BULLETIN DE LA S. M. F.

TIEN-CUONG DINH

Sur la caractérisation du bord d’une chaîne holomorphe dans l’espace projectif

Bulletin de la S. M. F., tome 127, n° 4 (1999), p. 519-539

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_4_519_0>

Bull. Soc. math. France,
127, 1999, p. 519–539.

SUR LA CARACTÉRISATION DU BORD D'UNE CHAÎNE HOLOMORPHE DANS L'ESPACE PROJECTIF

PAR TIEN-CUONG DINH (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons qu'une sous-variété réelle, compacte, orientée et lisse Γ de dimension $2p-1 \geq 3$ de $\mathbb{CP}^n$ est le bord d'un sous-ensemble analytique s'il existe une variété réelle $V \subset \mathrm{G}(n-p+2, n+1)$ de codimension 1 satisfaisant les conditions suivantes pour tout $\nu \in V$:

1) la réunion des $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ pour $\nu \in V$ recouvre un ouvert dense de Γ ;
2) le $(n-p+1)$-plan $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ intersecte Γ transversalement ;
3) $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ est le bord d'une surface de Riemann dans $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$;
4) aucun ouvert non vide de $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ n'est réel analytique.

Pour la preuve, nous utilisons et démontrons le résultat suivant : pour toute surface de Riemann à bord rectifiable (éventuellement réductible et singulière) S d'une variété complexe, $\bar{S}$ admet un système fondamental de voisinages de Stein. Il existe Γ réelle algébrique vérifiant 1), 2), 3), qui n'est pas bord d'un sous-ensemble analytique.

ABSTRACT. — ON THE CHARACTERIZATION OF THE BOUNDARY OF A HOLOMORPHIC CHAIN IN THE PROJECTIVE SPACE. — We will prove that a real compact oriented smooth submanifold Γ of dimension $2p-1 \geq 3$ in $\mathbb{CP}^n$ is the boundary of a complex variety if there exists a real manifold $V \subset \mathrm{G}(n-p+2, n+1)$ of codimension 1 satisfying the following conditions for every $\nu \in V$

1) The union of $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ for $\nu \in V$ does recover a dense open set in Γ.
2) The $(n-p+1)$-plane $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ does intersect Γ transversally.
3) $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ is the boundary of a Riemann surface in $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$.
4) No nonempty open set in $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ is real analytic.

For proving this, we use and we prove the following result : for every Riemann surface which has a rectifiable boundary (eventually reducible and singular) S in a complex manifold, $\bar{S}$ does admit a fundamental system of Stein neighborhoods. There exists a real algebraic Γ satisfying 1), 2), 3) but which is not the boundary of a complex variety.

(*) Texte reçu le 23 novembre 1998, accepté le 25 mai 1999.
T.-C. DINH, Mathématique, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay CEDEX (France).
Email : TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr.

Mots clés : problème du bord, conditions des moments, maximalement complexe.

Classification AMS : 32C25, 32C16.

1. Résultats

L'origine du problème de caractérisation du bord d'une variété complexe ou d'une chaîne holomorphe (problème du bord) est un théorème de Wermer qui affirme qu'une courbe réelle, analytique, fermée et orientée γ dans $\mathbb{C}^n$ est le bord d'une surface de Riemann S si et seulement si elle vérifie *la condition des moments*, c'est-à-dire $\int_\gamma \varphi = 0$ pour toute $(1,0)$-forme φ holomorphe dans $\mathbb{C}^n$. Cette condition est réduite de la formule de Stokes sur $\overline{S}$. Dans le cas où la condition des moments est valide, l'enveloppe polynomiale de γ est égale à la réunion $S \cup \gamma$. Dans le cas contraire, l'enveloppe polynomiale de γ est égale à elle-même.

L'enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie a été étudiée ensuite dans plusieurs travaux de Bishop [4], de Stolzenberg [20], d'Alexander [1], de Lawrence [16], [17] et également dans [5], [6]. Les résultats de ces travaux sont utilisables pour démontrer de nouveau le théorème de Harvey-Lawson, qui donne la solution du problème du bord en dimension supérieure [13]. Ce théorème de Harvey-Lawson dit qu'une sous-variété réelle, compacte, orientée Γ de dimension $2p-1 \geq 3$ de $\mathbb{C}^n$ est le bord d'une variété complexe si et seulement si elle est *maximalement complexe*, c'est-à-dire son plan tangent en chaque point contient un sous-espace complexe de dimension $p-1$ (la dimension maximale possible). La condition « Γ est maximalement complexe » implique que la courbe $\Gamma \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ vérifie la condition des moments pour toute $(n-p+1)$-plan $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ qui coupe Γ transversalement.

Dans $\mathbb{CP}^n$, le théorème de Harvey-Lawson n'est plus valable. D'après le théorème de Dolbeault-Henkin généralisé, si Γ est maximalement complexe et si l'intersection $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ borde une surface de Riemann pour une famille suffisamment grande V de $(n-p+1)$-plans projectifs, alors Γ borde une variété complexe [9], [7]. En particulier, ce théorème est valable pour une variété réelle V de codimension 1 de la grassmannienne $\mathrm{G}(n-p+2, n+1)$. Cette grassmannienne est l'espace de paramètre des $(n-p+1)$-plans projectifs dans $\mathbb{CP}^n$.

Nous allons démontrer que dans le cas précédent, sous une hypothèse sur Γ (qui est valable génériquement), si $\bigcup_{\nu \in V} \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ recouvre Γ, l'hypothèse « Γ est maximalement complexe » ne sera plus nécessaire. Le problème du bord sans l'hypothèse « Γ est maximalement complexe » a été posé dans $\mathbb{C}^n$ par Dolbeault-Henkin et également par Globevnik-Stout sous la forme d'un problème d'extension holomorphe [11], dont les solutions pour un cas générique se trouvent dans [8]. La preuve des résultats cités ci-dessus utilise essentiellement la condition des moments et elle est extensible au cas dans $\mathbb{CP}^n$ grâce au théorème de Mihalache généralisé (théorème 2).

On appelle *ouvert* $(n-p+1)$*-linéairement concave* tout ouvert X de $\mathbb{CP}^n$ qui est la réunion d'une famille continue de $(n-p+1)$-plans projectifs. On pose

$$X^* := \big\{\nu \in \mathrm{G}(n-p+2, n+1) \text{ telle que } \mathbb{P}_\nu^{n-p+1} \subset X\big\}.$$

C'est un ouvert connexe. Pour tout fermé Γ de X, *une p-chaîne holomorphe* de $X \setminus \Gamma$ est une combinaison linéaire, localement finie à coefficients entiers de sous-ensembles analytiques de dimension pure p de $X \setminus \Gamma$. Toute p-chaîne holomorphe de $X \setminus \Gamma$ est de mesure $2p$-dimensionnelle localement finie dans X (voir [7]).

THÉORÈME 1. — *Soient X un ouvert $(n-p+1)$-linéairement concave de $\mathbb{CP}^n$ et Γ une combinaison linéaire, finie, disjointe à coefficients entiers de sous-variétés réelles, C^2, de dimension $2p-1 \geq 3$ de X. Soit V une variété réelle de codimenion 1 de X^* vérifiant les conditions suivantes :*

1) *la réunion $\bigcup_{\nu \in V} \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ recouvre un ouvert dense de Γ ;*

2) *l'intersection $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ est transversale pour tout $\nu \in V$;*

3) *l'intersection $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ est le bord d'une 1-chaîne holomorphe de $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1} \setminus \Gamma$ au sens des courants;*

4) *aucun ouvert non vide de $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ n'est réel analytique.*

Alors Γ est le bord d'une p-chaîne holomorphe de $X \setminus \Gamma$, de masse localement finie dans X au sens des courants.

REMARQUE. — Ce théorème reste valable pour une famille plus large des ensembles V, qui ne sont pas nécessairement des variétés. Pour un résultat analogue dans $X = \mathbb{C}^n$, cette famille est définie précisément dans [8].

L'exemple suivant montre que la condition 4) dans le théorème précédent est nécessaire :

EXEMPLE (Henkin [8]). — Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{CP}^3$ une variété réelle algébrique de dimension 3 définie par

$$\Gamma = \{y_2 = y_3 = 0,\ x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

où $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ sont les coordonnées de $\mathbb{C}^3$. Considérons l'hyperplan projectif

$$H_{a,b,c} = \{z_1 = az_2 + bz_3 + c\}$$

où $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ et $c = c_1 + ic_2$. Posons

$$\Gamma_{a,b,c} = \Gamma \cap H_{a,b,c}.$$

Alors pour un (a,b,c) générique, $\Gamma_{a,b,c}$ est une courbe réelle fermée de la surface de Riemann algébrique $S_{a,b,c} \subset H_{a,b,c}$ qui est définie par

$$S_{a,b,c} = \{(a_1z_2 + b_1z_3 + c_1)^2 + (a_2z_2 + b_2z_3 + c_2)^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1\} \cap H_{a,b,c}.$$

Comme $S_{a,b,c}$ est une surface de Riemann compacte de genre 0, la courbe $\Gamma \cap H_{a,b,c}$ borde une surface de Riemann dans $\mathbb{CP}^3$. La variété Γ ne peut pas être le bord d'une variété complexe car elle n'est pas maximalement complexe.

