BULLETIN DE LA S. M. F.

HERVÉ PAJOT

Conditions quantitatives de rectifiabilité

Bulletin de la S. M. F., tome 125, n^{o} 1 (1997), p. 15-53
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_1_15_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 15–53.

CONDITIONS QUANTITATIVES DE RECTIFIABILITÉ

PAR

HERVÉ PAJOT (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons une condition suffisante et quantitative de rectifiabilité pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de d-mesure de Hausdorff finie grâce à des versions L^q de la fonction β de Peter Jones. Pour cela, nous démontrons, dans un premier temps, que cette condition est en fait nécessaire et suffisante pour les ensembles Ahlfors-réguliers (de dimension d) de $\mathbb{R}^n$, puis nous traitons le cas général en établissant des théorèmes de recouvrement par des ensembles Ahlfors-réguliers.

ABSTRACT. — We give a sufficient and quantitative condition of rectifiability for the subsets of $\mathbb{R}^n$ of finite d-dimensional Hausdorff measure using L^q-versions of Peter Jones' β-functions. We first prove that this condition is necessary and sufficient for the Ahlfors-regular sets (with dimension d) of $\mathbb{R}^n$, then the general case follows from covering theorems by Ahlfors-regular sets.

1. Introduction

Grâce à la théorie de Littlewood-Paley, il est possible de relier la régularité d'une fonction à certaines estimations L^2. Un exemple simple est le théorème de Stein et Zygmund (voir [St] ou [StZ]) : une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet une dérivée en presque tout point d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si et seulement si en presque tout point $x \in E$, on a

$$(1) \qquad f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = \mathrm{O}(|t|) \quad \text{si} \quad t \to 0$$

et

$$(2) \qquad \int_{|t|\leq\delta} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty.$$

Plus récemment, il a été tenté, afin de traiter certains problèmes d'analyse harmonique, de relier la géométrie d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

(*) Texte reçu le 13 novembre 1995, révisé le 3 juin 1996, accepté le 25 septembre 1996.
Hervé PAJOT, Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay CEDEX (France) ; email : herve.pajot@math.u-psud.fr et Université de Cergy-Pontoise, Pôle Sciences et Techniques, Mathématiques, 2, av. Adolphe Chauvin, Pontoise 95302 Cergy-Pontoise CEDEX (France) ; email : pajot@u-cergy.fr

Classification AMS : 28 A 75 .

à certaines estimations L^2. Le but de cet article est de donner des conditions quantitatives de rectifiabilité pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ en s'inspirant des résultats de P.W. Jones pour les ensembles de dimension 1 et de G. David et S. Semmes pour les ensembles Ahlfors-réguliers de dimension $d \geq 1$ (voir section 2).

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$; par la suite, d désignera toujours un entier positif inférieur à n (en quelque sorte, d est la dimension de E).

On note H^d la d-mesure de Hausdorff.

On considère les fonctions β_q de Jones définies comme suit :

$$\beta_\infty(x,t,E) = \inf_P \sup_{y \in E \cap B(x,t)} \Big(\frac{\operatorname{dist}(y,P)}{t} \Big) \quad \text{si } E \cap B(x,t) \neq \emptyset, \tag{3}$$

$$\beta_\infty(x,t,E) = 0 \quad \text{si } E \cap B(x,t) = \emptyset. \tag{4}$$

De plus, si $1 \leq q < +\infty$,

$$\beta_q(x,t,E) = \inf_P \Big(\frac{1}{t^d} \int_{y \in E \cap B(x,t)} \Big(\frac{\operatorname{dist}(y,P)}{t} \Big)^q \mathrm{d}H^d(y) \Big)^{1/q} \tag{5}$$

où les inf sont pris sur tous les d-plans P de $\mathbb{R}^n$. Les fonction β_q mesurent dans toute boule la qualité de l'approximation de E par des d-plans.

Soit q tel que :

$$1 \leq q \leq \infty \quad \text{si } d = 1, \tag{6}$$

$$1 \leq q < \frac{2d}{d-2} \quad \text{si } d \geq 2. \tag{7}$$

Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ compact avec $H^d(E) < +\infty$. On suppose qu'en H^d presque tout point $x \in E$, on a les propriétés suivantes* :

$$\Theta_*^d(x,E) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{H^d(E \cap B(x,r))}{(2r)^d} > 0, \tag{8}$$

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty. \tag{9}$$

Alors, E est d-rectifiable.

(Pour la définition de la rectifiabilité, voir le début de la section 2.)

La réciproque de ce théorème est en général fausse, comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs. On considère le segment Γ d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, Γ_n formé de a_n segments de longueur $1/(a_n n^2)$ régulièrement répartis dans le segment d'extrémités $(0,2^{-n})$ et $(1,2^{-n})$. Soit

$$E=\Gamma\cup\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n\Big).$$

Alors E est compact, rectifiable, vérifie (8) et de plus

$$H^1(E)\le 1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}<+\infty.$$

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, a_n est suffisamment grand (de l'ordre de 2^n), alors pour tout $x\in\Gamma$,

$$B(x,2^{-n})\cap\Gamma_{n+1}\neq\emptyset.$$

On en déduit $\beta_\infty(x,2^{-n},E)\ge\frac14$ et donc

$$\int_0^1\beta_\infty(x,t,E)^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t}=\infty.$$

On a ainsi :

$$H^1\Big(\Big\{x\in E\,;\ \int_0^1\beta_\infty(x,t,E)^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t}=\infty\Big\}\Big)\ge H^1(\Gamma)=1.$$

Cependant, la réciproque du théorème 1.1 est vraie pour les ensembles Ahlfors-réguliers.

Un ensemble $E\subset\mathbb{R}^n$ est *Ahlfors-régulier de dimension* d ou d-régulier si E est fermé et s'il existe $C_0>0$ tel que, pour tout $x\in E$, tout r avec $0<r<\operatorname{diam}E$,

$$\frac{1}{C_0}r^d\le H^d\big(E\cap B(x,r)\big)\le C_0r^d. \tag{10}$$

La plus petite constante C_0 vérifiant (10) est appelée la *constante de régularité* de E.

Les d-plans, les d-graphes lipschitziens et certains ensembles de Cantor sont des exemples d'ensembles Ahlfors-réguliers.

THÉORÈME 1.2. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier, compact vérifiant $H^d(E) < +\infty$. Alors, E est d-rectifiable si et seulement si en H^d presque tout $x \in E$, on a :*

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty. \tag{11}$$

Le plan de l'article est le suivant.

La section 2 est consacrée à quelques rappels sur la théorie de la rectifiabilité. Dans la section 3, nous démontrons le théorème 1.1 pour les ensembles Ahlfors-réguliers ; les ingrédients principaux sont la théorie de la rectifiabilité uniforme de David et Semmes et des arguments de temps d'arrêt. Dans la section 4, nous donnons des théorèmes de recouvrement par des ensembles Ahlfors-réguliers (propositions 4.3, 4.4 et 4.5) qui nous permettent d'établir le théorème 1.1 dans le cas général à partir du cas des ensembles Ahlfors-réguliers. Enfin, dans la section 5, nous prouvons le théorème 1.2 (ou plutôt le sens restant).

Je tiens à remercier Guy David pour son constant soutien, ses nombreux conseils et suggestions.

2. Rappels sur la théorie de la rectifiabilité

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et d un entier positif inférieur à n.

- On définit la *d-mesure de Hausdorff* de E que l'on note $H^d(E)$ par

$$H^d(E) = \sup_{\delta>0} \Big[\inf \Big\{ \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^d \,;\ E \subset \bigcup_i E_i\,,\ \operatorname{diam} E_i < \delta \Big\} \Big]. \tag{12}$$

- Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit *d-rectifiable* si

$$E \subset E_0 \cup \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i \Big\} \quad \text{avec} \quad H^d(E_0) = 0$$

et Γ_i est un d-graphe *lipschitzien* pour tout $i \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\Gamma_i = \big\{ x + A_i(x)\,;\ x \in P_i \big\}$$

où P_i est un d-plan de $\mathbb{R}^n$ passant par l'origine, $P_i^\perp$ étant son orthogonal et $A_i : P_i \to P_i^\perp$ est une application lipschitzienne.

- Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit *purement non d-rectifiable* si

$$H^d(E \cap \Gamma) = 0$$

pour tout d-graphe lipschitzien Γ.

Un exemple simple d'ensemble de H^1-mesure finie, non nulle qui est purement non d-rectifiable est le « Cantor quatre coins » (voir [Ga]). Le lecteur voulant en savoir plus sur la théorie de la mesure géométrique pourra consulter [Fa], [Fe] ou [Ma] (on pourra trouver dans cette dernière référence une preuve des théorèmes 2.2, 2.4, 2.5 et 2.7 que nous allons maintenant énoncer).

Signalons le résultat évident suivant (que nous utiliserons souvent dans les sections 3 et 4).

PROPOSITION 2.1. — *Toute union dénombrable d'ensembles d-rectifiables est d-rectifiable.*

Il existe diverses caractérisations des ensembles d-rectifiables. On définit les *d-densités inférieure* et *supérieure* de E en $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\Theta_*^d(x, E) = \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-d} H^d\big(E \cap B(x, r)\big), \tag{13}$$

$$\Theta^{*d}(x, E) = \limsup_{r \downarrow 0} (2r)^{-d} H^d\big(E \cap B(x, r)\big). \tag{14}$$

Donnons quelques résultats de densité pour les ensembles de d-mesure de Hausdorff finie.

THÉORÈME 2.2. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $H^d(E) < \infty$. Alors, en H^d presque tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, on a*

$$\Theta_*^d(x, E) = \Theta^{*d}(x, E) = 0.$$

COROLLAIRE 2.3. — *Soient E et F deux sous-ensembles H^d-mesurables de $\mathbb{R}^n$ avec $E \subset F$. Alors, pour H^d presque tout $x \in E$, on a*

$$\Theta_*^d(x, E) = \Theta_*^d(x, F), \quad \Theta^{*d}(x, E) = \Theta^{*d}(x, F).$$

Le corollaire 2.3 s'obtient en appliquant le théorème 2.2 à $F \setminus E$.

THÉORÈME 2.4. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $H^d(E) < +\infty$. En H^d presque tout point $x \in E$, on a*

$$2^{-d} \leq \Theta^{*d}(x, E) \leq 1. \tag{15}$$

REMARQUE. — Il n'existe pas de théorèmes équivalents pour la densité inférieure. Ainsi, il existe des ensembles compacts du plan de 1-mesure de Hausdorff strictement positive tels que la densité inférieure est nulle en tout point de cet ensemble (voir la remarque 6.4 de [Ma]). L'hypothèse (8) du théorème 1.1 n'est donc pas superflue.

On peut caractériser les ensembles rectifiables en termes de densité.

THÉORÈME 2.5. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $H^d(E) < +\infty$.*

(i) *E est d-rectifiable si et seulement si en H^d presque tout $x \in E$,*

$$\Theta_*^d(x,E) = \Theta^{*d}(x,E) = 1.$$

(ii) *E est purement non d-rectifiable si et seulement si en H^d presque tout $x \in E$,*

$$\Theta_*^d(x,E) < 1.$$

REMARQUE. — L'Ahlfors-régularité est une notion différente de la régularité au sens de Besicovitch qui est équivalente à la rectifiabilité d'après (i).

