BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDELGHANI EL MAZOUNI

# Quotient de la variété des points infiniment voisins d'ordre 9 sous l'action de $PGL_3$

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 124, nº 3 (1996), p. 425-455
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_3_425_0>

*Bull. Soc. math. France,*
124, 1996, p. 425–455.

# QUOTIENT DE LA VARIÉTÉ DES POINTS INFINIMENT VOISINS D'ORDRE 9 SOUS L'ACTION DE $\mathrm{PGL}_3$

PAR

ABDELGHANI EL MAZOUNI (*)

RÉSUMÉ. — On montre que le quotient par le groupe projectif de la variété des points infiniment voisins d'ordre $n$ des points du plan est rationnel. On décrit précisément ce quotient pour $n = 8$ et $n = 9$. Pour $n = \frac{1}{2}d(d+3)$, on obtient la rationalité du quotient sous $\mathrm{PGL}_3$ de la courbe plane universelle de degré $d$. En particulier, pour $d = 4$ on a la rationalité de l'espace des modules $\mathcal{M}_3^1$ des courbes de genre 3 avec point marqué.

ABSTRACT. — The quotient of the variety of infinitely near points, of order $n$, to points of the plane by the projective group is shown to be rational. A precise description of it is given when $n = 8$ and $n = 9$. For $n = \frac{1}{2}d(d+3)$ we get the rationality of the quotient of the universal plane curve of degree $d$ by $\mathrm{PGL}_3$. This gives for $d = 4$, the rationality of the moduli space $\mathcal{M}_3^1$ of pointed curves of genus 3.

## Introduction

Il s'agit de comprendre la thèse *Sur les invariants différentiels* de G.H. Halphen (1878). On s'intéresse à l'action du groupe projectif $\mathrm{PGL}_3$ sur l'ensemble des germes de courbe analytique lisse en un point de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, ou sur la variété algébrique $S_n^0$ des « points épais d'ordre $n$ » (ou germes tronqués à l'ordre $n$) de courbe lisse. Pour $n \leq 7$, cette action a un nombre fini d'orbites. Des invariants apparaissent pour $n \geq 8$. Halphen les étudie dans une carte locale de $S_n^0$ isomorphe à $\mathbb{C}^{n+1}$ (*cf.* 1.3) et montre qu'ils forment un anneau bigradué $\mathcal{H}_n$, dont il fait une étude exhaustive pour $n \leq 10$. Il obtient aussi quelques résultats valables quel que soit $n$, que nous présentons au § 1 (théorème 1.1) et qui impliquent

(*) Texte reçu le 23 décembre 1994, accepté le 12 juillet 1995.
A. EL MAZOUNI, Université des Sciences et Technologies de Lille, UFR de Mathématiques Pures et Appliquées, URA au CNRS 0751, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France). Email : mazouni@gat.univ-lille1.fr.

Mots clés : points infiniment voisins – action de $\mathrm{PGL}_3$ – invariants différentiels – espaces des modules – rationalité.

que le quotient de $S_n^0$ sous $\mathrm{PGL}_3$ est toujours une variété rationnelle. Pour $n = \frac{1}{2}d(d+3)$, ceci équivaut à la rationalité de la variété de modules des courbes planes de degré $d$ munies d'un point marqué (le cas $d = 4$ est traité, fort différemment et avec de nombreuses informations supplémentaires, dans [9]).

Nous avons consacré beaucoup d'efforts à l'essai dans ce cadre des méthodes de « Geometric invariant theory » de [11]. Nous constatons que la théorie de la stabilité ne s'applique pas à $S_n^0$ pour $n \geq 8$ (§ 2, proposition 2.4) et qu'il n'existe pas de bon quotient projectif d'un ouvert $\mathrm{PGL}_3$-invariant de $S_9^0$ (théorème 5.1). Il existe toutefois une surface projective normale $S$, rationnelle à singularités isolées et rationnelles, dont le groupe des classes de diviseurs de Weil $\mathrm{Cl}(S)$ peut être identifié à $\mathbb{Z}^2$ de sorte que l'anneau bigradué $\bigoplus_{\mathcal{L}\in \mathrm{Cl}(S)} H^0(\mathcal{L})$ soit isomorphe à $\mathcal{H}_9$. (Cette surface n'est pas mentionnée dans [8], mais nous avons utilisé de manière cruciale les calculs de [8].) La surface $S$ est « birationnellement » le quotient de $S_9^0$ par $\mathrm{PGL}_3$ mais la correspondance du passage au quotient n'est un morphisme en aucun point de la fibre d'un certain point singulier $O$ de $S$.

Je tiens à remercier Laurent Gruson pour l'aide qu'il a apportée pour la réalisation de ce travail.

## 1. Action de $G$ sur $S_n$

Par un *point infiniment voisin d'ordre $n$* d'un point $x_1$ d'une variété lisse $S_1$, on entend habituellement la donnée d'une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vérifiant la condition de récurrence suivante : $x_2$ est un point de la fibre exceptionnelle de l'éclatement $S_1^{(2)}$ de $x_1$ dans $S_1$, on définit de proche en proche l'éclatement $S_1^{(i+1)}$ de $x_i$ dans $S_1^{(i)}$ et l'on demande que $x_{i+1}$ soit un point de la fibre exceptionnelle de $S_1^{(i+1)}$ pour $2 \leq i \leq n$.

Dans le cas où $S_1$ est le plan projectif complexe $\mathbb{P}$, on étend l'action du groupe des automorphismes $\mathrm{PGL}_3$ de $\mathbb{P}$, à l'espace des points infiniment voisins d'ordre $n$ pour $n \geq 1$. Le but de ce travail est de chercher un bon quotient sous cette action pour $n = 9$.

### 1.1. Définition de $S_n$.

Soient :

- $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 ;
- $\mathbb{P} = P(V^\vee) = \mathrm{Proj}\,\mathrm{Sym}\, V$ ;
- $G = \mathrm{PGL}(V^\vee)$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}$.

Rappelons (voir [2], [3]) la définition de la variété $S_n$ des points infiniment voisins d'ordre $n$ de points de $\mathbb{P}$. On pose :

$$S_1 = \mathbb{P}, \quad S_2 = \operatorname{Proj}_{S_1} \operatorname{Sym} \Omega^1_{S_1}.$$

La variété $S_2$ peut être identifiée à « la correspondance d'incidence point-droite ». De plus, on a une fibration $p_2 : S_2 \to S_1$ de fibre $\mathbb{P}^1$.

Par récurrence, supposons que $p_n : S_n \to S_{n-1}$ est une fibration de fibre $\mathbb{P}^1$, avec $S_n = \operatorname{Proj}_{S_{n-1}} \operatorname{Sym} E_{n-1}$ où $E_{n-1}$ est un quotient de rang 2 de $\Omega^1_{S_{n-1}}$. La donnée d'un point $u$ de $S_n$ détermine une droite dans l'espace tangent $T_{p_n(u)}(S_{n-1})$. Notons $\langle u \rangle$ cette droite. On pose :

$$(E_n)_u = \mathrm{d}p_n(u)^{-1}\big(\langle u \rangle\big).$$

C'est un plan de $T_u(S_n)$ (appelé *plan focal* en $u$) où $\mathrm{d}p_n(u)$ est l'application tangente de $T_u(S_n)$ dans $T_{p_n(u)}(S_{n-1})$.

D'une autre façon : posons $S_1 = \mathbb{P}$ et $S_2 = \operatorname{Proj}_{S_1} \operatorname{Sym} \Omega^1_{S_1}$. Par récurrence supposons que $S_n = \operatorname{Proj}_{S_{n-1}} \operatorname{Sym} E_{n-1}$ où $E_{n-1}$ est un quotient de $\Omega^1_{S_{n-1}}$. On a les suites exactes suivantes :

$$0 \to p_n^* \Omega^1_{S_{n-1}} \longrightarrow \Omega^1_{S_n} \longrightarrow \Omega^1_{S_n/S_{n-1}} \to 0,$$

$$0 \to \Omega^1_{S_n/S_{n-1}} \longrightarrow p_n^*(E_{n-1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{S_n}(1) \to 0$$

où $\mathcal{O}_{S_n}(1)$ désigne le quotient tautologique de $p_n^*(E_{n-1})$. Donc

$$S_{n+1} = \operatorname{Proj}_{S_n} \operatorname{Sym} E_n$$

où $E_n$ est le quotient de rang 2 de $\Omega^1_{S_n}$ défini par le « carré cocartésien » :

$$\begin{array}{ccc}
p_n^* \Omega^1_{S_{n-1}} & \longrightarrow & \Omega^1_{S_n} \\
\downarrow & & \\
p_n^*(E_{n-1}) & & \Big\downarrow \\
\downarrow & & \\
\mathcal{O}_{S_n}(1) & \longrightarrow & E_n.
\end{array}$$

Remarquons qu'on a la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathcal{O}_{S_n}(1) \longrightarrow E_n \longrightarrow \Omega^1_{S_n/S_{n-1}} \to 0.$$

### 1.2. Action de $G$ sur $S_n$.

Le groupe $G$ agit transitivement sur $S_1 = \mathbb{P}$ et agit sur $TS_1$ (fibré tangent à $S_1$) de la manière suivante.

Soit $m \in S_1$, représenté par $(x_0, y_0, z_0)$ (nous supposons $z_0 \neq 0$) ; soit $v$ un vecteur tangent de $T_m(S_1)$, *i.e.* il existe $(x(t), y(t), z(t))$ (avec $z(t) \neq 0$ pour $t$ voisin de zéro) tel que

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{x(t)}{z(t)}\Big)_0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{y(t)}{z(t)}\Big)_0\Big) = v.$$

Soit $g \in G$ qui transforme $m$ en $gm$ et le vecteur tangent $v$ en le vecteur tangent en $gm$ de la courbe en $t = 0$

$$g\big(x(t), y(t), z(t)\big),$$

d'où une action de $G$ sur $S_2 = \operatorname{Proj}_{S_1} \operatorname{Sym} \Omega^1_{S_1}$. Le groupe $G$ transforme plan focal en plan focal (le plan focal en un point de $S_2$ est l'image inverse d'une droite tangente en un point de $S_1$). L'action de $G$ s'étend à $S_3 = \operatorname{Proj}_{S_1} \operatorname{Sym} E_2$. Par récurrence, supposons que $G$ agit sur $S_{n-1}$ et $S_n$ ; l'action de $G$ induite sur $\operatorname{Proj}(TS_n)$ envoie plan focal sur plan focal dans $S_n$ d'où l'action de $G$ sur $S_{n+1}$.

