

BULLETIN DE LA S. M. F.

HÉLÈNE MAYNADIER

**Polynômes de Bernstein-Sato associés à une intersection
complète quasi-homogène à singularité isolée**

Bulletin de la S. M. F., tome 125, n° 4 (1997), p. 547-571

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_4_547_0

© Bulletin de la S. M. F., 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POLYNÔMES DE BERNSTEIN-SATO ASSOCIÉS
À UNE INTERSECTION COMPLÈTE
QUASI-HOMOGÈNE À SINGULARITÉ ISOLÉE

PAR HÉLÈNE MAYNADIER (*)

RÉSUMÉ. — Nous calculons explicitement des équations fonctionnelles vérifiées par une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée ou un germe semi-quasi-homogène, sous des hypothèses supplémentaires de singularité isolée pour les sous-familles. Nous montrons de plus qu'en dimension deux, l'idéal de Bernstein-Sato associé à deux polynômes quasi-homogènes à singularité isolée, définissant l'origine, est principal, et nous déterminons son générateur.

ABSTRACT. — We calculate explicitly functional equations satisfied by a weighted homogeneous isolated complete intersection singularity or a semi-quasi-homogeneous germ, under extra conditions of isolated singularity for the subfamilies. Furthermore we prove that, in dimension two, the Bernstein-Sato ideal associated with two weighted homogeneous polynomials with isolated singularity, defining the origin, is principal, and we determine its generator.

1. Introduction — Énoncés

La notion de polynôme de Bernstein-Sato a été généralisée par C. Sabbah, qui a démontré dans [14] et [15] qu'étant données des fonctions f_1, \dots, f_p holomorphes au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n , il existe des équations fonctionnelles de la forme

$$(*) \quad b(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M} = \mathcal{D}[s] f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}$ et b est un produit de formes affines à coefficients entiers ($\mathcal{D}[s]$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, polynomiaux en s_1, \dots, s_p).

(*) Texte reçu le 31 janvier 1997, révisé le 30 juin 1997 et le 22 octobre 1997.
H. MAYNADIER, Université d'Angers, Département de Mathématiques, 2 bd. Lavoisier,
49045 Angers CEDEX 01. Email : hlm@tonton.univ-angers.fr.

Mots clés : \mathcal{D} -modules, polynôme de Bernstein-Sato généralisé, singularités quasi-homogènes, singularités semi-quasi-homogènes.

Classification AMS : 32C38, 32S05, 14B05.

L'ensemble des polynômes $b(s)$ vérifiant une telle relation est l'idéal de Bernstein-Sato de $f = (f_1, \dots, f_p)$, noté $\mathcal{B}(f)$. De même, nous considérons les idéaux $\mathcal{B}_j(f)$, $\mathcal{B}_{\hat{k}}(f)$, $\mathcal{B}_{\Sigma}(f)$, correspondant respectivement aux cas où \mathcal{M} est le $\mathcal{D}[s]$ -module

$$\mathcal{D}[s]f_j f^s, (j = 1, \dots, p); \sum_{\substack{j=1, \dots, p \\ j \neq k}} \mathcal{D}[s]f_j f^s, (k = 1, \dots, p); \sum_{j=1}^p \mathcal{D}[s]f_j f^s.$$

Nous écrirons seulement \mathcal{B} , \mathcal{B}_j, \dots si aucune confusion n'est possible. De plus, nous abrègerons dans la suite $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ en f^s et $f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$ en f^{s+1} .

Ces équations fonctionnelles donnent lieu à des égalités dans le $\mathbb{C}\{x\}[s, 1/f]$ -module libre $\mathbb{C}\{x\}[s, 1/f]f^s$, qui est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}[s]$ -module à gauche ($\mathbb{C}\{x\}[s, 1/f]$ est le localisé de $\mathbb{C}\{x\}[s]$ par rapport aux puissances de $f_1 \dots f_p$).

Fixons un système de poids $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ pour toute la suite, les α_i étant premiers entre eux; le but de ce travail est de calculer de telles équations fonctionnelles dans les cas où f est une intersection complète α -homogène à singularité isolée, ou une α -intersection complète à singularité isolée.

Rappelons quelques définitions.

- Un polynôme est dit α -homogène de degré ρ s'il s'écrit comme combinaison linéaire de monômes $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ avec $\alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_n i_n = \rho$. (Nous introduisons de nouvelles dénominations sur la suggestion du rapporteur, dans le but d'alléger les appellations; un tel polynôme est habituellement dit «quasi-homogène de degré ρ pour le système α ».)

- Une intersection complète (f_1, \dots, f_p) dont les composantes f_j sont α -homogènes (de degrés ρ_j éventuellement distincts) est elle-même dite α -homogène.

- Nous définissons la fonction d'ordre

$$\rho : \mathbb{C}\{x\} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N},$$

$$f = \sum a_I x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \longmapsto \rho(f) = \min \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j i_j ; a_I \neq 0 \right\}$$

en posant en outre $\rho(0) = +\infty$. Nous appelons \mathcal{P}_ρ le sous-espace des fonctions d'ordre au moins égal à ρ et (\mathcal{P}_\bullet) la filtration ainsi obtenue; le gradué associé est $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{\rho \in \mathbb{N}} H_\rho$ où H_ρ est le sous-espace vectoriel des polynômes α -homogènes de degré ρ ou nuls.

- La *partie initiale* $\text{In}(f)$ d'une série $f \in \mathbb{C}\{x\}$ est sa composante α -homogène de degré minimal.

- On dit que le germe $V(f_1, \dots, f_p) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ (ou le germe d'application analytique f) est une α -*intersection complète à singularité isolée* (α -SIIC) si les formes initiales des fonctions f_1, \dots, f_p définissent une intersection complète à singularité isolée (on dit habituellement d'un tel germe qu'il est «semi-quasi-homogène pour α »).

- Par ailleurs, la *colongueur* d'un idéal I d'une k -algèbre A est la dimension du k -espace vectoriel quotient A/I .

- Lorsqu'un idéal I α -homogène, c'est-à-dire admettant un système de générateurs α -homogènes, est de colongueur finie, nous appelons *cobase α -homogène de I* un système de polynômes α -homogènes dont les classes forment une base du quotient $\mathbb{C}[x]/I$. L'ensemble des degrés d'une telle famille de polynômes est noté $\mathcal{W}(I)$.

Étant donnée une équation fonctionnelle vérifiée par une application α -homogène, considérer la composante de degré convenable, dans le gradué associé à la filtration (\mathcal{P}_\bullet) , permet d'obtenir en fait une équation fonctionnelle α -homogène, donc avec opérateurs dans l'algèbre $\mathbb{A}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]$. Dans les «situations polynomiales», nous notons alors encore \mathcal{D} l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$, sauf mention contraire. On peut remarquer par ailleurs que tout ce qui est fait dans la suite est encore valable sur k , un corps algébriquement clos de caractéristique nulle (et \mathcal{D} désigne alors $\mathbb{A}_n(k)$).

Donnons quelques propriétés facilement vérifiables de l'idéal de Bernstein-Sato. On remarque tout d'abord que l'on a les inclusions :

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_{\hat{k}} \subset \mathcal{B}_\Sigma \quad \text{pour } j \neq k.$$

De plus, si les idéaux $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ ne sont pas nuls, il en est de même pour \mathcal{B} . (Il suffit pour le voir de multiplier successivement f^s par un élément non trivial de chaque \mathcal{B}_j , en effectuant un décalage sur le p -uplet s .) Pour $j = 1, \dots, p$, notons

$$\widehat{f}^j = (f_1, \dots, \widehat{f}_j, \dots, f_p)$$

l'application obtenue à partir de f en supprimant la j -ième composante; nous pouvons alors énoncer la

PROPOSITION 1.1. — Soient $c(s)$ dans $\mathcal{B}_\Sigma(f)$, $b_j(s)$ dans $\mathcal{B}(\widehat{f}^j)$ pour $j = 1, \dots, p$, et $d(s)$ le ppcm des polynômes $b_j(s)$. Alors il existe un entier ℓ tel que

$$d(s) \left[\prod_{\substack{(\delta_1, \dots, \delta_p) \in \mathbb{N}^p \\ \delta_1 + \dots + \delta_p \leq \ell}} c(s_1 + \delta_1, \dots, s_p + \delta_p) \right] \in \mathcal{B}(f).$$

Preuve. — On remarque tout d'abord que, pour un entier m assez grand :

$$\forall j, \quad d(s)f_j^{m+1}f^s \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

L'idée est donc de commencer par itérer une équation fonctionnelle vérifiée par $c(s)$ jusqu'à obtenir, agissant sur f^s , un opérateur différentiel dont les coefficients (à droite) appartiennent à l'idéal $(f_1, \dots, f_p)^{m+1}$. On conclut alors en multipliant cette équation par $d(s)$. \square

Cette proposition fournit, par récurrence, un polynôme de $\mathcal{B}(f)$ à partir de polynômes de $\mathcal{B}_\Sigma(g)$ pour toutes les familles g extraites de f .

