BULLETIN DE LA S. M. F.

ALBERT RAUGI

Fonctions harmoniques positives sur certains groupes de Lie résolubles connexes

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 4 (1996), p. 649-684

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_4_649_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 649–684.

FONCTIONS HARMONIQUES POSITIVES SUR CERTAINS GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES CONNEXES

PAR

ALBERT RAUGI (*)

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe de Lie et σ une mesure de Radon positive sur les boréliens de G. Nous étudions le cône des fonctions boréliennes positives h sur G, solutions de l'équation fonctionnelle $\forall g \in G$, $\int_G h(gx)\sigma(\mathrm{d}x) = h(g)$. Sous des conditions classiques sur σ, nous obtenons, pour certains groupes résolubles, une description complète de ce cône. En particulier, nous généralisons un résultat de L. Élie sur le groupe affine réel (voir [13] et [14]) et nous répondons à une question posée par T. Lyons et D. Sullivan [18].

ABSTRACT. — Let G be a Lie group and σ be a positive Radon measure on the borel σ-field of G. We study the cone of positive borel functions h which satisfy : $\forall g \in G$, $\int_G h(gx)\sigma(\mathrm{d}x) = h(g)$. Under classical «smooth» assumptions on σ, we obtain, for some solvable groups, a complete description of this cone. In particular, we generalise a L. Élie's result on the real affine group (see [13], [14]) and we answer to a question of T. Lyons and D. Sullivan [18].

1. Introduction

1.1. — Soient G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et σ une mesure de Radon positive sur les boréliens de G. Nous notons e l'élément neutre de G. Nous supposons que σ est *adaptée* à G, c'est-à-dire que le sous-groupe fermé de G engendré par le support de σ est égal à G. Nous appelons fonction *σ-harmonique positive à gauche* (resp. à droite) sur G toute fonction borélienne positive h sur G vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall g \in G, \quad h(g) = \int_G h(gx)\sigma(\mathrm{d}x) \quad \Big(\text{resp. } h(g) = \int_G h(xg)\sigma(\mathrm{d}x)\Big).$$

(*) Texte reçu le 13 novembre 1995, révisé le 7 mai 1996, accepté le 5 septembre 1996.
A. RAUGI, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France). Email : Albert.Raugi@univ-rennes1.fr.

Classification AMS : 22E30, 31C05, 60J50, 43A80, 45C05, 39Bxx.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1996/649/$ 5.00

1.2. — Nous disons que la mesure σ vérifie l'hypothèse (H) si elle possède une densité continue à support compact, par rapport à une mesure de Haar de G, et si le sous-semi-groupe fermé de G engendré par le support de la mesure σ est égal à G. Lorsque σ vérifie l'hypothèse (H), nous notons $\sigma = \varphi m_G$, en désignant par m_G une mesure de Haar à gauche de G.

1.3. — L'étude du cône HG_+ des fonctions σ-harmoniques positives à gauche a fait l'objet de nombreux travaux. G. Choquet et J. Deny [9] (1960) ont résolu le problème dans le cas d'un groupe abélien, pour une mesure σ générale. Par la suite, H. Furstenberg [15] (1965), G.A Margulis [19] (1966), J.-P. Conze et Y. Guivarc'h [11] (1974) ont étudié le cas d'un groupe respectivement semi-simple, nilpotent, extension compacte d'un groupe nilpotent, pour une mesure σ vérifiant l'hypothèse (H). Tous ces résultats sont obtenus en déterminant, à l'aide d'une *propriété de droite fixe*, les génératrices extrémales du cône des fonctions σ-harmoniques positives.

Une autre façon d'aborder le problème a consisté à utiliser la théorie de la frontière de Martin. Y. Derriennic [12] a résolu le cas du groupe libre; L. Élie [13], [14] celui du groupe affine réel et C. Series [26] celui des groupes Fuchsiens. Citons aussi les travaux de F. Karpelevich [17], Y. Guivarc'h [16] et M. Babillot [6] sur les espaces symétriques et ceux de A. Ancona [1], [2], sur les variétés hyperboliques.

1.4. — Dans cet article, nous présentons une nouvelle approche du problème. Ce qui nous permet d'atteindre une famille de groupes résolubles, plus générale que le groupe affine réel. Nous donnons ci-dessous une idée de la technique utilisée.

Observons tout d'abord que, pour tout $g \in G$, la translatée à gauche $h^g : x \mapsto h(gx)$ d'une fonction h de HG_+ appartient encore à HG_+. L'hypothèse (H) nous assure que toute fonction non nulle du cône HG_+ est strictement positive et que le cône HG_+ est réticulé et à base compacte. Grâce au théorème de Choquet de représentation intégrale dans les cônes réticulés à bases compactes (*cf.* [10], [21]), nous sommes amenés à chercher les éléments extrémaux de ce cône.

Nous désignons par :

- Ω l'espace produit $G^{\mathbb{N}^*}$,
- $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de Ω,
- $(Y_n)_{n\geq 1}$ les applications coordonnées de Ω.

Pour tout entier $n \geq 1$, nous appelons $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires

$$\{Y_k : 1 \leq k \leq n\}.$$

Nous notons $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$. Nous posons :

$$X_0 = e \quad \text{et} \quad X_n = Y_1 \cdots Y_n \text{ pour } n \geq 1.$$

À toute fonction non nulle h du cône HG_+, nous associons (théorème de Kolmogorov) la probabilité ${}^h\mathbb{P}_\sigma$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad \int_\Omega f(Y_1, \dots, Y_n)\, \mathrm{d}^h\mathbb{P}_\sigma = \int_{G^n} f(x_1, \dots, x_n)\big[h(x_1 \cdots x_n)/h(e)\big]\, \sigma(\mathrm{d}x_1) \cdots \sigma(\mathrm{d}x_n),$$

pour toute fonction borélienne bornée (ou positive) f sur G^n. Pour simplifier l'écriture, nous noterons ${}^h\mathbb{P}$ la mesure de probabilité ${}^h\mathbb{P}_\sigma$.

Soit h une fonction σ-harmonique positive non nulle. Pour toute fonction f de HG_+ telle que ${}^{f^g}\mathbb{P} \ll {}^h\mathbb{P}$ pour tout $g \in G$, le processus

$$\Big(\frac{f(gX_n)}{h(X_n)}\Big)_{n \geq 0}$$

défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, {}^h\mathbb{P})$, est une martingale positive, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, qui converge ${}^h\mathbb{P}$-p.s. vers une v.a. $\xi(g, \cdot)$ telle que :

$$f(g)^{f^g}\mathbb{P} = h(e)\xi(g, \cdot)^h\mathbb{P}.$$

Nous choisissons un réel z vérifiant :

$$0 < z < \min\Big\{1, \frac{1}{\sigma(G)}\Big\}.$$

Nous notons λ la mesure positive bornée définie par :

$$\lambda = (1 - z) \sum_{k \geq 1} z^{k-1} \sigma^{*k}.$$

Nous désignons par $C_b(G)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues bornées sur G. Pour toute fonction α de $C_b(G)$, nous posons

$$h^{\alpha\lambda}(g) = \int_G h(ug)\alpha(u)\, \lambda(\mathrm{d}u).$$

Grâce à l'hypothèse (H), on montre que, pour tout $\alpha \in C_b(G)$ et tout $g \in G$, la fonction $h^{\alpha\lambda}(g\cdot)/h^\lambda(\cdot)$ est bornée et par suite ${}^{h^{\alpha\lambda}}\mathbb{P} \ll {}^{h^\lambda}\mathbb{P}$. D'où la formule :

$$h^{\alpha\lambda}(g) = h(e)^{h^\lambda}\mathbb{E}\big[Z_\alpha(g, \cdot)\, \xi(g, \cdot)\big];$$

avec

$$\xi(g, \cdot) = \lim_{n \to +\infty} \frac{h^\lambda(gX_n)}{h^\lambda(X_n)} \quad \text{et} \quad Z_\alpha(g, \cdot) = \lim_{n \to +\infty} \frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n)}{h^\lambda(gX_n)}.$$

Considérons l'opérateur de décalage θ sur Ω :

$$\forall n \geq 1, \quad Y_n \circ \theta = Y_{n+1}.$$

Appelons $\tilde{\theta}$ la transformation de $G \times \Omega$ définie par :

$$\tilde{\theta}(g, \omega) = (gY_1(\omega), \theta(\omega)).$$

Nous avons :

$$Z_\alpha \circ \tilde{\theta} = Z_\alpha \text{ et } \xi \circ \tilde{\theta}(g, \omega) = \xi(g, \omega)\, \xi\big(Y_1(\omega), \theta(\omega)\big).$$

Nous montrons que :

(i) les v.a. θ-invariantes sont ${}^{h^\lambda}\mathbb{P}$-presque sûrement constantes, lorsque la fonction h est extrémale ;

(ii) pour tout $\alpha \in C_b(G)$, nous avons ${}^{h^\lambda}\mathbb{P}$-presque sûrement

$$\forall (x, g) \in G^2, \quad \lim_{n \to +\infty} \Big(\frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n x)}{h^\lambda(X_n)} - Z_\alpha(g, \cdot)\xi(g, \cdot) \frac{h^\lambda(X_n x)}{h^\lambda(X_n)} \Big) = 0.$$

La construction précédente qui s'applique à un groupe LCD général, permet de ramener la description de h à celles des variables $\tilde{\theta}$-invariantes et du *cocycle* ξ. Dans le cas d'un groupe nilpotent, cette description s'obtient directement à partir des assertions (i) et (ii) précédentes. Pour des groupes résolubles plus généraux, le résultat s'obtient en étudiant le comportement asymptotique de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$.

Cette nouvelle approche est analogue à celle utilisée dans [22] pour décrire l'espace vectoriel HG_b des fonctions σ-harmoniques bornées, lorsque σ est de masse 1. Dans ce cas, l'hypothèse (H) n'est plus nécessaire ; nous pouvons choisir pour h la fonction identique à 1 et pour f une quelconque fonction σ-harmonique bornée. La description de HG_b est alors ramenée à celle des v.a. $\tilde{\theta}$-invariantes ; ce qui est obtenu par l'étude du comportement asymptotique de la *marche aléatoire* $(X_n)_{n \geq 0}$. Cette étude se trouve simplifiée par le fait que la probabilité ${}^1\mathbb{P}$, avec laquelle on travaille, est θ-invariante.

2. Généralités sur les cônes de fonctions harmoniques positives

Une fonction qui est à la fois σ-harmonique positive à gauche et à droite sera dite *bi-σ-harmonique positive*. Nous notons H_+ le cône des fonctions bi-σ-harmoniques positives sur G. Nous appelons $C(G)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur G. Nous désignons par ψ la densité de la mesure λ (voir 1.4) par rapport à la mesure de Haar m_G ; ψ est une fonction strictement positive.

Dans cette section, nous établissons pour les éléments de HG_+ des inégalités remarquables et nous montrons que les cônes des fonctions harmoniques HG_+ et H_+ sont réticulés et à bases compactes. En même temps, nous montrons qu'avec toute fonction harmonique à gauche, non nulle, vit nécessairement au moins une fonction bi-σ-harmonique, non nulle.

LEMME 2.1 (*cf.* [23, Lemme 2.2]). — *Si σ vérifie l'hypothèse* (H), *alors pour tout élément h de HG_+, nous avons :*

$$\forall x, y \in G, \quad \big|h(x) - h(y)\big| \leq h(e)\varepsilon(x,y),$$

avec $\varepsilon(x,y) = \sup\limits_{u \in G} \big[\, |\varphi(x^{-1}u) - \varphi(y^{-1}u)|/\psi(u)\big]$.

Du lemme 2.1 on déduit facilement les corollaires suivants :

COROLLAIRE 2.2 (*cf.* [23, Corollaire 2.3]). — *Si σ vérifie l'hypothèse* (H), *alors dans $C(G)$, les cônes HG_+ et H_+ sont réticulés et à bases compactes.*

COROLLAIRE 2.3. — *Si σ vérifie l'hypothèse* (H), *alors pour toute fonction h de HG_+, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, définie par*

$$f_n(g) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h^{\sigma^{*k}}(g) \qquad (g \in G),$$

est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Les valeurs d'adhérence de cette suite sont des éléments f de H_+ vérifiant $f(e) = h(e)$.

