

JUNIUS MASSAU ET L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

Dominique TOURNÈS (*)

RÉSUMÉ. — L'ingénieur belge Junius Massau (1852–1909) est considéré comme le créateur de l'intégration graphique. Il a mis au point des techniques élaborées de calcul par le trait pour construire avec précision les courbes intégrales des équations différentielles $y' = f(x)$ et, plus généralement, $y' = f(x, y)$. Il s'est également penché sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. L'article se propose d'analyser ces travaux méconnus et de les replacer dans le contexte des mathématiques pratiquées par les ingénieurs européens de la seconde moitié du XIX^e siècle.

ABSTRACT. — JUNIUS MASSAU AND GRAPHICAL INTEGRATION. — The Belgian engineer Junius Massau (1852–1909) is considered to be the creator of graphical integration. He worked out careful techniques of geometrical calculation accurately to construct the integral curves of differential equations $y' = f(x)$ and, more generally, $y' = f(x, y)$. He also considered the graphical integration of partial differential equations. The present paper analyzes these misunderstood works and places them in the context of the mathematics practised by European engineers in the second half of the nineteenth century.

INTRODUCTION

Junius Massau (1852–1909) est l'un de ces savants que l'histoire des mathématiques a oubliés. Il est absent du *Dictionary of Scientific Biography* [Gillipsie 1970–1990]. Dans la bibliographie de Joseph Dauben [2000], une unique entrée d'index lui est consacrée, renvoyant seulement à un article ancien de Carl Runge et Friedrich Adolf Willers [1915] dans

(*) Texte reçu le 17 février 2003, révisé le 17 octobre 2003.

D. TOURNÈS, IUFM de la Réunion, allée des Aigues Marines, Bellepierre, 97487 Saint-Denis CEDEX (France) et REHSEIS (UMR 7596), CNRS et Université Paris 7-Denis Diderot, Centre Javelot, 2 place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05 (France).
Courrier électronique : tournes@univ-reunion.fr.

Mots clés : Junius Massau, quadratures graphiques, intégration graphique, statique graphique.

Classification AMS : 01A55, 34-03, 65-03, 65S05.



Junius Massau (1852-1909)
(avec l'aimable autorisation de l'Académie royale de Belgique)

l'Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Enfin, dans la *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* éditée par Ivor Grattan-Guinness [1994], on ne trouve que quelques lignes sur Massau pour parler de ses contributions à la théorie des abaques.

Pourtant, Massau a joué un rôle de premier plan dans l'histoire du calcul graphique, cette branche de la science du calcul qui connut une floraison extraordinaire entre 1840 et 1970 avant de disparaître brutalement sous les coups du calcul électronique. En mettant au point de nouveaux algorithmes graphiques pour les opérations du calcul intégral (quadra-

tures, intégration des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles), Massau s'est attaché à faciliter et à rationaliser les constructions les plus délicates auxquelles était alors confronté le dessinateur technique dans sa pratique quotidienne. Ses méthodes, oubliées aujourd'hui, ont connu une grande notoriété avant la généralisation de l'emploi des ordinateurs.

Par cet article, je voudrais faire revivre l'œuvre de Massau dans le domaine de l'intégration graphique. Ce sera bien entendu l'occasion de proposer l'une de ces études spécialisées que j'appelais de mes vœux dans une note précédente [Tournès 2000]. Mais, au-delà d'un sujet qui risque de paraître quelque peu restreint, je voudrais poursuivre deux objectifs plus généraux. Tout d'abord, suggérer que l'histoire des sciences gagnerait peut-être à s'intéresser davantage aux mathématiques utilisées par les ingénieurs et, dans certains cas, créées par eux. Dans les revues spécialisées de l'artillerie, de la marine, des mines, du génie civil, des ponts et chaussées, de la mécanique industrielle, *etc.*, il y a beaucoup plus de mathématiques qu'on ne l'imagine parfois. C'est même là un énorme pan de l'activité mathématique qui est encore largement occulté et qu'il pourrait être fort instructif d'examiner de plus près, tant dans sa composante sociale que dans son rapport aux mathématiques académiques. En second lieu, je voudrais évoquer, toujours à travers l'exemple de l'intégration graphique, les modes de circulation et de transmission des connaissances mathématiques dans le milieu des ingénieurs européens de la seconde moitié du XIX^e siècle. Quelles étaient les passerelles, quels étaient au contraire les clivages entre ingénieurs et mathématiciens, entre ingénieurs des différents corps de métiers, entre ingénieurs de différentes nationalités? Le plus étonnant sera peut-être de constater que certains de ces clivages se retrouvent, transposés, chez les historiens des sciences.

1. UN BRILLANT INGÉNIEUR BELGE

Avant d'examiner les recherches de Massau dans le domaine de l'intégration graphique, ce qui constitue l'objet premier de cet article, il semble utile de résumer quelques informations générales sur l'homme et sur les autres facettes de son œuvre¹.