Soit S un sous-espace analytique d'une variété complexe Z. Si S est de Stein, d'après le théorème de Siu, S admet un système fondamental de voisinages de Stein. En particulier, si S est une surface de Riemann ouverte, dont le bord est une réunion finie de courbes de Jordan de longueur finie, alors S admet dans Z un système fondamental de voisinages de Stein. On appelle *variété de Stein* toute variété plongeable dans une variété affine complexe. Un *voisinage de Stein* de S est un ouvert contenant S tel que chacune de ses composantes connexes soit de Stein. Le théorème suivant donne la réponse à une question de Dolbeault-Henkin [18] :

THÉORÈME 2. — *Soient Z une variété complexe, $\Gamma \subset Z$ une réunion finie, disjointe de courbes de Jordan, de longueur finie et S un sous ensemble analytique de dimension pure* 1 *de $Z \backslash \Gamma$, relativement compact dans Z. Supposons que $S \cup \Gamma$ ne contient aucun sous-ensemble analytique, compact, de dimension* 1 *de Z. Alors :*

1) $S \cup \Gamma$ *admet un voisinage connexe de Stein*;

2) $S \cup \Gamma$ *admet un système fondamental de voisinages de Stein.*

REMARQUE. — Si $Z = \mathbb{C}^n$ et si Γ est une courbe irréductible, alors $\bar{S}$ est égal à *l'enveloppe polynomiale*

$$\widehat{\Gamma} := \big\{x \in \mathbb{C}^n : |P(x)| \leq \max_{z \in \Gamma} |P(z)| \text{ pour tout polynôme } P\big\}$$

de Γ [21], [4], [20], [1]. D'après un lemme d'Oka, $\bar{S}$ admet un système fondamental de voisinages de Stein de la forme

$$\big\{|P_k(z)| < 1;\ k = 1, \ldots, m\big\},$$

où les P_k sont des polynômes. En général, dans $\mathbb{C}^n$, Henkin [10] et Alexander-Wermer [3] ont prouvé indépendamment que $\bar{S}$ est rationnellement convexe, c'est-à-dire que $\mathbb{C}^n \setminus S$ est une réunion d'hypersurfaces algébriques de $\mathbb{C}^n$. Par conséquent, $\bar{S}$ admet un système de voisinages de Stein de la forme

$$\big\{|R_k| < 1 \text{ pour } k = 1, \ldots, m\big\},$$

où R_k sont des fonctions rationnelles, holomorphes au voisinage de $\bar{S}$.

Dans $Z = \mathbb{CP}^n$, Fabre a construit une surface de Riemann irréductible, à bord lisse, non rationnellement convexe [10]. Si Γ est irréductible dans $Z = \mathbb{CP}^n$, le théorème 2 se réduit à celui de Mihalache [18].

La démonstration de Mihalache est une application du théorème de Siu et celui de Stolzenberg-Alexander [1]. Notre démonstration est un prolongement du travail de Mihalache. Nous utilisons le théorème de Henkin-Alexander-Wermer pour compléter la preuve et appliquer ce résultat pour démontrer les théorèmes 1 et 3.

2. Preuve du théorème 2

LEMME 1 (voir [1]). — *Soient Z une variéte de Stein, $K \subset Z$ un compact holomorphiquement convexe et $\Gamma \subset Z$ une réunion finie d'arcs réels compacts de longueur finie. Alors $(K \cup \Gamma)^\wedge \setminus (K \cup \Gamma)$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 (éventuellement vide) de $Z \setminus (K \cup \Gamma)$, borné dans Z, où*

$$(K \cup \Gamma)^\wedge := \big\{z \in Z : |h(z)| \leq \max_{x \in K \cup \Gamma} |h(x)| \textit{ pour } h \textit{ holomorphe dans } Z\big\}$$

est l'enveloppe d'holomorphie de $K \cup \Gamma$ dans Z.

LEMME 2 (voir [10], [3]). — *Sous l'hypothèse du théorème 2, si Z est de Stein, $S \cup \Gamma$ est méromorphiquement convexe, c'est-à-dire $Z \setminus (S \cup \Gamma)$ est une réunion d'hypersurfaces complexes de Z.*

Preuve. — Si Z est de Stein, elle est plongeable dans un $\mathbb{C}^N$. La preuve du lemme précédent se ramène au cas dans $\mathbb{C}^N$, qui se trouve dans [3, lemme 1.5]. □

COROLLAIRE 1. — *Soit S_i une suite de surfaces de Riemann bornées dans $\mathbb{C}^n$. Supposons que pour $i = 0, 1, \ldots$ le bord de S_i est une réunion finie, disjointe de courbes de Jordan rectifiables. Supposons de plus que les bords des S_i tendent vers le bord de S_0 au sens géométrique et aussi au sens des courants. Alors $\bar{S}_i$ tend vers $\bar{S}_0$ au sens géométrique.*

Preuve. — Soit $z \notin \bar{S}_0$. D'après le lemme 2, il existe une hypersurface algébrique $H = \{P = 0\}$ passant par z et ne rencontrant pas $\bar{S}_0$, où P est un polynôme. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on a $bS_0 \cap P^{-1}(|x| \leq \epsilon) = \emptyset$. Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{bS_0} \frac{\mathrm{d}P}{P - \alpha} = 0 \quad \text{pour tout } |\alpha| \leq \epsilon.$$

Pour tout i suffisamment grand, l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{bS_i} \mathrm{d}P/(P - \alpha)$ existe car bS_i tend vers bS_0 au sens géométrique. Cette intégrale est égale au nombre de points d'intersection de $H_\alpha := P^{-1}(\alpha)$ avec S_i. Ce nombre entier tend vers 0 car bS_i tend vers bS_0 au sens des courants. Par conséquent, il est égal à 0 pour i assez grand. Ceci montre que z n'appartient pas à la limite de $\bar{S}_i$ car z est un point d'intérieur de $P^{-1}(|x| \leq \epsilon)$. D'où $\lim \bar{S}_i \subset \bar{S}_0$. De même manière, on montre que $\bar{S}_0 \subset \lim \bar{S}_i$. □

LEMME 3. — *Soient K un compact méromorphiquement convexe dans une variété de Stein Z et H un compact de mesure de Haussdorff 2-dimensionnelle $\mathcal{H}^2$ nulle. Alors $K \cup H$ est méromorphiquement convexe dans Z.*

Preuve. — Comme Z est de Stein, il suffit de considérer $Z = \mathbb{C}^n$. Soit $z \notin K \cup H$. Comme K est méromorphiquement convexe, il existe un polynôme P vérifiant $z \in P^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n \setminus K$. Comme $\mathcal{H}^2(H) = 0$, il existe un polynôme Q vérifiant $Q(z) = 0$ et $Q^{-1}(0) \cap P^{-1}(0) \cap H = \emptyset$. Posons

$$T = Q^{-1}(0) \cap P^{-1}(0).$$

La famille d'hypersurfaces $\{P + \alpha Q\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ forme un feuilletage holomorphe de $\mathbb{C}^n \setminus T$. Comme $\mathcal{H}^2(H) = 0$, il existe un α assez petit tel que

$$\{P + \alpha Q = 0\} \cap H = \emptyset.$$

Pour α assez petit $\{P + \alpha Q = 0\} \cap K = \emptyset$. Alors $\{P + \alpha Q = 0\}$ est une hypersurface passant par z et elle ne coupe pas $K \cup H$. D'où $K \cup H$ est méromorphiquement convexe. $\square$

LEMME 4. — *Soient $U, V \subset Z$ deux ouverts connexes de Stein, $K \subset U$ un compact et $H \subset V$ un compact connexe de mesure $\mathcal{H}^2$ nulle. Alors $K \cup H$ admet un voisinage de Stein.*

