Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 271–305.

L'ÉCOLE CONSTRUCTIVE DE MARKOV

Maurice Margenstern (*)

Résumé. — Cet article donne les principales caractéristiques de l'école constructive d'Andrej Andreevich Markov (1903–1979). Après un bref rappel de la situation des mathématiques et de la logique au début du XX[e] siècle, on évoque rapidement la naissance de l'intuitionnisme et de la théorie des fonctions récursives. On décrit ensuite les objets et les méthodes du constructivisme de Markov. A titre d'exemples on expose les principaux résultats relatifs à l'analyse réelle selon le point de vue de Markov. On termine en soulignant l'intérêt de ces résultats pour les mathématiques d'aujourd'hui.

Abstract. — The constructivist school of markov. This paper sets out the main features of the constructivist school, as promoted by Andrej Andreevich Markov (1903–1979). After a short survey of the situation pertaining in mathematics and logic, at the beginning of the 20th century, the emergence of intuitionism, and of recursive function theory, is sketched in. The paper then outlines the aims and methods of Markov's constructivism — reviewing, by way of illustration, the major results obtained through Markov's approach, in the field of real-number analysis. Finally, emphasis is laid on the current relevance of such results for present-day mathematics.

1. PROLOGUE

Née au début des années 1950, l'école constructive d'Andrej Andreevich Markov occupe une place originale parmi les courants qui ont surgi en réponse à la crise des fondements des mathématiques du début de ce siècle. Ses liens avec des problèmes pratiques d'informatique apparus récemment viennent le confirmer, s'il en était besoin. Pour bien comprendre les choix de cette école et, *a fortiori*, pour apprécier son apport à la logique contemporaine, il convient de revenir non seulement à la problématique qui lui a donné naissance, mais encore de rappeler l'histoire qui l'a précédée, ne serait-ce qu'à grands traits.

(*) Texte reçu le 10 mars 1994, révisé le 14 juin 1995.
Maurice Margenstern, Université de Metz, I.U.T., Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 1 (France). Courrier électronique : margens@iut.univ-metz.fr et margens@litp.ibp.fr.

1.1. Une histoire ancienne

On peut faire remonter les origines de la problématique constructive au moins à la distinction qu'Aristote introduisit, au IV^e^ siècle avant notre ère, entre *infini actuel* et *infini potentiel*.

L'infini potentiel, c'est-à-dire l'infini en puissance est un processus qui se prolonge sans cesse mais reste à chaque étape fini. Une illustration de ce point de vue se trouve dans la façon dont Euclide démontre l'infinitude des nombres premiers : il se contente de démontrer qu'étant donné n nombres premiers on peut toujours en construire un $(n+1)$-ième.

En revanche, la notion d'infini actuel consiste à considérer un ensemble infini comme existant dans sa totalité. Dans l'exemple des nombres premiers, la majorité des mathématiciens d'aujourd'hui pense que l'ensemble infini de ces nombres peut être considéré comme un tout achevé sur lequel il est permis d'opérer selon des règles bien précises.

En première approximation, nous admettrons que le développement de l'activité mathématique n'a guère permis d'aborder cette question de l'intérieur même des mathématiques avant le début du XIX^e^ siècle, même si les réflexions de Galilée au début du XVII^e^ siècle, de Leibniz à la fin de ce même siècle et toutes celles qui ont entouré l'essor du calcul infinitésimal conduisent à nuancer une telle affirmation. C'est que, dans une très large mesure, on peut estimer que tout ce qui a été produit en mathématiques jusqu'au début du XIX^e^ siècle est *contructif* au sens que nous préciserons un peu plus loin[1].

Le XIX^e^ siècle, par contre, à la fois par les résultats, les méthodes envisagées et les discussions qui les ont entourés, amorce une étape nouvelle où le problème de l'*effectivité* en mathématique est posé explicitement et où, parallèlement, les prémices des solutions que le XX^e^ siècle apportera apparaissent également[2].

1.2. Le début du XX^e^ siècle

Les développements de l'analyse tout au long du XIX^e^ siècle ont conduit

---

[1] Indiquons, en première approximation, que seuls les théorèmes d'existence abstraite établis au XIX^e^ siècle sont non constructifs comme, exemple important, le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions numériques continues sur un segment.

[2] Kronecker (voir notamment [1887]) a été l'un des précurseurs du courant constructiviste. Il est cité comme tel par les fondateurs de presque toutes les écoles constructivistes.

à une présentation des notions fondamentales de cette discipline assez proche de ce que nous connaissons actuellement. Parallèlement, les progrès en arithmétique et en algèbre ont permis de s'attaquer avec succès aux problèmes de logique. Le calcul propositionnel est constitué, les notions d'axiomes et de règles bien dégagées[3]. Il est enfin possible de s'atteler à l'étude du difficile calcul des prédicats mis au jour par Frege.

Mais à peine s'était-il établi un consensus optimiste sur la solidité des fondements constitués dans le derniers tiers du XIX^e siècle que le passage au XX^e s'est produit dans la plus grande confusion : la crise des fondements a éclaté et elle ne cesse de faire rage. Les paradoxes sémantiques connus depuis l'Antiquité jouent un tour quelque peu fâcheux à la théorie *naïve* des ensembles dont la beauté ingénue avait séduit le monde mathématique. Elle ne s'en relèvera pas et, sous certaines latitudes, la logique souffrira longtemps (et souffre encore) d'avoir été celle par qui le scandale est arrivé.

La logique, qui s'emploiera à fournir tant bien que mal les fondements les moins mal assurés possibles à une communauté mathématique de plus en plus irritée par ces problèmes fondationnels, va se heurter au même obstacle que chaque idée nouvelle au moment de son apparition[4] : les croyances des mathématiciens de l'époque issues de l'expérience antérieure. L'importance du choc et le fait que les travaux fondationnels restent une préoccupation de notre siècle méritent qu'on s'attarde un peu sur cette question.

Remarquons tout d'abord que la logique est la première à adopter, dès le début du XX^e siècle, une démarche *finitiste* : une démonstration doit nécessairement ne mettre en œuvre que des moyens finis dans le cadre d'un processus lui-même fini. Cette pierre de touche posée par Hilbert au congrès international des mathématiciens à Paris en 1900 n'a généralement pas été remise en cause[5]. C'est de plus un point de départ commun à tous les courants constructivistes.

Remarquons ensuite que fort de l'énorme développement scientifique du XIX^e siècle[6], le début du XX^e siècle a caressé deux ambitions en matière de

---

[3] Frege, puis Russell et Hilbert y ont joué un grand rôle.

[4] Rappelons simplement la découverte des nombres irrationnels, celle des nombres complexes, celle des infiniment petits et grands, celle enfin des géométries non euclidiennes, la liste n'étant pas limitative.

[5] Ce que ne contredit pas l'étude de logiques *infinitaires* conduites dans un autre but.

[6] On ne répétera jamais assez que sur le seul plan mathématique, l'œuvre du XIX^e

connaissance scientifique : celle de tout savoir et celle de s'affranchir des contradictions. Ces ambitions supposent bien entendu que le but recherché est accessible. Les logiciens de cette époque vont transposer ces objectifs dans leur domaine en leur donnant le fondement le plus maximaliste : l'objectif de *tout savoir* est transformé en celui de *tout démontrer*, ce qui n'est pas la même chose[7]. Quant à l'affranchissement des contradictions, l'école de Hilbert l'a transformé en la recherche d'une preuve *interne* de non-contradiction.

Connaissant la suite de l'histoire, serait-il pertinent de juger nos prédécesseurs du haut des théorèmes d'incomplétude de Gödel qui ont sans doute frappé de stupeur plusieurs d'entre eux en montrant le caractère excessif de la traduction *interne* d'objectifs poursuivis hors du discours mathématique[8] lui-même ? Ce serait oublier que leur démarche a produit des concepts foncièrement nouveaux : le programme finitiste de Hilbert (voir [Sinaceur 1993]), les machines de Turing, les fonctions récursives et bien d'autres. Ce serait oublier que ces nouveaux concepts ont connu des développements imprévus, dont sont issus les fondements d'une science nouvelle : l'informatique.

S'écartant du sillage ouvert à cette époque par la formalisation réussie de théories mathématiques, un certain nombre de mathématiciens et de logiciens se sont efforcés de trouver d'autres fondements des mathématiques. Parmi eux, les fondateurs des courants constructivistes et donc, du premier d'entre eux, l'intuitionnisme.

1.3. L'intuitionnisme

Fondé par le mathématicien hollandais Brouwer à partir du début des

siècle contient de nombreux travaux qui n'ont pas encore été analysés. Chaque année qui passe voit la redécouverte de résultats qui ont sommeillé jusqu'ici, dans les pages précieusement conservées de revues qui n'ont pas survécu.

[7] Supposant cette fois encore que c'est possible, on sous-entend donc que, pour tout énoncé sans paramètre, on peut *démontrer* soit qu'il est vrai, soit qu'il est faux. C'est ce qu'on chercha à établir et, comme on le sait, on échoua.

[8] Le problème s'est posé à de nombreuses reprises. Une première fois dès le XIX^{e} siècle, lorsque Dedekind chercha à obtenir l'existence d'objets *infinis* à partir des seules lois de la pensée. Toujours au siècle précédent, on a attendu pour admettre les géométries non euclidiennes que les premiers *modèles* de celles-ci dans la géométrie euclidienne soient construits, prouvant ainsi que si les premières étaient *absurdes*, c'est-à-dire contradictoires, la seconde le serait aussi. Dans notre siècle, l'exemple le plus récent est celui de l'hypothèse du continu dont Paul Cohen démontra l'indépendance en 1962.

années 1910, l'intuitionnisme est surtout connu par les polémiques qu'il a suscitées et l'opposition très vive entre Brouwer et Hilbert[9]. Prolongeant les idées de Kronecker qui s'en prenait déjà au recours à l'infini actuel en mathématiques, Brouwer rejette cette notion et fixe comme objectif des mathématiques l'étude des *constructions mathématiques mentales.* L'idée maîtresse de l'intuitionnisme et que reprendront après lui tous les courants constructivistes, est de présenter les objets mathématiques comme des résultats de *processus de construction* et les preuves de propriétés de ces objets comme des processus de construction [Heyting 1956]. Ainsi l'implication $A \Rightarrow B$ est-elle interprétée d'une façon *opérationnelle* : regardant A et B comme des *problèmes*, on dispose d'une construction qui transforme toute construction d'une solution de A en une construction d'une solution de B. Il en résulte une logique sans *tiers exclu* (voir [Kolmogorov 1925], [Glivenko 1928, 1929]) que nous analyserons plus loin.