¹ Les principales sources biographiques dont on dispose à cet effet sont la notice

1.1. Une carrière académique sans accroc

Junius Massau est né le 9 avril 1852 à Gosselies, dans la province du Hainaut, en Belgique wallonne. En 1866, il est admis à l'Athénée royal de Mons, dans la classe de seconde scientifique. Il termine brillamment ses études secondaires en remportant le prix d'honneur de mathématiques au concours général des athénées et des collèges.

Au mois d'octobre 1868, à l'âge de 16 ans, Massau entre à l'université de Gand dans la section des ponts et chaussées de l'École du génie civil, où il accomplit l'année préparatoire et les cinq ans d'études menant au diplôme d'ingénieur². Lors du concours universitaire de 1873–1874, dont le sujet est la théorie du gyroscope, il développe cinq thèses qui constituent le point de départ de ses recherches sur l'intégration graphique, thèses qui émerveillent le jury et qui lui valent d'obtenir le prix.

En 1874, à sa sortie de l'École, il est nommé sous-ingénieur du corps des Ponts et Chaussées. Sa carrière d'ingénieur est de courte durée. En 1878 décède soudainement l'un des professeurs de l'École du génie civil, Charles Andries, qui était chargé des cours de mécanique analytique et de théorie des machines. Pour le remplacer, l'administration des Ponts et Chaussées fait appel à Massau, qui a été remarqué pour ses premiers travaux sur l'intégration graphique. À partir de là, placé en disponibilité du corps des ingénieurs, il va poursuivre une carrière universitaire jusqu'à sa mort soudaine à la suite d'une pneumonie, le 10 février 1909, à l'âge de 56 ans. Il est notamment promu professeur ordinaire à la Faculté des sciences en 1884. Pendant sa carrière, il est chargé successivement des cours d'exercices de mécanique, d'exercices d'analyse, de mécanique analytique, de mécanique céleste et enfin de graphostatique.

Ses travaux lui assurent une solide réputation en Belgique et à

préparée peu après le décès de Massau par Alphonse Demoulin [1913] pour le *Liber Memorialis de l'université de Gand*, celle qui a été rédigée plus tard par Florent Bureau [1967, 1968] pour l'Académie royale de Belgique et le fascicule publié par l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand à l'occasion des manifestations du Centenaire Junius Massau [Dela Ruyé & Lasalle 1953]. Je remercie Jean Mawhin pour m'avoir procuré ces trois documents.

² En Belgique, les premières écoles d'ingénieurs ont été créées dans les années 1830, en raison de l'essor rapide des professions industrielles de l'époque : l'École provinciale des mines du Hainaut fut fondée à Mons en 1836, l'École des mines de l'université de Liège en 1837 et l'École du génie civil de l'université de Gand en 1838. L'université de Gand, instituée en 1817, adopta le latin comme langue officielle jusqu'en 1830, puis le français entre 1830 et 1930, enfin le néerlandais à partir de 1930.

l'étranger. En 1902, il est élu correspondant de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique. En 1906, l'Académie des sciences de Paris lui décerne le prix Wilde « pour ses travaux de mécanique appliquée et particulièrement ses recherches sur l'intégration graphique » [Bureau 1967, p. 11].

1.2. L'œuvre de Massau en dehors de l'intégration graphique

L'œuvre de Massau en mécanique rationnelle est peu connue (voir [Rose 1910], [Bouny 1954]). Il faut dire que notre ingénieur ne s'est jamais vraiment occupé de la publication des leçons de mécanique professées à l'université de Gand à partir de 1879. De son vivant ont seulement circulé trois éditions autographiées de son cours, dont la troisième [Massau 1891–1896] est de loin la plus riche. Ce n'est qu'après sa mort que ses collègues ont pu faire imprimer dans de bonnes conditions les notes de ses dernières leçons [Massau 1911–1913]. Ces textes mériteraient d'être étudiés de plus près car, dès les premières années, Massau ambitionne de simplifier l'exposé des principes de la mécanique par l'emploi systématique de notations vectorielles. En s'inspirant entre autres des travaux de Grassmann et de Résal, il est peut-être le premier à introduire dans l'enseignement des notions de « produit géométrique », $\bar{a}\bar{b}$, et de « moment géométrique », $\mathfrak{M}\bar{a}\bar{b}$, de deux vecteurs (on parle aujourd'hui de produit scalaire et de produit vectoriel) afin de simplifier les formules et de se centrer sur les objets géométriques plutôt que sur leurs composantes. Par ailleurs, en marge de ses cours, Massau a publié quelques autres recherches de mécanique appliquée [Massau 1891a, 1904].