On note $S_n^0$ l'ouvert $G$-stable de $S_n$ formé des points infiniment voisins sur un germe de courbe lisse de $\mathbb{P}$. Cet ouvert (qui à l'exception d'un passage de la démonstration du théorème 1.1, sera seul utilisé dans la suite) est isomorphe au sous-schéma de $\operatorname{Hilb}(\mathbb{P})$ formé des points épais d'ordre $n$ sur une courbe lisse (*i.e.* définissable dans l'anneau local $\mathcal{O}_m$ d'un point $m$ de $\mathbb{P}$ par l'idéal $(f, g^n)$ où $(f, g)$ engendre l'idéal maximal de $\mathcal{O}_m$ : la courbe lisse a pour équation $f$) (voir [2]).

### 1.3. Définition d'une carte locale de $S_n^{\mathrm{o}}$.

On choisit une base de $V$, *i.e.* une identification de $\mathbb{P}$ au « complété » projectif du plan affine $\mathbb{C}^2$. On définit une immersion ouverte de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans $S_n^0$, le point $(x, a_0, \dots, a_{n-1})$ est transformé en le point $(x, a_0)$ épaissi $n$ fois sur la courbe lisse de $\mathbb{C}^2$ d'équation :

$$Y = a_0 + a_1(X - x) + \cdots + a_{n-1}(X - x)^{n-1}.$$

L'image de cette immersion est formée de points épais « à distance finie » et de direction tangentielle « non verticale ». La carte locale ainsi obtenue joue un rôle fondamental dans la suite.

Les images de cet ouvert par action des éléments de $G$ recouvrent $S_n^0$.

**1.4. Wronskiens.**

Pour $d \geq 1$, définissons une hypersurface $W_d$ de $S_n$ $(n = C^2_{d+2})$, le $d$-ième wronskien. Le $d$-ième plongement de Véronèse de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}_{n-1}$ induit un plongement de $S^0_n$ dans le schéma de Hilbert de points épais d'ordre $n$ sur une courbe lisse de $\mathbb{P}_{n-1}$. La condition d'être situé dans un hyperplan définit une hypersurface de ce dernier schéma. Le $d$-ième wronskien est l'adhérence dans $S_n$ de l'image réciproque dans $S^0_n$ de cette hypersurface.

Son équation dans la carte 1.3 est le déterminant à $C^2_{d+1}$ lignes et colonnes obtenu comme suit. Soit

$$y = \sum_{i \geq 2} a_i x^i$$

le développement de Taylor d'un germe de courbe en $(0,0)$ à tangente horizontale paramétrée par l'abscisse. Écrivons le développement de Taylor de $y^k$ sous la forme $\sum_{i \geq 2} a^k_i x^i$. Par ce plongement de degré $d$, le point de coordonnées $(x, y, z)$ de $\mathbb{P}$ est envoyé sur le point de $\mathbb{P}_{n-1}$ de coordonnées

$$(z^d, z^{d-1}x, \ldots, z^{d-1}y, z^{d-2}xy, \ldots, x^{d-1}y, \ldots, y^d)$$

Supposons $z = 1$; la condition d'être situé sur un hyperplan se traduit par la nullité du déterminant suivant :

$$\begin{array}{c|cccccc|ccc}
 & 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^d & x^{d+1} & \ldots & x^{n-1} \\
\hline
1 & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & I & & & & O & \\
x^d & & & & & & & & & \\
\hline
y & 0 & 0 & a_2 & a_3 & \ldots & a_d & & & \\
xy & 0 & 0 & 0 & a_3 & \ldots & a_{d-1} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
x^{d-1}y & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \vdots & & & \\
y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \vdots & & W_d & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
x^{d-2}y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
y^d & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & & &
\end{array}$$

où :

- $I$ est la matrice carrée identité d'ordre $d+1$,
- $O$ la matrice nulle à $d+1$ lignes et $\frac{1}{2}d(d+1)$ colonnes,
- $W_d$ est le déterminant d'ordre $d(d+\frac{1}{2})$ :

$$W_d = \begin{vmatrix} a_{d+1} & a_{d+2} & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_d & a_{d+1} & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{n-d} \\ a_{d+1}^2 & a_{d+2}^2 & \cdots & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_3^2 & a_4^2 & \cdots & \cdots & a_{n-d+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{d+1}^d & a_{d+2}^d & \cdots & \cdots & a_{n-1}^d \end{vmatrix}$$

EXEMPLE. — On pose $U = W_1 = a_2$ et

$$W_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2^2 & 2a_3 \end{vmatrix} = UV, \quad \text{où} \quad V = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2 & 2a_3 \end{vmatrix}.$$

REMARQUE.
Plus généralement, si $m \geq C_{d+2}^2$, on peut considérer la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{d+1} & a_{d+2} & \cdots & \cdots & a_{m-1} \\ a_d & a_{d+1} & \cdots & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{m-d} \\ a_{d+1}^2 & a_{d+2}^2 & \cdots & \cdots & a_{m-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_3^2 & a_4^2 & \cdots & \cdots & a_{m-d+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{d+1}^d & a_{d+2}^d & \cdots & \cdots & a_{m-1}^d \end{pmatrix}.$$

La sous-variété de $S_m^0$ définie par les mineurs maximaux de cette matrice est le lieu des points épais d'ordre $m$ sur une courbe de degré $d$. Elle est invariante par $G$ et on la note $W_{d,m}$.

EXEMPLE.

- La variété $W_{1,m}$, où $m \geq 3$, est définie par l'idéal

$$(a_2, \ldots, a_{m-1}).$$

- La variété $W_{2,9}$ est définie par les mineurs maximaux de :

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 \end{pmatrix}.$$

**1.5. Description d'un ouvert de $S_n$.**

Soit $S_n^{00}$ (avec $n \geq 6$) l'ouvert de $S_n^0$ défini par l'inéquation $UV \neq 0$.

THÉORÈME 1.1.

(i) *L'ouvert $S_7^{00}$ est le quotient de $G$ par un sous-groupe $\gamma$ d'ordre* 3.

(ii) *Pour $n \geq 8$, l'ouvert $S_n^{00}$ est $G$-isomorphe au fibré vectoriel de rang $(n-7)$ sur $S_7^{00}$, quotient de $G \times \mathbb{C}^{n-7}$ (où l'action de $G$ sur le second facteur est triviale) par l'action (à droite) de $\gamma$ définie sur le second facteur par la matrice diagonale*

$$(\chi, 1, \chi^2, \chi, 1, \ldots)$$

(*où $\chi$ est un caractère non trivial de $\gamma$*).

*Démonstration.* — Soit $X$ l'hypersurface $G$-invariante de $S_8^{00}$, lieu du noeud d'une cubique nodale variable de $\mathbb{P}$, épaissi huit fois sur une des branches. Son équation $\Delta$ dans les coordonnées ci-dessus est obtenue en éliminant les coefficients de l'équation de la cubique,

$$y(ax + by) + cx^3 + dx^2y + exy^2 + fy^3$$

dans le système qui traduit la nullité du développement limité d'ordre 8 résultant de la substitution

$$y = a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$$

dans cette équation. On trouve :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ -a_2^2 & 0 & a_3^2 & 2a_3a_4 & 2a_3a_5 + a_4^2 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 3a_2a_3 & 3a_2a_4 + 3a_3^2 \end{vmatrix}.$$

C'est un polynôme de degré 1 en $a_7$ de coefficient dominant $U^4V$ ; on en déduit d'abord que tout point de $S_7^{00}$ est sur une branche nodale unique de cubique. Le groupe $G$ agit transitivement sur ces branches. (La classification des cubiques planes rationnelles sous $\mathrm{PGL}_3$ est équivalente à la classification des points de $\mathbb{P}_3$ sous le groupe des automorphismes de la cubique gauche, modèle normal de la cubique rationnelle. De plus, le stabilisateur d'une cubique nodale s'identifie au groupe symétrique $S_3$ (des permutations des points d'inflexion), dont une transposition échange les deux branches du point double.) Fixons l'une d'elles, par exemple la branche infinie parabolique de la cubique $y = x^2 - x^{-1}$ du plan affine $\mathbb{C}^2$, et notons $m$ le point base de $S_7^{00}$ correspondant. Le stabilisateur $\gamma$ de $m$ dans $G$ est d'ordre 3, il agit linéairement sur $\mathbb{C}^2$ par la matrice diagonale $(\chi, \chi^2)$ où $\chi$ est un caractère non trivial de $\gamma$, et dans la carte locale ci-dessus par la matrice diagonale

$$(\chi, 1, \chi^2, \ldots, \chi^{2-i} \ldots).$$

On obtient donc (i).

D'après [3], le quotient $E_n$ de $\Omega^1_{S_n}$ factorise $\Omega^1_{S_n/S_{n-1}}$. Ce dernier définit l'hypersurface $Z_{n+1}$ de $S_{n+1}$, «nouvelle composante» de

$$Y_{n+1} = S_{n+1} - S^0_{n+1}$$

(les autres constituent l'image réciproque de $Y_n$ par la projection).

D'autre part, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{S_n}[Z_n] \longrightarrow E_n \longrightarrow \Omega^1_{S_n/S_{n-1}} \to 0$$

qu'on restreint à $S_n^0$ :

$$0 \to \mathcal{O}_{S_n^0} \longrightarrow (E_n)_{|S_n^0} \longrightarrow \Omega^1_{S_n^0/S_{n-1}^0} \to 0. \tag{1}$$

Cette suite exacte définit un élément de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{S_n^0}}\big(\Omega^1_{S_n^0/S_{n-1}^0}, \mathcal{O}_{S_n^0}\big) = H^1\big(T_{S_n^0/S_{n-1}^0}\big)$$

où

$$T_{S_n^0/S_{n-1}^0} = \big(\Omega^1_{S_n^0/S_{n-1}^0}\big)^{\vee}.$$

Comme $S^0_{n+1}$ est le complémentaire, dans l'image réciproque de $S_n^0$ dans $S_{n+1}$, du fermé défini par le quotient $\Omega^1_{S_n^0/S_{n-1}^0}$ de $(E_n)_{|S_0^n}$, le fibré en droites affines sur $S_n^0$ défini par l'élément de $H^1(T_{S_n^0/S_{n-1}^0})$ déduit de la suite exacte (1) s'identifie à $S^0_{n+1}$.

Posons :

$$S'_n = G \times_{S_7^{00}} S_n.$$

On va montrer par récurrence sur $n \geq 8$ que $S'_n$ est $G$-isomorphe au fibré trivial $G \times \mathbb{C}^{n-7}$.