Mais qu'est-ce au juste qu'une *construction*? L'intuitionnisme refuse de donner une réponse définitive à cette question et admet comme objets bien définis des constructions établies sur le célèbre modèle suivant (voir [Heyting 1956/1971][10]) : considérant la suite π_n des décimales de π, on pose $a_n = 1$ si la suite de chiffres $\pi_n\pi_{n+1}\ldots\pi_{n+9}$ est la suite 0123456789 et $a_n = 0$ sinon. Si l'on considère alors le réel $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . 2^{-n}$, on ne peut pas dire, pour l'instant, si a est nul ou pas. Brouwer recourt souvent à ce type d'arguments pour réfuter certains théorèmes de l'analyse classique.

Brouwer développe ensuite une analyse mathématique fondée sur la notion de *suite de choix libres* qu'il distingue de la notion de suite gouvernée par une loi. La notion de suite de choix libres lui permet de démontrer un *théorème de l'éventail* sur la structure des arbres infinis à branchements finis, qui permet d'établir en analyse intuitionniste que *toute fonction de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *est uniformément continue*, donc admet une borne inférieure et une borne supérieure. Cependant, le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus valable dans le cadre intuitionniste.

Les théorèmes de Brouwer sur les fonctions d'une variable réelle datent des années 1920, donc *avant* que ne se produise, au milieu des années 1930, l'évènement très important que nous allons examiner à présent et qui

[9] Voir [van Dalen 1990] et les articles traduits par Largeault [1992].

[10] Pages 16, 24, 29, 30, 40, 61, 66-67, 113-114 et 119.

éclairera d'un jour nouveau la question de la nature des constructions. Cet événement influencera d'autres courants constructivistes, dont celui de Markov.

1.4. La convergence de 1936

Parmi les efforts déployés par les logiciens pour assurer des fondements indiscutables aux mathématiques, il convient de souligner ceux de l'école de Hilbert. Sur une trentaine d'années, elle va créer la notion de *fonction récursive*. Herbrand et Gödel y ont apporté des contributions essentielles[11], mais c'est à Kleene que l'on doit les fondements de la théorie moderne des fonctions récursives[12].

Or, au moment où Kleene fait passer les fonctions récursives du statut d'outils à celui d'objets de départ d'une théorie mathématique, deux notions nouvelles font leur apparition : le λ-calcul de Church et les machines de Turing. Ce que Kleene et Turing démontrent alors, c'est que ces trois types d'objets décrivent un seul et même concept mathématique. On dirait aujourd'hui, en considérant qu'une fonction peut être définie par son graphe qui, d'une certaine manière, donne la liste des éléments de son image, que ces trois notions définissent les mêmes objets *ensemblistes*. Par contre, du point de vue des *processus*, bien que chacun puisse simuler les deux autres, il s'agit d'objets très différents. L'informatique fondamentale a aujourd'hui pour pratique de considérer la machine de Turing comme un *modèle* de fonctionnement des ordinateurs réels et le λ-calcul comme un *modèle* de langage de programmation. Il s'agit de *modèles* au sens de structures profondes et de mécanismes primordiaux, non au sens d'une

---

[11] Voir la lettre de Herbrand à Gödel de 1931, mentionnée dans [van Heijenoort 1967, p. 619]. Pour un exposé de l'historique de la notion de récursivité, on pourra consulter [Sinaceur 1990].

[12] Si les exposés d'aujourd'hui simplifient encore un peu les schémas définitionnels de Kleene [1936a,b], il s'agit en fait d'un simple toilettage de la théorie. L'apport de Kleene est triple : on lui doit la notion de fonction universelle, celle de forme normale et de théorème de normalisation, enfin, et ce n'est pas le moindre, le rôle incontournable des fonctions *partielles*. Le premier et le troisième point ont été vus presque en même temps et indépendamment par Turing [1936, p. 241–246 et p. 246–248], dans le cadre des machines qui portent son nom.

Il nous semble que l'enseignement mathématique supérieur gagnerait à enseigner plus systématiquement les premiers chapitres de la théorie des fonctions récursives. Il s'agit là de notions techniquement simples et en même temps essentielles puisque servant de fondement à la calculabilité, laquelle fait partie des concepts constitutifs d'une science : l'informatique.

représentation complète.

Quelques années avant la réalisation de cette convergence, des logiciens s'étaient déjà interrogés sur l'importance des fonctions récursives en postulant que tout ce qui est *intuitivement* calculable, donc *constructif*, est exprimable par une fonction récursive. Church avait formulé un énoncé analogue en 1934 où son λ-calcul prend la place des fonctions récursives. C'est pourquoi, la constatation faite en 1936 de la convergence des trois notions de fonctions récursives, de λ-calcul et de machines de Turing a donné un relief plus grand à cette hypothèse qui a reçu le nom de *thèse de Church*. Cette thèse indémontrable puisque identifiant un concept informel avec un concept mathématique précis, est acceptée par la grande majorité des logiciens et des informaticiens[13]. Cependant, tout le monde ne l'admet pas[14], en particulier les intuitionnistes. Notre propos n'étant pas d'en discuter, nous n'examinerons pas davantage les éléments du débat.

2. OBJETS ET MÉTHODES DE L'ÉCOLE DE MARKOV

L'école de Markov[15] se place délibérément dans le cadre de la thèse de Church. Dans cette optique, un objet constructif est le résultat d'un calcul, d'un processus calculable, en un mot, d'un *algorithme*. La mise en œuvre de ces objets et l'impératif de rester dans le champ des objets constructifs font apparaître la nécessité d'appliquer une logique plus faible que la logique habituelle, que nous appellerons logique classique conformément à l'usage établi. Sur un plan méthodologique, tout recours à la notion d'infini actuel est rejeté, seules sont acceptées les notions d'infini s'inscrivant dans le cadre d'un infini potentiel.

2.1 Objets constructifs et algorithmes de Markov

Une fois adoptée la thèse de Church, on peut choisir n'importe quelle traduction mathématique précise de la notion de fonction *calculable*, en particulier, on peut décider de ne pas faire de choix précis tant qu'on

[13] Voir, par exemple, l'argumentation fournie par Kleene [1987].

[14] Voir, par exemple, [Kalmár 1959].

[15] Andrej Andreevich Markov, 1903–1979, est le fils du mathématicien du même nom, créateur des *chaînes de Markov*. On trouvera dans un article de Kushner [1993] des indications intéressantes sur la personnalité du fondateur de cette école.

ne doit pas faire de calcul et, lorsqu'on doit en faire, choisir la notion la plus proche du traitement mathématique traditionnel, donc la notion de fonction récursive. Par ailleurs, adopter la thèse de Church n'implique pas, *a priori*, de choix sur les objets non constructifs. C'est ainsi que s'est constituée, après la seconde guerre mondiale, une analyse dite *récursive* qui s'intéresse, parmi les objets de l'analyse classique, à ceux qui s'avèrent en plus être récursifs. Par exemple, on peut s'intéresser aux propriétés de ceux des nombres réels que l'on peut représenter par une fonction récursive ; nous verrons un peu plus loin comment se construit une telle représentation.

Markov a fait des choix différents : seuls existent à ses yeux les objets constructifs, les autres n'ayant donc pas droit de cité. En outre, il choisit une traduction précise de la notion intuitive de fonction calculable : la notion d'*algorithme normal* qu'il définit dans sa monographie *La théorie des algorithmes* [1954a, chap. 2, § 3].

Les algorithmes de Markov

Le point de vue des algorithmes normaux n'a pas été avancé pour marquer davantage encore l'originalité de cette école. En fait, en 1947, Markov résolut en même temps que Post, et indépendamment de lui, le difficile problème des mots dans les semi-groupes, problème posé au début de ce siècle par le mathématicien norvégien Axel Thue, d'où le nom fréquent de problème de Thue.

Rappelons en quoi consiste ce problème. Considérant un alphabet A, l'ensemble des mots sur A est désigné par A^*. L'ensemble A^* est naturellement muni de l'opération de concaténation[16]. Soit R une partie finie de $A^* \times A^*$ dont chaque élément est dit *relation.* On dit alors que le couple $\langle A, R\rangle$ est un *système de Thue*. On dira que deux mots w_1 et w_2 de A^* sont *équivalents*, ce qu'on note $w_1 \leftrightarrow w_2$, si $w_1 = xuy$ et $w_2 = xvy$ avec $x, y \in A^*$ et soit $u = v$, soit $(u, v) \in R$, soit $(v, u) \in R$. Puis, on définit des *dérivations* par clôture transitive de l'équivalence, c'est-à-dire : $w_1 \overset{\bullet}{\leftrightarrow} w_2$ s'il existe une suite finie de mots $u_1, \ldots, u_n$ tels que $u_1 = w_1$, $u_i \leftrightarrow u_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $u_n = w_2$. Le problème des mots sur A^* est le suivant :

Étant donné w_1 et w_2 dans A^*, peut-on ou non décider si $w_1 \overset{\bullet}{\leftrightarrow} w_2$?

[16] La concaténation des mots x et y, dans cet ordre, est le mot xy.

Post et Markov établirent qu'il n'existe pas d'algorithme pour résoudre ce problème. On dit que le problème de Thue est *indécidable* ou encore *algorithmiquement insoluble*. Cette solution négative est un effet de la convergence de 1936 : jusque-là, on ne savait pas comment démontrer l'impossibilité de trouver la solution *effective* d'une famille de problèmes.

Dans sa solution, Markov met en œuvre une notion de calcul qui présente des traits communs avec les calculs de Post en ce sens qu'il s'agit de produire des mots sur un alphabet fixé en appliquant un nombre fini de fois des règles de production données à l'avance en nombre fini. Généralisant quelque peu le calcul qu'il obtenait ainsi, Markov aboutit à la notion d'*algorithme normal* — nous dirons par la suite *algorithme de Markov* — dont voici la définition.

Étant donné un alphabet A, on appelle *algorithme de Markov* une suite finie d'*instructions* qui se présentent sous le format suivant

$$P \to Q \quad \text{ou} \quad P \to \cdot Q$$

où P et Q sont des mots sur A. Une instruction de la seconde forme est dite instruction d'*arrêt*. Dans chacune de ces instructions, P est dit *motif* de l'instruction et Q est appelé *résultat* de l'instruction. On appellera encore *programme* de l'algorithme la suite de ses instructions. Un algorithme est appliqué à un mot w de A^* de la façon suivante :

1) si aucun motif d'une instruction du programme ne présente d'occurrence dans w, on laisse w inchangé et l'application de l'algorithme au mot w s'arrête là ;

2) sinon, on considère la première instruction du programme dont le motif présente au moins une occurrence dans w. On remplace alors la première occurrence du motif par le résultat de l'instruction. On retourne alors au point 1) avec le mot w' obtenu après remplacement.