Enfin, on sait déterminer un facteur obligatoire des polynômes de Bernstein-Sato associés aux intersections complètes :

LEMME 1.2. — *Si $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{C}\{x\}$ sont deux à deux sans facteur commun, $(s_1 + 1) \cdots (s_p + 1)$ divise tout polynôme de Bernstein-Sato de $f = (f_1, \dots, f_p)$.*

Preuve. — Se placer en un point générique de la variété des zéros de f_j . \square

Posons :

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \\ \rho \cdot s &= \rho_1 s_1 + \cdots + \rho_p s_p, \\ \ell_w(s) &= \rho \cdot s + |\alpha| + w \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De plus, si $\kappa = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$, avec $1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$, nous notons Δ_κ le $p \times p$ -mineur de la matrice jacobienne de f construit sur les colonnes k_1, \dots, k_p ; si $p = n$, Δ est le déterminant jacobien de f . Nous désignons par $J(f)$ l'idéal engendré par ces mineurs, et posons

$$I(f) = J(f) + (f_1, \dots, f_p).$$

Rappelons que l'opérateur d'Euler associé au système de poids α est

$$\chi = \sum \alpha_i x_i \frac{d}{dx_i}.$$

Si f est α -homogène, nous montrons qu'il est suffisant, pour calculer un polynôme réalisant (*), de résoudre le problème suivant : trouver un idéal I de $\mathbb{C}[x]$, α -homogène de colongueur finie, et un polynôme $d(s)$, tels que :

$$(**) \quad d(s)If^s \subset \mathcal{M}.$$

En effet, si l'on dispose de tels d et I , les monômes de degré assez grand sont éléments de I . Il suffit donc de savoir «faire monter l'ordre» des

fonctions apparaissant devant f^s pour conclure. Or cette « ascension » est possible grâce à l'opérateur d'Euler. Nous donnons donc, pour chacun des modules \mathcal{M} considérés, et sous des hypothèses de singularité isolée adaptées, un idéal I et un polynôme d vérifiant (**), et par suite, une formule explicite de polynôme b réalisant une équation fonctionnelle (*). Le résultat général est le

THÉORÈME 1.3. — Soient $f_1 \in H_{\rho_1}, \dots, f_p \in H_{\rho_p}$. Si, pour tout $k = 1, \dots, p$, tout k -uplet $f_L = (f_{\ell_1}, \dots, f_{\ell_k})$ de fonctions extrait de f définit une intersection complète à singularité isolée, alors pour tout k -uplet $L = (\ell_1, \dots, \ell_k)$ (où $1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq p$ et $k = 2, \dots, p$), il existe des entiers positifs m_L tels que, si l'on note l'idéal

$$I(L) = J(f_L)^{2k-1} + (f_{\ell_1}, \dots, f_{\ell_k})^{k m_L + 1},$$

on ait :

$$b(s) = \left[\prod_{j=1}^p (s_j + 1) \right] \tilde{b}(s) \in \mathcal{B}(f_1, \dots, f_p)$$

où $\tilde{b}(s)$ est le polynôme réduit :

$$\begin{aligned} \tilde{b}(s) &= \prod_{j=1}^p \prod_{w \in \mathcal{W}(J(f_j))} (\rho_j s_j + |\alpha| + w) \\ &\times \prod_{k=2}^p \prod_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq p} \prod_{w \in \mathcal{W}(I(L))} (\rho_{\ell_1} s_{\ell_1} + \dots + \rho_{\ell_k} s_{\ell_k} + |\alpha| + w). \end{aligned}$$

Contrairement à la situation « classique » ($p = 1$), nous ne savons plus *a priori* si l'idéal de Bernstein-Sato de (f_1, \dots, f_p) est principal. Bien qu'il soit plus raisonnable de penser qu'il ne l'est pas, nous montrons ici :

THÉORÈME 1.4 (cas $n = 2$). — Soit f_1, f_2 des polynômes α -homogènes à singularité isolée, tels que le morphisme $f = (f_1, f_2)$ définisse l'origine dans \mathbb{C}^2 . Alors l'idéal de Bernstein-Sato de f est principal.

Plus précisément, sous ces mêmes hypothèses, si les polynômes f_1, f_2 , de degrés respectifs $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{N}$, sont de déterminant jacobien $\Delta \in \mathfrak{M}$, considérons l'idéal

$$K = (f_1 f_2, f_1 \Delta, f_2 \Delta).$$

Si $\dim_{\mathbb{C}} H_{\rho(\Delta)} = 1$, posons $\mathcal{W}' = \mathcal{W}(K) - \{\rho(\Delta)\}$; sinon $\mathcal{W}' = \mathcal{W}(K)$. Alors l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}(f)$ est engendré par

$$b(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \prod_{w \in \mathcal{W}'} \ell_w(s).$$

(Nous nous permettons de noter \mathfrak{M} aussi bien l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x\}$ que l'idéal maximal engendré par x_1, \dots, x_n dans $\mathbb{C}[x]$.)

Les démonstrations de ces résultats reposent sur des calculs de variétés caractéristiques et d'annulateurs semblables à ceux de [1]. Le doute quant à la principalité est toutefois levé à présent : on peut trouver le calcul d'un contre-exemple, en dimension 3, dans [5]. Il reste encore à déterminer dans quels cas l'idéal est principal. Signalons que A. Gyoja [9] donne une condition algébrique suffisante, en dimension quelconque, avec $p = 2$.

Enfin, nous étudions le cas des α -SIIC. Nous considérons des fonctions f_1, \dots, f_p d'ordres ρ_1, \dots, ρ_p telles que pour tout ℓ , $1 \leq \ell \leq p$, pour tout ℓ -uplet $(j_1, \dots, j_\ell) \subset \{1, \dots, p\}$, le germe $V(f_{j_1}, \dots, f_{j_\ell})$ soit une α -SIIC.

Pour tout ℓ -uplet d'entiers $I = (i_1, \dots, i_\ell)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$, nous notons $d_{J,I}$ le mineur de la matrice jacobienne de l'application

$$f_J = (f_{j_1}, \dots, f_{j_\ell})$$

formé sur les colonnes i_1, \dots, i_ℓ . Nous définissons alors, si $j_1 < \dots < j_{\ell-1}$, l'idéal I_J de $\mathbb{C}\{x\}$ engendré par $f_{j_1}, \dots, f_{j_{\ell-1}}$ et les mineurs $d_{J,I}$.

Les applications $(f_{j_1}, \dots, f_{j_{\ell-1}})$ et f_J étant des α -SIIC, elles définissent des germes d'intersections complètes à singularité isolée (cf. [8, th. 5.1, p. 83] ou [M2, prop. II.1.2.2.2, p. 74]). D'après la formule de Greuel-Lê (voir [7], [10]), I_J est donc un idéal de colongueur finie. Soit alors N le plus petit entier tel que l'idéal \mathcal{P}_N soit inclus dans tous les I_J , et posons

$$N_0 = N + 2(\rho_1 + \dots + \rho_p).$$

La formule permettant de calculer un polynôme de Bernstein-Sato dans ce cadre est donnée par la

PROPOSITION 1.5. — *Soient des fonctions f_1, \dots, f_p d'ordres non nuls ρ_1, \dots, ρ_p pour le système de poids α , telles que toute famille extraite de $\{f_1, \dots, f_p\}$ définisse une α -SIIC. Alors*

$$b(s) = \left[\prod_{j=1}^p (s_j + 1) \prod_{0 \leq w \leq N_0} \ell_w(s) \right] \in \mathcal{B}(f_1, \dots, f_p).$$

Les principes du calcul s'inspirent des deux procédures de « montée des poids » (c'est-à-dire « montée de l'ordre » selon nos notations) et « réécriture par division » qui sont les bases de l'algorithme mis au point par J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe et M. Miniconi [4] dans le cas d'une hypersurface.

Ce polynôme de Bernstein-Sato n'est pas directement comparable à celui calculé pour les α -homogènes. D'une part, dans la formule du théorème 1.3, $\tilde{b}(s)$ est un produit de formes affines correspondant à toutes les sous-familles, alors que seules des formes associées à (f_1, \dots, f_p) interviennent dans le polynôme de la proposition 1.5. D'autre part, nous verrons que l'idée de notre algorithme de calcul, appliquée aux α -homogènes, ne «perturbe» pas le symbole $f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$, alors qu'il fait apparaître en général des $f_1^{s_1 - k_1} \cdots f_p^{s_p - k_p}$. Ce fait se traduit par des «décalsages entiers» entre les facteurs $\ell_w(s)$ du polynôme de Bernstein-Sato calculé pour les α -SIIC, et celui obtenu pour les intersections complètes α -homogènes à singularité isolée (le phénomène avait déjà lieu dans le cas d'une hypersurface [4]). Ainsi, on peut écrire la «dernière» forme, ℓ_{N_0} , de la manière suivante :

$$\ell_{N_0}(s) = \rho_1[s_1 - (-2)] + \cdots + \rho_p[s_p - (-2)] + |\alpha| + N$$

où -2 est la plus petite valeur possible pour les décalages k_j dans l'algorithme. De plus, pour les α -SIIC, les constantes w croissent jusqu'à $N_0 = N + 2\rho_1 + \cdots + 2\rho_p$, où N est le plus petit entier majorant strictement les degrés des cobases des idéaux associés à toutes les sous-familles, alors que dans la situation α -homogène, les w ne prennent que les valeurs des degrés des cobases.