Soit la Grassmannienne $G(n,d)$ qui est l'ensemble des d-plans de $\mathbb{R}^n$ qui passent par l'origine. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $\varepsilon \in \,]0,1[$ et $P \in G(n,d)$, on définit le «cône» $C(x,r,\varepsilon,P)$ par

$$C(x,r,\varepsilon,P) = \{y \in B(x,r)\,;\ \operatorname{dist}(x-y,P) \le \varepsilon \operatorname{dist}(x,y)\}. \tag{16}$$

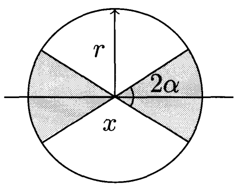

Figure 1. Le cône $C(x,r,\varepsilon,P)$ pour $n=2$ et $d=1$ ($\varepsilon = \sin\alpha$)

Soit $x \in E$. On dit que $P \in G(n,d)$ est le *d-plan tangent en x* à E si $\Theta_*^d(x,E) > 0$ et pour tout $\varepsilon \in \,]0,1[$, il existe $r > 0$ tel que

$$\{y \in E \cap B(x,r)\,;\ \operatorname{dist}(x-y,P) > \varepsilon \operatorname{dist}(x,y)\} = \emptyset, \tag{17}$$

ce qui signifie que les points de $E \cap B(x,r)$ sont dans $E \cap C(x,r,\varepsilon,P)$.

La notion de tangente classique en théorie de la mesure géométrique est la suivante : on dit que $P \in G(n,d)$ est le *d-plan tangent approximatif* en x à E si $\Theta_*^d(x,E) > 0$ et pour tout $\varepsilon \in \,]0,1[$,

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^d} H^d(\{y \in E \cap B(x,r)\,;\ \operatorname{dist}(x-y,P) > \varepsilon \operatorname{dist}(x,y)\}) = 0. \tag{18}$$

Ces deux notions coincident pour les ensembles d-réguliers.

LEMME 2.6. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier. En tout point x de E, il y a équivalence des propositions suivantes :*

(i) *E admet un d-plan tangent P en x ;*

(ii) *E admet un d-plan tangent approximatif P en x.*

Preuve du lemme 2.6. — Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) est évident. Considérons $x \in E$ tel que E admet un d-plan tangent approximatif P en x. Fixons $\varepsilon \in]0,1[$ et soit

$$\eta = \frac{1}{2C_0}\Big(\frac{\varepsilon}{100}\Big)^d$$

(où C_0 est la constante de régularité de E). Par définition de P, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leq r_0$, on a

$$H^d\big(\{y \in E \cap B(x,r)\,;\ \operatorname{dist}(x-y,P) > \tfrac{\varepsilon}{100}\operatorname{dist}(x,y)\}\big) \leq \eta r^d. \tag{19}$$

Supposons qu'il existe $y \in E \cap B(x,r_0)$ tel que

$$\operatorname{dist}(x-y,P) > \varepsilon \operatorname{dist}(x,y). \tag{20}$$

Quitte à prendre r_0 plus petit, on peut supposer

$$\tfrac{4}{5} r_0 \leq \operatorname{dist}(x,y) \leq \tfrac{9}{10} r_0. \tag{21}$$

On a alors, d'après (10),

$$H^d\Big(E \cap B\Big(y, \frac{\varepsilon r_0}{100}\Big)\Big) \geq \frac{1}{C_0}\Big(\frac{\varepsilon}{100}\Big)^d r_0^d \tag{22}$$

$$\geq 2\eta r_0^d. \tag{23}$$

Or d'après (20) et (21), on a

$$E \cap B\Big(y, \frac{\varepsilon r_0}{100}\Big) \subset \Big\{z \in E \cap B(x,r_0)\,;\ \operatorname{dist}(x-z,P) > \frac{\varepsilon}{100}\operatorname{dist}(x,z)\Big\}. \tag{24}$$

Donc, d'après (19),

$$H^d\Big(E \cap B\Big(y, \frac{\varepsilon r_0}{100}\Big)\Big) \leq \eta r_0^d, \tag{25}$$

ce qui est incompatible avec (23) ; donc

$$\Big\{y \in E \cap B(x,r_0)\,;\ \operatorname{dist}(x-y,P) > \frac{\varepsilon}{100}\operatorname{dist}(x,y)\Big\} = \emptyset.$$

On en déduit que P est le d-plan tangent en x à E.

On peut caractériser les ensembles rectifiables par l'existence de d-plans tangents.

THÉORÈME 2.7. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $H^d(E) < +\infty$.*

(i) *E est d-rectifiable si et seulement si en H^d presque tout $x \in E$, il existe un d-plan tangent approximatif à E.*

(ii) *E est purement non d-rectifiable si et seulement si en H^d presque tout $x \in E$, il n'existe pas de d-plan tangent approximatif à E.*

Nous allons maintenant donner des critères quantitatifs de rectifiabilité pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, en commençant par le cas de la dimension $d = 1$.

Afin de traiter certains problèmes d'analyse harmonique (voir [J1]), P.W. Jones a eu l'idée, pour mesurer la rectifiabilité, d'introduire les fonctions β_∞ (définies en (3)). Il peut alors caractériser les sous-ensembles de courbes rectifiables, ce qui apparaît comme une version géométrique du problème du voyageur de commerce.

THÉORÈME 2.8 (*cf.* [J2] et [Ok]). — *Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Il existe une courbe rectifiable Γ contenant E si et seulement si le nombre*

$$\beta^2(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\operatorname{diam} E} \beta_\infty(x,t,E)^2 \, \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}t}{t^n}$$

est fini. De plus, si c'est le cas, on a

$$\frac{1}{C}\big(\operatorname{diam} E + \beta^2(E)\big) \leq \inf_{\Gamma \supset E} H^1(\Gamma) \leq C\big(\operatorname{diam} E + \beta^2(E)\big).$$

(Ici, $\mathrm{d}x$ est l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle.)

Jones et Bishop ont donné une variante de ce théorème.

THÉORÈME 2.9 (*cf.* [BJ]). — *Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. S'il existe une constante $M > 0$ telle qu'en tout $x \in E$,*

$$\int_0^1 \beta_\infty(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq M,$$

alors E est inclus dans une courbe rectifiable Γ et

$$H^1(\Gamma) \leq C \mathrm{e}^{C(M + \operatorname{diam} E)}.$$

REMARQUE. — Les théorèmes 1.1 et 1.2 apparaissent comme des versions en dimension supérieure de ce résultat de Bishop et Jones.

Ils en déduisent une version faible de la conjecture ε^2 de Carleson (conjecture 3 de [B2]).

THÉORÈME 2.10 (*cf.* [BJ]). — *Soit* Γ *une courbe de Jordan. En* H^1 *presque tout point* $x \in \Gamma$, *il y a équivalence des propositions suivantes.*

(i) Γ *admet une tangente* (*au sens de* (17)) *en* x ;

(ii) $\int_0^1 \beta_\infty(x,t,\Gamma)^2 \mathrm{d}t/t < \infty$.

G. David et S. Semmes ont donné en dimension supérieure une version du théorème géométrique du voyageur de commerce de Jones.

Soit q vérifiant (6) ou (7) selon la valeur de d.

THÉORÈME 2.11 (*cf.* [DS1] et [DS2]). — *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble* d*-régulier. Il y a équivalence des propositions suivantes :*

(i) $\beta_q(x,t,E)^2\,\mathrm{d}H^d(x)\mathrm{d}t/t$ *est une mesure de Carleson sur* $E \times \mathbb{R}^+$, *c'est-à-dire qu'il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* $x \in E$ *et tout* $R > 0$,

$$\int_{y \in E \cap B(x,R)} \int_0^R \beta_q(y,t,E)^2\,\mathrm{d}H^d(y)\frac{\mathrm{d}t}{t} \le CR^d\,; \tag{26}$$

(ii) E *est inclus dans une surface* ω*-régulière* .

Un ensemble d-régulier vérifiant le théorème 2.11 est dit *uniformément rectifiable.* Une conséquence évidente de la théorie de David et Semmes est qu'un ensemble uniformément rectifiable est rectifiable.

REMARQUE. — Le fait que E soit inclus dans une surface ω-régulière signifie que $E \subset z(\mathbb{R}^d)$ où $z : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n+1}$ est un paramétrage « assez régulier ». En dimension $d = 1$, cela équivaut à dire que E est inclus dans une courbe Ahlfors-régulière (c'est-à-dire une courbe vérifiant (10)).

Pour la définition exacte d'une surface ω-régulière et la preuve du théorème 2.11, nous renvoyons à [DS1] ou [DS2] où le lecteur pourra trouver d'autres définitions équivalentes ainsi que diverses applications de la théorie de la rectifiabilité uniforme.

Nous allons maintenant donner les preuves des théorèmes 1.1 et 1.2.

3. Preuve du théorème 1.1 pour les ensembles Ahlfors-réguliers

Nous allons dans cette section démontrer le résultat suivant. Soit q vérifiant (6) ou (7) selon la valeur de d.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble* d*-régulier, compact tel qu'en* H^d *presque tout* $x \in E$, *on a*

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty. \tag{27}$$

Alors, E *est* d*-rectifiable.*

Commençons par énoncer une conséquence facile d'une version locale du théorème 2.11 (que l'on ne démontrera pas).

PROPOSITION 3.2. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier, compact tel qu'il existe $M > 0$ pour lequel en H^d presque tout $x \in E$, on ait*

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq M. \tag{28}$$

Alors, E est d-rectifiable.

Ainsi, d'après la proposition 2.1, pour démontrer le théorème 3.1, il nous suffit d'établir le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier, compact tel qu'en H^d presque tout $x \in E$, on ait* (27). *Alors,*

$$E \subset \Big(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^\star} E_p \Big) \cup E_0$$

où $H^d(E_0) = 0$, pour tout $p > 0$, E_p est d-régulier, compact et il existe une constante positive $M(p)$ tel qu'en H^d presque tout $x \in E_p$, on ait

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E_p)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq M(p). \tag{29}$$

Preuve de la proposition 3.3. — Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier, compact tel qu'en H^d presque tout $x \in E$, (27) soit vérifié avec $q = 1$. (la proposition 3.3 pour un q quelconque s'en déduit d'après les inégalités de Hölder).

Pour simplifier, on supposera que $\operatorname{diam} E = 1$ (la démonstration dans le cas général est identique).

La construction des E_p est basée sur des arguments de temps d'arrêt. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on va considérer une famille de parties Q de E disjointes, maximales telles que, pour tout $x \in Q$,

$$\int_{\operatorname{diam} Q}^{\operatorname{diam} E} \beta_1(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

est grand devant p et telles que, pour tout $x \in E$ n'appartenant à aucun Q,

$$\int_0^{\operatorname{diam} E} \beta_1(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

est au plus de l'ordre de p. À tous ces ensembles Q, on va associer un morceau de d-plan C_Q de taille comparable à Q.

Soit E_p l'ensemble formé des points de E n'appartenant à aucun Q et des « plaques » C_Q. On peut alors montrer que H^d-presque tout $x \in E$ est dans un E_p d'après (27), que E_p est d-régulier et vérifie (29) avec une certaine constante $M(p)$. On utilisera ici le fait que tout d-plan P de $\mathbb{R}^n$ est d-régulier et que $\beta_1(x,t,P) = 0$ pour tout $x \in P$ et tout $t > 0$.

Nous allons commencer par rappeler quelques propriétés des ensembles d-réguliers.

LEMME 3.4 (partition en cubes dyadiques). — *Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier. Alors, il existe une famille Δ_j, avec $j \in \mathbb{Z}$, de sous-ensembles mesurables de F avec les propriétés suivantes :*

1) *Chaque Δ_j est une partition de F dans la mesure où $F = \bigcup_{Q\in\Delta_j} Q$ et $Q \cap Q' = \emptyset$ si Q, Q' sont dans Δ_j et $Q \neq Q'$.*

2) *Si $Q \in \Delta_j$ et $Q' \in \Delta_k$ avec $k \leq j$, alors soit $Q \subset Q'$, soit $Q \cap Q' = \emptyset$.*

3) *Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, tout $Q \in \Delta_j$,*

$$C_1^{-1} 2^{-j} \leq \operatorname{diam} Q \leq C_1 2^{-j}. \tag{30}$$

4) *Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $Q \in \Delta_j$, Q contient l'intersection de E avec une boule de rayon $r_Q \geq C_1^{-1}2^{-j}$ que l'on notera $B_Q = B(x_Q, r_Q)$, avec $x_Q \in E$. (La constante C_1 dépend seulement de C_0, n et d.)*

REMARQUE. — D'après les propriétés 3 et 4 précédentes et la régularité de E, on a pour tout $Q \in \Delta_j$,

$$C^{-1} 2^{-jd} \leq H^d(Q) \leq C 2^{-jd}. \tag{31}$$

(pour une preuve du lemme 3.4, voir l'appendice 1 de [Da])

On peut remarquer que $\Delta = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j$ a le même comportement que la famille usuelle des cubes dyadiques de $\mathbb{R}^d$.