Massau a davantage marqué son temps par les résultats qu'il a obtenus dans le domaine de la nomographie [Evesham 1982, 1986, 1994]. Bien que ces résultats figurent dans le Livre III de son grand mémoire sur l'intégration graphique [Massau 1878–1887], il convient d'en parler ici à part. On sait que la science des abaques s'est considérablement développée à partir des années 1840, en raison notamment des calculs répétitifs et fastidieux engendrés par les travaux de terrassement nécessaires à la construction des lignes de chemin de fer. Une avancée décisive avait été due à Léon-Louis Lalanne, ingénieur français des Ponts et Chaussées, qui, en graduant les axes de coordonnées à l'aide d'échelles non régulières, avait réussi à représenter par des abaques à droites concourantes une assez large classe de relations $F(x, y, z) = 0$. En 1884, dans le but de simplifier

la construction des tables graphiques nécessaires aux ingénieurs, Massau étudie une généralisation utilisant trois faisceaux de droites quelconques, où l'on n'impose plus aux deux premiers faisceaux d'être parallèles aux axes de coordonnées. Plus précisément, si l'on considère, dans un système de coordonnées cartésiennes u et v , les trois faisceaux de droites

$$\begin{aligned} f_1(x)u + g_1(x)v + h_1(x) &= 0, \\ f_2(y)u + g_2(y)v + h_2(y) &= 0, \\ f_3(z)u + g_3(z)v + h_3(z) &= 0, \end{aligned}$$

la condition de concours s'écrit

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0.$$

C'est donc lorsque l'on pourra ramener à cette forme une relation $F(x, y, z) = 0$ qu'elle sera susceptible d'être représentée par un abaque à droites concourantes dans sa version la plus générale (les graduations non régulières de Lalanne correspondent seulement au cas particulier où l'on prend $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(y)$ pour les deux premiers faisceaux). Massau s'est également penché sur la représentation graphique des relations à plus de trois variables : il propose pour cela des systèmes d'abaques mobiles reliés entre eux [Massau 1907]. Globalement, il apporte une contribution importante au développement de la nomographie. Surtout, il est le premier à introduire l'usage des déterminants dans cette discipline. Les déterminants du type de celui écrit plus haut sont appelés « déterminants de Massau » et apparaissent d'autant plus pertinents qu'on les retrouve à l'identique dans le problème dual des abaques à points alignés. Ces objets ont joué un rôle important dans l'histoire ultérieure de la nomographie ; on les rencontre dans des travaux de recherche jusqu'à nos jours (voir par exemple [Mihoc 1998]).

En dernier lieu, il reste à mentionner que Massau s'est ponctuellement intéressé à des sujets divers comme le calcul des primes d'assurances [Massau 1887b], les élections à la proportionnelle [Massau 1891b], les ballons dirigeables et l'aviation [Massau 1903], les géométries non euclidiennes [Massau 1904–1905] et l'enseignement de la géométrie descriptive [Massau 1906].

2. LES MÉMOIRES SUR L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

Venons-en à présent aux travaux de Massau sur l'intégration graphique. Fort volumineux, s'étalant de 1874 à 1904, ils sont tous parus à l'origine dans le *Bulletin mensuel* ou dans les *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*. Certains ont fait l'objet d'une seconde parution dans d'autres revues belges. De plus, les principaux mémoires de Massau semblent avoir connu une diffusion plus large dans la mesure où l'on trouve trace, dans les répertoires bibliographiques et les catalogues des bibliothèques, de diverses rééditions en tirés à part de tout ou partie de ces travaux chez plusieurs éditeurs belges et français³. Cependant, au vu de ce que j'ai pu constater, il ne subsiste qu'un infime nombre d'exemplaires de ces tirages dans les bibliothèques publiques françaises et belges. N'ayant pu établir avec certitude les références précises de toutes les éditions et n'ayant pu en consulter que quelques-unes, j'ai préféré m'en tenir, dans ma bibliographie, aux mémoires originaux de Massau parus dans le *Bulletin* et les *Annales... des ingénieurs de Gand*. Une seule exception a été faite pour le « Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications » : j'ai mentionné la seconde parution du texte dans la *Revue universelle des mines* [Massau 1884–1887], car on y trouve une préface importante qui ne figurait pas dans la version initiale.

2.1. Le développement des thèses de 1874

C'est à l'âge de 22 ans que Massau a formulé les idées fondamentales sur lesquelles il a construit une grande partie de son œuvre scientifique. En effet, ces idées se trouvent dans les cinq thèses dont il a été question plus haut et qui étaient annexées au mémoire de fin d'études présenté au concours universitaire de 1874 :

« I. La méthode employée dans le chapitre II, première partie (du mémoire rédigé à domicile), pour discuter l'équation en ds/dt peut servir pour étudier un grand nombre d'équations différentielles.

II. Dans le même ordre d'idées, on pourrait calculer ces fonctions d'une manière graphique.

III. La même méthode permet de construire graphiquement les surfaces, moments, moments d'inertie, centres de gravité, racines d'équations, *etc.*

IV. On peut imaginer un instrument qui résolve les mêmes problèmes.

³ Liège : Desoer ; Gand : Hoste, Meyer-Van Loo, Van Goethem ; Mons : Dequesne-Masquillier ; Bruxelles : Goemaere ; Paris : Gauthier-Villars.

V. La méthode ancienne d'exposition du calcul infinitésimal n'est pas rigoureuse ; la méthode actuelle est difficile pour les élèves et manque de naturel. En combinant les deux, on pourrait peut-être exposer le calcul infinitésimal plus simplement sans que la rigueur en souffre » [Massau 1884–1887, Préface, p. 243].