LEMME 2.4. — *Si σ satisfait l'hypothèse* (H), *alors pour tout élément h de HG_+ et tout voisinage compact symétrique V de e dans G, il existe une fonction continue δ_V sur $G \times G$, nulle sur la diagonale de $G \times G$, telle que, pour tous $g, y \in V$ et tout $x \in G$,*

$$\big|h^\lambda(gx) - h^\lambda(yx)\big| \leq \delta_V(g,y)\, h^\lambda(x).$$

Preuve. — Pour tout entier $n \geq 1$, appelons ψ_n la densité de la mesure positive

$$(1-z)\sum_{k=1}^{n} z^{k-1}\sigma^{*k}$$

par rapport à la mesure de Haar m_G de G. La suite de fonctions $(\psi_n)_{n\geq 1}$ croît vers la densité strictement positive ψ de λ. Il existe un entier $q = q(V) \geq 1$ tel que le compact $(\operatorname{Supp}\sigma)V$ soit contenu dans l'ouvert $\{\psi_{q(V)} > 0\}$. En appelant ρ la mesure $(1-z)\sum\limits_{k\geq 0} z^k\sigma^{*k}$, où σ^0 est la mesure de Dirac en e, il vient, pour tous $g, y \in V$ et $x \in G$,

$$\begin{aligned}
\left|h^\lambda(gx) - h^\lambda(yx)\right| &= \left|\int_G \left[h^\rho(ugx) - h^\rho(uyx)\right] \varphi(u)\, m_G(\mathrm{d}u)\right| \\
&= \left|\int_G h^\rho(ux) \left[\varphi(ug^{-1})\Delta(g) - \varphi(uy^{-1})\Delta(y)\right] m_G(\mathrm{d}u)\right| \\
&\le \delta_V(g,y) \int_G h^\rho(ux)\, \psi_{q(V)}(u)\, m_G(\mathrm{d}u) \\
&\le \delta_V(g,y)\,(1-z) \sum_{k=1}^{q(V)} z^{k-1}\, h^{\rho * \sigma^{*k}}(x) \\
&\le \delta_V(g,y)\,(1-z)\, q(V)\, h^\lambda(x)
\end{aligned}$$

où

$$\delta_V(g,y) = \sup_{x\in G} \frac{|\varphi(xg^{-1})\Delta(g) - \varphi(xy^{-1})\Delta(y)|}{\psi_{q(V)}(x)}$$

et Δ est définie par

$$m_G * \varepsilon_g = \Delta(g) m_G, \quad g \in G. \quad \square$$

REMARQUE 2.5. — Soit α une fonction continue bornée sur G. Un calcul analogue permet de montrer que, pour tous $g, y \in V$ et tout $x \in G$,

$$\begin{aligned}
\left|h^{\alpha\lambda}(gx) - h^{\alpha\lambda}(yx)\right| \le \delta_V(g,y)\,(1-z)\, q(V) \|\alpha\|_\infty\, h^\lambda(x) \\
+ \sup_{u\in G}\left|\alpha(ug^{-1}) - \alpha(uy^{-1})\right|\, h^\lambda(yx).
\end{aligned}$$

3. Cocycle associé à une fonction harmonique à gauche

Nous supposons désormais que la mesure σ vérifie l'hypothèse (H). Dans ce chapitre, nous associons à tout élément non nul h de HG_+ un *cocycle* ξ sur le G-espace Ω (*i.e.* une application mesurable sur $G \times \Omega$ vérifiant

$$\forall g, x \in G, \quad \xi(gx, \omega) = \xi\big(g, (x,\omega)\big)\, \xi(x,\omega)$$

tel que

$$\forall g \in G, \quad h^\lambda(g) = h(e)^{h^\lambda}\mathbb{E}\big[\xi(g,\cdot)\big].$$

Cette construction généralise celle de [23] qui se limitait aux fonctions bi-σ-harmoniques. Pour les rudiments concernant la théorie des martingales et les chaînes de Markov nous renvoyons le lecteur non averti à [20] et [25].

3.1. — Nous reprenons les notations de la section 1.4. Nous désignons par ${}^hP$ la probabilité de transition sur G définie par

$$ {}^hPf(g) = \frac{1}{h(g)} \int_G h(gx) f(gx) \sigma(\mathrm{d}x) \qquad (g \in G). $$

Le processus $(X_n)_{n\geq 0}$, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, {}^h\mathbb{P})$, est, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, une chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^hP$ partant de e.

3.2. — Pour $s \in G$, nous désignons par τ_s l'application de Ω dans Ω qui à $(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ associe $(s\omega_1, \omega_2, \ldots)$ et par ${}^h\mathbb{P}_s$ la probabilité image de ${}^{h^s}\mathbb{P}$ par τ_s. En posant $X_0 = s$ et $X_n = Y_1 \cdots Y_n$ pour $n \geq 1$, le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, {}^h\mathbb{P}_s)$ est, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, une chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^hP$, partant de s. Pour cette chaîne, la propriété de Markov s'écrit de la façon suivante : pour tout entier $n \geq 1$, tout $s \in G$ et toute fonction borélienne bornée (ou positive) F sur Ω,

$$ {}^h\mathbb{E}_s\big[F(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \mid \mathcal{F}_n\big] = {}^h\mathbb{E}_{X_n}\big[F(X_1, X_2, \ldots)\big], \quad {}^h\mathbb{P}_s\text{-p.s.} $$

LEMME 3.3. — *Pour toute fonction non nulle h de HG_+, nous avons les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout entier $n \geq 1$, on a $\theta^n({}^h\mathbb{P}) = {}^{h^{\sigma^{*n}}}\mathbb{P}$;*

(ii) *pour toute mesure positive ρ sur les boréliens de G, on a :*

$$ \int_G h(x)\, {}^{h^x}\mathbb{P}\, \rho(\mathrm{d}x) = h^\rho(e)\, {}^{h^\rho}\mathbb{P}. $$

Preuve. — On vérifie l'égalité des mesures sur les tribus $\mathcal{F}_n, n \geq 0$ et on conclut par le théorème des classes monotones (*cf.* [20, Prop. I.4.2]). □

Variables aléatoires θ-invariantes

DÉFINITIONS 3.4.

- Un borélien A de Ω est dit *θ-invariant* si $\theta^{-1}(A) = A$.
- L'ensemble des boréliens θ-invariants forme une tribu notée $\mathcal{I}$.
- Une variable aléatoire Z est $\mathcal{I}$-mesurable si et seulement si $Z = Z \circ \theta$; une telle variable sera dite *θ-invariante*.

LEMME 3.5. — *Pour toute fonction non nulle h de HG_+, nous avons les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout $A \in \mathcal{I}$ et tout $n \geq 1$, on a ${}^h\mathbb{P}[A] = {}^{h^{\sigma^{*n}}}\mathbb{P}[A]$;*

(ii) *pour tout $A \in \mathcal{I}$, la fonction f définie par $f(g) = h(g)^{h^g}\mathbb{P}[A]$ pour $g \in G$, appartient à HG_+ et vérifie $\lim_{n\to+\infty} (f(X_n)/h(X_n)) = 1_A$ ${}^h\mathbb{P}$-p.s.*

Si h est une fonction bi-σ-harmonique, alors f l'est aussi.

Preuve. — La première assertion résulte immédiatement de l'affirmation (i) du lemme 3.3. L'assertion (ii) du lemme 3.3 et l'assertion précédente appliquées à l'élément h^g de HG_+ et à la mesure $\rho = \sigma$, montrent que f appartient bien à HG_+.

D'autre part nous avons, ${}^h\mathbb{P}_s$-p.s., pour tout $s \in G$,

$$\begin{aligned}\frac{f(X_n)}{h(X_n)} &= {}^{h^{X_n}}\mathbb{P}[A] = {}^{h^{X_n}}\mathbb{E}[1_A \circ \tau_{X_n}] \quad (\text{car } A \in \mathcal{I}) \\ &= {}^h\mathbb{P}_{X_n}[A] = {}^h\mathbb{E}_s[1_A \mid \mathcal{F}_n] \quad (\text{propriété de Markov et } A \in \mathcal{I}).\end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors de la convergence, ${}^h\mathbb{P}_s$-p.s., vers l'indicatrice de A de la martingale $({}^h\mathbb{E}_s[1_A \mid \mathcal{F}_n])_{n\geq 0}$.

Enfin la dernière assertion résulte immédiatement du lemme 3.3 appliqué à h et à la mesure $\rho = \sigma \star \varepsilon_g$. $\square$

COROLLAIRE 3.6. — *Si h est un élément extrémal non nul du cône HG_+ (ou du cône H_+), alors pour tout $A \in \mathcal{I}$, nous avons l'alternative suivante :*

$$\textit{ou bien } \forall g \in G,\ {}^{h^g}P[A] = 0 \quad \textit{ou bien } \forall g \in G,\ {}^{h^g}P[A] = 1.$$

Variables aléatoires $\tilde{\theta}$-invariantes et cocycle associé à une fonction harmonique à gauche

DÉFINITION 3.7. — Un borélien A de $\Omega = G \times \Omega$ est dit *$\tilde{\theta}$-invariant* si $\tilde{\theta}^{-1}(A) = A$. L'ensemble des boréliens $\tilde{\theta}$-invariants forme une tribu que l'on notera $\mathcal{G}$. Une variable Z est $\mathcal{G}$-mesurable si et seulement si $Z = Z \circ \tilde{\theta}$; une telle application sera dite *$\tilde{\theta}$-invariante.*

3.8. — Soit h un élément non nul de HG_+. Pour simplifier l'écriture, nous écrivons $\bar{h}$ au lieu de h^λ. Pour tout $g \in G$ et tout $\omega \in \Omega$, nous posons :

$$\xi(g,\omega) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\bar{h}\big(gX_n(\omega)\big)}{\bar{h}\big(X_n(\omega)\big)}.$$

Pour tout $g \in G$, la variable aléatoire $\xi(g,\cdot)$ est bornée (lemme 2.4) et $\tilde{\theta}$-invariante.

PROPOSITION 3.9 (*cf.* [20, compléments chap. IV]). — *Soient* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *deux probabilités définies sur un espace mesurable filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$. *Pour tout entier naturel* n, *appelons* $\mathbb{P}_n$ *et* $\mathbb{Q}_n$ *les restrictions des probabilités* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *à la tribu* $\mathcal{F}_n$. *Supposons que, pour tout entier* $n \geq 0$, *la probabilité* $\mathbb{Q}_n$ *soit absolument continue par rapport à la probabilité* $\mathbb{P}_n$ *avec une densité notée* U_n. *Alors* :

(i) *la suite de variables aléatoires* $(U_n)_{n\geq 0}$, *définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *est une martingale positive qui converge,* $\mathbb{P}$*-p.s., vers une variable aléatoire* $\mathbb{P}$*-intégrable* U ;

(ii) *la probabilité* $\mathbb{Q}$ *s'écrit* $\mathbb{Q} = U\mathbb{P} + \mathbb{D}$, *où* $\mathbb{D}$ *est une mesure positive étrangère à la probabilité* $\mathbb{P}$;

(iii) *la probabilité* $\mathbb{Q}$ *s'écrit* $\mathbb{Q} = U\mathbb{P}$ *si et seulement si* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U] = 1$.

Dans ce dernier cas, la convergence de la suite de v.a. $(U_n)_{n\geq 0}$ *vers* U *a lieu aussi dans* $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et l'on a* $U_n = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U \mid \mathcal{F}_n]$ *pour tout* $n \geq 0$.

PROPOSITION 3.10. — *Nous avons les propriétés suivantes* :

(i) *pour tout* $g \in G$ *et tout* $n \geq 0$,

$$\frac{\bar{h}(gX_n)}{\bar{h}(X_n)} = {}^{\bar{h}}\mathbb{E}\big[\xi(g,\cdot) \mid \mathcal{F}_n\big], \quad {}^{\bar{h}}\mathbb{P}\text{-}p.s., \qquad \bar{h}(g)\,{}^{\bar{h}^g}\mathbb{P} = h(e)\,\xi(g,\cdot)\,{}^{\bar{h}}\mathbb{P}\,;$$

(ii) *pour tous* $g, x \in G$, *on a* $\xi(gx,\cdot) = \xi\big(g,(x,\cdot)\big)\,\xi(x,\cdot)$, $\;{}^{\bar{h}}\mathbb{P}$*-p.s.* ;

(iii) ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}(\mathrm{d}g, \mathrm{d}\omega) = \xi(g,\omega)\,{}^{\bar{h}}\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)\,\sigma(\mathrm{d}g)$.

Preuve. — Pour tous $g, x \in G$, le processus $\big(\bar{h}(gxX_n)/\bar{h}(xX_n)\big)_{n\geq 0}$, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, {}^{\bar{h}^x}\mathbb{P})$, est une martingale bornée relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Ce processus converge donc ${}^{\bar{h}^x}\mathbb{P}$-p.s. et dans tous les espaces $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, {}^{\bar{h}^x}\mathbb{P}), (p \geq 1)$, vers $\xi\big(g,(x,\cdot)\big)$. On sait que cette limite ferme la martingale; d'où la première assertion de (i).

En remarquant que

$$\frac{\bar{h}(x)}{\bar{h}(gx)}\,\frac{\bar{h}(gxX_n)}{\bar{h}(xX_n)}$$

est la dérivée de Radon-Nikodym de la restriction à $\mathcal{F}_n$ de la probabilité ${}^{\bar{h}^{gx}}\mathbb{P}_\sigma$ par rapport à la restriction à $\mathcal{F}_n$ de la probabilité ${}^{\bar{h}^x}\mathbb{P}$, nous avons (proposition 3.9) :

$$\forall x, g \in G, \quad \bar{h}(gx)\,{}^{\bar{h}^{gx}}\mathbb{P} = \xi\big(g,(x,\cdot)\big)\,\bar{h}(x)\,{}^{\bar{h}^x}\mathbb{P}.$$

On en déduit que toutes les probabilités ${}^{\bar{h}^x}\mathbb{P}$, pour $x \in G$, sont équivalentes.