On peut par ailleurs donner, en utilisant [3], la majoration suivante de N en fonction des ordres :

$$N \leq (n + 1)(\rho_1 + \cdots + \rho_p).$$

On en déduit que les décalages entiers dans les facteurs $\ell_w(s)$ correspondent à des multi-indices $\kappa = (k_1, \dots, k_p)$ tels que

$$\rho \cdot \kappa < (n + 1)(\rho_1 + \cdots + \rho_p).$$

Comme dans le cas d'une intersection complète α -homogène, nous obtenons un polynôme de Bernstein-Sato pour une α -SIIC, en supposant que toutes les sous-familles vérifient les hypothèses de singularité isolée. Toutefois, le traitement de la situation α -SIIC (pour $p \geq 2$) fait apparaître de nouveaux problèmes pour la recherche d'autres types d'équations fonctionnelles. Ainsi, nous verrons que l'on peut trouver dans

$$(s_1 + 1) \cdots (s_p + 1) \mathbb{C}[\rho_1 s_1 + \cdots + \rho_p s_p]$$

des polynômes de l'idéal \mathcal{B}_Σ d'une intersection complète α -homogène à singularité isolée.

L'exemple suivant montre que ce n'est plus vrai pour une α -SIIC. Soit

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$

$$x = (x_1, x_2) \longmapsto (f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2^2 + x_1^3).$$

Le polynôme de Bernstein-Sato de f_1 est $b_1(s_1) = (s_1 + 1)$. En outre, f_2 est un polynôme $(2, 3)$ -homogène, à singularité isolée; son polynôme de Bernstein-Sato est

$$b_2(s_2) = (s_2 + 1)(6s_2 + 5)(6s_2 + 7).$$

L'application f définissant l'origine, le théorème 1.4 affirme alors que son idéal de Bernstein-Sato est engendré par le polynôme

$$b(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1)(2s_1 + 6s_2 + 5)(2s_1 + 6s_2 + 7) \\ \times (2s_1 + 6s_2 + 9)(2s_1 + 6s_2 + 11).$$

D'autre part, f est une $(2, 1)$ -SIIC, d'ordre $(2, 2)$. Si un polynôme appartenant à l'espace vectoriel $(s_1 + 1)(s_2 + 1)\mathbb{C}[2s_1 + 2s_2]$ était élément de l'idéal $\mathcal{B}_\Sigma(f)$, on sait, d'après la proposition 1.1, que f admettrait un polynôme de Bernstein-Sato de la forme :

$$b'(s) = \prod_{k \in A_1} (s_1 + k)^{m_1(k)} \prod_{k \in A_2} (s_2 + k)^{m_2(k)} (6s_2 + 5)(6s_2 + 7) \\ \times \prod_{\lambda \in \Lambda} (s_1 + s_2 + \lambda)^{m(\lambda)}$$

(où A_1, A_2 sont des sous-ensembles finis de \mathbb{N} , Λ un sous-ensemble fini de \mathbb{C} , et $m_1(k), m_2(k), m(\lambda)$ des entiers positifs), ce qui est impossible. \square

Les résultats de cet article sont extraits de ma thèse de doctorat. Je tiens à remercier Joël BRIANÇON, qui a guidé mes recherches.

2. Le cas des intersections complètes α -homogènes à singularité isolée

2.1. La recherche d'équations.

Soit g une application α -homogène; si un idéal $I \subset \mathbb{C}[x]$ et un polynôme $d(s) \in \mathbb{C}[s]$ vérifient une relation $d(s)If^s \subset \mathcal{M}$, on dit que le couple $(I, d(s))$ est du type

- (B) si $\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]g^{s+1}$;
- $(B_{\hat{k}})$ si $\mathcal{M} = \sum_{1 \leq j \leq p, j \neq k} \mathcal{D}[s]g_j g^s$;
- (B_j) si $\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]g_j g^s$;
- (B_Σ) si $\mathcal{M} = \sum_{j=1}^p \mathcal{D}[s]g_j g^s$.

LEMME 2.1.1 (montée des ordres). — Soit $I \subset \mathbb{C}[x]$ un idéal α -homogène de colongueur finie. Alors, pour tout entier k_0 , on a l'inclusion

$$\left[\prod_{\substack{w \in \mathcal{W}(I) \\ w \geq k_0}} \ell_w(s) \right] \mathcal{P}_{k_0} g^s \subset \mathcal{D}[s] I g^s.$$

Preuve. — Ce résultat se démontre par récurrence décroissante sur k_0 ; il repose sur l'identité d'Euler écrite pour ug^s , avec u dans H_{k_0} tel que $k_0 \in \mathcal{W}(I)$:

$$(\rho \cdot s + |\alpha| + k_0) u g^s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d}{dx_i} (x_i u g^s). \quad \square$$

On déduit directement de ce lemme-clef (avec $k_0 = 0$) le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1.2. — S'il existe $I \subset \mathbb{C}[x]$, idéal α -homogène de colongueur finie, et $d(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul, formant un couple du type (B) (resp. (B_j) , ou $(B_{\hat{k}})$, ou (B_{Σ})), alors l'idéal \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}_j , ou $\mathcal{B}_{\hat{k}}$, ou \mathcal{B}_{Σ}) contient un élément non trivial :

$$b(s) = d(s) \prod_{w \in \mathcal{W}(I)} \ell_w(s).$$

2.1.3. *Exemple : un arrangement d'hyperplans.* — Soient g_1, \dots, g_{n+1} des formes linéaires sur \mathbb{C}^n indépendantes n à n . Alors la proposition précédente, avec $I = (g_1, \dots, g_{n+1})^{n+1}$, assure que

$$(s_1 + 1) \cdots (s_{n+1} + 1) (s_1 + \cdots + s_{n+1} + n) \cdots (s_1 + \cdots + s_{n+1} + 2n)$$

est un polynôme de Bernstein-Sato de $g = (g_1, \dots, g_{n+1})$.

2.2. Les équations obtenues.

Voici maintenant les différents polynômes de Bernstein-Sato calculés, à l'aide de la proposition 2.1.2, pour une *intersection complète* α -homogène à singularité isolée $f = (f_1, \dots, f_p)$, de degrés ρ_1, \dots, ρ_p non nuls. Rappelons que, d'après la formule de Greuel-Lê (cf. [7], [10]), si une intersection complète à singularité isolée $g = (g_1, \dots, g_p) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ est telle que la variété définie par \hat{g}^k , un $(p-1)$ -uplet extrait, soit à singularité isolée, alors l'idéal $(g_1, \dots, \hat{g}_k, \dots, g_p) + J(g)$ est de colongueur finie.

COROLLAIRE 2.2.1 (cas $n = p = 2$). — Supposons de plus que f_1 et f_2 soient à singularité isolée, et soit l'idéal $K = (f_1 f_2, f_1 \Delta, f_2 \Delta)$. Alors

$$b(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \prod_{w \in \mathcal{W}(K)} \ell_w(s) \in \mathcal{B}(f_1, f_2).$$

Preuve. — L'idéal K est de colongueur finie, et le couple qu'il forme avec le polynôme $d(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1)$ est du type (B) : il suffit de constater que, si $\{i, j\} = \{1, 2\}$:

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j} \frac{d}{dx_i} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{d}{dx_j} \right) f^{s+1} = (s_i + 1) f_j \Delta f^s. \quad \square$$

COROLLAIRE 2.2.2. — Pour tout $d(s)$ dans $\sum_{j=1}^p \mathbb{C}[s](s_j + 1)$,

$$b(s) = d(s) \prod_{w \in \mathcal{W}(I(f))} \ell_w(s) \in \mathcal{B}_\Sigma(f_1, \dots, f_p).$$

Preuve. — Pour $j = 1, \dots, p$ et $1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n$, avec $K = (k_1, \dots, k_p)$, soient $\sigma_{j,1}^{(K)}, \dots, \sigma_{j,p}^{(K)}$ les cofacteurs respectivement relatifs à $\frac{\partial f_j}{\partial x_{k_1}}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_{k_p}}$ dans le mineur Δ_K . Considérant l'opérateur

$$\Xi_{j,K} = \sum_{\ell=1}^p \sigma_{j,\ell}^{(K)} \frac{d}{dx_{k_\ell}}$$

nous obtenons

$$(\diamond) \quad \Xi_{j,K} f_j f^s = (s_j + 1) \Delta_K f^s.$$

Le couple $(I(f), d(s))$ est donc du type (B_Σ) . \square

COROLLAIRE 2.2.3. — Supposons qu'un $(p-1)$ -uplet extrait \widehat{f}^k définisse encore une intersection complète à singularité isolée, et posons

$$I = (f_1, \dots, \widehat{f}_k, \dots, f_p) + J(f);$$

alors pour tout $d(s)$ élément de $\sum_{j \neq k} \mathbb{C}[s](s_j + 1)$, on a :

$$b(s) = d(s) \prod_{w \in \mathcal{W}(I)} \ell_w(s) \in \mathcal{B}_{\widehat{k}}(f_1, \dots, f_p).$$

Preuve. — La formule (\diamond) donnée dans la preuve du corollaire 2.2.2 permet encore de démontrer que pour tout

$$d(s) \in \sum_{j \neq k} \mathbb{C}[s](s_j + 1),$$

le couple $(I, d(s))$ est du type $(B_{\hat{k}})$. \square

2.3. Preuve du théorème 1.3.

La méthode suivie jusqu'ici échoue dans le cas général pour le calcul d'un élément de l'idéal \mathcal{B} . De fait, il nous faut, pour réussir, des hypothèses supplémentaires de singularité isolée sur toutes les familles extraites. Nous raisonnons par récurrence sur p .

