ANTOINE CHAMBERT-LOIR

**Théorie de Dieudonné cristalline et périodes $p$-adiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 126, n<sup>o</sup> 4 (1998), p. 545-562

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_4_545_0>

*Bull. Soc. math. France,*
126, 1998, p. 545–562.

# THÉORIE DE DIEUDONNÉ CRISTALLINE ET PÉRIODES $p$-ADIQUES

PAR ANTOINE CHAMBERT-LOIR (*)

RÉSUMÉ. — Nous proposons dans ce texte une théorie des périodes $p$-adiques pour des schémas en groupes finis localement libres. Nous utilisons pour ce faire la théorie de Dieudonné cristalline de Berthelot, Breen et Messing, ainsi que l'interprétation cristalline des anneaux de Fontaine.

ABSTRACT. — CRYSTALLINE DIEUDONNÉ THEORY AND $p$-ADIC PERIODS. — We propose in this paper a theory of $p$-adic periods for finite flat group schemes. To this aim, we use the crystalline Dieudonné theory of Berthelot, Breen and Messing, together with the crystalline interpretation of Fontaine's rings.

## 1. Introduction

Le but de cet article est de montrer qu'il existe pour les schémas en groupes finis localement libres un théorème de comparaison $p$-adique «cristallin» analogue à celui que Fontaine a mis en évidence pour la décomposition de Hodge-Tate.

Pour fixer les notations, soient $p$ un nombre premier, $K$ un corps $p$-adique, $\mathfrak{O}_K$ son anneau d'entiers; on se donne une $\mathfrak{O}_K$-algèbre $R_0$ de caractéristique 0, intègre et $p$-adiquement complète et $R$ désigne le complété $p$-adique de la clôture intégrale de $R_0$ dans une clôture algébrique du corps des fractions de $R_0$. Alors, $\Omega^1_{R/R_0}$ désigne le module des différentielles de Kähler continues de $R$ sur $R_0$. Enfin, soit $A$ un schéma abélien sur $R_0$ ; on note $A'$ son schéma abélien dual, ainsi que $\omega_A$ le $R_0$-module des formes différentielles invariantes sur $A$.

(*) Texte reçu le 17 décembre 1997, corrigé le 22 juin 1998, accepté le 11 août 1998.
A. CHAMBERT-LOIR, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre-et-Marie Curie, 4 place Jussieu, F-75252 Paris CEDEX 05.
Email : chambert@math.jussieu.fr, http://www.math.jussieu.fr/~chambert.
Classification AMS : 14F30, 14L.
Mots clés : théorie de Dieudonné, périodes $p$-adiques, cohomologie cristalline.

On peut alors résumer ainsi une partie des accouplements de périodes pour les variétés abéliennes (ou les groupes de Barsotti-Tate, voire les groupes formels) :

a) *Formes différentielles de première espèce et différentielles de Kähler.* Il s'agit d'une application

$$\omega_A \times T_p\big(A(R)\big) \longrightarrow T_p(\Omega^1_{R/R_0})$$

mise en évidence par J.-M. Fontaine. Elle est explicitée dans [10] quand $R_0 = \mathfrak{O}_K$ ; dans ce cas, $T_p(\Omega^1_{R/R_0})$ s'identifie à $\mathbf{C}_p(1)$ comme $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module.

b) *Formes de seconde espèce modulo les formes de première espèce.* Introduite par R. Coleman [4], c'est une application

$$T_p\big(A(R)\big) \longrightarrow \omega_{A'} \otimes_{R_0} R$$

construite à l'aide de l'extension universelle de $A$ par un groupe vectoriel (*cf.* [14]).

c) *Cohomologie cristalline ou de de Rham.* — Plusieurs auteurs (citons notamment Fontaine-Messing, Colmez [5], Candilera-Cristante [3], Wintenberger [17]) construisent diverses applications bilinéaires de la forme

$$D(A) \times T_p\big(A(R)\big) \longrightarrow B,$$

où $D(A)$ est un $R_0$-module canoniquement attaché à $A$ (typiquement, cohomologie cristalline ou de de Rham), et $B$ une $R_0$-algèbre du type de celles introduites par Fontaine [10], [11].

De plus, les deux premiers accouplements exposés proviennent d'une théorie analogue pour les *schémas en groupes finis localement libres.* Si $G$ est un $R_0$-schéma en groupes fini localement libre, on a alors des accouplements :

a′) *Différentielles de Kähler et formes différentielles invariantes.* — Un $R$-point $x : \operatorname{Spec} R \to G$ fournit par évaluation une application

$$x^* : \omega_G \longrightarrow \Omega^1_{R/R_0},$$

d'où une application bilinéaire (*cf.* Fontaine [10])

$$G(R) \times \omega_G \longrightarrow \Omega^1_{R/R_0}.$$

b′) *Application universelle d'un schéma en groupes fini localement libre dans un faisceau quasi-cohérent.* — Mazur-Messing [14] ont prouvé qu'il existe une application universelle de $G$ dans un faisceau quasi-cohérent, de la forme

$$\alpha_G : G \longrightarrow \omega_{G'}$$

où $G'$ est le dual de Cartier de $G$; le lien avec l'accouplement b) a été remarqué pour la première fois par Crew [7].

Le but de ce texte est de montrer qu'au moins dans certains cas, la théorie c) correspond à un accouplement analogue c′) pour les schémas en groupes finis. L'anneau de périodes sera, si le groupe est tué par $p^n$, une variante de l'anneau $A_{\mathrm{cris}}/p^n$.

Quant au module de Dieudonné, comme l'indique le titre de l'exposé, il est fourni par la théorie de Dieudonné cristalline de Berthelot, Breen et Messing. En fait, la construction de l'accouplement provient de constructions internes à la théorie de Dieudonné cristalline ; calculées sur l'épaississement universel à puissances divisées, on obtient l'accouplement de périodes.

Faltings démontre dans [9] un théorème de comparaison entre schémas en groupes finis localement libres et certains modules filtrés munis de connexions convenables. S'il est très vraisemblablement plus général, le lien précis entre ce résultat et ceux de cet article ne m'apparaît pas clairement.

Ces résultats ont été exposés au Colloque *Problèmes de coefficients en cohomologie cristalline et en cohomologie rigide* qui s'est tenu les 28–30 avril 1997 à l'Institut Henri Poincaré, Paris. Je tiens à remercier Pierre Berthelot pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en m'y invitant.

