module précroisé et M' et M'' deux sous-modules précroisés de M tels que $M'M'' = M$. Alors le sous-groupe $\langle M', M''\rangle$ est normal.* ▯

COROLLAIRE 1.8. — *Pour tout sous-module précroisé M' du module précroisé $\partial : M \to P$ les sous-groupes $\langle M, M'\rangle$ et $\langle M', M\rangle$ sont normaux.* ▯

COROLLAIRE 1.9. — *Soit $\partial : M \to P$ un module précroisé et soient M' et M'' deux sous-modules précroisés tels que $M'M'' = M$. Alors :*

(a) *tout élément $t \in P_2(M)$ s'écrit $t = t_1 t_2 = t_3 t_4$ avec $t_1 \in \langle M, M'\rangle$, $t_2 \in \langle M, M''\rangle$, $t_3 \in \langle M', M\rangle$ et $t_4 \in \langle M'', M\rangle$;*

(b) *tout élément $u \in \langle M, M''\rangle$ s'écrit $u = u_1 u_2$ avec $u_1 \in \langle M', M''\rangle$ et $u_2 \in P_2(M'')$;*

(c) *tout élément $v \in \langle M', M\rangle$ s'écrit $v = v_1 v_2$ avec $v_1 \in \langle M', M''\rangle$ et $v_2 \in P_2(M')$.*

Démonstration. — Soient x, y appartenant à M. L'élément y étant un produit d'éléments de M' et de M'', la formule (1.3.1) permet d'écrire $\langle x, y\rangle$ comme produit d'éléments de $\langle M, M'\rangle$ et d'éléments de $\langle M, M''\rangle$. Ces sous-groupes étant normaux, $\langle x, y\rangle$ est encore le produit d'un élément de $\langle M, M'\rangle$ et d'un élément de $\langle M, M''\rangle$. Les autres cas se traitent de la même façon. $\square$

PROPOSITION 1.10. — *Soient $\partial' : M' \to P$ et $\partial'' : M'' \to P$ deux modules précroisés et soit $\partial = \partial' * \partial'' : M = M' * M'' \to P$ leur coproduit. Alors le groupe $\widehat{M}''$ est un produit semi-direct du groupe $\langle M', M''\rangle$ par le groupe M''.*

Démonstration. — Le groupe $\widehat{M}''$ est engendré par les éléments $x\,y\,x^{-1}$ avec $x \in M'$ et $y \in M''$. Par ailleurs $x\,y\,x^{-1} = \langle x, y\rangle^{\partial x}y$. Le morphisme ∂' et l'identité de M'' induisent un morphisme $M = M' * M'' \to M'' \rtimes P$ dont se déduit une surjection scindée $\widehat{M}'' \twoheadrightarrow M''$ de noyau $\langle M', M''\rangle$. $\square$

COROLLAIRE 1.11. — *Le groupe $\langle M, M''\rangle$ est isomorphe à un produit semi-direct*

$$\langle M, M''\rangle \cong \langle M', M''\rangle \rtimes P_2(M''). \quad \square$$

PROPOSITION 1.12. — *Le groupe $\langle M', M\rangle$ est isomorphe à un produit semi-direct*

$$\langle M', M\rangle \cong \langle M', M''\rangle \rtimes P_2(M'). \quad \square$$

2. Modules précroisés et groupes simpliciaux

Étant donné un groupe simplicial $G_\bullet$, soit $N(G)_\bullet$ son complexe de Moore. La conjugaison par $s_0 G_0$ dans G_1 munit le morphisme

$$N(G)_1 \longrightarrow N(G)_0$$

d'une structure de module précroisé. Soit $N'(G)$ ce module précroisé.

Le foncteur N' ainsi défini, de la catégorie des groupes simpliciaux dans la catégorie des modules précroisés, admet un adjoint à gauche, le foncteur K' (*cf.* [14]). Étant donné un module précroisé $\partial : M \to P$, les composantes en dimensions 0, 1 et 2 du groupe simplicial $K'(\partial)$ sont respectivement

$$\begin{aligned}
&K'(\partial)_0 = P,\\
&K'(\partial)_1 = M \rtimes s_0P,\\
&K'(\partial)_2 = (s_1M * s_0M) \rtimes s_1s_0P.
\end{aligned}$$

Le composé du foncteur d'oubli de la structure précroisée et du foncteur N' a pour adjoint à gauche le foncteur K. Étant donné un morphisme de groupes $\hat{o} : M_0 \to P$, le groupe simplicial $G_\bullet = K(\delta)$ a pour composantes en dimensions 0, 1 et 2 respectivement

$$\begin{aligned}
&K(\delta)_0 = P,\\
&K(\delta)_1 = M_0 * s_0P,\\
&K(\delta)_2 = s_1M_0 * s_0M_0 * s_1s_0P.
\end{aligned}$$

Le module précroisé libre engendré par le morphisme δ est alors :

$$N'(G_\bullet) = N'K(\delta).$$

Cette situation est décrite en basses dimensions par le diagramme suivant, où $M = N(G)_1 = N'(G)_1$ et où $K'N'(G_\bullet)$ figure dans la deuxième colonne :

$$\begin{array}{ccc}
s_1M_0 * s_0M_0 * s_1s_0P & \overset{\sim}{=\!=\!=} & (M * M) \rtimes P\\
\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow & & \downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\\
M_0 * s_0P & \overset{\sim}{=\!=\!=} & M \rtimes P\\
\downarrow\downarrow\uparrow & & \downarrow\downarrow\uparrow\\
P & =\!=\!= & P.
\end{array}$$

REMARQUE 2.1. — Les foncteurs K et K' sont définis sur des catégories plus générales [14] ; par exemple K est défini sur la catégorie des complexes de groupes.

PROPOSITION 2.2. — *Soit $\partial : M \to P$ un module précroisé et soit $G_\bullet = K'(\partial)$. Alors nous avons les isomorphismes suivants*

$$\pi_1(G_\bullet) \cong \frac{\operatorname{Ker}(\partial_1)}{P_2(M)} \cong \operatorname{Ker}(\partial_1^{\mathrm{cr}}),$$

$$\pi_0(G_\bullet) \cong \operatorname{Coker}(\partial_1) = \operatorname{Coker}(\partial_1^{\mathrm{cr}}). \quad \square$$

2.3. — Soit X un CW-complexe réduit de dimension 2. Soient :
- $P \cong \pi_1(X^1)$ le groupe libre engendré par l'ensemble des 1-cellules,
- M_0 le groupe libre engendré par l'ensemble des 2-cellules et
- $\hat{o} : M_0 \to P$ un morphisme défini en associant à chaque 2-cellule un représentant dans P de l'image de sa fonction caractéristique.