Pour $n = 8$, on remarque que $E_7$ et $\Omega^1_{S_7/S_6}$ sont des quotients $G$-équivariants de $\Omega^1_{S_7}$. Leurs images réciproques sur $G$ sont donc des fibrés $G$-équivariants du fibré trivial de fibre $(\mathrm{Sl}(V^\vee))^\vee$ (dual de l'algèbre de Lie de $G$), ils sont eux-mêmes triviaux. Remarquons d'ailleurs que l'hypersurface $X$ fournit un scindage naturel de l'image réciproque de la suite (1) sur $G$ pour $n = 7$. Soit $A$ l'anneau des sections de $\mathcal{O}_G$ (faisceau structural de $G$). On vient de voir que l'anneau des sections globales de $S'_8$ est $A[\xi]$, où $\xi$ est une indéterminée invariante par $G$. L'image réciproque $X'$ de $X$ dans $S'_8$ définit un idéal $I$ de $A[\xi]$ tel que $A \xrightarrow{\sim} A[\xi]/I$ (localement, $I$ est engendré par un polynôme unitaire de degré 1). Quitte à remplacer $\xi$ par $(\xi - a)$ avec $a \in A$, on peut donc supposer que $\xi$ est un générateur de $I$, ce qui le caractérise (à homothétie près). On pose alors $\xi = i_8$.

Supposons maintenant $n > 8$. Tout revient à construire une section $G$-invariante de l'image réciproque $E'_{n-1}$ de $E_{n-1}$ sur $S'_{n-1}$ qui scinde la suite exacte (1). Il suffit pour cela de prendre l'image dans $E'_{n-1}$ de $di_{n-1}$ où $i_{n-1}$ est le dernier générateur construit de l'anneau des sections globales de $S'_{n-1}$.

Identifions $S'_n$ et $G \times \mathbb{C}^{n-7}$ ; alors $S^{00}_n$ est le quotient de $S'_n$ par $\gamma$ opérant (à droite) par :

$$\begin{aligned} S'_n \times \gamma &\longrightarrow S'_n \\ \big((g,v),h\big) &\longmapsto \big(gh, \rho(h)v\big) \end{aligned}$$

où $\rho$ est une représentation de $\gamma$ dans $\mathbb{C}^{n-7}$.

Pour identifier $\rho$, utilisons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (g,v) & \longmapsto & \big(h^{-1}gh, \rho(h)v\big) \\ S'_n & \longrightarrow & S'_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{00}_n & \longrightarrow & S^{00}_n \\ x & \longmapsto & h^{-1}x \end{array}$$

Soit $p$ un point de $S^{00}_n$ fixé par l'action (à gauche) de $\gamma$, par exemple le point $(0,0)$ de $\mathbb{C}^2$ épaissi sur $y = x^2 + x^5$, et soit $T$ l'espace tangent en $p$ à $S^{00}_n$. On a une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{C}^{n-7} \longrightarrow T \longrightarrow T' \to 0$$

où $T'$ est l'espace tangent à $S_7^{00}$ en l'image de $p$. On voit alors que $\rho(h)$ est la restriction à $\mathbb{C}^{n-7}$ de la dérivée en $p$ de $x \mapsto h^{-1}x$. Celle-ci a été identifiée plus haut conformément à l'énoncé du théorème. $\square$

## 2. L'anneau bigradué d'Halphen

On se propose d'expliciter l'anneau des fonctions $G$-invariantes sur $S_n^{00}$ dans la carte locale de 1.3 (identifiée au spectre de $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_{n-1}]$).

### 2.1. Calcul de Pic($S_n^0$).

On note :

- $A_n$ l'anneau $\mathbb{C}[t]/(t^n)$ ;
- $V_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{C}} A_n^\vee$ ;
- $G'$ le groupe algébrique produit semi-direct de $G_1'$ et $G_2'$, où $G_1'$ est le groupe des automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $A_n$ (il opère à droite sur $A_n$ ou sur $V_n^\vee$ par composition de développements limités lorsqu'on identifie ses éléments aux développements limités sans terme constant et de terme linéaire non nul) et où $G_2'$ est le groupe multiplicatif $A_n^*$ de $A_n$, sur lequel $G_1'$ agit par composition. Alors $G'$ agit (à droite) sur $V_n^\vee$ par :

$$\begin{aligned} V_n^\vee \times G' &\longrightarrow V_n^\vee \\ \big(v, (\varphi, u)\big) &\longmapsto u \cdot (v \circ \varphi). \end{aligned}$$

Cette action commute avec l'action évidente de $\mathrm{SL}(V^\vee)$.

Soit $U_n$ l'ouvert de l'espace affine $V_n^\vee$ formé des

$$v = v_0 + v_1 t + \dots + v_{n-1} t^{n-1} \quad \text{tels que } v_0 \wedge v_1 \neq 0.$$

On a un morphisme

$$\Pi_n : U_n \to S_n^0$$

qui transforme $v$ en le point épais $t = 0$ sur la courbe de $\mathbb{P}$ de représentation paramétrique $t \mapsto v(t)$.

Proposition 2.1. — *Le morphisme $\Pi_n$ est une fibration principale (au sens de la topologie de Zariski) de groupe structural $G'$.*

La démonstration est directe si l'on remarque qu'une section de $\Pi_n$ au-dessus de la carte locale de 1.3 existe : elle est définie dans $U_n$ par l'idéal des coefficients de $(x - t)$ et $(z - 1)$ (ici, $x$, $y$, $z$ désignent les trois fonctions coordonnées sur $V^\vee$).

Corollaire 2.1. — *Le groupe $\mathrm{Pic}(S_0^n)$ est naturellement isomorphe au groupe des caractères $\chi(G')$ de $G'$ (i.e. $\chi(G_1') \times \chi(G_2') = \mathbb{Z}^2$).*

Cela résulte de [11, p. 32], compte tenu du fait que $H^0(U_n, \mathcal{O}^*_{U_n}) = \mathbb{C}^*$ et $H^1(U_n, \mathcal{O}^*_{U_n}) = \{1\}$ (correspondant au fait que $U_n$ est un ouvert de $\mathbb{C}^{3n}$ dont le fermé complémentaire est de codimension 2). □

### 2.2. Définition des invariants différentiels d'Halphen.

Les invariants d'ordre $< n$ sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{n-1}]$ qui définissent une hypersurface dont l'adhérence dans $S_n$ est $G$-invariante.

PROPOSITION 2.2. — *Soit $P$ un invariant différentiel d'ordre $< n$.*

1) *Le polynôme $P$ est indépendant des variables $(x, a_0, a_1)$.*

2) *Le polynôme $P$ est bihomogène pour les graduations suivantes de $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{n-1}]$ :*

(*degré*) : *$x$ est de degré 0, les $a_i$ sont de degré 1 ;*
(*poids*) : *$x$ est de poids 0 et $a_i$ est de poids $i$.*

3) *Le $\mathcal{O}_{S_n^0}$-module inversible dont une section est l'adhérence de l'hypersurface d'équation $P$ est $\mathcal{O}_{S_n^0}(d+p, 3d)$.*

Recopions ici la démonstration d'Halphen (*cf.* [8, III, th. I–IV]).

*Démonstration.* — Commençons par regarder comment agit un élément $g$ de $G$ dans la carte locale 1.3. Si $g$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix},$$

le couple $(x, y)$ est transformé en $(X, Y)$ avec

$$X = \xi/\zeta, \quad Y = \eta/\zeta,$$

$$\xi = ax + by + c, \quad \eta = a'x + b'y + c', \quad \zeta = a''x + b''y + c''.$$

Le germe représenté par $(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ où $a_0 = y$ est transformé en le germe représenté par

$$\Big(X, Y, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}, \ldots, \frac{1}{(n-1)\,!}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}Y}{\mathrm{d}X^{n-1}}\Big)$$

par action de $g$ avec :

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\zeta\eta' - \eta\zeta'}{\zeta\xi' - \xi\zeta'}, \quad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}X^2} = \frac{2D\zeta^3 a_2}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^3},$$

$$\frac{\mathrm{d}^kY}{\mathrm{d}X^k} = \frac{k\,!\,D\zeta^{2k-1}a_k}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{k+1}} + \frac{\xi^{k+1}A}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{2k-1}},$$

où $D$ désigne le déterminant de $g$ et $A$ un élément de $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{k-1}]$ ($\xi'$ (resp. $\eta'$, $\zeta'$) désigne la dérivée de $\xi$ (resp. $\eta$, $\zeta$ ) par rapport à $x$).

Les transformations

$$\begin{aligned} X &= x + c, & Y &= y, \\ X &= x, & Y &= y + c', \\ X &= x, & Y &= a'x + y \end{aligned}$$

nous donnent la partie 1).

La transformation

$$X = ax, \quad Y = b'y$$

nous donne que le degré d'un terme quelconque d'un invariant différentiel par rapport à la lettre $y$, abstraction faite des indices de dérivation, est constant pour tous les termes de cet invariant.

Ce degré sera appelé le *degré de l'invariant* et sera noté $d$.

De même, en considérant la transformation

$$X = ax, \quad Y = y,$$

on obtient que la somme des indices de dérivation dans un terme quelconque d'un invariant différentiel est le même pour tous les termes.

Cette somme constante sera appelée le *poids de l'invariant* et notée $p$, d'où la partie 2).

Soit $P$ un élément de

$$\mathbb{C}\Big[X, Y, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}Y}{\mathrm{d}X^{n-1}}\Big]$$

vérifiant 1) et 2) de la proposition, c'est-à-dire ne contenant ni $X$, ni $Y$, ni la dérivée première de $Y$, dont tous les termes ont en outre un même degré $d$ et un même poids $p$. Les transformations précédentes nous donnent

$$P = \frac{D^d \zeta^{2p-d}}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{p+d}} \times Q + \frac{\zeta^\alpha}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^\beta} \times R$$

où $\alpha$, $\beta$ sont des entiers positifs, $Q$ désigne le même polynôme que $P$ sauf le changement des lettres et $R$ un élément de $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{n-2}]$. Si on suppose que $P$ est un invariant cela entraîne que $R$ est identiquement nul, d'où la partie 3). $\square$

Notons $\mathcal{H}_n$ le sous-anneau de $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_{n-1}]$, bigradué par le couple (degré, poids), formé des invariants différentiels d'ordre $< n$ et $\mathcal{H}$ la réunion des $\mathcal{H}_n$. Nous appellerons $\mathcal{H}$ l'*anneau bigradué d'Halphen.*

Les bidegrés de $U$, $V$, $\Delta$ dans $\mathcal{H}$ sont respectivement :

$$(1,2), \quad (3,9), \quad (8,24).$$

La proposition 2.2 montre que l'anneau $A^G(S_n^{00})$ des fonctions régulières $G$-invariantes sur $S_n^{00}$ est la partie homogène de bidegré $(0,0)$ de $\mathcal{H}_n[U^{-1}V^{-1}]$.

Explicitons maintenant le théorème 1.1 dans ces notations.

Soit d la dérivation de l'anneau $\mathbb{C}[x, a_0, \ldots, a_i, \ldots]$ définie par :

$$\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}a_i = (i+1)a_{i+1}.$$

LEMME 2.1.

1) *L'application* d *envoie* $(\mathcal{H}_n[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ *dans* $(\mathcal{H}_{n+1}[U^{-1}V^{-1}])_{01}$.