## 2. Théorie de Dieudonné cristalline

**2.1.** — Concernant la théorie de Dieudonné cristalline, nous utiliserons les notations, méthodes et résultats élaborés dans [2]. Soit $S$ un schéma plat sur $\Sigma = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}_p$ (éventuellement un schéma formel $p$-adique sans $p$-torsion) et notons pour $n \geq 0$,

$$S_n = V(p^n) \subset S \quad \text{et} \quad \Sigma_n = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.$$

On travaille avec le (gros) site cristallin $\operatorname{Cris}(S_n, \Sigma)$ dont les objets sont les pd-épaississements $(U, T, \gamma)$ ($p$ étant localement nilpotent sur $T$, voire seulement topologiquement nilpotent) munis de morphismes $U \to S_n$, $T \to \Sigma$ compatibles aux puissances divisées sur les idéaux

$$\mathcal{J}_T = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_U) \quad \text{et} \quad p\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Z}_p.$$

On remarque que $(S_n, S)$ muni de ses puissances divisées canoniques sur $p\mathcal{O}_S \subset \mathcal{O}_S$ définit un objet de $\operatorname{Cris}(S_n, \Sigma)$. Soit $G$ un schéma en groupes fini localement libre sur $S$, tué par une puissance de $p$. Son image $\underline{G}$ par l'immersion $i_{S_n/\Sigma}$ est le faisceau abélien sur $\operatorname{Cris}(S_n, \Sigma)$ dont les sections sur $(U, T, \gamma)$ sont données par $G(U)$. Berthelot, Breen et Messing définissent alors dans [2] un cristal de Dieudonné $\mathbf{D}(G)$ pour $G$ ; c'est le faisceau sur le site cristallin des extensions locales de $\underline{G}$ par le faisceau structural. Le module de Dieudonné que nous utiliserons est alors défini par :

**2.2.** DÉFINITION. — *On pose*

$$D(G) = \mathbf{D}(G)_{(S_n,S)} = \mathcal{E}xt^1_{S_n/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S_n/\Sigma})_{(S_n,S)}.$$

C'est un $\mathcal{O}_S$-module de présentation finie, tué par une puissance de $p$ (*cf.* [2, 3.1.3]). Si $S$ est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps local dont l'indice de ramification est inférieur à $p-1$, il s'identifie au module de Dieudonné de la fibre spéciale de $G$ tensorisé par $\mathcal{O}_S$. Sauf si l'endomorphisme de Frobenius de $S_n$ se relève à $S$, il n'y a *pas* de Frobenius.

**2.3.** REMARQUE. — De Jong utilise dans [13] le faisceau des extensions locales de $\underline{G}$ par l'idéal à puissances divisées canonique. Le module de Dieudonné calculé ainsi se compare alors au module de Dieudonné classique dans le cas où $S_n$ est le spectre d'un corps parfait. D'après la proposition 7.1 de [13], notre module de Dieudonné s'identifie à celui étudié dans *loc. cit.* pour le tordu par Frobenius de $G \times_S S_n$. Si $G$ est le noyau de la multiplication par $p^n$ d'un schéma abélien $A$, c'est cependant notre normalisation qui correspond à la réduction modulo $p^n$ du premier groupe de cohomologie de de Rham de $A$, ce qui explique son choix (*cf.* aussi [6], haut de la page 640).

Supposons que $G$ soit annulé par $p^n$. La construction à la base de notre théorie est l'application notée «$p^n$» dans [2], p. 173–174 :

**2.4.** DÉFINITION. — *L'application «$p^n$» associe à une extension locale de $\underline{G}$ par $\mathcal{O}_{S_n/\Sigma}$ l'homomorphisme local $\underline{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{S_n/\Sigma}/p^n$ défini par le diagramme du serpent de la multiplication par $p^n$ dans l'extension.*

Autrement dit, on relève un point de $\underline{G}$ en un point de l'extension puis on le multiplie par $p^n$, pour obtenir un élément de $\mathcal{O}_{S_n/\Sigma}$ bien défini modulo $p^n$. La similitude avec la construction de Coleman rappelée au a) de l'introduction est alors claire. D'après le corollaire 4.2.9 de [2], cette application, évaluée sur tout épaississement $(U,T)$ tel que $T$ est la réduction modulo $p^n$ d'un schéma formel plat sur $\mathbf{Z}_p$, est un isomorphisme. (*Cf.* aussi la proposition 3.10 de [13], où il suffit que $T$ soit la réduction modulo $p^n$ d'un schéma plat sur $\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z}$.)

**2.5. Dualité.** — La dualité de Cartier des schémas en groupes finis (ou celle des schémas abéliens) s'incarne dans la théorie de Dieudonné cristalline au moyen d'un morphisme

$$\underline{\mathbf{G}_{\mathrm{m}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{S_n/\Sigma}[1] \tag{2.5.1}$$

(dans la catégorie dérivée) défini dans [2, 5.2.1, p. 213] et que nous rappelons ici. Partons de la suite exacte canonique de faisceaux sur $\mathrm{Cris}(S_n/\Sigma)$

$$0 \to 1 + \mathcal{J}_{S_n/\Sigma} \longrightarrow \mathcal{O}^*_{S_n/\Sigma} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}_{\mathrm{m}}} \to 0.$$

Comme l'idéal $\mathcal{J}_{S_n/\Sigma}$ est muni de puissances divisées, il existe une application logarithme

$$\log : 1 + \mathcal{J}_{S_n/\Sigma} \longrightarrow \mathcal{J}_{S_n/\Sigma}$$

définie (voir [2, 3.2.7.3, p. 129] par la formule

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{[n]}$$

(qui est une somme localement finie dans le cas localement nilpotent, et une série convergente dans le cas topologiquement nilpotent). Le *push-out* de la suite exacte précédente par le morphisme

$$1 + \mathcal{J}_{S_n/\Sigma} \xrightarrow{\log} \mathcal{J}_{S_n/\Sigma} \hookrightarrow \mathcal{O}_{S_n/\Sigma}$$

nous fournit une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{S_n/\Sigma} \longrightarrow \mathcal{U}_{S_n/\Sigma} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}_{\mathrm{m}}} \longrightarrow 0, \tag{2.5.2}$$

d'où le morphisme annoncé dans la catégorie dérivée.