Alors le groupe simplicial $G_\bullet = G(X)_\bullet = K(\delta)$ est celui associé par Kan [25] au CW-complexe X et a la propriété suivante.

THÉORÈME 2.4. — *Étant donné un CW-complexe réduit X, il existe pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme $\pi_n(G(X)_\bullet) \cong \pi_{n+1}(X)$.* □

Le module croisé induit par $N'(G)$ est celui associé au CW-complexe X par Whitehead [35] (voir aussi [3], [11]). D'où les définitions suivantes.

DÉFINITIONS 2.5. — Un module précroisé $\partial : M \to P$ est *asphérique* si $\mathrm{Ker}(\partial) = P_2(M)$. Si, de plus, le morphisme ∂ est surjectif, le module précroisé ∂ est *contractible.*

DÉFINITION 2.6. — Un P-module précroisé M est *libre* si M est libre comme P-groupe. Un module précroisé $\partial : M \to P$ est *totalement libre* si le groupe P est libre et si le P-module précroisé M est libre.

Un module croisé est libre (resp. totalement libre) s'il est induit par un module précroisé libre (resp. totalement libre).

La construction décrite en (2.3) n'est pas fonctorielle. Cependant elle peut être effectuée sur un couple $X \supset Y$ de CW-complexes. Il correspond alors au sous-CW-complexe Y un sous-groupe M_0' facteur du groupe M_0 pour le coproduit, c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe M_0'' du groupe M_0 tel que $M_0 = M_0' * M_0''$, ce sous-groupe M_0'' correspondant à un sous-CW-complexe Z de X tel que $Y \cup Z = X$ et $Y \cap Z \subset X^1$; on peut supposer de plus que $X^1 = Y^1 = Z^1$. Compte tenu du lemme 1.5, le problème d'homotopie de Whitehead est donc équivalent à la question algébrique suivante.

QUESTION 2.7. — *Soient $\partial' : M' \to P$, $\partial'' : M'' \to P$ deux P-modules précroisés totalement libres et $\partial = \partial' * \partial'' : M = M' * M'' \to P$. Si le module précroisé ∂ est asphérique, le sous-module précroisé ∂' est-il asphérique ?*

Dans cette question, le module précroisé ∂ peut être supposé contractible. Le passage au revêtement universel permet de se ramener à ce cas [6].

3. Décalage et modules précroisés

Étant donné un groupe simplicial $G_\bullet$, soit $\mathrm{Dec}^1(G)_\bullet$ le groupe simplicial décalé obtenu par oubli du dernier bord et de la dernière dégénérescence [24]. Soit $q_\bullet$ le morphisme simplicial à valeur dans le groupe simplicial constant G_0 défini par

$$q_n = \mathrm{d}_0^{n+1} : \mathrm{Dec}^1(G)_n = G_{n+1} \longrightarrow G_0$$

et soit (*cf.* [32])

$$\overline{G}_\bullet = \mathrm{Ker}(q_\bullet).$$

PROPOSITION 3.1. — *Le groupe simplicial $\overline{G}_\bullet$ est homotopiquement trivial.* $\square$

Le bord oublié en chaque dimension définit un morphisme simplicial surjectif

$$q_\bullet : \mathrm{Dec}_1(G)_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$$

donné par :

$$q_n = \mathrm{d}_{n+1} : G_{n+1} \longrightarrow G_n.$$

Le morphisme $q_\bullet$ a pour section le morphisme

$$i_\bullet : G_\bullet \longrightarrow \mathrm{Dec}_1(G)_\bullet$$

défini par la dégénérescence oubliée $i_n = s_n$. Le morphisme $q_\bullet$ induit un morphisme $\bar{q}_\bullet : \overline{G}_\bullet \to G_\bullet$ surjectif mais $i_n(G_n)$ n'est pas inclus dans $\overline{G}_n$.

PROPOSITION 3.2. — *Soient $\partial : M \to P$ un module précroisé et $G_\bullet = K'(\partial)$. Alors :*

(a) *Le groupe simplicial $\overline{G}_\bullet$ est naturellement isomorphe au groupe simplicial associé par le foncteur K au morphisme identité de M.*

(b) *Le module précroisé $N'(\overline{G})$ s'écrit* $\mathrm{d} : \overline{M} \to M$ *où $\overline{M}$ est le sous-groupe normal de $\overline{G}_1 \cong s_1M * s_0M$ engendré par s_1M, donc le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $s_0x\, s_1y\, s_0x^{-1}$ pour $x, y \in M$. Le morphisme* d *est la restriction du bord* d_1 : $\mathrm{d}(s_0x\, s_1y\, s_0x^{-1}) = x\, y\, x^{-1}$.

(c) *Le morphisme* d *a pour noyau* $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}) = P_2(\overline{M})$. $\square$

Dans cette situation, le morphisme $p_\bullet = N'(\bar{q}_\bullet)$ s'écrit $p_\bullet = (p_1, p_0)$:

$$\begin{array}{ccc} \overline{M} & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle \mathrm{d}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ M & \longrightarrow & P, \end{array}$$

avec, pour $x, y \in M$:

$$p_0 = \partial,$$
$$p_1(s_0\, x s_1 y\, s_0 x^{-1}) = \mathrm{d}_2(s_0 x\, s_1 y\, s_0 x^{-1}) = s_0\, \mathrm{d}_1(x)\, y\, s_0\, \mathrm{d}_1(x)^{-1} = {}^{\partial x}y.$$

Le morphisme de groupes p_1 est surjectif et scindé par la restriction à M de $i_1 = s_1$.

Soient :

• $\partial = \partial' * \partial'' : M = M' * M'' \to P$ le coproduit de deux modules précroisés ;

• $G_\bullet = K'(\partial)$ et $N'(\overline{G}_\bullet) = \mathrm{d} : \overline{M} \to M$;

• $\overline{M}'$ le sous-M-module précroisé de $\overline{M}$ engendré par $s_1 M'$, donc le sous-groupe de $\overline{M}$ engendré par les éléments $s_0 x\, s_1 y\, s_0 x^{-1}$ pour $x \in M$ et $y \in M'$;

• $\mathrm{d}' : \overline{M}' \to M$ la restriction du morphisme d.

Lemme 3.3. — *Avec ces notations, on a :*

(a) $\mathrm{d}'(\overline{M}') = \widehat{M}'$.

(b) $\mathrm{Coker}(\mathrm{d}') \cong M''$.

(c) *Le module précroisé* d′ *est asphérique.*

Démonstration. — Les assertions (a) et (b) sont immédiates.