2) *Soit $C$ le modèle lisse d'une courbe à branches lisses de $\mathbb{P}$. On a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathcal{H}_n[U^{-1}V^{-1}]\big)_{00} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & \big(\mathcal{H}_{n+1}[U^{-1}V^{-1}]\big)_{01} \arrow[d] \\
K(C) \arrow[r] & \Omega^1_{K(C)/\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

*où les colonnes sont les restrictions à $C$ (ici $K(C)$ désigne le corps des fractions rationnelles sur $C$).*

*Démonstration.*

1) Cette partie résulte d'une remarque d'Halphen : si $A$ et $B$ sont deux invariants différentiels de même bidegré $(d,p)$ et d'ordre $< n$, $A\mathrm{d}B - B\mathrm{d}A$ est un invariant différentiel d'ordre $< n+1$, définissant l'hypersurface de $S_{n+1}^0$ formée de points épais tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le développement de $A + \lambda B$ (qui existe à l'ordre 1 en la variable $x$) soit nul.

2) La deuxième assertion est claire, une fois remarqué que la restriction à $C$ d'un élément de $(\mathcal{H}_k[U^{-1}V^{-1}])_{0\ell}$ est naturellement une section de $\omega^{\otimes \ell}$, ce qui est une version de [8, III, th. I–IV]. □

PROPOSITION 2.3. — *L'anneau $A(G)$ des fonctions régulières sur $G$ est isomorphe à $A(S_7^{00})[\sqrt[3]{V}]$.*

*Démonstration.* — On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A(S_7^{00}) \arrow[r] \arrow[d] & A(S_8^{00}) \arrow[d] & \\
A(G) \arrow[r] & A(S_8') \arrow[r] & A(S_8')/(i_8)
\end{tikzcd}$$

et on a vu que $i_8^3$ appartient à $A(S_8^{00})$. Il s'identifie donc à $\lambda\Delta^3/V^8$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ puisque $i_8$ et $\Delta$ ont les mêmes zéros et que $\Delta^3/V^8$ est une fonction $G$-invariante sur $S_8^{00}$.

Corollaire 2.2. — *Dans* $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_i, \dots][U^{-1}V^{-1}][v]$, *où* $v$ *est défini par* $v^3 = VU^{-3}$ *et muni du bidegré* $(0,1)$, *posons :*

$$i_8 = \frac{\Delta}{U^8 v^8}, \quad i_{k+1} = \frac{\mathrm{d} i_k}{v}.$$

*Alors* $(\mathcal{H}_k[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ *est le sous-anneau de l'anneau* $\mathbb{C}[i_8, \dots, i_h, \dots]$ *formé des éléments invariants par l'automorphisme :*

$$v \longmapsto wv \quad (w^3 = 1).$$

Ce corollaire montre en particulier que le corps des fractions rationnelles $G$-invariantes sur $S_n$ est une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$ (en appliquant un résultat de Fischer, *cf.* [5]).

Corollaire 2.3. — *Pour* $n = \frac{1}{2}d(d+3)$, *le quotient sous* $\mathrm{PGL}_3$ *de la « courbe universelle de degré* $d$ *» est rationnel.*

Pour $d = 4$, c'est le schéma de module $\mathcal{M}_3^1$ des courbes de genre 3 avec point marqué, *cf.* [10] ; sa rationalité est démontrée, par une autre méthode, dans [9].

Dans la suite de ce travail, on cherche un quotient projectif d'un ouvert $G$-stable de $S_n$. Remarquons qu'on ne peut pas appliquer la « Geometric invariant theory » de [11] :

Proposition 2.4. — *Pour tout* $\mathcal{O}_{S_n}$*-module ample* $\mathcal{L}$, *l'ensemble des points semi-stables relativement à* $\mathcal{L}$ *est vide.*

*Démonstration.* — En effet, si $C$ est le modèle lisse d'une courbe à branches lisses de $\mathbb{P}$, le morphisme de $C$ dans $\mathbb{P}$ se relève naturellement à $S_n^0$ et la restriction à $C$ de $\mathcal{O}_{S_n^0}(a,b)$ est $\omega_C^{\otimes a}(b)$. Si $C$ est une droite de $\mathbb{P}$, c'est donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(b-2a)$. En particulier, si $I$ est un invariant de bidegré $(d,p)$, il définit une section de $\mathcal{O}_{S_n^0}(d+p, 3d)$ dont le nombre d'intersection avec $\ell$ (droite) est $d-2p < 0$ (en fait on a toujours $p \geq 2d$). *A fortiori*, il n'existe pas de section invariante non nulle d'un faisceau ample sur $S_n$ (car celle-ci devrait couper positivement le relèvement naturel de $L$). $\square$

Remarque. — Le même argument montre que le complémentaire de l'ouvert affine $S_7^{00}$ dans $S_7$ n'est pas le support d'un diviseur ample.

## 3. Quotient de $S_8$ sous $G$

### 3.1 Description algébrique de $\mathcal{H}_8$.

PROPOSITION 3.1. — *On a*

$$\mathcal{H}_8 = \mathbb{C}[U, V, \Delta, H]/(2^8\Delta^3 - 3^3V^8 - U^4H),$$

*le bidegré de $H$ étant* $(20, 64)$.

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que $\mathcal{H}_8$ est factoriel et que :

$$\big(\mathcal{H}_8[U^{-1}V^{-1}]\big)_{00} = \mathbb{C}\Big[\frac{\Delta^3}{V^8}\Big].$$

Cherchons les éléments premiers de $\mathcal{H}_8$ : ce sont $U$, $V$, $\Delta$ et $a\Delta^3 + bV^8$ débarrassés éventuellement d'un facteur puissance de $U$ (en effet, quitte à multiplier par un monôme $U^aV^b\Delta^c$, on peut ramener tout élément premier bihomogène en bidegré $(0,0)$ dans $\mathcal{H}_8[U^{-1}V^{-1}]$, et les éléments premiers de $\mathbb{C}[\Delta^3/V^8]$ sont linéaires).

Il existe au plus une valeur de $(a, b)$ (dans $\mathbb{P}_1$ !) telle que $U$ divise $a\Delta^3 + bV^8$. Sur la courbe particulière $y = x^3$, on a :

$$U = 3x, \quad V = 2 \quad \text{et} \quad \Delta = 3\,;$$

donc il s'agit nécessairement de la combinaison $2^8\Delta^3 - 3^3V^8$. Dans la carte locale 1.3, si, dans $V$ et $\Delta$, on suppose $a_2 = 0$, ces deux déterminants se réduisent à leurs diagonales $2a_3^3$ et $3a_3^8$ et la combinaison $2^8\Delta^3 - 3^3V^8$ est nulle. Elle est donc divisible par le facteur $a_2$ qui est l'invariant $U$. Pour chercher l'exposant de $U$ dans $2^8\Delta^3 - 3^3V^8$, montrons le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Tout point de $S_n^0$, tel que $V \neq 0$ et $U \neq 0$ (resp. $U = 0$), admet trois (resp. un) représentants modulo $G$ de la forme :*

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_7x^7 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$

*dans laquelle $a_i$ est déterminé à multiplication près par $\lambda\mu^i$, avec $(\lambda, \mu)$ appartenant à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.*

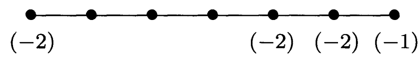
*Démonstration.* — Il est clair qu'il suffit de démontrer ce lemme pour $n = 7$, et, pour cela de prouver que par un point de $S_7^0$ tel que $V \neq 0$ et $U \neq 0$ (resp. $U = 0$), passent trois (resp. une) cubiques à rebroussement. En effet, si une telle cubique est trouvée on peut alors choisir les axes de coordonnées tels que le point $(0, 1, 0)$ soit le rebroussement, la droite $Z = 0$ soit la tangente de rebroussement, le point donné soit $(0, 0, 1)$ et la tangente en ce point soit $Y = 0$. L'assertion résulte du théorème 1 sous l'hypothèse $U \neq 0$. En effet, il existe trois éléments de $G$ transformant le point donné en le point $(0,0)$ épaissi six fois sur la cubique $y = x^2 + x^3$.

Indiquons une méthode unifiée pour traiter les deux cas du lemme.

Soit $\widetilde{P}$ la surface obtenue par sept éclatements consécutifs correspondant au point donné de $S_7$. C'est une surface de Del Pezzo singulière de degré 2 (les sept points sont en l'occurrence en position « presque générale » au sens de [4]), donc un revêtement double de $\mathbb{P}_2$ ramifié le long d'une quartique. De plus, cette surface admet un point double de type $A_6$ (resp. $E_7$) correspondant :

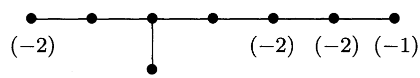
• dans le premier cas ($V \neq 0, U \neq 0$), à la contraction de la partie $(-2)$ du diviseur image réciproque du point $(0,0)$ :

$(A_6)$




• dans le deuxième cas ($V \neq 0, U = 0$), à la contraction de la partie $(-2)$ du diviseur image réciproque de la tangente d'inflexion $L$, dont on a notée $\ell$ la transformée propre :

$(E_7)$




Il est bien connu qu'alors la quartique $K$ de $\mathbb{P}_2$, lieu de ramification du morphisme $\widetilde{P} \to \mathbb{P}_2$, est :

• dans le premier cas, irréductible et munie d'un point double unibranche, d'invariant $\delta = 3$ ;

• dans le deuxième cas, isomorphe à $x(x^2 - y^3)$, *cf.* [1].

D'autre part, les cubiques à rebroussement passant par $m$ correspondent aux images réciproques dans $\widetilde{P}$ des tangentes d'inflexion de $K$. Il y en a trois dans le premier cas, respectivement une dans le deuxième cas, comme on le déduit des formules de Plücker.