Preuve. — Comme U et V sont des ouverts connexes de Stein, ils admettent des suites d'exhaustion de compacts connexes holomorphiquement convexes. Par conséquent, il existe un compact connexe, holomorphiquement convexe $K' \subset U$, contenant K. Soit U_1 un ouvert connexe à bord $\mathcal{C}^\omega$ strictement pseudoconvexe de U et contenant K'. Si $K' \cap H = \emptyset$ il suffit de choisir un voisinage de Stein W_1 de K' dans $U_1 \setminus H$ et grâce au lemme 3, un voisinage de Stein W_2 de H dans $V \setminus K'$. L'ouvert $W = W_1 \cup W_2$ vérifie notre lemme. Sinon, $F_1 := H \cap bU_1 \neq \emptyset$. Soit U_2 un autre ouvert à bord $\mathcal{C}^\omega$ dans U, contenant $\overline{U}_1$. On a également $F_2 := H \cap bU_2 \neq \emptyset$. Dans V, F_1 est méromorphiquement convexe, il admet un système fondamental de voisinages méromorphiquement convexes. Soit G un voisinage méromorphiquement convexe de F_1 dans V vérifiant $G \cap K' = \emptyset$ et $\overline{G} \subset U_2$. D'après le lemme précédent, $(K' \cup H) \cap U_2$ est méromorphiquement convexe dans U. Il admet donc un système fondamental de voisinages de Stein. On choisit un voisinage de Stein $W_1 := \{\rho_1 < 0\}$ vérifiant $W_1 \cap bU_1 \subset G$ où ρ est une fonction $\mathcal{C}^\omega$ strictement p.s.h. définie au voisinage de W_1. D'après le lemme 3, $\overline{G} \cup (H \setminus U_1)$ est méromorphiquement convexe dans V. On choisit un voisinage de Stein $W_2 := \{\rho_2 < 0\}$ de $\overline{G} \cup (H \setminus U_1)$ vérifiant $W_2 \cap bU_2 \subset W_1$, où ρ_2 est une fonction $\mathcal{C}^\omega$ strictement p.s.h. au voisinage de W_2. On définit un voisinage ouvert W^* de $K' \cup H$ par

1) $W^* \cap U_1 := \{\rho_1 < 0\} \cap U_1$;

2) $W^* \cap (U_2 \setminus U_1) := \{\rho_1 < 0, \rho_2 < 0\} \cap (U_2 \setminus U_1)$;

3) $W^* \setminus U_2 := \{\rho_2 < 0\} \setminus U_2$.

Soit W^{**} la composante connexe de W^* contenant $K' \cup H$. Sur son bord, le domaine W^{**} est défini localement par une ou deux inégalités $\varphi < 0$ où φ est une fonction strictement p.s.h. Si W^{**} ne contient aucun sous-ensemble analytique compact de dimension ≥ 1, d'après le théorème de Grauert [12], W^{**} est de Stein. Sinon, W^{**} contient un sous-ensemble analytique compact maximal L, dont toute composante irréductible est de dimension ≥ 1. On appelle $L_1, \ldots, L_m$ les composantes irréductibles de L. Comme U est de Stein et H est un compact de V, on a $L_i \cap V \setminus H \neq \emptyset$ pour tout i. Dans V, d'après le lemme 3, H est méromorphiquement convexe. Par conséquent, il existe une hypersurface H_i de V telle que $H_i \cap H = \emptyset$, $H_i \cap L_i \neq \emptyset$. Alors

$$V' := V \setminus \bigcup_{i=1}^{m} H_i$$

est un ouvert de Stein. Soit U'' (resp. V'') un ouvert de U (resp. V') contenant K' (resp. H), à bord C^ω, strictement pseudoconvexe. Posons

$$U^* := U'' \cap W^{**}, \quad V'^* := V'' \cap W^{**}.$$

Ces ouverts sont inclus dans des ouverts de Stein et à bord strictement pseudoconvexe. Ils sont donc de Stein. On fait la même construction comme celle précédente, en remplaçant U par U^* et V par V^*, pour obtenir un voisinage connexe W à bord strictement pseudoconvexe de $K \cup H$. Cet ouvert W est inclus dans W^{**} et il ne contient aucun sous-ensemble analytique compact de dimension ≥ 1 de W. Il est, d'après Grauert, ouvert de Stein. $\square$

LEMME 5. — *Toute réunion finie Γ d'arcs réels compacts de longueur finie d'une variété complexe Z admet un voisinage connexe de Stein. Par conséquent, Γ admet un système fondamentale de voisinages de Stein et pour tout ensemble fini $A \subset Z$, il existe un disque holomorphe, à bord lisse dans Z contenant A.*

Preuve. — On choisit un arc réel, fermé de longueur finie L dans Z tel que $\Gamma' := \Gamma \cup L$ soit connexe. On recouvre Γ' par une famille finie d'ouverts isomorphe à la boule unité de $\mathbb{C}^n$, où $n = \dim Z$. On note $U_1, U_2, \ldots, U_m$ ces ouverts. Il existe des compacts $\Gamma_k \subset \Gamma' \cap U_k$ tels que $\Gamma' = \bigcup \Gamma_k$. On peut supposer de plus que Γ_k sont tous des réunions finies d'arcs réels fermés. On choisit $L_k \subset U_k$ des arcs réels fermés tels que $\Gamma'_k := \Gamma_k \cup L_k$ soient connexes. On peut numéroter les U_i de sorte que $\bigcup_{i=1}^k \Gamma'_i$ soit connexe pour tout k. En appliquant le lemme précédent à

$$U := U_1, \quad V := U_2, \quad K := \Gamma'_1, \quad H := \Gamma'_2,$$

on peut construire un voisinage de Stein W_1 de $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$. Comme $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$ est connexe, on peut supposer que W_1 est connexe. D'après le lemme précédent appliqué à

$$U := W_{k-1}, \quad V := U_{k+1}, \quad K := \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma'_i, \quad H := \Gamma_{k+1},$$

il existe un voisinage connexe de Stein W_k de $\bigcup_{i=1}^{k+1} \Gamma'_i$ pour tout $k = 2, 3, \ldots, m-1$. D'après le lemme 3, dans $W = W_{m-1}$, Γ est méromorphiquement convexe. Il admet donc un système fondamental de voisinages de Stein.

On choisit un arc réel fermé de longueur finie Γ^* passant par tous les points de A et un voisinage U connexe et de Stein de L. Soit S un sous-ensemble analytique lisse, irréductible, de dimension 1 de U et contenant A. Tout ouvert simplement connexe à bord lisse de S, contenant A vérifie notre lemme. $\square$

LEMME 6. — *Sous l'hypothèse du théorème 2, il existe un ouvert connexe Y de Z, contenant $S \cup \Gamma$ tel que dans Y, toute surface de Riemann S' relativement compacte dans Y et vérifiant*

1) *S' est un sous-ensemble analytique de $Y \setminus \Gamma$;*
2) *$\bar{S}'$ n'est pas un sous-ensemble analytique de Y ;*

soit incluse dans S.

Preuve. — Soit S' un sous-ensemble analytique de $Z \setminus \Gamma$, bornée dans Z. Dans un voisinage connexe de Stein V de Γ, la surface $S' \cap V$ définit un courant d'intégration à bord rectifiable [16], [5]. Alors si $d[S' \cap V] = 0$, d'après le théorème de structure de King-Harvey-Shiffman-Alexander [15], [14], [19], [2], $\bar{S}$ est un sous-ensemble analytique de V. Sinon, $d[S' \cap V]$ est un courant rectifiable, fermé à support dans Γ. Par conséquent,

1) soit $\bar{S}'$ est un sous-ensemble analytique de Z ;
2) soit bS' se constitue par des composantes connexes de Γ.

Il existe un nombre fini de surfaces de Riemann de deuxième type. On note $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ces surfaces de Riemann dont $S_k \not\subset S$ pour tout $k < m'$ et $S_k \subset S$ pour tout $k \geq m'$. Tout ouvert connexe Y contenant $S \cup \Gamma$ tel que $Y \not\supset S_k$ pour tout $k < m'$, vérifie notre lemme. $\square$

On choisit L un arc réel, compact de longueur finie de Y tel que $\Gamma \cup L$ soit connexe, $L \cap S = \emptyset$ et tel que le lemme précédent reste valable si l'on remplace Γ par $\Gamma' := \Gamma \cup L$.

D'après le lemme 5, il existe un voisinage connexe de Stein $U \subset Y$ de Γ'. On choisit un ouvert connexe $U_1 \subset U$ strictement pseudoconvexe, à bord lisse et contenant Γ' tel que bU_1 coupe S transversalement en un nombre fini de courbes réelles compactes, lisses $C_1, \ldots, C_m$ de S. D'après le lemme 2, dans U, $\widehat{C} \setminus C$ est un sous-ensemble analytique de dimension 1 de $U \setminus C$, borné dans U, où $C := \bigcup_{k=1}^{m} C_k$. D'après le lemme précédent, $\widehat{C} \setminus C \subset \bar{S}$.