La dualité de Cartier identifie $G'$ à $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$, et de même après application de $i_{S_n/\Sigma}$, $\underline{G'} = \mathrm{Hom}(\underline{G}, \underline{\mathbf{G}_{\mathrm{m}}})$ (les deux Hom étant considérés dans la catégorie des faisceaux abéliens sur les sites respectivement fppf et cristallin). Son image par le morphisme (2.5.1) nous fournit un homomorphisme de faisceaux abéliens sur le site cristallin

$$\underline{G'} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{S_n/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S_n/\Sigma}) = \mathbf{D}(G). \tag{2.5.3}$$

**2.6.** Lemme. — *Ce morphisme induit un isomorphisme*

$$\mathcal{H}om_{S_n/\Sigma}(\mathbf{D}(G), \mathcal{O}_{S_n/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{S_n/\Sigma}(\underline{G'}, \mathcal{O}_{S_n/\Sigma}). \tag{2.6.1}$$

*Démonstration.* — L'application (2.5.3) est obtenue en prenant le $H^0$ du morphisme en catégorie dérivée

$$\underline{G}' \longrightarrow \Delta(G)[1] \tag{2.6.2}$$

induit par (2.5.1) après application de $t_{0]}\,\mathbf{R}\mathcal{H}om(\underline{G},\cdot)$. (Rappelons que le complexe de Dieudonné $\Delta(G)$ est défini comme $t_{1]}\,\mathbf{R}\mathcal{H}om(\underline{G},\mathcal{O}_{S_n/\Sigma})$.) Ainsi, le morphisme (2.6.1) est obtenu en appliquant les foncteurs $H^0$ et $\mathcal{H}om(\cdot,\mathcal{O}_{S_n/\Sigma})$ au morphisme (2.6.2).

D'après le théorème 5.2.7 de [2], en appliquant $t_{1]}\,\mathbf{R}\mathcal{H}om(\cdot,\mathcal{O}_{S_n/\Sigma})$ à ce morphisme, on obtient un isomorphisme entre complexes de Dieudonné :

$$\Delta(G)^\vee[-1] \xrightarrow{\sim} \Delta(G'). \tag{2.6.3}$$

Après application de $H^0$, il en résulte donc un isomorphisme

$$\mathcal{H}om(\mathbf{D}(G),\mathcal{O}_{S_n/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(\underline{G}',\mathcal{O}_{S_n/\Sigma}) \tag{2.6.4}$$

dont nous allons prouver qu'il s'identifie au morphisme (2.6.1). Autrement dit, il faut démontrer que l'on peut sans dommage échanger l'ordre des deux opérations $(\mathbf{R})\,\mathcal{H}om(\cdot,\mathcal{O}_{\mathbf{S_n}/\boldsymbol{\Sigma}})$ et $H^0$ à effectuer.

Or, considérons la catégorie $\mathcal{C}_0$ des complexes

$$K^\bullet = [\cdots \to K_1 \to K_0 \to 0 \to \cdots]$$

dans $D(\mathcal{O}_{S_n/\Sigma})$ dont les composantes sont nulles en degrés $> 0$ et acycliques pour $\mathrm{Hom}(\cdot\,,\mathcal{O}_{S_n/\Sigma})$ ; on a dans ce cas un isomorphisme canonique

$$H^0\,\mathbf{R}\mathcal{H}om(K^\cdot,\mathcal{O}_{S_n/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(H^0(K^\cdot),\mathcal{O}_{S_n/\Sigma}).$$

Notant $^\vee$ pour $\mathcal{H}om(\cdot\,,\mathcal{O}_{S_n/\Sigma})$, les deux membres s'identifient en effet tous deux à $\mathrm{Ker}(K_0^\vee \to K_{-1}^\vee)$. Par suite, cet isomorphisme est fonctoriel pour les morphismes dans la catégorie dérivée qui se réalisent comme des morphismes de la catégorie $\mathcal{C}_0$.

Or, $\Delta(G)$ admet, au moins localement sur $S_n$, une résolution de longueur 2 par des $\mathcal{O}_{S_n/\Sigma}$-modules libres de rang fini, concentrée en rangs 0 et 1, si bien que $\Delta(G)[1]$ est bien un objet de $\mathcal{C}_0$. De même, $G'$ admet des résolutions par des (produits de) groupes abéliens libres du type $\mathbf{Z}[G'^i]$, ce qui entraîne de plus que le morphisme (2.6.2) se réalise comme un morphisme de $\mathcal{C}_0$. $\square$

**2.7.** Corollaire. — *Sur un objet $(U,T)$ du site cristallin où l'homomorphisme «$p^n$» est un isomorphisme, on dispose d'un isomorphisme de dualité*

$$\mathbf{D}(G)^{\vee}_{(U,T)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{S_n/\Sigma}(\underline{G}', \mathcal{O}_{S_n/\Sigma})_{(U,T)} \xleftarrow{\langle\langle p^n \rangle\rangle} \mathbf{D}(G')_{(U,T)}.$$

En particulier, on retrouve l'isomorphisme $D(G)^{\vee} \simeq D(G')$ de [13, prop. 6.3], dans lequel la dualité $^{\vee}$ est définie par

$$D(G)^{\vee} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}\big(D(G), \mathcal{O}_S/p^n\big).$$

Il est maintenant relativement aisé de relier l'homomorphisme «$p^n$» aux dualités sur les schémas en groupes et sur les modules de Dieudonné. On a en effet le théorème :

**2.8.** Théorème. — *Supposons que $G$ est annulé par $p^n$ et soit $(U,T)$ un objet du site cristallin tel que l'homomorphisme «$p^n$» soit un isomorphisme. Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccccc}
G_U \times G'_U & \xrightarrow{\langle\langle p^n\rangle\rangle_{(U,T)}} & (D(G)^{\vee} \times D(G')^{\vee}) \otimes \mathcal{O}_T & \xrightarrow{\text{dualité}} & \mathcal{O}_T/p^n \\
\Big\downarrow & & & & \Big\downarrow \\
\mu_{p^n\,(U,T)} & & \xrightarrow{\qquad\langle\langle p^n\rangle\rangle_{(U,T)}\qquad} & & \mathcal{O}_T/p^n
\end{array}$$

*dans lequel la flèche horizontale est fournie par le morphisme «$p^n$» dans l'extension $\mathcal{U}_{S_n/\Sigma}$ de* (2.5.2).