Montrons (c). L'opération du groupe M sur le groupe $\overline{M}$ étant la conjugaison *via* s_0, le commutateur de Peiffer des éléments $s_0 t\, s_1 x\, s_0 t^{-1}$ et $s_1 y$, pour $x, y \in M'$ et $t \in M$ s'écrit :

$$\langle s_0 t\, s_1 x\, s_0 t^{-1}, s_1 y\rangle = s_0 t\, s_1 x\, s_0 t^{-1} s_1 y\, s_0 t\, s_1 x^{-1} s_0(xt^{-1}) s_1 y^{-1}\, s_0(tx^{-1}t^{-1}).$$

Donc, si $z = utxt^{-1}$ avec $u \in M$, $t \in M''$ et $x \in M'$, l'élément $s_0 z\, s_1 y\, s_0 z^{-1}$ où $y \in M'$ s'écrit :

$$\begin{aligned} s_0 z\, s_1 y\, s_0 z^{-1} &= s_0 u\, \langle s_0 t\, s_1 x\, s_0 t^{-1}, s_1 y\rangle^{-1} s_0 t\, s_1 x\, s_0 t^{-1} \\ &\qquad\qquad s_1 y\, s_0 t\, s_1 x^{-1} s_0 t^{-1} s_0 u^{-1} \\ &\equiv s_0 u\, s_0 t\, s_1 x\, s_0 t^{-1} s_1 y\, s_0 t\, s_1 x^{-1} s_0 t^{-1} s_0 u^{-1} \mod P_2(\overline{M}'). \end{aligned}$$

Tout élément $z \in M$ s'écrit $z = z_1 z_2$ avec $z_1 \in M''$ et $z_2 \in \widehat{M}'$; donc la répétition de ce calcul montre que l'élement $s_0 z\, s_1 y\, s_0 z^{-1}$ est congru modulo $P_2(\overline{M}')$ à un produit d'éléments de la forme $s_0 t' s_1 x' s_0 t'^{-1}$ avec $t' \in M''$ et $x' \in M'$, donc à un élément de $s_1 M' * s_0 M''$. Or la restriction au groupe $s_1 M' * s_0 M''$ de l'application d est un isomorphisme avec le groupe $M' * M'' = M$. Donc le morphisme d′ a pour noyau $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}') = P_2(\overline{M}')$. □

REMARQUE 3.4. — Si les groupes M' et M'' sont libres, le module précroisé totalement libre d représente un CW-complexe contractible et d′ un sous-CW-complexe dont le π_1 est le groupe libre M''. Dans ce cas, l'assertion (c) résulte d'un théorème d'Adams [1].

Le morphisme $p_\bullet$ se restreint à un morphisme $p_\bullet{}' = (p_1', p_0')$ de modules précroisés où $p_0' = p_0 = \partial$. Le morphisme de groupes p_1' est encore surjectif et scindé par la restriction i_1' du morphisme i_1 ; son noyau est le sous-groupe $\{M, M'\}$ de $\overline{M}'$ engendré par l'ensemble des éléments

$$\{x, y\} = s_0 x\, s_1 y\, s_0 x^{-1} s_1({}^{\partial x}y)^{-1}$$

avec $x \in M$ et $y \in M'$.

LEMME 3.6. — *On a :*

(a) $p_1'(P_2(\overline{M})) = P_2(M')$.

(b) $\mathrm{d}'(\{M, M'\}) = \langle M, M'\rangle$. $\square$

Dans toute la suite le module précroisé ∂ est supposé asphérique.

Soient $K' = \mathrm{Ker}(\partial')$ et $\pi' = \mathrm{Coker}(\partial')$. Le morphisme $p'_\bullet$ donne le diagramme commutatif suivant où les lignes et les colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & P_2(\overline{M}') & \longrightarrow & K' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \longrightarrow & \{M, M'\} & \longrightarrow & \overline{M}' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & P_2(M) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & P_2(M)/\langle M, M'\rangle & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & \pi' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array} \tag{3.7}$$

LEMME 3.8. — *Le diagramme* (3.7) *induit une suite exacte*

$$P_2(\overline{M}') \longrightarrow K' \longrightarrow \frac{P_2(M)}{\langle M, M'\rangle} \longrightarrow M'' \longrightarrow \pi$$

Démonstration. — C'est le lemme du serpent. En effet, la démonstration de ce lemme, donnée en général dans le cas abélien [8, chap. 1, § 1.4 par exemple], reste valide pour un diagramme de groupes non commutatifs, du moment que les morphismes verticaux ont pour images des sous-groupes normaux. $\square$

Le module précroisé ∂' est asphérique si et seulement si le morphisme $P_2(\overline{M}') \to K'$ est surjectif, donc si et seulement si le morphisme induit

$$f : \frac{P_2(M)}{\langle M, M' \rangle} \longrightarrow M''$$

est injectif. Cette suite exacte permet une légère généralisation d'un théorème de Gutiérrez et Ratcliffe [21] (voir aussi [23]).

THÉORÈME 3.9. — *Soient $P' = \partial(M')$ et $P'' = \partial(M'')$. Alors on a :*

$$P' \cap P'' = [P', P''].$$

Démonstration. — Par l'exactitude de la suite (3.8), on a :

$$f\Big(\frac{P_2(M)}{\langle M, M' \rangle}\Big) = \operatorname{Ker}(M'' \to \pi').$$

La décomposition de $P_2(M)$, donnée par le corollaire (1.9), permet d'écrire

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{P_2(M)}{\langle M, M' \rangle}\Big) &= fc(P_2(M)) \\ &= fc\big(\langle M, M' \rangle \langle M', M'' \rangle P_2(M'')\big) \\ &= fc\big(\langle M', M'' \rangle\big) fc\big(P_2(M'')\big) \end{aligned}$$

où c est la projection canonique de $P_2(M)$ sur $P_2(M)/\langle M, M' \rangle$.

Comme $fc(\langle x, y \rangle) = y\, {}^{\partial x} y^{-1}$ pour $x \in M'$ et $y \in M''$, nous avons :

$$fc\big(\langle M', M'' \rangle\big) = [P', M''].$$

Par ailleurs, la restriction au sous-groupe $P_2(M'')$ du morphisme fc est l'injection canonique, d'où l'égalité

$$f\Big(\frac{P_2(M)}{\langle M, M' \rangle}\Big) = [P', M''] P_2(M'').$$

Le morphisme $M'' \to \pi'$ se décompose en

$$M'' \xrightarrow{\partial''} P \longrightarrow \pi'$$

où ∂'' est la restriction du morphisme $\partial : M \to P$; en effet, le morphisme ∂'' est induit par le morphisme ∂ et la surjection $M \to M''$ est scindée par l'injection canonique. Comme le sous-groupe P' est le noyau du morphisme $P \to \pi'$ nous avons l'égalité :

$$[P', P''] = \partial''\big([P', M'']\, P_2(M'')\big) = P' \cap P''. \quad \square$$

PROPOSITION 3.10. — *L'opération par conjugaison du groupe M sur le sous-groupe $P_2(M)$ induit une opération du groupe M'' sur le groupe*

$$\frac{P_2(M)}{\langle M, M' \rangle}$$

qui fait du morphisme f un module croisé.