• *Premier cas.* — Supposons que $\widehat{C} \setminus C = \emptyset$. Alors C est holomorphiquement convexe dans U. Soit $U_2 \subset U$ (resp. U_0) un ouvert à bord lisse contenant $\overline{U}_1$ (resp. relativement compact dans U_1), qui est une petite déformation lisse de U_1. Alors $bU_2 \cap S$ (resp. $bU_0 \cap S$) est encore holomorphiquement convexe dans U. On choisit $G \subset\subset U \setminus U_1$ un voisinage de $bU_2 \cap S$ tel que $\overline{G}$ soit holomorphiquement convexe dans U. D'après le lemme 1, $\widehat{\overline{G} \cup \Gamma'} \setminus \overline{G} \cup \Gamma'$ est un sous-ensemble analytique de dimension 1 de $U \setminus (\overline{G} \cup \Gamma')$. Par conséquent, d'après le lemme 6, si G est un voisinage suffisament petit de $bU_2 \cap S$, on a $\widehat{\overline{G} \cup \Gamma'} \setminus (\overline{G} \cup \Gamma') \subset S \cup \Gamma' \cup (Y \setminus \overline{U}_1)$. D'après le théorème de Siu, il existe un voisinage de Stein W_1 de $S \setminus \overline{U}_0$ tel que $W_1 \cap bU_2 \subset G$. Soit $W_2 = \{\rho_2 < 0\} \subset W_1$ un ouvert à bord lisse, strictement pseudoconvexe et contenant $S \setminus U_1$, où ρ_2 est une fonction strictement p.s.h. et définie au voisinage de W_2. Soit $W_3 := \{\rho_3 < 0\}$ un voisinage de Stein de $\widehat{\overline{G} \cup \Gamma'}$ vérifiant $W_3 \cap bU_1 \subset W_2$, où ρ_3 est une fonction strictement p.s.h. et définie au voisinage de W_3. On définit le voisinage W^* de $S \cup \Gamma'$ par

1) $W^* \setminus U_2 = \{\rho_2 < 0\} \setminus U_2$;
2) $W^* \cap (U_2 \setminus U_1) = \{\rho_2 < 0, \rho_3 < 0\} \cap (U_2 \setminus U_1)$;
3) $W^* \cap U_1 = \{\rho_3 < 0\} \cap U_1$.

Soit W^{**} la composante connexe de W^* contenant $S \cup \Gamma'$. Sur son bord, cet ouvert est localement défini par une ou deux inégalités $\varphi < 0$ où φ est une fonction strictement p.s.h. Si W^{**} ne contient aucun sous-ensemble analytique compact de dimension ≥ 1, d'après Grauert, il est de Stein [12]. Sinon, W^{**} contient un sous-ensemble analytique compact maximal dont chaque composante irréductible est de dimension ≥ 1. On appelle $H_1, \ldots, H_m$ ces composantes irréductibles. Par hypothèse, aucune H_i n'est incluse dans $S \cup \Gamma'$. On remplace Y par un ouvert connexe de W^{**} qui contient $S \cup \Gamma'$ et ne contient aucune H_i. La même construction que celle précédente nous donne un voisinage connexe W de $S \cup \Gamma'$ dont le bord est strictement pseudoconvexe. L'ouvert W ne contient aucun sous-ensemble analytique compact de dimension ≥ 1. Il est donc ouvert de Stein. D'après le lemme 2, $S \cup \Gamma$ admet un système fondamental de voisinages de Stein.

• *Deuxième cas.* — Supposons que $(\widehat{C} \setminus C) \cap \Gamma' = \emptyset$. Posons $T := \widehat{C} \setminus C$. C'est un sous-ensemble analytique de dimension 1 de U_1. Soit H une hypersurface de U_1, contenant T vérifiant $H \cap \Gamma' = \emptyset$ et $\# H \cap \overline{S \setminus T} < +\infty$. Alors $U_1 \setminus H$ est de Stein. Il possède une suite d'exhaustion d'ouverts connexes $\mathcal{C}^\omega$ strictement pseudoconvexes V_k. Pour k assez grand, $bV_k \cap S$ est constitué par un nombre fini de petites courbes fermées qui bordent un petit voisinage dans $\overline{S \setminus T}$ de l'ensemble fini $H \cap \overline{S \setminus T}$. Par conséquent, comme S et Y vérifie le lemme 6 et comme $\overline{S}$ ne contient aucune surface de Riemann compacte, $\widetilde{C} := bV_k \cap S$ est holomorphiquement convexe dans V_{k+1}. En remplaçant U par V_{k+1} et U_1 par V_k, on se ramène au premier cas.

• *Cas général.* — D'après le théorème d'unicité, $M := (\widehat{C} \setminus C) \cap \Gamma'$ est un fermé de mesure $\mathcal{H}^1$ nulle. Par conséquent, d'après le lemme 1, il est holomorphiquement convexe dans U.

LEMME 7. — *Il existe les voisinages holomorphiquement convexes, à bord lisse V_0, V_1, V_2 de M vérifiant les conditions suivantes :*

1) *V_{i+1} est un ouvert relativement compact de V_i ;*

2) *V_i possède un nombre fini de composantes connexes;*

3) *le bord de V_i intersecte $S \cup \Gamma'$ transversalement et $bV_i \cap \Gamma'$ est un ensemble fini;*

4) *$(S \cup \Gamma') \cap bV_1$ est holomorphiquement convexe dans un voisinage de Stein de $(S \cup \Gamma') \setminus V_2$.*

Preuve. — Supposons le lemme faux. On peut facilement construire une suite d'ouverts holomorphiquement convexes $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ décroissante vers M et vérifiant les conditions 1), 2), 3) pour $i = 0, 1, 2, \ldots$. Posons

$$\Gamma^* := (S \cap bV_i) \cup (\Gamma' \setminus V_i), \quad S^* := S \setminus V_i.$$

D'après le lemme 1, $(S^* \cup \Gamma') \cap \overline{U}_1$ est méromorphiquement convexe dans U. En plus, dans U, $\widehat{\widetilde{\Gamma}} \setminus \widetilde{\Gamma}$ se constitue par un nombre fini de surfaces de Riemann irréductibles, où $\widetilde{\Gamma} := (S^* \cap b\overline{U}_1) \cup (\Gamma' \cap \overline{U}_1)$. Par conséquent, il existe une hypersurface H de U telle que $(S^* \cup \Gamma') \cap \overline{U}_1$ est holomorphiquement convexe dans l'ouvert de Stein $U \setminus H$. Alors $H \cap S \cap V_i$ est un ensemble fini. Comme $U_1 \setminus H$ est de Stein, il admet une suite d'exhaustion d'ouverts connexes holomorphiquement convexes Ω_k. Pour k suffisament grand, $C^* := b\Omega_k \cap S$ se constitue par une petite déformation de C et par des courbes de Jordan qui forment le bord d'un petit voisinage de $H \cap S \cap V_i$ dans S. D'après le deuxième cas (appliqué à $U^* := \Omega_{k+1}$, $U_1^* := \Omega_k$, S^*, Γ^* et C^*) $S^* \cup \Gamma^*$ admet un système fondamental de voisinages de Stein. Par conséquent, comme la condition 4) n'est pas vérifiée quand on remplace les ouverts V_1 et V_2 dans le lemme par les ouverts V_{i-1} et V_i, $(S \cup \Gamma') \cap bV_{i-1}$ doit contenir le bord d'une surface de Riemann $S_i \subset \overline{S}$. Comme V_i est holomorphiquement convexe dans U, la surface S_i ne peut pas être entièrement dans U. Rappelons que quand i tend vers infini, V_i tend vers M qui est de longueur 0. Finalement, on peut conclure ici que $\overline{S}$ contient une surface de Riemann compacte, qui est la limite de S_i quand i tend vers l'infini. C'est une contradiction. $\square$

On choisit d'après les lemmes 7 et 2, un voisinage de Stein $W_0 \subset Y \setminus \overline{V}_2$ de $(S \cup \Gamma') \setminus V_1$ dans Y vérifiant 7.4. Soit $G \subset W_0$ un voisinage holomorphiquement convexe de $(S \cup \Gamma') \cap bV_1$ dans W_0. Posons

$$\Gamma^* := (S \cap bV_1) \cup (\Gamma' \setminus V_1).$$

D'après le lemme 1, dans W_0, $\widehat{\overline{G} \cup \Gamma^*} \setminus (\overline{G} \cup \Gamma^*)$ est un sous-ensemble analytique de dimension 1 de $W_0 \setminus (\overline{G} \cup \Gamma^*)$. Rappelons que $(S \cup \Gamma') \setminus V_1$ est holomorphiquement convexe dans W_0. Par conséquent, d'après les lemmes 6 et 1, si G est un voisinage assez petit, $\widehat{\overline{G} \cup \Gamma^*} \setminus (\overline{G} \cup \Gamma^*)$ est inclus dans $\bar{S} \cup V_0$. D'après les lemmes 6 et 1, $(S \cup \Gamma') \cap \overline{V}_0$ est holomorphiquement convexe dans U. Il possède donc un voisinage de Stein $W_1 := \{\rho_1 < 0\}$ vérifiant $\overline{W}_1 \cap bV_1 \subset G$ où ρ_1 est une fonction C^ω, strictement p.s.h. au voisinage de $\overline{W}_1$. Il existe un voisinage de Stein $W_2 := \{\rho_2 < 0\}$ de $\widehat{\overline{G} \cup \Gamma^*}$ vérifiant $\overline{W}_2 \cap bV_0 \subset W_1$ où ρ_2 est une fonction C^ω, strictement p.s.h au voisinage de $\overline{W}_2$. On définit le voisinage W^* de $S \cup \Gamma'$ par

1) $W^* \cap V_1 := \{\rho_1 < 0\} \cap V_1$;
2) $W^* \cap (V_0 \setminus V_1) := \{\rho_1 < 0, \rho_2 < 0\} \cap (V_0 \setminus V_1)$;
3) $W^* \setminus V_0 := \{\rho_2 < 0\} \setminus V_0$.