Voici à titre d'exemple un algorithme de Markov avec l'application de son programme à deux mots de l'alphabet $\{0, |\,, a, b, *\}$. On remarque, sur ces exemples, que cet algorithme effectue la multiplication de deux entiers écrits en unaire :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
b\,| & \longrightarrow & |\,b & 0*0 & \longrightarrow & 0 \\
a\,| & \longrightarrow & |\,ba & 0\,|* & \longrightarrow & \\
a & \longrightarrow & & |*0 & \longrightarrow & *0\,a \\
0*0\,| & \longrightarrow & 0*0 & b & \longrightarrow & |
\end{array}$$

Premier exemple :

$$\begin{array}{llll}
0\mid\mid *0\mid\mid\mid & 0\mid *0\mid\mid\mid bbb & 0*0\mid\mid\mid bbbbbb & 0\mid\mid\mid\mid bb \\
0\mid *0\,a\mid\mid\mid & 0*0\,a\mid\mid\mid bbb & 0*0\mid\mid bbbbbb & 0\mid\mid\mid\mid\mid b \\
0\mid *0\mid ba\mid\mid & 0*0\mid ba\mid\mid bbb & 0*0\mid bbbbbb & 0\mid\mid\mid\mid\mid\mid \\
0\mid *0\mid b\mid ba\mid & 0*0\mid b\mid ba\mid bbb & 0*0\,bbbbbb & \\
0\mid *0\mid\mid bba\mid & 0*0\mid\mid bba\mid bbb & 0\,bbbbbb & \\
0\mid *0\mid\mid bb\mid ba & 0*0\mid\mid bb\mid babbb & 0\mid bbbbb & \\
0\mid *0\mid\mid b\mid bba & 0*0\mid\mid b\mid bbabbb & 0\mid\mid bbbb & \\
0\mid *0\mid\mid\mid bbba & 0*0\mid\mid\mid bbbabbb & 0\mid\mid\mid bbb &
\end{array}$$

Second exemple :

$$\begin{array}{l}
0\mid\mid *0 \\
0\mid *0a \\
0\mid *0 \\
0
\end{array}$$

L'arrêt est obtenu ici par la règle 1 ci-dessus. L'absence d'instruction d'arrêt permet d'établir sans difficulté que ce même algorithme transforme le mot $0\mid^{x} *0\mid^{y} *\cdots *0\mid^{w}$ en le mot $0\mid^{x\cdot y\cdots w}$.

On établit assez facilement que l'ensemble des algorithmes de Markov est stable par composition et par opération de répétition conditionnée par la valeur obtenue par l'exécution d'un autre algorithme. On établit naturellement l'existence d'algorithmes universels pouvant simuler, à partir du code d'un programme et de données adaptées à ce programme, l'action qu'effectue celui-ci sur ses données. V.K. Detlovs [1958] a démontré l'équivalence de cette notion d'algorithme avec les fonctions semi-récursives (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions dont le domaine de définition est récursivement énumérable mais pas nécessairement récursif).

L'abstraction de la réalisabilité potentielle

Il est intéressant de noter que dans sa monographie, Markov assortit sa définition de commentaires détaillés sur plusieurs pages (voir [1954a, chap. 1, p. 5–56]), prenant le plus grand soin à définir ce qu'il entend par algorithme et donnant au passage de précieuses indications sur la méthodologie qui sous-tend son projet.

Markov [1954a, p. 6] dégage tout d'abord une notion d'*abstraction de l'identification*, en indiquant que, par hypothèse, on sait décider si deux mots w_1 et w_2 d'un alphabet donné sont ou non identiques ; il fait remarquer que le problème est moins trivial qu'il n'y paraît au premier regard, car si on décide que w_1 et w_2 sont identiques, on ne s'en trouve pas moins avec deux occurrences distinctes de cette même chose.

Markov dégage ensuite la notion d'*abstraction de la réalisabilité potentielle* [1954a, p. 15]. Dans la manipulation des objets constructifs, on fait abstraction, dit-il, des conditions concrètes de construction de ces objets. Si, par exemple, on les écrit sur une feuille de papier, on fait abstraction aussi bien de la quantité de papier, d'encre nécessaire à cette écriture, que du temps que mettra la personne chargée de l'écriture. Il suffit donc, pour qu'un objet soit constructif selon Markov, qu'on puisse l'écrire sous forme de mot sur un alphabet (fini) adéquat, abstraction faite des conditions matérielles de cette écriture. On sait assez facilement construire des objets dont l'écriture effective ne pourrait être actuellement réalisée.

On conçoit immédiatement que l'appel à cette abstraction restreint nécessairement le développement ultérieur de cette théorie dans le cadre de l'infini potentiel, restriction que le constructivisme de Markov partage avec les autres courants constructivistes, y compris l'intuitionnisme. Comme nous le verrons plus loin, Markov fera de nouveau appel à cette abstraction pour introduire un axiome dans la logique qu'il va construire pour manipuler les objets constructifs, ce qui le distinguera des autres courants, en particulier de l'intuitionnisme.

2.2 Une logique particulière

Le maniement des objets constructifs induit une logique qui leur est propre. Comme pour toute théorie formelle, le langage d'une telle logique se construit à partir de *formules*. Dans ce but, on reprend le calcul des prédicats du premier ordre. Le lecteur qui n'est pas assez familier avec ce calcul pourra se contenter de considérer des formules mathématiques usuelles. Dans les deux cas, ce qui change fondamentalement, c'est la manière de comprendre les formules, ce que nous allons examiner à présent.

L'interprétation constructive des formules

La contrainte d'effectivité conduit à réinterpréter presque tous les connecteurs et le quantificateur existentiel.

Le *ou* logique, que nous noterons $\vee$, s'interprète différemment du *ou* logique classique. Ainsi l'énoncé $A \vee B$ est vrai si et seulement si on peut dire lequel au moins de A et de B est vrai. On l'interprète de la façon suivante

$$\exists\, x \quad \big((x = 0 \Rightarrow A\big) \;\&\; \big(x > 0 \Rightarrow B)\big)$$

où la variable x est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Le quantificateur apparaissant ici est interprété *constructivement* : on sait indiquer un entier x tel que la formule $(x = 0 \Rightarrow A)$ & $(x > 0 \Rightarrow B)$ soit vraie. Plus généralement, un énoncé de la forme

$$\forall x \; \exists\, y \quad A(x, y)$$

est interprété par la formule

$$(*) \qquad \exists\, u \; \forall x \quad \big(!\, \varphi_u(x) \;\&\; A(x, \varphi_u(x))\big)$$

où φ_u est le u-ième algorithme dans une numérotation fixée des algorithmes de Markov sur les entiers naturels[17] et où l'expression $!\, \varphi_u(x)$ signifie que le calcul de l'algorithme φ_u sur l'entier x se termine (sous l'hypothèse de l'abstraction de la réalisabilité potentielle).

Cette interprétation se justifie constructivement par la notion de processus. Rejetant l'infini actuel, on ne peut démontrer $\forall x \; \exists\, y \; A(x, y)$ en examinant une à une toutes les valeurs de x pour constater, à la fin, que l'on trouve, à chaque fois, un objet effectif y vérifiant $A(x, y)$. Il faut donc disposer d'un moyen uniforme pour, à partir de chaque x, construire un entier y vérifiant $A(x, y)$. Ce moyen effectif uniforme est donc un algorithme de Markov par application de la thèse de Church.

La logique intuitionniste

Le traitement constructif d'objets constructifs induit une logique sans tiers exclu. Nous l'avons déjà suggéré avec l'exemple intuitionniste d'un réel dont on ne sait pas, actuellement, s'il est nul ou pas. Markov n'accepte pas un tel raisonnement. La vérité d'une proposition ne peut pas dépendre de l'état de nos connaissances au moment où on se pose la question, dit-il. Tant qu'on ne sait pas, la réponse est suspendue, c'est la seule attitude

[17] On peut, naturellement, interpréter φ_u comme on le fait habituellement dans la théorie des fonctions récursives à savoir comme la u-ième fonction dans une énumération fixée des fonctions récursives à un argument.

à tenir. Cependant, comme le lecteur pourra le constater, le raisonnement suivant que produit Markov pour expliquer son rejet du principe du tiers exclu a une indéniable parenté avec le modèle intuitionniste.

On part, cette fois de l'ensemble K des entiers[18] n tels que $!\,\varphi_n(n)$. Par le théorème de l'algorithme universel (analogue markovien du théorème de Kleene de l'existence d'une fonction universelle), il existe un algorithme A, que nous appellerons par commodité *fonction de Kleene* tel que $A(u,x,m)$ vaut 0 si l'application du u-ième algorithme à l'entier x est terminée au m-ième pas de calcul (si elle est terminée, on considère qu'elle l'est pour les pas de calcul suivants de façon à ce que la fonction de Kleene soit toujours définie) et qui vaut 1 si l'application de l'algorithme n'est pas terminée à ce pas du calcul. On définit alors une suite w_n de fonctions par

$$w_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } A(n,n,m) = 1, \\ 0 & \text{si } A(n,n,m) = 0. \end{cases}$$

Désignons par $P(n)$ la formule $\exists\, p\ \forall\, m\ (w_{n,p+m} = 0)$. Si on pouvait appliquer le tiers exclu, c'est-à-dire écrire $\forall\, n\ (P(n) \vee \neg P(n))$, on en déduirait, par l'interprétation constructive des formules un algorithme de Markov d s'appliquant à tous les entiers et tel que

$$d(n) = 0 \Rightarrow P(n) \quad \text{et} \quad d(n) = 1 \Rightarrow \neg P(n).$$

L'algorithme d permet de décider, pour chaque entier n s'il appartient ou non à l'ensemble K.

Or, ceci est impossible. Sinon, on pourrait trouver un entier k qui serait le numéro d'un algorithme φ_k tel que $\varphi_k(n) = 0$ si $n \in K$ et $\varphi_k(n) = 1$ si $n \notin K$. On pourrait alors construire un autre algorithme de numéro h tel que

$$\varphi_h(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_k(n) = 1, \\ \text{indéfini} & \text{si } \varphi_k(n) = 0. \end{cases}$$

Où se trouverait h par rapport à K ? D'après la définition ci-dessus de φ_h, on a $!\,\varphi_h(h)$ si et seulement si $\varphi_k(h) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $h \notin K$, c'est-à-dire, par définition[19] de K, si et seulement si $\neg\,!\,\varphi_h(h)$.

[18] Toujours *naturels*, dans cette étude.

[19] On aura remarqué que l'ensemble K réalise une implantation du paradoxe du menteur.

Faisons un bilan. Connaissant un problème indécidable, dont la résolution par un algorithme est impossible, on raisonne ensuite par l'absurde, comme dans le cas intuitionniste : si le tiers exclu était applicable, on obtiendrait un algorithme de résolution du problème indécidable, parce qu'on a ramené le problème de résoudre $\forall n\ (P(n) \vee \neg P(n))$ au problème de décider K.