L'assertion (ii) est évidente.

À l'aide de l'assertion (i), on vérifie aisément que les deux probabilités de l'assertion (iii) coïncident sur les tribus $\mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{F}_n$, $n \geq 0$; d'où le résultat. $\square$

Nous appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires Z, $\tilde{\theta}$-invariantes et telles que, pour tout $g \in G$, la variable aléatoire $Z(g,\cdot)\xi(g,\cdot)$ soit ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-intégrable.

PROPOSITION 3.11. — *Nous avons les propriétés suivantes :*

(i) *Pour toute variable aléatoire Z de $\mathcal{E}$, la relation*

$$f(g) = h(e)\,{}^{\bar{h}}\mathbb{E}\big[\xi(g,\cdot)Z(g,\cdot)\big], \qquad (g \in G),$$

définit un élément de HG_+ tel que la mesure ${}^{f}\mathbb{P}$ soit absolument continue par rapport à la mesure ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$.

(ii) *Réciproquement, soit f un élément de HG_+ tel que la mesure ${}^{f}\mathbb{P}$ soit absolument continue par rapport à la mesure ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$. Pour tout $g \in G$, la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{f(gX_n)}{\bar{h}(gX_n)}\right)_{n\geq 0}$ converge, ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s., vers une variable aléatoire $Z(g,\cdot)$. La v.a. Z appartient à $\mathcal{E}$ et l'on a*

$$f(g)\,{}^{f^g}\mathbb{P} = h(e)\,Z(g,\cdot)\,\xi(g,\cdot)\,{}^{\bar{h}}\mathbb{P}.$$

Preuve. — À l'aide des assertions (ii) et (iii) de la proposition 3.10, on vérifie facilement que la fonction f appartient à HG_+. Pour tous $x, g \in G$, il résulte de la proposition 3.10 et de 3.2 que :

$$f(gx) = \bar{h}(x)\,{}^{\bar{h}}\mathbb{E}_x\big[Z(g,\cdot)\xi(g,\cdot)\big].$$

D'où, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $s \in G$,

$$\frac{f(gX_n)}{\bar{h}(X_n)} = {}^{\bar{h}}\mathbb{E}_{X_n}\big[Z(g,\cdot)\,\xi(g,\cdot)\big] = {}^{\bar{h}}\mathbb{E}_s\big[Z(g,\cdot)\,\xi(g,\cdot) \mid \mathcal{F}_n\big],\ {}^{\bar{h}}\mathbb{P}_s\text{-p.s.};$$

car la v.a. $Z(g,\cdot)\,\xi(g,\cdot)$ est $\tilde{\theta}$-invariante.

Via la proposition 3.9, on en déduit alors que :

$$f(g)\,{}^{f^g}\mathbb{P} = h(e)\,Z(g,\cdot)\,\xi(g,\cdot)\,{}^{\bar{h}}\mathbb{P}.$$

D'où l'assertion (i) de la proposition.

La seconde assertion découle des propositions 3.9 et 3.10. $\square$

REMARQUE 3.12. — Si f est une fonction sur G, nous notons $\check{f}$ la fonction définie par $\check{f}(g) = f(g^{-1})$. De même si ρ est une mesure positive sur les boréliens de G, nous notons $\check{\rho}$ l'image de ρ par l'application $g \mapsto g^{-1}$. La fonction h appartient à H_+ si et seulement si h appartient à HG_+ et $\check{h}$ à $HG_+(\check{\sigma})$. On peut donc associer à $\check{h}$ la probabilité ${}^{\check{h}}\mathbb{P}_{\check{\sigma}}$ sur Ω ainsi qu'un cocycle $\check{\xi}$ satisfaisant à des propositions analogues aux propositions 3.10 et 3.11.

4. Outil fondamental

PROPOSITION 4.1. — *Soient h une fonction non nulle de HG_+ et α une fonction continue bornée sur G.*

Il existe une variable aléatoire Z_α de $\mathcal{E}$ et un sous-ensemble mesurable Ω_α de Ω, θ-invariant, de ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-mesure 1, *tels que, pour tout $(x, g, y) \in G^3$ et tout $\omega \in \Omega_\alpha$, la suite*

$$\Big(\frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n(\omega)x)}{\bar{h}(yX_n(\omega))} - Z_\alpha(g,\omega)\,\frac{\xi(g,\omega)}{\xi(y,\omega)}\,\frac{\bar{h}(X_n(\omega)x)}{\bar{h}(X_n(\omega))}\Big)_{n\geq 0}$$

converge vers zéro.

Preuve. — D'après les propositions 3.10 et 3.11, il existe un élément Z_α de $\mathcal{E}$ tel que pour tout $(g, y) \in G^2$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n)}{\bar{h}(yX_n)} = Z_\alpha(g,\cdot)\,\frac{\xi(g,\cdot)}{\xi(y,\cdot)} \quad {}^{\bar{h}}\mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Compte tenu de la séparabilité de G et des propriétés de continuité vérifiées par $\bar{h}$ et $h^{\alpha\lambda}$ (*cf.* les lemmes 2.1, 2.4 et la remarque 2.5), il suffit de montrer que, pour tout triplet (x, y, g) de G^3, la suite de variables aléatoires

$$\Big(\frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n(\cdot)x)}{\bar{h}(yX_n(\cdot))} - \frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n(\cdot))}{\bar{h}(yX_n(\cdot))}\,\frac{\bar{h}(X_n(\cdot)x)}{\bar{h}(X_n(\cdot))}\Big)_{n\geq 0}$$

converge ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s. vers zéro.

Soit $g \in G$. Posons, pour $n \geq 0$ et $r \geq 1$:

$$H(x) = \frac{h^{\alpha\lambda}(gx)}{\bar{h}(x)} \qquad (x \in G),$$

$$U_n = \int_G \frac{\bar{h}(X_n x)}{\bar{h}(X_n)}\big[H(X_n x) - H(X_n)\big]^2 \sigma^r(\mathrm{d}x).$$

On vérifie facilement que

$$U_n = {}^{\bar h}P^r\big[\big(H(\cdot) - H(X_n)\big)^2\big](X_n) = \big({}^{\bar h}P^r(H^2)\big)(X_n) - H^2(X_n)$$

et par suite

$${}^{\bar h}\mathbb{E}[U_n] = \big({}^{\bar h}P^{r+n}(H^2)\big)(e) - \big({}^{\bar h}P^n(H^2)\big)(e).$$

Comme la suite $\big(\big({}^{\bar h}P^n(H^2)\big)(e)\big)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $\|H\|_\infty^2$, la série $\sum_{n\geq 0} {}^{\bar h}\mathbb{E}[U_n]$ est convergente.

Il s'ensuit que, pour ${}^{\bar h}\mathbb{P}\otimes\sigma^{\star r}$-presque tout $(\omega, x)\in\Omega\times G$, la suite

$$\Big(\frac{\bar h(X_n(\omega)x)}{\bar h(X_n(\omega))}\big[H\big(X_n(\omega)x\big) - H\big(X_n(\omega)\big)\big]^2\Big)_{n\geq 0}$$

converge vers zéro, ce qui implique que la suite

$$\Big(\frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n(\omega)x)}{\bar h(X_n(\omega))} - \frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n(\omega))}{\bar h(X_n(\omega))}\,\frac{\bar h(X_n(\omega)x)}{\bar h(X_n(\omega))}\Big)_{n\geq 0}$$

converge vers zéro.

Du lemme 2.1 et de l'hypothèse (H), il résulte alors que, pour tout $x\in G$, la suite de variables aléatoires

$$\Big(\frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n(\cdot)x)}{\bar h(X_n(\cdot))} - \frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n(\cdot))}{\bar h(X_n(\cdot))}\,\frac{\bar h(X_n(\cdot)x)}{\bar h(X_n(\cdot))}\Big)_{n\geq 0}$$

converge ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-p.s. vers zéro. Le résultat voulu s'obtient en multipliant cette suite par la suite de variables aléatoires $(\bar h(X_n)/\bar h(yX_n))_{n\geq 0}$ qui converge vers $1/\xi(y,.)$ ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-p.s. □

4.2. — Pour illustrer la proposition précédente, montrons comment elle permet de retrouver que, pour un groupe nilpotent, les éléments extrémaux non nuls de HG_+ sont les exponentielles harmoniques, en se passant de la propriété de droite fixe.

Désignons par

$$G_1 = G,\ G_2 = [G,G],\ \dots\ ,\ G_r = [G, G_{r-1}] \text{ et } G_{r+1} = \{e\}$$

la série centrale descendante de G. Nous choisissons une suite de fonctions continues positives, à supports compacts, $(\alpha_p)_{p\geq 1}$, dont les supports sont de plus en plus petits et forment une base fondamentale de voisinages de l'élément neutre e de G et telle que $\int_G \alpha_p(g)\lambda(\mathrm{d}g) = 1$. On ajoute à cette suite la fonction α_0 identique à 1. De la proposition, il résulte immédiatement que l'on a, sur $\overline{\Omega} = \bigcap_{p\geq 0} \Omega_{\alpha_p}$:

$$\begin{cases} \forall g \in G,\ \forall z \in G_r, & \xi(gz,\cdot) = \xi(zg,\cdot) = \xi(g,\cdot)\,\xi(z,\cdot), \\ \forall p \geq 1, & Z_{\alpha_p}(gz,\cdot) = Z_{\alpha_p}(zg,\cdot) = Z_{\alpha_p}(g,\cdot). \end{cases}$$

Il s'ensuit que, pour tout $z \in G_r$, la variable aléatoire $\xi(z,.)$ est θ-invariante. Si h est extrémale, cette v.a est constante. On en déduit alors qu'il existe une exponentielle χ sur G_r telle que

$$\forall p \geq 0,\ \forall g \in G,\ \forall z \in G_r, \quad h^{\alpha_p\lambda}(gz) = h^{\alpha_p\lambda}(zg) = h^{\alpha_p\lambda}(g)\,\chi(z).$$

D'où, en passant à la limite en p,

$$\forall g \in G,\ \forall z \in G_r, \quad h(gz) = h(zg) = h(g)\,\chi(z).$$

Si G n'est pas abélien (*i.e.* si $r > 1$), l'égalité

$$\forall u \in G_{r-1},\ \forall g \in G, \quad \bar{h}(ug) = \chi(ugu^{-1}g^{-1})\,\bar{h}(gu)$$

montre que χ est trivial. (Noter que, pour u fixé, les fonctions $\bar{h}(u\cdot)/\bar{h}(\cdot)$ et $\bar{h}(\cdot u)/\bar{h}(\cdot)$ sont bornées et que, pour tout $u \in G_{r-1}$ et tout $(x,y) \in G^2$, on a $\chi(uxyu^{-1}y^{-1}x^{-1}) = \chi(uxu^{-1}x^{-1})\,\chi(uyu^{-1}y^{-1})$.) D'où le résultat. $\square$

5. Fonctions harmoniques sur certains groupes résolubles

Structure des groupes de Lie résolubles [8], [22].

5.1. — Soit G un groupe de Lie résoluble connexe dont l'algèbre de Lie est notée $\mathcal{G}$. Appelons N (resp. $\mathcal{N}$) le nilradical de G (resp. $\mathcal{G}$). Soit $\mathcal{P}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$ (*i.e.* une sous-algèbre nilpotente qui est son propre normalisateur dans $\mathcal{G}$). Nous avons $\mathcal{G} = \mathcal{N} + \mathcal{P}$ et $G = NP$, où P désigne le sous-groupe de Lie connexe de G ayant $\mathcal{P}$ pour algèbre de Lie.

Nous désignons par Ξ l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{P}$ dans la complexifiée $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{N}$. Pour tout $\beta \in \Xi$, nous posons

$$\mathcal{N}^{\mathbb{C}}_\beta = \bigcap_{H\in\mathcal{P}} \ker\big(\mathrm{ad}(H) - \beta(H)I\big)^d,$$

où d désigne la dimension de $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$. Nous avons

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in \Xi, \quad [\mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{\beta_1}, \mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{\beta_2}] \subseteq \mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{\beta_1+\beta_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\beta \in \Xi} \mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{\beta},$$

avec la convention $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{\beta} = (0)$ si β n'appartient pas à Ξ.

Une partition $\{\Xi_-, \Xi_+\}$ est dite *admissible* si :

a) Pour toute forme linéaire β de Ξ_- (resp. Ξ_+), la forme linéaire conjuguée $\bar{\beta}$ appartient à Ξ_- (resp. Ξ_+).

b) Si β_1, β_2 appartient à Ξ_- (resp. Ξ_+) et $\beta_1 + \beta_2$ appartient à Ξ, alors $\beta_1 + \beta_2$ appartient à Ξ_- (resp. Ξ_+).

c) Si elle appartient à Ξ, la forme linéaire nulle appartient à Ξ_+.

