

## ÉDITORIAL

Ce numéro de la *Revue d'histoire des mathématiques*, entièrement consacré à des travaux concernant les XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles, nous mène sur trois terrains très différents dont chacun est à sa manière représentatif des mathématiques : les fondements, la théorie des nombres et l'hydrodynamique. Nous tenons à saluer la présence de ce dernier article, qui ouvre sur la physique, discipline entretenant avec les mathématiques des relations étroites et constitutives, même si elles sont l'occasion de controverses. En effet, notre *Revue* souhaiterait accueillir davantage de contributions traitant des applications des mathématiques. Appelons-en à nos collègues faisant des recherches dans ces domaines pour qu'ils nous soumettent leurs manuscrits pour publication ! Des notes mettant en perspective la notion d'application, qui suscite actuellement débat, seront également les bienvenues, tant il nous semble important d'accompagner la recherche par des discussions méthodologiques sans cesse renouvelées.

Olivier Darrigol s'intéresse ici à la question de la stabilité des solutions équations fondamentales de l'hydrodynamique (Euler, Navier-Stokes) telle qu'elle a émergée à travers les travaux de physiciens comme George Stokes, Hermann Helmholtz, William Thomson, Lord Rayleigh et Osborne Reynolds au XIX<sup>e</sup> siècle. L'observation de fluides réels, comme l'air et l'eau qui sont légèrement visqueux, a montré que leur comportement ne correspond pas tout à fait à celui déduit des équations. Elle conduit à supposer l'existence d'instabilités (le long d'obstacles solides dans un fluide, par exemple). Suivre les volutes de la fumée sortant d'une cheminée ou les vagues qui se forment à la surface de l'eau sous l'action du vent amène à formuler et à analyser d'autres types d'instabilité. C'est en s'intéressant à la perception du son et en élaborant une théorie des tuyaux d'orgues que Helmholtz introduit une structure de vorticités, dont il étudie la géométrie. Des expériences d'acoustique ont attiré l'attention de John Tyndall et de Lord Rayleigh sur l'existence d'instabilités induites par le son. Dans le prolongement de leurs travaux, Reynolds a pu étudier expérimentalement la transition entre les régimes laminaire et turbulent d'un fluide. Par ailleurs, certains de ces physiciens adhéraient à des théories de la matière qui présupposent la stabilité du mouvement dans le liquide parfait primitif (éther). C'est un des enjeux du débat que suit O. Darrigol dans un long

échange de correspondance entre Stokes et Thomson. Confrontés à la difficulté du traitement mathématique des problèmes soulevés, ces hommes tentent de donner forme à des intuitions vagues et de faire jouer l'analogie. Ils inaugurent ainsi un domaine de recherche dont l'exploration se poursuit aujourd'hui. Des questions relativement simples à formuler sont encore en attente de réponses définitives. Faute de moyens mathématiques adéquats, les pionniers du XIX<sup>e</sup> siècle s'appuyaient sur l'observation, l'expérience et des raisonnements qualitatifs pour obtenir des résultats partiels et parfois erronés. C'est informé de ceux d'aujourd'hui qu'O. Darrigol montre la complexité de leurs démarches, de leurs intérêts, de leurs attentes, sous-tendues par des philosophies différentes, et de leurs arguments souvent hautement spéculatifs.

C'est au cœur des mathématiques classiques du XIX<sup>e</sup> siècle que nous entraîne l'article de Tatiana Lavrinenko : la théorie des nombres en liaison avec l'algèbre et la géométrie. Elle se penche sur le problème de la résolution en nombres rationnels des équations indéterminées (ou diophantiennes) du troisième degré. Son article éclaire et met en perspective le profond changement de point de vue que constitue en analyse diophantienne l'introduction, au tout début du XX<sup>e</sup> siècle, de méthodes de géométrie algébrique, dont le nom de Poincaré est emblématique. En quoi consiste-il ? Désormais une équation diophantienne du troisième degré est résolue en cherchant les points rationnels de la courbe correspondante. Tout l'arsenal de concepts, résultats et méthodes de la théorie des courbes algébriques peut alors être appliqué. L'étude de cette rupture soulève des questions sur les liens entre la nouvelle approche et les méthodes antérieures, celles des Diophante, Fermat, Euler, Lagrange et Cauchy. Le passage est-il intervenu subitement avec Poincaré ou a-t-il été préparé dans des recherches antérieures ? T. Lavrinenko distingue deux grandes étapes dans le processus qu'elle décrit. La première consiste en l'interprétation géométrique des résultats et méthodes analytiques de résolution des équations diophantiennes du troisième degré, tels que Lagrange et Cauchy les avaient formulés. Ici la lecture des travaux de Cauchy par Edouard Lucas (en 1878) a été déterminante. Dès 1847, James J. Sylvester avait déjà mis une équation en correspondance avec une courbe et lié la question de ses solutions entières aux propriétés de cette courbe. En 1858, il publie sa doctrine des dérivations de points rationnels

sur une cubique qu'il reprend en 1879 après avoir republié Lucas dans l'*American Journal of Mathematics*, dont il est rédacteur en chef. C'est aussi à Sylvester que l'on doit, selon l'auteur de cet article, la seconde étape décrite comme transition de la recherche de solutions rationnelles séparées vers l'étude de l'ensemble de ces solutions et de sa structure. Il met en évidence une structure qu'on dirait aujourd'hui de groupe en indexant les points et en opérant sur ces indices. Leur lien avec les paramètres elliptiques des points de l'ensemble a été établi par le collaborateur de Sylvester à l'université Johns Hopkins, William Story. Ces très beaux travaux de Sylvester et de Story sont minutieusement analysés dans cet article.

Pierre Ageron nous conduit sur un troisième terrain, devenu rapidement lieu de débat, sinon champ de bataille, entre mathématiciens et/ou logiciens. Il ébauche, dans sa contribution à ce numéro, l'histoire, difficilement localisable, d'un axiome qui est apparu à beaucoup, et apparaît sans doute encore à la plupart d'entre nous, comme une pétition de principe. Il concerne la possibilité de choisir un élément particulier dans tout ensemble non vide et a été clairement posé par Henri Lebesgue en 1905, réagissant à la première formulation par Ernst Zermelo de ce qu'il est maintenant convenu d'appeler l'axiome du choix : « même pour une totalité infinie d'ensembles, il y a toujours des correspondances qui associent à chaque ensemble un de ses éléments ». Comme l'on sait, l'axiome de Zermelo a été fortement critiqué, notamment par les mathématiciens intuitionnistes, qui rejettent le principe du tiers exclu équivalent, selon P. Ageron, au principe du choix simple. Même si cette équivalence est passée inaperçue, ce dernier principe se trouve entraîné dans, ou mieux couvert par, ces polémiques. La suite de l'histoire confirme l'ambiguïté du statut, ensembliste ou logique, de cet « autre axiome du choix », qui reste fortement lié au contexte dans lequel il est formulé (école constructiviste américaine des années 1970, théorie des topos élémentaires). Cette histoire pourrait être révélatrice des positions dans un débat qui a opposé, au vingtième siècle, des logiciens professionnels de plus en plus technicistes à des mathématiciens généralistes qui s'expriment sur des questions épistémologiques, comme ont pu le faire Arnaud Denjoy et Paul Lévy. L'article de P. Ageron se termine par une double étude des attitudes philosophiques de ces deux mathématiciens français par rapport à la question du choix. Elle donne

ainsi un peu de chair à l'histoire esquissée dans la première partie et montre la complexité des positions qui ont pu être prises.

La Rédaction en chef