On supposera dans la suite que E est muni d'une telle famille de « cubes dyadiques »

$$\Delta = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j$$

(on se restreint ici aux indices $j \in \mathbb{N}$, car $\operatorname{diam} E = 1$).

LEMME 3.5. — *Soit $Q \in \Delta$. Il existe $(d+1)$ points $y_0, \cdots, y_d$ dans $E \cap B(x_Q, \frac{1}{10} r_Q)$ tels que pour $j = 1, \ldots, d$,*

$$\operatorname{dist}(y_j, L_{j-1}) \geq \frac{1}{A} \operatorname{diam} Q \tag{32}$$

où L_j est le j-plan de $\mathbb{R}^n$ passant par $y_0, \ldots, y_j$ et A est une constante positive dépendant de d et de la constante de régularité C_0 de E.

L'existence de $(d+1)$ points dans Q vérifiant (32) est démontrée dans [DS1, lemme 5.8]. L'idée est que la régularité de E empêche les points de $E \cap B(x_Q, \frac{1}{10} r_Q)$ de s'accumuler près de L_{j-1} avec $j < d$.

Pour tout $Q \in \Delta$, on définit

$$\beta_1(Q) = \inf_P \Big(\frac{1}{(\operatorname{diam} Q)^d} \int_{2Q} \frac{\operatorname{dist}(y, P)}{\operatorname{diam} Q} \, \mathrm{d}H^d(y) \Big) \tag{33}$$

où l'inf est pris sur tout les d-plans affines P de $\mathbb{R}^n$ et

$$2Q = \big\{ x \in E\,;\ \operatorname{dist}(x, Q) \le \operatorname{diam} Q \big\}.$$

On pose :

$$\widetilde{\beta}_1(Q) = \sum_{\substack{R \in \Delta \\ R \supseteq Q}} \beta_1(R)^2.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On considère alors :

- $\mathcal{G} = \{Q \in \Delta\,;\ \widetilde{\beta}_1(Q) \le p\}$;
- $\widetilde{\mathcal{B}} = \{Q \in \mathcal{G}\,;\ \text{ si } Q \in \Delta_j, \text{ il existe } R \in \Delta_{j+1} \text{ avec } R \subset Q \text{ et } \widetilde{\beta}_1(R) > p\}$;
- $\mathcal{B} = \{Q \in \widetilde{\mathcal{B}}\,;\ \text{pour tout } R \in \Delta \text{ tel que } Q \subset R \text{ alors } R \in \mathcal{G}/\widetilde{\mathcal{B}}\}$.

Les cubes de $\widetilde{\mathcal{B}}$ sont les mauvais cubes dans la mesure où la somme de leurs β est trop grande. Les cubes de $\mathcal{B}$ sont les mauvais cubes maximaux, car leurs « ancêtres » sont tous de « bons » cubes. On va dans la suite les remplacer par des morceaux de plans de taille comparable. Remarquons que les cubes de $\mathcal{B}$ sont deux à deux disjoints.

Soit $Q \in \mathcal{B}$. On va lui associer une « plaque » C_Q (la construction de C_Q est indépendante du fait que $Q \in \mathcal{B}$, seul le fait que $Q \in \Delta$ est nécessaire).

Soient $y_0, \dots, y_d$ les $(d+1)$ points de Q donnés par le lemme 3.5.

On suppose $Q \in \Delta_{j_0}$ où $j_0 \in \mathbb{N}$ et on considère $j = j_0 + \ell$ (où $\ell \in \mathbb{N}$ sera choisi plus tard). Pour tout $i = 0, \dots, d$, on note Q_i le cube de Δ_j contenant y_i. D'après le lemme 3.4, on a, si ℓ est assez grand,

- pour $i = 0, \dots, d$,

$$Q_i \subset E \cap B(x_Q, \tfrac{1}{4} r_Q) \subset Q\,; \tag{34}$$

- si $i \ne i'$ (avec $i, i' = 0, \dots, d$),

$$Q_i \cap Q_{i'} = \emptyset\,; \tag{35}$$

- pour $i = 0, \ldots, d$,

$$C_1^{-2}\, 2^{-\ell} \operatorname{diam} Q \leq \operatorname{diam} Q_i \leq C_1^2\, 2^{-\ell} \operatorname{diam} Q, \tag{36}$$

$$C_1^{-2}\, 2^{-\ell d} H^d(Q) \leq H^d(Q_i) \leq C_1^2\, 2^{-\ell d} H^d(Q). \tag{37}$$

De plus, tout $(d+1)$-uplet $(z_0, \ldots, z_d) \in (Q_0 \times \cdots \times Q_d)$ vérifie les conclusions du lemme 3.5 avec une constante A différente.

Pour $i = 0, \ldots, d$, soit $\tilde{y}_i$ le centre de masse de Q_i :

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{H^d(Q_i)} \int_{Q_i} y \, \mathrm{d}H^d(y). \tag{38}$$

On note P_Q le d-plan contenant $\tilde{y}_i$ pour $i = 0, \ldots, d$ et $C_Q \subset P_Q$ l'enveloppe convexe des $\tilde{y}_i$. On a alors

$$K^{-1} H^d(Q) \leq H^d(C_Q) \leq K H^d(Q), \tag{39}$$

$$C_Q \subset B(x_Q, \tfrac{1}{2} r_Q), \tag{40}$$

$$\operatorname{dist}(C_Q, E/Q) \geq K^{-1} \operatorname{diam} Q \tag{41}$$

où K est une constante positive dépendant de la constante de régularité C_0 de E, de la constante A du lemme 3.5 et de la constante C_1 du lemme 3.4. ((40) découle de (34) ; (41) vient de (40) et de la propriété 4 du lemme 3.4).

On définit alors l'ensemble E_p par

$$E_p = \widetilde{E}_p \cup \Big(\bigcup_{Q \in \mathcal{B}} C_Q \Big) \tag{42}$$

avec

$$\widetilde{E}_p = \big\{ x \in E \,;\ \text{ pour tout } Q \in \Delta \text{ avec } x \in Q,\ Q \in \mathcal{G}/\widetilde{\mathcal{B}} \big\}.$$

Remarquons que pour tout $x \in E$ vérifiant (27), il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x \in \widetilde{E}_p$; donc $E \subset E_0 \cup (\bigcup_{p \in \mathbb{N}^\star} E_p)$ où $H^d(E_0) = 0$.

Pour terminer la preuve de la proposition 3.3, il nous reste à montrer que E_p, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, est régulier et vérifie (29).

Montrons donc que E_p est d-régulier et considérons pour cela $x \in E_p$ et $r \in \,]0, \operatorname{diam} E[$. Commençons par quelques remarques.

Si $x \in \widetilde{E}_p$ et s'il existe $Q \in \mathcal{B}$ tel que $C_Q \cap B(x,r) \neq \emptyset$, alors d'après (41),

$$\operatorname{diam} Q \leq CKr. \tag{43}$$

Si $x \in C_Q$ (où $Q \in \mathcal{B}$) et s'il existe $Q' \in \mathcal{B}$ (avec $Q \neq Q'$) tel que $C_{Q'} \cap B(x,r) \neq \emptyset$, alors, d'après (40) et (41),

$$\operatorname{diam} Q' \leq CKr. \tag{44}$$

Notons

$$I(x,r) = \{Q \in \mathcal{B}\,;\ C_Q \cap B(x,r) \neq \emptyset\}.$$

On déduit de (43) et (44) que si $Q \in I(x,r)$,

$$Q \subset B(x, CKr) \cap E.$$

D'où, d'après (39),

$$H^d(E_p \cap B(x,r)) \leq CKH^d\big(E \cap B(x,CKr)\big).$$

Donc, puisque E est régulier de constante C_0,

$$H^d\big(E_p \cap B(x,r)\big) \leq C(K)C_0 r^d.$$

Démontrons maintenant l'inégalité inverse.

Premier cas : $x \in \widetilde{E}_p$.

Soit $Q \in \Delta$. On peut écrire

$$Q = (Q \cap \widetilde{E}_p) \cup \Big(\bigcup_{\substack{R \in \mathcal{B} \\ R \subset Q}} R\Big)$$

où toutes les unions sont disjointes. Soit

$$\widetilde{Q} = (Q \cap \widetilde{E}_p) \cup \Big(\bigcup_{\substack{R \in \mathcal{B} \\ R \subset Q}} C_R\Big)$$

où toutes les unions restent disjointes car

$$B\big(x_R, \tfrac{1}{2} r_R\big) \cap B\big(x_{R'}, \tfrac{1}{2} r_{R'}\big) = \emptyset$$

si $R \cap R' = \emptyset$ (d'après (40) et la propriété 4 du lemme 3.4). Il est évident d'après (39) et (40) que

$$H^d(\widetilde{Q}) \geq K^{-1} H^d(Q), \tag{45}$$

$$\widetilde{Q} \subset B(x_Q, \operatorname{diam} Q). \tag{46}$$

On considère alors $Q \in \Delta$ tel que

$$Q \subset B\big(x, \tfrac{1}{10} r\big), \tag{47}$$

$$Q \in \Delta_k\,, \tag{48}$$

où $2^{-k} \leq \frac{1}{1000\,C_1} r \leq 2^{-k+1}$ où C_1 est la constante du lemme 3.4. Donc $\widetilde{Q}$ est contenu dans $B(x,r) \cap E_p$. D'où, d'après (45),

$$H^d\big(E_p \cap B(x,r)\big) \geq H^d(\widetilde{Q}) \geq K^{-1} H^d(Q), \tag{49}$$

soit, d'après (31),

$$H^d(E_p \cap B(x,r)) \geq K^{-1} C_1^{-1} 2^{-kd}. \tag{50}$$

Donc, d'après (48),

$$H^d\big(E_p \cap B(x,r)\big) \geq \frac{K^{-1} C_1^{-d-1}}{(2000)^d} r^d. \tag{51}$$

Dans les cas suivants, x n'appartient pas à $\widetilde{E}_p$; il existe donc $Q \in \mathcal{B}$ tel que $x \in C_Q$.

Deuxième cas : $r \geq 2 \operatorname{diam} Q$.

D'après (40), $\operatorname{dist}(x, E) \leq \operatorname{diam} Q \leq \frac{1}{2} r$; donc il existe $y \in E$ tel que

$$B\big(y, \tfrac{1}{2} r\big) \subset B(x,r).$$

On peut alors utiliser le cas précédent en remarquant que la démonstration reste valable pour tout point de E.

Troisième cas : $r < 2 \operatorname{diam} Q$ *et* $C_Q \subset B(x,r)$.

On a alors $H^d(E_p \cap B(x,r)) \geq H^d(C_Q)$. Donc, d'après (39),

$$H^d\big(E_p \cap B(x,r)\big) \geq K^{-1} H^d(Q), \tag{52}$$

puis, d'après (31),

$$H^d\big(E_p \cap B(x,r)\big) \geq K^{-1} C_1^{-d-1} (\operatorname{diam} Q)^d. \tag{53}$$

D'où, puisque $\operatorname{diam} Q > \frac{1}{2} r$,

$$H^d\big(E_p \cap B(x,r)\big) \geq \frac{C_1^{-d-1}}{2^d K} r^d. \tag{54}$$

Quatrième cas : $r < 2\operatorname{diam} Q$ *et* $C_Q \not\subset B(x,r)$.