Si $\{\Xi_-, \Xi_+\}$ est une partition admissible de Ξ, nous posons

$$\mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{-} = \bigoplus_{\beta \in \Xi_-} \mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{\beta} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{+} = \bigoplus_{\beta \in \Xi_+} \mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{\beta}.$$

Les sous-algèbres $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{-}$ et $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}_{+}$ de $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ sont les complexifiées de deux sous-algèbres $\mathcal{N}_-$ et $\mathcal{N}_+$ de $\mathcal{N}$. Appelons respectivement N_- et N_+ les sous-groupes de Lie connexes de N ayant $\mathcal{N}_-$ et $\mathcal{N}_+$ pour algèbres de Lie. Le groupe nilpotent N_- est simplement connexe. L'application de $N_- \times N_+P$ dans G qui au couple (g_-, g_+) associe le produit g_-g_+ est un homéomorphisme.

L'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ étant nilpotente, tout poids de la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{N}$, est nul sur $\mathcal{N}$ et s'identifie donc à un poids de la représentation adjointe de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{N}$. Nous notons $\{\phi_\beta : \beta \in \Xi\}$ l'ensemble des poids de la représentation adjointe de G dans $\mathcal{N}$.

Notons

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \supset \mathcal{N}_2 = [\mathcal{N}, \mathcal{N}] \supset \cdots \supset \mathcal{N}_r = [\mathcal{N}, \mathcal{N}_{r-1}] \supset \mathcal{N}_{r+1} = (0)$$

la série centrale descendante de l'algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{N}$. Pour tout $U \in \mathcal{N}^{\mathbb{C}}_r \cap \bigcap_{H \in \mathcal{P}} \ker(\mathrm{ad}(H) - \beta(H)I)$ et tout $g \in G$,

$$g \exp(U + \overline{U})g^{-1} = \exp\bigl(\mathrm{Ad}\, g(U + \overline{U})\bigr) = \exp\bigl(\phi_\beta(g)U + \overline{\phi_\beta(g)U}\,\bigr).$$

En écrivant $g = u \exp H$, avec $u \in N$ et $H \in \mathcal{P}$, nous avons $\phi_\beta(g) = \phi_\beta(\exp H) = \mathrm{e}^{\beta(H)}$.

Principaux résultats.

DÉFINITION 5.2. — Soit G un groupe de Lie résoluble connexe. Nous disons que G est de *type* (T) si l'ensemble des poids β de Ξ vérifiant $|\phi_\beta(g)| = 1$ pour tout $g \in G$, est vide ou réduit au poids nul.

THÉORÈME 5.3. — *Soit G un groupe de Lie résoluble connexe de type* (T). *Soit σ une mesure de Radon positive sur G vérifiant la propriété* (H). *Alors tout élément extrémal h du cône H_+, vérifiant $h(e) = 1$, est une exponentielle harmonique sur G.*

COMMENTAIRE. — Ce résultat reprend en le corrigeant le théorème 1.3 de [23]. Dans [23], la démonstration est faite dans le cas du groupe des matrices triangulaires qui est un groupe de type (T). Les arguments donnés pour passer au cas d'un groupe résoluble général sont d'autant plus insuffisants que le résultat est faux.

Prenons, par exemple, le groupe $G = \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(2)$ des déplacements de $\mathbb{R}^2$. Soit χ une exponentielle sur $\mathbb{R}^2$. Appelons h la fonction sur G définie par

$$h(x,k) = \int_{\mathrm{SO}(2)} \chi(tx)\,\mathrm{d}t$$

où $\mathrm{d}t$ désigne la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact SO(2). La fonction h est bi-σ-harmonique pour toute mesure $\sigma = c^{-1}\sigma_1 \otimes \sigma_2$ où $c = \int_{\mathrm{SO}(2)} \chi(x)\sigma_1(\mathrm{d}x)$, σ_1 est une mesure sur $\mathbb{R}^2$ possédant une densité continue, à support compact, invariante par rotation et σ_2 une mesure de probabilité sur SO(2).

La description du cône H_+ dans le cas d'un groupe résoluble connexe général reste donc un problème ouvert. Les techniques précédentes et celles développées dans [19] et [11] permettent de se ramener au cas où le nilradical de G est abélien et tous les poids de G sont distincts de 1 et de module 1.

DÉFINITION 5.4. — Soit G un groupe de Lie résoluble connexe. Nous disons que G est de type (TT) si :

(i) G est de type (T) ;

(ii) le nilradical N de G est abélien ;

(iii) l'action de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{N}$ est semi-simple et l'ensemble des poids non nuls de Ξ est la réunion de deux familles Ξ_1 et Ξ_2 de formes linéaires indépendantes sur $\mathcal{P}$ telles que (lorsque Ξ_2 est non vide), pour tout élément λ_2 de Ξ_2, il existe un élément λ_1 de Ξ_1 vérifiant $\lambda_2 = a\lambda_1$, pour un réel a strictement négatif.

Par exemple, pour tout entier $p \geq 1$, le produit direct de p groupes affines est un groupe de type (TT). L'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ muni du produit

$$(x_1, x_2, a)(y_1, y_2, b) = (x_1 + \mathrm{e}^a y_1, x_2 + \mathrm{e}^{-a} y_2, ab)$$

est aussi du type (TT). Par contre le même espace muni du produit

$$(x_1, x_2, a)(y_1, y_2, b) = (x_1 + \mathrm{e}^a y_1, x_2 + \mathrm{e}^{2a} y_2, ab)$$

n'est pas de type (TT).

THÉORÈME 5.5. — *Soient G un groupe de Lie résoluble connexe de type* (TT) *et σ une mesure de Radon positive sur G vérifiant la propriété* (H).

Alors pour tout élément extrémal h du cône HG_+, vérifiant $h(e) = 1$, la suite de fonctions $\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n h^{\sigma^{*k}}\big)_{n\geq 1}$ converge, uniformément sur les compacts de G, vers une exponentielle harmonique χ. Si h n'est pas égale à χ, il existe un sous-groupe distingué fermé H de G et une mesure de Radon positive $\chi\sigma$-invariante, ν, sur l'espace homogène G/H de G tels que $h(g) = \chi(g)\mathrm{d}g\nu/\mathrm{d}\nu(x)$ pour un élément x de G/H.

REMARQUE IMPORTANTE 5.6. — Plaçons nous sous les hypothèses du théorème précédent. Le lemme 5.7 ci-dessous permet de se débarasser des poids β de Ξ tels que $\limsup_{n\to+\infty} |\phi_\beta(X_n)| > 0$, ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-p.s. En particulier, parmi ces poids figurent (*cf.* 5.11) le poids nul et les poids tels que :

$$\tau(\beta) = \int_G \chi(g)\,\mathrm{Log}\big|\phi_\beta(g)\big|\,\sigma(\mathrm{d}g) > 0.$$

On se ramène donc à un groupe de type (TT) avec une famille de poids Ξ linéairement indépendante, sans poids nul et telle que $\tau(\beta) \leq 0$ pour tout $\beta \in \Xi$. Le groupe G est alors le produit semi-direct de son nilradical N par un groupe abélien A.

Si $\tau(\beta) < 0$ pour tout $\beta \in \Xi$, la composante N_n sur N de $(X_n)_{n\geq 1}$ converge ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-p.s. et ${}^1\mathbb{P}_{\chi\sigma}$-p.s. Le groupe H est alors égal à A et la mesure ν est, à une constante multiplicative près, la loi de la variable aléatoire limite sous ${}^1\mathbb{P}_{\chi\sigma}$.

S'il existe au moins un poids d'intégrale nulle, posons :

$$\Xi_- = \big\{\beta \in \Xi : \tau(\beta) < 0\big\}, \quad \Xi_+ = \big\{\beta \in \Xi : \tau(\beta) = 0\big\}.$$

Appelons $N = N_- N_+$ la décomposition de N associée à cette partition admissible de Ξ. Pour la fonction h considérée, nous pouvons seulement dire que $A \subset H \subset AN_+$. Cependant, il existe sur N (*cf.* 5.11) une mesure de Radon positive ν, $\chi\sigma$-invariante (et donc de support égal à N), de masse infinie.

Démonstration des résultats.

Nous choisissons une suite de fonctions $(\alpha_p)_{p\geq 1}$, continues positives à supports compacts, dont les supports sont de plus en plus petits et forment une base fondamentale de voisinages de l'élément neutre e de G et telle que $\int_G \alpha_p(g)\,\lambda(\mathrm{d}g) = 1$. On ajoute à cette suite la fonction α_0 identique à 1. Nous appelons Ξ_r le sous-ensemble de Ξ constitué des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{N}_r^{\mathbb{C}}$.

Les résultats énoncés ci-dessus, reposent sur le lemme suivant.

LEMME 5.7. — *Soit h un élément extrémal non nul de HG_+ ou de H_+. Soit β un poids non nul de Ξ_r tel que* $\limsup_{n\to+\infty} |\phi_\beta(X_n)| > 0$, ${}^{\bar h}\mathbb{P}$*-p.s.. Alors, pour tout* $U \in \mathcal{N}_r^{\mathbb{C}} \cap \bigcap_{H\in\mathcal{P}} \ker(\operatorname{ad} H - \beta(H)I)$, *nous avons, pour tout* $g \in G$:

$$h\big(g\exp(U+\bar U)\big) = h\big(\exp(U+\bar U)g\big) = h(g).$$

Si le poids nul appartient à Ξ_r, alors le centre $Z(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ n'est pas trivial et, pour tout $u \in \exp(Z(\mathcal{G}))$, nous avons $h(gu) = h(ug) = h(g)h(u)$ pour tout $g \in G$.

Preuve du lemme 5.7. — Considérons le borélien de Ω de ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-mesure 1 défini par

$$\overline{\Omega} = \big\{\limsup_{n\to+\infty} |\phi_\beta(X_n)| > 0\big\} \cap \bigcap_{p\geq 0} \Omega_{\alpha_p}.$$

Posons $u = \exp(U+\bar U)$. Nous avons, sur $\overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned}
\xi(gu,\cdot) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\bar h(guX_n)}{\bar h(uX_n)}\,\xi(u,\cdot)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\bar h\big(gX_n\exp(\phi_\beta(X_n^{-1})U + \overline{\phi_\beta(X_n^{-1})U}\,)\big)}{\bar h\big(X_n\exp(\phi_\beta(X_n^{-1})U + \overline{\phi_\beta(X_n^{-1})U}\,)\big)}\,\xi(u,\cdot)\\
&= \xi(g,\cdot)\,\xi(u,\cdot) \quad \text{(proposition 4.1)}.
\end{aligned}$$

De même, pour tout entier $p \geq 1$, nous avons $Z_{\alpha_p}(gu,\cdot) = Z_{\alpha_p}(g,\cdot)$. Il s'ensuit que, pour tout $g \in G$, nous avons sur $\overline{\Omega}$:

$$\xi(ug,\cdot) = \xi(g,\cdot)\,\xi(g^{-1}ug,\cdot).$$

Or pour u fixé, la fonction $(g,\omega) \mapsto \xi(ug,\omega)/\xi(g,\omega)$ est bornée par $\|\bar h(u\cdot)/\bar h(\cdot)\|_\infty$. Comme G est de type (T), il existe $H \in \mathcal{P}$ tel que $\beta(H) = a + ib$, avec $a \neq 0$.

- Si $b = 0$, on pose, pour tout entier $n > 0$,

$$g_n = \exp\Big(\frac{\operatorname{Log} n}{a} H\Big).$$

La suite $\xi(g_n u g_n^{-1}, \cdot) = \big(\xi(u,\cdot)\big)^n$ est bornée, ce qui implique $\xi(u,\cdot) \leq 1$. En appliquant le résultat à u^{-1}, on obtient $\xi(u,\cdot) = 1$.

- Si $b \neq 0$, on pose, pour tout entier $n > 0$,

$$g_n = \exp\Big(\frac{2\pi n}{b} H\Big).$$

Appelons c et d respectivement les parties entière et fractionnaire du réel $e^{2\pi na/b}$. La suite $\xi(g_n u g_n^{-1}, \cdot) = \big(\xi(u,\cdot)\big)^c \xi(\exp(d(U + \overline{U})), \cdot)$ est bornée, ce qui implique comme précédemment que $\xi(u,\cdot) = 1$.

On en déduit que pour tout entier $p \geq 1$,

$$\forall g \in G, \quad h^{\alpha_p \lambda}(gu) = h^{\alpha_p \lambda}(ug) = h^{\alpha_p \lambda}(g).$$

En passant à la limite en p, on obtient alors la première assertion du lemme.

Posons $u = \exp U$, avec $U \in Z(\mathcal{G})$. Nous avons sur $\overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned}\xi(gu,\cdot) = \xi(ug,\cdot) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\bar{h}(gX_n u)}{\bar{h}(X_n u)} \xi(u,\cdot)\\ &= \xi(g,\cdot)\,\xi(u,\cdot) \qquad \text{(prop. 4.1).}\end{aligned}$$

Cette égalité montre que la variable aléatoire $\xi(u, .)$ est θ-invariante et par suite constante ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s.