Dans le premier cas, on peut voir la quartique (qui est rationnelle) comme projection de la quartique normale de $\mathbb{P}_4$ dans $\mathbb{P}_2$ par une droite contenue dans un plan osculateur. Son équation peut s'écrire

$$(x^2 + y)^2 + xy^3 = 0$$

dans des coordonnées convenables. Le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit par :

$$x \longmapsto \omega x, \quad y \longmapsto \omega^2 y \quad (\omega^3 = 1).$$

Une représentation paramétrique en est :

$$x = -t^2, \quad y = 1, \quad z = t - t^4 \quad \text{(point singulier } t = \infty).$$

La condition d'alignement de trois points, représentés par l'équation

$$a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0,$$

est :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = -a_3^2 + a_1 a_2 - a_0 a_3.$$

Les points d'inflexion, représentés par

$$(a_0 = 1, a_1 = -3t, a_2 = 3t^2, a_3 = -t^3)$$

vérifient $t^3 + 8 = 0$ *i.e.* $t = -2\omega$ $(\omega^3 = 1)$. □

On calcule les valeurs de $U$, $V$, $\Delta$ pour $y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_7 x^7$ :

$$U = a_2, \quad V = 2a_3^3, \quad \Delta = 3a_3^8 + 2a_2^4 a_3^3 a_7.$$

Il en résulte que

$$2^8 \Delta^3 - 3^3 V^8 = 2^9 a_2^4 a_3^9 a_7 (27 a_3^{10} + 18 a_2^4 a_3^5 a_7 + 4 a_2^8 a_7^2)$$

est divisible (exactement) par $a_2^4$. La même relation a lieu dans $\mathcal{H}_8$ d'après le lemme suivant :

LEMME 3.2. — *Soient $G$ un groupe linéaire, $X$ un schéma lisse muni d'une action de $G$, $Y$ un sous-schéma lisse fermé de $X$. Pour que $Y \times G \to X$ soit plat au point $(y, 1)$ il faut et il suffit que la codimension dans $G$ de $\{g \in G \mid gy \in Y\}$ soit égale à*

$$\dim Y + \dim G - \dim X = \dim G - \operatorname{codim}(Y/X).$$

Ceci s'applique ici : $X = \mathbb{C}[a_2, \ldots, a_7][V^{-1}]$, $G$ est le sous-groupe

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{PGL}_3$, $Y$ est défini par $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ et $a_3 \neq 0$. □

**3.2.** — Explicitons maintenant différemment le morphisme de $S_8^{00}$ dans $\mathbb{A}_1$ déduit de l'inclusion :

$$\mathbb{C}\Big[\frac{\Delta^3}{V^8}\Big] \hookrightarrow \mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_7][U^{-1}V^{-1}].$$

Avec les notations du théorème 1.1, à un point $m$ de $S_8^{00}$ de projection $m'$ dans $S_7^{00}$, est associé un quotient de rang 1 de la fibre de $E_7$ en $m'$, donc par l'intermédiaire du revêtement

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow S_7^{00} \\ g &\longmapsto g \cdot m', \end{aligned}$$

une droite de l'algèbre de Lie $\mathrm{Sl}(V^\vee)$.

PROPOSITION 3.2. — *Il existe un élément de cette droite dont le polynôme caractéristique est*

$$X^3 - 28\Delta X + 10V^4$$

(*évalué en $m$ supposé dans la carte de* 1.3).

*Démonstration.* — Notons $A$ un élément non nul quelconque de la droite ci-dessus et montrons d'abord que $m$ est sur le germe de courbe paramétrée

$$t \longmapsto \mathrm{e}^{At} m_0$$

où $m_0$ est la projection de $m$ dans $\mathbb{P}$ (et où $t$ est voisin de 0). Pour cela remarquons que l'orbite de $m$ sous $G$ est une hypersurface dont l'équation (dans la carte locale de 1.3) peut être interprétée (au voisinage de $m$) comme une équation différentielle d'ordre 7 en $y$ vue comme fonction de $x$, dont les courbes intégrales sont $G$-invariantes. On écrit le système différentiel d'ordre 1 associé à cette équation d'ordre 7 :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}x} = a_1\,, \\ \dots \\ \dfrac{\mathrm{d}a_5}{\mathrm{d}x} = 6a_6\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}a_6}{\mathrm{d}x} = f(x, a_0, \dots, a_6). \end{cases}$$

Écrivons le champ de vecteurs correspondant,

$$\big(1, a_1, \dots, a_6, f(x, a_0, \dots, a_6)\big)$$

dans un petit ouvert de la carte locale de 1.3 de $S_7^0$. Il est (à homothétie près) $G$-invariant en « germe », donc multiple d'une fonction par un champ $G$-invariant correspondant à un élément de $\mathrm{SL}(V)$ qui, par construction, est sur la droite définie dans l'énoncé. L'assertion en résulte aussitôt.

Soient $e_0$, $e_1$, $e_2$ les valeurs propres de $A$; pour $\lambda = (e_0 - e_1)/(e_0 - e_2)$, la courbe $y = x^\lambda$ est une solution de l'équation différentielle précédente. On calcule les valeurs de $V$ et de $\Delta$ sur cette courbe :

$$V = \Big(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\Big)^3 \frac{(\lambda-2)(\lambda+1)(2\lambda-1)}{2\times 3^3\times 5} x^{3\lambda-9},$$

$$\Delta = \frac{(\lambda(\lambda-1))^8}{2^{12}\times 3^7\times 5^2\times 7}\big[(\lambda-2)(\lambda+1)(2\lambda-1)\big]^2(1-\lambda+\lambda^2)x^{8\lambda-24}.$$

On peut écrire le polynôme caractéristique de $A$ sous la forme :

$$4X^3 - g_2X - g_3.$$

Vu comme une quartique avec une racine à l'infini, ses invariants sont

$$G_2 = g_2 = \frac{1}{12}(1-\lambda+\lambda^2),$$

$$G_3 = g_3 = \frac{1}{2^4 3^3}(\lambda-2)(\lambda+1)(2\lambda-1).$$

On vérifie que l'on a :

$$\frac{(40V^4/g_3)^2}{(112\Delta/g_2)^3} = 1.$$

La proposition en résulte. $\square$

### 3.3. Quotient de $S_8$ sous $G$.

Pour «compactifier» le morphisme de 3.2, considérons le sous-anneau $\mathbb{Z}$-gradué de $\mathcal{H}_8$ formé des éléments de bidegré $(d, 3d)$ ($d \in \mathbb{Z}$), *i.e.* $\mathbb{C}[V, \Delta]$ avec $\deg(V) = 3$ et $\deg(\Delta) = 8$. Son spectre homogène est $\mathbb{P}_1$. Les fonctions $V$, $\Delta$ sont des sections de $\mathcal{O}_{S_n^0}(12, 9)$ (resp. de $\mathcal{O}_{S_n^0}(32, 24)$). L'ensemble de leurs zéros communs est un fermé $G$-invariant de $S_n^0$ de codimension 2.

LEMME 3.3. — *Dans la carte locale de* 1.3, *ce fermé a deux composantes irréductibles définies par les mineurs maximaux de matrices wronskiennes* :

$$(a_2, a_3) \quad \textit{et} \quad W_{27} = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* — Soit en effet $(x, a_0, \dots, a_7)$ un point de la carte locale annulant $V$ et $\Delta$. S'il ne vérifie pas $a_2 = 0$, il existe une conique contenant l'image de ce point dans $S_6$. Si on écrit cette conique sous la forme $y = x^2$ (après changement de la carte locale), on obtient un point tel que $a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Alors $\Delta = 0$ équivaut à $a_6 = 0$, ce qui signifie que la conique contient la projection du point dans $S_7$. $\square$

Soit $S_8^{000}$ l'ouvert $G$-stable de $S_8^0$ complémentaire de ce fermé (il contient $S_8^{00}$). Les sections $V$ et $\Delta$ définissent un morphisme de $S_8^{000}$ dans $\mathbb{P}_1$ qui prolonge le morphisme précédent de $S_8^{00}$ dans $\mathbb{A}_1$ et qui contracte les $G$-orbites. Le seul point de $\mathbb{P}_1$ dont la fibre contient plus d'une orbite est $(U^4H = 0)$ avec trois orbites :

- point courant d'une cubique cuspidale,
- point d'inflexion non sur une cubique cuspidale,
- point d'inflexion d'une cubique cuspidale.

On remarque que la troisième orbite est fermée et contenue dans l'adhérence des deux autres. De plus, $\mathbb{P}_1$ est un bon quotient de $S_8^{000}$ sous $G$ d'après le lemme suivant :

LEMME 3.4. — *Soient $G$ un groupe linéaire sur $\mathbb{C}$, $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques normales sur $\mathbb{C}$, $\sigma$ une action de $G$ sur $X$ telle que $f$ contracte les fibres de $\sigma$. Supposons que $f$ induise une bijection de l'ensemble des orbites fermées de $X$ sous $G$ avec $Y$, et que toutes les composantes irréductibles des fibres de $f$ aient même dimension. Alors $Y$ est un bon quotient de $X$ sous $G$.*

*Cf.* [11, prop. 0.2], dont la démonstration s'adapte ici. $\square$

## 4. Étude birationnelle du quotient de $S_9$ sous $G$

### 4.1. Correspondance entre $S_9$ et la cubique universelle.

La correspondance d'incidence entre $S_9$ et la « cubique universelle » de $\mathbb{P}$ (graphe de la correspondance d'incidence entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}_3 V)$) est birationnelle, plus précisément tout point de $S_9^0$ tel que $UV\Delta \neq 0$ est sur une unique branche lisse de cubique. Cela résulte du fait que le coefficient de $a_9$ dans le wronskien $W_3$ est $-U\Delta$.

### 4.2. Passage au quotient sous $G$ de cette correspondance.

Tout d'abord, avec les notations du théorème 1.1, on a :

$$\big(\mathcal{H}_9[U^{-1}V^{-1}]\big)_{00} = \mathbb{C}[i_8^3, i_9]$$

avec

$$i_8^3 = \frac{\Delta^3}{V^8}, \quad i_9 = \frac{U^4T}{3V^4} \quad \text{et} \quad T = \frac{3V\,\mathrm{d}\Delta - 8\Delta\,\mathrm{d}V}{U^3}$$

($T$ est un invariant différentiel d'ordre 8 et de bidegré $(8, 28)$). Notons l'expression de $T$ donnée par Halphen sous forme de déterminant :

$$T = \begin{vmatrix} 3a_3 & 2a_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3a_3 & a_3 & a_2 & 2a_2^2 & 0 \\ 5a_5 & 4a_4 & a_4 & 2a_3 & 5a_2a_3 & a_2^2 \\ 6a_6 & 5a_5 & a_5 & 3a_4 & 6a_2a_4 + 3a_3^2 & 3a_2a_3 \\ 7a_7 & 6a_6 & a_6 & 5a_5 & 7a_2a_5 + 7a_3a_4 & 4a_2a_4 + 3a_3^2 \\ 8a_8 & 7a_7 & a_7 & 5a_6 & 8a_2a_6 + 8a_3a_5 + 4a_4^2 & 5a_2a_5 + 5a_3a_4 \end{vmatrix}.$$

Soit $C$ une cubique lisse de $\mathbb{P}$ représentée paramétriquement sous la forme standard de Weierstrass :

$$u \longmapsto (\mathfrak{p}u, \mathfrak{p}'u, 1),$$

avec $u \in \mathbb{C}/\Omega$ et où $\Omega$ est un réseau de $\mathbb{C}$.

