Revue d'histoire des mathématiques
11 (2005), p. 239–255

UNE UTILISATION PRÉCOCE DE L'ALGÈBRE EN FRANCE AU XV^{e} SIÈCLE.

NOTE SUR LE MANUSCRIT 1339 DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE DE FRANCE

Stéphane Lamassé

Résumé. — Le manuscrit français 1339 de la Bibliothèque nationale de France contient quelques exercices résolus par une méthode algébrique. Daté aux alentours de 1460 et associé à Jehan Fusoris, cet ouvrage pose le problème de la pénétration de l'algèbre en France, trente ans avant Nicolas Chuquet. Il nous conduit à nous interroger à nouveau sur les arithmétiques marchandes produites en langue française à la fin du Moyen Âge.

Abstract (An Early Use of Algebra in 15th.-Century France. Note on the Manuscript 1339 of the Bibliothèque nationale de France)

The Manuscript *français 1339* of the French National Library contains some exercises solved by an algebraic method. This work written thirty years before Nicolas Chuquet in the environment of Jehan Fusoris, poses the problem of the penetration of algebra in France. It leads us to examine once more the manuscript tradition of commercial arithmetic produced in French language at the end of the Middle Ages.

Texte reçu le 2 juin 2005, révisé le 18 octobre 2005.

S. Lamassé, 22 rue du pont David, 93600 Aulnay sous bois.
Courrier électronique : `Stephane.Lamasse@univ-paris1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A35.

Mots clefs : Nicolas Chuquet, Jehan Fusoris, algèbre, arithmétique, xv^{e} siècle, Bibliothèque nationale de France, fonds français 1339.

Key words and phrases. — Nicolas Chuquet, Jehan Fusoris, algebra, arithmetic, 15th century, French national library, fonds français 1339.

1. INTRODUCTION

L'origine des algèbres en langue française pose aujourd'hui encore problème. On considère classiquement que l'influence italienne fut prédominante. En effet, durant les XIV^e^ et XV^e^ siècles, les maîtres de calcul italiens sont très en avance et, du fait de la circulation des marchands, les chercheurs ont tendance à considérer qu'ils furent l'unique vecteur de ce savoir.

En 1484, soit plus de 150 ans après les premiers traités italiens, dans le *Triparty en la science des nombres,* Nicolas Chuquet consacre une partie entière de son œuvre à l'algèbre qu'il nomme la « rigle des premiers » [Marre 1880]. Ce savant reste un cas particulier. Il crée une symbolique algébrique exprimant l'inconnue, les puissances et les racines, et il utilise des exposants négatifs.

Or, dans l'état actuel de nos connaissances, « l'influence » italienne reste diffuse dans cette œuvre[1]. Il semble que la pénétration de l'algèbre dans les ouvrages français se soit faite dans le cadre d'une culture que nous connaissons encore mal.

Nous avons découvert dans le manuscrit français 1339 de la Bibliothèque nationale de France[2], daté de 1460 et écrit en français, quelques exercices résolus par l'algèbre. L'auteur utilise presque incidemment[3] une technique algébrique. Et en dépit de ses maladresses et de ses difficultés à s'approprier la méthode, ce manuscrit reflète une pratique de cette technique avant Nicolas Chuquet.

L'objectif de cette note est de présenter ce manuscrit et de lui attribuer sa place dans le développement de l'algèbre française, en essayant de dégager les influences qui ont marqué l'auteur.

[1] Raffaela Franci et Toti Rigatelli [1985] ont proposé que le manuscrit 578 de la Bibliothèque *Estense* de Modène soit une des origines de l'algèbre de Nicolas Chuquet.

[2] Que nous noterons désormais BNF 1339.

[3] Cette découverte n'a été possible que dans le cadre ma thèse. En effet, la dimension exhaustive que je souhaite donner à ce travail conduit à une étude approfondie des textes en langue vernaculaire. La méthode en a été présentée et développée dans [Lamassé 1999]. Le repérage des « incidences » nous intéresse, parce qu'elles ouvrent des perspectives et trahissent la culture des auteurs.

2. LES SINGULARITÉS DU MANUSCRIT BNF 1339

Ce manuscrit[4] anonyme a été réalisé par un seul copiste. Il est assez structuré, l'écriture est soignée et régulière. Les décorations y sont abondantes. Toutefois, les fréquentes maladresses, les corrections d'erreurs ont pu laisser penser à un véritable « bâclage » [Poulle 1963].

Guy Beaujouan [1988] montra naguère que ce manuscrit se rattache par son plan à une tradition du Nord de la France. Les occurrences de lieux révèlent, en effet, une activité centrée sur Paris et la région normande[5]. Par ailleurs, le texte utilise des formes de mots proches du picard comme « chinquiesme », « lymachon », « comencher ».

Ce manuscrit fut rapproché de deux autres œuvres anonymes. La première, le manuscrit 456 de la Médiathèque de Nantes, bien qu'un peu plus tardive (v. 1480–1490) passait pour lui être la plus proche[6]. La seconde conservée à Florence dans la Bibliothèque laurentienne sous la cote Plut. 26 cod. 43[7], bien qu'incomplète, partage avec la

[4] Nous joignons une description de ce manuscrit : Ancien 7482(2), Bigot 145. Papier, filigrane licorne (non identifié), dimensions : 285 × 215 ; marges : 30, 60, 30, 45. 163 feuillets à longues lignes, suivis de 4 feuillets blancs. Constitué en 14 sénions sauf le dixième auquel il manque un feuillet. La foliation est continue. Écriture cursive d'une seule main, soignée, elle est très lisible. Encre noire. Les couleurs rouges, vertes et jaunes (à la plume) sont très utilisées tant pour les dessins que pour l'intérieur du texte où les chiffres et résultats qui sont mises en exergue par des encadrements ou des soulignements. Premières lettres réhaussées de couleurs. Trois réclames. Le plus souvent les titres sont indiqués en bas de feuillet mais ce n'est pas toujours le cas. Les titres de certaines sous-parties sont en bas de feuillet, au verso. Reliure contemporaine. Les tranches portent encore des marques de dorure.