De même, pour tout entier $p \geq 1$, nous avons $Z_{\alpha_p}(gu,\cdot) = Z_{\alpha_p}(g,\cdot)$ sur $\overline{\Omega}$. On en déduit que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$\forall g \in G, \quad h^{\alpha_p \lambda}(gu) = h^{\alpha_p \lambda}(g)\,\bar{h}(u) = h^{\alpha_p \lambda}(g)\,h(u).$$

En passant à la limite en p, on obtient alors la seconde assertion du lemme. □

5.8 Preuve du théorème 5.3. — Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension q de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Pour $q = 1$, le groupe G est abélien ; le résultat est donc vrai. Supposons le résultat acquis pour les groupes G tels que $\dim \mathcal{G} < q$ et supposons que $\dim \mathcal{G} = q$.

Supposons que Ξ_r possède un poids β non nul. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathrm{Log}\big|\phi_\beta(X_n)\big| = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Log}\big|\phi_\beta(Y_1)\big| \circ \theta^k.$$

Du théorème ergodique, il résulte que, ${}^h\mathbb{P}$-p.s.,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Log}\big|\phi_\beta(X_n)\big| &= {}^h\mathbb{E}\big[\mathrm{Log}\ \left|\phi_\beta(Y_1)\right|\big] \\ &= \int_G \mathrm{Log}\,\left|\phi_\beta(g)\right| \frac{h(g)}{h(e)} \sigma(\mathrm{d}g).\end{aligned}$$

- Si cette dernière intégrale est strictement positive,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Log}\big|\phi_\beta(X_n)\big| = +\infty.$$

Le lemme 5.7 permet alors de se ramener au cas où $\dim \mathcal{G} < q$.

- Si l'intégrale est nulle, nous avons d'après [3] :

$$\limsup_{n\to+\infty} \big|\phi_\beta(X_n)\big| \geq 1, \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Comme précédemment, le lemme 5.7 permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

- Si l'intégrale est strictement négative, on se ramène au premier cas en travaillant avec la fonction $\check{h}$ qui appartient à $HG_+(\check{\sigma})$ (*cf.* la remarque 3.12). En effet, nous avons

$$\int_G \mathrm{Log}\big|\phi_\beta(g)\big|\, \check{h}(g)\, \check{\sigma}(\mathrm{d}g) = -\int_G \mathrm{Log}\big|\phi_\beta(g)\big|\, h(g)\, \sigma(\mathrm{d}g).$$

Supposons que Ξ_r soit réduit au poids nul. Le lemme 5.7 nous dit que le centre $Z(\mathcal{G})$ est non trivial et pour tout $u \in \exp(Z(\mathcal{G}))$ et tout $g \in G$, $h(gu) = h(ug) = h(g)h(u)$. Si la longueur r de la série centrale descendante de $\mathcal{N}$ est > 1, il résulte de cette égalité que $h(u) = 1$ pour tout $u \in \exp(Z(\mathcal{G}))$ (*cf.* 4.2). Et on se ramène ainsi au cas $\dim \mathcal{G} < q$. Si $r = 1$, le groupe G est nilpotent et la section 4.2 permet de conclure. $\square$

5.9 Preuve du théorème 5.5. — Remarquons tout d'abord que, pour tout poids β, le borélien

$$\Big\{\limsup_{n\to+\infty} \left|\phi_\beta(X_n)\right| > 0\Big\}$$

de Ω est θ-invariant et donc de ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-mesure 0 ou 1. Comme pour le théorème 5.3, nous raisonnons par récurrence sur la dimension q de $\mathcal{G}$. À l'aide du lemme 5.7, on se ramène au cas où tout poids non nul de Ξ vérifie $\lim_{n\to+\infty} |\phi_\beta(X_n)| = 0$ ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s.

Supposons que le poids nul appartienne à Ξ. D'après le lemme 5.7, nous avons $h(gu) = h(ug) = h(g)h(u)$ pour tout $g \in G$ et tout $u \in \exp Z(\mathcal{G})$. Du corollaire 2.3, il résulte qu'il existe une fonction bi-σ-harmonique f telle que, $f(u) = \bar{h}(u) = h(u)$ pour tout $u \in \exp Z(\mathcal{G})$. D'après le théorème 5.3, la fonction f est une moyenne d'exponentielles harmoniques sur G. Autrement dit $f(\cdot) = \int_E \chi(\cdot)\rho(\mathrm{d}\chi)$, pour une mesure de probabilité ρ sur l'ensemble E des exponentielles harmoniques. (Noter que $f(e) = h(e) = 1$, car h est une exponentielle sur $\exp Z(\mathcal{G})$.) En écrivant, pour tout entier relatif n non nul,

$$h(u) = \big(h(u^n)\big)^{\frac{1}{n}} = \Big(\int_E (\chi(u))^n \rho(\mathrm{d}\chi)\Big)^{\frac{1}{n}},$$

on voit que, pour ρ-presque tout χ, $\chi(u) = h(u) = \| \cdot (u)\|_{\mathbb{L}^\infty(E,\rho)}$. D'où l'on déduit l'existence d'une exponentielle χ sur G qui coïncide avec h sur $\exp Z(\mathcal{G})$. En remplaçant le couple (h,σ) par $(h\chi^{-1},\chi\sigma)$, on se ramène alors au cas où $\dim \mathcal{G} < q$. L'hypothèse de récurrence nous donne alors le résultat.

Nous sommes ainsi ramenés au cas où, ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s., $\lim_{n\to+\infty} |\phi_\beta(X_n)| = 0$, pour tout $\beta \in \Xi$. Dans ce cas P est un sous-groupe abélien de G que nous noterons A, le nilradical N est simplement connexe et G est le produit semi-direct de N par A. (Noter que $[\mathcal{P},\mathcal{P}] \subseteq \mathcal{N}_0 = \{0\}$.) Pour tout $g \in G$, nous notons respectivement $b(g)$ et $a(g)$ les composantes sur N et A de g dans la décomposition $G = NA$. Nous écrivons $N_n = b(X_n)$ et $A_n = a(X_n)$. En identifiant N à l'espace homogène G/A, nous écrivons aussi, pour $(g,x) \in G \times N$, $g \cdot x = b(gx)$. Nous envisageons les deux éventualités qui peuvent se présenter.

Premier cas : nous supposons que le borélien θ-invariant

$$B = \big\{\limsup_{n\to+\infty} \|N_n\| < +\infty\big\}$$

est de ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-mesure 1. Nous posons

$$\overline{\Omega} = B \cap \bigcap_{\beta\in\Xi} \big\{\lim_{n\to+\infty} |\phi_\beta(X_n)| = 0\big\} \cap \bigcap_{p\geq 0} \Omega_{\alpha_p}.$$

On obtient ainsi un borélien θ-invariant de Ω de ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-mesure 1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, appelons W_p la fermeture dans $C(G)$ de

$$\big\{H_p(g,\cdot) = h^{\alpha_p\lambda}(\cdot g)/\bar{h}(g)\,;\ g \in G\big\}.$$

Du lemme 2.4 et de la remarque 2.5, il résulte que W_p est compact.

Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \overline{\Omega}$, appelons $D(p,\omega)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence du couple de suite de fonctions

$$\big((H_p(A_n(\omega),\cdot))_{n\geq 1}, (H_0(A_n(\omega),\cdot))_{n\geq 1}\big);$$

$D(p,\omega)$ est un sous-ensemble compact de $W_p \times W_0$.

Tout couple (ψ_p,ψ_0) de $D(p,\omega)$ vérifie, pour $j \in \{0,p\}$,

$$\psi_j(ga,\omega) = \psi_j(g,\omega)\,\psi_0(a,\omega)$$

En effet, soit $k(n)$ une suite strictement croissante d'entiers telle que les suites de fonctions $(H_p(A_{k(n)}(\omega),\cdot))_{n\geq 1}$ et $(H_0(A_{k(n)}(\omega),\cdot))_{n\geq 1}$ convergent respectivement vers $\psi_p(\cdot,\omega)$ et $\psi_0(\cdot,\omega)$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $(N_{k(n)}(\omega))_{n\geq 0}$ converge vers u. Il vient alors, pour $(g,a) \in G \times A$,

$$\begin{aligned}
\psi_j(ga,\omega) &= \lim_{n\to+\infty} H_j\big(aA_{k(n)}(\omega),g\big)\,\psi_0(a,\omega)\\
&= \lim_{n\to+\infty} H_j\big(u^{-1}X_{k(n)}(\omega)a,g\big)\,\psi_0(a,\omega)\\
&= \lim_{n\to+\infty} H_j\big(u^{-1}X_{k(n)}(\omega),g\big)\,\psi_0(a,\omega) \quad \text{(proposition 4.1)}\\
&= \lim_{n\to+\infty} H_j\big(A_{k(n)}(\omega),g\big)\,\psi_0(a,\omega)\\
&= \psi_j(g,\omega)\,\psi_0(a,\omega).
\end{aligned}$$

Des relations, $A_n \circ \theta = a(Y_1)^{-1}A_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, il résulte que, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \overline{\Omega}$, on a $D(p,\omega) \doteq D(p,\theta\omega)$.

Pour tout entier $p \geq 0$, on a ainsi une application de $\overline{\Omega}$ dans l'ensemble des compacts de l'espace métrique $W_p \times W_0$. On voit facilement que cette application est mesurable. De la séparabilité de $W_p \times W_0$, il résulte alors que, quitte à remplacer $\overline{\Omega}$ par un sous-borélien θ-invariant de ${}^h\mathbb{P}$-mesure pleine, $D(p,\omega) = D_p$ pour tout $\omega \in \overline{\Omega}$, pour un certain compact D_p de $W_p \times W_0$ tel que

$$\forall(\psi_p,\psi_0) \in D_p, \quad \psi_j(ga) = \psi_j(g)\psi_0(a), \quad \forall j \in \{0,p\},\ \forall(g,a) \in G \times A.$$

Fixons un entier $p \geq 1$. Soit (ψ_p,ψ_0) un élément de D_p. Il existe une suite de temps d'arrêt, $(T_n)_{n\geq 1}$, relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$, telle que, pour tout $j \in \{0,p\}$ et tout $\omega \in \overline{\Omega}$, la suite de fonctions $(H_j(A_{T_n}(\omega),\cdot))_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact de G vers ψ_j. (En désignant par δ une distance sur l'espace métrique $C(G)$, il suffit de poser $T_1 = \inf\{n \geq 1 : \delta(H_j(A_n,\cdot),\psi_j) < 1,\ \forall j \in \{0,p\}\}$ et, pour $m \geq 1$,

$T_{m+1} = \inf\{n > T_m : \delta(H_j(A_n,\cdot),\psi_j) < 1/(m+1),\ \forall j \in \{0,p\}\}$.) Nous avons sur $\overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_p}(g,\cdot)\xi(g,\cdot) &= \lim_{n\to+\infty} H_p(X_n,g) \\ &= \lim_{n\to+\infty} H_p(X_{T_n},g) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\psi_p(gN_{T_n})}{\psi_0(N_{T_n})}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.10 ci-dessous, il existe une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ telle que la suite de v.a. $(N_{T_{S_n}})_{n\geq 1}$ converge ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-p.s. vers une v.a. N_∞. Il s'ensuit que :

$$Z_{\alpha_p}(g,\cdot)\,\xi(g,\cdot) = \frac{\psi_p(gN_\infty)}{\psi_0(N_\infty)} = \frac{\psi_p(g\cdot N_\infty)}{\psi_0(N_\infty)}\chi(g)$$

où $\chi(g) = \psi_0(a(g))$ est une exponentielle sur G.

Cela dit, pour toute fonction mesurable positive F sur N, nous avons :

$$\begin{aligned} {}^{\bar h}\mathbb{E}\Big[\frac{F(N_\infty)}{\psi_0(N_\infty)}\Big] &= \int_G {}^{\bar h}\mathbb{E}\Big[\frac{F(g\cdot N_\infty)}{\psi_0(g\cdot N_\infty)}\xi(g,\cdot)\Big]\sigma(\mathrm{d}g) \quad (\text{prop. } 3.10\ (\text{iii})) \\ &= \int_G {}^{\bar h}\mathbb{E}\Big[\frac{F(g\cdot N_\infty)}{\psi_0(N_\infty)}\Big]\chi(g)\sigma(\mathrm{d}g). \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'image ν de la mesure positive $\big(1/\psi_0(N_\infty)\big)^{\bar h}\mathbb{P}$ dans N, par l'application N_∞, est $\chi\sigma$-invariante.