LEMME 4.1. — *L'évaluation sur $C$ de $V/U^3$ (resp. $\Delta/U^8$) est la section $\sigma 2w/\sigma^4 w \, \mathrm{d}u^{\otimes 3}$ de $\omega_C^{\otimes 3}$ (resp. $\sigma 3w/\sigma^9 w \, \mathrm{d}u^{\otimes 8}$) de $\omega_C^{\otimes 8}$ (où l'on note $w$ la variable «jacobienne» $3u$).*

*Démonstration.* — On remarque que les points de $C$ tels que $V = 0$ (resp. $\Delta = 0$) sont les points d'ordre 6 (resp. d'ordre 9) pour la loi du groupe de $C$ (après exclusion des points d'inflexion qui sont les zéros de $U$). Le reste suit. □

On en déduit que la restriction de $i_8^3$ à $C$ est, d'après les formules classiques,

$$X = \frac{(\mathfrak{p}w - \mathfrak{p}2w)^3}{\mathfrak{p}'^2 2w}.$$

On a d'autre part :

$$\frac{U^4T}{3V^4} = \frac{U}{3V^4}(3V \, \mathrm{d}\Delta - 8\Delta \, \mathrm{d}V),$$

$$\frac{U^4T}{3V^4} = \frac{U\Delta}{3V^3}\Big(\frac{3\,\mathrm{d}\Delta}{\Delta} - \frac{8\,\mathrm{d}V}{V}\Big),$$

$$\frac{U^4T}{3V^4} = \frac{\sigma 3w\sigma^3 w}{\sigma^3 2w}(9\zeta 3w - 16\zeta 2w + 5\zeta w).$$

On calcule cette fonction en l'évaluant en $w = \frac{1}{4}\omega$ où $\omega$ est une période non divisible par 2. On trouve $-1$, d'où :

$$\frac{U^4T}{3V^4} = 8Y - 1 \quad \text{avec } Y = \frac{\mathfrak{p}'2w}{\mathfrak{p}'w} \text{ sur } C.$$

Arrivé à ce point, il n'y a plus de difficultés pour exprimer les « fonctions elliptiques homogènes de degré 0 » fondamentales $g_2/\mathfrak{p}^2u$ et $g_3/\mathfrak{p}^3u$ en fonction de $X$, $Y$ (*cf.* [7]). En particulier, on a :

$$\begin{aligned} j &= \frac{1728(g_2/\mathfrak{p}^2u)^3}{(g_2/\mathfrak{p}^2u)^3 - 27(g_3/\mathfrak{p}^3u)^2} \\ &= \frac{-1}{27}\,\frac{(16X^2+8X(Y+1)(Y-2)+(Y+1)^4)^3}{X^3[(8Y-1)^3+(32X+8Y^2-20Y-1)^2]}. \end{aligned}$$

## 5. Étude birégulière du quotient de $S_9^{\mathrm{o}}$ sous $G$

On ignore si $\mathcal{H}_n$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini pour $n \geq 10$.

Grâce à des relations de divisibilité remarquées par Halphen pour $\mathcal{H}_9$, on va montrer que $\mathcal{H}_9$ est de type fini.

PROPOSITION 5.1.

a) *Avec* $G = (U^4T^2 + 9H)/V^2)$, *on a :*

$$\mathcal{H}_9[U^{-1}] = \mathbb{C}[U, U^{-1}, V, \Delta, T, G]/\big(GU^4V^2 - U^8T^2 - 9(2^8\Delta^3 - 3^3V^8)\big),$$

b) *Avec* $T_1 = (V^4T - H/6)/U$, *on a :*

$$\mathcal{H}_9[V^{-1}] = \mathbb{C}[U, V, V^{-1}, \Delta, H, T_1]/(HU^4 - 2^8\Delta^3 - 3^3V^8).$$

La démonstration se décompose en deux parties.

*Première partie.*

Montrons d'abord que les fractions

$$T_1 = \frac{V^4T - H/6}{U} \quad \text{et} \quad G = \frac{U^4T^2 + 9H}{V^2}$$

appartiennent à $\mathcal{H}_9$. En le germe

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_7x^7 + a_8x^8 \quad (x = 0)$$

on calcule $T$ :

$$T = 192a_3^6(3a_3a_7 + 2a_2a_8).$$

Par suite,

$$UT_1 = \frac{2^9}{3}a_2a_3^9(9a_3^9a_8 - 9a_2^3a_3^5a_7^2 - 4a_2^7a_7^3)$$

est divisible par $a_2$ dans $\mathbb{C}[a_2, a_7, a_8]$. D'après le lemme 3.2, il en est de même dans $\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_7, a_8]$, d'où l'assertion relative à $T_1$. Quant à $G$, on note le lemme suivant.

LEMME 5.1. — *Toute orbite dans* $S_n^0 - (U=0)$ *contient un germe en* $(0,0)$ *du type*

$$y = a_2x^2 + a_5x^5 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

(Il s'agit de voir que tout point de $S_5^0$ tel que $U \neq 0$ est sur une conique, puis de mettre cette conique pointée sous la forme $y = x^2$ au voisinage de $(0,0)$.) On remarquera aussi que le stabilisateur dans $\mathrm{GL}_3$ de la conique pointée $(y = x^2, (0,0))$ est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\mu\lambda & \mu^2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

(groupe affine de la droite $\mathbb{C}$, produit semi-direct de $\mathbb{C}$ par l'action de $\mathbb{C}^*$ par homothéties).

Pour le germe $y = a_2x^2 + a_5x^5 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, on vérifie aisément les formules :

$$\begin{aligned}
&U = a_2, \quad V = a_2^2a_5,, \quad \Delta = a_2^6\big(a_5a_7 - a_6^2\big),\\
&T = 3a_2^4\big(25a_5^4 - 8a_2(2a_3^6 + a_5^2a_8 - 3a5a_6a_7)\big),\\
&H = 2^8a_2^{14}(a_5a_7 - a_6^2)^3 - 3^3a_2^{12}a_5^8,\\
&G = \frac{U^4T^2 + 9H}{V^2}\\
&\quad = 18a_2^8\Big(299a_5^6 - 200a_2^4a_5^4a_8 - 600a_2a_5^3a_6a_7 - 400a_2a_5^2a_6^3\\
&\qquad\qquad + 32(a_2a_5a_8)^2 + 128a_2^2a_6^3a_8 - 192a_2^2a_5a_6a_7a_8\\
&\qquad\qquad\qquad - 96(a_2a_6a_7)^2 + 128a_2a_5a_7^3\Big).
\end{aligned}$$

La relation « $V^2$ divise $U^4T^2 + 9H$ » est donc vraie dans l'anneau $\mathbb{C}[a_2, a_5, a_6, a_7, a_8]$ (après la spécialisation $a_3 = 0 = a_4$). Par suite, elle est vraie en général d'après le lemme 3.2 appliqué à $X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_7, a_8]$, $Y = \mathbb{C}[a_2, a_5, a_6, a_7, a_8]$, $G$ groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

prouvant en l'occurrence que le morphisme $Y \times G \to X$, $(y, g) \mapsto gy$ est fidèlement plat.

*Deuxième partie.*

L'assertion b) est facile : le coefficient de $a_8$ dans $T_1$ est $2^9 3V^6$ ; donc on peut effectuer dans $\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_7, V^{-1}][a_8]$ la division euclidienne par $T_1$. Si $I \in \mathcal{H}_9[V^{-1}]$, on écrit ainsi $I = T_1 J + K$ où $K \in \mathcal{H}_8[V^{-1}]$, $J \in \mathcal{H}_9[V^{-1}]$ et $\deg_{a_8}(J) = \deg_{a_8}(I) - 1$. Par récurrence sur $\deg_{a_8}(I)$ et identification de $\mathcal{H}_8$, on en déduit le résultat.

L'assertion a) demande un peu plus de soin. On munit $\mathbb{C}(a_2, \ldots, a_8)$ de la valuation $V$-adique $\theta_V$ (exposant de $V$). Comme on sait, le sous-anneau $(\mathcal{H}_9[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ est égal à $\mathbb{C}[i_8^3, i_9]$ où $i_3^8 = \Delta^3/V^8$ et $i_9 = (U^4 T)/3V^4$. Montrons d'abord que le gradué associé à cet anneau muni de $\theta_V$ est $\mathbb{C}[a, b]$ où $a$ (resp. $b$) est la classe en degré $-4$ (resp. $-6$) de $U^4 T/V^4 = A$ (resp. $U^4 G/V^6 = B$). Pour cela on remarque que $T$ est linéaire en $a_8$, de coefficient dominant $-24U^5V^2$, de sorte que la classe de $(U^4 T)/V^4$ dans le gradué associé à $\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_8](U^{-1}V^{-1})$ pour $\theta_V$ est indépendante de $a_8$, tandis que $G$ est congru modulo $V$ à un polynôme de degré 1 en $a_8$ de coefficient dominant non divisible par $V$, donc $a$ et $b$ sont algébriquement indépendants dans $\mathrm{gr}_{\theta_V}(\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_8, U^{-1}V^{-1}])$. D'autre part les relations $B = 9i_9^2 + 2^8 \times 9 i_8^3 - 9 \times 3^3$, $A = 3i_9$, montrent immédiatement que $(\mathcal{H}_9[U^{-1}V^{-1}])_{00} = \mathbb{C}[A, B]$ ce qui entraîne notre assertion.

Déduisons-en a). Soit $I$ un élement de $\mathcal{H}_9$. Comme les bidegrés $(1, 2)$ de $U$, $(3, 9)$ de $V$ et $(8, 24)$ de $\Delta$ engendrent $\mathbb{Z}^2$, il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $U^a V^b \Delta^c I \in (\mathcal{H}_9[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ *i.e.* $U^a V^b \Delta^c I = P(A, B)$. On alors $\theta_V(P(A, B)) = -\sup(4\alpha + 6\beta)$, $(\alpha, \beta)$ parcourant l'ensemble des bidegrés des éléments de $P$, d'où $-\sup(4\alpha + 6\beta) \geq b$ et, par suite, $U^a \Delta^c I = Q(T, U, G, V)$ où $Q$ est un polynôme. On peut prendre $c \in \{0, 1, 2\}$ et remplacer $I$ par $I^n$ : cela montre que $I$ appartient à l'anneau de l'énoncé, car celui-ci est intégralement clos et noethérien donc complétement intégralement clos. □

Corollaire 5.1. — *La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{H}_9$ est de type fini.*

*Démonstration* . — Soit $A$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}_9$ engendré par

$$(U, V, \Delta, T, T_1, G).$$

La proposition montre que $A[U^{-1}] = \mathcal{H}_9[U^{-1}]$ et que $A[V^{-1}] = \mathcal{H}_9[V^{-1}]$. On a donc, pour tout $I \in \mathcal{H}_9$, $(U, V)^n I \in A$ pour $n \gg 0$ ; donc $I$ appartient à la $\mathbb{C}$-algèbre de type fini $\bar{A}$, clôture intégrale de $A$ (en effet $(U, V)$ est une suite $\bar{A}$-régulière (au sens gradué)). Donc $\mathcal{H}_9 = \bar{A}$. □

Pour construire $S_9^0/G$, l'idée naturelle est de définir un « spectre bihomogène » de $\mathcal{H}_9$ (puisque les éléments de $\mathcal{H}_9$ sont les sections $G$-invariantes des modules inversibles sur $S_9^0$) ; mais il n'est pas clair qu'on soit dans le domaine de validité des théories existantes [11] ; on va donc passer par l'intermédiaire d'un anneau gradué de type $\mathbb{Z}$ : le sous-anneau de $\mathcal{H}_9$ engendré par les éléments suivants, tous de bidegré $(5k, 16k)$ avec $k \in \mathbb{N}$ :

$$a = H \quad (k=4), \quad b = GU \quad (k=3), \quad c = TU^2 \quad (k=2),$$

$$d = TUV^2 \quad (k=3), \quad e = TV^2 \quad (k=4), \quad f = T_1V^2 \quad (k=5).$$

Ces éléments annulent $\Lambda^2 M$, où

$$M = \begin{pmatrix} b & c & d & e - \frac{1}{6}a \\ c^2 + 9a & d & e & f \end{pmatrix}.$$

En effet, après spécialisation dans $\mathcal{H}_9$, la seconde ligne de $M$ est le produit de la première ligne et de $V^2/U$.