Soit W^{**} la composante connexe de W^* contenant $S \cup \Gamma$. Cet ouvert est à bord strictement pseudoconvexe, il peut posséder un sous-ensemble analytique compact maximal dont toute composante irréductible est de dimension ≥ 1. On appelle $H_1, \ldots, H_m$ ces composantes irréductibles. En remplaçant Y par un ouvert de W^{**} qui ne contient aucune H_i, on peut construire par la méthode précédente, un ouvert connexe à bord strictement pseudoconvexe $W \subset W^{**}$ contenant $S \cup \Gamma'$. Cet ouvert ne contient aucun sous-ensemble analytique compact de dimension ≥ 1. Il est, d'après Grauert, ouvert de Stein. D'après le lemme 2, $S \cup \Gamma$ possède dans W un système fondamental de voisinages de Stein.

3. Preuve du théorème 1

D'après le théorème de Dolbeault-Henkin généralisé [7], il suffit de prouver que le plan tangent de Γ est maximalement complexe en tout point de $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ pour un ensemble dense de $\nu \in V$. Par méthode de tranchage, on ramène le problème au cas $p = 2$. Par méthode de projection, le problème se ramène au cas $n = 3$ et $p = 2$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout ouvert $V' \subset V$, il existe $\nu_0 \in V'$, un sous-ensemble $V'' \subset V'$ et un voisinage de Stein W de $\Gamma \cap \mathbb{P}^2_{\nu_0}$ vérifiant :*

1) *les vecteurs tangents géométriques de V'' en ν_0 engendent le plan tangent de V en ν_0 ;*

2) *pour tout $\nu \in V''$, l'intersection $\Gamma \cap \mathbb{P}^2_\nu$ est incluse dans W ;*

3) *pour tout* $\nu \in V''$, *l'intersection* $\Gamma \cap \mathbb{P}^2_\nu$ *est le bord d'une* 1-*chaîne holomorphe* S_ν *de* $\mathbb{P}^2_\nu \setminus \Gamma$ *qui est relativement compacte dans* W.

Preuve. — On peut supposer que V' est suffisamment petit tel que pour tous $\nu, \nu' \in V'$ la combinaison $\gamma_\nu := \Gamma \cap \mathbb{P}^2_\nu$ soit une déformation continue de $\Gamma \cap \mathbb{P}^2_{\nu'}$. On écrit

$$\gamma_\nu = \Gamma \cap \mathbb{P}^2_\nu = \sum_{i \in I} n_i \gamma_{i,\nu}$$

où les n_i sont des entiers non nuls et $\gamma_{i,\nu}$ sont des courbes réelles fermées, irréductibles, C^2 dépendantes continûment de $\nu \in V'$. On appelle $(w_0 : w_1 : w_2 : w_3)$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{CP}^3$ et $z_i := w_i/w_0$ ses coordonnées affines. On peut supposer que les hyperplans $H := \{w_2 = 0\}$ et $Q := \{w_0 = 0\}$ ne rencontrent pas γ_ν pour tout $\nu \in V'$. De plus, on peut supposer que $(w_0 : w_1 : w_2)$ est un système des coordonnées de $\mathbb{P}^2_\nu$ pour tout $\nu \in V'$. On choisit pour tout $\nu \in V'$, une 1-chaîne holomorphe S_ν de $\mathbb{P}^2_\nu \setminus \Gamma$ à bord γ_ν telle que $\bar{S}_\nu$ ne contient aucune surface de Riemann compacte. Rappelons que deux chaînes de même bord au sens des courants diffèrent d'une chaîne algébrique. On écrit

$$S_\nu = \sum_{j \in J_\nu} m_{j,\nu} S_{j,\nu}$$

où les $m_{j,\nu}$ sont des entiers et $S_{i,\nu}$ sont des sous-ensembles analytiques irréductibles de $\mathbb{P}^2_\nu \setminus \Gamma$. Alors le bord de $S_{j,\nu}$ est une combinaison linéaire de $\gamma_{j,\nu}$ à coefficients 0, 1 ou -1. Soit F_ν l'ensemble de toutes ces combinaisons. Comme V' est petit et γ_ν dépend continûment de ν, on peut identifier tous les F_ν et noter $F := F_\nu$ pour $\nu \in V'$. On peut également considérer J_ν comme un sous-ensemble de F. On appelle $k_{j,\nu}$ le nombre de point d'intersection de $S_{j,\nu}$ avec H en comptant les multiplicités. Soient J un sous-ensemble de F, $M = \{m_j\}_{j \in J}$ et $K = \{k_j\}_{j \in J}$ des familles de nombres entiers. On pose :

$$V_{J,M,K} := \big\{\nu \in V'' \text{ telle que } J_\nu = J,\\ m_{j,\nu} = m_j,\ k_{j,\nu} = k_j \text{ pour tout } j \in J\big\}.$$

Alors $V' = \bigcup V_{J,M,K}$. Par conséquent, il existe un $V_{J,M,K}$ et un $\nu_0 \in V_{J,M,K}$ tels que les vecteurs tangents géométriques de $V_{J,M,K}$ en ν_0 engendent le plan tangent de V en ν_0. D'après le théorème 2, il suffit de prouver que $S_{j,\nu}$ dépend de manière continue de $\nu \in V_{J,M,K}$. Fixons un $j \in J$. Pour simplifier des notations, on pose $k := k_j$. Soient X' un voisinage 2-concave suffisamment petit de $\mathbb{P}^2_{\nu_0}$ et Γ' une combinaison linéaire à coefficients ± 1 de composantes irréductibles de $\Gamma \cap X'$ tels que $\gamma'_\nu := \Gamma' \cap \mathbb{P}^2_\nu = bS_{j,\nu}$ pour $\nu \in V_{J,M,K}$ proche de ν_0. On pose :

$$G_{j,\nu}(\xi, \eta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_\nu} z_1^j \frac{\mathrm{d}(z_2 - \xi - \eta z_1)}{z_2 - \xi - \eta z_1}.$$

Ces fonctions sont les fonctions symétriques qui permettent de déterminer les solutions du problème du bord pour γ'_ν (*cf.* [9]). Un théorème de Dolbeault-Henkin implique que les deux conditions suivantes sont équivalentes (voir [7]) :

1) γ'_ν est le bord d'une 1-chaîne holomorphe S'_ν telle que l'intersection de H avec S'_ν soit une combinaison de points à coefficients entiers positifs et de masse totale k ;

2) il existe des fonctions $C_{i,\nu}(\eta)$ définies C^∞ dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ pour $i = 0, 1, \ldots, k+1$ et un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $\xi \in U$ le système d'équations suivant, où $i = 1, 2, \ldots, k+1$, admette une solution :

$$x_1^i + \cdots + x_k^i = G_{i,\nu}(\xi, \eta) + \frac{C_{0,\nu}^{(i-1)}(\eta)}{(i-1)!}\xi^i + \sum_{s=1}^{i} \frac{iC_{s,\nu}^{(i-s)}(\eta)}{(i-s)!}\xi^{i-s}.$$

Si, dans la condition 1), la solution S'_ν existe, elle est unique. Par conséquent, pour $\nu \in V_{J,M,K}$, cette solution est égale à $S_{j,\nu}$. Au voisinage de $H \cap \mathbb{P}^2_\nu$, S'_ν est décrite par $\{(x_s, \xi + \eta x_s)\}_{s=1}^k$ pour (ξ, η) variant dans $U \times \Omega$ (voir [7]). Soient $S_i := x_1^i + \cdots + x_k^i$. Alors S_{k+1} sera déterminée par un polynôme en $S_1, \ldots, S_k$. On écrit :

$$S_{k+1} = P(S_1, \ldots, S_k).$$

On remplace les S_i dans l'équation précédente par les membres à droite du système ci-dessus. Ensuite, on développe deux membres de l'équation obtenue en série de Taylor en ξ. L'identification des coefficients de ξ^i nous donne un système de la forme

$$\begin{cases} C_{k,\nu}^{(k+1-i)}(\eta) = F_i(\eta, C_{0,\nu}, C_{0,\nu}^{(1)}, \ldots, C_{0,\nu}^{(k-1)}, C_{1,\nu}, C_{1,\nu}^{(1)}, \ldots, C_{k,\nu}, \nu) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } i = k+1, k, \ldots, 1; \\ C_{0,\nu}^{(k)}(\eta) = F_0(\eta, C_{0,\nu}, C_{0,\nu}^{(1)}, \ldots, C_{0,\nu}^{(k-1)}, C_{1,\nu}, C_{1,\nu}^{(1)}, \ldots, C_{k,\nu}, \nu); \\ H_s(\eta, C_{0,\nu}, \ldots, C_{0,\nu}^{(k-1)}, \ldots, C_{k,\nu}, \nu) = 0 \qquad \text{pour } s = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

où F_i et H_s sont des polynômes en $C_{s,\nu}^{(i)}$, holomorphes en η et C^2 en ν.