D'autre part, les relations, pour F continue à support compact,

$$\begin{aligned} \int_N F(u)\,\nu(\mathrm{d}u) &= {}^{\bar h}\mathbb{E}\Big[\frac{F(N_\infty)}{\psi_0(N_\infty)}\Big] \\ &\leq \|F\|_\infty \sup\Big\{\frac{\bar h(x)}{\bar h(ux)} : u \in \operatorname{Supp} F\ ;\ x \in G\Big\}, \end{aligned}$$

montrent que ν est une mesure de Radon sur N. D'après ce qui précède, nous avons donc, pour tout entier $p \geq 0$ et tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} h^{\alpha_p\lambda}(g) &= \chi(g)\int_N \psi_p(g\cdot x)\,\nu(\mathrm{d}x) \\ &= \chi(g)\int_N \frac{\mathrm{d}g\nu}{\mathrm{d}\nu}(x)\,\psi_p(x)\,\nu(\mathrm{d}x) \\ &= \widetilde{\chi}(g)\int_N \frac{\mathrm{d}\nu}{dm}(g^{-1}\cdot x)\,\psi_p(x)\,m(\mathrm{d}x), \end{aligned}$$

en désignant par m une mesure de Haar du groupe N et en appelant $\widetilde{\chi}(g)$ l'exponentielle $\chi(g)\dfrac{\mathrm{d}gm}{\mathrm{d}m}(x)$ (quantité indépendante de $x \in N$).

La suite de mesures $\left(\psi_p\nu = \psi_p\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}m\right)_{p\geq 1}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence vague car la suite de leurs masses est bornée. Pour toute fonction continue à support compact ℓ sur G, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_G h^{\alpha_p\lambda}(g)\,\ell(g)\,m_G(\mathrm{d}g)\\ &= \int_G \widetilde{\chi}(g)\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}(b(g^{-1}))\Big(\int_N \psi_p(x)\,\ell(xg)\,m(dx)\Big)m_G(\mathrm{d}g).\end{aligned}$$

Ce qui montre que les valeurs d'adhérence de la suite de mesures $(\psi_p\nu)_{p\geq 1}$ ne sont pas nulles.

Soit ℓ une fonction continue positive, à support compact, sur G. La fonction

$$K_\ell(\cdot) = \int_G \chi(g)\frac{\mathrm{d}g\nu}{\mathrm{d}\nu}(\cdot)\,\ell(g)\lambda(\mathrm{d}g)$$

est continue positive et bornée. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fontions continues positives, à support compact, sur G, croissant vers la fonction identique à 1 sur G. Nous avons, pour tous entiers $p, n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_G h^{\alpha_p\lambda}(g)\,\ell(g)\,\lambda(\mathrm{d}g) &= \int_N K_\ell(x)\,\psi_p(x)\,m(\mathrm{d}x)\\ &\geq \int_N K_\ell(x)\,f_n(x)\,\psi_p(x)\,m(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

En appelant ρ une valeur d'adhérence (nécessairement non nulle) de la suite de mesures $(\psi_p m)_{p\geq 1}$, il s'ensuit que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_G h(g)\,\ell(g)\,\lambda(\mathrm{d}g) \geq \int_N K_\ell(x)\,f_n(x)\,\rho(\mathrm{d}x)$$

et par suite :

$$\int_G h(g)\ell(g)\,\lambda(dg) \geq \int_N K_\ell(x)\,\rho(\mathrm{d}x).$$

D'où l'on déduit que :

$$\forall g \in G, \quad h(g) \geq \chi(g)\int_N \frac{\mathrm{d}g\nu}{\mathrm{d}\nu}(x)\,\rho(\mathrm{d}x).$$

L'extrémalité de h implique alors qu'il existe un élément x_0 de N tel que :

$$\forall g \in G, \quad h(g) = \chi(g)\,\frac{\mathrm{d}g\nu}{\mathrm{d}\nu}(x_0).$$

D'où la seconde assertion du théorème.

Démontrons à présent la première assertion. Nous avons, ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s., pour tous $u \in N$ et $a \in A$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\bar{h}(X_n ua)}{\bar{h}(X_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\bar{h}(N_\infty A_{T_n} u A_{T_n}^{-1} a A_{T_n})}{\bar{h}(N_\infty A_{T_n})} = \frac{\psi_0(N_\infty a)}{\psi_0(N_\infty)} = \chi(a).$$

Par intégration en ω, nous obtenons que la suite de fonctions $\big(\bar{h}^{\sigma^{*n}}\big)_{n\geq 1}$ converge, uniformément sur les compacts de G, vers χ. Il s'ensuit que la suite de fonctions $\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \bar{h}^{\sigma^{*k}}\big)_{n\geq 1}$ converge, uniformément sur les compacts de G, vers χ. Des relations,

$$\forall k \geq 1, \quad h^{\sigma^{*k}} = \bar{h}^{\sigma^{*k}} + (1-z)^{-1}\big(\bar{h}^{\sigma^{*(k-1)}} - \bar{h}^{\sigma^{*k}}\big),$$

on déduit alors la première assertion du théorème.

LEMME 5.10. — *Soit $\big(U_n\big)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Supposons que, $\mathbb{P}$-p.s., $\limsup_{n\to+\infty} \|U_n\| < +\infty$. Alors il existe une suite de variables aléatoires $\big(S_n\big)_{n\geq 1}$ et une v.a. U_∞ telles que, $\mathbb{P}$-p.s., $\lim_{n\to+\infty} U_{S_n} = U_\infty$.*

Preuve. — De l'hypothèse il résulte que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M, \quad \mathbb{P}\big[\sup_{n\geq 1} \|U_n\| \leq M\big] > 1 - \varepsilon.$$

Il est clair alors qu'il suffit de montrer le résultat dans le cas où toutes les coordonnées de U_n restent dans l'intervalle $[0,1]$.

Nous traitons le cas $d = 1$. Nous posons, pour tous entiers $m \geq 0$ et $0 \leq k < 2^m$,

$$B_{m,k} = \limsup_n \Big\{U_n \in \Big[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\Big]\Big\} \ \text{ et } \ Q_{m,k} = B_{m,k} \cap \Big(\bigcap_{k<\ell<2^m} B_{m,\ell}^c\Big).$$

La suite $\big(S_n\big)_{n\geq 1}$ est alors définie par :

$$S_1 = \inf\big\{n \geq 1 : U_n \in \big[\tfrac{1}{2}, 1\big]\big\} 1_{B_{1,1}} + \inf\big\{n \geq 1 : U_n \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big]\big\} 1_{Q_{1,0}}$$

et, pour $m \geq 2$,

$$S_m = \sum_{0\leq k<2^m} \inf\Big\{n > S_{m-1} : U_n \in \Big[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\Big]\Big\} 1_{Q_{m,k}}.$$

Il est alors clair qu'avec ce choix $U_\infty = \limsup_{n\to+\infty} U_n$.

Le cas $d > 1$ se traite de la même façon en remplaçant les intervalles dyadiques par des hypercubes dyadiques. L'hypercube unité

$$Q = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \forall 1 \leq j \leq d,\ 0 \leq x_j \leq 1\},$$

est divisé en 2^d hypercubes

$$\{\tfrac{1}{2}(Q + i_1 e_1 + \cdots + i_d e_d) : i_1, \ldots, i_d \in \{0,1\}\}$$

où $(e_1, ..., e_d)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Ces hypercubes étant classés en mettant un ordre sur les multi-indices $(i_1, ..., i_d)$ de $\{0,1\}^d$. □

Deuxième cas : nous supposons que le borélien θ-invariant B est de ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-mesure nulle.

Tout ce qui a été fait jusqu'à présent s'applique à un groupe résoluble connexe de type (T). C'est seulement dans ce qui suit que nous aurons besoin des hypothèses plus restrictives. Posons :

$$\overline{\Omega} = B^c \cap \bigcap_{p \geq 0} \Omega_{\alpha_p}.$$

Choisissons des éléments H de $\mathcal{A}$ et ω de $\overline{\Omega}$. Pour tout entier $n > 0$, posons :

$$a_n = \exp\Big(\frac{H}{\|N_n(\omega)\|}\Big).$$

Nous avons, en identifiant N à son algèbre de Lie :

$$a_n X_n = a_n N_n a_n^{-1} N_n^{-1} X_n a_n = \Big[\Big(\operatorname{Exp}\Big(\frac{\operatorname{ad} H}{\|N_n\|}\Big) - I\Big) N_n\Big] X_n a_n\,.$$

Appelons $(k(n))_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \|N_{k(n)}(\omega)\| = +\infty$$

et la suite $(N_{k(n)}/\|N_{k(n)}\|(\omega))_{n \geq 0}$ converge vers un élément U de N de norme 1. Il s'ensuit que la suite $(\operatorname{Exp}(\operatorname{ad} H/\|N_{k(n)}\|) - I) N_{k(n)}(\omega)$ converge vers $\operatorname{ad} H(U)$.

Grâce aux propriétés de continuité, on en déduit alors que, pour tout entier $p \geq 0$,

$$\forall g \in G,\ \forall H \in \mathcal{A},\quad (Z_{\alpha_p}\xi)\big(g \operatorname{ad} H(U), \omega\big) = (Z_{\alpha_p}\xi)(g, \omega).$$

Pour tout $\omega \in \overline{\Omega}$, appelons N_ω l'ensemble des éléments u de N possédant les propriétés suivantes :

$$\forall p \geq 0,\ \forall g \in G,\ \forall a \in A, \quad (Z_{\alpha_p}\xi)\big(g\,\mathrm{Ad}\,a(u), \omega\big) = (Z_{\alpha_p}\xi)(g, \omega).$$

L'hypothèse (iii) de 5.4 nous assure qu'il existe un élément v de N tel que $\{\mathrm{Ad}\,a(v) : a \in A\} \subseteq \{\mathrm{ad}\,H(U) : H \in \mathcal{A}\}$. Il s'ensuit que N_ω est non vide. D'autre part, si u appartient à N_ω, on voit facilement que $\mathrm{Ad}(a(Y_1(\omega))^{-1})(u)$ appartient à $N_{\theta(\omega)}$. On en déduit que $N_\omega = N_{\theta(\omega)}$. Nous munissons l'ensemble des fermés $\mathcal{B}$ de N de sa topologie naturelle (*cf.* [5]). Les ouverts pour cette topologie sont les ensembles $U(\mathcal{O}, C)$ définis par :

$$U(\mathcal{O}, C) = \big\{S \in \mathcal{B} : \forall U \in \mathcal{O},\ S \cap U \neq \emptyset \text{ et } S \cap C = \emptyset\big\}$$

où $\mathcal{O}$ est une famille finie d'ouverts de N et C un sous-ensemble compact de N. La structure borélienne associée à cette topologie est engendrée par les ensembles $\{S \in \mathcal{B} : S \subseteq F\}$ où F est un fermé de N. Pour tout $x \in N$, la fonction $d(x, \cdot)$ est continue sur $\mathcal{B}$ et, pour toute suite dense $\{x_i : i \geq 1\}$ d'éléments de N, la famille de fonctions $\{d(x_i, \cdot)\}$ sépare les points de $\mathcal{B}$.

Soient $\{g_i : i \geq 1\}$ et $\{a_l : l \geq 1\}$ des suites d'éléments respectivement de G et A dense dans G et A. Soient F un fermé de N et $\{u_i : i \geq 1\}$ une famille d'éléments de F^c dense dans F^c. On montre facilement que l'ensemble $\{\omega \in \Omega : N_\omega \subseteq F\}$ est égal à

$$\bigcap_{i \geq 1} \bigcup_{\ell \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{p \geq 1} \Big\{\big|(Z_{\alpha_p}\xi)(g_j\,\mathrm{Ad}(a_\ell)(u_i), \omega) - (Z_{\alpha_p}\xi)(g_j, \omega)\big| > \frac{1}{k}\Big\},$$

ce qui montre que l'application $\omega \mapsto N_\omega$ est mesurable.

On en déduit alors que, quitte à prendre un sous-borélien de B de mesure pleine, il existe un sous-groupe W de N, distingué dans G, tel que $N_\omega = W$ pour tout $\omega \in B$.

Nous pouvons alors nous ramener au cas où $\dim \mathcal{G} < r$. L'hypothèse de récurrence nous donne alors le résultat. □

5.11. — Le théorème étant acquis, nous pouvons préciser le comportement de la suite de v.a. $(N_n)_{n \geq 0}$. Pour toute fonction bornée f sur G et tout entier $n \geq 1$, nous avons :

$$^{\bar{h}}\mathbb{E}\big[f(Y_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\big] = \int_G \frac{\bar{h}(X_n x)}{\bar{h}(X_n)}\, f(x)\, \sigma(\mathrm{d}x).$$

Il s'ensuit que, pour tout poids β non nul, la suite de v.a.

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big[\mathrm{Log}|\phi_\beta(Y_k)|-\int_G\frac{\bar h(X_{k-1}x)}{\bar h(X_{k-1})}\mathrm{Log}|\phi_\beta(x)|\,\sigma(\mathrm{d}x)\Big]\Big)_{n\geq 0}$$

est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),{}^{\bar h}\mathbb{P})$. Elle converge donc ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-p.s.. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Log}|\phi_\beta(X_n)|=\int_G\mathrm{Log}\,|\phi_\beta(x)|\,\chi(x)\,\sigma(\mathrm{d}x)=\tau(\beta).$$

Le lemme 5.7 permet de se ramener à un groupe de type (TT) avec une famille de poids Ξ linéairement indépendante, sans poids nul et telle que $\tau(\beta)\leq 0$ pour tout $\beta\in\Xi$. Le groupe G est alors le produit semi-direct de son nilradical N par un groupe abélien A.