La cinquième thèse, d'ordre plutôt didactique, ne nous concerne pas directement ici. Massau l'a développée tout au long de son enseignement à l'université de Gand, en essayant de combiner l'efficacité de la théorie ancienne des infiniment petits et la cohérence de la théorie moderne des limites dans une présentation de son cru qu'il a intitulée « théorie des limites relatives ». Cette théorie, qu'il serait sans doute intéressant d'étudier pour elle-même, est à rapprocher des autres tentatives de la fin du XIX^e siècle pour asseoir le calcul infinitésimal sur des fondements plus solides.

La première thèse nous rappelle que c'est une équation différentielle rencontrée dans la théorie du gyroscope qui fut le point de départ des recherches de Massau, et que c'est l'impossibilité de traiter cette équation par des méthodes analytiques qui le conduisit à imaginer une approche alternative. Les thèses II et III, qui constituent le cœur du programme de travail que se fixe le jeune ingénieur, soulignent alors que la méthode graphique semble appropriée au traitement de tous les problèmes qui se ramènent à des calculs d'intégrales. Il y a là, en germe, l'ambition de bâtir sur des bases solides une vaste théorie de l'intégration graphique. La thèse III, qui se termine par « racines d'équations, *etc.* », laisse même entendre que, comme nous le verrons plus loin, l'intégration graphique pourrait servir au traitement de tous les problèmes du calcul numérique, y compris ceux dont la solution ne s'exprime pas directement par des intégrales.

La thèse IV se rapporte au fait qu'une intégration graphique peut s'exécuter pratiquement de deux manières, soit par le trait, soit à l'aide d'instruments mécaniques d'intégration. Dans le premier cas, le dessinateur réalise lui-même sur l'épure des constructions avec la règle, le compas et les autres instruments usuels de dessin ; dans le second cas, il emploie des instruments mécaniques spécifiques permettant de mesurer directement l'aire d'une surface (planimètres) ou de tracer automatiquement une courbe intégrale (intégraphes). Massau n'a écrit ultérieurement qu'une courte « Note sur les intégraphes » [Massau 1887a] pour explorer l'idée avancée dans sa quatrième thèse qu'on pourrait s'en remettre

à des instruments spécialisés. Dans cet essai quelque peu marginal, il présente une classification rationnelle des instruments d'intégration et mentionne quelques applications possibles comme, par exemple, le tracé mécanique des intégrales elliptiques. Il y explique aussi pourquoi l'intégration graphique par le trait lui a semblé, dès le début de ses recherches, préférable à l'emploi d'un intégraphe :

« La première idée qui s'est présentée à notre esprit est de construire un instrument qui trace la courbe intégrale; cet instrument deviendrait l'opérateur universel dans le système de constructions que nous voulions imaginer. Nous ne nous sommes pas arrêtés longtemps à cette solution; nous avons pensé qu'il ne serait jamais possible de réaliser un instrument assez simple et assez économique pour qu'on puisse le trouver sur toutes les tables des dessinateurs comme la règle, le compas [...]. Nous avons alors dirigé nos recherches vers l'intégration exacte » [Massau 1887a, p. 37–38].

J'aurai l'occasion de reparler plus loin des intégraphes. Dans l'immédiat, il va être uniquement question de calcul par le trait, car c'est dans ce cadre que se situe la quasi-totalité de l'œuvre de l'ingénieur belge. Comme il l'ajoutera lui-même en insistant, le système qu'il a constamment suivi « peut être défini par ces mots : tout par les intégrations graphiques successives » [Massau 1889, p. 408].

2.2. Les trois grands mémoires

Massau va développer inlassablement les thèses centrales II et III jusqu'à la veille de sa mort. Il le fait surtout dans trois grands mémoires dont la parution en feuilleton va s'étaler de 1878 à 1904 dans les *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*⁴.

On trouvera en annexe, à la fin de l'article, le plan détaillé de ces trois grands mémoires et une description analytique de leur contenu. Le lecteur pourra ainsi bénéficier d'une vue d'ensemble sur les préoccupations de notre ingénieur, sur les problèmes qu'il a abordés et sur l'architecture de

⁴ Le premier groupe d'articles, intitulé « Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications. Développement des thèses présentées au concours universitaire de 1873-1874 » [Massau 1878–1887], représente un volume de 740 pages et de 24 planches grand format. Ce texte fut complété en 1889 par un « Appendice au mémoire sur l'intégration graphique et ses applications » [Massau 1889], qui comprend 264 pages et deux planches. Au vu de son ampleur on peut le considérer non comme un appendice, mais comme un mémoire séparé. Réunies, les 26 planches de ces deux premiers ensembles contiennent 350 figures très soignées. Dans la dernière période de sa vie, Massau poursuit son œuvre avec un « Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles » [Massau 1900–1904], travail qui restera inachevé malgré ses 392 pages et ses 147 figures (cette fois insérées dans le texte). Au total, les trois grands mémoires sur l'intégration graphique représentent environ 1400 pages et 500 figures.

son œuvre. Un coup d'œil préalable sur ce panorama permettra de mieux situer les points essentiels que j'envisage de développer plus loin.