*Démonstration.* — Via la définition 2.7 de l'homomorphisme de dualité, la ligne du haut du diagramme associe à un couple $(x,y) \in G \times G'$ la multiplication par $p^n$ d'un relèvement de $x$ dans l'extension $y^*\mathcal{U}_{S_n/\Sigma}$ de $\underline{G}$ par $\mathcal{O}_{S_n/\Sigma}$. Par fonctorialité, $[x,y] \in \mu_{p^n}$ désignant l'image de $(x,y)$ par l'homomorphisme de dualité de Cartier, c'est aussi la multiplication par $p^n$ d'un relevé de $[x,y]$ dans l'extension $\mathcal{U}_{S_n/\Sigma}$, ce qui établit le théorème. $\square$

## 3. Construction d'un accouplement de périodes

**3.1.** — Soient $K$ un corps $p$-adique, $\mathfrak{O}_K$ son anneau des entiers, $R$ une $\mathfrak{O}_K$-algèbre intègre, sans $p$-torsion et complète pour la topologie $p$-adique ; notons $F$ son corps des fractions.

Soit $\widetilde{F}_p$ une extension maximale de $F$ telle que si $\widetilde{R}_p$ est la clôture intégrale de $R$ dans $\widetilde{F}_p$, alors $\widetilde{R}_p[1/p]$ est étale sur $R[1/p]$. Soit $\widetilde{F}$ une extension algébrique de $F$ contenant $\widetilde{F}_p$ ; on note alors $\widetilde{R}$ la clôture intégrale de $R$ dans $\widetilde{F}$, ainsi que $\widehat{\widetilde{F}}$ et $\widehat{\widetilde{R}}$ les complétés $p$-adique de $\widetilde{F}$ et $\widetilde{R}$ respectivement.

**3.2. Épaississement universel.** — On fait enfin l'hypothèse suivante :

(*) *l'homomorphisme de Frobenius de $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$ est surjectif.*

Si $R$ est petit au sens de Faltings (voir [9, § 2]), cette hypothèse est vérifiée pour $\widetilde{R} = \widetilde{R}_p$. Comme dans [11, 2.2.1], [17] et [16, A.1.5], cette hypothèse permet d'assurer l'existence d'un $R$-pd-épaississement universel $p$-adique de $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$ que nous noterons $A_{\text{cris}}(\widetilde{R}/R)$.

Cet épaississement universel admet la description explicite suivante : soit $\mathcal{R}$ la limite projective des algèbres $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$ relativement aux morphismes d'élévation à la puissance $p$-ième, qui est une algèbre parfaite de caractéristique $p$. L'anneau $W(\mathcal{R})$ est alors muni d'un homomorphisme canonique

$$W(\mathcal{R}) \longrightarrow \widehat{\widetilde{R}},$$

surjectif en vertu de (*), d'où un homomorphisme toujours surjectif

$$\theta : R \otimes_{\mathbf{Z}_p} W(\mathcal{R}) \longrightarrow \widehat{\widetilde{R}}.$$

L'anneau $A_{\text{cris}}(\widetilde{R}/R)$ est alors le complété $p$-adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal $J_{\text{cris}}(\widetilde{R}/R)$, noyau de $\theta$, compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal $(p)$.

Lorsque $R = \mathfrak{O}_K$ et $\widetilde{R} = \mathfrak{O}_{\bar{K}}$, nous noterons $A_{\text{cris},K}$ l'anneau obtenu. Cette construction est fonctorielle en le couple $(R, \widetilde{R})$, d'où une action de $\operatorname{Gal}(\widetilde{F}/F)$, ainsi qu'une structure de $A_{\text{cris},K}$-algèbre sur $A_{\text{cris}}(\widetilde{R}/R)$.

**3.3.** — Soit $S = \operatorname{Spec} R$ et $G$ un schéma en groupes fini localement libre sur $S$, annulé par une puissance $p^n$ de $p$. Remarquons que comme $G$ est fini et plat sur $R$ et $\widetilde{R}$ est intégralement close dans $\widetilde{F}$, il y a bijection entre les $\widetilde{F}$-points de $G_F$ et les sections $\operatorname{Spec} \widetilde{R} \to G$.

**3.4.** — On applique maintenant la théorie du § 2 ; l'épaississement à puissances divisées $A_{\text{cris}}(\widetilde{R}/R)$ définit notamment un objet du site $\operatorname{Cris}(S_n/\Sigma)$. Comme le cristal de Dieudonné $\mathbf{D}(G)$ est un cristal, on a un isomorphisme naturel

$$A_{\text{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes_R D(G) \simeq \mathbf{D}(G)_{A_{\text{cris}}(\widetilde{R}/R)}.$$

Jointe à l'homomorphisme naturel (réduction modulo $p^n$ des coordonnées) $G(\widetilde{R}) \longrightarrow G(\widetilde{R}/p^n\widetilde{R})$, la théorie du § 2 nous fournit alors un accouplement

$$\Phi_{G,n} : G(\widetilde{R}) \times D(G) \longrightarrow A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)/p^n A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R).$$

Il est fonctoriel à la fois en $G$ et en le couple $(R, \widetilde{R})$, et commute donc aux actions de $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F)$ sur $G(\widetilde{F})$ et $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)$. Pour ne pas fixer un entier $n$ tel que $p^n$ annule $G$, on peut diviser cet accouplement par $p^n$ et obtenir ainsi une application bilinéaire

$$\Phi_G : G(\widetilde{R}) \times D(G) \longrightarrow A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes_{\mathbf{Z}_p} (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p).$$

**3.5. Cas du groupe multiplicatif.** — Fixons une fois pour toutes un générateur $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ de $\mathbf{Z}_p(1)$. Supposons dans ce paragraphe que

$$G = \mu_{p^n} ;$$

son module de Dieudonné $D(G)$ s'identifie à $\mathfrak{O}_S/p^n$, avec une base naturelle $dt/t$ fournie par la restriction à $\underline{G}$ de l'extension $\mathcal{U}_{S_n/\Sigma}$ (*cf.* [13, p. 106]). Soit alors $x_n \in G(\widetilde{R}) \subset \mathfrak{O}_{\bar{K}} \subset \widetilde{R}$ tel que $[p^n]x_n = 0$ ; la période de $dt/t$ contre $x_n$ est obtenue ainsi : choisissons $\tilde{x}_n \in A_{\mathrm{cris},K} \subset A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)$ relevant $x_n$, alors,

$$\tilde{x}_n^{p^n} \in 1 + J_{\mathrm{cris},K} \subset 1 + J_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)$$

et la période vaut $\log(\tilde{x}_n^{p^n})$. Avec les notations de [11, 1.5.4], si $x_n = \varepsilon_n$, on a

$$\tilde{\varepsilon}_n^{p^n} = \nu(\varepsilon) \quad \bmod p^n A_{\mathrm{cris},K} \subset p^n A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R),$$

si bien que la période est

$$t_{p,K} = 2i\pi = \log \nu(\varepsilon)$$

(qui provient de $A_{\mathrm{cris},K}$ mais considérée dans $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)/p^n$).