Si toutes les intégrales $\tau(\beta)$ pour $\beta\in\Xi$ sont strictement négatives, alors la suite de v.a. $(N_n)_{n\geq 0}$ converge, ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-p.s. et ${}^1\mathbb{P}_{\chi\sigma}$-p.s. (cette dernière probabilité étant la mesure produit $\otimes_{\mathbb{N}^*}\chi\sigma$ sur Ω). D'après le lemme de Fatou, nous avons

$$\int_\Omega\int_N\liminf_{n\to+\infty}f\big(X_n(\omega)\cdot x\big)\nu(\mathrm{d}x)^1\mathbb{P}_{\chi\sigma}(\mathrm{d}\omega)\leq\int_N f(x)\,\nu(\mathrm{d}x)$$

pour toute fonction continue positive f sur N. Il s'ensuit que la mesure ν est nécessairement bornée et égale, à un coefficient multiplicatif près, à la loi de N_∞ sous ${}^1\mathbb{P}_{\chi\sigma}$.

S'il existe au moins un poids β d'intégrale nulle, montrons qu'il existe une mesure de Radon positive $\chi\sigma$-invariante, de masse infinie sur N. La démonstration qui suit est due à M. Babillot et P. Bougerol. Posons :

$$W=\{g\in G:\forall\beta\in\Xi,\ \phi_\beta(g)<1\},$$
$$\sigma_a=\frac{(1+a1_W)\,\chi\sigma}{1+a\int_W\chi\,\mathrm{d}\sigma}\quad\text{pour } 0<a<\tfrac{1}{2}.$$

Comme le sous-semi-groupe fermé engendré par le support de σ est égal à G, nous avons $\sigma(W)>0$. Pour la probabilité σ_a, toutes les intégrales associées à l'exponentielle identique à 1 sont strictement négatives; par conséquent il existe une mesure de probabilité σ_a-invariante ν_a. Soit ϕ une fonction continue positive et à support compact sur N. La fonction sur N définie par

$$r=\sum_{k\geq 1}2^{-k}\phi^{(\chi\sigma)^{*k}}$$

est ν_a-intégrable et à valeurs dans $]0,+\infty]$ (noter que $\chi\sigma\leq(1+a)\sigma_a$). Pour toute fonction f sur N, continue et à support compact, on a

$\nu_a(f) \leq 3\|f/r\|_\infty \nu_a(\phi)$, ce qui montre que la famille de mesures

$$\left\{\nu_a/\nu_a(\phi) : 0 < a < \tfrac{1}{2}\right\}$$

est vaguement relativement compacte. Toute valeur d'adhérence de cette famille, lorsque a tend vers zéro, est non nulle et $\chi\sigma$-invariante.

Puisque σ vérifie la condition (H), le support de la mesure ν est N tout entier. La mesure ν est alors nécessairement de masse infinie, car dans le cas contraire, cela contredirait la representation intégrale des fonctions $\chi\sigma$-harmoniques bornées à l'aide de N_- (*cf.* [22]).

REMARQUE 5.12. — Considérons un groupe G de type (TT) et μ une mesure de probabilité sur les boréliens de G, adaptée à G. Soit f une fonction μ-harmonique bornée, uniformément continue à droite. Nous choisissons une suite de fonctions continues positives à supports compacts, $(\ell_p)_{p\geq 1}$, dont les supports sont de plus en plus petits et forment une base fondamentale de voisinages de l'élément neutre e de G et telle que $\int_G \ell_p(g) m_G(\mathrm{d}g) = 1$. Pour tout entier $p \geq 1$, la fonction $f_p = f^{\ell_p m_G}$ est à la fois uniformément continue à gauche et à droite.

Dans tout ce qui a été fait précédemment, on peut remplacer l'élément h de HG_+ par la fonction identique à 1 et la fonction $h^{\alpha_p \lambda}$ par la fonction f_p. On en déduit alors qu'il existe un sous-groupe distingué fermé H de G, une mesure de probabilité μ-invariante ν et des fonctions ψ_p, $p \geq 1$, telles que :

$$\forall p \geq 1,\ \forall g \in G, \quad f_p(g) = \int_{G/H} \psi_p(g \cdot x)\, \nu(\mathrm{d}x).$$

De plus pour tout entier $p \geq 1$, la fonction ψ_p vérifie la propriété de continuité suivante :

$$\forall u \in N,\ \forall g, y \in G, \quad \big|\psi_p(g \cdot u) - \psi_p(y \cdot u)\big| \leq \sup_{x \in G} \big|f_p(gx) - f_p(yx)\big|.$$

Si la mesure de probabilité ν est absolument continue par rapport à une mesure de Haar du groupe G/H, alors, par des arguments standard (voir [4], preuve du théorème I.3), on obtient que f s'écrit :

$$f(g) = \int_{G/H} \psi(g \cdot x)\, \nu(\mathrm{d}x)$$

pour une fonction borélienne bornée ψ.

Lorsque la probabilité μ est étalée, toute fonction μ-harmonique bornée est uniformément continue à droite et toute mesure de probabilité μ-invariante sur G/H est absolument continue par rapport à une mesure de Haar du groupe G/H. Nous avons donc obtenu une représentation de Poisson des fonctions μ-harmoniques bornées à l'aide d'un espace homogène, sans hypothèse de moment sur la probabilité μ.

5.13 Exemple 1. — Nous considérons le cas du groupe affine de la droite réelle. Le groupe G est l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni du produit

$$(x,a) \cdot (y,b) = (x + \mathrm{e}^{a}y, a+b).$$

Pour tout $g \in G$, on écrit $g = (x(g), a(g))$. Les exponentielles sur G sont les fonctions $\{\mathrm{e}^{ca(\cdot)} : c \in \mathbb{R}\}$. La fonction $F(c) = \operatorname{Log} \int_G \mathrm{e}^{ca(g)}\sigma(\mathrm{d}g)$ est strictement convexe et $\lim_{|c|\to\pm\infty} F(c) = +\infty$. Posons :

$$m = \min\{F(c) : c \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $m > 1$, il n'y a pas d'exponentielle harmonique et HG_+ est réduit à la fonction nulle.
- Si $m = 1$, il y a une seule exponentielle harmonique, $\chi_0 = \mathrm{e}^{c_0 a(\cdot)}$. Il existe une unique mesure de Radon positive ν, $\chi_0\sigma$-invariante, de masse infinie, sur $\mathbb{R}$ et toute fonction h de HG_+ s'écrit

$$h(g) = c\chi_0(g) + \chi_0(g) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}g\nu}{\mathrm{d}\nu}(x)\, \rho(\mathrm{d}x),$$

pour un réel c et une mesure positive ρ sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

- Si $m < 1$, il y a deux exponentielles harmoniques,

$$\{\chi_1 = \mathrm{e}^{c_1 a(\cdot)},\ \chi_2 = \mathrm{e}^{c_2 a(\cdot)}\}, \quad c_1 < c_2.$$

Il existe une unique mesure ν de probabilité, $\chi_1\sigma$-invariante, sur $\mathbb{R}$ et toute fonction h de HG_+ s'écrit

$$h(g) = c\chi_2(g) + \chi_1(g) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}g\nu}{\mathrm{d}\nu}(x)\, \rho(\mathrm{d}x),$$

pour un réel c et une mesure positive ρ sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

Cette description généralise celle donnée par L. Élie [13], [14] qui se limite au cas où σ est une mesure de probabilité.

5.14 Exemple 2. — Nous considérons le cas du groupe G constitué de l'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ muni du produit

$$(x_1, x_2, a) \cdot (y_1, y_2, b) = (x_1 + \mathrm{e}^{a}y_1, x_2 + \mathrm{e}^{-a}y_2, a+b).$$

Pour tout $g \in G$, on écrit $g = (x_1(g), x_2(g), a(g))$. Les exponentielles sur G sont les fonctions $\{\mathrm{e}^{ca(\cdot)} : c \in \mathbb{R}\}$. La fonction $F(c) = \operatorname{Log} \int_G \mathrm{e}^{ca(g)} \sigma(\mathrm{d}g)$ est strictement convexe et $\lim_{|c| \to \pm\infty} F(c) = +\infty$. Posons :

$$m = \min\{F(c) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Le lemme 5.7 ramène l'étude de cet exemple à l'exemple précédent. Pour $j \in \{1, 2\}$, nous appelons π_j la projection de G sur le groupe affine de la droite réelle définie par $\pi_j(g) = (x_j(g), a(g))$.

- Si $m > 1$, il n'y a pas d'exponentielle harmonique et HG_+ est réduit à la fonction nulle.
- Si $m = 1$, il y a une seule exponentielle harmonique, $\chi_0 = \mathrm{e}^{c_0 a(\cdot)}$. Pour tout $j \in \{1, 2\}$, il existe une unique mesure de Radon positive ν_j, de masse infinie, $\pi_j(\chi_0 \sigma)$-invariante, sur $\mathbb{R}$ et toute fonction h de HG_+ s'écrit

$$h(g) = c\chi_0(g) + \chi_0(g) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}g\nu_1}{\mathrm{d}\nu_1}(x)\, \rho_1(\mathrm{d}x) + \chi_0(g) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}g\nu_2}{\mathrm{d}\,\nu_2}(x)\, \rho_2(\mathrm{d}x),$$

pour un réel c et des mesures positives ρ_1 et ρ_2 sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

- Si $m < 1$, il y a deux exponentielles harmoniques,

$$\{\chi_1 = \mathrm{e}^{c_1 a(\cdot)}, \chi_2 = \mathrm{e}^{c_2 a(\cdot)}\}, \quad c_1 < c_2.$$

Pour tout $j \in \{1, 2\}$, il existe une unique mesure de probabilité ν_j, $\pi_j(\chi_j \sigma)$-invariante, sur $\mathbb{R}$ et toute fonction h de HG_+ s'écrit

$$h(g) = \chi_1(g) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}g\nu_1}{\mathrm{d}\nu_1}(x)\, \rho_1(\mathrm{d}x) + \chi_2(g) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}g\nu_2}{\mathrm{d}\nu_2}(x)\, \rho_2(\mathrm{d}x),$$

pour des mesures positives ρ_1 et ρ_2 sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

La description précédente répond à une question posée par T. Lyons et D. Sullivan dans [18]. (Cette remarque a été signalée par le rapporteur que nous remercions vivement.)

Il est clair que la technique utilisée, permet de résoudre le problème pour des groupes plus généraux que ceux de types (TT). Nous traitons ci-dessous un exemple.

6. Fonctions harmoniques sur le revêtement des déplacements du plan

On considère le groupe G constitué de l'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ muni du produit

$$(x,s)\cdot(y,t) = (x + R_s y, s + t)$$

où R_s désigne la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi s) & -\sin(2\pi s) \\ \sin(2\pi s) & \cos(2\pi s) \end{pmatrix}.$$

Pour $g \in G$, nous écrivons $g = (u(g), s(g))$ avec $u(g) \in \mathbb{R}^2$ et $s(g) \in \mathbb{R}$.

Théorème 6.1. — *Soit σ une mesure de Radon positive sur G vérifiant la propriété* (H). *Pour tout $(x,r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, il existe une fonction continue positive $h_{(x,r)}$ sur G et un réel strictement positif $c(x,r)$, uniques, tels que :*

(i) $\displaystyle\int_G h_{(x,r)}(\,\cdot\, g)\,\sigma(\mathrm{d}g) = c(x,r)\, h_{(x,r)}$;

(ii) *pour tout $g \in G$, $h_{(x,r)}(g) = \mathrm{e}^{rs(g)}\,\mathrm{e}^{\langle x, u(g)\rangle}\gamma(R_{s(g)})$ pour une fonction continue γ sur* $\mathrm{SO}(2)$;

(iii) $h_{(x,r)}(e) = 1$.

Les éléments extrémaux, non nuls, du cône HG^+_σ sont les fonctions $h_{(x,r)}$ pour lesquelles $c(x,r) = 1$.

Commentaire. — Considérons le groupe $\widetilde{G}$ constitué de l'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathrm{SO}(2)$ muni du produit

$$(u,s,k)(v,t,\ell) = (u + kv, s + t, k\ell).$$

L'application $\pi : (u,s) \in G \mapsto (u,s,R_s)$ permet de plonger le groupe G dans $\widetilde{G}$. Le résultat obtenu ci-dessus est celui qu'on obtiendrait en appliquant, sans scrupule, les résultats de [11] au couple $(\widetilde{G}, \pi(\sigma))$.

En fait ce type de plongement est général (voir [24, th. 6.1]). Il semble donc raisonnable de conjecturer la généralité de ce résultat pour un groupe de Lie résoluble de type rigide.