La logique intuitionniste pour le calcul des prédicats du premier ordre a été formalisée dans les années 1920 et 1930 par de nombreux auteurs, notamment par Heyting, compagnon d'armes de Brouwer. En voici une formulation dans le cadre du formalisme de Hilbert (voir [Bernays, Hilbert 1934])

$$
\begin{array}{l}
A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\
(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \\
A \,\&\, B \Rightarrow A \\
A \,\&\, B \Rightarrow B \\
(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \,\&\, C)) \\
A \Rightarrow A \vee B \\
B \Rightarrow A \vee B \\
(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)) \\
(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \\
A \Rightarrow \neg\neg A
\end{array}
$$

où, pour alléger l'exposé, nous ne donnons que les axiomes relatifs au calcul propositionnel.

À ces axiomes s'ajoute une règle de dérivation dite règle du *modus ponens* : si, dans notre calcul, on a déduit A et $A \Rightarrow B$, par application du *modus ponens* on peut aussi déduire B.

Le principe de Markov

Aux axiomes du calcul des prédicats intuitionniste, Markov ajoute en 1956 un axiome appelé *principe de Markov*[20], qui s'énonce ainsi

$$\forall x\ \big(A(x) \vee \neg A(x)\big) \Rightarrow \big(\neg\neg\exists x\ A(x) \Rightarrow \exists x\ A(x)\big)$$

[20] Et que Markov appelait, quant à lui, *principe de Léningrad*, comme je le lui ai entendu dire plusieurs fois, notamment au séminaire de l'université de Moscou, lors de mon séjour dans son laboratoire en 1975.

Markov justifie ce principe de la façon suivante.

Si on a $\forall x\ (A(x) \vee \neg A(x))$, on a donc un algorithme de Markov d applicable à tout entier x qui vaut 1 si $A(x)$ et qui vaut 0 si $\neg A(x)$. Le plus petit entier y tel que $A(y)$ peut être calculé par l'algorithme suivant que l'on peut transcrire sous la forme d'un algorithme de Markov :

$$\begin{aligned} &\textsf{initialisation}\ \ y := 0 \\ &\textsf{tant que}\ \ d(y) = 0 \\ &\qquad \textsf{faire}\ \ y := y + 1. \end{aligned}$$

Par *abstraction de la réalisabilité potentielle*, l'objet y cherché finira bien par être calculé au cas où $\neg\neg\exists x\ A(x)$, c'est-à-dire au cas où il est impossible que pour tout entier y on ait $\neg A(y)$ (ce qui pourrait, par exemple, se déduire d'un raisonnement logique).

La logique de Markov est constituée par la réunion du calcul intuitionniste des prédicats du premier ordre et de cet axiome. Ce point distingue fondamentalement l'école de Markov des autres courants constructivistes. De l'intuitionnisme, d'abord, car les intuitionnistes construisent, à l'aide de suites de choix libres, des contre-exemples à l'axiome de Markov. Mais la raison de fond du désaccord avec l'intuitionnisme s'explique en termes simples : lorsque les intuitionnistes interprètent un quantificateur existentiel, ils exigent qu'une borne soit donnée au temps de calcul de l'objet à trouver, ce que, en première analyse, le principe de Markov ne donne pas.

Bien que ne posant pas *a priori* de borne à un calcul qui doit seulement être fini[21], l'école constructiviste de Bishop semble dans la pratique suivre le point de vue intuitionniste sur cette question.

Par ce principe, le point de vue de Markov se rapproche un peu du point de vue récursif mentionné au début du paragraphe 2.1. Puisque utilisant les outils de la logique classique, l'analyse récursive accepte bien entendu le principe de Markov. Cependant, elle se distingue de cette école par les objets étudiés : l'analyse récursive considère ces autres nombres réels que Markov rejette car non définissables récursivement. De ce fait, les fonctions récursives au sens de cette analyse peuvent ne pas coïncider avec les fonctions définies au sens de Markov car leurs ensembles d'application ne sont pas les mêmes.

---

[21] « *Any computation that has a finite number of steps is permissible* » écrit Bishop [1967, p. 3].

3. L'ANALYSE DE MARKOV

L'école de Markov a produit essentiellement des fragments d'analyse mathématique touchant principalement à la topologie de la droite réelle et à la théorie des fonctions réelles d'une variable réelle, mais aussi à l'analyse fonctionnelle et à la topologie du plan. Il y a peu de choses en algèbre en dehors d'une étude sur le théorème de d'Alembert.

Dans le cadre de cet exposé, nous n'aborderons que la partie de l'analyse concernant les fonctions réelles d'une variable réelle. Markov lui-même ne s'est directement intéressé qu'au théorème de continuité des fonctions dont il ne démontra qu'une forme faible : le théorème de non discontinuité. Pour sa part, Markov s'est consacré à des problèmes purement logiques centrés autour de l'expression de la négation dans les théories constructives.

La construction de l'analyse selon son point de vue est l'œuvre de ses élèves. Elle a été commencée par Shanin, Zaslavskij et Cejtin. Le tome 67 des *Travaux de l'Institut mathématique Steklov*, publié en 1962, est entièrement consacré à l'analyse constructive. Il commence par une importante monographie de Shanin (plus de 250 pages) sur l'analyse constructive intitulée *Nombres réels constructifs et espaces de fonctions constructifs* [Shanin 1962]. Trois autres articles figurent dans ce tome, des travaux importants de Zaslavskij et Cejtin dont nous reparlerons un peu plus loin. La monographie de Shanin s'inscrit dans une constructivisation des espaces topologiques métrisables et séparables, les autres articles abordent des points de topologie fine de la droite réelle constructive. Un exposé de Kushner [1973], élève de Nagornyj, lui-même élève de Markov, brosse un tableau assez complet de l'œuvre établie par cette école[22].

3.1 La droite réelle constructive

Avant de considérer les propriétés topologiques de la droite réelle constructive, il convient de définir les nombres réels puisque ceux-ci posent déjà un problème.

[22] Il y manque essentiellement un exposé des travaux d'Orevkov (voir, par exemple, [Orevkov 1964]), sur la topologie du plan constructif et des travaux de Demuth [1968], sur la constructivisation de la théorie de l'intégrale de Lebesgue. La disparition prématurée de ce dernier auteur en 1988 a interrompu le travail commun qu'il avait commencé avec Bridges, continuateur de Bishop (voir [Bridges–Demuth 1991]).

Définition des nombres réels constructifs

En analyse classique, les nombres réels sont définis principalement de trois manières différentes équivalentes entre elles : les suites de Cauchy ; les coupures de Dedekind ; et les développements infinis en base b (où $b \in \mathbb{N}$ et $b > 1$) dont les chiffres sont dans $\{0, \dots, b-1\}$.

Constructivement, ces méthodes ne sont plus équivalentes. Seule la première méthode se transpose constructivement et permet de développer une analyse mathématique constructive. Rappelons que cette méthode repose sur un processus de complétion de l'ensemble des rationnels par les suites de Cauchy. Classiquement, une *suite de Cauchy* $\{r_n\}$ est une suite de rationnels vérifiant la propriété suivante

$$\forall u \; \exists n \; \forall p, q \quad \big(p, q \geq n \Rightarrow |r_p - r_q| < 2^{-u}\big).$$

L'interprétation constructive des formules conduit à la définition constructive

$$\exists \nu \; \forall u, p, q \quad \big(p, q \geq \varphi_\nu(u) \Rightarrow |r_p - r_q| < 2^{-u}\big)$$

où la fonction r est un algorithme de Markov défini sur les entiers et à valeurs dans l'ensemble des rationnels. La fonction φ_ν est appelée *module de convergence* de la suite $\{r_n\}$.

Il convient de remarquer que la construction de $\mathbb{N}$ et des rationnels ne pose pas de problème constructivement. Les entiers sont considérés comme des mots sur un alphabet fixé, par exemple $\{0, 1\}$: 0 est un entier et si n est un entier, $n1$ est un entier.

Les rationnels sont alors définis sur un alphabet plus gros de façon à coder des couples d'entiers et l'indication d'un signe. La définition des opérations usuelles sur les entiers et les rationnels n'offre pas de difficulté majeure.

Un codage des couples d'entiers étant fixé[23], soit $\langle u, v \rangle$:

Le nombre $\langle u, v \rangle$ est un réel si et seulement si φ_u est une suite de rationnels et si φ_v est un module de convergence de φ_u.

[23] Une autre remarque sur les notations : afin de rendre l'exposé le plus lisible possible, nous avons choisi d'appliquer la règle selon laquelle le contexte permettra toujours de lever les éventuelles ambiguïtés. En effet, Markov note ses algorithmes par des lettres gothiques majuscules affectées en indice supérieur du rappel de l'alphabet sur lequel ils sont définis. Nous avons choisi une notation plus proche des notations habituelles qui devrait faciliter la compréhension.

L'entier x désignant un réel $\langle u, v\rangle$, on pose $x_n = \varphi_u(n)$ et $\bar{x}_n = \varphi_v(n)$. On pose alors $\widehat{x}_n = x_{\bar{x}_{n+3}}$ et on appellera *suite canonique* de x la suite $\{\widehat{x}_n\}$. On supposera en outre que le module de convergence est une fonction croissante (au sens large) de n.

Opérations et relations sur les nombres réels

On définit sans difficulté l'addition et la soustraction de deux réels x et y ainsi que la valeur absolue d'un réel, puisque $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

La multiplication est un peu moins immédiate. Il suffit de remarquer que par définition de la suite canonique, on a $|x_m - \widehat{x}_0| < 1$ pour tout $m \geq \bar{x}_3$, de sorte qu'on trouve aisément un entier k tel que 2^k majore tous les x_n et tous les y_n pour tout indice n puisqu'il suffit de majorer les $|x_m| + 1$ et les $|y_m| + 1$ pour $m \leq \max(\bar{x}_3, \bar{y}_3)$.

La division par un nombre non nul est définie par le biais de la multiplication par l'inverse de ce nombre. Le calcul de l'inverse pose le problème de la minoration de la valeur absolue d'un nombre non nul. Mais qu'est-ce qu'un nombre réel non nul ?