Le théorème suivant est une conséquence facile de ce calcul et de la compatibilité 2.8 de l'accouplement de périodes aux diverses dualités.

**3.6.** THÉORÈME. — *L'application linéaire*

$$\Phi_G : A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes_{\mathbf{Z}} G(\widetilde{R}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(D(G), A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)\big)$$

*a un noyau et un conoyau tués par* $2i\pi = t_{p,K} \in A_{\mathrm{cris},K} \subset A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)$.

*Démonstration.* — Commençons par le noyau. Si

$$x \in A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes_{\mathbf{Z}} G(\widetilde{R})$$

s'envoie sur 0 par $\Phi_G$, le résultat de dualité 2.7 implique que pour tout $x' \in A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes G'(\widetilde{R})$,

$$[x, x'] \in A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes \mu_{p^\infty}$$

a pour image 0 par l'accouplement de périodes sur le groupe multiplicatif. Autrement dit,

$$t\Phi_{\mathbf{G}_{\mathrm{m}}}\big([x, x']\big) = 0 \in A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$$

pour tout $x'$, d'où $t_{p,K}x = 0$ dans $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes_{\mathbf{Z}} G(\widetilde{R})$.

Pour le conoyau, soit

$$\omega \in \operatorname{Hom}\big(D(G), A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)\big).$$

Alors, l'application

$$A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes G'(\widetilde{R}) \longrightarrow A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)/p^n$$

définie par $x' \mapsto t\langle \omega, \Phi_{G'}(x')\rangle$ provient par dualité d'un élément $x \in A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes G(\widetilde{R})$ qui vérifie

$$\Phi_G(x) = t_{p,K}\omega.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

**3.7. Remarques.** — Ce théorème et sa démonstration sont bien sûr inspirés du théorème dit de « presque décomposition de Hodge–Tate » pour les schémas en groupes finis et plats tués par une puissance de $p$ sur $\mathfrak{O}_K$, théorème dû à J.-M. Fontaine (corollaire du théorème 3 de [10]).

D'autre part, le rapporteur me signale un article de G. Faltings [8] où est construit un homomorphisme similaire pour les groupes de Barsotti-Tate sur $\mathfrak{O}_K$ : il est injectif et son conoyau est annulé par $t_{p,K}$ (théorème 7 de *loc. cit.*).

Lorsque $R = \mathfrak{O}_K$, étant donné que tout $R$-schéma en groupes fini et plat se plonge dans un groupe de Barsotti-Tate, on peut retrouver notre résultat à partir de celui de Faltings.

Réciproquement, appliqué aux noyaux des multiplications par $p^n$ dans un groupe de Barsotti-Tate, notre théorème permet de retrouver celui de Faltings et, en fait, de l'étendre à une base plus générale que $\operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K$.

**3.8. Que vaut $t_p$ ?** — Le théorème précédent ne serait d'aucun intérêt si $t_{p,K}$ était nul dans $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)$ et il importe en fait de connaître la valuation $p$-adique de son annulateur $\mathfrak{a}(\widetilde{R}/R)$ dans $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$.

Lorsque $R = \mathfrak{O}_K$, J.-M. Fontaine a calculé dans [10] l'annulateur de l'image de $t_{p,K}$ modulo $\mathrm{Fil}^2$. Il obtient un idéal de $\mathfrak{O}_{\bar{K}}$ dont tout générateur a une valuation $p$-adique égale à

$$\frac{1}{p-1} + v_p(\mathfrak{d}_{K/\mathbf{Q}_p})$$

où $\mathfrak{d}_{K/\mathbf{Q}_p}$ désigne la différente de $K/\mathbf{Q}_p$.

Si $\operatorname{Spec} R$ admet un point $\mathfrak{O}_K$-rationnel, il résulte de la fonctorialité des anneaux $A_{\mathrm{cris}}$ un morphisme d'évaluation $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \to A_{\mathrm{cris},K}$ qui est un inverse à gauche de l'inclusion $A_{\mathrm{cris},K} \subset A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)$. Ainsi, l'annulateur de $t_{p,K}$ dans $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ ne sera pas plus gros que dans $A_{\mathrm{cris},K} \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

Dans le cas où $\widetilde{R}[1/p]$ est étale sur $R[1/p]$, les différentielles de Kähler fournissent (*cf.* [11, 1.4.6], ainsi que la remarque 1.4.8, voir aussi le § 4.1 plus bas) un épaississement du premier ordre de $\widetilde{R}$, et donc un épaississement à puissances divisées (toujours du premier ordre). L'annulateur de $t_{p,K}$ dans $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R) \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ a ainsi une valuation au plus égale à $1/(p-1)$ plus la différente de la clôture algébrique de $K$ dans $F$.

## 4. Comparaisons

Dans cette section, nous voulons montrer les relations entre notre accouplement de périodes et les théories esquissées dans l'introduction. Nous conservons les notations des paragraphes précédents.