[5] A propos d'un problème de drap, l'auteur de ce manuscrit cite trois villes d'approvisionnement : Ypres, Montievillier et Rouen.

[6] Emmanuel Poulle [1963] et Guy Beaujouan [1988] ont les premiers apparenté ces deux manuscrits. Il est vrai que tous les deux, si l'on en croit les lieux cités dans les exercices, sont plutôt du Nord de la France. Ainsi présentent-ils un exercice dans lequel deux hommes partent de deux villes différentes et où l'on cherche quand ils doivent se rencontrer sur la route. Tous les deux citent Paris, mais le BNF 1339 hésite pour la seconde ville entre Tournais et Rouen et finit par utiliser Tournais. L'œuvre de la médiathèque de Nantes 456, lui est postérieure et propose un voyage Paris-Tournais. Cet exemple révèle une source commune.

[7] Nous le noterons à présent BL 29-43. On peut consulter [Ciapponi 1984] pour une présentation de ce manuscrit. La partie en français concerne les feuillets 3r–45r. Nous avons pu voir ce manuscrit et noter que les filigranes du papier se ressemblent, il s'agit d'une licorne, sans malheureusement établir leur identité.

précédente un ensemble de caractères qui en font des œuvres voisines. Nous reviendrons sur ce point.

Il me semble donc intéressant de confronter le manuscrit BNF 1339 à la plus complète de ces deux œuvres, celle conservée à la Médiathèque de Nantes.

BNF 1339	**Médiathèque de Nantes 456**
• fol. 1r-2v. Incipit : « Toute bonne science vient et procède du benoit Saint Esperit... » fol. 32v : « Apres s'ensuit la maniere comment on doit compter et jecter sur la table* » fol. 34v : « Del algorisme des minutes » fol. 45r : « Pour faire comptes de livres, soubz et deniers* » fol. 48v : « S'ensuit apres le comptes des marcs, onces et deniers * » fol. 49v : « Cy commence la regle de 3 nombres* » fol. 61r : « S'ensuit questions de la premiere posicion » fol. 64v : « S'ensuit des 2 posicions » fol. 68r : « . . . par diverses manière d'arismetique. . .* » fol. 69r : « Aultres questions de plaisances. » fol. 73r : « Question et s'apellent ces regles ensuivant de aposicion et remocion. » fol. 79r : « Questions sus le poys et sus la loy d'or et d'argent. » • fol. 80v–83r : « algorisme grec » • fol. 85r à 114v : « Geometrie est ung art par lequel sont trouves toutes mesures et deves savoir qu'ilz sont 3 manieres de mesurer si comme droit/plain/corps. » [Géométrie pratique]. Cette partie comportait de belles illustrations au lavis aujourd'hui largement détériorées, les feuillets 92, 97, 101, 103, 107, 109 sont lacérés[8]. • fol. 115r à 128v : [Un traité d'astrolabe de Jehan Fusoris] [Poulle 1963]	• fol. 3r. Incipit : « La premiere cougnoissance de toute choses naturelles en leur premiere racine » fol. 29r : « nous traicterons des nombres rouptz » [fractions] fol. 47r : « Ensuivant troys rigles generalles par lesquelles pevent estre abregées et seue toutes questions » fol. 47r : « Et premierement de la rigle de troys numbre » fol. 64r : « Ensuivant la secunde rigle generalle qui est appelles rigle d'une faulce posicion » fol. 71 r : « de deux faulce position » fol. 80 : « Ensuivant la quarte et derraine rigle generalle qui se appelle rigle d'apposicion remocion » fol. 86r : « Reste a traicter du dit art par le grant giet, nouvellement trouvé, très subtil » Il insère dans cette partie un développement concernant « la cougnoissance et division du poix », [fol. 91r] • fol. 97 : [Géométrie]

Des structures de manuscrit divergentes (nous avons indiqué par un astérisque les parties n'ayant pas de titre et entre crochets nos additions)

[8] On retrouve certaines de ces illustrations dans le manuscrit BL Plut. 29.43.

Le manuscrit français BNF 1339 se distingue au premier regard car contrairement à la plupart des arithmétiques de l'époque, il intègre d'autres œuvres aux côtés de l'arithmétique, dont :

– un système de numération très particulier aux feuillets 80–83 dit « algorisme grec » et sur lequel on possède une étude complète [King 2001] ;
– un traité pour le maniement de l'astrolabe de Jehan Fusoris destiné à Pierre de Navarre, comte de Mortain et étudié par Emmanuel Poulle [1963] qui soulignait que, si les parties sur l'« aritmatique » et la « geométrie » étaient associées, leur attribution à Jehan Fusoris posait encore problème. Il envisageait, alors, pour trouver une réponse à ce problème, une étude sur la génèse de cette arithmétique.