Nous avons $H^d(E_p \cap B(x,r)) \geq H^d(C_Q \cap B(x,r))$. Donc, comme C_Q est localement régulier,

$$H^d(E_p \cap B(x,r)) \geq C^{-1} r^d, \tag{55}$$

ce qui termine la preuve du fait que E_p est d-régulier.

Montrons maintenant que, pour tout $x \in E_p$, on a (29). Considérons donc $x \in E_p$; on souhaite évaluer

$$I(x) = \int_0^1 \beta_1(x,t,E_p)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Le but est de contrôler les $\beta_1(x,t,E_p)$ par les $\beta_1(x,t,E)$.

Premier cas : $x \in \widetilde{E}_p$.

On a alors

$$\int_0^1 \beta_1(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq Cp. \tag{56}$$

Soit $P_{(x,t)}$ un d-plan de $\mathbb{R}^n$ pour lequel

$$\beta_1(x,t,E) = \frac{1}{t^d} \int_{E \cap B(x,t)} \frac{\operatorname{dist}(y, P_{(x,t)})}{t} \, \mathrm{d}H^d(y).$$

On a alors,

$$\beta_1(x,t,E_p) \leq \frac{1}{t^d} \int_{E_p \cap B(x,t)} \frac{\operatorname{dist}(y, P_{(x,t)})}{t} \, \mathrm{d}H^d(y) \tag{57}$$

$$\leq a(x,t) + \sum_{Q \in I(x,t)} b_Q(x,t) \tag{58}$$

avec

$$a(x,t) = \frac{1}{t^d} \int_{\widetilde{E}_p \cap B(x,t)} \frac{\operatorname{dist}(y, P_{(x,t)})}{t} \, \mathrm{d}H^d(y) \tag{59}$$

$$b_Q(x,t) = \frac{1}{t^d} \int_{C_Q \cap B(x,t)} \frac{\operatorname{dist}(y, P_{(x,t)})}{t} \, \mathrm{d}H^d(y) \tag{60}$$

$$I(x,t) = \big\{ Q \in \mathcal{B} \,;\ C_Q \cap B(x,t) \neq \emptyset \big\}. \tag{61}$$

Remarquons que les cubes Q de $I(x,t)$ sont deux à deux disjoints.

On a déjà vu que, si $Q \in I(x,t)$, alors

$$\operatorname{diam} Q \leq CKt. \tag{62}$$

• *Majoration de* $a(x,t)$ *:* puisque $\widetilde{E}_p \subset E$, on a

$$a(x,t) \leq \beta_1(x,t,E). \tag{63}$$

• *Majoration de* $b_Q(x,t)$ *:* soit $\Pi^\perp : \mathbb{R}^n \to P_{(x,t)}^\perp$ la projection orthogonale sur $P_{(x,t)}^\perp$; soient $\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_d$ les points de Q définis par (38) (on utilisera ici les mêmes notations que précédemment). Pour tout $y \in C_Q \cap B(x,t)$,

$$\operatorname{dist}\big(y, P_{(x,t)}\big) = \big|\Pi^\perp(y)\big| \leq C \sum_{i=0}^{d} \big|\Pi^\perp(\tilde{y}_i)\big| \tag{64}$$

car y est dans l'enveloppe convexe des $\tilde{y}_i$. Or, pour tout $i = 0, \dots, d$, d'après (38),

$$\big|\Pi^\perp(\tilde{y}_i)\big| \leq C \frac{1}{H^d(Q_i)} \int_{Q_i} \big|\Pi^\perp(z)\big| \, \mathrm{d}H^d(z). \tag{65}$$

On en déduit, d'après (36),

$$\big|\Pi^\perp(\tilde{y}_i)\big| \leq C (\operatorname{diam} Q)^{-d} \int_{Q_i} \big|\Pi^\perp(z)\big| \, \mathrm{d}H^d(z). \tag{66}$$

On a ainsi, d'après (64) et (66),

$$\operatorname{dist}\big(y, P_{(x,t)}\big) \leq C (\operatorname{diam} Q)^{-d} \sum_{i=0}^{d} \int_{Q_i} \big|\Pi^\perp(z)\big| \, \mathrm{d}H^d(z). \tag{67}$$

D'où, d'après (34) et (35),

$$\operatorname{dist}\big(y, P_{(x,t)}\big) \leq C (\operatorname{diam} Q)^{-d} \int_{Q} \big|\Pi^\perp(z)\big| \, \mathrm{d}H^d(z). \tag{68}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} b_Q(x,t) &\leq \frac{C}{t^d} (\operatorname{diam} Q)^{-d} \int_{y \in C_Q \cap B(x,t)} \\ &\qquad \Big(\int_{z \in Q} \frac{\operatorname{dist}(z, P_{(x,t)})}{t} \, \mathrm{d}H^d(z) \Big) \, \mathrm{d}H^d(y) \\ &\leq \frac{C}{t^d} \int_Q \frac{\operatorname{dist}(z, P_{(x,t)})}{t} \, \mathrm{d}H^d(z) \end{aligned} \tag{69}$$

((69) vient de (39)). On obtient finalement, d'après (62),

$$\sum_{Q\in I(x,t)} b_Q(x,t) \le \frac{1}{t^d}\int_{\{z\in Q\ ;\ Q\in I(x,t)\}} \frac{\operatorname{dist}(z,P_{(x,t)})}{t}\,\mathrm{d}H^d(z) \tag{70}$$

$$\le C\beta_1(x,CKt,E). \tag{71}$$

Donc, si $x\in\widetilde{E}_p$, d'après (56), (58), (63) et (71), on a

$$\int_0^1 \beta_1(x,t,E_p)^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \le Cp. \tag{72}$$

Deuxième cas : il existe $Q\in\mathcal{B}$ tel que $x\in C_Q$. On a alors,

$$\int_{\operatorname{diam} Q}^1 \beta_1(x,t,E)^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \le Cp. \tag{73}$$

On peut refaire la même démonstration que dans le premier cas, (73) jouant le rôle de (56), en remarquant que si $t>0$ est assez petit,

$$E_p\cap B(x,t)=C_Q\cap B(x,t).$$

Donc, pour tout $x\in E_p$,

$$\int_0^1 \beta_1(x,t,E_p)^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \le Cp. \tag{74}$$

Ceci termine la preuve de la proposition 3.3 et donc du théorème 3.1.

4. Preuve du théorème 1.1

Soit q vérifiant (6) ou (7) selon la valeur de d. Nous allons dans ce paragraphe démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION 4.1. — *Soit $E\subset\mathbb{R}^n$ compact avec $H^d(E)<+\infty$ tel qu'en H^d presque tout $x\in E$, (8) et (9) sont vérifiés pour q. Alors,*

$$E\subset E_0\cup\Big(\bigcup_{p>0}E_p\Big)$$

où $H^d(E_0)=0$, pour tout $p>0$, E_p est d-régulier, compact et en H^d presque tout $x\in E_p$, on a

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E_p)^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty. \tag{75}$$

Le théorème 1.1 est une conséquence du théorème 3.1 et de la proposition 4.1. On va d'abord se ramener au cas des ensembles s.r.s.

On dit qu'un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est *s.r.s.* (*semi d-régulier supérieurement*) s'il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $x \in F$, tout $r \in]0, \operatorname{diam} F[$,

$$H^d\big(F \cap B(x,r)\big) \leq C_0 r^d. \tag{76}$$

PROPOSITION 4.2. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ compact avec $H^d(E) < +\infty$ tel qu'en H^d presque tout $x \in E$, (8) et (9) soient vérifiés pour q. Alors,*

$$E \subset E_0 \cup \Big(\bigcup_{p>0} E_p\Big)$$

où $H^d(E_0) = 0$, pour tout $p > 0$, E_p est s.r.s, compact, et en H^d presque tout $x \in E_p$, (8) et (9) sont vérifiés pour q.

Preuve de la proposition 4.2. — Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit

$$E_p = \big\{x \in E\,;\ \text{ pour tout } r \in]0, \operatorname{diam} E[\,,\ H^d(E \cap B(x,r)) \leq pr^d\big\}.$$

Remarquons que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $E = E_p$, alors E est s.r.s. et la proposition 4.2 est démontrée. Supposons donc que l'on ne soit pas dans cette situation.

Il est clair que E_p est s.r.s., et qu'en H^d presque tout $x \in E_p$, (8) est vérifié (car la densité supérieure de $E \setminus E_p$ est presque partout nulle sur E_p, voir théorème 2.2) ainsi que (9) (car $E_p \subset E$). De plus, d'après le théorème 2.4, pour H^d presque tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_p$.

Ce qui termine la preuve de la proposition 4.2.

La proposition 4.1 est alors une conséquence immédiate de la proposition 2.1, de la proposition 4.2 et du résultat suivant.

PROPOSITION 4.3. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble s.r.s. et compact tel qu'en H^d presque tout $x \in E$, (8) et (9) sont vérifiés pour q. Alors,*

$$E \subset E_0 \cup \Big(\bigcup_{p>0} E_p\Big)$$

où $H^d(E_0) = 0$, pour tout $p > 0$, E_p est d-régulier, compact et en H^d presque tout $x \in E_p$, on a

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E_p)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty. \tag{77}$$

On va, en fait, montrer dans un premier temps le théorème de recouvrement suivant.

PROPOSITION 4.4. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ compact, s.r.s. avec $H^d(E) < +\infty$ tel qu'en tout $x \in E$, on ait*

$$\Theta_\star^d(x, E) > 0. \tag{78}$$

Alors,

$$E \subset \bigcup_{p>0} E_p$$

où, pour tout $p > 0$, E_p est d-régulier et compact.

Ce résultat est plus difficile à démontrer que la proposition 4.3. On expliquera plus tard comment adapter la preuve de la proposition 4.4 pour obtenir celle de la proposition 4.3.

REMARQUE. — La proposition 4.4 n'est pas aussi évidente qu'il n'y paraît. Tout ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ compact et s.r.s. n'est pas toujours contenu dans un unique ensemble Ahlfors-régulier.

Une légère modification de la construction donne :

PROPOSITION 4.5. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ compact, s.r.s., purement non d-rectifiable et de d-mesure de Hausdorff finie. On suppose, en outre, qu'on a $\Theta_\star^d(x, E) > 0$ en tout $x \in E$. Alors,*

$$E \subset \bigcup_{p>0} E_p$$

où, pour tout $p > 0$, E_p est d-régulier, compact et purement non d-rectifiable.

Ce résultat a un corollaire amusant. Il permet d'étendre le théorème de Mattila, Melnikov, Verdera [MMV] sur la caractérisation géométrique des ensembles Ahlfors-réguliers de capacité analytique nulle au cas des ensembles dont la densité inférieure en tout point est strictement positive (voir [Pa]).

On peut, dans les propositions 4.4 et 4.5, supposer que (78) est vrai pour H^d-presque tout $x \in E$. On peut alors recouvrir E par des ensembles réguliers à un ensemble de H^d-mesure nulle près.

Commençons la preuve de la proposition 4.4 et considérons E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ compact, s.r.s., de H^d-mesure finie et tel qu'en tout point, (78) soit vérifié. Pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on définit

$$F_p = \Big\{x \in E\,;\ \text{ pour tout } r \in \left]0, \operatorname{diam} E\right[,\ H^d(E \cap B(x,r)) \geq \frac{r^d}{p}\Big\}.$$

Remarquons que s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $E = F_p$, alors E est d-régulier, et la proposition 4.4 est démontrée. Supposons que l'on ne soit pas dans ce cas.