- Pour $p = 1$, la proposition 2.2.2 nous donne le résultat. Dans ce cas, en effet, $I(f) = J(f)$.

- Supposons la proposition vraie au rang $p-1$. Le ppcm des polynômes $b_j \in \mathcal{B}(f^j)$, où $j = 1, \dots, p$, donnés par l'hypothèse de récurrence s'écrit $d(s) = \left[\prod_{j=1}^p (s_j + 1) \right] \tilde{d}(s)$, où $\tilde{d}(s)$ est de la forme demandée avec $k \leq p-1$.

Considérons l'idéal de colongueur finie $I = J(f)^q + (f_1, \dots, f_p)^{mp+1}$.

— En itérant l'identité (\diamond) de la preuve du corollaire 2.2.2, nous obtenons : pour tout u élément de $(J(f))^q$, avec q au moins égal à $2p-1$,

$$(s_1 + 1) \cdots (s_p + 1) u f^s \in \mathcal{D}[s] f^{s+1}.$$

— Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$b_j(s) f_j^{m+1} f^s \in \mathcal{D}[s] f^{s+1} \quad \text{pour } j = 1, \dots, p.$$

Alors, si v est dans $(f_1, \dots, f_p)^{mp+1}$, $d(s) v f^s$ appartient à $\mathcal{D}[s] f^{s+1}$.

Le résultat est alors donné par la proposition 2.1.2. \square

3. Un idéal de Bernstein-Sato principal en dimension 2

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 1.4.

Les résultats des sections 3.1 et 3.2, dont nous allons nous servir dans le cas α -homogène, sont valables plus généralement dans l'anneau $\mathbb{C}\{x\}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine de \mathbb{C}^2 ; nous désignons alors par \mathcal{D} l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\}$.

Soient $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ dans l'idéal maximal (x_1, x_2) , à singularité isolée, tels que $f = (f_1, f_2)$ définisse l'origine.

Notons K l'idéal $(f_1 f_2, f_1 \Delta, f_2 \Delta)$ et :

$$S_1 = f'_{1x_1} \frac{d}{dx_2} - f'_{1x_2} \frac{d}{dx_1} = \frac{d}{dx_2} f'_{1x_1} - \frac{d}{dx_1} f'_{1x_2} \in \mathcal{D},$$

$$S_2 = f'_{2x_2} \frac{d}{dx_1} - f'_{2x_1} \frac{d}{dx_2} = \frac{d}{dx_1} f'_{2x_2} - \frac{d}{dx_2} f'_{2x_1} \in \mathcal{D},$$

$$R_1(s_1) = f_1 S_2 - s_1 \Delta = S_2 f_1 - (s_1 + 1) \Delta \in \mathcal{D}[s_1],$$

$$R_2(s_2) = f_2 S_1 - s_2 \Delta = S_1 f_2 - (s_2 + 1) \Delta \in \mathcal{D}[s_2].$$

Nous désignons respectivement par s et ξ les couples d'indéterminées (s_1, s_2) et (ξ_1, ξ_2) .

3.1. L'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}[s_1]$.

Considérons, sur un voisinage X de $\{0\}$ dans \mathbb{C}^2 assez petit, les espaces conormaux relatifs à f_1 et f :

$$W_{f_1} = \overline{\{(x, (s/f_1) df_1); x \notin f_1^{-1}(0), s \in \mathbb{C}\}} \subset T^*X,$$

$$W_f = \overline{\{(x, (s_1/f_1) df_1 + (s_2/f_2) df_2); x \notin f_1^{-1}(0) \cup f_2^{-1}(0)\}} \subset T^*X$$

ainsi que que le sous-espace de $T^*X \times \mathbb{C}$ suivant :

$$W_f^{\#,1} = \overline{\{(x, (s_1/f_1) df_1 + (s_2/f_2) df_2, s_1); x \notin f_1^{-1}(0) \cup f_2^{-1}(0)\}}.$$

Si P est dans $\mathcal{D}[s]$, nous notons $\sigma(P)$ son symbole principal, qui est un élément de $\mathbb{C}\{x\}[\xi, s]$.

LEMME 3.2.1.

- (a) $W_f^{\#,1}$ est inclus dans la variété caractéristique de $\mathcal{D}[s_1]f^s$.
- (b) $(\sigma(R_1))$ est l'idéal premier des fonctions nulles sur $W_f^{\#,1}$.

Preuve.

(a) Étant donné $P \in \mathcal{D}[s_1]$, de degré total d , annihilant f^s , considérer la composante de degré d en s de Pf^s dans $\mathbb{C}\{x\}[1/f, s]f^s$.

(b) En effet, $(\sigma(R_1))^{-1}(0) = W_f^{\#,1}$: $W_f^{\#,1}$ est un sous-ensemble analytique irréductible de dimension 4 de $T^*\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$; or c'est aussi le cas de $(\sigma(R_1))^{-1}(0)$, dans lequel il est inclus. \square

PROPOSITION 3.1.2. — *L'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}[s_1]$ est un idéal principal, engendré par $R_1(s_1)$.*

Preuve. — Si $P \in \mathcal{D}[s_1]$ annule f^s , son symbole est multiple de celui de R_1 , d'après le lemme 3.1.1. Par suite, P admet une écriture $P = QR_1 + S$, où $\deg S < \deg P$, et $S \in \text{Ann}_{\mathcal{D}[s_1]} f^s$. On conclut en raisonnant par récurrence sur le degré. \square

3.2. L'annulateur de $f_1^\lambda f_2^{s_2}$ dans \mathcal{D} , pour λ non entier positif.

LEMME 3.2.1. — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'espace conormal relatif à f_2 est inclus dans la variété caractéristique de $\mathcal{D} f_1^\lambda f_2^{s_2}$.*

Preuve. — L'idée de la preuve est semblable à celle de la première partie du lemme 3.1.1. \square

PROPOSITION 3.2.2. — *Si $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$, l'annulateur de $f_1^\lambda f_2^{s_2}$ dans \mathcal{D} est engendré par $R_1(\lambda)$.*

Preuve. — Nous menons un raisonnement par récurrence sur le degré d d'un opérateur $P \in \text{Ann}_{\mathcal{D}} f_1^\lambda f_2^{s_2}$. D'après le lemme 3.2.1, $\sigma(P)$ est nul sur W_{f_2} , c'est-à-dire

$$\sigma(P) = \tilde{Q} \cdot (f'_{2x_2} \xi_1 - f'_{2x_1} \xi_2)$$

(voir [16, lemme 2.20, p. 133–134]), où \tilde{Q} est un polynôme homogène en ξ , de degré $d - 1$. Alors

$$P = Q \cdot \left(f'_{2x_2} \frac{d}{dx_1} - f'_{2x_1} \frac{d}{dx_2} \right) + R, \quad \text{où } \deg Q = d - 1, \deg R < d,$$

et l'opérateur $P' = \lambda Q \Delta + R f_1$, de degré inférieur ou égal à $d - 1$, annule $f_1^{\lambda-1} f_2^{s_2}$, où $\lambda - 1 \notin \mathbb{N}$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc un opérateur S de \mathcal{D} tel que $P' = S R_1(\lambda - 1)$.

Ainsi, la quantité $\lambda \sigma(Q) \Delta + \sigma_{d-1}(R) f_1$ (qui est soit nulle, soit égale au symbole de P') est multiple de f_1 . Or, f_1 est premier avec Δ . Par suite,

$$\sigma(P) = \tilde{Q}' f_1 (f'_{2x_2} \xi_1 - f'_{2x_1} \xi_2)$$

et P est de la forme $P = Q' R_1(\lambda) + R'$, où R' , qui est de degré strictement inférieur à d , vérifie l'hypothèse de récurrence. \square

Bien sûr, on établit de même les analogues des résultats de ce paragraphe 3.2 en spécialisant s_2 au lieu de s_1 .