Pour le reste les deux arithmétiques ont d'évidents points communs qui ont permis leur rapprochement dans un même groupe [Beaujouan 1988]. Toutes deux consacrent une partie à la géométrie. Et la quasi identité des deux textes a renforcé le sentiment d'une forte proximité de ces œuvres. Les deux textes reprennent la division en neuf opérations propre à Sacrobosco. Ils contiennent chacun un chapitre consacré au calcul avec jetons et des exercices extraits de recueils de distractions mathématiques nommées parfois « *ludii* » ou « *cautelae* ».

Pourtant, si l'on entre dans les détails, cette proximité mérite d'être nuancée. Ainsi la partie sur la géométrie semble commune à d'autres œuvres de la même période[9]. Ensuite, les incipits de l'arithmétique sont différents. Le manuscrit de la Médiathèque de Nantes 456 cite Sacrobosco[10], alors que l'auteur du BNF 1339 appuie sa démonstration de la primauté de l'arithmétique sur des autorités telles que Platon, Boèce et Saint-Augustin.

Cette différence est renforcée par la comparaison des parties sur les jetons, considérées pourtant comme un des points de convergence de ces arithmétiques. Celle du manuscrit de Nantes comme d'ailleurs aussi

[9] Adolpho Tura dans sa thèse de doctorat [Tura 2004] souligne la quasi identité des géométries. Le contenu est figé, ou presque, et ne semble pas avoir donné naissance à d'importantes innovations.

[10] Le manuscrit BNF 2050, comme aussi le BNF lat. 7287, en est fort proche : « La premiere cougnoissance de toutes choses naturelles a leur premiere rassine est venue et entree en antendement humain par rayson de comptes et de nombre ».

l'arithmétique du BL 26-43 sont bien des copies[11] l'une de l'autre ; elles débutent toutes deux par « du dit art par le grant giet », alors que le BNF 1339 intitule cette sous-partie « la maniere comment on doit compter et jecter sur la table ». Il s'agit bien du même thème, mais pas exactement des mêmes textes. Ce passage est d'ailleurs beaucoup plus bref dans ce dernier manuscrit, deux feuillets et non cinq. On pourrait expliquer la différence par l'absence d'exercices, mais, le texte lui-même, sans être identique, semble plus proche de l'*Algorismus linealis* tel qu'on peut le lire dans les ouvrages de la même période[12], c'est-à-dire d'un enseignement du calcul à jetons reprenant la structure par « espèce » de l'algorisme de Sacrobosco.

La suite du BNF 1339 révèle encore le travail de compilation. En effet, des sous-parties provenant d'autres traditions sont insérées dans le plan de l'arithmétique. Il s'agit des « diverses manieres d'arismetique » ou « Aultres questions de plaisances ». C'est dans ces parties que sont placées des collections de problèmes extraits des « *Cautelae* », « *Ludii* », « *Enigmata* » que la tradition fait remonter à Alcuin[13].

[11] Les quelques différences avec le Médiathèque de Nantes 456 concernent une inversion du plan entre la géométrie et la partie sur l'arithmétique à jetons et quelques exercices en plus dans celui conservé à Florence.

[12] L'histoire des arithmétiques à jetons reste à construire. On connaît deux *incipit* de l'*Algorismus linealis* : « *Quoniam propter multiplicem regularum positionem alterius aritmetrice* » ou « *Pro expeditione specierum algorismi de integro per denarios projectiles* ». Un exemple de cet algorisme se trouve dans le manuscrit BNF lat. 7197 contenant les notes d'un élève de Conrad Heingarter (1446). En outre, on voit se multiplier des ouvrages portant le titre de « *Algorismus linealis* » à la fin du XV^e^ et au début du XVI^e^ siècles, surtout dans le monde germanique. On connaît pour la France une arithmétique portant uniquement sur le calcul à jetons, le manuscrit Bibl. Sainte Geneviève 3143.

[13] Le compilateur reprend d'ailleurs les chiffres romains [BNF 1339, fol. 61v] de la source à laquelle il emprunte. Il existe un grand nombre d'études et quelques propositions de synthèse sur cette histoire des exercices. Il faut voir à ce sujet l'ouvrage de Johannes Tropfke [1980], l'article de Warren Van Egmond [1996] et surtout une étude récente qui vient d'être donnée par Jacques Sesiano [2000] sur un de ces recueils. Ce travail montre notamment les influences du *Liber augmenti et diminutionis*, mais aussi dans ce dernier cas du *Liber mahamelet*. Jens Høyrup [à paraître] vient d'offrir une relecture de la tradition des abaques italiennes en proposant une influence « ibéro-provençale ». Il fonde une partie de son raisonnement sur la forte représentation de problèmes de règle de trois qu'il qualifie de contrefactuels.

Parmi toutes les arithmétiques en langue française, que l'on connaît de cette période, la seule à introduire également une telle partie est dans le manuscrit de Cesena S.XXVI-6, produit en 1471 et peut-être entièrement de Barthélémy de Romans[14]. L'auteur la nomme « Jeux et esbatemens d'algorisme » mais la logique qui préside à sa rédaction est totalement différente[15] de celle du BNF 1339.

Le plan de ce dernier est donc bien la conséquence d'une logique de compilation et de synthèse.