D'après (78), on a

$$E \subset \bigcup_{p>0} F_p. \tag{79}$$

Fixons donc un $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $H^d(F_p) > 0$. Il n'y a aucune raison que F_p soit régulier. L'idéal aurait été de pouvoir le rendre régulier (c'est-à-dire de l'inclure dans un ensemble régulier) en lui ajoutant des morceaux de plans aux endroits où la densité de E est forte et celle de F_p est faible. Cependant, ceci n'est pas facile à réaliser. On va en fait appliquer cette méthode à des sous-ensembles (bien choisis) de F_p que l'on notera par la suite $F_{p,s}, s > 0$. Pour tout $s > 0$, on va considérer des ensembles Q (qui seront ici des cubes de Whitney ou des boules) de $\mathbb{R}^n \setminus F_{p,s}$ avec les propriétés suivantes :

(i) $H^d(E \cap Q)$ est grand devant $s^{-1}(\operatorname{diam} Q)^d$;

(ii) Q est à une distance de l'ordre de $\operatorname{diam} Q$ de $F_{p,s}$.

La propriété (i) permet d'associer à tout Q un morceau de plan C_Q grâce à une construction similaire à celle du paragraphe précédent, la condition de densité (i) remplaçant la condition de régularité. La condition (ii) est rendue nécessaire par le fait que l'on ne doit pas ajouter de plaques C_Q isolées.

Soit $E_{p,s}$ l'ensemble obtenu en ajoutant à $F_{p,s}$ les plaques C_Q. Alors, on peut montrer, par des calculs semblables à ceux du paragraphe précédent, que $E_{p,s}$ est régulier et que tout $x \in E$ appartient à un $E_{p,s}$.

Commençons donc la construction des $E_{p,s}$.

Puisque F_p est fermé, on peut considérer une décomposition de Whitney de $G_p = \mathbb{R}^n / F_p$.

THÉORÈME 4.6 (décomposition de Whitney). — *Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors son complémentaire G est l'union d'une famille de cubes Q, avec $Q \in \mathcal{B}$, dont les côtés sont parallèles aux axes telle que :*

1) *G est contenu dans $\bigcup_{Q \in \mathcal{B}} Q$;*

2) $\operatorname{int}(Q) \cap \operatorname{int}(Q') = \emptyset$ *si* $Q \neq Q'$ *(où* int *désigne l'intérieur du cube)* ;

3) *pour tout $Q \in \mathcal{B}$, on a*

$$\operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(Q, F) \leq 4 \operatorname{diam} Q. \tag{80}$$

(Pour une preuve de ce théorème, voir le chapitre I de [St].)

Soit $\mathcal{B}_p$ une décomposition de Whitney de G_p. On va associer aux cubes de $\mathcal{B}_p$ vérifiant une certaine condition de densité des morceaux de plans construits sur le même principe que les plaques C_Q du paragraphe précédent. Ainsi, on considère, pour tout $s \in \mathbb{N}^\star$,

$$\mathcal{G}_{p,s} = \{Q \in \mathcal{B}_p\ ;\ H^d(E \cap Q) \geq s^{-1}(\operatorname{diam} Q)^d\}.$$

Pour tout $Q \in \mathcal{G}_{p,s}$, on considère un morceau de d-plan $C_Q \subset Q$ tel que

$$\theta^{-1}(\operatorname{diam} Q)^d \leq H^d(C_Q) \leq \theta(\operatorname{diam} Q)^d \tag{81}$$

où θ est une constante positive indépendante de Q.

On a ainsi, pour tout $Q \in \mathcal{G}_{p,s}$,

$$C_0^{-1}\theta^{-1}H^d(E \cap Q) \leq H^d(C_Q) \leq s\theta H^d(E \cap Q) \tag{82}$$

où C_0 est la constante de régularité supérieure de E.

De même, à tout $y \in F_p$, tout $r > 0$, on peut associer un morceau de d-plan $C_{y,r} \subset B(y,r)$ avec

$$\theta^{-1}r^d \leq H^d(C_{y,r}) \leq \theta r^d, \tag{83}$$

et on a

$$C_0^{-1}\theta^{-1}H^d\big(E \cap B(y,r)\big) \leq H^d(C_{y,r}) \leq p\theta H^d\big(E \cap B(y,r)\big). \tag{84}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $r > 0$, on note

$$\mathcal{G}_{p,s}(x,r)$$

l'ensemble des $Q \in \mathcal{G}_{p,s}$ tel que :

- $Q \cap B(x,r) \neq \emptyset$;
- $\operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(x,Q) \leq ps \operatorname{diam} Q$.

On définit $F_{p,s}$ comme étant l'ensemble des points x de F_p vérifiant, pour tout $r \in \,]0, \operatorname{diam} E[$,

$$H^d\big(F_p \cap B(x,r)\big) + \sum_{Q \in \mathcal{G}_{p,s}(x,r)} H^d\big(Q \cap E \cap B(x,r)\big) > \frac{r^d}{ps}\cdot$$

On a envie de considérer l'ensemble formé de $F_{p,s}$ et des plaques C_Q associées aux cubes $Q \in \mathcal{G}_{p,s}$ pour lesquels il existe (x,r) appartenant à $F_{p,s} \times \,]0, \operatorname{diam} E[$ tel que $Q \in \mathcal{G}_{p,s}(x,r)$. Cependant, l'ensemble ainsi obtenu n'est pas forcément régulier, car les points de $F_p \setminus F_{p,s}$ qui ne sont dans aucun des cubes Q choisis peuvent avoir une masse importante. On va donc construire de nouvelles plaques associées à des sous-ensembles de $F_p \setminus F_{p,s}$. Soit :

$$G_{p,s} = F_p \setminus F_{p,s}.$$

Pour tout $x \in G_{p,s}$, on définit :

$$d(x) = \frac{1}{10}\operatorname{dist}(x, F_{p,s}).$$

Rappelons un résultat classique (voir [Ma, th. 2.7]).

THÉORÈME 4.7 (recouvrement de type Besicovitch). — *Soit A un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ une famille de boules telle que tout point de A est le centre d'une boule de $\mathcal{B}$. Alors, il existe une famille dénombrable de boules B_i de $\mathcal{B}$ telle que*

(i) $A \subset \bigcup_i B_i$;

(ii) *tout point de $\mathbb{R}^n$ appartient au plus à $P(n)$ boules B_i, où $P(n)$ est un entier dépendant seulement de n.*

On considère un recouvrement de type Besicovitch de $G_{p,s}$ par des boules $B(x, d(x))$ où $x \in \mathcal{C}_{p,s}$ et où $\mathcal{C}_{p,s}$ est le sous-ensemble de $G_{p,s}$ formé des centres des boules du recouvrement de Besicovitch de $G_{p,s}$.

Faisons quelques remarques sur $H^d(C_{x,d(x)})$ pour $x \in \mathcal{C}_{p,s}$.

Soit $Q \in \mathcal{G}_{p,s}$ et $x \in \mathcal{C}_{p,s}$ tel que $Q \cap B(x, d(x)) \neq \emptyset$. Alors,

$$\operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(Q, F_p) \leq \operatorname{dist}(Q, x) \leq d(x).$$

On en déduit que $Q \subset B(x, 10d(x))$.

Donc, si on note C_x la plaque $C_{x,d(x)}$, on a :

$$\begin{aligned} H^d(C_x) &\geq \theta^{-1}\big(d(x)\big)^d && \text{d'après (83)} \\ &\geq \theta^{-1}C_0^{-1}10^{-d}H^d\big(E \cap B(x, 10d(x))\big) && \text{car } E \text{ est s.r.s.} \\ &\geq \theta^{-1}C_0^{-1}10^{-d}\big\{H^d(F_p \cap B(x, 10d(x))) \\ &\qquad\qquad + H^d(E/F_p \cap B(x, 10d(x)))\big\}. \end{aligned}$$

D'où, d'après la remarque précédente,

$$H^d(C_x) \geq C^{-1}H^d\big(F_p \cap B(x, d(x))\big) + C^{-1} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{G}_{p,s} \\ Q \cap B(x,d(x)) \neq \emptyset}} H^d(E \cap Q) \tag{85}$$

(la constante C est indépendante de p et s).

L'inégalité précédente montre que l'on peut éliminer les cubes de Whitney rencontrant une boule $B(x, d(x))$, $x \in \mathcal{C}_{p,s}$, car la masse de E incluse dans ces cubes est capturée par les C_x. C'est ce que l'on va faire dans la suite.

On dit que $Q \in \mathcal{G}_{p,s}$ *vérifie la propriété* $(\star)$ s'il existe $x \in F_{p,s}$ tel que

$$\operatorname{dist}(x, Q) \leq ps \operatorname{diam} Q,$$

c'est-à-dire s'il existe $x \in F_{p,s}$ et $r > 0$ tel que $Q \in \mathcal{G}_{p,s}(x, r)$. Remarquons que, puisque $x \in F_p$, on a aussi

$$\operatorname{dist}(x, Q) \geq \operatorname{diam} Q.$$

REMARQUE. — On retrouve la propriété (ii) précédente, c'est à dire les cubes Q doivent être à une distance de l'ordre de $\operatorname{diam} Q$ de $F_{p,s}$.

On dit que $Q \in \mathcal{G}_{p,s}$ *vérifie la propriété* $(\star\star)$ si Q vérifie la propriété $(\star)$ et si $Q \cap B(y, d(y)) = \emptyset$ pour tout $y \in \mathcal{C}_{p,s}$. On définit alors

$$\mathcal{G}^{(1)}_{p,s} = \big\{Q \in \mathcal{G}_{p,s}\ ;\ Q \text{ vérifie la propriété } (\star\star)\big\},$$

$$\mathcal{G}^{(2)}_{p,s} = \big\{Q \in \mathcal{G}_{p,s}\ ;\ Q \text{ vérifie la propriété } (\star) \text{ mais pas la propriété } (\star\star)\big\}.$$

Ainsi, si $Q \in \mathcal{G}^{(2)}_{p,s}$, il existe $y \in \mathcal{C}_{p,s}$ tel que $Q \cap B(y, d(y)) \neq \emptyset$. Soit

$$E_{p,s} = F_{p,s} \cup \Big(\bigcup_{y \in \mathcal{C}_{p,s}} C_y\Big) \cup \Big(\bigcup_{Q \in \mathcal{G}^{(1)}_{p,s}} C_Q\Big).$$

Comme annoncé précédemment, $E_{p,s}$ est formé d'une partie de F_p complétée par des morceaux de plans.

Montrons que les $E_{p,s}$ recouvrent bien E. D'après le corollaire 2.3 et (78), pour H^d-presque tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x \in F_p$ et $\theta^d_*(x, F_p) > 0$, donc il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ et $s \in \mathbb{N}^\star$ tels que, pour tout $r \in \,]0, \operatorname{diam} E[$,

$$H^d\big(F_p \cap B(x,r)\big) \geq \frac{r^d}{ps},$$

soit $x \in F_{p,s}$.

Considérons le cas d'un $x \in E$ tel que l'on ait $\theta^d_*(x, E) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$. Donc, puisque $\theta^d_*(x, E) > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $\theta^d_*(x, E \setminus F_p) > 0$. De plus, d'après (78), il existe $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x \in F_{p_0}$. Donc, pour tout $p > p_0$, la masse de E autour de x se trouve dans les cubes de Whitney de $\mathcal{B}_p$. On en déduit qu'il existe $p > p_0$ et $s \in \mathbb{N}^\star$ tels que $x \in F_{p,s}$.

On voit ici que, si on voulait recouvrir E par des ensembles réguliers modulo un ensemble de mesure nulle (comme pour la proposition 4.3), la décomposition de Whitney est inutile (voir la fin de cette partie).

On a ainsi

$$E \subset \bigcup_p \bigcup_s E_{p,s}.$$

Il nous reste à prouver que $E_{p,s}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, tout $s \in \mathbb{N}^\star$, est régulier.