Reprenant les définitions classiques, on pose

$$\begin{array}{lll} x > y & \text{si} & \exists\, u, m\ \forall\, p\ (p \geq m \Rightarrow x_p - y_p > 2^{-u}), \\ x \leq y & \text{si} & \neg(y > x), \\ x = y & \text{si} & x \leq y \text{ et } y \leq x, \\ x \neq y & \text{si} & \neg(x = y). \end{array}$$

En revenant à la définition de la suite canonique d'un nombre réel, on obtient une formulation plus simple de ces relations

$$\begin{array}{lll} x > y & \text{si} & \exists\, u\ (\widehat{x}_u - \widehat{y}_u > 2^{-u}), \\ x \leq y & \text{si} & \forall u\ (\widehat{x}_u - \widehat{y}_u \leq 2^{-u}), \\ x = y & \text{si} & \forall u\ (|\widehat{x}_u - \widehat{y}_u| \leq 2^{-u}), \\ x \neq y & \text{si} & \exists\, u\ (|\widehat{x}_u - \widehat{y}_u| > 2^{-u}). \end{array}$$

Il résulte alors du principe de Markov, que les relations $\langle\, , \rangle$ et $\neq$ sont récursivement énumérables, c'est-à-dire que, pour chacune d'elle, il existe un algorithme de Markov qui, appliqué au couple de réels considérés, donne 1 si la relation est satisfaite et ne donne pas de résultat dans le cas contraire. Markov dit encore que les relations sont *vérifiables*[24]. A noter

[24] Le terme *vérifiable*, en russe *proverjaemyj*, est utilisé dans la littérature en langue russe comme synonyme de *récursivement énumérable*. Il nous semble que cet usage mériterait d'être généralisé, d'autant que *décidable*, en russe *razreshimyj*, est utilisé partout comme synonyme de *récursif*.

que *décidable* implique *vérifiable*, mais que la réciproque est fausse, en général.

Nous voyons donc que si un nombre réel x n'est pas nul, on peut alors calculer un minorant rationnel r de son module avec $r > 0$, de sorte qu'on peut d'une part définir x^{-1} par la suite des inverses x_n^{-1}, et le module de convergence s'obtient en prenant une translation assez grande de $\bar{x}$ que l'on calcule à l'aide de r puisque $|x_n^{-1} - x_m^{-1}| \leq r^{-2}|x_n - x_m|$.

On peut également définir d'autres opérations élémentaires comme le min, le max, l'élévation d'un réel positif à une puissance réelle.

Intuitivement, on voit que l'inégalité sur $\mathbb{R}$ est vérifiable puisqu'il suffit d'attendre le plus petit u tel que $|\widehat{x}_u - \widehat{y}_u| > 2^{-u}$ mais que l'égalité, par contre, n'est pas vérifiable, car il faudrait avoir vérifié l'infinité des relations $|\widehat{x}_u - \widehat{y}_u| \leq 2^{-u}$. La démonstration formelle n'est pas très difficile.

Soit u_n le plus petit entier y tel que $A(n, n, y) = 0$ lorsque $!\varphi_n(n)$. On pose alors

$$w_{n,m} = \begin{cases} 2^{-m} & \text{si } A(n,n,m) = 1, \\ 2^{-u_n} & \text{si } A(n,n,m) = 0. \end{cases}$$

La fonction $n \mapsto n + 1$ est un module de convergence commun aux suites $\{w_n\}$ de sorte qu'un algorithme de décision pour $(x = 0) \vee (x \neq 0)$ permet de décider si $n \in K$ ou $n \notin K$. Or nous avons vu précédemment que cela n'est pas décidable. Donc

$$\neg \forall x \quad (x = 0 \vee x \neq 0).$$

Ce qui s'énonce : *l'égalité sur* $\mathbb{R}$ *est indécidable.*

On constate là une différence cruciale entre l'analyse de Markov et l'analyse classique. Mais l'école de Markov se distingue là aussi de l'intuitionnisme et de l'école de Bishop car pour ces deux derniers courants, ni l'égalité ni l'inégalité sur $\mathbb{R}$ ne sont vérifiables. En effet, la borne rationnelle strictement positive obtenue pour minorer la valeur absolue d'un nombre réel non nul résulte d'une application essentielle du principe de Markov.

L'intuitionnisme ne peut cependant pas donner d'exemple *simple* de réel a pour lequel on ait $\neg\,(a = 0)$ et pour lequel on ne sache pas produire d'entier n tel que pour pour tout m, $|a_{n+m}| > 2^{-n}$.

Donnons la façon dont Brouwer (voir [Heyting 1956/1971, p. 120]), construit un tel a : ω_i est, pour chaque $i \geq 1$ un ensemble fini d'assertions mathématiques et on pose $\sigma_n = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i$. Soit maintenant $\boldsymbol{p}$ une assertion mathématique. Si σ_n ne contient ni $\neg\boldsymbol{p}$ ni $\neg\neg\boldsymbol{p}$, on pose $a_n = 2^{-n}$. Sinon, $a_n = 2^{-m}$ où m est le premier indice k pour lequel σ_k contient $\neg\boldsymbol{p}$ ou $\neg\neg\boldsymbol{p}$. Les ω_i représentent intuitivement ce qui est démontré au temps i. Brouwer dit qu'en prenant pour $\boldsymbol{p}$ un problème non résolu, on ne peut indiquer de n tel que pour tout m, $|a_{n+m}| > 2^{-n}$. Par contre, dit-il, on a $\neg(a = 0)$ car sinon, $\neg\boldsymbol{p}$ et $\neg\neg\boldsymbol{p}$ sont indémontrables et donc $\neg\neg\boldsymbol{p}$ et $\neg\neg\neg\boldsymbol{p}$ sont simultanément vrais, ce qui est impossible.

Objection, écrit Markov : «*Si on considère le "générateur de nombre" a (passons sur le fait même de le faire), alors de l'égalité* $a = 0$ *il découle seulement que ni la proposition* $\neg\boldsymbol{p}$ *ni la proposition* $\neg\neg\boldsymbol{p}$ ne seront jamais démontrées. *Mais ceci ne veut pas du tout dire qu'elles sont* indémontrables. *Il est tout à fait concevable que l'une de ces deux propositions soit même assez facilement démontrable, mais que l'humanité trouvera toujours des choses plus importantes à faire que d'en chercher la démonstration. C'est pourquoi je ne peux pas considérer comme fondée l'inégalité* $a \neq b$.

Au demeurant, je suis ici sorti des limites de mon domaine»[1965, p. 192][25].

Propriétés topologiques classiques constructives

La droite réelle constructive a des propriétés topologiques qu'elle partage avec la droite réelle classique. La première de ces propriétés est la *complétude*. On définit les *suites de Cauchy de nombres réels* de la même façon que les suites de Cauchy de nombres rationnels. On dira donc que l'entier u définit une suite de Cauchy de nombres réels si et seulement si pour tout n, $\varphi_u(n)$ est un réel et si

$$\forall n\ \exists m\ \forall p, q\ \big(p, q \geq m \Rightarrow |\varphi_u(p) - \varphi_u(q)| < 2^{-n}\big)$$

ce qui, constructivement, se lit

$$\exists\, v\ \forall n, p, q\ \big(p, q \geq \varphi_v(n) \Rightarrow |\varphi_u(p) - \varphi_u(q)| < 2^{-n}\big).$$

On dit alors qu'une suite u de réels est *convergente* si on peut construire un réel x appelé *limite* de la suite et un entier v tels que

$$\forall n, p\ \big(p \geq \varphi_v(n) \Rightarrow |\varphi_u(p) - x| < 2^{-n}\big).$$

[25] Le texte cité ici est extrait de la traduction que j'ai faite de ses commentaires au livre de Heyting, traduction non encore publiée à ce jour.

On dit que la fonction φ_v est un *module de convergence* de la suite u vers x. Par abus de langage, on appellera également v module de convergence.

Comme en analyse classique, on démontre que la limite d'une suite convergente est unique, à égalité près. Une suite convergente est évidemment une suite de Cauchy : si v est le module de convergence de la suite vers sa limite, $n \mapsto \varphi_v(n+1)$ est un module pour la suite de Cauchy.

On peut construire un algorithme Lim *qui, appliqué à une suite de Cauchy u de nombre réels et à un module v de la suite, fournit un réel constructif x vers lequel cette suite converge, v étant également un module de convergence de la suite u vers x.*

On en déduit immédiatement, comme dans le cas classique, que la droite réelle constructive est un espace topologique *séparable* puisque les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$ par construction.

Si on regarde un instant ces objets d'un point de vue classique, puisqu'un réel constructif est défini par un entier, la droite réelle constructive est donc dénombrable. Constructivement, la notion correspondant à la dénombrabilité est l'*énumérabilité*. Or, le raisonnement de Cantor permettant de démontrer que $\mathbb{R}$ classique n'est pas dénombrable se traduit constructivement presque *mutatis mutandis* de sorte que $\mathbb{R}$ constructif n'est pas énumérable, c'est-à-dire que les points de la droite réelle constructive ne peuvent pas être obtenus comme les valeurs d'un algorithme de Markov sur les entiers.

Dernière propriété importante par laquelle nous terminerons cette liste de propriétés analogues à celles de l'analyse classique : la propriété de borne supérieure pour les ensembles de réels *totalement bornés*. Un ensemble E de réels est dit totalement borné s'il est non vide et si, pour tout n, on peut construire une suite *finie* de points de E soit $u_{1,n}, \ldots, u_{k_n,n}$ tels que pour tout x dans E, on puisse indiquer un entier j tel que $|u_{j,n} - x| < 2^{-n}$. Cette dernière propriété doit également être interprétée constructivement : on peut construire un entier a_n tel que pour tout point x de l'ensemble E on ait $|u_{\varphi_{a(n)}(x),n} - x| < 2^{-n}$. Dans ces conditions, l'ensemble E admet une borne supérieure (ainsi qu'une borne inférieure). Il suffit de considérer la suite des réels w_n définis par $w_n = \max\{u_{i,n}\,;\ 1 \leq i \leq k_n\}$. L'identité fournit alors un module de convergence pour cette suite dont il est aisé de constater que c'est une suite de Cauchy.

Un cas particulier important de parties totalement bornées de la droite réelle constructive est celui des intervalles bornés non vides. La démonstration est assez facile à partir de la propriété suivante : bien que l'on ait $\neg\forall x,\ y\ (x \leq y \ \vee\ y \leq x)$, on a constructivement $a < b \Rightarrow \forall x\ (x > a \ \vee\ x < b)$. En effet, $x \leq a$ *et* $x \geq b$ est évidemment impossible. Par conséquent, on en déduit $\neg\neg(x > a \ \vee\ x < b)$. Or, l'inégalité est vérifiable d'après le principe de Markov. Donc une des deux inégalités au moins $x < b$ ou $x > a$ pourra être constatée[26]. On peut donc, à partir de là prendre une division rationnelle de l'intervalle (a, b) et raisonner presque classiquement. Au lieu de dire que tout point se trouvera dans un intervalle $[u_i, u_{i+1}]$ de la division, on pourra dire que tout point est dans un intervalle $[u_i, u_{i+2}]$, ce qui suffit pour obtenir que l'intervalle (a, b) est totalement borné.