3. UNE MÉTHODE ALGÉBRIQUE MAL MAÎTRISÉE

Que sait-on de l'algèbre au XV^e siècle ? Il est difficile de répondre à cette question dans la mesure où les synthèses manquent. Dans un ouvrage récent, Jacques Sesiano [1999] donnait quelques étapes de cette histoire. La perspective diachronique qu'il adopte permet de mieux prendre la mesure de la complexité du problème aux XV^e et XVI^e siècles. Il semble que l'algèbre soit entrée et se soit répandue en Occident par différentes voies : les traductions arabes héritées de Robert de Chester et Gérard de Crémone, le *Liber abaci* de Léonard de Pise et le *Liber mahameleth*, bien que l'influence de ce dernier semble avoir été moins importante.

Cette vision souffre d'être générale. En effet, il existait en Italie au début du XIV^e siècle trois traditions algébriques incarnées par Jacopo de Florence, Paolo Gerardi et Dardi de Pise. Ces trois œuvres n'entretiennent que des rapports lointains avec al-Khwârizmî et Léonard de Pise

[14] L'auteur et l'œuvre sont à présent mieux connus [Spiesser 2003], ainsi que l'influence de celle-là dans le corpus des arithmétiques en langue vulgaire du XV^e siècle. Nicolas Chuquet a utilisé abondamment cet ouvrage [Cassinet 1993]. Nous avons entrepris une édition comparée, dans le cadre de notre travail de thèse, d'une partie commune « Cy commence la tierce partie qui demonstre la maniere de applicquer addition, sustraction, multiplication et division tant du nombre entier que du nombre roupt » [Cesena S.XXVI-6, fol. 26r] pour laquelle le maître lyonnais extrait 61 % des exercices.

[15] La logique qui préside à l'élaboration de chacune de ces deux parties est en effet différente dans chacun de ces deux manuscrits. Dans celui de Cesena, les problèmes sont organisés en fonction des méthodes de résolution. Et une place est faite aux problèmes de compagnie. La séparation et le classement des problèmes à l'intérieur de ces différentes parties, nous montre à quel point ces arithmétiques bien que répondant à un « genre » littéraire ne sont pas encore figées.

[Franci 2002]. Jens Høyrup [2005] propose l'existence d'une tradition ibéro-provençale susceptible d'avoir influencé les maîtres italiens. Cette inversion du modèle développé par l'historiographie nous oblige à repenser la circulation des savoirs mathématiques à l'intérieur de l'Occident médiéval.

En langue française il n'y a, dans l'état actuel de la recherche, rien de formalisé avant Nicolas Chuquet, c'est-à-dire la fin du xv^{e} siècle. Et le maître lyonnais a pu être influencé par des livres d'algèbre italiens [Franci & Rigatelli 1985].

Rappelons simplement qu'al-Khwârizmî et Abû Kâmil nomment *al-jabr* l'opération qui fait passer les termes d'une équation d'un membre à l'autre afin d'obtenir une relation entre quantités positives et *al muqâbala* la réduction des termes semblables.

Dans les manuscrits d'arithmétique en langue française, s'il n'existe pas d'algèbre au sens où nous la connaissons aujourd'hui, on trouve, en revanche, au moins deux méthodes arithmétiques permettant de résoudre des systèmes d'équations à plusieurs inconnues : la simple et la double position[16]. Ces méthodes sont très anciennes et coexistent avec l'algèbre. Elles sont des passages obligés, on les retrouve dans tous les manuscrits.

Il faut revenir à présent sur le manuscrit BNF 1339, car c'est justement à ce moment de son travail, dans la partie sur la « première posicion », puis dans celle ajoutée à la deuxième position nommée « diverses manières d'arismetique »[17], que l'auteur insère quatre problèmes dans lesquels il utilise une méthode algébrique. Voici la transcription des quatre énoncés, suivis d'une formalisation mathématique contemporaine, replacé dans le plan plus général de l'œuvre. Il s'agit, pour nous, de systèmes d'équations linéaires du premier degré ($ax = b$) :

- fol. 6r : « S'ensuit questions de la premiere posicion.

[16] On peut consulter [Spiesser 2003] sur ces méthodes.

[17] Il est assez difficile de décider s'il s'agit d'une nouvelle partie ou bien si c'est un ajout à la précédente. Le copiste change de feuillet et il a pu oublier le titre en bas de feuillet, c'est possible. Au demeurant, il n'est pas utile de vouloir trop en faire dire à la structure du manuscrit, qui rappelons-le est une copie. Soulignons simplement que ces deux éléments sont clairement associés.

Deux marchans ont une somme d'argent dont l'un prent une quantite et marchande de tellement qu'il pert $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ et 10 livres plus de ce qu'il aporta et raporte 50 lb. Et l'autres gaigna $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ et 10 lb. et raporta 105 livres. Assavoir combien chacun avoit ? »

$$x - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x - 10 = 50, \quad y + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)y + 10 = 105. \tag{1}$$

• fol. 64r : « Deux marchans ont 100 lb. ensemble dont la part du premier est telle que multipliee par 4 [...] que la part du second multiplie par 5 et on quiert combien chacun avoit ?[18] »

$$x = 4u, \quad y = 5u, \quad 4x + 5y = 100. \tag{2}$$

• fol. 64v : « S'ensuit des 2 posicions »

• fol. 68r : « [...] par diverses manières d'arismetique [...]
Se ung homme ha tant de laboureur que se il paie a chacun 4 s. il luy demeure 20 s. et s'il paie a chacun 5 s. il faut qu'il enprunte 20 s. On demande quans laboureur il faudra qu'il ait ? »

$$4x + 20 = 5x - 20. \tag{3}$$

• « fol. 68v : Troys pieces de drap valent 100 livres dont la seconde piece vault 2 foys autant que la premiere 2 lb. mains et la tierce 2 foys autant que la seconde 4 lb. mains. Savoir combien la premiere valoit ? »

$$x + y + z = 100, \quad y = 2x - 2, \quad z = 2y - 4. \tag{4}$$

Ce sont là des problèmes courants que l'on retrouve, notamment pour les deux derniers énoncés, dans la tradition provençale, ce qui témoigne d'une culture commune, même si l'auteur anonyme du BNF 1339 y puise peu[19].