**4.1. Épaississements du premier ordre.** — On rappelle que

$$A_{\mathrm{inf}}(\widetilde{R}/R) = R \otimes W(\mathcal{R})$$

est le $R$-épaississement infinitésimal $p$-adique universel de $\widehat{\widetilde{R}}$, et que $A_{\mathrm{cris}}(\widetilde{R}/R)$ est le complété $p$-adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal noyau de $\theta$ compatibles aux puissances divisées canoniques sur l'idéal $(p)$. Si Fil est la filtration induite sur $A_{\mathrm{inf}}$ (resp. $A_{\mathrm{cris},K}$) par les puissances du noyau de $\theta$, la théorie des puissances divisées (voir [1, 3.3.4]) permet d'affirmer que l'application naturelle

$$A_{\mathrm{inf}}/\operatorname{Fil}^2 A_{\mathrm{inf}} \longrightarrow A_{\mathrm{cris}}/\operatorname{Fil}^2 A_{\mathrm{cris}}$$

est un isomorphisme si bien que modulo $\operatorname{Fil}^2$, $A_{\mathrm{cris}}$ s'identifie à l'épaississement infinitésimal universel du premier ordre.

Supposons que $\widetilde{R}[1/p]$ est étale sur $R[1/p]$. Les différentielles de Kähler fournissent alors un épaississement infinitésimal $p$-adique du premier ordre (voir [11, 1.4.8], et plus bas lorsque $R = \mathfrak{O}_K$) ; il est d'ailleurs universel, mais c'est l'existence de cet épaississement du premier ordre qui nous importe, plus que son universalité.

**4.2. Formes différentielles invariantes.** — Soit $H$ un $S$-schéma en groupes lisse. Il est construit dans [2, 3.2], un isomorphisme fonctoriel

$$\omega_{H/S_n} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1\big(i_{S_n/S_n *}(H), \mathcal{J}_{S_n/S_n}\big)_{(S_n,S_n)}.$$

Compte tenu des homomorphismes naturels

$$\begin{aligned}\mathcal{E}xt^1\big(i_{S_n/S_n *}(H), \mathcal{J}_{S_n/S_n}\big)_{S_n} &\longrightarrow \mathcal{E}xt^1\big(i_{S_n/S_n *}(H), \mathcal{J}_{S_n/S_n}\big)_{(S_n,S_n)} \\ &\longrightarrow \mathcal{E}xt^1\big(i_{S_n/S_n *}(H), \mathcal{O}_{S_n/S_n}\big)_{(S_n,S_n)}\end{aligned}$$

et $\omega_H \to \omega_{H/S_n}$, on en déduit un homomorphisme fonctoriel

$$\omega_H \longrightarrow \mathbf{D}(H)_{S_n}.$$

Ces homomorphismes fournissent un homomorphisme $\omega_G \to \mathbf{D}(G)_{S_n}$ (en passant par la catégorie dérivée) si l'on dispose d'une résolution de $G$ par des schémas en groupes lisses.

A.J. De Jong [13] donne une description assez explicite de cet homomorphisme qui va nous être utile. Sur le site $\operatorname{Cris}(S_n/S_n)$, on dispose d'un faisceau $\pi^*_{S_n/S_n} H$ dont les sections sur un épaississement $(U,T)$ sont simplement $H(T)$, ce qui a un sens puisque $T$ est un $S_n$-schéma. Les homomorphismes $H(T) \to H(U)$ induisent une suite exacte

$$0 \to H(\mathcal{J}_{S_n/S_n}) \longrightarrow \pi^*_{S_n/S_n} H \longrightarrow \underline{H} \to 0. \tag{4.2.1}$$

(On a noté $H(\mathcal{J}_{S_n/S_n})$ le faisceau sur $\operatorname{Cris}(S_n/S_n)$ dont les sections sur $(U,T)$ sont données par $\operatorname{Ker}(H(T) \to H(U))$ ; la surjectivité vient de ce que $H$ est lisse.) Le lemme de Poincaré cristallin permet de définir un homomorphisme d'intégration des formes différentielles

$$\omega_{H/S_n} \longrightarrow \operatorname{Hom}\big(H(\mathcal{J}_{S_n/S_n}), \mathcal{J}_{S_n/S_n}\big)_{S_n}, \tag{4.2.2}$$

d'où en combinant les deux équations précédentes, un homomorphisme

$$\omega_{H/S_n} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\underline{H}, \mathcal{J}_{S_n/S_n})_{S_n}$$

et en particulier un homomorphisme

$$\omega_{H/S_n} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\underline{H}, \mathcal{J}_{S_n/S_n})_{S_n}. \tag{4.2.3}$$

On peut choisir $H$ de sorte à disposer d'une immersion fermée $G \hookrightarrow H$, par exemple $H = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}}(G^*, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ convient. On en déduit par fonctorialité un homomorphisme

$$\omega_{G/S_n} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\underline{G}, \mathcal{J}_{S_n/S_n})_{S_n} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\underline{G}, \mathcal{O}_{S_n/S_n})_{S_n}.$$

puis, si $G$ est annulé par $p^n$, un homomorphisme

$$\omega_G \longrightarrow D(G) \tag{4.2.4}$$

dont A.J. De Jong affirme (voir *loc. cit.*, remarque 4.4) qu'il est *l'opposé* de l'homomorphisme analogue construit par Berthelot, Breen et Messing (voir *loc. cit.*, 3.2.6).

Les deux paragraphes précédents et notre accouplement $\Phi_G$ nous fournissent ainsi une application bilinéaire

$$G(\widetilde{R}) \times \omega_G \longrightarrow A_{\mathrm{inf}}/(p^n A_{\mathrm{inf}} + \mathrm{Fil}^2 A_{\mathrm{inf}})$$

dont l'image est par construction contenue dans

$$\mathrm{Fil}^1(A_{\mathrm{inf}})/(p^n A_{\mathrm{inf}} + \mathrm{Fil}^2 A_{\mathrm{inf}}),$$

d'où une application bilinéaire

$$\Phi_G^1 : G(\widetilde{R}) \times \omega_G \longrightarrow \Omega^1_{\widetilde{R}/R}. \tag{4.2.5}$$

Or, il existe une telle application bilinéaire à la fois canonique et explicite, dont Fontaine [10, 4.7] a montré l'utilité dans le cas $R = \mathfrak{O}_K$. Elle est donnée par l'évaluation : si $\omega \in \omega_G$ et $x \in G(\widetilde{R})$, on peut voir $x$ comme une section $\operatorname{Spec} \widetilde{R} \to G$ au-dessus de $\operatorname{Spec} R$, d'où une forme différentielle $x^*\omega \in \omega_{\widetilde{R}/R}$.