LEMME 5.2. — *Dans l'anneau de polynômes (non gradué) $\mathbb{C}[a,b,c,d,e,f]$, les coefficients de $\Lambda^2 M$ engendrent un idéal de hauteur 3. L'anneau quotient par cet idéal est de Cohen-Macaulay et régulier hors du fermé (de hauteur 2) défini par l'image de l'idéal $(a,c,d,e,f)$. En particulier il est intégralement clos.*

*Démonstration.* — Posons $A = \mathbb{C}[a,c,d,e,f]/(I_{M_1})$ où $I_{M_1}$ est l'idéal des coefficients de $\Lambda^2 M_1$,

$$M_1 = \begin{pmatrix} c & d & e - \frac{1}{6}a \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

$B = \mathbb{C}[a,b,c,d,e,f]/(I_M)$ où $I_M$ l'idéal des coefficients de $\Lambda^2 M$ (*i.e.* l'anneau de l'énoncé).

Il est connu que $A$ est le cône projetant d'une surface cubique réglée arithmétiquement normale de $\mathbb{P}_4$ (*i.e.* $\mathrm{Proj}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2))$) : il est donc de Cohen-Macaulay, régulier hors du sommet $a=c=d=e=f=0$. Le complémentaire du sommet dans $\mathrm{Spec}(A)$ est réunion de deux ouverts affines $\mathrm{Spec}(A_i)$, $i = 1,2$, où :

- $A_1 = \mathbb{C}[a,c,\pi_1]$ (l'homomorphisme de $A$ dans $A_1$ étant $d \mapsto \pi_1 c$, $e \mapsto \pi_1^2 c$, $f \mapsto \pi_1(\pi_1^2 c - \frac{1}{6}a)$) ;
- $A_2 = \mathbb{C}[a,f,\pi_2]$ (l'homomorphisme de $A$ dans $A_2$ étant : $e \mapsto \frac{1}{6}a + \pi_2 f$, $d \mapsto \pi_2 e$, $c \mapsto \pi_2 d$).

Donc le complémentaire dans $\mathrm{Spec}(B)$ du fermé $a=c=d=e=f=0$ (définissant une droite) est réunion des deux ouverts $\mathrm{Spec}(B_i)$, $i=1,2$ où $B_i = B \otimes_A A_i$. Il est clair que $B_2 = A_2[b]/(b - \pi_2(c^2+9a)) \cong A$ (en toute rigueur, $c$ désigne ici l'élément $\pi_2^2(\frac{1}{6}a + \pi_2 f)$). De même $B_1 = A_1[b]/(\pi_1 b - (c^2+9a))$, donc $\mathrm{Spec}(B_1)$ est un ouvert de l'éclatement dans $\mathrm{Spec}(A_1)$ de l'idéal $(b, c^2+9a)$ qui définit une courbe lisse. Ainsi $B_1$ et $B_2$ sont réguliers de dimension 3 ; le lemme en résulte. ∎

COROLLAIRE 5.2. — *L'homomorphisme de $B$ dans $\mathcal{H}_9$ par la spécialisation $a \mapsto H$, ..., $f \mapsto T_1V^2$ ci-dessus est injectif.*

En effet le corps de fractions de l'image de cet homomorphisme contient trois éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ : $V^2/U$, $H$, $TU^2$ (car $V^2/U$ appartient à $\mathbb{C}(a_2,\dots,a_6)$, $H \in \mathbb{C}(a_2,\dots,a_7)$ et dépend effectivement de, $a_7$, $TU^2$ appartient à $\mathbb{C}(a_2,\dots,a_8)$ et dépend effectivement de $a_8$). C'est donc nécessairement le corps de fractions de $B$, puisque $\dim B = 3$. $\square$

Posons $S = \operatorname{Proj} B$ ; c'est une surface normale.

LEMME 5.3. — *La surface $S$ a quatre points singuliers rationnels :*

$O$ : $a = c = d = e = f = 0$ ; (*point double de type* $A_2$) ; (*coordonnées* $(0,1,0,0,0,0)$)

$A$ : $b = d = e = f = c^2 + 9a = 0$ ; (*point double de type* $A_1$) ; (*coordonnées* $(-\frac{1}{9},0,1,0,-\frac{1}{54},0)$)

$B$ : $b = c = d = e - \frac{1}{6}a = f = 0$ ; (*point double de type* $A_3$) ; (*coordonnées* $(6,0,0,0,1,0)$)

$C$ : $a = b = c = d = e = 0$ ; (*point quintuple, isomorphe au sommet du cône projetant de la quintique rationnelle normale*) ; (*coordonnées* $(0,0,0,0,0,1)$).

*Ce sont les seuls points singuliers de $S$.*

*Démonstration.* — La surface $S$ est définie comme le fermé de l'espace projectif « tordu » $\mathbb{P} = \mathbb{P}(4,3,2,3,4,5)$, quotient de $\mathbb{C}^6 - (0)$ par l'action de $\mathbb{C}^*$,

$$\lambda \longmapsto \operatorname{diag}(\lambda^4,\lambda^3,\lambda^2,\lambda^3,\lambda^4,\lambda^5),$$

d'idéal engendré par les coefficients de $\Lambda^2 M$. Les points singuliers autres que $O$ doivent, d'après le lemme précédent, être cherchés parmi les points de $\mathbb{P}$ dont le stabilisateur dans $\mathbb{C}^*$ est non trivial, *i.e.* on doit avoir :

- soit $b = d = f = 0$ (stabilisateur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ;
- soit $a = c = e = f = 0$ (stabilisateur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) ;
- soit $a = b = c = d = e = 0$ (stabilisateur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$).

La première possibilité impose soit $c^2 + 9a = 0$ (le point $A$), soit $c = e - \frac{1}{6}a = 0$ (le point $B$). La deuxième possibilité redonne $O$. La troisième possibilité donne le point $C$.

Il reste à reconnaître la classe d'isomorphisme de ces points (*i.e.* de l'anneau local complété de chacun de ces points). Faisons-le par exemple pour $C$. L'anneau local complet $R$ de $\mathbb{P}$ en ce point peut être identifié à la partie homogène de degré 0 de $\mathbb{C}[[a,b,c,d,e]]$ gradué, de type $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, par $\deg(a) = \bar{4}, \ldots, \deg(e) = \bar{4}$ où $n \mapsto \bar{n}$ est l'application canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. L'anneau local de $S$ est défini par les équations

$$b - (c^2 + 9a)\big(e - \tfrac{1}{6}a\big), \quad c - d\big(e - \tfrac{1}{6}a\big), \quad d - e\big(e - \tfrac{1}{6}a\big).$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un automorphisme de $R$ conservant $a$, $e$ et transformant ces équations en $b$, $c$, $d$ respectivement ; cet automorphisme respecte la graduation.

Par cet isomorphisme, l'anneau local complété de $S$ devient la partie homogène de degré 0 de $\mathbb{C}[[a,b,c,d,e]]/(b,c,d) = \mathbb{C}[[a,e]]$, gradué par $\deg(a) = \deg(e) = 4$ (modulo 5). Cet anneau est aussi le complété du sous-anneau de $\mathbb{C}[a,e]$ formé des monômes de degré multiple de 5, *i.e.* le cône projetant de la quintique normale.

Les autres cas se traitent de la même façon. $\square$

Théorème 5.1.

1) *Dans la carte locale* 1.3 *de* $S_9^0$, *la racine de l'idéal* $(a, \ldots, f)$ *est l'intersection* $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3$ *des trois idéaux suivants :*

- $\mathfrak{p}_1 = (a_2, a_3)$ (*définisant le lieu des « méplats »*) ;
- $\mathfrak{p}_2 = (H, T, T_1)$ (*définissant, hors des « méplats », le lieu des points situés sur une cubique à rebroussement*) ;
- $\mathfrak{p}_3$ *est* (*hors des « méplats »*) *engendré par* $V$ *et les coefficients de* $\Lambda^3 W_{2,7}$ *où*

$$W_{2,7} = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 \end{pmatrix}$$

*est la matrice « wronskienne »* (1.4) *de type* $(2,7)$.

2) *Soit* $S_9'$ *le complémentaire dans* $S_9^0$ *du fermé défini par l'idéal* $(a, \ldots, f)$. *Le morphisme* $p$ *de* $S_9'$ *dans* $S$ *défini par* $(a, \ldots, f)$ *a pour image le complémentaire du point* $O$, *il identifie* $S - (O)$ *à un bon quotient de* $S_9'$ *par* $\mathrm{PGL}_3$.

3) *L'image réciproque* $p^*$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Cl}(S) \longrightarrow \operatorname{Pic} S_9^0 = \mathbb{Z}^2$$

*et un isomorphisme d'anneaux bigadués de*

$$\bigoplus_{\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(S)} H^0(\mathcal{L}) \quad \textit{sur} \quad \bigoplus_{(d,p) \in \mathbb{Z}^2} \big(H^0(\mathcal{O}_{S_9^0}(d,p))\big)^{\mathrm{PGL}_3} = \mathcal{H}_9$$

(*on a noté* Cl *le groupe des classes de diviseurs de Weil*).

*Démonstration.*

1) Dans la carte locale 1.3, on a $(U,V)=(a_2,a_3^3)$ ; les fonctions $b,\dots,f$ s'annulent aux points du fermé défini par cet idéal, montrons qu'il en est de même de $a=H$, *i.e.* que l'ordre en $x=0$ de la fonction $H$ sur la courbe $y=x^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_7x^7$ est $>0$ pour $n\ge 4$. Pour la courbe $y=x^n$, on a :

$$U=Cx^{n-2},\quad V=Dx^{3n-9},\quad \Delta=Ex^{8n-24},\quad H=Fx^{20n-64}$$

où $C,\dots,F$ sont des constantes non nulles. On vérifie que sur la courbe $y=x^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_7x^7$, on a :

$$H=Fx^{20n-64}\big(1+\mathrm{O}(x)\big),$$

d'où l'assertion.