Démonstration. — La propriété (1.1.i) est facilement vérifiée. Pour $x \in M'$ et $z \in P_2(M) = \operatorname{Ker}(\partial)$, l'élément $[x, z] = \langle z, x \rangle^{-1}$ appartient à $\langle M, M' \rangle$; donc le sous-groupe M' opère trivialement sur le groupe $P_2(M)/\langle M, M' \rangle$ et nous avons la congruence suivante modulo $\langle M, M' \rangle$:

$$\langle x, y \rangle\, z\, \langle x, y \rangle^{-1} \equiv y\, {}^{\partial x}y^{-1}\, z\, {}^{\partial x}y\, y^{-1}$$

pour $x \in M'$, $y \in M''$ et $z \in P_2(M)$. En conséquence, la propriété (1.1.ii) est vérifiée. $\square$

LEMME 3.11. — *En restriction au sous-groupe $P_2(M'')$, le morphisme c est injectif et le sous groupe $c(P_2(M''))$ de $M/\langle M, M' \rangle$ est normal.*

Démonstration. — Le sous-groupe $P_2(M'')$ s'injecte par fc dans M'', donc il s'injecte par c dans $P_2(M)/\langle M, M' \rangle$. Par ailleurs, $P_2(M'')$ est stable par conjugaison par un élément de M'' et M' opère trivialement sur tout sous-groupe de $P_2(M)/\langle M, M' \rangle$. $\square$

Soit

$$f' : \frac{P_2(M)}{\langle M, M' \rangle P_2(M'')} \longrightarrow M''^{\mathrm{cr}}$$

le morphisme induit par la projection canonique de $P_2(M)$ sur

$$M''^{\mathrm{cr}} = \frac{M''}{P_2(M'')}.$$

LEMME 3.12. — *Le morphisme f' est un module croisé.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.10. $\square$

LEMME 3.13. — *Soit* $\pi = \mathrm{Coker}(\partial)$. *Les modules croisés*

$$\partial'^{\mathrm{cr}} : M'^{\mathrm{cr}} \longrightarrow P,\ f,\ f'$$

ont le même noyau $A = K'/P_2(M')$. *De plus* f *et* f' *ont pour conoyau* $\pi^0 = \mathrm{Ker}(\pi' \to \pi)$.

Démonstration. — Cela résulte de la suite exacte (3.8). ∎

PROPOSITION 3.14. — *Il existe un morphisme de modules croisés* $g_\bullet = (g_1, g_0) : f' \to \partial'^{\mathrm{cr}}$ *qui a les propriétés suivantes :*

(a) $g_0 = \partial''^{\mathrm{cr}}$;

(b) $g_1\big(P_2(M)/\langle M, M'\rangle P_2(M'')\big) = [P'', M'^{\mathrm{cr}}]$

(c) *pour* $t \in A$, *on a* $g_1(t) = t^{-1}$.

Démonstration. — Soit

$$\varphi : M = M' * M'' \longrightarrow M'^{\mathrm{cr}} \rtimes P$$

le morphisme défini par le morphisme canonique $M' \to M'^{\mathrm{cr}}$ et le morphisme $\partial'' : M'' \to P$. Compte tenu des égalités

$$\varphi(\langle M'', M'\rangle) = \varphi\big(P_2(M'')\big) = \varphi\big(P_2(M')\big) = (1),$$

la restriction de φ à $P_2(M)$ se factorise par un morphisme

$$\varphi' : \frac{P_2(M)}{\langle M, M'\rangle P_2(M'')} \longrightarrow M'^{\mathrm{cr}} \rtimes P$$

dont l'image est $\varphi(\langle M'', M'\rangle)$. Soit, pour $x \in M'$ (resp. $x \in M''$), $\bar{x}$ l'image de x dans M'^{cr} (resp. M''^{cr}). Pour $x \in M'$ et $y \in M''$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi\big(\langle x, y\rangle\big) &= \varphi(x\, y\, x^{-1}\, {}^{\partial x}y^{-1}) \\
&= (\bar{x}, 1)(1, \partial'' y)(\bar{x}^{-1}, 1)(1, \partial''({}^{\partial x}y)^{-1}) \\
&= \big(\bar{x}\, {}^{\partial y}\bar{x}^{-1}, \partial''(y\, {}^{\partial x}y^{-1})\big) \\
&= \big(\bar{x}\, {}^{\partial y}\bar{x}^{-1}, \partial[y, x]\big) \\
&= \big(\bar{x}\, {}^{\partial y}\bar{x}^{-1}, \partial'^{\mathrm{cr}}({}^{\partial y}\bar{x}\, \bar{x}^{-1})\big).
\end{aligned}$$

L'image $\varphi(\langle M'', M'\rangle)$ est donc contenue dans le sous-groupe

$$\Delta(M'^{\mathrm{cr}}) = \big\{(z^{-1}, \partial'^{\mathrm{cr}}(z))\ ;\ z \in M'^{\mathrm{cr}}\big\}$$

du groupe $M'^{\mathrm{cr}} \rtimes P$. Il suit de la propriété (1.1.ii) que l'application

$$\theta : \Delta(M'^{\mathrm{cr}}) \longrightarrow M'^{\mathrm{cr}}$$

définie par $\theta(z^{-1}, \partial'^{\mathrm{cr}}(z)) = z$ est un isomorphisme. Soient

$$c' : P_2(M) \longrightarrow \frac{P_2(M)}{\langle M, M' \rangle P_2(M'')}$$

le morphisme quotient et $g_1 = \theta\varphi'$. Nous avons, pour $x \in M'$ et $y \in M''$, l'égalité

$$g_1\big(c'(\langle x, y\rangle)\big) = {}^{\partial y}\bar{x}\,\bar{x}^{-1}\,;$$

donc le morphisme g_1 vérifie la propriété (b). Nous avons également l'égalité :

$$\partial'^{\mathrm{cr}} g_1\big(c'(\langle x, y\rangle)\big) = \partial[y, x].$$

Par ailleurs, nous avons

$$\partial''^{\mathrm{cr}} f'\big(c'(\langle x, y\rangle)\big) = \partial'^{\mathrm{cr}}\big(\bar{y}\,{}^{\partial x}\bar{y}^{-1}\big) = \partial[y, x]$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
P_2(M)/\langle M, M'\rangle P_2(M'') & \xrightarrow{g_1} & M'^{\mathrm{cr}} \\
{\scriptstyle f'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \partial'^{\mathrm{cr}}} \\
M''^{\mathrm{cr}} & \xrightarrow{\quad\partial''^{\mathrm{cr}}\quad} & P.
\end{array}$$