Considérons $x \in E_{p,s}$ et $r \in \,]0, \operatorname{diam} E[$.

Supposons dans un premier temps que x est dans $F_{p,s}$ et montrons la régularité supérieure. Or, on a

$$H^d(E_{p,s} \cap B(x,r)) \leq H^d\big(F_{p,s} \cap B(x,r)\big) \\ + \sum_{\substack{y \in \mathcal{C}_{p,s} \\ C_y \cap B(x,r) \neq \emptyset}} H^d(C_y) + \sum_{\substack{Q \in \mathcal{G}_{p,s}^{(1)} \\ C_Q \cap B(x,r) \neq \emptyset}} H^d(C_Q).$$

Il nous faut donc évaluer les trois termes intervenant dans la somme précédente.

Remarques préliminaires :

• Soit $y \in \mathcal{C}_{p,s}$ tel que $B(y,d(y)) \cap B(x,r) \neq \emptyset$. Alors $d(y) \leq r$. En effet, sinon, $\operatorname{dist}(x,y) \leq d(y) + r \leq d(y) + d(y) \leq \frac{1}{5} \operatorname{dist}(y, F_{p,s})$, ce qui est absurde. Donc,

$$C_y \subset B\big(y, d(y)\big) \subset B(x, 10r).$$

• Soit $Q \in \mathcal{G}_{p,s}$ tel que $Q \cap B(x,r) \neq \emptyset$, alors $\operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(Q, F_p) \leq r$. Donc,

$$C_Q \subset Q \subset B(x, 10r).$$

On déduit alors de (83), et du fait que, si $y \in \mathcal{C}_{p,s}$ alors $y \in F_p$,

$$\begin{aligned}
(86) \qquad \sum_{\substack{y \in \mathcal{C}_{p,s} \\ C_y \cap B(x,r) \neq \emptyset}} H^d(C_y) &\leq \sum_{\substack{y \in \mathcal{C}_{p,s} \\ B(y,d(y)) \cap B(x,r) \neq \emptyset}} H^d(C_y) \\
&\leq \theta \sum_{\substack{y \in \mathcal{C}_{p,s} \\ B(y,d(y)) \cap B(x,r) \neq \emptyset}} \big(d(y)\big)^d \\
&\leq \theta \sum_{\substack{y \in \mathcal{C}_{p,s} \\ B(y,d(y)) \cap B(x,r) \neq \emptyset}} pH^d\big(E \cap B(y, d(y)\big) \\
&\leq Cp\,\theta P(n) H^d\big(E \cap B(x, 10r)\big) \\
&\leq Cp\,\theta P(n) C_0 10^d r^d \quad \text{car } E \text{ est s.r.s.}
\end{aligned}$$

où $P(n)$ est la constante du théorème de recouvrement de type Besicovitch.

De même,

$$
\begin{aligned}
(87) \qquad \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}_{p,s}^{(1)} \\ C_Q\cap B(x,r)\neq\emptyset}} H^d(C_Q) &\leq \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}_{p,s}^{(1)} \\ Q\cap B(x,r)\neq\emptyset}} H^d(C_Q) \\
&\leq \theta \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}_{p,s}^{(1)} \\ Q\cap B(x,r)\neq\emptyset}} (\operatorname{diam} Q)^d \\
&\leq \theta \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}_{p,s}^{(1)} \\ Q\cap B(x,r)\neq\emptyset}} sH^d(Q\cap E) \\
&\leq s\theta H^d\big(E\cap B(x,10r)\big) \\
&\leq s\theta C_0 10^d r^d \quad \text{car } E \text{ est s.r.s..}
\end{aligned}
$$

De plus,

$$
H^d(F_{p,s}\cap B(x,r)) \leq H^d(E\cap B(x,r)) \leq C_0 r^d
$$

où C_0 est la constante de régularité supérieure de E. Donc

$$
\begin{aligned}
(88) \quad H^d(E_{p,s}\cap B(x,r)) &\leq H^d(F_{p,s}\cap B(x,r)) \\
&\quad + \sum_{\substack{y\in\mathcal{C}_{p,s} \\ C_y\cap B(x,r)\neq\emptyset}} H^d(C_y) + \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}_{p,s}^{(1)} \\ C_Q\cap B(x,r)\neq\emptyset}} H^d(C_Q) \\
&\leq Cr^d.
\end{aligned}
$$

Passons à l'inégalité inverse. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a :

- Soit $y\in\mathcal{C}_{p,s}$ tel que $B(y,d(y))\cap B(x,\frac{1}{10}r)\neq\emptyset$, alors $d(y)\leq\frac{1}{10}r$. Donc,

$$
C_y \subset B\big(y,d(y)\big) \subset B(x,r).
$$

- Soit $Q\in\mathcal{G}_{p,s}$ tel que $Q\cap B(x,\frac{1}{10}r)\neq\emptyset$, alors $\operatorname{diam} Q\leq\frac{1}{10}r$. Donc,

$$
C_Q \subset Q \subset B(x,r).
$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
(89) \quad H^d(E_{p,s}\cap B(x,r)) &\geq H^d\big(F_{p,s}\cap B(x,r)\big) \\
&\quad + \sum_{\substack{y\in\mathcal{C}_{p,s} \\ B(y,d(y))\cap B(x,\frac{1}{10}r)\neq\emptyset}} H^d(C_y) + \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}_{p,s}^{(1)} \\ Q\cap B(x,\frac{1}{10}r)\neq\emptyset}} H^d(C_Q).
\end{aligned}
$$

Nous allons maintenant estimer les différents termes intervenant dans cette somme.

D'après (85), on a

$$\sum_y H^d(C_y) \geq C^{-1} \sum_y H^d(F_p \cap B(y, d(y))) + C^{-1} \sum_y \sum_{\substack{Q \in \mathcal{G}_{p,s} \\ Q \cap B(y,d(y)) \neq \emptyset}} H^d(E \cap Q)$$

où les sommes en y se font sur les $y \in \mathcal{C}_{p,s}$ tels que $B(y, d(y))$ et $B(x, \frac{1}{10} r)$ ne soient pas disjoints. De plus, d'après (82),

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{G}^{(1)}_{p,s} \\ Q \cap B(x, \frac{1}{10} r) \neq \emptyset}} H^d(C_Q) \geq C^{-1} \theta^{-1} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{G}^{(1)}_{p,s} \\ Q \cap B(x, \frac{1}{10} r) \neq \emptyset}} H^d(E \cap Q).$$

Or, si $Q \in \mathcal{G}_{p,s}(x, \frac{1}{20} r)$, alors

- soit $Q \in \mathcal{G}^{(1)}_{p,s}$;
- soit il existe $y \in \mathcal{C}_{p,s}$ tel que $Q \cap B(y, d(y)) \neq \emptyset$.

Alors $B(y, d(y)) \cap B(x, \frac{1}{10} r) \neq \emptyset$, car $\operatorname{diam} Q \leq \frac{1}{20} r$. On en déduit

$$\sum_y \sum_{\substack{Q \in \mathcal{G}_{p,s} \\ Q \cap B(y,d(y)) \neq \emptyset}} H^d(E \cap Q) + \sum_{\substack{Q \in \mathcal{G}^{(1)}_{p,s} \\ Q \cap B(x, \frac{1}{10} r) \neq \emptyset}} H^d(E \cap Q) \geq \sum_{Q \in \mathcal{G}_{p,s}(x, \frac{1}{20} r)} H^d(E \cap Q). \tag{90}$$

De plus, si $z \in F_p \cap B(x, \frac{1}{20} r)$, alors :

- soit $z \in F_{p,s} \cap B(x, \frac{1}{20} r) \subset F_{p,s} \cap B(x, r)$;
- soit il existe $y \in \mathcal{C}_{p,s}$ tel que $z \in B(y, d(y))$.

Alors $B(y, d(y)) \cap B(x, \frac{1}{10} r) \neq \emptyset$, car $d(y) \leq \frac{1}{20} r$. D'où,

$$H^d(F_{p,s} \cap B(x, r)) + \sum_y H^d\big(F_p \cap B(y, d(y))\big) \geq H^d\big(F_p \cap B(x, \tfrac{1}{20} r)\big) \tag{91}$$

(où toutes les sommes en y se font toujours sur le même ensemble). Donc, d'après (89), (90) et (91),

$$
\begin{aligned}
(92)\ H^d\big(E_{p,s}\cap B(x,r)\big) &\geq C^{-1}H^d(F_{p,s}\cap B(x,r)) \\
&\qquad + C^{-1}\sum_y H^d\big(F_p\cap B(y,d(y))\big) \\
&\qquad\quad + C^{-1}\sum_{Q\in\mathcal{G}_{p,s}(x,\frac{1}{20}r)} H^d\big(E\cap Q\cap B(x,\tfrac{1}{20}r)\big) \\
&\geq C^{-1}H^d\big(F_p\cap B(x,\tfrac{1}{20}r)\big) \\
&\qquad + C^{-1}\sum_{Q\in\mathcal{G}_{p,s}(x,\frac{1}{20}r)} H^d\big(E\cap Q\cap B(x,\tfrac{1}{20}r)\big) \\
&\geq C^{-1}\frac{20^{-d}r^d}{ps} \quad \text{car } x\in F_{p,s}\ .
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant que x soit dans C_y où $y\in\mathcal{C}_{p,s}$ et commençons par montrer la régularité supérieure. Donc, $x\in B(y,d(y))$ et il existe $z\in F_{p,s}$ tel que $\operatorname{dist}(x,z)\leq 11d(y)$.

- Si $r\geq d(y)$, alors $B(x,r)\subset B(z,12r)$. Donc,

$$
\begin{aligned}
H^d\big(E_{p,s}\cap B(x,r)\big) &\leq H^d(E_{p,s}\cap B(z,12r)) \\
&\leq C12^d r^d \quad \text{d'après le cas « } x\in F_{p,s} \text{ » précédent.}
\end{aligned}
$$

- Si $r\leq d(y)$, alors on a :

— Si $y'\in\mathcal{C}_{p,s}$ tel que $C_{y'}\cap B(x,r)\neq\emptyset$, alors

$$
d(y)\geq \tfrac{1}{3}d(y'). \tag{93}
$$

Sinon, on aurait

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(z,y') &\leq \operatorname{dist}(y',x)+\operatorname{dist}(x,z) \\
&\leq d(y')+r+11d(y) \\
&\leq d(y')+12d(y) \quad \text{par hypothèse} \\
&\leq 5d(y')\leq \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(y',F_{p,s}).
\end{aligned} \tag{94}
$$

Ce qui est absurde.

— Si $Q\in\mathcal{G}_{p,s}$ tel que $C_Q\cap B(x,r)\neq\emptyset$, alors pour les mêmes raisons que précédemment,

$$
d(y)\geq \frac{1}{24}\operatorname{diam} Q. \tag{95}
$$

Ainsi,

$$\sum_{y'\in\mathcal{C}_{p,s}} H^d\big(C_{y'}\cap B(x,r)\big) = S_1 + S_2$$

avec

$$\begin{aligned}(96)\qquad S_1 = \sum_{\substack{y'\in\mathcal{C}_{p,s}\\ C_{y'}\subset B(x,r)}} H^d(C_{y'}) \le{}& \theta \sum_{\substack{y'\in\mathcal{C}_{p,s}\\ C_{y'}\subset B(x,r)}} \big(d(y')\big)^d\\ \le{}& \theta \sum_{\substack{y'\in\mathcal{C}_{p,s}\\ C_{y'}\subset B(x,r)}} pH^d\big(E\cap B(y',d(y'))\big)\\ \le{}& Cp\,\theta P(n) H^d\big(E\cap B(x,r)\big)\\ \le{}& Cp\,\theta P(n) C_0 r^d\end{aligned}$$

(où $P(n)$ est la constante du théorème de recouvrement de type Besicovitch et C_0 est la constante de régularité supérieure de E) et

$$S_2 = \sum_{\substack{y'\in\mathcal{C}_{p,s}\\ C_{y'}\not\subset B(x,r)}} H^d\big(B(x,r)\cap C_{y'}\big).$$

D'après les remarques initiales (inégalité (93)), le nombre de termes dans S_2 est borné et donc $S_2 \le Cr^d$. D'où,

$$(97)\qquad \sum_{y'\in\mathcal{C}_{p,s}} H^d\big(C_{y'}\cap B(x,r)\big) \le Cr^d.$$

Pour les mêmes raisons,

$$(98)\qquad \sum_{Q\in\mathcal{G}^{(1)}_{p,s}} H^d\big(C_Q\cap B(x,r)\big) \le Cr^d.$$

De plus,

$$(99)\qquad H^d\big(F_{p,s}\cap B(x,r)\big) \le H^d\big(E\cap B(x,r)\big) \le C_0 r^d$$

où C_0 est la constante de régularité supérieure de E.