6.2 Preuve du théorème 6.1. — Nous considérons un élément extrémal non nul h du cône H_+. Le sous-groupe discret $\{0\} \times \mathbb{Z}$ de G est central. De la proposition 4.1, il résulte alors que, sur Ω_1,

$$(f_1) \qquad \forall z \in \mathbb{Z},\ \forall g \in G, \quad \xi\big(g(0,z),\cdot\big) = \xi(g,\cdot)\,\mathrm{e}^{rz};$$

pour un certain réel r.

De même, pour tout $\alpha \in C_b(G)$, on a sur $\Omega_1 \cap \Omega_\alpha$,

$$(f_2) \qquad \forall z \in \mathbb{Z},\ \forall g \in G, \quad Z_\alpha\big(g(0,z),\cdot\big) = Z_\alpha(g,\cdot);$$

D'autre part, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, le sous-ensemble

$$\{g(u,0)g^{-1} = (R_{s(g)}u, 0) : g \in G\}$$

de G est compact. De la proposition 4.1, il s'ensuit (voir la preuve du lemme 5.7) que, sur Ω_1,

$$(f_3) \qquad \forall u \in \mathbb{R}^2,\ \forall g \in G, \quad \xi\big(g(u,0),\cdot\big) = \xi\big(g,\cdot\big)\,\xi\big((u,0),\cdot\big).$$

De même, pour tout $\alpha \in C_b(G)$, on a sur $\Omega_1 \cap \Omega_\alpha$,

$$(f_4) \qquad \forall u \in \mathbb{R}^2,\ \forall g \in G, \quad Z_\alpha\big(g(u,0),\cdot\big) = Z_\alpha(g,\cdot).$$

Cela dit, nous envisageons les deux cas qui peuvent se présenter. Nous reprenons la suite $(\alpha_p)_{p\geq 0}$ de la preuve du théorème 5.5.

Premier cas : nous supposons que le borélien

$$B = \big\{ \limsup_{n\to+\infty} \|u(X_n)\| < +\infty \big\}$$

est de ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-mesure 1. Nous avons, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$,

$$(0,s)X_n = (0,s)\big(u(X_n),0\big)(0,-s)\big(-u(X_n),0\big)X_n(0,s).$$

Posons :

$$\overline{\Omega} = B \cap \bigcap_{p\geq 0} \Omega_{\alpha_p}.$$

On obtient un borélien θ-invariant de Ω, de ${}^{\bar h}\mathbb{P}$-mesure 1. Pour tout $\omega \in B$, la suite

$$\big((0,s)(u(X_n(\omega)),0)(0,-s)(-u(X_n(\omega)),0)\big)_{n\geq 1}$$

reste dans un compact de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. A l'aide de la proposition 4.1, (f_3) et (f_4), on voit alors que l'on a, sur $\overline{\Omega}$,

$$\forall p \geq 0,\ \forall g \in G,\ \forall s \in \mathbb{R}, \quad (Z_{\alpha_p}\xi)\big(g(0,s),\cdot\big) = (Z_{\alpha_p}\xi)\big(g,\cdot\big)\xi\big((0,s),\cdot\big).$$

On en déduit alors que h est une exponentielle harmonique sur G.

Second cas : nous supposons que le borélien B est de ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-mesure nulle. Nous posons :

$$\overline{\Omega} = B^c \cap \bigcap_{p\geq 0} \Omega_{\alpha_p}.$$

Pour tout $\omega \in \overline{\Omega}$, appelons V_ω le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ formé des vecteurs u possédant la propriété suivante :

$$\forall g \in G, \quad \xi(g(u,0),\omega) = \xi(g,\omega).$$

En reprenant les arguments de la démonstration du théorème 5.5 (second cas), on voit que le sous-espace V_ω est de dimension ≥ 1 et que

$$V_\omega = R_{-s(Y_1(\omega))} V_{\theta\omega}.$$

D'où, quitte à remplacer $\overline{\Omega}$ par un sous-borélien de mesure pleine, la dimension m de V_ω ne dépend pas de $\omega \in \overline{\Omega}$.

- Si $m = 2$, la fonction h est une exponentielle harmonique.
- Il nous reste à étudier le cas $m = 1$. Dans ce cas, si V désigne la droite $\{(\alpha,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$, pour tout $\omega \in \overline{\Omega}$, nous pouvons écrire $V_\omega = R_\omega(V)$, pour un unique élément R_ω de SO(2). En choisissant une section mesurable de l'application naturelle de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on définit une application mesurable τ de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $R_\omega = R_{\tau(\omega)}$ et

$$\tau(\theta\omega) + s(Y_1(\omega)) - \tau(\omega) \in \mathbb{Z}.$$

Pour $g \in G$ et $\omega \in \overline{\Omega}$, posons :

$$\psi(g,\omega) = \frac{\xi\big(g(0,-\tau(\omega)),\omega\big)}{\xi\big((0,-\tau(\omega)),\omega\big)}.$$

A l'aide des relations (f_1) et (f_3), on vérifie facilement, que l'on a :

$$\forall g \in G,\ \forall \omega \in \overline{\Omega}, \quad \psi(g,\theta\omega) = \psi(g,\omega).$$

Quitte à remplacer $\overline{\Omega}$ par un sous-borélien de mesure pleine, nous pouvons écrire, pour une fonction continue ψ sur G,

$$\forall g \in G,\ \forall \omega \in \overline{\Omega}, \quad \psi(g,\theta\omega) = \psi(g,\omega)$$

De la relation (f_3), il résulte que

$$\forall (u,s) \in G, \quad \psi\big((u,s)\big) = \psi\big((0,s)\big)\xi\big((R_{-s+\tau(\omega)}u,0),\omega\big),$$

d'où l'existence d'un vecteur x_0 de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (u,s) \in G, \quad \psi\big((u,s)\big) = \psi\big((0,s)\big)\, \mathrm{e}^{\langle R_{-s}u, x_0\rangle}.$$

À l'aide de (f_1), il vient :

$$\forall (u,s) \in G, \quad \psi(u,s) = \mathrm{e}^{rs}\, \mathrm{e}^{\langle R_{-s}u, x_0\rangle}\, \phi_0(R_s);$$

pour une fonction continue ϕ_0 sur SO(2) identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On en déduit alors que, sur $\overline{\Omega}$,

$$\forall (u,s) \in G, \quad \xi\big((u,s),\cdot\big) = \mathrm{e}^{rs}\, \mathrm{e}^{\langle R_{-(s+\tau(\cdot))}u, x_0\rangle}\, \frac{\phi_0\big(R_{s+\tau(\cdot)}\big)}{\phi_0\big(R_{\tau(\cdot)}\big)}.$$

De la même façon, à l'aide des relations (f_2) et (f_4), on voit que, pour tout $p \geq 1$ et tout $g \in G$, la v.a. $Z_{\alpha_p}(g(0,-\tau),\cdot)$ est θ-invariante sur $\overline{\Omega}$ et par suite, sur un sous-borélien de $\overline{\Omega}$, de mesure pleine,

$$\forall (u,s) \in G, \quad Z_{\alpha_p}\big((u,s),\cdot\big) = \vartheta_p\big(R_{s+\tau(\cdot)}\big);$$

pour une fonction continue ϑ_p sur SO(2).

Pour tout entier $p \geq 0$, nous avons alors :

$$\forall (u,s) \in G, \quad h^{\alpha_p\lambda}(u,s) = \mathrm{e}^{rs} \int_{\mathrm{SO}(2)} \mathrm{e}^{\langle k^{-1}R_s^{-1}u, x_0\rangle} \phi_p(kR_s)\, \rho(\mathrm{d}k);$$

en posant, pour $p \geq 1$, $\phi_p = \phi_0\vartheta_p$ et en appelant ρ la mesure image de $1/\phi_0(R_\tau)\,{}^{h}\mathbb{P}$ par l'application R_τ. D'après l'assertion (iii) de la proposition 3.10, la mesure ρ vérifie la propriété suivante, pour toute fonction borélienne bornée F sur SO(2),

$$\int_{\mathrm{SO}(2)} F(k)\rho(\mathrm{d}k) = \int_{\mathrm{SO}(2)} \int_G F\big(kR_{s(g)}\big)\, \mathrm{e}^{rs(g)}\, \mathrm{e}^{\langle k^{-1}R_{s(g)}^{-1}u, x_0\rangle} \sigma(\mathrm{d}g)\, \rho(\mathrm{d}k).$$

On voit facilement alors que :

$$\forall (u,s) \in G, h(u,s) = \mathrm{e}^{rs}\, \mathrm{e}^{\langle u, x_1\rangle} \gamma(R_s);$$

avec

$$\gamma(R_s) = \frac{\mathrm{d}R_s\rho}{\mathrm{d}\rho}(k_0), \quad x_1 = k_0x_0$$

pour un certain $k_0 \in SO(2)$. La fonction continue γ vérifie la relation

$$\forall k \in \mathrm{SO}(2), \quad \gamma(k) = \int_G e^{rs(g)}\, \mathrm{e}^{\langle ku(g), x_1\rangle} \gamma\big(kR_{s(g)}\big)\sigma(\mathrm{d}g).$$

Pour achever la démonstration du théorème il suffit alors de reprendre mot à mot les arguments de [11]. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANCONA (A.). — *Negatively curved manifolds, elliptic operators and the Martin boundary*, Ann. of Math., t. **125**, 1987, p. 495–536.

[2] ANCONA (A.). — *Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés*, Lecture Notes in Math., t. **1427**, 1990, p. 4–112.

[3] ATKINSON (G.). — *Recurrence of co-cycles and random walks*, J. London Math. Soc., t. **13, 3**, 1976, p. 486–488.

[4] AZENCOTT (R.). — *Espaces de Poisson des groupes localement compacts*, Lecture Notes in Math., t. **148**, 1970.

[5] AUSLANDER (L.), MOORE (C.). — *Unitary representations of solvable Lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc., t. **62**, 1966.

[6] BABILLOT (M.). — *Potential at infinity on symmetric spaces and Martin boundary* in Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory, p. 23-46. — Picardello ed., Plenum Press, 1992.

[7] BOUGEROL (P.), ÉLIE (L.). — *Existence of non-negative harmonic functions on groups and on covering manifolds*, à paraître Ann. Inst. Henri Poincaré, 1993.

[8] BOURBAKI (N.). — *Lie groups and Lie algebra.* — Hermann, Paris, 1975.

[9] CHOQUET (G.), DENY (J.). — *Sur l'équation de convolution $\mu = \mu \star \sigma$*, C. R. Acad. Sci. Paris, série I Math., t. **250**, 1960, p. 799–801.

[10] CHOQUET (G.). — *Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **10**, 1960, p. 333–344.

[11] CONZE (J.-P.), GUIVARC'H (Y.). — *Propriété de droite fixe et fonctions propres des opérateurs de convolution*, Lecture Notes in Math., t. **404**, 1974; Séminaire de probabilités de Rennes (démonstrations détaillées), 1976, p. 126–133.

[12] DERRIENNIC (Y.). — *Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, t. **32**, 1975, p. 261–276.

[13] ÉLIE (L.). — *Fonctions harmoniques positives sur le groupe affine Probability measures on groups*, (Proc. Oberwolfach 1978), Lecture Notes in Math., t. **706**, 1979, p. 96–110.

[14] ÉLIE (L.). — *Comportement assymptotique du noyau potentiel sur les groupes de Lie*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **15**, 1982, p. 257–364.

[15] FURSTENBERG (H.). — *Translation invariant cones of functions on semisimple Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **71**, 1965, p. 271–236.

[16] GUIVARC'H (Y.). — *Sur la représentation intégrale des fonctions propres du Laplacien dans un espace symétrique*, Bull. Sci. Math. (2), t. **108**, 1984, p. 373–392.

[17] KARPELEVICH (F.I.). — *The geometry of geodesics and the eigenfunctions of the Laplace Beltrami operator on symmetric spaces*, Trudy Moskov. Mat. Obshch., t. **14**, 1965, p. 48–185; Trans. Moscow Math. Soc., p. 51–199, 1965.

[18] LYONS (T.), SULLIVAN (D.). — *Function theory, random paths and the covering spaces*, J. Differential Geom., t. **19**, 1984, p. 299–323.

[19] MARGULIS (G.A.). — *Positive harmonic functions on nilpotent groups*, Dokl., t. **166**, 5, 1966.

[20] NEVEU (J.). — *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* — Masson, 1970.

[21] PHELPS (R.R.). — *Lectures on Choquet's theorem.* — Van Nostrand, 1966.

[22] RAUGI (A.). — *Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes*, Bull. Soc. Math. France, mémoire 54, 1977, p. 5–118.

[23] RAUGI (A.). — *Un théorème de Choquet-Deny pour les groupes moyennables*, Probab. Th. Rel. Fields, t. **77**, 1988, p. 481–496.

[24] RAUGI (A.). — *Théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble...*, (Proc. Oberwolfach 1978), Lecture Notes in Math., t. **706**, 1979, p. 257–324.

[25] REVUZ (D.). — *Markov Chains.* — North-Holland, Amsterdam, 1975.

[26] SERIES (C.). — *Martin boundaries of random walks on Fuchsian Groups*, Israel J. Math., **44**, 3, 1983, p. 221–242.