**4.3.** PROPOSITION. — *L'accouplement* (4.2.5) *est égal à celui construit par Fontaine dans loc. cit.*

*Démonstration.* — Explicitons d'abord la suite exacte du milieu de la page 68 de [11] qui fournit une description de $A_{\mathrm{cris},K}/(p^n A_{\mathrm{cris},K} + \mathrm{Fil}^2)$ :

$$\begin{aligned} 0 \to \Omega^1_{\mathfrak{O}_{\bar K}/\mathfrak{O}_K}[p^n] & \\ \longrightarrow \mathfrak{O}'_{\bar K}/p^n = A_{\mathrm{cris},K}/(p^n A_{\mathrm{cris},K} &+ \mathrm{Fil}^2 A_{\mathrm{cris},K}) \\ &\longrightarrow \mathfrak{O}_{\bar K}/p^n \to 0. \end{aligned}$$

Dans cette formule, $\mathfrak{O}'_{\bar K}$ est l'ensemble des éléments $x \in \mathfrak{O}_{\bar K}$ tels que $dx = 0$ dans $\Omega^1_{\mathfrak{O}_{\bar K}/\mathfrak{O}_K}$. La dernière flèche est induite par l'inclusion naturelle, sa surjectivité résulte de ce que $\Omega^1_{\mathfrak{O}_{\bar K}/\mathfrak{O}_K}$ est $p$-divisible. Le noyau de cette flèche est formé des $x \in \mathfrak{O}'_{\bar K}/p^n$ tels que $x \in p^n\mathfrak{O}_{\bar K}$ ; on écrit alors $x = p^n u$, $u$ étant déterminé modulo $\mathfrak{O}'_{\bar K}$ et on lui associe la différentielle de Kähler $du \in \Omega^1_{\mathfrak{O}_{\bar K}/\mathfrak{O}_K}$ (qui est tuée par multiplication par $p^n$).

On fixe un entier $n$ tel que $p^n$ annule $G$ et on se place sur $\mathrm{Cris}(S_n, S_n)$. D'après la description de l'homomorphisme $\omega_G \to D(G)$ rappelée ci-dessus, les périodes de $x \in G(\widetilde{R})$ sont calculées de la façon suivante. On plonge $G$ dans le schéma en groupes lisse des morphismes de schémas de $G^*$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Si $\mathcal{A}_G$ est l'algèbre affine de $G$, $x$ correspond à un élément inversible $a$ de l'algèbre $\mathcal{A}_G^\vee \otimes_{\mathfrak{O}_K} \mathfrak{O}_{\bar K}$. On le « relève » en un élément inversible $\tilde a \in \mathcal{A}_G^\vee \otimes_{\mathfrak{O}_K} \mathfrak{O}'_{\bar K}$ tel que

$$\tilde a = a(1 + p^n u)$$

pour $u \in \mathcal{A}_G^\vee \otimes \mathfrak{O}_{\bar K}$ tel que $d\tilde a = 0$, $d$ désignant la dérivation

$$\mathcal{A}_G^\vee \otimes \mathfrak{O}_{\bar K} \longrightarrow \mathcal{A}_G^\vee \otimes \Omega^1_{\mathfrak{O}_{\bar K}/\mathfrak{O}_K}.$$

On calcule alors $\tilde a^{p^n}$ :

$$\begin{aligned} \tilde a^{p^n} = a^{p^n}(1 + p^n u)^{p^n} &= 1 + \sum_{k=1}^{p^n} \binom{p^n}{k} p^{nk} u^k \\ &= 1 + p^n \sum_{k=0}^{p^n - 1} \frac{p^n}{k+1} \binom{p^n - 1}{k} p^{nk} u^{k+1}. \end{aligned}$$

Cet élément relève 1 et la différentielle de Kähler associée à $\tilde a^{p^n} - 1$ est ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p^n-1} p^n \binom{p^n - 1}{k} p^{nk} u^k \, du &= p^n (1 + p^n u)^{p^n - 1} du \\ &= (1 + p^n u)^{p^n} \frac{p^n \, du}{1 + p^n u} = -\frac{da}{a} \end{aligned}$$

puisque

$$0 = \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{da}{a} + \frac{p^n\, du}{1 + p^n u}$$

et que $da$ est annulé par $p^n$.

D'après [10, § 4.5], l'élément $da/a$ de $\mathcal{A}_G^\vee \otimes_{\mathfrak{O}_K} \Omega^1_{\mathfrak{O}_{\bar{K}}/\mathfrak{O}_K}$ appartient en fait à un sous-module canoniquement identifié à $\mathrm{Hom}(\omega_G, \Omega^1_{\mathfrak{O}_{\bar{K}}/\mathfrak{O}_K})$. Comme nous nous somme placés sur un épaississement du premier ordre, l'homomorphisme d'intégration des formes différentielles 4.2.2 fournie par le lemme de Poincaré cristallin s'incarne en la dualité entre formes différentielles et espace tangent, si bien que notre accouplement $\Phi_G^1$ associe à $x \in G(\mathfrak{O}_{\bar{K}})$ ce même homomorphisme.

Finalement, l'homomorphisme en question est lui-même identifié dans la proposition 6 de [10] à l'homomorphisme d'évaluation des formes différentielles, d'où la proposition. ▯

**4.4.** Remarque. — Nous n'avons donné la démonstration que dans le cas $R = \mathfrak{O}_K$, car c'est dans ce cas que se place Fontaine [10], et aussi dans ce cas que la littérature explicite l'épaississement du premier ordre à l'aide des différentielles de Kähler. Les résultats de [10] que nous avons utilisés nécessitent uniquement le fait que l'algèbre affine $\mathcal{A}_G$ soit libre, et s'étendent au cas où elle est localement libre. Quant à l'interprétation de l'épaississement du premier ordre à l'aide de différentielles de Kähler, la remarque 1.4.8 de [11] montre qu'elle est valable si $\widetilde{R}[1/p]$ est étale sur $R[1/p]$.

Suivant cette même remarque, il aurait été possible de faisceautiser tout l'article en introduisant le site syntomique de $\operatorname{Spec} R$. La construction du § 2 s'interprète alors comme un homomorphisme

$$G \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{SYN}}\big(D(G), \mathcal{O}_{n,\mathrm{cris}}\big),$$

dont noyau et conoyau sont comme auparavant tués par un élément canonique $t_p$, section globale du faisceau $\mathcal{O}_{n,\mathrm{cris}}$. La comparaison avec les différentielles de Kähler serait alors apparue comme restriction de cette application au site syntomique-étale de $\operatorname{Spec} R$ (*cf.* [11, rem. 1.4.8]).