Donc, d'après (97), (98) et (99),

$$\begin{aligned} H^d\big(E_{p,s}\cap B(x,r)\big) &\le H^d(F_{p,s}\cap B(x,r)) \\ &\qquad + \sum_{y'\in\mathcal{C}_{p,s}} H^d\big(C_{y'}\cap B(x,r)\big) \\ &\qquad\quad + \sum_{Q\in\mathcal{G}^{(1)}_{p,s}} H^d\big(C_Q\cap B(x,r)\big) \\ &\le Cr^d. \end{aligned}$$

Passons à l'inégalité inverse.

Premier cas : $r \ge 30\,d(y)$.

On a déjà vu qu'il existe $z\in F_{p,s}$ tel que $\operatorname{dist}(x,z)\le 11\,d(y)\le \frac12 r$. Donc, $B(z,\frac12 r)\subset B(x,r)$. On en déduit alors

$$H^d\big(E_{p,s}\cap B(x,r)\big)\ge H^d\big(E_{p,s}\cap B\big(z,\tfrac12 r\big)\big)\ge C\,2^{-d}r^d. \tag{100}$$

Deuxième cas : $r\le 30\,d(y)$ *et* $C_y\subset B(x,r)$.

Alors, d'après (83),

$$H^d\big(E_{p,s}\cap B(x,r)\big)\ge H^d(C_y) \tag{101}$$
$$\ge \theta^{-1}d(y)^d \tag{102}$$
$$\ge \theta^{-1}30^{-d}r^d. \tag{103}$$

Troisième cas : $r\le 30\,d(y)$ *et* $C_y\not\subset B(x,r)$.

Alors, comme C_y est localement d-régulier, on a

$$H^d\big(E_{p,s}\cap B(x,r)\big)\ge H^d\big(C_y\cap B(x,r)\big) \tag{104}$$
$$\ge C^{-1}r^d. \tag{105}$$

On suppose enfin que $x\in C_Q$ avec $Q\in\mathcal{G}^{(1)}_{p,s}$. Alors, il existe $z\in F_{p,s}$ tel que

$$\operatorname{diam} Q\le \operatorname{dist}(z,Q)\le ps\operatorname{diam} Q.$$

On peut donc faire la même démonstration que dans le cas où $x\in C_y$ et $y\in\mathcal{C}_{p,s}$. L'ensemble $E_{p,s}$ est donc d-régulier. Ce qui termine la démonstration de la proposition 4.4.

Montrons maintenant comment adapter la démonstration afin d'obtenir les autres résultats et commençons par la proposition 4.5.

Si, au lieu des plaques $C_Q \subset Q$ ou $C_x \subset B(x,r)$, on avait utilisé des ensembles localement réguliers (inclus dans Q ou $B(x,r)$) vérifiant (81) ou (83), les ensembles $E_{p,s}$, que l'on aurait ainsi obtenus, seraient réguliers.

Il nous suffit donc d'utiliser des ensembles de Cantor (qui sont purement non rectifiables) Ahlfors-réguliers (en dimension 1, l'exemple type d'un tel ensemble est le Cantor quatre coins, voir partie 2).

Pour la preuve de la proposition 4.3, on peut simplifier la construction précédente. Les F_p étant définis comme précédemment, on considère, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ et tout $s \in \mathbb{N}^\star$,

$$F_{p,s} = \Big\{ x \in F_p \ ; \ \text{pour tout } r \in \,]0, \operatorname{diam} E[\, , \ H^d\big(F_p \cap B(x,r)\big) \geq \frac{r^d}{ps} \Big\}.$$

D'après (8) et le corollaire 2.3, pour H^d-presque tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ et $s \in \mathbb{N}^\star$ tels que $x \in F_{p,s}$.

Comme on souhaite recouvrir E par des ensembles Ahlfors-réguliers à un ensemble de mesure nulle près, il nous suffit d'inclure chaque $F_{p,s}$ dans un ensemble Ahlfors-régulier. Pour cela, considérons pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ et tout $s \in \mathbb{N}^\star$,

$$G_{p,s} = F_p \setminus F_{p,s} \, .$$

Pour tout $x \in G_{p,s}$, on note

$$d(x) = \tfrac{1}{10} \operatorname{dist}(x, F_{p,s}).$$

On considère un recouvrement de Besicovitch de $G_{p,s}$ par des boules $B(x, d(x))$, $x \in \mathcal{C}_{p,s}$. Pour tout $x \in \mathcal{C}_{p,s}$, on peut construire une plaque C_x suivant le lemme 4.8.

LEMME 4.8. — *Soit $x \in \mathcal{C}_{p,s}$. Alors il existe $(d+1)$ points $y_0, \dots, y_d$ de $E \cap B(x, \frac{1}{10} d(x))$ tels que*

(i) *pour $j = 1, \dots, d$, si L_j est le j-plan passant par $y_0, \dots, y_j$, on a :*

$$\operatorname{dist}(y_j, L_{j-1}) \geq \frac{1}{A} d(x); \tag{106}$$

(ii) *pour tout $j = 0, \dots, d$, on a :*

$$\tau^{-1}(d(x))^d \leq H^d\Big(E \cap B\Big(y_j, \frac{1}{CA} d(x)\Big)\Big) \leq \tau\big(d(x)\big)^d \tag{107}$$

où A et τ sont des constantes positives indépendantes de x.

Preuve du lemme 4.8. — Elle est similaire à celle du lemme 5.8 de [DS1]. Soit $j < d$. On note

$$B = B\big(x, \tfrac{1}{10}d(x)\big).$$

On suppose que l'on a construit $y_0, \dots, y_j$ vérifiant (106) et (107), mais que l'on ne peut pas construire y_{j+1} ; donc, pour tout

$$y \in B^\star = \Big\{E \cap B\,;\ \operatorname{dist}(y, L_j) \geq \frac{1}{A}d(x)\Big\},$$

on a :

$$H^d\Big(E \cap B\Big(y, \frac{1}{CA}d(x)\Big)\Big) \leq \tau^{-1}\big(d(x)\big)^d. \tag{108}$$

Considérons un recouvrement de $B^\star$ par des boules $B(y, \frac{1}{CA}d(x))$ avec $y \in B^\star$. Il en faut au plus $(A+1)^n$; donc, d'après (108),

$$H^d(B^\star) \leq (A+1)^n\tau^{-1}\big(d(x)\big)^d. \tag{109}$$

D'où, puisque $x \in \mathcal{C}_{p,s}$,

$$\begin{aligned} H^d\Big(\Big\{y \in E \cap B\,;\ \operatorname{dist}(y, L_j) \leq \frac{1}{A}d(x)\Big\}\Big) \\ \geq \Big(\frac{1}{10^d p} - (A+1)^n\tau^{-1}\Big)\big(d(x)\big)^d. \end{aligned} \tag{110}$$

Considérons un recouvrement de

$$\Big\{y \in E \cap B\,;\ \operatorname{dist}(y, L_j) \leq \frac{1}{A}d(x)\Big\}$$

par des boules de rayon $\frac{1}{A}d(x)$ centrées sur E. Il en faut au plus $(A+1)^j$, donc,

$$H^d\Big(\Big\{y \in E \cap B\,;\ \operatorname{dist}(y, L_j) \leq \frac{1}{A}d(x)\Big\}\Big) \leq (A+1)^j C_0\Big(\frac{d(x)}{A}\Big)^d \tag{111}$$

où C_0 est la constante de régularité supérieure de E. On choisit A assez grand pour que

$$C_0\frac{(A+1)^j}{A^d} \leq \frac{1}{4(10^d)p}, \tag{112}$$

puis τ tel que

$$\tau^{-1} \leq \frac{1}{2(A+1)^n 10^d p}. \tag{113}$$

Les inégalités (110) et (111) sont alors incompatibles. Donc y_{j+1} existe, et on peut construire $(d+1)$ points $y_0, \dots, y_d$ dans $E \cap B$ vérifiant (106) et (107). Ceci termine la preuve du lemme 4.8.

REMARQUE. — Ce lemme est du même type que le lemme 3.5 : (106) est l'équivalent de (32) et (107) remplace l'hypothèse de densité sur E.

Si A est suffisamment grand, tout $(d+1)$-uplet $(z_0,\dots,z_d)$ formé de points $z_j \in B(y_j, \frac{1}{CA}d(x))$ vérifie aussi (106). De plus, pour $j = 1,\dots,d$ et pour tout $z \in B(y_j, \frac{1}{CA}d(x))$,

$$\tau^{-1}(d(x))^d \leq H^d\Big(E \cap B\Big(z, \frac{2}{CA}d(x)\Big)\Big) \leq C_0\Big(\frac{2}{CA}\Big)^d\big(d(x)\big)^d. \tag{114}$$

On considère le centre de masse de $E \cap B(y_j, \frac{1}{CA}d(x))$ pour tout $j = 0,\dots,d$:

$$\tilde{y}_j = \frac{1}{H^d(E \cap B(y_j, \frac{1}{CA}d(x)))}\int_{y \in E \cap B(y_j, \frac{1}{CA}d(x))} y \, \mathrm{d}H^d(y). \tag{115}$$

On note P_x le d-plan contenant $\widetilde{y}_0,\dots,\widetilde{y}_d$ et $C_x \subset P_x \cap B(x, d(x))$ l'enveloppe convexe des $\widetilde{y}_j$ pour $j = 0,\dots,d$. On a alors

$$\theta^{-1}\big(d(x)\big)^d \leq H^d(C_x) \leq \theta\big(d(x)\big)^d \tag{116}$$

où θ est une constante positive indépendante de x. Posons

$$E_{p,s} = F_{p,s} \cup \Big(\bigcup_{x \in \mathcal{C}_{p,s}} C_x\Big).$$

Alors, puisque l'on a vu que pour H^d presque tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}^\star$, $s \in \mathbb{N}^\star$ tels que $x \in F_{p,s}$; on a

$$E \subset E_0 \cup \Big(\bigcup_p \bigcup_s E_{p,s}\Big)$$

où $H^d(E_0) = 0$.

En adaptant la démonstration précédente, il est facile de montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, tout $s \in \mathbb{N}^\star$, $E_{p,s}$ est d-régulier.

La démonstration du fait que pour H^d presque tout $x \in E_{p,s}$

$$\int_0^1 \beta_q(x, t, E_{p,s})^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty$$

est identique à celle dans le cas régulier de (29). La non-régularité de E est compensée par le choix des $\tilde{y}_j$ (voir lemme 4.8 ainsi que (115)) qui sont des points de E au voisinage desquels la masse de E est non négligeable (inégalités (107) et (114)).

Ce qui termine la preuve de la proposition 4.3 et donc du théorème 1.1.