Propriétés topologiques classiques non constructives

Nous savons déjà que l'égalité entre deux réels est indécidable. De la démonstration que nous avons faite du caractère totalement borné des intervalles finis non vides de $\mathbb{R}$, nous déduisons qu'on ne peut pas construire d'algorithme calculant la partie entière d'un réel. On pourra, pour tout x, construire un n tel que $n \leq x \leq n + 2$, mais on ne pourra pas, en général, obtenir n tel que $n \leq x < n + 1$.

Ceci a pour conséquence qu'on ne peut pas représenter les réels constructifs par un développement en base b, avec $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, dont les chiffres sont dans $\{0, \ldots, b - 1\}$. On pourra en fait le faire pour certains réels, par exemple ceux dont on sait qu'ils sont irrationnels, tels les nombres e ou π, mais on ne pourra pas le faire pour d'autres.

En fait, on a une propriété plus forte : il peut ne pas exister d'algorithme permettant de passer de la représentation dans une base à la représentation dans une autre base. C'est ce que précise le théorème suivant dû à Mostowski [1957] et à Uspenskij [1960] :

Soient b et c deux entiers > 1. Il existe un algorithme transformant tout développement a en base b en un développement d en base c tels que l'on ait, dans $\mathbb{R}$

[26] Le principe de Markov n'est pas indispensable lorsque a et b sont rationnels : en considérant $\widehat{x}_n$ pour n tel que $2^{-n+1} < b - a$, une des deux inégalités au moins $\widehat{x}_n < b$ ou $\widehat{x}_n > a$ pourra être constatée d'où l'indication explicite de l'une des deux inégalités $x < b$ ou $x > a$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n b^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} d_n c^{-n}$$

si et seulement si tout diviseur premier de c divise b.

On peut donc passer algorithmiquement de la base dix à la base deux, mais pas de la base deux à la base dix.

Il est assez facile de voir que la condition sur les diviseurs premiers assure en fait que les points de la division de $[0,1]$ en b^N parties égales sont aussi des points de la division de $[0,1]$ en c^M parties égales pour un M assez grand. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, la démonstration de l'impossibilité d'un algorithme de conversion est assez semblable à la démonstration que nous avons donnée de l'indécidabilité de l'égalité. On ne peut donc, constructivement, construire les réels par les développements infinis dans une base b fixée. On peut regarder ceci d'une autre manière : si on définit les réels constructifs de cette façon, on ne pourra plus les additionner librement, par exemple.

On se souvient qu'en analyse classique, il existe une troisième façon de définir les entiers : par les coupures de Dedekind. Cette notion repose sur une généralisation à tout ensemble borné de $\mathbb{R}$ de la propriété de borne supérieure. Or, cette propriété n'est plus vraie constructivement. Un exemple de suite de rationnels bornée mais ne convergeant, constructivement, vers aucune limite a été construit par Specker [1949], dans le cadre de l'analyse récursive[27]. Sa construction se transpose sans difficulté en termes d'algorithmes de Markov. Par conséquent, on ne peut pas non plus définir les réels constructivement par les coupures de Dedekind.

Une autre propriété topologique de la droite réelle classique qui n'est pas constructive est le théorème de Heine-Borel. On peut construire une suite de fermés non vides F_n de l'intervalle $[0,1]$, telle que $F_{n+1} \subset F_n$ et dont l'intersection soit vide (résultat de Zaslavskij [1962, p. 428], voir [Kushner 1973]).

On observe ainsi que deux définitions classiquement équivalentes de la *compacité*, à savoir la propriété de Heine-Borel et la propriété de complétude avec caractère totalement borné, ne sont plus équivalentes constructivement mais que l'une de ces deux propriétés reste vraie pour les segments de $\mathbb{R}$. À noter que, dans l'analyse de Markov, la compacité *séquentielle* (on se restreint à des recouvrements *dénombrables*

[27] Pour Specker, il s'agissait donc de trouver une suite croissante bornée dont la limite ne soit pas un réel récursif.

d'ouverts) n'est pas vraie non plus. Ceci constitue aussi une différence avec l'intuitionnisme dans lequel le théorème de l'éventail permet de prouver une forme faible de la compacité séquentielle (l'intuitionnisme ajoute des hypothèses topologiques sur les ouverts qui sont trivialement vérifiées par le contre-exemple de Zaslavskij).

Propriétés topologiques constructives spécifiques

La droite réelle constructive a, en revanche, des propriétés constructivement vraies mais qui ne le sont pas dans l'analyse classique.

Elles reposent sur la notion de *recouvrement singulier* introduit par Cejtin et Zaslavskij [1962, p. 465–476].

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on peut construire une suite $\{[u_n, v_n]\}$ de segments fermés de $\mathbb{R}$ avec $u_n < v_n$, d'intérieurs deux à deux disjoints, ainsi que deux algorithmes i et j sur les réels[28] *tels que pour tout réel x :*

(i) $v_{i(x)} = u_{j(x)}$;

(ii) $u_{i(x)} \leq x \leq v_{j(x)}$;

(iii) $\sum\limits_{n\geq 0} (v_n - u_n) < 2^{-k}$.

Ceci pourrait accréditer l'idée que si les réels constructifs ne sont pas énumérables, leur dénombrabilité première est à l'origine de ce type de propriété puisqu'il est bien connu que toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ classique est de mesure nulle.

La propriété suivante devrait convaincre le lecteur de ce que la droite réelle constructive n'est pas de mesure *constructivement* nulle :

Soit $\{F_n\}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ telle que $\sum\limits_{n\geq 0} |F_n| \leq 2^{-k}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $2^{-k} < y - x$. Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |F_n|$ est convergente, on peut alors trouver $z \in [x, y]$ tel que pour tout z on ait $z \notin F_n$.

3.2 Les fonctions réelles constructives d'une variable réelle

La définition d'une fonction d'une variable réelle va conduire à un objet théorique ayant des propriétés tout à fait surprenantes. Nous en donnons tout d'abord la définition pour que le lecteur puisse en juger par lui-même.

Définition des fonctions constructives d'une variable réelle

Bien sûr, la variable réelle que nous considérons est également supposée

[28] C'est-à-dire sur les entiers qui sont des codes de nombres réels.

constructive. Nous avons choisi de ne pas alourdir les énoncés en accumulant le mot *constructif* que nous rappelons de temps en temps pour que le lecteur n'oublie pas qu'il s'agit d'une analyse différente de celle qui lui est familière.

Une *fonction constructive d'une variable réelle* sera donc pour nous, en premier lieu, un algorithme qui transforme les réels[29] auxquels il s'applique en réels[30]. Mais on demande beaucoup plus. On demande, en effet, que si la fonction s'applique à x, elle s'applique aussi à tous les réels w égaux à x et que le résultat alors trouvé $f(w)$ soit égal dans $\mathbb{R}$ au résultat $f(x)$ trouvé pour x. Ceci s'exprime par la formule suivante, où f désigne un algorithme de Markov et où $=$ est l'égalité dans $\mathbb{R}$ telle que nous l'avons définie

$$\forall x\ \Big(\big(x \in \mathbb{R}\ \&\ !\, f(x)\big) \Rightarrow \\ \big(\forall w\ ((w \in \mathbb{R}\ \&\ x = w) \Rightarrow (\,!f(w)\ \&\ f(w) = f(x)))\big)\Big).$$

Cette condition de stabilité du domaine de définition d'une fonction et de son image par rapport à l'égalité entre nombre réels est appelée *fidélité* dans l'analyse de Markov.

Cette définition est en elle-même surprenante à plusieurs égards. Tout d'abord, elle épouse de si près la définition traditionnelle d'une fonction ponctuelle qu'elle paraîtra naturelle au lecteur habitué à l'analyse classique. Ensuite, et là réside le miracle, en un certain sens toutes les fonctions de l'analyse élémentaire connues pour être effectivement calculables satisfont à la contrainte très forte imposée par la fidélité des fonctions : il en est ainsi des opérations élémentaires que nous avons vues, mais aussi des fonctions exponentielle et logarithme, des fonctions trigonométriques, des fonctions hyperboliques, des fonctions de Gauss, de Bessel, en un mot, de *toutes* les fonctions effectivement calculables par ordinateur. Il n'y avait donc pas vraiment d'autre choix possible dans l'optique des fonctions définies point par point.

La force de l'hypothèse de fidélité ne tardera pas à se manifester et l'analyse de Markov retrouvera, avec ses spécificités, ce que l'analyse

[29] Voir la note précédente.

[30] L'algorithme peut vérifier que le code obtenu y vérifie bien la syntaxe des codes de réels, mais il ne peut évidemment pas vérifier que chaque y_n est bien un rationnel et encore moins s'assurer que $n \mapsto \overline{y}(n)$ régule quoi que ce soit.

récursive avait préfiguré dans les années cinquante par les travaux de Goodstein [1961], Grzegorczyk [1957], Kreisel [1957, 1959], Lacombe [1957] et Specker [1959][31] dans une autre direction, celle d'une fonction répondant à un degré d'approximation de la donnée par un degré d'approximation du résultat, ce qui est une expression de la continuité[32].

La continuité des fonctions constructives d'une variable réelle

Markov démontra tout d'abord, dans [1954b], un théorème de non-discontinuité, qui est un résultat plus faible :

Si f est une fonction constructive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et si x est un réel tel que $!\,f(x)$, alors f n'admet pas de discontinuité constructive en x,
où on dit que f admet une *discontinuité constructive* en x si et seulement si $!\,f(x)$ et s'il existe une suite x_n de réels et un entier u tels que

$$\begin{aligned}&\forall n \;\; !\,f(x_n),\\ &\forall n \;\; |x_n - x| < 2^{-n},\\ &\forall n \;\; \big|f(x_n) - f(x)\big| \geq 2^{-u}.\end{aligned}$$

La démonstration de cet énoncé est très simple et repose sur l'argument utilisé pour démontrer que l'égalité sur $\mathbb{R}$ n'est pas décidable.

Classiquement, l'absence de discontinuité au sens défini ci-dessus équivaut à la continuité séquentielle. Mais, comme le lecteur le sait déjà, ceci n'engage en rien l'analyse constructive. On pourrait même penser que c'est plutôt mauvais signe mais, pour une fois, on se tromperait : la propriété de continuité séquentielle est vraie pour les fonctions constructives d'une variable réelle.

La chose est évidemment bien plus compliquée que l'application d'une simple règle de logique sur la négation des quantificateurs puisqu'il faut

[31] Rappelons que l'analyse récursive ne remet pas en cause l'analyse classique. Partant des nombres réels classiques, elle s'intéresse à ceux d'entre eux qui possèdent des propriétés de récursivité. En particulier, la notion de continuité définie dans ce cadre à l'aide de la notion d'*oracle* conduit à un théorème de continuité uniforme, comme dans le cas de l'intuitionnisme.