Pour être complet en ce qui concerne les publications de Massau, il reste à mentionner quelques articles assez courts portant sur des sujets spécialisés plus ou moins liés à l'intégration graphique [Massau 1883, 1885, 1888, 1901, 1905]. Je ne parlerai pas davantage de ces textes secondaires qui n'apportent guère d'idées nouvelles par rapport au contenu des trois grands mémoires.

3. L'OPÉRATION TYPE DE L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

Un rapide survol des trois longs textes évoqués ci-dessus fait prendre conscience que les résultats obtenus par Massau sont considérables. Il ne saurait être question d'analyser ici en détail plus de 1400 pages contenant des centaines de théorèmes, de méthodes et de remarques. Dans l'absolu, on pourrait avoir l'ambition légitime, pour chacun de ces résultats, de retracer sa genèse, de le replacer dans le contexte des mathématiques et des sciences de l'ingénieur du XIX^e siècle afin de préciser quel fut l'apport original de Massau. Outre qu'elle serait des plus fastidieuses, une telle tâche ne se révélerait pas forcément d'une importance cruciale, car, en fait, la plupart des travaux de Massau résultent du développement méthodique, dans les diverses branches du génie civil, de quelques idées de départ assez simples. L'essentiel est de bien mettre en évidence ces idées. En caricaturant un peu, on pourrait même soutenir qu'il n'y a chez Massau qu'un seul principe, l'« opération type de l'intégration graphique », qui va se décliner de diverses manières pour permettre la résolution de tous les problèmes de l'ingénieur. Pour bien cerner ce principe, je me propose de scruter plus finement quelques passages-clés du mémoire fondateur de 1878–1887.

3.1. La construction fondamentale

Dès les premières lignes de la première livraison, Massau annonce un programme très clair :

« L'objet de ce mémoire est d'exposer une méthode générale ayant pour but de remplacer les calculs de l'ingénieur par des opérations graphiques. Les tracés que nous proposons reposent sur une construction fondamentale que nous avons appelée *intégration graphique* et qui consiste à construire la courbe $y = \int fx dx$, connaissant la courbe $y = fx$ [...] » [Massau 1878–1887, Introduction, p. 13].

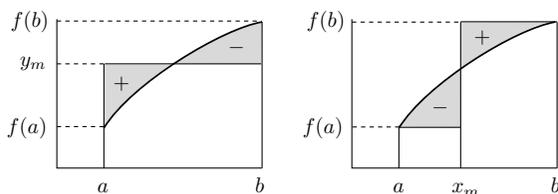


Figure 1. Ordonnée moyenne et abscisse moyenne

Penchons-nous sur les principes de cette construction fondamentale, tels qu'ils sont exposés dans le Livre I de 1878. Réaliser la quadrature de la surface sous une courbe d'équation $y = f(x)$, entre les abscisses a et b , c'est, en un sens qui n'a pas varié depuis l'Antiquité, construire un carré ayant même aire. Il suffit, en fait, de construire un rectangle, car, grâce à la construction bien connue d'une moyenne proportionnelle, on sait transformer un rectangle en un carré de même aire. Le problème est également résolu si l'on se ramène à une réunion finie de rectangles, que l'on sait transformer en un rectangle unique.

Il y a deux façons naturelles de transformer en rectangles la surface sous une courbe (cf. figure 1). Si l'on connaît l'ordonnée moyenne, c'est-à-dire l'ordonnée y_m telle que l'aire marquée en plus sur la figure soit égale à l'aire marquée en moins, on transforme la surface sous la courbe en un seul rectangle ayant pour aire

$$\int_a^b f(t) dt = (b - a)y_m.$$

De façon analogue, la connaissance de l'abscisse moyenne x_m permet de remplacer la surface par une réunion de deux rectangles dont l'aire vaut

$$\int_a^b f(t) dt = (x_m - a)f(a) + (b - x_m)f(b).$$

Grâce à ces considérations, l'intégration de la fonction f entre a et b est ramenée à celle d'une fonction constante ou d'une fonction en escalier, ce que l'on parvient à réaliser graphiquement par le simple tracé de quelques parallèles (cf. figure 2). Marquons un pôle P tel que $OP = 1$. En joignant P aux points de l'axe vertical d'ordonnées $f(a)$, $f(b)$ et y_m , on obtient des droites ayant précisément pour pentes $f(a)$, $f(b)$ et y_m ,

qui vont servir de directions de référence pour le tracé de parallèles. À partir d'un point A d'abscisse a et d'ordonnée arbitraire y_0 , traçons alors une droite de pente y_m . Cette droite coupe la verticale d'abscisse b en un point B tel que la différence des ordonnées de B et de A soit égale à $(b-a)y_m$, autrement dit à l'intégrale cherchée. Si l'on préfère travailler avec l'abscisse moyenne, il faut procéder en deux temps : on trace d'abord, à partir de A , une droite de pente $f(a)$, qui coupe la verticale d'abscisse x_m en C , puis, à partir de C , une droite de pente $f(b)$, qui rencontre en B la verticale d'abscisse b . Cette fois, la différence des ordonnées de B et de A vaut $(x_m - a)f(a) + (b - x_m)f(b)$, soit encore l'intégrale cherchée.