Étudions l'idéal $(a,\dots,f)$ dans l'anneau $\mathbb{C}[a_2,\dots,a_8,V^{-1}]$. Il est engendré par $(H,T_1)$ où $T_1$ est de degré 1 en $a_8$, de coefficient dominant inversible. D'autre part $H$ est l'équation, dans $S_8^0$ moins les méplats, du lieu des points sur une cubique à rebroussement. Comme tout point d'une cubique à rebroussement annule $T$ et $T_1$, on en déduit que $(H,T_1)$ est un système d'équations du lieu de ces points dans $S_9^0$, hors de $V=0$ (ce lieu ne rencontre d'ailleurs pas $V=0$ hors des méplats). On vérifie aisément que l'idéal $(H,T,T_1)$ est premier.

Cherchons maintenant les valeurs prises par les fonctions $(a,\dots,f)$ aux points de la carte locale 1.3 : on va utiliser un additif facile au lemme 5.1

LEMME 5.4. — *L'action, sur le germe (en $x=0$)*

$$y=x^2+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\mathrm{O}(x^{n+2}),$$

*du groupe affine de la droite $\mathbb{C}$ ( identifié à un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}_3$ *par*

$$(\lambda,\mu)\longmapsto\begin{pmatrix}\lambda & \mu & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2\mu\lambda & \mu^2 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

*est donnée par*

$$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}A_n\\ A_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^{n-2} & 0\\ \lambda^{n-2}\mu & \lambda^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}. \quad \square$$

En supposant alors $U\neq 0$, on en déduit facilement qu'un point de $S_9^0$ est conjugué, sous $\mathrm{PGL}_3$, à un germe (en $x=0$) d'une des formes suivantes :

(i) $y = x^2 + x^5 + a_7x^7 + a_8x^8$, auquel cas $H = 2^8a_7^3 - 3^3$, $T = 75 - 24a_8$, $G = 18(299 - 200a_8 + 32a_8^2 + 128a_7^3)$ ne s'annulent pas simultanément, non plus que $(a, \dots, f)$.

(ii) $y = x^2 + x^6 + a_8x^8$, auquel cas $(a, b, c, d, e, f) = (0, 128a_8, -24, 0, 0, 0)$ ne s'annule pas.

(iii) $y = x^2 + \mathrm{O}(x^7)$, auquel cas $(a, \dots, f)$ s'annule. Ceci se produit si et seulement si le point annule $(a_5, a_6)$, donc si son conjugué annule les coefficients de $\Lambda^3 W_{2,7}$. Ces évaluations terminent la démonstration de la partie 1) du théorème. Complétons-les en supposant $U = 0$ et $V \neq 0$ : le point de $S_9^0$ est alors conjugué à un germe.

(iv) $y = x^3 + a_7x^7 + a_8x^8$, auquel cas

$$(a, b, c, d, e, f) = 2^8 3^2 (6a_7, 0, 0, 0, a_7, \tfrac{1}{3}a_8).$$

On peut maintenant démontrer l'assertion 2). Le morphisme $p$ est défini; il est clair qu'il induit un morphisme de l'ouvert $UV \neq 0$ de $S_9^0$ dans l'ouvert de $S$ où les deux lignes de

$$M = \begin{pmatrix} b & c & d & e - \frac{1}{6}a \\ c^2 + 9a & d & e & f \end{pmatrix}$$

sont non (identiquement) nulles.

Reprenant les notations du lemme 5.4, cet ouvert est le spectre de la partie homogène de degré 0 de $\mathbb{C}[a, c, \pi, \pi^{-1}]$ où $\deg(a) = 4$, $\deg(c) = 2$, $\deg(\pi) = 1$, *i.e.* $\mathbb{C}[a/\pi^4, c/\pi^2]$ qui n'est autre que le bon quotient $\mathbb{C}[i_8^3, i_9]$ de $S_9^{00}$ sous $\mathrm{PGL}_3$. L'assertion 2) est donc démontrée au-dessus de cet ouvert, et pour la compléter il suffit (en utilisant le lemme 3.4, $S$ étant normale) de la vérifier «ensemblistement» aux points $U = 0$ ou $V = 0$. Elle résulte alors immédiatement des calculs de $(a, \dots, f)$ aux points du type (ii) ou (iv) ( qui donnent des expressions linéaires en $(a_7, a_8)$). L'unique point non atteint par $p$ est $O$, du fait qu'en un point du type (ii), $c$ est la constante $-24$.

L'assertion 3) est une conséquence directe de [6, th. 2.3]. $\square$

## Conclusion

On va examiner l'argument de Halphen [8] (qui diffère de celui de § 4 de ce texte) pour exprimer l'invariant modulaire de la cubique passant par un point infiniment voisin d'ordre 9 d'un point de $\mathbb{P}_2$, en fonction des invariants différentiels de ce point.

On peut réinterpréter comme suit le corollaire 2.1 : pour $n \geq 8$, l'anneau quotient $\mathcal{H}_n/(U-1,V-1)$ s'identifie à l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[i_8,\dots,i_n]$, gradué de type $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par $\deg(i_k) = k$ (modulo 3), dont on note $A_n$ (resp. $\Omega_n$), la composante de degré 0 (resp. 1). On munit $\mathbb{C}[(i_n)_{n\geq 8}]$ de la dérivation $\delta$ définie par $\delta i_n = i_{n+1}$.

Soit $I$ un invariant différentiel d'ordre $n$ et degré 1 en $a_n$ (dans la carte locale 1.3), sa classe dans $\mathbb{C}[i_8,\dots,i_{n+1}]$ s'écrit $Ji_{n+1}+K$ avec $J,K$ appartenant à $\mathbb{C}[i_8,\dots,i_n]$. On peut former la dérivation, restreinte à $A_n$ :

$$D : A_n \longrightarrow \Omega_n \otimes_{A_n} A_n[J^{-3}],$$
$$\begin{cases} Di_k = i_{k+1} & (\text{pour } k < n), \\ Di_n = -J^{-1}K. \end{cases}$$

L'interprétation géométrique du sous-corps $\ker(D)$ du corps de fractions rationnelles de $A_n$ ($K(A_n)$) est : l'ensemble des invariants différentiels absolus (*i.e.* de bidegré $(0,0)$), qui induisent des constantes sur les germes de courbe analytique annulant $I$.

On s'intéresse au cas $I = W_d$, l'équation différentielle des courbes de degré $d$, *cf.* 1.4; on a alors $n = \frac{1}{2}d(d+3)$. Le corps $\ker(D)$ est alors identique au corps des fonctions rationnelles, invariantes sous $\mathrm{PGL}_3$, sur l'espace (projectif) des courbes de degré $d$ de $\mathbb{P}_2$ : en effet, c'est le corps des fonctions rationnelles $\mathrm{PGL}_3$-invariantes sur l'espace des courbes pointées de degré $d$ (celui-ci étant birationnellement équivalent à $S_n$ pour la correspondance d'incidence) qui sont indépendantes du point marqué.

Pour $d = 4$, on trouve donc le corps des fonctions rationnelles sur le schéma de modules $\mathcal{M}_3$ des courbes de genre 3.

Halphen a traité le cas $d = 3$. Il obtient facilement l'expression suivante de la classe $\overline{W}_3$ de $W_3$ dans $\Omega_9$

$$2^4 3^2 \overline{W}_3 = -2i_8 i_{10} - 9 \times 2^6 i_8^3 + \tfrac{27}{4}(i_9+1)(i_9+9)$$

de sorte que la dérivation $D : A_9 = \mathbb{C}[i_8^3, i_9] \to i_8^{-1}\mathbb{C}[i_8^3, i_9] = \Omega_9$ est définie par

$$Di_8^3 = 3i_8^2 i_9, \quad Di_9 = -9.2^5 i_8^2 + \tfrac{27}{8} i_8^{-1}(i_9+1)(i_9+9).$$

Posons pour simplifier (comme Halphen) $\xi = 3i_9$, $\eta = i_8^3$. On voit que le corps $\ker(D)$ est le sous-corps de $\mathbb{C}(\xi,\eta)$ formé des fractions rationnelles $P$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\xi\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{3}{8}\left[(\xi+3)(\xi+27) - 3 \times 2^8 \eta\right] \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0.$$

Pour résoudre cette équation, Halphen remarque que les numérateurs des solutions sont des polynômes $A$ tels que $A$ divise $DA$ ; les quotients (multiplicateurs) forment un sous-groupe additif des polynômes de degré $\leq 1$. Il trouve en partie par tâtonnement deux polynômes de même multiplicateurs $\frac{9}{2}(\xi + 3)$ ; l'invariant modulaire est fonction homomographique du quotient.

L'extension de cette méthode au cas de $W_4$ ne nous a pas (jusqu'ici) paru accessible.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BARTH (W.), PETERS (C.) and VAN DE VEN (A.). — *Compact complex surfaces*, Ergebnisse..., série 3, n° **4**, Springer, 1984.

[2] BELGHITI (M.). — *Variété des points infiniment voisins d'ordre $n$ des points du plan*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **314**, série I, 1992, p. 541–545.

[3] COLLEY (S.) and KENNEDY (G.). — Triple and quadruple contact of plane curves, in *Enumerative algebraic geometry*, Kleiman and Thorup eds, p. 31–60, Contemporary mathematics **123**, Amer. Math. Soc., 1991.

[4] DEMAZURE (M.). — *A, B, C, D, E, F, etc. Séminaire sur les singularités de surfaces*, Lectures Notes Math. **777**, Springer, Heidelberg, 1980.

[5] DOLGACHEV (I.). — *Rationality of fields of invariants*, Proc. Sympos. Pure Math., t. **46**, 1987, p. 3–16.

[6] NARASIMHAN (D.). — *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Inventiones Math., t. **97**, 1987, p. 54–94.

[7] GRUSON (L.). — Un aperçu des travaux mathématiques de G.H. Halphen, in *Complex projective geometry*, Ellingsrud et al. eds, p. 189–198, Lecture notes series **179**, Cambridge University Press, 1992.

[8] HALPHEN (G.H.). — Sur les invariants différentiels, 1878, in *Œuvres complètes de G.H. Halphen*, tome II, Gautiers–Villars, 1918.

[9] LOOIJENGA (E.). — Cohomology of $\mathcal{M}_3$ and $\mathcal{M}_3^1$, in *Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces*, Contemporary Mathematics **150**, Amer. Math. Soc., 1993, p. 205–228.

[10] MUMFORD (D.). — *Curves and their Jacobians.* — Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

[11] MUMFORD (D.) and FOGARTY (F.). — *Geometric invariant theory (second edition).* — Ergebnisse..., n° **34**, Springer, 1982.