3.3. L'idéal de Bernstein-Sato d'une application (f_1, f_2) α -homogène.

Donnons-nous un système de poids $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux. Dorénavant, nous supposons de plus que f_1 et f_2 sont des polynômes α -homogènes, de degré respectifs ρ_1 et ρ_2 non nuls. La proposition 3.1.2 admet donc ici le corollaire suivant (où \mathcal{D} désigne à nouveau l'algèbre de Weyl) :

COROLLAIRE 3.3.1. — On a :

$$\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s = (R_1, \chi - \rho_1 s_1 - \rho_2 s_2) = (R_2, \chi - \rho_1 s_1 - \rho_2 s_2).$$

On sait que si $f = (f_1, f_2)$ est une submersion, son idéal de Bernstein-Sato est principal, engendré par $(s_1 + 1)(s_2 + 1)$. Nous nous intéressons donc maintenant au cas où Δ est dans l'idéal maximal $\mathfrak{M} = (x_1, x_2)$.

LEMME 3.3.2. — Soient $1 - \lambda \notin \mathbb{N}$ et $c(s) \in \mathbb{C}[s]$; si $(s_1 + \lambda)c(s)$ est dans \mathcal{B} , alors $c(s)$ appartient à \mathcal{B} .

Preuve. — Par hypothèse, il existe un opérateur P de $\mathcal{D}[s]$ tel que

$$(h) \quad (s_1 + \lambda)c(s)f^s = P f^{s+1}.$$

Quitte à diviser P à droite par l'opérateur $\chi - \rho_1(s_1 + 1) - \rho_2(s_2 + 1)$, nous pouvons supposer que P ne dépend pas de s_2 . La division de P par $s_1 + \lambda$ s'écrit alors $P = Q \cdot (s_1 + \lambda) + R$, $Q \in \mathcal{D}[s_1]$, $R \in \mathcal{D}$, et l'on déduit de (h) que R annule $f_1^{-\lambda+1} f_2^{s_2+1}$. Ainsi, d'après la proposition 3.2.2, il existe un opérateur S de \mathcal{D} tel que $R = S R_1(-\lambda + 1)$. Reportons cette expression dans (h) ; il vient

$$(s_1 + \lambda)c(s)f^s = (Q + S\Delta) \cdot (s_1 + \lambda)f^{s+1},$$

et il en découle que $c(s)f^s = (Q + S\Delta)f^{s+1}$. \square

LEMME 3.3.3. — Soit $c(s) \in \mathbb{C}[s]$; si $(s_1 + 1)^2 c(s)$ est dans \mathcal{B} , alors $(s_1 + 1)c(s)$ appartient à \mathcal{B} .

Preuve. — L'application f étant α -homogène, on peut supposer que

$$(s_1 + 1)^2 c(s)f^s = P f^{s+1}, \quad P \in \mathcal{D}[s_1],$$

soit encore, en divisant P par $s_1 + 1$:

$$(s_1 + 1)^2 c(s)f^s = (Q \cdot (s_1 + 1) + R)f^{s+1}, \quad Q \in \mathcal{D}[s_1], R \in \mathcal{D}.$$

Fixer $s_1 = -1$ permet d'en déduire que

$$R \in \text{Ann}_{\mathcal{D}} f_2^{s_2+1} = \left(f'_{2x_2} \frac{d}{dx_1} - f'_{2x_1} \frac{d}{dx_2} \right)$$

(voir [Mal, p. 117] ou [Y, th. 2.19, p. 133]). Il existe donc un opérateur S de \mathcal{D} tel que

$$(s_1 + 1)c(s)f^s = Q f^{s+1} + S\Delta f_1^{s_1} f_2^{s_2+1}.$$

Alors, d'après la proposition 3.2.2, l'opérateur $Q(-1)f_1 + S\Delta$ est un multiple de $R_1(-1) = \left(f'_{2x_2} \frac{d}{dx_1} - f'_{2x_1} \frac{d}{dx_2}\right)f_1$. D'où le résultat, après division de Q par $(s_1 + 1)$. \square

LEMME 3.3.4. — *Sous les hypothèses du théorème 1.4 (avec $\Delta \in \mathfrak{M}$), supposons que $\dim_{\mathbb{C}} H_{\rho(\Delta)} = 1$. Alors la forme affine $\ell_{\rho(\Delta)}(s)$ n'est pas un facteur de tous les polynômes de $\mathcal{B}(f)$.*

Preuve. — Nous utilisons la méthode propre au cas des applications α -homogènes : nous « faisons monter l'ordre » par le lemme 2.1.1, sauf pour les termes de la forme Puf^s ($P \in \mathcal{D}[s]$ et $u \in H_{\rho(\Delta)}$), pour lesquels nous procédons de la façon suivante : par hypothèse, u est nécessairement égal à Δ (à une constante multiplicative près). Or, nous disposons de l'égalité

$$(s_1 + 1)\Delta f^s = \left(\frac{d}{dx_1} f'_{2x_2} - \frac{d}{dx_2} f'_{2x_1}\right) f_1^{s_1+1} f_2^{s_2}$$

où $\rho(f'_{2x_2} f_1) = \rho_1 + \rho_2 - \alpha_2$ et $\rho(f'_{2x_1} f_1) = \rho_1 + \rho_2 - \alpha_1$ sont strictement supérieurs à $\rho(\Delta)$. Nous pouvons ainsi obtenir un polynôme $d(s)$ non divisible par $\ell_{\rho(\Delta)}(s)$ tel que $d(s)f^s$ appartienne à $\mathcal{D}[s](f_2, \Delta) f_1^{s_1+1} f_2^{s_2}$. Or

$$(s_2 + 1)(f_2, \Delta) f_1^{s_1+1} f_2^{s_2} \subset \mathcal{D}[s] f^{s+1}.$$

Finalement, nous avons construit un polynôme de Bernstein-Sato de (f_1, f_2) dont $\ell_{\rho(\Delta)}(s)$ n'est pas facteur. \square

REMARQUE. — Les couples (f_1, f_2) vérifiant les hypothèses du lemme précédent sont (quitte à échanger f_1 et f_2) de la forme

$$(I) \quad \begin{cases} f_1 = a_{1,1}x_1^{\alpha_2} + a_{1,2}x_2^{\alpha_1} \\ f_2 = a_{2,1}x_1^{\alpha_2} + a_{2,2}x_2^{\alpha_1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0, \\ \text{et, si } \alpha_1 \neq 1 \text{ et } \alpha_2 \neq 1, \\ a_{1,1}a_{1,2} \neq 0, a_{2,1}a_{2,2} \neq 0, \end{cases}$$

ou

$$(II) \quad \begin{cases} f_1 = x_1, \\ f_2 = cx_1^{\alpha_2} + dx_2^{\alpha_1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad cd \neq 0 \text{ si } \alpha_1 \neq 1 \text{ et } \alpha_2 \neq 1,$$

ou

$$(III) \quad \begin{cases} f_1 = x_2 \\ f_2 = cx_1^{\alpha_2} + dx_2^{\alpha_1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad cd \neq 0 \text{ si } \alpha_1 \neq 1 \text{ et } \alpha_2 \neq 1.$$

Preuve du théorème 1.4. — Soit $b(s)$ le pgcd des générateurs de \mathcal{B} ; alors \mathcal{B} se décompose en produit d'idéaux $\mathcal{B} = (b(s)) \cdot \mathcal{B}'$, où \mathcal{B}' définit un nombre fini de points de \mathbb{C}^2 : $V(\mathcal{B}') = \{(a_{k1}, a_{k2})\}_{k=1, \dots, N}$. D'après le théorème des zéros, il existe un entier m tel que

$$b(s) \prod_{k=1}^N (s_j - a_{kj})^m \in \mathcal{B}, \quad j = 1, 2.$$

Par suite, nous savons, grâce au lemme 3.3.2, que $V(\mathcal{B}')$ est contenu dans $(-1, -1) + \mathbb{N}^2$. D'autre part, le corollaire 2.2.1 assure que

$$V(\mathcal{B}') \subset \{s_1 = -1\} \cup \{s_2 = -1\} \cup \bigcup_{w \in \mathcal{W}(K)} \{\ell_w(s) = 0\}.$$

Les coefficients des formes affines $\ell_w(s)$ étant strictement positifs, aucun point de \mathbb{N}^2 ne peut appartenir à $V(\mathcal{B}')$. Finalement, $V(\mathcal{B}')$ est inclus dans $\{s_1 = -1\} \cup \{s_2 = -1\}$, et il existe un entier r tel que $b(s)(s_1 + 1)^r (s_2 + 1)^r$ soit dans \mathcal{B} . D'après les lemmes 3.3.3 et 1.2, $b(s)$ est donc lui-même élément de \mathcal{B} .