D'après la formule (1.3.1), on a

$$z\,\langle x, y\rangle\,z^{-1} = \langle x, {}^{\partial x^{-1}}z\rangle^{-1}\langle x, {}^{\partial x^{-1}}z\,y\rangle$$

pour $x \in M'$ et $y, z \in M''$, d'où, en utilisant la propriété (1.1.ii)

$$\begin{aligned}
g_1\big(c'(z\langle x, y\rangle z^{-1})\big) &= \bar{x}^{\partial({}^{\partial x^{-1}}z)}\bar{x}^{-1}\,{}^{\partial({}^{\partial x^{-1}}zy)}\bar{x}\,\bar{x}^{-1} \\
&= \bar{x}^{\,\partial(x^{-1}zx)}\bar{x}^{-1}\,{}^{\partial(x^{-1}zxy)}\bar{x}\,\bar{x}^{-1} \\
&= \bar{x}\,\bar{x}^{-1}\,{}^{\partial z}(\bar{x}\,\bar{x}^{-1}\bar{x}^{-1})\bar{x}\,\bar{x}^{-1}\,{}^{\partial z}(\bar{x}\,{}^{\partial y}\bar{x}\,\bar{x}^{-1})\bar{x}\,\bar{x}^{-1} \\
&= {}^{\partial z}({}^{\partial y}\bar{x}\,\bar{x}^{-1}) \\
&= {}^{\partial z}g_1\big(c'\big(\langle x, y\rangle\big)\big).
\end{aligned}$$

Le morphisme g_1 est donc ∂''^{cr}-équivariant.

Le morphisme θ vérifie $\theta(t) = t^{-1}$ pour $t \in A$; donc g_1 vérifie la même propriété. $\square$

LEMME 3.15. — *Le groupe quotient $M''/[P',M'']$ est un π'-module précroisé. Ce π'-module précroisé est libre si, de plus, le P-module précroisé M'' est libre.*

Démonstration. — L'opération induite du sous-groupe

$$P' = \mathrm{Ker}(P \to \pi')$$

sur le quotient $M''/[P',M'']$ est triviale; donc $M''/[P',M'']$ est un π'-module précroisé. De plus, une base de M'' comme P-groupe est envoyée par le morphisme quotient sur une base de $M''/[P',M'']$ comme π'-groupe, donc $M''/[P',M'']$ est un π'-module précroisé libre. □

PROPOSITION 3.16. — *Si le P-module précroisé M'' est libre, le groupe $\pi^0 = \mathrm{Ker}(\pi' \to \pi)$ est un π'-module croisé libre.*

Démonstration. — Le sous-groupe

$$[P',M'']P_2(M'') = \mathrm{Ker}(M'' \to \pi')$$

de M'' a pour image $P_2(M''/[P',M''])$ dans $M''/[P',M'']$ et cette image est le noyau du morphisme $M''/[P',M''] \to \pi'$, d'où l'isomorphisme :

$$\left(\frac{M''}{[P',M'']}\right)^{\mathrm{cr}} \cong \mathrm{Ker}(\pi \to \pi'). \quad \square$$

REMARQUE 3.17. — En termes de CW-complexes, cette proposition est une conséquence immédiate de la longue suite exacte d'homotopie associée au couple (X,Y) et du fait, démontré par Whitehead, que $\pi_2(X,Y)$ est un $\pi_1(Y)$-module croisé libre [35] (voir aussi [18] et [17]). Cette proposition et le corollaire suivant sont dans [9].

COROLLAIRE 3.18.

(a) *Le groupe $H_1(\pi^0) = (\pi^0)^{\mathrm{ab}}$ est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre de base en bijection avec une base du P-groupe libre M''.*

(b) *On a $H_2(\pi^0) = 0$.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du théorème de Ratcliffe caractérisant les modules croisés libres [33], voir aussi [20] pour la propriété (b). □

COROLLAIRE 3.19. — *Soit X'' une base du P-groupe M'' et M''_0 le sous-groupe de M'' engendré par X''. Le morphisme composé*

$$\Psi : M''_0 \longrightarrow M'' \twoheadrightarrow \pi^0$$

est injectif et induit pour tout n un isomorphisme

$$\frac{M_0''}{\gamma_n(M_0'')} \xrightarrow{\simeq} \frac{\pi^0}{\gamma_n(\pi^0)}.$$

Démonstration. — Le corollaire 3.18 donne des isomorphismes

$$H_1(M_0'') \cong H_1(\pi^0) \quad \text{et} \quad H_2(M_0'') = 0 = H_2(\pi^0).$$

Les isomorphismes $M_0''/\gamma_n(M_0'') \cong \pi^0/\gamma_n(\pi^0)$ résultent d'un théorème de Stalling [34]. Finalement, on a :

$$\operatorname{Ker}(\psi) \subset \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(M_0'') = (1). \quad \square$$

Les groupes abéliens $\gamma_n(\pi^0)/\gamma_{n+1}(\pi^0)$ étant libres, donc sans torsion, un théorème de P.M. Cohn sur les algèbres de groupes [13] donne une autre propriété du groupe π^0.

COROLLAIRE 3.20.— *Soit $I\pi^0$ l'idéal d'augmentation de l'anneau $\mathbb{Z}[\pi^0]$. Alors, pour tout entier n, on a :*

$$\big(1 + (I\pi^0)^n\big) \cap \pi^0 = \gamma_n(\pi^0). \quad \square$$

4. La série centrale descendante

A partir de ce paragraphe, les modules précroisés ∂' et ∂'', et donc également ∂, sont totalement libres.

La propriété suivante est due à Baer [2].

THÉORÈME 4.1.— *Étant donné un groupe G, le quotient $\gamma_n(F)/\gamma_n(F,R)$ est indépendant, à isomorphisme près, de la présentation libre*

$$R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$$

du groupe G. $\square$

COROLLAIRE 4.2. — *Étant donnés deux groupes libres F et G et une surjection $F \twoheadrightarrow G$ de noyau R, les groupes suivants sont égaux :*

$$\gamma_n(F,R) = \gamma_n(F) \cap R.$$

Démonstration. — Le théorème 4.1 appliqué aux présentations $\langle F,R\rangle$ et $\langle G,1\rangle$ du groupe G donne un isomorphisme

$$\text{(a)} \qquad \frac{\gamma_n(F)}{\gamma_n(F,R)} \cong \gamma_n(G)$$

donc $\gamma_n(F,R) = \operatorname{Ker}(\gamma_n(F) \twoheadrightarrow \gamma_n(G)) = \gamma_n(F) \cap R.$ $\square$

REMARQUE 4.3. — Le groupe G étant libre, la suite exacte $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ est scindée et il est facile de vérifier directement l'isomorphisme (a).