L'association entre les méthodes de fausse position et une méthode algébrique n'est pas en soi une innovation. Jean de Murs (1318–1345), qui écrivait en latin, a laissé des commentaires algébriques à des exercices traités dans un manuscrit par la simple fausse position [L'Huillier

[18] L'énoncé est tronqué dans le texte original ; nous avons restitué la traduction symbolique à partir du texte de la solution.

[19] Ainsi le troisième énoncé présenté est résolu vers 1430 par la double fausse position dans un manuscrit produit à Pamiers [BNF nouv. acq. 4140, fol. 110v], puis plus tard au début du XVI^e siècle dans une copie du *Kadran aus marchands* [BNF nouv. acq. 10259, fol. 47v]. En 1484, Nicolas Chuquet utilise la « rigle des premiers » [BNF 1346, fol. 160r]. On trouve le même problème, mais avec des valeurs numériques différentes dans le Médiathèque de Nantes 456, fol. 72v et le Cesena S.XXVI-6, fol. 88r.

1990]. Cette dernière méthode arithmétique est présente dans tous les traités d'arithmétique en langue vernaculaire du XV^e siècle, mais elle recouvre en fait plusieurs règles selon qu'il s'agisse de problèmes qui ont une solution unique ou de problèmes indéterminés.

Or justement pour résoudre les problèmes que nous pourrions traduire en $ax + b = 0$, l'auteur du BNF 1339, comme dans les autres textes en langue vernaculaire, « pose » une valeur pour l'inconnue que nous noterons x_1 et obtient alors un résultat faux b_1. Pour trouver x, il utilise une règle de trois. En revanche, pour deux des systèmes ci-dessus, il emploie une méthode algébrique sans signaler qu'il change de méthode de résolution. Suivons la façon dont le rédacteur de l'ouvrage manipule l'algèbre à travers la solution qu'il donne au premier système d'équations (1)[20].

Responce Posons que le premier fut 1^c oste $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de chose reste $\frac{5}{12}^c$ sont egal a 50 lb. qu'il raporta dont $\underline{10}$ moins et 50 plus sont 60 partis le nombre par la chose c'est assavoir par $\frac{5}{12}^c$ en reduisant tout en une mesmes denominacion et envient a la part 144 et le second en avoit $\underline{60}$. Adiouste $\frac{1}{3}$ de $\underline{60}$ ce sont $\underline{20}$ et $\frac{1}{4}$ ce sont 15 et 10 lb. plus ce sont 105 lb.	1) Il pose 1^c, que nous noterions x, et isole l'inconnue, ce qui donne $x - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x = \frac{5}{12}x$. 2) Il obtient $\frac{5}{12}x - 10 = 50$ et additionne les nombres $50 + 10 = 60$. 3) Puis $x = 60/\frac{5}{12}$. 4) On multiplie par l'inverse et on obtient $x = \frac{720}{5}$. 5) Il trouve donc 144 pour le premier . 6) Il semble qu'il emploie la même méthode pour y et trouve 60. 7) Vérification : $60 + \frac{1}{3}(60) + \frac{1}{4}(60) + 10 = 105$.

Le texte original appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, l'auteur recourt à l'utilisation d'une inconnue pour résoudre ce système d'équations. Ensuite il fait passer, dans les phases 1) et 2), les termes de l'équation de part et d'autre du signe égal : ce sont là deux caractéristiques de la méthode algébrique.

[20] fol. 61v.

On doit lire le 1^c comme « une chose », ce que confirme le texte [BNF 1339, fol. 68v] un peu plus loin : « prenons que ce soit une chose que tu dois ainsy escripre 4^c », c'est-à-dire quatre choses. Il « pose » l'inconnue tout comme on « pose » un nombre dans les méthodes de fausse position. Remarquons que l'exposant « c » est une abréviation et non l'élément d'un système aussi abouti que celui de Chuquet.

Il est possible que ce mot soit emprunté à la « *cosa* » italienne. Mais si les traités d'algèbre en latin préfèrent, pour la présentation des six équations de base, le mot « *radix* » pour désigner l'inconnue du premier degré[21], ils emploient plus favorablement le mot « *res* » dans la suite lorsqu'il s'agit de réduire des problèmes à une forme algébrique[22].

Il est difficile toutefois de percevoir le statut que l'auteur du texte que nous analysons donne à l'inconnue. Le copiste, en effet, ne comprend pas bien ce qu'est cette « chose » ; il n'en maîtrise pas parfaitement l'idée. Ainsi pour résoudre le second système d'équations et calculer $4x + 5y = 100$, il affecte l'inconnue en exposant au coefficient et multiplie « 4^c par 4^c sont 16^c », puis il continue ses calculs, sans se soucier de cette erreur, en additionnant « 5^c » avec « 16^c » et « 25^c » « sont 41^c », puis « divise le nombre [100] par la chose [41^c] et auras 2 et $\frac{18}{41}$ et tant vault la chose ».