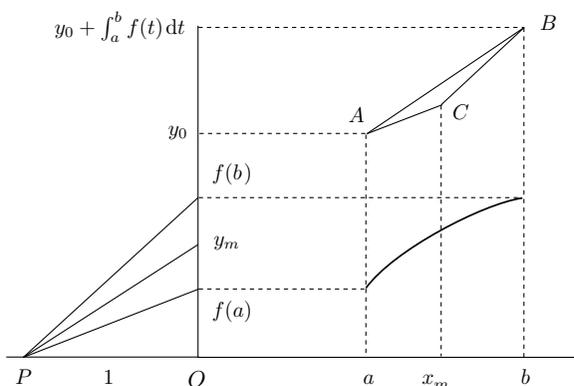


Figure 2. Intégration graphique à partir de l'ordonnée moyenne ou de l'abscisse moyenne

On obtient ainsi une fonction affine (avec l'ordonnée moyenne) et une fonction affine par morceaux (avec l'abscisse moyenne), qui réalisent l'intégration de la fonction constante et de la fonction en escalier dont on était parti. De manière évidente, chacune de ces constructions détermine l'autre, ce qui revient à dire que si l'on connaît l'ordonnée moyenne, on peut en déduire l'abscisse moyenne et vice-versa. L'ordonnée arbitraire y_0 , quant à elle, représente la constante d'intégration. On peut naturellement prendre $y_0 = 0$, autrement dit démarrer la construction avec un point A sur l'axe des abscisses, de manière à ce que l'intégrale cherchée se lise directement comme ordonnée du point final B .

Observons que, si l'on s'intéresse, non pas seulement à l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$, mais à une courbe intégrale d'équation $y = y_0 + \int_a^x f(t) dt$, la construction précédente fournit exactement les extrémités de cette

courbe, ainsi que les tangentes en ces extrémités (*cf.* figure 3). Ces données permettent de tracer ensuite un arc de courbe dans de bonnes conditions (à main levée ou avec un pistolet).

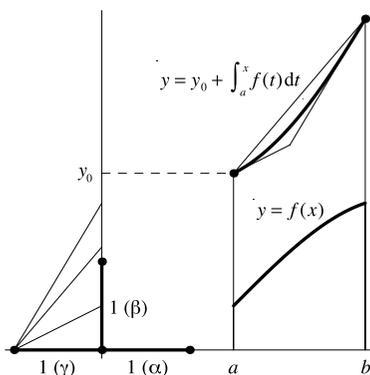


Figure 3. Tracé d'une courbe intégrale

Remarquons enfin que, au lieu de prendre partout une même unité de longueur comme sur les figures 2 et 3, il est loisible de choisir trois unités différentes : une unité α sur l'axe des abscisses, une unité β sur l'axe des ordonnées et une unité γ pour la position du pôle. Par un choix judicieux de ces unités, on peut s'arranger dans la pratique pour que la courbe donnée et la courbe intégrale tiennent entièrement sur la feuille de dessin tout en utilisant la plus grande partie de celle-ci. On optimise ainsi la construction, compte tenu de la surface de travail disponible pour l'épure. Les valeurs numériques des intégrales sont alors simplement multipliées par un coefficient de proportionnalité dépendant du choix de ces trois unités.

Pour améliorer la précision, il ne reste plus qu'à partager l'intervalle $[a, b]$ en autant de parties que l'on veut, sur chacune desquelles on répète la construction élémentaire qui vient d'être décrite. La méthode des ordonnées moyennes donne naissance à un polygone inscrit dans la courbe, et la méthode des abscisses moyennes à un polygone circonscrit à la courbe. En général, on préfère travailler avec le polygone circonscrit car le résultat est une construction exacte de la courbe intégrale par points et tangentes, alors qu'avec le polygone inscrit, on obtient seulement

une construction exacte par points. Voilà donc ce que Massau appelle « la construction fondamentale » ou « l'opération type » de l'intégration graphique. L'essentiel, à ce stade de l'analyse, est de remarquer que Massau, contrairement à la plupart de ses prédécesseurs, ne s'attache pas prioritairement à fournir une construction graphique plus ou moins astucieuse de l'aire sous une courbe. Ce qui l'intéresse, ce n'est pas une valeur numérique isolée, c'est bien une nouvelle courbe, une courbe intégrale de la courbe initiale. Certes, le point final de cette courbe donne, en cas de besoin, la valeur numérique d'une intégrale définie, mais la connaissance de la courbe intégrale dans sa globalité permet beaucoup plus : il faut y voir avant tout le point de départ possible d'une nouvelle intégration. On décèle une véritable démarche algorithmique dans ce souci d'obtenir comme objet final d'une construction un objet du même type que l'objet initial. Massau ouvre ainsi une voie novatrice vers la réalisation d'intégrations graphiques successives par la répétition à l'identique de la construction fondamentale. On comprendra plus loin que là se trouve la clé de la résolution graphique d'une classe très étendue de problèmes.