D'après le théorème de Cauchy-Kovalevskaya, les $k+1$ premières équations donnent une solution unique pour chaque donnée vectorielle b en un point fixé θ de Ω, c'est-à-dire

$$(C_{\nu,0}, \ldots, C_{0,\nu}^{(k-1)}, C_{1,\nu}, C_{1,\nu}^{(1)}, \ldots, C_{k,\nu}) = b \ \text{ en } \ \theta.$$

Cette solution dépend holomorphiquement de (b, η) et de façon C^2 de ν. Remplaçant cette solution dans le reste du système, nous obtenons un système de la forme

$$\widetilde{H}_s(b, \eta, \nu) = 0 \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots$$

où $\widetilde{H}_s$ sont des fonctions holomorphes en b, ν et C^2 en ν.

L'ensemble de solutions de ce système représente un fermé Σ dans l'espace de (b,η,ν). Le fait que pour un ν, il existe une 1-chaîne S'_ν vérifiant la condition 1) ci-dessus, est équivalent au fait qu'il existe un b et un ouvert non vide Θ de $\mathbb{C}$ vérifiant $\{b\}\times\Theta\times\{\nu\}\subset\Sigma$. Ceci montre que la solution du système initial dépend de manière continue de $\nu\in V_{J,M,K}$. Soit $X''\subset X'$ un petit voisinage suffisamment petit de $H\cap\mathbb{P}^2_{\nu_0}$, à bord lisse tel que bX'' coupe S'_{ν_0} transversalement. Alors $S'_\nu\setminus X''$ tend vers $S'_{\nu_0}\setminus X''$ quand $\nu\in V_{J,M,K}$ tend vers ν_0. Posons $S''_\nu := S'_\nu\setminus\overline{X}''$. D'après le corollaire 1, S''_ν tend vers S''_{ν_0} quand $\nu\in V_{J,M,K}$ tend vers ν_0. D'où $S_{j,\nu}$ tend vers S_{j,ν_0} quand $\nu\in V_{J,M,K}$ tend vers ν_0. ∎

La preuve du théorème 1 sera complétée par la proposition suivante :

Proposition 2. — *Dans les conditions du théorème* 1 *et de la proposition* 1, *le plan tangent de* Γ *en chaque point de* $\Gamma\cap\mathbb{P}^2_{\nu_0}$ *est maximalement complexe.*

Preuve. — Soient

$$\Pi : \mathbb{CP}^3\setminus(0:0:0:1)\longrightarrow\mathbb{CP}^2$$

la projection canonique $\Pi(w) := (w_0 : w_1 : w_2)$ et

$$\Pi_1 : \mathbb{CP}^3\setminus\{w_0=0\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

avec $\Pi_1(z) := z_1$. On peut supposer que $\{w_0=0\}\cap\gamma_\nu=\emptyset$ pour tout ν proche de ν_0, $(0:0:0:1)\in\mathbb{P}^2_{\nu_0}$, la restriction de Π_1 sur γ_{ν_0} est C^2, injective en dehors d'un ensemble fini et que la restriction de la projection Π sur $\Gamma\cap U$ soit de rang maximal en tout point et injective en dehors d'une hypersurface réelle de $\Gamma\cap U$, où U est un petit voisinage de γ_{ν_0}. La variété $\Gamma\cap U$ peut être considérée comme le graphe d'une fonction Z_3 au dessus de $\underline{\Gamma} := \Pi(\Gamma)\cap\underline{U}$ sauf sur les singularités de $\underline{\Gamma}$, où $\underline{U}$ est un petit voisinage de $\Pi(\mathbb{P}^2_{\nu_0})\simeq\mathbb{CP}^1$. La fonction Z_3 est C^2 sur son domaine de définition. Comme W est un ouvert de Stein, il existe une fonction g non identiquement nulle et holomorphe dans W telle que

$$g^{-1}(0)\supset W\cap\{w_0=0\}.$$

D'après la proposition 1, la condition des moments (ou la formule de Stokes sur S_ν) implique que $\int_{\gamma_\nu} P(z_1,z_2)g^k\,\mathrm{d}z_1 = 0$ pour tout polynôme P, tout $k\geq\deg P+2$ et pout tout $\nu\in V''$.

On appelle L l'hyperplan complexe de l'espace $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Tan}(\mathrm{G}(3,4),\nu_0)$, engendré par les vecteurs tangents de V'' en ν_0, où la notation

$$\mathrm{Tan}(\mathrm{G}(3,4),\nu_0)$$

signifie le plan tangent réel de la grassmannienne $G(3,4)$ en ν_0. Alors pour tout vecteur $\mathcal{L} \in L$ la dérivée $\mathcal{L}(\int_{\gamma_\nu} P(z_1,z_2)g^k dz_1)$ s'annulle en ν_0 pour $k \geq \deg Q+2$. Soit

$$M := \{\nu \in G(3,4) : \mathbb{P}^2_\nu \ni (0:0:0:1)\}.$$

Posons $\Lambda := L \cap \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Tan}(M,\nu_0)$. Alors Λ est un hyperplan de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Tan}(M,\nu_0)$. On peut identifier M à la grassmannienne $G(2,3)$ qui paramètre l'ensemble de droites projectives de $\mathbb{P}^2$. Chaque $\mathbb{P}^2_\nu$ avec $\nu \in M$ sera associé à $\mathbb{P}^1_\nu := \Pi(\mathbb{P}^2_\nu)$. Alors $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda = 3$. Une droite projective générique $\mathbb{P}^1_\nu$ de $\mathbb{CP}^2$ (avec $\nu \in M$) est définie par l'équation $z_2 = \xi + \eta z_1$ avec $\xi, \eta \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tels que Λ est engendré par les trois vecteurs $\mathbb{C}$-indépendants

$$a\frac{\partial}{\partial\xi} + b\frac{\partial}{\partial\eta}, \quad \bar{a}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} + \bar{b}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}, \quad c\frac{\partial}{\partial\xi} + \bar{c}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} + d\frac{\partial}{\partial\eta} + \bar{d}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}.$$

Ces trois vecteurs sont $\mathbb{C}$-indépendants si et seulement si la matrice suivante est de rang maximal

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a} & \bar{b} \\ c & d & \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Pour tout point régulier $z \in \underline{\Gamma}$, on note $\overline{\mathcal{L}}_2$ le vecteur antiholomorphe de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Tan}_{\mathbb{C}}(\underline{\Gamma}, z)$ dont la projection sur $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \{\partial/\partial z_2\}$ vaut $\partial/\partial\bar{z}_2$, où la notation $\mathrm{Tan}_{\mathbb{C}}(\underline{\Gamma}, z)$ signifie la droite tangente complexe de $\underline{\Gamma}$ en z. Fixons $\nu^* = (\xi^*, \eta^*) \in M$ et considérons $\nu = (\xi, \eta^*) \in M$. Considérons $z^* \in \Pi(\gamma_{\nu_0})$ et z le point d'intersection de $\mathbb{P}^1_\nu$ avec $\mathrm{Tan}_{\mathbb{C}}(\underline{\Gamma}, z^*)$. Alors la deuxième coordonnée z_2 de z peut être considérée comme une fonction holomorphe en ξ et on note $\partial\bar{z}_2/\partial\bar{\xi}$ pour la dérivée de $\bar{z}_2$ en $\bar{\xi}$. Comme le restriction de Π sur $\Gamma \cap U$ est injective en dehors d'une hypersurface réelle de $\Gamma \cap U$, on peut poser

$$\overline{\mathcal{L}}^*_2(g)(z_1,z_2,z_3) := \overline{\mathcal{L}}_2\big(g\big(z_1,z_2,Z_3(z_1,z_2)\big)\big).$$

C'est une fonction continue sur la partie régulière de $\underline{\Gamma}$.