Nous cherchons maintenant à déterminer un générateur de \mathcal{B} , dans le cas où $\Delta \in \mathfrak{M}$. En fait, d'après le corollaire 2.2.1 et le lemme 1.2, l'idéal \mathcal{B} est engendré par :

$$b(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1)\tilde{b}(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2),$$

où \tilde{b} est un polynôme à une variable.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe u dans H_w ($w \neq \rho(\Delta)$ dans les cas (I), (II), (III)), et $u \notin K$, tel que $\tilde{b}(-\alpha_1 - \alpha_2 - w) \neq 0$. Il existe un opérateur P de $\mathcal{D}[s]$ tel que

$$(\ominus) \quad (s_1 + 1)(s_2 + 1)\tilde{b}(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2)f^s = Pf^{s+1}.$$

Nous pouvons supposer que $P \in \mathcal{D}[s_1]$, et après division,

$$P(s_1) = (s_1 + 1)A(s_1) + B, \quad A \in \mathcal{D}[s_1], B \in \mathcal{D}.$$

Si l'on pose $s_1 = -1$, (\ominus) donne $B = C \cdot \left(f'_{2x_2} \frac{d}{dx_1} - f'_{2x_1} \frac{d}{dx_2} \right)$, avec $C \in \mathcal{D}$ (d'après [11, p. 117] ou [16, th. 2.19, p. 133]). D'après (\ominus) , il vient alors

$$(s_2 + 1)\tilde{b}(\chi) - A(s_1)f_1f_2 - C\Delta f_2 \in \text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}f^s.$$

Si $A' \in \mathcal{D}[s_2]$ est le reste de la division de A par $\chi - \rho_1(s_1 + 1) - \rho_2(s_2 + 1)$, cela donne encore :

$$(s_2 + 1)\tilde{b}(\chi) - A'(s_2)f_1f_2 - C\Delta f_2 = D(s_2)R_2, \quad D \in \mathcal{D}[s_2]$$

d'après la proposition 3.1.2. Multiplions cette égalité à gauche par u . Or

$$\begin{aligned} u\chi &= u \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{d}{dx_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d}{dx_i} x_i u - \sum_{i=1}^n \alpha_i (u + x_i u'_{x_i}) \\ &= (\bar{\chi} - |\alpha| - w)u, \end{aligned}$$

où l'on note $\bar{\chi} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d}{dx_i} x_i$; il vient donc

$$\begin{aligned} (\boxtimes) \quad (s_2 + 1)\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)u &= \tilde{A}(s_2)f_1f_2 + \tilde{C}\Delta f_2 \\ &\quad + \tilde{D}(s_2) \left[\left(f'_{1x_1} \frac{d}{dx_2} - f'_{1x_2} \frac{d}{dx_1} \right) f_2 - (s_2 + 1)\Delta \right] \end{aligned}$$

où $\tilde{A} \in \mathcal{D}[s_2]$, de degré en s_2 , r , non nul, $\tilde{C} \in \mathcal{D}$, $\tilde{D} \in \mathcal{D}[s_2]$. Identifions alors, dans cette égalité entre éléments de $\mathcal{D}[s_2]$, les coefficients des puissances de $(s_2 + 1)$; sachant que f_1 est premier avec Δ , on montre que l'on a, pour le degré 1 :

$$\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)u = A_1 f_1 f_2 + D_1 S_1 f_1 f_2 + D_2 \Delta,$$

où $A_1, D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. En considérant le terme constant en les dérivations, nous arrivons à

$$\tilde{b}(-|\alpha| - w)u \in (f_1 f_2, \Delta),$$

soit une relation α -homogène

$$(\sphericalangle) \quad u = \lambda f_1 f_2 + \mu \Delta, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}[x],$$

puisque nous avons supposé que $-|\alpha| - w$ n'annule pas \tilde{b} . De plus, $u \notin K$ par hypothèse. Il s'ensuit que $u' = \mu \Delta \notin K$.

D'autre part, nous pouvons écrire, d'après (\boxtimes) ,

$$(s_2 + 1)\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)\mu \Delta f^s = \left[\tilde{A}(s_2)f_1f_2 + \tilde{C}\Delta f_2 \right] f^s,$$

où $\bar{A} \in \mathcal{D}[s_2]$. Après division de \bar{A} par $\chi - \rho_1(s_1 + 1) - \rho_2(s_2 + 1)$, nous avons encore, pour un $\check{A} \in \mathcal{D}[s_1]$,

$$\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)\mu S_1 f_2 f^s = [\check{A}(s_1) f_1 f_2 + \tilde{C} \Delta f_2] f^s.$$

Il en découle que

$$\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)(S_1 \mu - S_1(\mu)) - (\check{A}(s_1) f_1 + \tilde{C} \Delta) = E(s_1)(S_2 f_1 - (s_1 + 1)\Delta)$$

d'après le calcul d'annulateur de la proposition 3.1.2. Nous identifions ensuite les termes constants; en utilisant encore l'hypothèse faite sur $\tilde{b}(-|\alpha| - w)$, il vient $S_1(\mu) \in (f_1, \Delta)$, et l'on peut obtenir de même que $S_2(\mu) \in (f_2, \Delta)$. D'où l'égalité matricielle :

$$\Delta \begin{pmatrix} \mu'_{x_1} \\ \mu'_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{2x_1} & f'_{1x_1} \\ f'_{2x_2} & f'_{1x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a f_1 + b \Delta \\ c f_2 + d \Delta \end{pmatrix},$$

puis, en multipliant à gauche par la matrice ligne $(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)$:

$$\rho(\mu) \Delta \mu = (\rho_2 f_2, \rho_1 f_1) \begin{pmatrix} a f_1 + b \Delta \\ c f_2 + d \Delta \end{pmatrix} \in (f_1 f_2, f_1 \Delta, f_2 \Delta).$$

- Si μ n'est pas constant, ce résultat contredit ce qui a été déduit précédemment de l'hypothèse $u \notin K$.

- Si $\mu \in \mathbb{C}$, l'égalité α -homogène (\sim) impose, d'une part, qu'il ne soit pas nul, et d'autre part, que $u = \mu \Delta$, après considération des ordres. Nous sommes donc dans le cas où $w = \rho(\Delta)$. Hormis les cas (I), (II), (III), où $\ell_{\rho(\Delta)}(s)$ n'est pas facteur obligatoire de $\tilde{b}(s)$, d'après le lemme 3.3.4, nous savons grâce à la remarque 3.3.5 qu'il existe un monôme u de degré $\rho(\Delta)$ qui ne s'écrit pas $\mu \Delta$. Nous sommes donc ramenés au cas précédent ($\rho(\mu) \neq 0$), et nous concluons encore à une absurdité. \square

3.4. Un exemple.

Considérons l'application (5, 3)-homogène de degré (5, 15) :

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \\ x = (x_1, x_2) \longmapsto (f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_1^3 + x_2^5),$$

Le déterminant jacobien est de degré 12. L'idéal engendré par $f_1 f_2, f_1 \Delta$ et $f_2 \Delta$ coïncide avec l'idéal $(x_1^4, x_2^9, x_1 x_2^4)$, dont l'ensemble de monômes

$$\left\{ \{x_1^i x_2^j\}_{\substack{0 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 3}}, \{x_2^i\}_{4 \leq i \leq 8} \right\}$$

est une cobase (5, 3)-homogène. L'ensemble de ses degrés est

$$\{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 24\} = \mathcal{W}.$$

Soit $\mathcal{W}' = \mathcal{W} - \{12\}$. L'idéal de Bernstein-Sato de f est donc engendré par le polynôme

$$b(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \prod_{w \in \mathcal{W}'} (5s_1 + 15s_2 + 8 + w).$$

4. Équations fonctionnelles pour une α -intersection complète à singularité isolée

Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{C}\{x\}$ d'ordres $(\rho_1, \dots, \rho_p) = \rho \in (\mathbb{N}^*)^p$ pour α . Nous définissons les fonctions h_j d'ordre strictement supérieur à ρ_j :

$$h_j = \chi(f_j) - \rho_j f_j, \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, p.$$

Soient s_1, \dots, s_p des indéterminées; nous notons $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{-2, -1\}$, et pour $\kappa = (k_1, \dots, k_p) \in (\tilde{\mathbb{N}})^p$,

$$f^{s-K} = f_1^{s_1-k_1} \dots f_p^{s_p-k_p},$$

$$\tau_k(t) = \begin{cases} t(t-1)\dots(t-k+1) & \text{si } k \geq 1, \\ 1 & \text{si } k \in \{-2, -1, 0\}, \end{cases}$$

$$\theta_K = \left[\prod_{j=1}^p \tau_{k_j}(s_j) \right] f^{s-K}.$$

Nous considérons d'autre part les sous- $\mathcal{D}[s]$ -modules de $\mathbb{C}\{x\}[s, 1/f]f^s$:

$$\mathcal{M}_w(\theta_K) = \mathcal{D}[s]\mathcal{P}_{w+\rho.K}\theta_K$$

pour tous $w \in \mathbb{N}$ et $\kappa \in (\tilde{\mathbb{N}})^p$.