COROLLAIRE 4.4. — *On a* $\gamma_n(M) \cap P_2(M) = \gamma_n(M, P_2(M))$.

Démonstration. — Comme le module précroisé ∂ est asphérique, la suite

$$P_2(M) \rightarrowtail M \twoheadrightarrow \partial M$$

est une présentation libre du groupe libre ∂M. ▯

REMARQUE 4.5. — Pour $n = 2$, c'est un cas particulier d'un théorème de Ratcliffe [33] (voir aussi [20]).

THÉORÈME 4.6. — *Soit L le noyau de la restriction à $P_2(M)$ du morphisme de projection de M sur M'' introduit en* (3.7) *et soit un entier $n \geq 1$. Tout élément $x \in L$ est congru modulo $\langle M, M' \rangle$ à un élément du sous-groupe $\gamma_n(M'', \langle M, M'' \rangle) \cap [M', M'']$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 1.9, l'élément x s'écrit $x = y\,z$ avec $y \in \langle M, M' \rangle \subset L$ et $z \in \langle M, M'' \rangle$; donc z appartient à $\langle M, M'' \rangle \cap L$. L'inclusion $\langle M, M'' \rangle \subset \widehat{M}''$ et l'égalité $L = P_2(M) \cap \widehat{M}'$ impliquent l'appartenance

$$z \in \widehat{M}' \cap \widehat{M}'' = [M', M''].$$

La propriété est donc vérifiée pour $n = 1$.

Supposons-la vérifiée jusqu'à l'ordre $(n-1)$, ce qui permet de supposer $x \in \gamma_{n-1}(M'', \langle M, M'' \rangle)$. Ce groupe est engendré par les éléments de la forme

$$y = \big[t_1, \big[t_2, \big[\ldots[t_{n-2}, z]\big]\ldots\big]\big]$$

avec $t_i \in M''$ pour $1 \leq i \leq n-2$ et $z \in \langle M, M'' \rangle$. Pour $u \in M'$ et $v \in M''$, le commutateur de Peiffer

$$\langle u, v \rangle = [u, v]\, v^{\partial u} v^{-1}$$

est le produit d'un élément de $[M', M'']$ et d'un élément de M''. Comme le sous-groupe $[M', M'']$ est normal dans M, l'élément z s'écrit $z = z_1 z_2$ avec $z_1 \in [M', M'']$ et $z_2 \in M''$. Le développement du commutateur $[t_1, [\ldots, [t_{n-2}, z_1 z_2]\ldots]]$ montre que y est le produit d'un élément de $\gamma_n(M) \cap [M', M'']$ et d'un élément de $\gamma_{n-1}(M'')$. Donc l'élément x s'écrit $x = x_1 x_2$ avec $x_1 \in \gamma_n(M) \cap [M', M'']$ et $x_2 \in \gamma_{n-1}(M'')$. Comme x est dans $[M', M'']$, on a $x_2 = 1$, donc x appartient à $\gamma_n(M) \cap [M', M'']$ et, d'après le corollaire 4.4, x appartient à $\gamma_n(M, P_2(M))$. Par ailleurs, on a

$$\gamma_n\big(M, P_2(M)\big) = \gamma_n\big(M, \langle M, M' \rangle\big)\gamma_n\big(M, \langle M, M'' \rangle\big)$$

et l'inclusion $\gamma_n\big(M,\langle M,M'\rangle\big)\subset\langle M,M'\rangle$. Donc l'élément x est congru à un élément $x'\in\gamma_n(M,\langle M,M''\rangle)$. Comme $\langle M,M'\rangle$ est contenu dans $\widehat{M}'$, l'élément x' appartient à $\widehat{M}'$; de plus, $\gamma_n(M,\langle M,M''\rangle)$ est contenu dans $\widehat{M}''$ et donc x' appartient à $[M',M'']$.

Les mêmes arguments permettent de vérifier, par récurrence, que l'élément x' est congru à un élément

$$x^{(p)}\in\gamma_{n-p+1}\big(M,\gamma_p\big(M'',\langle M,M''\rangle\big)\big)\cap[M',M''].$$

En effet, supposons que x' soit congru à $x^{(p-1)}$ appartenant à

$$\gamma_{n-p+2}\big(M,\gamma_{p-1}\big(M'',\langle M,M''\rangle\big)\big)\cap[M',M''].$$

Le groupe $\gamma_{n-p+2}(M,\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M'''\rangle))$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\gamma_{n-p+2}(M,\gamma_{p-1}\big(M'',\langle M,M''\rangle)\big)\\
&\quad=\gamma_{n-p+1}\big(M,[M,\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M''\rangle)]\big)\\
&\quad=\gamma_{n-p+1}\big(M,[M'*M'',\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M''\rangle)]\big)\\
&\quad=\gamma_{n-p+1}\big(M,[M',\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M''\rangle)]\,[M'',\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M''\rangle)]\big)\\
&\quad=\gamma_{n-p+1}\big(M,[M',\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M''\rangle)]\big)\,\gamma_{n-p+1}\big(M,\gamma_p(M'',\langle M,M''\rangle)\big).
\end{aligned}$$

Ces égalités sont vérifiées parce que le sous-groupe $\langle M,M''\rangle$ est normal. Or nous avons :

$$\big[M',\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M''\rangle)\big]=\big\langle\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M''\rangle),M'\big\rangle\subset\langle M,M'\rangle\,;$$

donc $\gamma_{n-p+1}(M,[M',\gamma_{p-1}(M'',\langle M,M''\rangle)])$ est contenu dans $\langle M,M'\rangle$.

L'élément $x^{(p-1)}$ est congru à un élément

$$x^{(p)}\in\gamma_{n-p+1}\big(M,\gamma_p(M'',\langle M,M''\rangle)\big)$$

et, toujours pour les mêmes raisons, $x^{(p)}$ est dans $[M',M'']$.

Pour $n=p$, nous obtenons :

$$x\equiv x^{(n)}\in\gamma_n\big(M'',\langle M,M''\rangle\big)\cap[M',M''].\quad\square$$

COROLLAIRE 4.7. — *Soient*

$$A_1=\bigcap_{n\geq1}\gamma_n\Big(M'',\frac{P_2(M)}{\langle M,M'\rangle}\Big),\quad A_2=\bigcap_{n\geq1}\gamma_n\Big(M''^{\mathrm{cr}},\frac{P_2(M)}{\langle M,M'\rangle P_2(M'')}\Big).$$

Alors le noyau A des morphismes f et f' de (3.13) *vérifie les égalités* $A = A_1 = A_2$.