[32] Des suites de rationnels qui ne sont pas nécessairement récursives peuvent produire un résultat aussi approché qu'on le désire pour peu qu'on dispose d'une information sur le degré d'approximation de la suite elle-même. Dans cette optique, on demande seulement que la correspondance entre la suite et le résultat du calcul soit algorithmique. Intuitivement, c'est ce qui explique qu'on obtienne la continuité uniforme dans ce contexte.

exhiber un module de continuité constructif (la formule de définition de la continuité étant de la forme $\forall\epsilon\ \exists\,\eta$). En fait, c'est une conséquence du théorème de continuité *forte* suivant (Cejtin [1962a]) :

Si f est une fonction constructive d'une variable réelle, f est continue en chaque point où elle est définie. C'est-à-dire que pour tout point x tel que $!\,f(x)$, on sait construire un algorithme φ_v défini sur les entiers et tel que

$$\forall\, n, y\ \ \big(!\, f(y)\ \&\ |y-x| < 2^{-\varphi_v(n)} \Rightarrow \big|f(y)-f(x)\big| < 2^{-n}\big).$$

Propriétés classiques constructives des fonctions

Après la notion de fonction continue, on attend celle de dérivée, de fonction dérivable et de fonction dérivée. Le lecteur voit maintenant comment on définit ces notions en analyse constructive, de sorte que nous ne les donnons pas. Ce que nous recensons, ici, ce sont les résultats d'analyse constructive dont les énoncés restent pratiquement identiques aux énoncés classiques correspondants.

Un important théorème, constructivement vrai, est le théorème des accroissements finis sous la forme suivante :

Si f est une fonction constructive d'une variable réelle définie et dérivable en tout point de $[a, b]$, avec $a < b$ et si C majore le module de la dérivée en chaque point, alors $|f(a) - f(b)| \leq C\,|b-a|$.

De la même manière qu'en analyse classique, on en déduit les développements limités des fonctions de classe C^k et les développements en série entière des fonctions usuelles dans les domaines considérés habituellement, car les théorèmes usuels de convergence uniforme sont constructivement vrais et les modules de convergence uniforme pour les développements en série des fonctions usuelles se calculent assez facilement.

On déduit ainsi la propriété annoncée au début de cette section sur le caractère *constructif* des fonctions usuelles effectivement calculées et tabulées. Ceci a une conséquence méthodologique importante : les différences entre l'analyse classique et l'analyse de Markov portent sur les objets *abstraits* de la théorie et non sur les objets *concrets* débouchant sur un calcul *effectif*.

Un autre grand théorème de l'analyse classique est constructivement vérifié : l'approximation des fonctions uniformément continues par des polynômes à coefficients réels. Enfin, un exemple de domaine qui subsiste constructivement pour l'essentiel, est celui de l'intégrale de Riemann.

On obtient, comme en analyse classique, l'intégrabilité des fonctions uniformément continues sur un intervalle fini de $\mathbb{R}$, et la différentiabilité de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, avec $x \in [a,b]$, la fonction f étant supposée ici uniformément continue sur $[a,b]$.

La tératologie constructive

Un nombre important de théorèmes de l'analyse classique cessent d'être vrais dans l'analyse de Markov. Pour certains d'entre eux, la raison en est directement l'indécidabilité de l'égalité sur $\mathbb{R}$.

Il en va ainsi pour le théorème des valeurs intermédiaires d'une fonction continue sur un segment. Un contre-exemple facile à ce théorème, dû à Cejtin [1962a], en est donné par la fonction

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(\left|x - \frac{2}{3}\right| - \left|x - \frac{1}{3}\right| + 2x - 1\right),$$

évidemment constructive. Cette fonction est linéaire par morceaux sur $[0,1]$, elle vaut 0 sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et elle est de pente 3 en dehors de cet intervalle. Si le théorème des valeurs intermédiaires était vrai, on pourrait décider de l'inégalité $(y \leq 0) \vee (y \geq 0)$ sur l'intervalle $[-1,1]$ en cherchant, pour un x fourni par ce théorème tel que $f(x) = y$, laquelle des deux inégalité strictes $x < \frac{2}{3}$ et $x > \frac{1}{3}$ est réalisée, puisque nous savons que, constructivement, l'une des deux, au moins, doit l'être.

En conséquence, le théorème de Rolle n'est plus vrai constructivement, et il en est de même pour la forme $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ du théorème des accroissements finis. Mais le plus spectaculaire est sans doute que parmi les théorèmes sur les fonctions continues sur un segment, un des points clés de l'analyse classique, aucun d'entre eux n'est vrai constructivement.

Avant de donner les contre-exemples d'une frange particulière de fonctions constructives, soulignons que l'analyse de Markov se démarque là aussi des autres courants constructifs. En effet, pour l'intuitionnisme les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ sont uniformément continues, comme nous l'avons indiqué au début de cette étude. Cependant, selon ce point de vue, ces fonctions sont non seulement bornées, ce qui résulte nécessairement de la continuité uniforme, mais encore elles admettent une borne supérieure et une borne inférieure sur le segment $[0,1]$.

L'analyse de Markov sait produire des «monstres» qui mettent en défaut les théorèmes familiers sur les fonctions continues. Elle produit ainsi une fonction continue sur $[0,1]$ qui est non bornée ; une fonction continue et bornée qui n'est pas uniformément continue (ni même sur aucun sous-intervalle de $[0,1]$) ; une fonction uniformément continue qui n'a pas de borne supérieure ; une fonction uniformément continue qui a une borne supérieure sur $[0,1]$ mais qui ne l'atteint nulle part (exemple dû à Cejtin et Zaslavskij [1962]).

Nous donnerons simplement la construction d'une fonction non bornée. Elle part d'un recouvrement singulier de l'intervalle $[0,1]$, soit $\{[a_n, b_n]\}$, avec $a_n < b_n$. On définit pour chaque n une fonction f_n continue, nulle hors de $[a_n, b_n]$, linéaire par morceaux et valant 1 en $\frac{1}{2}(a_n+b_n)$. L'exemple cherché est fourni par la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 0} n f_n(x)$, puisqu'on vérifie aisément qu'au plus une seule des fonctions f_n ne s'annule pas[33] en x.

Nous appellerons *fonction polygonale* une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ linéaire par morceaux, les points de discontinuité de la dérivée étant rationnels et la dérivée de la fonction étant rationnelle en chaque point où elle est définie.

On démontre le théorème suivant, dans l'analyse de Markov (voir [Cejtin 1964]) : *Toute fonction constructive d'une variable réelle définie sur* $\mathbb{R}$ *ou sur un intervalle fermé borné est une limite simple de fonctions polygonales ayant le même domaine de définition.*

On obtient donc une caractérisation structurale simple des fonctions constructives d'une variable réelle. À noter que cette caractérisation est typique de l'analyse de Markov. Elle n'est pas vraie classiquement où, dans le cas d'une fonction continue sur un segment, on peut approcher la fonction par une suite de fonctions polygonales uniformément convergente. L'exemple de la fonction non bornée sur $[0,1]$ donné précédemment montre qu'on ne peut pas renforcer la conclusion de convergence simple dans le théorème constructif.

[33] En analyse récursive, où les constructions de Markov ont un sens, elles reçoivent une interprétation différente puisque dans cette analyse les résultats classiques restent vrais. Au demeurant, dans plusieurs cas, les contre-exemples ont d'abord été trouvés dans l'analyse récursive. Dans le cadre récursif, la fonction non bornée produite ici est un exemple de fonction définie sur les réels récursifs qui ne se prolonge pas continûment aux réels non-récursifs. De même, une fonction uniformément continue qui n'atteint pas sa borne chez Markov sera vue en récursivité comme une fonction uniformément continue dont la borne n'est pas un réel récursif.

4. CONCLUSIONS

L'école constructive de Markov n'existe plus en tant qu'école scientifique structurée. Pourtant, elle laisse une trace indéniable. En logique, notamment, où le principe de Markov a fait l'objet d'études de plusieurs chercheurs. L'analyse qu'elle a produite a sans doute mis à jour un phénomène important. En effet, le théorème de représentation des fonctions constructives d'une variable réelle par les fonctions polygonales telle que nous les avons définies trouve un écho dans les recherches menées actuellement sur les fonctions calculables en ligne par un automate fini.

Les fonctions calculables en ligne

Ces fonctions sont nées de la modélisation, proposée par Jean-Michel Muller de l'École normale supérieure de Lyon, d'un schéma d'implantation dans une puce d'algorithmes de calcul sur les nombres réels, (voir [Duprat *et al.* 1989]).

On considère au départ la puce comme une boîte noire dans laquelle entrent autant de fils que d'arguments pour la fonction à calculer. Un fil sort de la puce pour le résultat. Les données se présentent sous forme de signaux 0 ou 1 qui arrivent le long des fils de façon synchrone et le résultat est également produit sous la même forme présentant éventuellement un décalage avec les signaux d'entrée.

On s'intéresse alors plus précisément au fonctionnement de la boîte noire et au décalage entre entrées et sortie. On peut, par exemple, supposer que la boîte noire est un automate fini. Dans ce cas, Jean-Michel Muller [1991] a établi le résultat suivant :

Une fonction de classe C^2 par morceaux est calculable en ligne par un automate fini si et seulement si cette fonction est linéaire par morceaux, les coefficients étant rationnels ainsi que les points de discontinuité de la dérivée.

Des recherches sont actuellement en cours pour étudier les liens entre l'analyse de Markov et les fonctions calculables en ligne. Affaire à suivre, donc.

Remarques méthodologiques

Nous terminerons cette étude par deux remarques plus méthodologiques.

La première concerne la notion d'*algorithme informel.* Il est intéressant de remarquer que les considérations de Markov sont toujours explicitement exprimées dans la perspective de l'exécution d'un algorithme non par une machine mais par un être humain quelconque. L'abstraction de la réalisabilité potentielle est elle aussi rapportée aux ressources de l'opérateur, comme en témoigne de façon éloquente la définition qu'en donne Markov :

«*Elle consiste en l'abstraction des bornes réelles que fixe à nos capacités constructives la finitude de notre vie dans l'espace et dans le temps*» [1954a, p. 15].

On ne peut pas ne pas faire le parallèle avec le fait suivant : le *computer* dont parle Turing [1936, p. 250 *sqq.*] est un *être humain* puisque dans son article fondamental de 1936, cet auteur ne pouvait pas parler d'une autre sorte de calculateur[34].