4.1. Montée de l'ordre.

LEMME 4.1.1. — *Pour tout multi-indice $\kappa \in (\tilde{\mathbb{N}})^p$, pour tout entier positif w ,*

$$\ell_w(s)\mathcal{M}_w(\theta_K) \subset \mathcal{M}_{w+1}(\theta_K) + \sum_{j=1}^p \mathcal{M}_{w+1}(\theta_{K+\varepsilon_j}).$$

(Pour $j = 1, \dots, p$, ε_j désigne le j -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{Z}^p avec, de plus, $\varepsilon_0 = (0, \dots, 0)$.)

Preuve. — Ce résultat découle directement de la formule suivante : pour toute fonction $u \in \mathbb{C}\{x\}$, pour tout multi-indice $\kappa \in (\tilde{\mathbb{N}})^p$ et tout entier positif $w \in \mathbb{N}$,

$$\ell_w(s)u\theta_K = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d}{dx_i} x_i u + [(w + \rho \cdot K)u - \chi(u)] \right] \theta_K - u \sum_{j=1}^p \varphi_K(s_j) h_j \theta_{K+\varepsilon_j}$$

où

$$\varphi_K(s_j) = \begin{cases} s_j + 2 & \text{si } k_j = -2, \\ s_j + 1 & \text{si } k_j = -1, \\ 1 & \text{sinon.} \quad \square \end{cases}$$

4.2. Un polynôme de l'idéal de Bernstein-Sato.

Nous nous intéressons maintenant à des fonctions f_1, \dots, f_p telles que pour tout $\ell, 1 \leq \ell \leq p$, pour tout ℓ -uplet $(j_1, \dots, j_\ell) \subset \{1, \dots, p\}$, le germe $V(f_{j_1}, \dots, f_{j_\ell})$ soit une α -SIIC.

NOTA BENE. — Nous renvoyons le lecteur à la première partie pour la signification des notations utilisées ici. Rappelons que l'idéal de $\mathbb{C}\{x\}$ engendré par les formes initiales des éléments d'un idéal I de $\mathbb{C}\{x\}$ est appelé son *idéal initial* et noté $\text{In}(I)$.

Si $D_{J,I}$ désigne le mineur formé sur les colonnes $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$ de la jacobienne de l'application α -homogène $(\text{In}(f_{j_1}), \dots, \text{In}(f_{j_\ell}))$, l'idéal

$$\left(\text{In}(f_{j_1}), \dots, \text{In}(f_{j_{\ell-1}}), \{D_{J,I}\}_{I=(i_1, \dots, i_\ell), 1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} \right)$$

est de colongueur finie. Cet idéal est en fait l'idéal initial de I_J . Cela se montre en utilisant le fait que le quotient de $\mathbb{C}\{x\}$ par l'idéal des mineurs maximaux de la jacobienne d'une intersection complète à singularité isolée est de Cohen-Macaulay (voir les résultats sur les idéaux déterminantiels de Eagon et Northcott dans [12, p. 103], par exemple), et la caractérisation par la colongueur de la platitude de la déformation de $\mathbb{C}\{x\}/I_J$ sur le gradué (cf [6, lemme I, 1,2, p. 9]).

De plus, si $D_{J,I}$ est non nul, ce mineur est la forme initiale de $d_{J,I}$. Soit donc l'ensemble de multi-indices

$$\mathcal{I}_J = \{I = (i_1, \dots, i_\ell); 1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n, D_{J,I} \neq 0\}$$

(c'est encore l'ensemble des multi-indices I pour lesquels $d_{J,I}$ a l'ordre attendu $\rho_{j_1} + \dots + \rho_{j_\ell} - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_\ell}$); il vient :

$$I_J = (f_{j_1}, \dots, f_{j_{\ell-1}}, \{d_{J,I}\}_{I \in \mathcal{I}_J}).$$

Pour tout $\omega \in \mathbb{N}$, soit $(E_J)_\omega$ un supplémentaire de $\text{In}(I_J) \cap H_\omega$ dans H_ω ; soit

$$E_J = \bigoplus_{\omega \in \mathbb{N}} (E_J)_\omega.$$

Alors E_J est, bien sûr, un supplémentaire de $\text{In}(I_J)$ dans $\mathbb{C}[x]$, mais aussi un supplémentaire de I_J dans $\mathbb{C}\{x\}$. Soit encore

$$\mathcal{W}_J = \{ \omega \in \mathbb{N} ; (E_J)_\omega \neq 0 \}.$$

Nous notons ω_J le plus grand élément de \mathcal{W}_J : $(E_J)_\omega = 0$ si $\omega > \omega_J$. D'autre part, appelons $\mathcal{E}_{J,\omega}$ le sous- $\mathbb{C}[s]$ -espace vectoriel de $\mathcal{D}[s]$ engendré par $\{(d/dx)^L e ; L \in \mathbb{N}^n, e \in (E_J)_\omega\}$, et posons

$$\mathcal{E}_{J,\omega}(\theta_K) = \left(\bigoplus_{q \geq \omega + \rho \cdot K} \mathcal{E}_{J,q} \right) \theta_K \subset \mathcal{M}_\omega(\theta_K).$$

4.2.1. *Divisions.* — Énonçons une forme élémentaire du théorème de division, avec contrôle de l'ordre sans unicité des quotients (cf. [2]), pour un idéal de colongueur finie. On peut en trouver une preuve dans [M2].

THÉORÈME 4.2.1.1. — Soient $I \subset \mathbb{C}\{x\}$ un idéal de colongueur finie et $g_1 = \text{In}(f_1), \dots, g_r = \text{In}(f_r)$ un système de générateurs de $\text{In}(I)$, où f_1, \dots, f_r sont dans I . Soit (e_1, \dots, e_μ) une famille de polynômes α -homogènes dont les classes forment une base de $\mathbb{C}[x]/\text{In}(I)$ sur \mathbb{C} . Alors pour tout h dans $\mathbb{C}\{x\}$, il existe $(u_j)_{j=1, \dots, r}$ dans $(\mathbb{C}\{x\})^r$, et un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_\mu)$ dans \mathbb{C}^μ , tels que

$$h = \sum_{j=1}^r u_j f_j + \sum_{k=1}^\mu \lambda_k e_k$$

avec

- $\rho(u_j) + \rho(f_j) \geq \rho(h)$ pour tout $j = 1, \dots, r$,
- $\lambda_k = 0$ ou $\rho(e_k) \geq \rho(h)$ pour tout $k = 1, \dots, \mu$.

Nous pouvons alors récrire les éléments de $\mathcal{M}_\omega(\theta_K)$ grâce à la division par l'idéal I_J : classons tout d'abord les fonctions f_j selon κ :

$$\{1, \dots, p\} = J_{\max}(\kappa) \sqcup J_{-2}(\kappa) \sqcup J(\kappa),$$

avec

$$J_{\max}(\kappa) = \{1 \leq j \leq p ; k_j = m(\kappa)\} \quad \text{où} \quad m(\kappa) = \max_{1 \leq \ell \leq p} \{k_\ell\},$$

$$J_{-2}(\kappa) = \{1 \leq j \leq p ; k_j = -2\}.$$

Posons alors $J = (j_1, \dots, j_\ell)$, où

- $\{j_1, \dots, j_\ell\} = J_{\max}(K) \sqcup J(K)$;
- $j_1 < \dots < j_{\ell-1}$;
- $\{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \cap J_{\max}(K) \neq \emptyset$.

LEMME 4.2.1.2 (réécriture des éléments de $\mathcal{M}_\omega(\theta_K)$ par division par I_J).

Soit $\bar{j} \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \cap J_{\max}(K)$.