La confusion est encore plus évidente dans le troisième système d'équations où il s'agit de calculer $4x + 20 = 5x - 20$, puisqu'il signale « tu dois ainsy escripre 4^c qui est par 4^c plus 20^c » [BNF 1339, fol. 68r]. Et pour trouver l'inconnue il demande « partis 40^c par 1^c ». La notion de « chose » est donc floue et encore mal distinguée de la « position » et du fait d'introduire un nombre dans les conditions d'un énoncé. Mais l'exemple de Nicolas Chuquet rappelle qu'il n'y a pas à l'époque de mot particulier pour désigner l'inconnue puisque lui même emploie le terme « premier ». On pourrait faire la même observation concernant le

[21] C'est ce que font Robert de Chester [Karpinski & Winter 1915] ou Jean de Murs [L'Huillier 1990].

[22] Cette observation nous a été faite par Jens Høyrup. Mais il est aussi vrai que Léonard de Pise désigne l'inconnue par « *res* » [Franci & Rigatelli 1985, p. 19]. En fait, le mot « chose » est trop peu utilisé dans cet ouvrage pour que l'on puisse se faire une idée précise de sa provenance.

coefficient d'autant plus difficile à conceptualiser que l'on a pas de mot pour le désigner.

Quoi qu'il en soit, l'auteur ne tient pas compte de cette attribution fantaisiste de l'exposant lorsqu'il calcule. Ce qui tendrait à prouver qu'il s'agit bien d'erreurs de copiste puisque les résultats sont toujours justes.

Il y a donc des énoncés mutilés par le scribe, mais la source utilise bien une méthode algébrique. L'auteur ne la distingue pas de l'arithmétique. Ce qui ne doit pas nous surprendre puisqu'à l'époque elles sont associées. Mais jamais sous sa plume on ne trouve d'expression désignant explicitement l'algèbre, ni d'allusion à la « *regola della cosa* », ni même aux « premiers ». Il s'agit pour lui d'utiliser le « plus » et le « moins » et il *invente* l'expression « Et selon le plus ou le moins tu peus fourmer toutes questions semblables » [BNF 1339, fol. 64r].

C'est cette règle qu'il insère après la partie sur la seconde position et qu'il présente ainsi :

> « Nous mectrons cy apres plusieurs questions faites et fourmes par diverses manieres d'arismetique et dois savoir principaulement que quant vendra aegalir les pars et tu auras mains de l'un et plus de l'autre il te fault metre le plus avecques le moins c'est a dire aegalir la chose avecquez la chose ou il te fault substraire, comme il est dist par la regle des 2 posicions » [BNF 1339, fol. 68r].

Il y a là tout un vocabulaire qui évoque l'algèbre. Le mot « *aegalir* » renvoie ici à l'*al-jabr*, c'est-à-dire à l'ajout d'une même quantité dans les deux membres de l'équation[23]. Et le problème central dans ce texte concerne la manipulation des signes, inhérente à cette opération.

Pourtant, comme en témoigne la solution donnée au quatrième énoncé 4), il semble que ces opérations ne posent aucun problème à l'auteur. Pour résoudre

$$x + y + z = 100, \quad y = 2x - 2, \quad z = 2y - 4, \tag{4}$$

[23] Il faut peut-être revenir sur l'étymologie de ce mot « *aegalir* ». Il est attesté par *Le trésor de la langue française* avec le sens de « rendre egales entre elles des choses » en 1470. On connaît un emploi tardif de ce verbe transitif par Nicolas Chuquet dans son *Triparty*, en 1484, avec un sens de mise en équation : « La seconde partie de ceste tierce partie de ce livre contient deux chapitres dont le premier donne la maniere de egalir » [Jacquart & Thomasset 1997]. Jens Høyrup nous a fait remarquer que des Italiens utilisent des expressions proches l'*aghuaglamento* de Canacci, ou *raoguaglemento* de Jacopo da Firenze ou encore l'*adequation* de Dardi. Or ces Italiens sont, pour Jens Høyrup, insérés dans un monde ibéro-provençal [à paraître]. Il s'agirait là du lien le plus fort du BNF 1339 avec le monde provençal.

il propose :

> « Posons que la premiere soit une chose ainsy escripte 1^c, la seconde piece 2^c et la tierce soit 4^c dont la 2^e est 2 mains et la tierce à cause de la premier et 2^e 8 mains et 2 mains sont 10 moins. Et pour ce qu'il y a 8 mains en la [fol. 69r] posicion tu pourroies doubter mais c'est au regart de la premiere et 2^e et tu le pourras veoir clerement [...] »

Autrement dit, il entend simplement les choses de cette façon :

$$x + (2x - 2) + 2(2x - 4) = 100,$$

soit $x + 2x + 4x - 2 - 8 = 100$.

La suite du texte révèle la façon dont il manipule les nombres :

> « [...] Or adiouste 2 moins et 8 moins ce sont 10 moins avecques 100 lb. ce sont 110 livres [...] »

Il y a deux étapes associées dans ce raisonnement : $-2 - 8 = -10$ et le changement de signe $x + 2x + 4x = 100 + 10$.