3.2. Intégration exacte et intégration approchée

Jusqu'ici, on n'a rien dit de concret sur la détermination graphique des ordonnées moyennes ou des abscisses moyennes, dont tout dépend finalement. Si leur construction est possible exactement, on aura une intégration exacte, sinon une construction approchée. Pour une courbe quelconque, il est clair qu'on ne peut pas obtenir exactement les ordonnées moyennes ni les abscisses moyennes. L'idée la plus simple qui vient alors à l'esprit est de les marquer au jugé, en contrôlant à vue, sur chaque intervalle de la subdivision, l'égalité approximative des aires des deux petits triangles curvilignes que l'on fait apparaître. Mais Massau n'évoque même pas cette façon de procéder, sans doute considérée par lui comme trop peu rigoureuse. Son projet est ici de bâtir une véritable théorie mathématique de l'intégration graphique, capable de rivaliser valablement avec les procédés numériques concurrents dont l'étude a déjà été poussée fort loin vers le milieu du XIX^e siècle. On commence par étudier un cas simple où les ordonnées et les abscisses moyennes peuvent être construites exactement : le cas des courbes polynomiales, appelées « courbes paraboliques ». La figure 4 illustre la détermination des ordonnées moyennes sur un intervalle $[a, b]$ pour les trois premiers degrés.

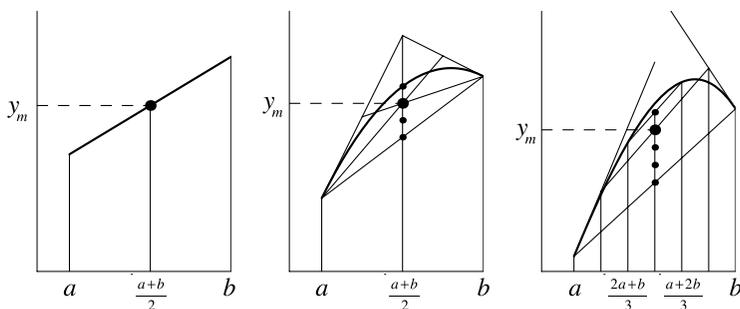


Figure 4. Construction de l'ordonnée moyenne des courbes polynomiales

Le cas du premier degré est immédiat : la courbe est un segment et le trapèze sous la courbe se transforme en un rectangle de même aire en prenant l'ordonnée du milieu du segment. Pour le second degré, le résultat est connu en substance depuis Archimède. Si l'arc de parabole est donné par ses extrémités et par le point d'abscisse $\frac{1}{2}(a+b)$, l'ordonnée moyenne est située aux deux tiers du segment qui joint le milieu de la corde au point de la courbe d'abscisse $\frac{1}{2}(a+b)$. Si, autre possibilité, l'arc de parabole est déterminé par ses extrémités et par la tangente en l'une d'elles, l'autre tangente est elle-même connue puisqu'on sait que ces deux tangentes se coupent sur la verticale d'abscisse $\frac{1}{2}(a+b)$. L'ordonnée moyenne peut alors être construite comme le centre de gravité du triangle formé par la corde et les deux tangentes. Pour le troisième degré, on peut également trouver deux constructions usuelles de l'ordonnée moyenne. Si la courbe est donnée par quatre points d'abscisses équidistantes a , $\frac{1}{3}(2a+b)$, $\frac{1}{3}(a+2b)$ et b , l'ordonnée moyenne se trouve aux trois quarts du segment qui joint le milieu de la corde au milieu du segment formé par les deux points intermédiaires. Si la courbe est connue par ses deux extrémités et par les tangentes en ces points, l'ordonnée moyenne est le milieu du segment qui joint le point d'abscisse $\frac{1}{6}(5a+b)$ de la tangente à l'extrémité gauche au point d'abscisse $\frac{1}{6}(a+5b)$ de la tangente à l'extrémité droite.

Des constructions analogues pourraient être trouvées pour les arcs paraboliques de degrés supérieurs au troisième, mais ces constructions seraient compliquées, difficiles à mémoriser et sans usage réel dans la pratique, aussi Massau décide de s'en tenir au troisième degré. Tous les auteurs postérieurs s'aligneront sur cette position sauf le Hongrois Charles

Goldziher [1912] qui, travaillant de son côté avec les abscisses moyennes, trouvera des constructions exactes jusqu'au cinquième degré.