Démonstration. — D'après le théorème 4.6, on a $A \subseteq A_1$ et $A \subseteq A_2$. Par ailleurs, on a

$$f(A_1) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(M'') = (1)$$

car le groupe M'' est libre. De même, on a

$$f'(A_2) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(M''^{\mathrm{cr}}), \quad \partial''^{\mathrm{cr}} \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(M''^{\mathrm{cr}}) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(P) = (1)$$

donc

$$\bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(M''^{\mathrm{cr}}) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial''^{\mathrm{cr}}).$$

Or, le groupe P étant libre, on a (*cf.* [28])

$$\mathrm{Ker}(\partial''^{\mathrm{cr}}) \cap \gamma_2(M''^{\mathrm{cr}}) = (1). \quad \square$$

COROLLAIRE 4.8.— *Les égalités suivantes sont vérifiées dans le module croisé* ∂'^{cr} :

$$A = \mathrm{Ker}(\partial'^{\mathrm{cr}}) = \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(P'', M'^{\mathrm{cr}}) = \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(P, M'^{\mathrm{cr}})$$

où le groupe P'' a été défini en (3.9).

Démonstration. — Le morphisme $g_\bullet$ de (3.14) donne les inclusions suivantes :

$$A \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(P'', M'^{\mathrm{cr}}) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(P, M'^{\mathrm{cr}}).$$

L'inclusion $\bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(P, M'^{\mathrm{cr}}) \subseteq A$ se vérifie comme en (4.7). $\square$

Soit

$$C' = (M'^{\mathrm{cr}})^{\mathrm{ab}}$$

l'abélianisé du groupe M'^{cr}. L'opération de P sur M'^{cr} fait du groupe abélien C' un $\mathbb{Z}[\pi']$-module, libre puisque M'^{cr} est un P-module croisé libre [33]. Le groupe P étant libre, il y a un isomorphisme, non canonique et non équivariant, $M'^{\mathrm{cr}} \cong A \times P'$ (*cf.* [36], [28]); donc le groupe A, qui est central dans M'^{cr}, s'identifie à un sous-module de C' (*cf.* [11], [33]).

Soit $I\pi'$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\pi']$.

COROLLAIRE 4.9. — *On a l'inclusion* $A \subseteq \bigcap_{n\geq 1}(I\pi')^n C'$. □

REMARQUE 4.10. — Si, dans le corollaire 4.9, l'inclusion pouvait être remplacée par une égalité ou, plus généralement, si on pouvait montrer l'existence d'un idéal bilatère J de $\mathbb{Z}[\pi']$ tel que $A = JC'$, le problème de Whitehead serait résolu. En effet, d'après un théorème de Passi [29], le $\mathbb{Z}[\pi']$-module $P'^{\mathrm{ab}} \cong C/A$, où le sous-groupe P' de P a été défini en (3.9), est fidèle, c'est-à-dire $\mathrm{Ann}(P'^{\mathrm{ab}}) = (0)$. Or nous avons l'inclusion

$$J \subseteq \mathrm{Ann}(P'^{\mathrm{ab}}).$$

Dans le cas où le P-module précroisé M' est engendré par un élément, le module C' s'identifie à $\mathbb{Z}[\pi']$ et A s'identifie à un idéal à gauche dont on vérifie qu'il est bilatère (le lemme 3.14 de [30, chap. 4] donné pour l'annulateur d'un idéal s'étend facilement à l'annulateur d'un $\mathbb{Z}[\pi']$-module). On retrouve ainsi un théorème de Cockcroft [12].

THÉORÈME 4.11. — *Si le P-module précroisé M' est engendré par un élément, il est asphérique.* □

COROLLAIRE 4.12. — *Soient X un CW-complexe asphérique de dimension 2 et Y un sous-CW-complexe. Si le CW-complexe Y ne comprend qu'une 2-cellule, il est asphérique.* □

REMARQUE 4.13. — Le théorème de Cockcroft est énoncé dans [12] en supposant le CW-complexe X fini, ce qui revient à supposer le groupe P et le P-module précroisé M de types finis. Mais sa démonstration ne nécessite pas ces restrictions. Ce résultat a été généralisé depuis par Howie [22].

La propriété suivante, due indépendamment à Bogley et Gutiérrez [7] et à G. Ellis [19] donne le lien avec le résultat de Bogley [5] signalé dans l'introduction.

THÉORÈME 4.14. — *Supposons que le P-module précroisé ∂' est le coproduit $M' = U * V$ de deux modules précroisés asphériques. Soient $R = \partial'(U)$ et $S = \partial'(V)$. Alors les groupes suivants sont isomorphes :*

$$\mathrm{Ker}(\partial'^{\mathrm{cr}}) \cong \frac{R\cap S}{[R,S]} \cdot \quad \square$$

Par le corollaire 4.7, on a :

$$\frac{R\cap S}{[R,S]} \cong \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n\Big(P, \frac{R\cap S}{[R,S]}\Big) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \gamma_n\Big(\frac{P}{[R,S]}\Big).$$

C'est le théorème de Bogley.

DÉFINITION 4.15. — Un module croisé $G \to H$ est dit *résiduellement nilpotent* si $\bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(H,G) = (1)$.

Le corollaire 4.8 amène à poser la question suivante.

QUESTION 4.16. — *Sous quelles conditions un module croisé totalement libre est-il résiduellement nilpotent ?*

Le groupe $A = \operatorname{Ker}(\partial'^{\mathrm{cr}})$ étant un $\mathbb{Z}[\pi']$-module, toute réponse à cette question est liée à la structure du groupe π' et il est hasardeux d'avancer des conjectures trop générales.

CONJECTURE FORTE 4.17. — *Si $H_1(\operatorname{Coker}\partial')$ est un groupe abélien libre et si $H_2(\operatorname{Coker}\partial') = 0$, le module croisé ∂'^{cr} est résiduellement nilpotent.*

Une démonstration de cette conjecture entraînerait une réponse affirmative à la question de Whitehead car on peut supposer le module précroisé ∂ contractible et donc $\pi^0 = \pi'$. La nullité éventuelle de $H_n(\pi')$ ou $H_n(\pi^0)$ n'étant actuellement pas connue même pour $n = 3$, une démonstration de la conjecture suivante ne permettrait pas de répondre à la question de Whitehead mais représenterait un pas important dans cette direction.