Lemme 8. — *Avec les notations ci-dessus, pour tout $k \geq 0$ et pour tout polynôme P les égalités suivantes sont vraies en tout point $\nu^* = (\xi^*, \eta^*)$ de M :*

1) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial\eta}\int_{\gamma_\nu} P(z_1,z_2)g^k\,\mathrm{d}z_1 = \frac{\partial}{\partial\xi}\int_{\gamma_\nu} P(z_1,z_2)z_1 g^k\,\mathrm{d}z_1,$

2) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\int_{\gamma_\nu} P(z_1,z_2)g^k\,\mathrm{d}z_1 = \int_{\gamma_\nu} kP(z_1,z_2)\overline{\mathcal{L}}^*_2(g)\frac{\partial\bar{z}_2}{\partial\bar{\xi}}g^{k-1}\,\mathrm{d}z_1,$

3) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\int_{\gamma_\nu} P(z_1,z_2)g^k\,\mathrm{d}z_1 = \int_{\gamma_\nu} kP(z_1,z_2)\bar{z}_1\overline{\mathcal{L}}^*_2(g)\frac{\partial\bar{z}_2}{\partial\bar{\xi}}g^{k-1}\,\mathrm{d}z_1.$

Preuve.

• *Premier cas.* — Supposons que $\underline{\Gamma}$ est une réunion de droites projectives. On écrit

$$\underline{\Gamma} = \bigcup_{\theta \in \Upsilon} \mathbb{P}^1_\theta,$$

où Υ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de courbes rélles C^2 fermées dans M. La notation $\theta \in \Upsilon$ signifie un point à multiplicité entière. Pour tout $\theta = (\alpha, \beta) \in \Upsilon$ et tout $\nu \in M$, on appelle $z_1(\theta, \nu)$ et $z_2(\theta, \nu)$ les coordonnées du point d'intersection de $\mathbb{P}^1_\nu$ avec $\mathbb{P}^1_\theta$. Alors

$$\int_{\gamma_\nu} P(z_1, z_2) g^k \, \mathrm{d}z_1 = \int_{\theta \in \Upsilon} \widetilde{P}(\theta, \nu) \tilde{g}^k(\theta, \nu) \, \mathrm{d}z_1(\theta, \nu) \tag{1}$$

où

$$\widetilde{P}(\theta, \nu) := P\big(z_1(\theta, \nu), z_2(\theta, \nu)\big),$$

$$\tilde{g}(\theta, \nu) := g\big(z_1(\theta, \nu), z_2(\theta, \nu), Z_3\big(z_1(\theta, \nu), z_2(\theta, \nu)\big)\big).$$

Alors $\widetilde{P}$ est holomorphe par rapport à ν. D'autre part on a des relations

$$z_2(\theta, \nu) = \xi + \eta z_1(\theta, \nu), \quad z_2(\theta, \nu) = \alpha + \beta z_1(\theta, \nu).$$

Ces relations impliquent

$$\frac{\partial z_1(\theta, \nu)}{\partial \eta} = z_1 \frac{\partial z_1(\theta, \nu)}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial z_2(\theta, \nu)}{\partial \eta} = z_1 \frac{\partial z_2(\theta, \nu)}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \bar{z}_1(\theta, \nu)}{\partial \bar{\eta}} = \bar{z}_1 \frac{\partial \bar{z}_1(\theta, \nu)}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \bar{z}_2(\theta, \nu)}{\partial \bar{\eta}} = \bar{z}_1 \frac{\partial \bar{z}_2(\theta, \nu)}{\partial \bar{\xi}}.$$

Par conséquent, pour toute fonction f de classe C^1 à deux variables

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f\big(z_1(\theta, \nu), z_2(\theta, \nu)\big) = z_1 \frac{\partial}{\partial \xi} f\big(z_1(\theta, \nu), z_2(\theta, \nu)\big), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} f\big(z_1(\theta, \nu), z_2(\theta, \nu)\big) = \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f\big(z_1(\theta, \nu), z_2(\theta, \nu)\big), \tag{3}$$

car $z_1(\theta, \nu)$ et $z_2(\theta, \nu)$ sont holomorphes par rapport à ν.

Les égalités (1), (2) impliquent la première égalité du lemme. La deuxième égalité est évidente, la troisième est un corollaire de (1) et de (3).

• *Cas général.* — Pour le cas général, on considère $\underline{\Gamma}'$ la réunion des droites tangentes complexes de $\underline{\Gamma}$ aux points de $\underline{\Gamma} \cap \mathbb{P}^1_{\nu^*}$. Alors au voisinage de $\underline{\Gamma} \cap \mathbb{P}^1_{\nu^*}$ la variété $\underline{\Gamma}$ est approximée à l'ordre 1 par $\underline{\Gamma}'$. Ceci explique que les valeurs des dérivées d'ordre 1 trouvées dans le premier cas restent valables dans le cas général. □

D'après le lemme 8, on obtient des égalités suivantes en ν_0 pour tout $k \geq \deg P_i + 2$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\gamma_\nu} (a + bz_1) P_1(z_1, z_2) g^k \, \mathrm{d}z_1 = 0, \tag{4}$$

$$\int_{\gamma_\nu} (\bar{a} + \bar{b}\,\bar{z}_1) P_2(z_1, z_2) \overline{\mathcal{L}}_2^*(g) \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{\xi}} g^{k-1} \, \mathrm{d}z_1 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\gamma_\nu} (c + dz_1) P_3(z_1, z_2) g^k \, \mathrm{d}z_1 + k \int_{\gamma_\nu} (\bar{c} + \bar{d}\,\bar{z}_1) P_3(z_1, z_2) \overline{\mathcal{L}}_2^*(g) \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{\xi}} g^{k-1} \, \mathrm{d}z_1 = 0. \tag{6}$$

Pour $P_1 = c + dz_1$, $P_2 = 1$ et $P_3 = a + bz_1$, on obtient les égalités suivantes en ν_0 pour $k \geq 3$ (la première est obtenue par (5), la seconde par (4) et (6))

$$\int_{\gamma_\nu} (\bar{a} + \bar{b}\,\bar{z}_1) \overline{\mathcal{L}}_2^*(g) \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{\xi}} g^{k-1} \, \mathrm{d}z_1 = 0, \tag{7}$$

$$\int_{\gamma_\nu} (\bar{c} + \bar{d}\,\bar{z}_1)(a + bz_1) \overline{\mathcal{L}}_2^*(g) \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{\xi}} g^{k-1} \, \mathrm{d}z_1 = 0. \tag{8}$$

Comme W est de Stein, il existe une fonction g holomorphe dans W vérifiant :

1) $g^{-1}(0) \supset W \cap \{w_0 = 0\}$;
2) l'application $g : \gamma_{\nu_0} \mapsto \mathbb{C}$ est C^2 et injective en dehors d'un ensemble fini ;
3) la dérivée $\partial g / \partial z_3$ ne s'annulle pas sur γ_{ν_0}.

Si $\overline{\mathcal{L}}_2^*(g)$ est identiquement nulle sur γ_{ν_0}, le plan tangent de Γ en chaque point de γ_{ν_0} est maximalement complexe.

Supposons que $\overline{\mathcal{L}}_2^*(g)$ n'est pas identiquement nulle sur γ_{ν_0}. Posons

$$\gamma := \overline{\{z \in \gamma_{\nu_0} : \mathcal{L}_2^*(g(z)) \neq 0\}}.$$

Alors il existe un arc ouvert $\ell \subset \gamma_{\nu_0}$ telle que $g(\ell)$ appartient au bord de la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus g(\gamma)$. Les égalités (7) et (8) impliquent que les mesures

$$\mu := g_* \Big\{ (\bar{a} + \bar{b}\,\bar{z}_1) \overline{\mathcal{L}}_2^*(g) \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{\xi}} g^2 \, \mathrm{d}z_1 \Big\},$$

$$\mu' := g_* \Big\{ (\bar{c} + \bar{d}\,\bar{z}_1)(a + bz_1) \overline{\mathcal{L}}_2^*(g) \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{\xi}} g^2 \, \mathrm{d}z_1 \Big\},$$

à support dans $g(\gamma)$, sont orthogonales aux polynômes de $\mathbb{C}$. Ces mesures s'étendent dans $\mathbb{C}$ au sens faible des courants en des $(1,0)$-formes holomorphes dans $\mathbb{C}\setminus g(\gamma)$ qui sont nulles sur la composante connexe non bornée R de $\mathbb{C}\setminus g(\gamma)$. Sur un petit voisinage d'un ouvert dense de bR, ces extensions sont des extensions continues (voir [6]). On remarque que S_{ν_0} est lisse en tout point du bord à l'exception d'un compact de longueur 0. Alors il existe un arc ouvert $\ell' \subset \ell$ et des ouverts simplement connexes à bord lisse Θ, Ω de $\mathbb{C}$ vérifiant :

1) la restriction de l'application g sur la composante attachée à ℓ' de $\overline{S_{\nu_0} \cap g^{-1}(\Theta)}$ est une application bijective, lisse et à l'image dans $\overline{\Theta}$;

2) la restriction de l'application Π_1 sur la composante attachée à ℓ' de $\overline{S_{\nu_0} \cap g^{-1}(\Theta)}$ est une application bijective, lisse et à l'image dans $\overline{\Omega}$;

3) les restrictions des mesures μ et μ' sur $g(\ell') \subset b\Theta$ s'étendent continûment dans Θ en une $(1,0)$-forme holomorphe, qui ne s'annulle dans aucun point;

4) aucune des fonctions $\bar{a}+\bar{b}\,\bar{z}_1$, $\bar{c}+\bar{d}\,\bar{z}_1$, g et z_1 ne s'annulle sur $\overline{S}_{\nu_0}\cap g^{-1}(\Theta)$.