**4.5. Formes de seconde espèce.** — La comparaison est ici plus formelle. En considérant le site $\mathrm{Cris}(S_n, \Sigma)$, on associe à tout élément de $\mathcal{E}xt(\underline{G}, \mathcal{O}_{S_n/\Sigma})$ une extension dans

$$\mathcal{E}xt(\underline{G}, \mathbf{G}_{\mathrm{a}}) = i_{S_n/\Sigma *}\, \mathrm{Ext}_{S_n}(G, \mathbf{G}_{\mathrm{a}}).$$

Du point de vue des périodes, cela consiste à appliquer le morphisme $\theta$. En plongeant $G$ dans un schéma abélien $A$, $\mathrm{Ext}(G, \mathbf{G}_{\mathrm{a}})$ est induit par l'extension universelle et l'identification avec la théorie de Coleman [4], *Note added in proof*, est apparente.

**4.6. Théorie de Wintenberger.** — J.-P. Wintenberger construit dans [17] un accouplement de périodes pour les schémas abéliens. Dans le cas considéré dans le présent article, la construction de Wintenberger est facile puisque nous nous sommes cantonnés au cas de bonne réduction. En effet, avec les notations de *loc. cit.,* le point important est de montrer l'existence d'un sous-groupe borné des $A_{\mathrm{inf}}[1/p]$-points de l'extension universelle, le reste de la construction procédant comme chez Coleman par relèvement et multiplication par des puissances de $p$. Or, dans le cas où $A/R$ est un schéma abélien, le sous-groupe des $A_{\mathrm{inf}}$-points de l'extension universelle convient visiblement, ce qui montre que notre accouplement redonne celui de Wintenberger par passage à la limite.

Au passage, cela prouve la non-dégénerescence de l'accouplement de Wintenberger, malheureusement non explicitée dans [17].

## 5. Remarques et perspectives ?

Tout d'abord, remarquons que les méthodes développées dans cet article se retrouvent en de nombreux endroits de la littérature sous une forme souvent très proche, notamment dans les articles traitant de la plein fidélité du foncteur de Dieudonné cristallin.

Compte tenu du travail [15] de F. Trihan concernant la théorie de Dieudonné cristalline de niveau variable, il me semble aussi que les méthodes et résultats exposés dans cet article s'étendent au cas des cristaux de Dieudonné de niveau fini. Toutefois, les pd-épaississements universels $p$-adiques de niveau quelconque n'ont à ma connaissance pas bénéficié d'une étude aussi approfondie que pour le niveau 0.

D'autre part, et plus sérieusement, nous ne prenons pas en compte la mauvaise réduction, ce qui est par exemple la principale source de difficultés du théorème de Wintenberger.

Pour traiter la mauvaise réduction justement, il me paraît raisonnable de postuler (à la suite de Kato) une théorie de Dieudonné log-cristalline pour les log-schémas en groupes finis localement libres. L'anneau $\widehat{\mathbf{B}_{\mathrm{st}}}$, variante de l'anneau correspondant de Fontaine, mais possédant une interprétation en cohomologie log-cristalline devrait naturellement intervenir. Une conséquence de ce travail en serait la semi-stabilité (déjà connue) des représentations galoisiennes associées aux variétés abéliennes (du moins pour celles qui se prolongent en des log-variétés abéliennes), avec le petit bonus que constitue la structure modulo $p^n$ ; en plongeant l'anneau $\widehat{\mathbf{B}_{\mathrm{st}}}$ dans un anneau du type $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, on devrait aussi retrouver le résultat de Wintenberger.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BERTHELOT (P.). — *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lect. Notes Math., t. **407**, Springer Verlag, 1974.

[2] BERTHELOT (P.), BREEN (L.), MESSING (W.). — *Théorie de Dieudonné cristalline*, II, Lect. Notes Math., Springer Verlag, t. **930**, 1982.

[3] CANDILERA (M.), CRISTANTE (V.). — *Periods and duality of $p$-adic Barsotti–Tate groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, t. **21**, 1995, p. 545–593.

[4] COLEMAN (R.F.). — *Hodge-Tate periods and $p$-adic abelian integrals*, Invent. Math., t. **78**, 1984, p. 351–379.

[5] COLMEZ (P.). — *Périodes $p$-adiques des variétés abéliennes*, Math. Ann., t. **292**, 1992, p. 629–644.

[6] COLMEZ (P.). — *Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe*, Ann. of Math., t. **138**, 1993, p. 625–683.

[7] CREW (R.). — *Universal extensions and $p$-adic periods of elliptic curves*, Compositio Math., t. **73**, 1990, p. 107–119.

[8] FALTINGS (G.). — *Integral crystalline cohomology over very ramified rings*, J. Amer. Math. Soc., à paraître.

[9] FALTINGS (G.). — Crystalline cohomology and $p$–adic Galois representations, in 'Algebraic analysis, Geometry and Number Theory', Proceedings of the JAMI Inaugural Conference (J.I. Igusa ed.), Johns Hopkins, 1990, p. 25–79.

[10] FONTAINE (J.-M.). — *Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux*, Invent. Math., t. **65**, 1982, p. 379–409.

[11] FONTAINE (J.-M.). — Le corps des périodes $p$–adiques, dans 'Périodes $p$–adiques' [12], p. 59–101.

[12] FONTAINE (J.-M.). — *Périodes $p$-adiques*, Astérisque, J.-M. Fontaine éd., t. **223**, Bures, 1988, 1994.

[13] DE JONG (A.J.). — *Finite locally free group schemes in characteristic $p$ and Dieudonné modules*, Invent. Math., t. **114**, 1993, p. 89–137.

[14] MAZUR (B.), Messing (W.). — *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lect. Notes Math., Springer Verlag, t. **370**, 1976.

[15] TRIHAN (F.). — *Théorie de Dieudonné cristalline de niveau variable.* — Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 1996.

[16] TSUJI (T.). — *$p$-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Tech. report, R.I.M.S., Kyoto Univ., 1996.

[17] Wintenberger (J.-P.). — Théorème de comparaison $p$–adique pour les schémas abéliens, I : Construction de l'accouplement de périodes, dans 'Périodes $p$–adiques' [12], p. 349–397.