CONJECTURE FAIBLE 4.18. — *Si $H_1(\operatorname{Coker}\partial')$ est un groupe abélien libre et si $H_n(\operatorname{Coker}\partial') = 0$ pour $n \geq 2$, le module croisé ∂'^{cr} est résiduellement nilpotent.*

REMARQUE 4.19. — Comme un module précroisé vérifiant les hypothèses de l'une ou l'autre conjecture n'est pas *a priori* forcément inclus dans un module précroisé asphérique, une réponse affirmative à la question de Whitehead ne démontre pas ces conjectures.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (J.F.). — *A new proof of a theorem of W.H. Cockroft*, J. London Math. Soc., t. **30**, 1955, p. 482–488.

[2] BAER (R.). — *Representations of groups as quotient groups III*, Trans. A.M.S., t. **58**, 1945, p. 390–419.

[3] BAUES (H.J.). — *Algebraic homotopy.* — Cambridge Studies on Advanced Mathematics **15**, Cambridge University Press, Cambridge 1989.

[4] BAUES (H.J.) and CONDUCHÉ (D.). — *The central series for Peiffer commutators in groups with operators*, J. Algebra, t. **133**, 1990, p. 1–34.

[5] BOGLEY (W.A.). — *An embedding for π_2 of a subcomplex of a finite contractible two-complex*, Glasgow Math J., t. **33**, 1991, p. 365–371.

[6] BOGLEY (W.A.). — *On J.H.C. Whitehead's asphericity question in « Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory »*, C. Hog-Angeloni, W. Metzler and A.J. Sieradski editors. — London Math. Soc., Lecture Note Series **197**, 1993, p. 309-334, Cambridge University Press, Cambridge.

[7] BOGLEY (W.A.) and GUTIÉRREZ (M.A.). — *Mayer-Vietoris sequences in homotopy of 2-complexes and in homology of groups*, J. Pure Applied Algebra, t. **77**, 1992, p. 39–65.

[8] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative, chapitres I à IV*. — Masson, Paris, 1985.

[9] BRANDENBURG (J.) and DYER (M. N.). — *On J.H.C. Whitehead's aspherical question I*, Comm. Math. Helv., t. **56**, 1981, p. 431–446.

[10] BROWN (R.). — *Coproducts of crossed P-module : Applications to second homotopy groups and to the homology of groups*, Topology, t. **23**, 1984, p. 337–345.

[11] BROWN (R.) and HUEBSCHMANN (J.). — *Identities among relations in « Low dimensional Topology »*, R. Brown and T.L. Thickstun editors. — London Math. Soc. Lecture Note Series **48**, 1982, p. 153-202, Cambridge University Press, Cambridge.

[12] COCKCROFT (W.H.). — *On two dimensional aspherical complexes*, Proc. London Math. Soc., t. **(3)**, 4, 1954, p. 375–384.

[13] COHN (P. M.). — *Generalization of a theorem of Magnus*, Proc. London Math. Soc., t. **(3)**, 2, 1952, p. 297–310.

[14] CONDUCHÉ (D.). — *Modules croisés généralisés de longueur* 2, J. Pure Applied Algebra, t. **34**, 1984, p. 155–178.

[15] CONDUCHÉ (D.) et ELLIS (G.J.). — *Quelques propriétés homologiques des modules précroisés*, J. Algebra, t. **123**, 1989, p. 327–335.

[16] CURTIS (E.B.). — *Simplicial homotopy theory*, Advances in Math., t. **6**, 1971, p. 107–209.

[17] DYER (M.N.). — *Crossed Modules and Π_2 Homotopy Modules in « Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory »*, C. Hog-Angeloni, W. Metzler and A. J. Sieradski editors. — London Math. Soc. Lecture Note Series **197**, 1993, p. 309-334, Cambridge University Press, Cambridge.

[18] DYER (M.N.). — *Subcomplexes of two-complexe and projectives crossed modules in « Combinatorial Group Theory and Topology »*, S.M. Gersten and J. Stallings editors, Ann. of Math. Studies, t. **111**, 1987, p. 255–264.

[19] ELLIS (G.J.). — *Homology of 2-types*, J. London Math. Soc., t. **46**, 1992, p. 1–27.

[20] ELLIS (G.J.) and PORTER (T.). — *Free and projective crossed modules and the second homology group of a group*, J. Pure Appl. Algebra, t. **40**, 1986, p. 27–31.

[21] GUTIÉRREZ (M.A.) and RATCLIFFE (J.G.). — *On the second homotopy group*, Quart. J. Math. Oxford, t. **(2)**, 32, 1981, p. 45–55.

[22] HOWIE (J.). — *On locally indicable groups*, Math. Z., t. **180**, 1982, p. 445–461.

[23] HUEBSCHMANN (J.). — *Aspherical 2-complexes and an unsettled problem of J.H.C. Whitehead*, Math. Ann., t. **258**, 1981, p. 17–37.

[24] ILLUSIE (L.). — *Complexe cotangent et déformation, tome 2.* — Lecture Notes in Math. **283**, Springer, Berlin, 1972.

[25] KAN (D.M.). — *A relation between CW-complexes and free groups*, Amer. J. Math., t. **81**, 1959, p. 518–528.

[26] LAMOTKE (K.). — *Semisimpliziale algebraische Topologie*, Grundlehren der Math. Wiss., t. **167**, Springer, Berlin, 1968.

[27] MAY (J.P.). — *Simplicial objects in algebraic topology.* — Math. Studies, **11**, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[28] PAPAKYRIAKOPOULOS (C.D.). — *Attaching 2-dimensional cells to a complex*, Ann. Math., t. **78**, 1963, p. 205–222.

[29] PASSI (I.B.S.). — *Annihilators of relation modules II*, J. Pure Appl. Algebra, t. **6**, 1975, p. 235–237.

[30] PASSMAN (D.S.). — *The algebraic structure of group rings.* — Pure and Appl. Math., vol. XX, J. Wiley and Sons, New York, 1979.

[31] PEIFFER (R.). — *Uber Identitäten zwischen Relationen*, Math. Ann., t. **121**, 1949, p. 67–99.

[32] QUILLEN (D.). — *Spectral sequence of a double semi-simplicial group*, Topology, t. **5**, 1966, p. 155–157.

[33] RATCLIFFE (J.G.). — *Free and projective crossed modules*, J. London Math. Soc., t. **22**, 1980, p. 66–74.

[34] STALLINGS (J.). — *Homology and Central series of groups*, J. Algebra, t. **2**, 1965, p. 770–787.

[35] WHITEHEAD (J.H.C.). — *On adding relations to homotopy groups*, Ann. Math., t. **42**, 1941, p. 409–428.

[36] WHITEHEAD (J.H.C.). — *Note on a previous paper intitled « On adding relations to homotopy groups »*, Ann. Math., t. **47**, 1946, p. 806–810.