5. Preuve du théorème 1.2

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier d-rectifiable avec $H^d(E) < +\infty$. Soit q vérifiant (6) ou (7) selon la valeur de d. Nous allons montrer qu'alors en H^d presque tout $x \in E$, on a

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty.$$

Remarquons que, d'après le théorème 2.11, si E est uniformément rectifiable, donc, en particulier, si E est une union finie de graphes lipschitziens, le théorème 1.2 est trivialement vérifié.

Afin d'utiliser cette remarque, on va recouvrir E par une union de « bons » graphes lipschitziens, c'est-à-dire tels que l'on puisse contrôler les β_q par rapport à E par les β_q par rapport à ces graphes.

Fixons $\varepsilon > 0$.

PROPOSITION 5.1. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier d-rectifiable avec $H^d(E) < +\infty$. Alors il existe :*

(i) *des d-plans $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $G(n,d)$;*

(ii) *deux familles de d-graphes lipschitziens*

$$(\Gamma^+_{k,j})_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ d+1\le j\le n}} \quad et \quad (\Gamma^-_{k,j})_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ d+1\le j\le n}}$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $j = d+1,\dots,n$,

$$\Gamma^{+/-}_{k,j} = \{x + A^{+/-}_{k,j}(x)\ ;\ x \in P_k\}$$

avec $A^{+/-}_{k,j} : P_k \to P_k^{\perp}$ est lipschitzienne ;

(iii) *des réels strictement positifs $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de sorte que pour H^d presque tout $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que*

(a) *pour tout $j = d+1,\dots,n$,*

$$x \in \Gamma^+_{k,j} \cap \Gamma^-_{k,j}\,, \tag{117}$$

$$E \cap B(x,r_k) = E \cap C(x,r_k,\varepsilon,P_k); \tag{118}$$

(b) *pour tout $y \in E \cap C(x,r_k,\varepsilon,P_k)$, tout $j = d+1,\dots,n$,*

$$\Big(\big(\Pi_k(y), A^-_{k,j}(\Pi_k(y))\big)\Big)_j \le (y)_j \le \Big(\big(\Pi_k(y), A^+_{k,j}(\Pi_k(y))\big)\Big)_j \tag{119}$$

où Π_k est la projection orthogonale sur P_k et $(u)_j$ est la j-ième coordonnée de $u \in \mathbb{R}^n = P_k \oplus P_k^{\perp}$.

En dimension $d = 1$, cette construction est due à C.J. Bishop [B1] (voir la figure 2).

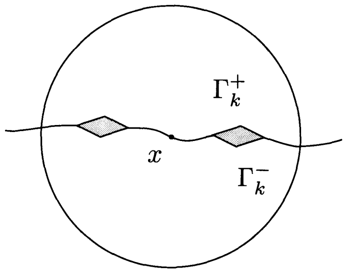

Figure 2. Dans $B(x, r_k)$, les points de E appartiennent à $\Gamma_k^+ \cap \Gamma_k^-$ ou sont dans les zones hachurées (propriété (119) pour $n = 2$, $d = 1$). On voit bien alors que, pour $t < r_k$, $\beta_q(x, t, E)$ est dominé par $\beta_q(x, t, \Gamma_k^+ \cup \Gamma_k^-)$.

Preuve de la proposition 5.1. — Soit $\varepsilon > 0$. Commençons par quelques rappels sur la Grassmanienne $G(n, d)$.

Pour tout $P \in G(n, d)$, on note $\Pi_P : \mathbb{R}^n \to P$ la projection orthogonale sur P. On peut alors définir sur $G(n, d)$ la distance

$$\operatorname{dist}(P, P') = \|\Pi_P - \Pi_{P'}\|$$

où $\| \ \|$ est la norme usuelle sur l'espace des applications linéaires continues. Munie de cette distance, $G(n, d)$ est compacte (voir [Ma, chap. 3]). On peut donc considérer une famille de d-plans $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $G(n, d)$ dense dans $G(n, d)$.

Pour tout $P \in G(n, d)$, tout $r > 0$, on note :

$$F(r, \varepsilon, P) = \big\{x \in E\,;\ E \cap B(x, r) = E \cap C(x, r, \varepsilon, P)\big\}.$$

Alors d'après le théorème 2.7 et le lemme 2.6, en H^d presque tout point $x \in E$, il existe $P \in G(n, d)$, $r > 0$ tels que $x \in F(r, \varepsilon, P)$. Donc si on considère une suite de réels $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ décroissante tendant vers 0, alors on a

$$E = \Big(\bigcup_k \Big(\bigcup_i F(r_i, \varepsilon, P_k)\Big)\Big) \cup E_0 \tag{120}$$

où $H^d(E_0) = 0$.

Pour tous $k, i \in \mathbb{N}$, on considère un recouvrement de $F(r_i, \varepsilon, P_k)$ par une famille dénombrable de boules $B(x, r_i/C)$ où $x \in F(r_i, \varepsilon, P_k)$. On a donc

$$F(r_i, \varepsilon, P_k) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \Big(F(r_i, \varepsilon, P_k) \cap B\Big(x_h, \frac{r_i}{C}\Big)\Big) \tag{121}$$

$$= \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \widetilde{F}(x_h, r_i, \varepsilon, P_k). \tag{122}$$

Compte tenu de (122), (120) peut s'écrire

$$E = \Big(\bigcup_k \widetilde{F}(x_k, r_k, \varepsilon, P_k) \Big) \cup E_0 \tag{123}$$

où $H^d(E_0) = 0$.

Pour terminer la preuve de la proposition 5.1, il nous suffit de construire pour tout k des d-graphes lipschitziens $(\Gamma^+_{k,j})_{d+1 \le j \le n}$ et $(\Gamma^-_{k,j})_{d+1 \le j \le n}$ qui contiennent $\widetilde{F}(x_k, r_k, \varepsilon, P_k)$ et qui vérifient (119).

Pour simplifier, on notera

$$\widetilde{F}_k = \widetilde{F}(x_k, r_k, \varepsilon, P_k).$$

Considérons $\widetilde{F}_k$ où $k \in \mathbb{N}$. On note :

$$\widetilde{C}(x, r_k, \varepsilon, P_k) = C(x, r_k, \varepsilon, P_k) \cap \Big(\bigcup_{y \in \widetilde{F}_k} C(y, r_k, \varepsilon, P_k) \Big),$$

$$F_k^\star = \bigcup_{x \in \widetilde{F}_k} \widetilde{C}(x, r_k, \varepsilon, P_k).$$

Soit Π_k la projection orthogonale sur P_k. Pour tout $u \in \Pi_k(F_k^\star)$, pour tout $j \in \{d+1, \cdots, n\}$, on définit

$$a^+_{k,j}(u) = \sup \Big\{ u_j \in \mathbb{R}\,;\ \text{il existe } (u_d, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ \text{dans } \mathbb{R}^{n-d-1} \text{ tel que } (u, u_d, \ldots, u_j, \ldots, u_n) \in F_k^\star \Big\}.$$

Soit

$$A^+_{k,j}(u) = (u_d, \ldots, a^+_{k,j}(u), \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n-d}$$

pour lequel le sup précédent est atteint.

On définit de même $a^-_{k,j}$ grâce à l'inf puis $A^-_{k,j}$.

Pour tout $j \in \{d+1,\dots,n\}$, $A^+_{k,j}$ (resp. $A^-_{k,j}$) est une application lipschitzienne de $\Pi_k(F^\star_k) \subset P_k$ sur $P_k^\perp$. On peut la prolonger en une application lipschitzienne de P_k dans $P_k^\perp$. Soit $\Gamma^+_{k,j}$(resp. $\Gamma^-_{k,j}$) son graphe lipschitzien.

Il est clair qu'alors, pour tout $j \in \{d+1,\dots,n\}$, on a :

- $\widetilde{F}_k \subset \Gamma^+_{k,j} \bigcap \Gamma^-_{k,j}$;
- si $y \in F^\star_k$,

$$\big((\Pi_k(y), A^-_{k,j}(y))\big)_j \leq (y)_j \leq \big((\Pi_k(y), A^+_{k,j}(y))\big)_j \tag{124}$$

où $(u)_j$ est la j-ième coordonnée de $u \in \mathbb{R}^n = P_k \oplus P_k^\perp$.

Ce qui termine la preuve de la proposition 5.1.

Appliquons la proposition 5.1 à l'ensemble E. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit

$$\Gamma_k = \Big(\bigcup_{j=d+1}^n \Gamma^+_{k,j}\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=d+1}^n \Gamma^-_{k,j}\Big).$$

On va montrer que l'on peut contrôler les β_q par rapport à E par les β_q par rapport aux Γ_k.

L'ensemble Γ_k est un ensemble uniformément rectifiable, donc, pour H^d presque tout $y \in \Gamma_k$, on a

$$\int_0^1 \beta_q(y,t,\Gamma_k)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty, \tag{125}$$

donc, pour H^d presque tout $x \in \widetilde{F}(x_k, r_k, \varepsilon, P_k)$,

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,\Gamma_k)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty. \tag{126}$$

Or, pour H^d presque tout $x \in \widetilde{F}(x_k, r_k, \varepsilon, P_k)$, d'après (118) et (119), on a

$$\int_0^{r_k} \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq C \int_0^{r_k} \beta_q(x,t,\Gamma_k)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}, \tag{127}$$

d'où

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty. \tag{128}$$

Donc, d'après (123), pour H^d presque tout $x \in E$,

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty, \tag{129}$$

ce qui finit la preuve du théorème 1.2.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] Bishop (C.J.). — *Harmonic measure supported on curves*, Thèse, Université de Chicago, 1987.

[B2] Bishop (C.J.). — Some conjectures concerning harmonic measure, dans *Partial differential equations with minimal smoothness*, IMA vol. in Math. and its Applications, Springer Verlag, t. **42**, 1991.

[BJ] Bishop (C.J.) and Jones (P.W.). — *Harmonic measure, L^2 estimates and the schwarzian derivatives*, J. Analyse Math., t. **62**, 1994, p. 77–113.

[Da] David (G.). — *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, t. **1465**, 1991.

[DS1] David (G.) and Semmes (S.). — *Singular integrals and rectifiable sets in $\mathbb{R}^n$: au-delà des graphes lipschitziens*, Astérisque, t. **193**, 1991.

[DS2] David (G.) and Semmes (S.). — *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, Math. Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., t. **38**, 1993.

[Fa] Falconer (K.J.). — *Geometry of fractal sets.* — Cambridge University Press, 1984.

[Fe] Federer (H.). — *Geometric measure theory.* — Springer Verlag, 1969.

[Ga] Garnett (J.). — *Positive length but zero analytic capacity*, Proc. Amer. Math. Soc., t. **24**, 1970, p. 696–699.

[J1] Jones (P.W.). — Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure, in *Harmonic analysis and Partial differential equations*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, t. **1384**, 1989, p. 24–68.

[J2] Jones (P.W.). — *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*, Inventiones Math., t. **102**, 1990, p. 1–15.

[Ma] MATTILA (P.). — *Geometry of sets and measures in euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Math., Cambridge University Press, t. **44**, 1995.

[MMV] MATTILA (P.), MELNIKOV (M.) and VERDERA (J.). — *The Cauchy integral, analytic capacity and uniform rectifiability*, Annals of Math., t. **144**, 1996, p. 127–136.

[Ok] OKIKIOLU (K.). — *Characterization of subsets of rectifiable curves in* $\mathbb{R}^n$, J. London Math. Soc., t. **46**, 1992, p. 336–348.

[Pa] PAJOT (H.). — *Théorème de recouvrement par des ensembles Ahlfors-réguliers et capacité analytique*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **323**, série I, 1996, p. 133–135.

[St] STEIN (E.M.). — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* — Princeton University Press, 1971.

[StZ] STEIN (E.M.) and ZYGMUND (A.). — *On differentiability of functions*, Studia Math., t. **23**, 1964, p. 247–283.