En considérant le rapport entre deux mesures μ et μ', on constate que la restriction de la fonction

$$h := g_*\Big\{ \frac{(\bar{c} + \bar{d}\,\bar{z}_1)(a + bz_1)}{\bar{a} + \bar{b}\,\bar{z}_1} \Big\}$$

sur $g(\ell')$ s'étend holomorphiquement sur Θ. Ceci montre que la restriction de la fonction

$$f := \frac{\bar{c} + \bar{d}\,\bar{z}_1}{\bar{a} + \bar{b}\,\bar{z}_1}$$

sur $\Pi_1(\ell')$ s'étend aussi holomorphiquement dans Ω. Comme la matrice $\mathcal{M}$ est de rang maximal, la fonction f n'est pas constante. Par conséquent, la restriction de $\bar{z}_1$ s'étend méromorphiquement dans Ω puisque $\bar{z}_1 = (f\bar{a} - \bar{c})/(\bar{d} - f\bar{b})$. Un remplacement convenable de ℓ', Θ et Ω par leurs ouverts permet de supposer que cette extension est holomorphe. Soit Φ une application biholomorphe du disque unité D dans Ω. On sait que Φ s'étend continûment en une application bijective de $\overline{D}$ dans $\overline{\Omega}$. Alors $\overline{\Phi}_{|\ell''}$ s'étend holomorphiquement dans D où $\ell'' := \Phi^{-1}(\Pi_1(\ell'))$. En conséquence, les restrictions des parties réelle et imaginaire $\operatorname{Re}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$ de Φ sur ℓ'' s'étendent holomorphiquement dans D. D'après le principe de réflexion, les fonctions obtenues se prolongent holomorphiquement au voisinage de ℓ''. Ceci montre que $\Pi_1(\ell')$ est réelle analytique. En utilisant de petits changements des coordonnées, on peut prouver que $\Pi_{1,\epsilon}(\ell')$ contient un ouvert réel analytique pour tout ϵ petit, où $\Pi_{1,\epsilon}(z) := z_1+\epsilon_2 z_2+\epsilon_3 z_3$. Finalement, ℓ' contient un ouvert réel analytique. C'est la contradiction recherchée. $\square$

4. Remarque et questions ouvertes

La même méthode de la preuve du théorème 1 permet de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Soient D une variété complexe de dimension pure $p \geq 2$ à bord C^2 irréductible dans $\mathbb{CP}^n$ et f une fonction C^2 définie sur bD à valeurs dans $\mathbb{CP}^1$. Soit $V \subset \mathrm{G}(n-p+2, n+1)$ une variété réelle de codimension 1 vérifiant les conditions suivantes pour tout $\nu \in V$:*

1) $\bigcup_{\nu \in V} \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ *recouvre un ouvert dense de bD ;*

2) $\mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ *coupe bD transversalement ;*

3) *la restriction de f sur $bD \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ se prolonge dans $D \cap \mathbb{P}_\nu^1$ en une fonction méromorphe ;*

4) *aucun ouvert de $bD \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ n'est réel analytique.*

Alors la fonction f se prolonge méromorphiquement dans D.

Ce résultat généralise [8, th. 5], qui donne la solution partielle à :

CONJECTURE 1 (Globevnik-Stout, [11]). — *Soient $\Omega \subset\subset D$ deux domaines convexes à bord C^2 dans $\mathbb{C}^n$ et f une fonction continue sur le bord de D. Supposons que f se prolonge continûment en une fonction holomorphe dans $D \cap \ell$ pour toute droite complexe ℓ tangente à $b\Omega$. Alors f se prolonge holomorphiquement dans D.*

CONJECTURE 2. — *Soient $\Omega \subset\subset D$ des domaines convexes à bord C^2 dans $\mathbb{C}^n$, K un compact convexe de $\mathbb{C}^n$ et f une fonction continue sur $bD \setminus K$. Supposons que f se prolonge continûment en une fonction holomorphe dans $(D \setminus K) \cap \ell$ pour toute droite complexe ℓ tangente à $b\Omega$. Supposons aussi qu'aucun ouvert non vide de $bD \setminus K$ n'est réel analytique. Alors f se prolonge holomorphiquement dans $D \setminus K$.*

QUESTION 1. — *Est-ce que le théorème 3 est valable pour une fonction f continue ?*

QUESTION 2. — *Dans le théorème 3, si $\overline{D}$ est inclus dans $\mathbb{C}^n$ et si la fonction f et ses prolongements dans $D \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ sont tous à valeurs dans $\mathbb{C}$, est-ce que la condition 4) est nécessaire ?*

BIBLIOGRAPHY

[1] ALEXANDER (H.). — *Polynomial approximation and hulls in sets of finite linear measure in* $\mathbb{C}^n$, Amer. J. Math., t. **93**, 1971, p. 65–74.

[2] ALEXANDER (H.). — *Holomorphic chains and the support hypothesis conjecture*, J. Amer. Math. Soc., t. **10**, 1997, p. 123–138.

[3] ALEXANDER (H.), WERMER (J.). — *Linking numbers and boundaries of varieties*, Preprint, 1998.

[4] BISHOP (E.). — *Subalgebras of functions on a Riemann surface*, Pacific J. Math., t. **8**, 1958, p. 29–50.

[5] DINH (T.-C.). — *Enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie et chaînes holomorphes à bord rectifiable*, Acta Math., t. **180**-1, 1998, p. 31–67.

[6] DINH (T.-C.). — *Orthogonal measures on the boundary of a Riemann surface and polynomial hull of compacts of finite length*, J. Funct. Analysis, t. **157**, 1998, p. 624–649.

[7] DINH (T.-C.). — *Problème du bord dans l'espace projectif complexe*, Ann. Inst. Fourier, t. **48**-5, 1998, p. 1483–1512.

[8] DINH (T.-C.). — *Conjecture de Globevnik-Stout et théorème de Morera pour une chaîne holomorphe*, à paraître dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

[9] DOLBEAULT (P.), HENKIN (G.). — *Chaînes holomorphes de bord donné dans* $\mathbb{CP}^n$, Bull. Soc. Math. de France, t. **125**, 1997, p. 383–445.

[10] FABRE (B.). — *Sur l'intersection d'une courbe algébrique avec des hypersurfaces algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **322**, 1996, p. 371–376.

[11] GLOBEVNIK (J.), STOUT (E.L.). — *Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables*, Duke Math. J., t. **64**, 1991, p. 571–615.

[12] GRAUERT (H.). — *On the Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math., t. **68**, 1958, p. 460–472.

[13] HARVEY (R.), LAWSON (B.). — *On boundaries of complex analytic varieties I*, Ann. of Math., t. **102**, 1975, p. 233–290.

[14] HARVEY (R.), SHIFFMAN (B.). — *A characterization of holomorphic chains*, Ann. of Math. (2), t. **99**, 1974, p. 553–587.

[15] KING (J.). — *The currents defined by analytic varieties*, Acta Math., t. **127**, 1971, p. 185–220.

[16] LAWRENCE (M.G.). — *Polynomial hulls of rectifiable curves*, Amer. J. Math., t. **117**, 1995, p. 405–417.

[17] LAWRENCE (M.G.). — *Polynomial hulls of sets of finite length in strictly convex boundaries*, Manuscript.

[18] MIHALACHE (N.). — *Voisinages de Stein pour les surfaces de Riemann avec bord immergées dans l'espace projectif*, Bull. Sci. Math., t. **120**, 1996, p. 397–404.

[19] SHIFFMAN (B.). — *Complete chacacterization of holomorphic chains of codimension one*, Math. Ann., t. **274**, 1986, p. 233–256.

[20] STOLZENBERG (G.). — *Uniform approximation on smooth curves*, Acta Math., t. **115**, 1966, p. 185–198.

[21] WERMER (J.). — *The hull of a curve in* $\mathbb{C}^n$, Ann. of Math., t. **68**, 1958, p. 550–561.