(a) Si $m(K) = 0$,

$$(s_{\bar{j}} + 1)\mathcal{M}_\omega(\theta_K) \subset (s_{\bar{j}} + 1) \sum_{\substack{j \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \\ j \neq \bar{j}}} \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_j}) + \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_{\bar{j}}}) \\ + \sum_{j \in J_{-2}(K)} \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_{\bar{j}}+\varepsilon_j}) + \mathcal{E}_{J,\omega}(\theta_K).$$

(b) Si $m(K) \geq 1$,

$$\mathcal{M}_\omega(\theta_K) \subset \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\}} \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_j}) + \sum_{j \in J_{-2}(K)} \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_{\bar{j}}+\varepsilon_j}) + \mathcal{E}_{J,\omega}(\theta_K).$$

Preuve. — Soit $u\theta_K$ un élément de $\mathcal{M}_\omega(\theta_K)$ (avec u dans $\mathbb{C}\{x\}$), que l'on réécrit en divisant u par l'idéal I_J . L'étude des ordres des coefficients des opérateurs différentiels qui agissent sur les différents θ_L apparaissant dans l'écriture de $u\theta_K$ (ou de $(s_{\bar{j}} + 1)u\theta_K$) est évidente, sauf pour les termes en $d_{J,I}\theta_K$. On considère pour cela le développement du mineur $d_{J,I}$ par rapport à la t -ième ligne, où $\bar{j} = j_t$:

$$d_{J,I} = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_\ell\}} \delta_{\bar{j},i} \frac{\partial f_{\bar{j}}}{\partial x_i},$$

où $\delta_{\bar{j},i}$ désigne le cofacteur relatif à $\frac{\partial f_{\bar{j}}}{\partial x_i}$ dans $d_{J,I}$. On calcule alors les quantités suivantes :

$$\left(\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_\ell\}} \delta_{\bar{j},i} \frac{d}{dx_i} \right) \theta_{K-\varepsilon_{\bar{j}}} \\ - \sum_{j \in J_{-2}(K)} \left(\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_\ell\}} \delta_{\bar{j},i} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) (s_j + 2) \theta_{K-\varepsilon_{\bar{j}}+\varepsilon_j} \\ = \begin{cases} (s_{\bar{j}} + 1)d_{J,I}\theta_K & \text{si } m(K) = 0, \\ d_{J,I}\theta_K & \text{si } m(K) \geq 1, \end{cases}$$

ce qui permet de conclure. \square

4.2.2. *Preuve de la proposition 1.6.* — Il s'agit de récrire $f^s = \theta_0$ en fonction de $f^{s+1} = \theta_{(-1, \dots, -1)}$ grâce aux divisions par des idéaux I_J . Toutefois, il faut éviter d'obtenir des « restes », éléments des $\mathcal{E}_{J, \omega}(\theta_K)$, pour lesquels aucun exposant des f_j ne change. Pour cela, nous commençons en fait par augmenter suffisamment l'ordre des coefficients des opérateurs qui apparaissent devant les θ_K .

LEMME 4.2.2.1. — *Pour tout entier positif ν ,*

$$\left[\prod_{\omega \leq w \leq \omega + \nu} \ell_w(s) \right] \mathcal{M}_\omega(\theta_K) \subset \mathcal{M}_{\omega + \nu + 1}(\theta_K) + \sum_{j=1}^p \mathcal{M}_{\omega + \nu + 1}(\theta_{K + \varepsilon_j}) + \dots + \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{\nu+1} \leq p} \mathcal{M}_{\omega + \nu + 1}(\theta_{K + \varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{\nu+1}}})$$

Preuve. — Ce résultat s'obtient de manière évidente à partir du lemme 4.1.1. \square

LEMME 4.2.2.2. — *Dès que ω est strictement supérieur à N_0 , l'inclusion suivante a lieu :*

$$\left[\prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ k_j \geq 0}} (s_j + 1) \right] \mathcal{M}_\omega(\theta_K) \subset \mathcal{D}[s]f^{s+1},$$

quel que soit $\kappa = (k_1, \dots, k_p)$ multi-indice dans $(\tilde{\mathbb{N}})^p$.

Preuve. — Procédons par récurrence sur les quantités

$$|\kappa| = \sum_{j=1}^p k_j, \quad |\kappa|_{>-2} = \sum_{j \notin J_{-2}(\kappa)} k_j,$$

qui sont respectivement minorées par $-2p$ et $-p$. Soit $U \in \mathcal{M}_\omega(\theta_K)$, et plaçons-nous dans le cas où $|\kappa| > -2p$ et $|\kappa|_{>-2} > -p$, en supposant que le résultat soit établi pour les multi-indices κ' tels que $|\kappa'| < |\kappa|$ ou ($|\kappa'| = |\kappa|$ et $|\kappa'|_{>-2} < |\kappa|_{>-2}$). Il suffit de traiter le cas où $m(\kappa) \geq 0$.

Soit $\tilde{j} \in J_{\max}(\kappa)$. Nous notons $\{j_1, \dots, j_\ell\} = J_{\max}(\kappa) \sqcup J(\kappa)$ avec $j_1 < \dots < j_{\ell-1}$ et $\tilde{j} \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\}$, et $J = (j_1, \dots, j_\ell)$. Effectuons la division par I_J (selon le lemme 4.2.1.2); le déroulement de cette démonstration étant commun aux deux cas $m(\kappa) = 0$ et $m(\kappa) \geq 1$, nous le décrivons seulement pour $m(\kappa) = 0$, par exemple. Par hypothèse sur ω , il vient :

$$(s_{\tilde{j}} + 1)U = (s_{\tilde{j}} + 1) \sum_{\substack{j \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \\ j \neq \tilde{j}}} U_j + U_{\tilde{j}} + \sum_{j \in J_{-2}(\kappa)} V_j,$$

où

- pour $j \in \{j_1, \dots, j_{l-1}\}$, on a $U_j \in \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_j})$;
- pour $j \in J_{-2}(K)$, on a $V_j \in \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_j+\varepsilon_j})$.

— Les U_j : puisque $|K-\varepsilon_j| < |K|$, on sait, par hypothèse de récurrence, que

$$\left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ k_i \geq 0, i \neq j}} (s_i + 1) \right] U_j \in \mathcal{D}[s]f^{s+1} \quad \text{si } k_j = 0,$$

$$\left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ k_i \geq 0}} (s_i + 1) \right] U_j \in \mathcal{D}[s]f^{s+1} \quad \text{si } k_j = -1.$$

— Les V_j : ici, $|K-\varepsilon_j+\varepsilon_j| = |K|$, mais $|K-\varepsilon_j+\varepsilon_j|_{>-2} < |K|_{>-2}$; nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ k_i \geq 0, i \neq j}} (s_i + 1) \right] V_j \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

Finalement,

$$\left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ k_i \geq 0}} (s_i + 1) \right] U = \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ k_i \geq 0, i \neq j}} (s_i + 1) \right] \left[(s_j + 1) \sum_{\substack{j \in \{j_1, \dots, j_{l-1}\} \\ j \neq j}} U_j + U_j + \sum_{j \in J_{-2}(K)} V_j \right]$$

appartient à $\mathcal{D}[s]f^{s+1}$. \square

D'après les lemmes 4.2.2.1 et 4.2.2.2, nous avons :

PROPOSITION 4.2.2.3. — Soient $\omega \in \mathbb{N}$, $K \in (\tilde{\mathbb{N}})^p$, alors

$$\left[\prod_{j=1}^p (s_j + 1) \prod_{\omega \leq w \leq N_0} \ell_w(s) \right] \mathcal{M}_\omega(\theta_K) \subset \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

Ce résultat fournit le polynôme de Bernstein-Sato de la proposition 1.5.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIOSCA (H.), BRIANÇON (J.), MAISONOBE (Ph.), MAYNADIER (H.).
— *Espaces conormaux relatifs II – Modules différentiels*, à paraître aux Publ. RIMS.

- [2] BRIANÇON (J.). — *Weierstrass préparé à la Hironaka*, Astérisque 7–8, 1973, p. 67–73.
- [3] BRIANÇON (J.). — *Sur le degré des relations entre polynômes*, Note aux CRAS, t. **297**, 1983, p. 553–556.
- [4] BRIANÇON (J.), GRANGER (M.), MAISONOBE (Ph.), MINICONI (M.). — *Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré*, Ann. Institut Fourier, Grenoble 39–3, 1989, p. 553–610.
- [5] BRIANÇON (J.), MAYNADIER (H.). — *Équations fonctionnelles généralisées : transversalité et principalité de l'idéal de Bernstein-Sato*, Prépublication de l'UNSA n° 483, 1997.
- [6] BRIANÇON (J.), SPEDER (J.-P.). — *Familles équisingulières d'hyper-surfaces à singularité isolée*, Thèse de doctorat d'État de J. Briançon, 2^e partie, Université de Nice, 1976.
- [7] GREUEL (G.M.). — *Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten*, Math. Ann., t. **214**, 1975, p. 235–266.
- [8] GREUEL (G.M.), HAMM (H.). — *Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte*, Invent. Math., t. **49**, 1978, p. 67–86.
- [9] GYOJA (A.). — *A remark on principality of Bernstein-Sato ideals*, Prépublication, 1997.
- [10] LÊ (D.T.). — *Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection*, Functional Analysis and its Applications, 1974, p. 127–131.
- [11] MALGRANGE (B.). — *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, Lecture Note in Math., Springer Verlag, t. **459**, 1975, p. 98–119.
- [12] MATSUMURA (H.). — *Commutative ring theory*. — Cambridge Studies in Advanced Math., Cambridge University Press, 1986.
- [13] MAYNADIER (H.). — *Équations fonctionnelles pour une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée et un germe semi-quasi-homogène*, Thèse UNSA, 1996.
- [14] SABBAAH (C.). — *Proximité évanescence I. La structure polaire d'un D -module*, Compositio Math., t. **62**, 1987, p. 283–328.
- [15] SABBAAH (C.). — *Proximité évanescence II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques*, Compositio Math., t. **64**, 1987, p. 213–241.
- [16] YANO (T.). — *On the theory of b -functions*, Publ. RIMS, t. **14**, 1978, p. 111–202.