> « [...] qui te fault partir par la chose qui monte 7 car 1^c et 2^c et 4^c sont 7^c et en vient à la part pour la premiere piece 15 et $\frac{5}{7}$ et pour la 2^e 28 et $\frac{10}{7}$ et pour la 3^{ce} 52 et $\frac{20}{7}$ les menus parties mis ensemble sont 100 lb. »

Les deuxième et troisième résultats sont déduits du premier comme en témoignent les nombres fractionnaires qui ont été doublés mais non réduits. Cet exemple révèle une fois de plus les ambiguités de l'inconnue : « partir par la chose qui monte 7 ». Il faut bien percevoir tout l'anachronisme qui réside dans le x que j'emploie. L'inconnue n'est pas pensée comme telle.

Par ailleurs, dans cet exemple c'est bien la manipulation des signes consécutifs à la pratique de « *aegalir* » qui fait l'objet du plus long développement.

Il demeure qu'on comprend mal pourquoi l'auteur évoque ainsi la règle de double fausse position. Cette règle consiste à résoudre

$$ax + b = c.$$

Pour trouver l'inconnue, on lui affecte arbitrairement deux valeurs y_1 et y_2 dites « fausses positions ». En remplaçant x par y_1, on obtient une erreur $e_1 = c - C_1$. On recommence l'opération avec la seconde « fausse position », $x = y_2$, l'erreur est donc $e_2 = c - C_2$. Lorsque le résultat est inférieur au résultat attendu, c'est-à-dire si $e_1 > 0$, soit lorsque $C_1 < c$, les auteurs écrivent « Par $[y_1]$ moins $[e_1]$ ». Et dans le cas contraire, si $C_1 > c$, on écrit « Par $[y_1]$ plus $[e_1]$ ».

L'inconnue peut alors être obtenue par l'opération

$$x = \frac{e_1 y_2 - e_2 y_1}{e_1 - e_2}.$$

Les auteurs de l'époque calculent avec les valeurs absolues des nombres. Ici, deux situations ont été mises en exergue par un encadrement :

« Par [y_1] moins [e_1] »		« Par [y_1] plus [e_1] »
	ou	
« Par [y_2] moins [e_2] »		« Par [y_2] moins [e_2] ».

Puis l'auteur précise que dans ces deux cas,

> « La secunde regle par la 2 posicions est quant on a moins de l'un et mains de l'autre [fol. 66r] on doit substraire le mendre du grant et faire comme dessus est dist. »

Quel sens donner à cette formulation ? En fait, dans les exemples qu'il développe, il soustrait toujours « le mendre du grant ». En témoigne l'exercice introductif du type :

– « Par [y_1] plus [e_1] »,
– « Par [y_2] plus [e_2] ».

Dans cet exemple $e_1 y_2$ a la valeur 16 et $e_2 y_1$ la valeur 64. Et il écrit pour le calcul de $e_1 y_2 - e_2 y_1$: « oste 16 de 64 ». Il semble bien qu'il s'agisse d'une habitude de calcul.

Reste le lien qu'il établit entre la règle de deux fausses positions et celle présentant l'algèbre. Il semble logique pour l'auteur. Une expression comme « moins de l'un et mains de l'autre » peut être comprise différemment dans chacun de ces contextes. Peut-être pouvons-nous à présent relire la succession des parties du manuscrit que nous venons de décrire et nous demander si celle portant sur la seconde fausse position, à laquelle il ne consacre que quatre exercices[24], n'est pas aussi confondue avec un apprentissage d'une manipulation des signes.

[24] Il envisage successivement les quatre cas : le plus avec le plus ; le moins avec le moins ; le plus avec le moins ; le plus avec le plus. Cette organisation est commune à un grand nombre de manuscrits et était déjà présente dans la première arithmétique écrite en langue vernaculaire vers 1430 [BNF nouv. acq. 4140].

4. CONCLUSION

Le manuscrit français 1339 de la Bibliothèque nationale fut donc écrit à la hâte mais il n'en constitue pas moins une œuvre originale dans le corpus des arithmétiques commerciales en langue vulgaire du XV^{e} siècle. Peut-être parisien, il est associé à Jehan Fusoris par un des traités qu'il contient.

Il est beaucoup moins proche des manuscrits produits dans le sud de la France, que ne l'est celui de la Médiathèque de Nantes. C'est un travail de compilation qui emprunte aux arithmétiques marchandes une structure et quelques exercices, mais il semble marqué par une culture universitaire.

L'étude de ce manuscrit a fait apparaître l'utilisation d'une méthode que nous pouvons qualifier d'algébrique, mais qui ne se laisse pas ramener à à une quelconque influence italienne. Celle-ci porte cependant sur trop peu d'exercices pour que l'on puisse essayer d'avoir une idée précise de la maîtrise réelle de cette technique.

Pour l'auteur, elle est associée aux méthodes de fausse position sans pourtant qu'il ne les confonde[25]. La technique qu'il identifie comme celle du « plus » et du « moins » repose sur le principe d'« *aegalir* » et les manipulations de signe qui lui sont liées. Il introduit bien une inconnue mais son statut est ambigu, la notation qu'il utilise la rend floue. En fait, il ne semble pas calculer avec une inconnue qui serait symbolisée par une abréviation, mais bien avec une idée, il cherche un nombre.

Tous ces problèmes pouvaient être résolus par la règle de double fausse position. Ils le sont d'ailleurs dans d'autres arithmétiques de la même période. Et c'est là le dernier point, cet ouvrage témoigne aussi d'un « genre » de manuscrits qui se définit et se fixe à cette époque. Dans cette perspective, il faut peut-être réinterpréter l'absence d'algèbre dans les manuscrits postérieurs. Ainsi, il ne s'agirait pas d'« oublis » imputables à un simple manque de connaissances mais aussi peut-être à une distinction nette de cette règle qui ne rentre pas dans le « genre » de manuscrits que les auteurs rédigent. Et, si Chuquet lui fait une large place, c'est sans doute parce qu'il a brisé le modèle.