La seconde remarque concerne une explication que donne Markov aux résultats d'insolubilité algorithmique démontrés depuis 1936. En effet, dans son analyse de la notion d'algorithme, Markov souligne une propriété particulière à cette notion, à savoir de porter sur une *famille* de problèmes. Ainsi le but de l'algorithme d'Euclide n'est pas seulement de trouver le pgcd de 36 et 45, mais de trouver celui de n et m entiers naturels donnés mais quelconques. Un algorithme est donc une solution *générale* pour une classe de problèmes, donnant une méthode *uniforme* applicable à chaque instance extraite de la masse des données possibles. Markov insiste particulièrement sur l'*effet de nombre* et voit en lui la cause de problèmes algorithmiquement insolubles, un peu comme si les données se vengeaient dès qu'elles le pouvaient, du traitement uniforme qu'un algorithme leur fait subir.

Si on observe cela de plus près, on constate que dans la mise en œuvre d'un algorithme, on n'utilise pas, en général, toute l'information que les données contiennent : ceci est confirmé par les théorèmes de continuité disant qu'un algorithme sur les nombres réels ne peut en fait travailler que sur une partie finie, bornée à l'avance, des données. Un algorithme n'utilise que ce qui crédite la donnée de son appartenance à une certaine classe d'objets, ce qui est aussi un aspect de l'uniformité. L'algorithme

[34] Le texte de l'article ne peut laisser aucun doute dans l'esprit d'un lecteur d'aujourd'hui sur le sens du mot *computer*. Ainsi, après l'analyse de l'état d'esprit du *computer* (*state of mind* dans l'article), Turing conclut : « *We may now construct a machine to do the work of this computer*» [1936, p. 251]

n'utilise pas le fait qu'il s'agit de telle donnée plutôt qu'une autre de la classe considérée, surtout lorsque la classe est infinie.

Remerciements

L'auteur remercie Jean-Paul Delahaye pour son invitation à parler sur ce sujet à la journée du 9 novembre 1993 qu'il a organisée avec l'Association Henri Poincaré H.P.M.P. sur *Calculabilité, décidabilité, complexité : présentation et analyse de quelques résultats*, ce qui est à la source de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

Bernays (P.), Hilbert (D.)
[1934] *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Berlin : Springer, 1934; 2e éd., 1968.

Bishop (E.)
[1967] *Foundations of constructive analysis*, New York : McGraw-Hill, 1967.

Bridges (D.), Demuth (O.)
[1991] On the Lebesgue measurability of continuous functions in constructive analysis, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 24 (1991), p. 259–276.

Cejtin (G.S.)
[1962a] Algorifmicheskie operatory v konstruktivnykh metricheskikh prostranstvakh, *Trudy matematicheskogo Instituta Steklova*, 67 (1962), p. 295–361. Trad. angl., Algorithmic operators in constructive metric spaces, *American Mathematical Society Translations*, (2) 64 (1967), p. 1–80.
[1962b] Teoremy o srednem znachenii v konstructivnom analize, *Trudy mat. Inst. Steklova*, 67 (1962), p. 362-384. Trad. angl., Mean value theorems in constructive analysis, *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 98 (1971), p. 11–40.
[1964] Tri teoremy o konstructivnykh funkcijakh, *Trudy mat. Inst. Steklova*, 72 (1964), p. 537–543. Trad. angl., Three theorems on constructive functions, *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 100 (1972), p. 11–40.

Cejtin (G.S.), Zaslavskij (I.D.)
[1962] O singuljarnykh i svjazannykh s nimi svojstvakh konstruktivnykh funkcij, *Trudy mat. Inst. Steklova*, 67 (1962), p. 458–502. Trad. angl., On singular coverings and related properties of constructive functions, *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 98 (1971), p. 41–89.

Demuth (O.)
[1968] Integral Lebega i ponjatie izmerimosti funkcij v konstruktivnom analize, *Zapiski nauchrykh seminarov Leningradskogo otdelenija matematicheskogo Instituta Steklova*, 8 (1968), p. 21–28. Trad. angl., The Lebesgue integral and the concept of function measurability in constructive analysis, *Seminars in Mathematics Steklov Institute*, 8 (1970), p. 7–10.

Detlovs (V.K.)
[1958] Ekvivalentnost' normal'nykh algorifmov i rekursivnykh funkcij, *Trudy mat. Inst. Steklova*, 52 (1958), p. 75–139. Trad. angl., The equivalence of normal algorithms and recursive functions, *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 23 (1963), p. 15–81.

Duprat (J.), Herreros (Y.), Muller (J.-M.)
[1989] Some results about on-line computation of functions, *Rapport de Recherche L.I.P.*, École normale supérieure de Lyon, 89–04, 1989.

GLIVENKO (V.I.)

[1928] Sur la logique de M. Brouwer, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique. Classe des sciences*, (V) 14 (1928), p. 225–228.

[1929] Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, *Bull. Acad. r. Belg. Cl. sci.*, (V) 15 (1929), p. 183–188.

GOODSTEIN (R.L.)

[1961] *Recursive analysis*, Amsterdam : North-Holland, 1961.

GRZEGORCZYK (A.)

[1957] On the definitions of computable real continuous functions, *Fundamenta mathematicae*, 44 (1957), p. 61–71.

HEYTING (A.)

[1956] *Intuitionism. An introduction*, Amsterdam : North-Holland, 1956 ; 3e éd., 1971. Trad. russe, Moscou : Mir, 1965.

[1959] (éd.) *Constructivity in mathematics. Proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957*, Amsterdam : North-Holland, 1959.

KALMÁR (L.)

[1959] An argument against the plausibility of Church's thesis, dans [Heyting 1959, p. 72-80].

KLEENE (S.C.)

[1936a] General recursive functions of natural numbers, *Matematische Annalen*, 112 (1936), p. 727–742.

[1936b] A note on recursive functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 (1936), p. 544–546.

[1987] Reflections on Church's thesis, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28 (1987), p. 490–498.

KOLMOGOROV (A.N.)

[1925] O principe "tertium non datur", *Matematicheskij sbornik*, 32 (1925), p. 646–667. Trad. angl., On the principle of exclude middle, dans [van Heijenoort 1967, p. 414–437].

KREISEL (G.), LACOMBE (D.), SCHOENFIELD (J.R.)

[1957] Fonctionnelles récursivement définissables et fonctionnelles récursives, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 245 (1957), p. 399–402.

[1959] Partial recursive functionals and effective operations, dans [Heyting 1959, p. 290–297].

KRONECKER (L.)

[1887] Über den Zahlbegriff, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 101 (1887), p. 337–355 ; *Werke* III^1, Leipzig, 1899, p. 251–274.

KUSHNER (B.A.)

[1973] *Lekcii po konstruktivnomu matematicheskomu analizu*, Moskva : Nauka, 1973. Trad. angl., *Lectures on constructive mathematical analysis*, Providence : American Mathematical Society (Translations of Mathematical Monographs, vol. 60), 1984.

[1993] Markov and Bishop : an essay in memory of A.A. Markov (1903–1979) and E. Bishop (1928–1983), dans Zdravkovska (S.) et Duren (P.L.), éd., *Golden years of Moscow mathematics*, American Mathematical Society–London Mathematical Society (History of Mathematics, vol. 6), 1993, p. 179–197.

LACOMBE (D.)

[1957] Quelques propriétés d'analyse récursive, *C.R. Acad. sci. Paris*, 244 (1957), p. 838–840/996–997.

Largeault (J.)

[1992] *Intuitionisme et théorie de la démonstration. Textes de Bernays, Brouwer, Gentzen, Gödel, Hilbert, Kreisel, Weyl*, Paris : Vrin (Mathesis), 1992.

Markov (A.A.)

[1954a] Teorija algorifmov, *Trudy mat. Inst. Steklova*, 42 (1954). Trad. angl., *The theory of algorithms*, The Israel Program for Scientific Translations, 1961.

[1954b] O nepreryvnosti konstruktivnykh funkcij, *Uspekhi matematicheskikh nauk*, (IX) 3-61 (1954), p. 226–230.

[1956] Ob odnom principe konstruktivnoj matematicheskoj logiki, *Trudy tret'ego vsesojuznogo matematicheskogo s"ezda*, 2 (1956), p. 146–147.

[1965] Commentaires de l'éditeur, dans [Heyting 1956/1965].

Markov (A.A.), Nagornyj (N.M.)

[1984] Teorija algorifmov, Moskva : Nauka, 1984. Trad. angl., *The theory of algorithms*, Dordrecht : Kluwer, 1988.

Mostowski (A.)

[1957] On computable sequences, *Fund. math.*, 44 (1957), p. 37–51.

Muller (J.-M.)

[1991] Some characterizations of functions in on-line arithmetic, *Rapport de Recherche L.I.P.*, École normale supérieure de Lyon, 91-15, 1991.

Orevkov (V.P.)

[1964] O konstruktivnykh otobrazhenijakh kruga v sebja, *Trudy mat. Inst. Steklova*, 72 (1964), p. 437–461. Trad. angl., On constructive mappings of a disk into itself, *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 100 (1972), p. 69–100.

Shanin (N.A.)

[1962] Konstruktivnye veshchestvennye chisla i konstruktivnye funkcional'nye prostranstva, *Trudy mat. Inst. Steklova*, 67 (1962), p. 15–294. Trad. angl., *Constructive real numbers and constructive function spaces*, Providence : American Mathematical Society (Transl. Math. Monographs, vol. 21), 1968.

Sinaceur (H.)

[1990] Article «Récursivité», dans *Encyclopédie philosophique universelle*, vol. II, t. 2, Paris : PUF, 1990, p. 2188–2192.

[1993] Du formalisme à la constructivité : le finitisme, *Revue internationale de philosophie*, 47–4 (1993), p. 251–284.

Specker (E.)

[1949] Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *The Journal of Symbolic Logic*, 14 (1949), p. 145–158.

[1959] Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis, dans [Heyting 1959, p. 254–265].

Turing (A.M.)

[1936] On computable real numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42 (1936), p. 230–265. Trad. fr. dans *La machine de Turing*, Paris : Seuil (Sources du savoir), 1995, p. 47–103.

Uspenskij (V.A.)

[1960] *Lekcii o vychislitmykh funkcijakh*, Moscou : Fizmatgiz, 1960. Trad. fr. par A. Chauvin, *Leçons sur les fonctions calculables*, Paris : Hermann, 1966.

Van Dalen (D.)

[1990] The war of the frogs and the mice, or the crisis of the "Mathematische Annalen", *The Mathematical Intelligencer*, 12–4 (1990), p. 17–31.

Van Heijenoort (J.) (éd.)
[1967] *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879–1931*, Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 1967.

Zaslavskij (I.D.)
[1962] Nekotorye svojstva konstruktivnykh veshchestvennykh chisel i konstruktivnykh funkcij, *Trudy mat. Inst. Steklova*, 67 (1962), p. 385–457. Trad. angl., Some properties of constructive real numbers and of constructive functions, *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 57 (1966), p. 1–84.