[25] Il n'est pas rare de trouver « ce peut faire par 2 posicions ».

BIBLIOGRAPHIE

BEAUJOUAN (Guy)

[1988] The place of Nicolas Chuquet in a typology of fifteenth-century French arithmetics, dans Hay (Cynthia), éd., *Mathematics from Manuscript to Print, 1300–1600*, Oxford : Clarendon Press, 1988, p. 73–88.

BENOÎT (Paul) & LAMASSÉ (Stéphane)

[2003] Apposition et remotion : une spécificité française, dans Spiesser (Maryvonne) & Guillemot (Michel), éd., *De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre*, Toulouse : Centre international d'histoire des sciences occitanes, Université Toulouse II, 2003, p. 1–13.

CASSINET (Jean)

[1993] Le manuscrit XXVI de Cesena, important maillon occitan de transmission de l'algorisme au XV^e siècle, *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, 13 (1993), p. 251–285.

CIAPPONI (Lucia A.)

[1984] Disegnio ad appunti di matematica in un codice di fra Giocondo da Verona (Laur. 29-43), dans *Vestigia Studi in onore di Giuseppe Billanovich*, Roma : Ed. di Storia e Letteratura, 1984, p. 181–196.

DUHIL (Roxanne)

[1997] Étude d'un traité d'arithmétique du XV^e siècle : le manuscrit 456 de la Médiathèque de Nantes, Mémoire de maîtrise sous la direction de Jacques Verger et Paul Benoît, Université Paris XIII, 1997.

FRANCI (Raffaela)

[2002] Trends in fourteenth-century Italian algebra, *Oriens-Occidens*, 4 (2002), p. 81–105.

FRANCI (Raffaela) & RIGATELLI (Lucia TOTI)

[1985] Towards a history of algebra from Leonardo da Pisa to Luca Pacioli, *Janus*, 72 (1985), p. 17–82.

HØYRUP (Jens)

[2005] Leonardo Fibonacci and *abbaco* culture. A proposal to invert the roles, *Revue d'histoire des mathématiques*, 11 (2005), p. 23–56.

[à paraître] Jacopo da Firenze and the beginning of Italian vernacular algebra ; à paraître dans *Historia Mathematica*.

JACQUART (Danièle) & THOMASSET (Claude)

[1997] *Lexique de la langue scientifique (Astrologie, Mathématiques, Médecine) Matériaux pour le* Dictionnaire du Moyen Français *(DMF)*, éd. par l'Institut National de la Langue Française, Paris : Klincksieck et CNRS Editions, 1997.

KARPINSKI (Louis Charles) & WINTER (John Garrett)

[1915] *Robert of Chester's Latin Translation of The Algebra of Al-Khowarizmi*, University of Michigan Studies, 1915.

KING (David A.)

[2001] *The Ciphers of the Monks, a Forgotten Number-Notation of the Middle Ages*, Stuttgart : Franz Steiner, 2001.

LAMASSÉ (Stéphane)
[1999] Faire des mathématiques à la fin du Moyen Âge (XIVe-XVe siècles) : pour une histoire des exercices, Master, sous la direction de Paul Benoît, soutenu à l'Université de Paris 1, 1999.

L'HUILLIER (Ghislaine)
[1990] Le Quadripartitum numerorum *de Jean de Murs : introduction et édition critique*, Paris : Droz, 1990.

MARRE (Aristide)
[1880] Le triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet, parisien, d'après le Manuscrit fonds français 1346 de la Bibliothèque nationale de Paris, *Bulletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche*, 13 (1880), p. 413–460, 555–659, 693–814.

POULLE (Emmanuel)
[1963] *Un constructeur d'instruments astronomiques au XVe siècle. Jean Fusoris*, Paris : Champion, 1963.

SPIESSER (Maryvonne)
[2003] *Une arithmétique commerciale du XVe siècle : Le Compendy de la praticque des nombres de Barthélemy de Romans*, Turnhout : Brepols, 2003.

SÉSIANO (Jacques)
[1999] *Une introduction à l'histoire de l'algèbre, résolution d'équations des Mésopotamiens à la Renaissance*, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1999.
[2000] Un recueil du XIIIe siècle de problèmes mathématiques, *SCIAMVS*, 1 (2000), p. 71–132.

TROPFKE (Johannes)
[1980] *Geschichte der Elementar-Mathematik*, Berlin-Leipzig : W. de Gruyter, 1980.

TURA (Adolpho)
[2004] *Les sources géométriques françaises de Fra Giovanni Giocondo da Verona*, Thèse, EPHE, sous la direction de Mme Danielle Jacquart, 2004.

WARREN (Van Egmond)
[1988] How algebra came to France, dans Hay (Cynthia), éd., *Mathematics from Manuscript to Print, 1300–1600*, Oxford : Clarendon Press, 1988, p. 127–144.
[1996] Types and traditions of mathematical problems : A challenge for historians of mathematics, dans Folkerts (Menso), éd., *Mathematische Probleme im Mittelalter. Der lateinische und arabische Sprachbereich*, Wiesbaden : Harrassowitz Verlag, 1996, p. 378–728.