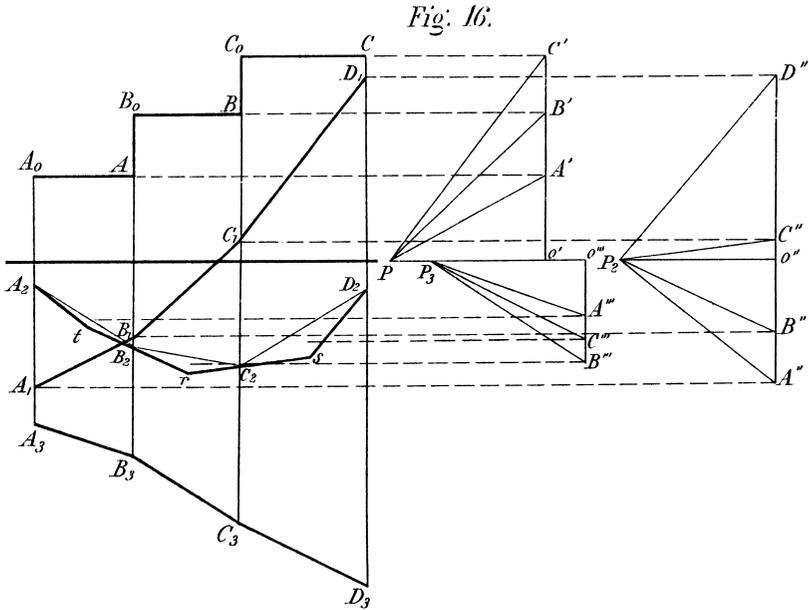


Figure 5. *Intégrations successives exactes*
 [Massau 1878–1887, Livre I, Planche I]

La figure 5 illustre efficacement les notions de base vues jusqu'à présent. On part d'une fonction en escalier représentée par une ligne $A_0AB_0BC_0C$. Une première intégration par la méthode des ordonnées moyennes, avec le pôle P et un point initial arbitraire A_1 , fournit le polygone $A_1B_1C_1D_1$, tracé exact d'une fonction affine par morceaux, primitive de la fonction en escalier donnée. Une seconde intégration avec le pôle P_2 et le point de départ A_2 , cette fois par la méthode des abscisses moyennes, conduit à une seconde intégrale représentée par le polygone circonscrit $A_2tB_2rC_2sD_2$. Cette seconde intégrale est, en fait, formée d'arcs de paraboles dont chacun est déterminé par ses deux extrémités et les tangentes en ces extrémités. À partir de ces données, on sait construire exactement n'importe quel point de ces arcs, ce qui fait qu'on peut considérer que la seconde courbe intégrale est, au moins potentiellement, entièrement donnée sous forme

graphique. Pour la troisième intégration, on détermine les ordonnées moyennes des arcs paraboliques précédents en construisant les centres de gravité des triangles A_2tB_2 , B_2rC_2 et C_2sD_2 formés par les cordes et les tangentes. Avec un pôle P_3 et un point de départ A_3 , on aboutit au polygone $A_3B_3C_3D_3$ inscrit dans la courbe intégrale troisième. Pour procéder à une quatrième intégration, il ne resterait plus qu'à construire les tangentes à la courbe en A_3, B_3, C_3, D_3 , puis les ordonnées moyennes de chacun des arcs paraboliques du troisième degré à partir de ses deux extrémités et des tangentes en ces points. On se rend compte ainsi que, si l'on connaît la construction des ordonnées moyennes jusqu'au troisième degré, on peut réaliser, en pratique, jusqu'à quatre intégrations successives exactes.

Pour intégrer une courbe quelconque, Massau propose de remplacer la courbe, sur chaque intervalle de la subdivision, par une courbe parabolique de degré plus ou moins élevé. Si l'on interpole la fonction par une fonction affine, on obtient un équivalent graphique de la méthode des trapèzes ; avec un polynôme du second degré, on retrouve la méthode de Simpson, et ainsi de suite. L'intégration graphique, qui était exacte pour les courbes polynomiales, devient approximative dans le cas général, mais, en jouant sur le nombre d'intervalles de la subdivision et sur le degré des polynômes d'interpolation utilisés, on peut augmenter la précision à volonté. Un des apports les plus considérables de Massau tient dans cette transposition complète au calcul graphique des formules de quadrature numérique de Newton-Cotes. En effet, et c'est ce qui les distingue fondamentalement des procédés plus ou moins analogues développés au XIX^e siècle, les intégrations de Massau, d'une part, vont bien au-delà des habituels rectangles et trapèzes, d'autre part, se font entièrement sous forme graphique, par des constructions à la règle et au compas : on n'a jamais besoin de mesurer des longueurs sur le dessin, de faire un calcul numérique intermédiaire sur ces longueurs et de reporter le résultat obtenu sur l'épure. Remarquons aussi que Massau ne se contente pas d'une traduction graphique directe des formules de quadrature numérique : reprenant le problème à zéro, il imagine des constructions originales s'appuyant pleinement sur la géométrie des courbes polynomiales d'interpolation, ce qui a pour effet de minimiser le nombre de tracés élémentaires à effectuer.

Lorsque la courbe intégrale est employée au calcul d'une intégrale

définie, une autre originalité de notre ingénieur réside dans son souci permanent d'évaluer l'erreur de calcul. Un tel comportement est encore assez rare vers 1870 : à cette époque, tout le monde ne s'est pas pleinement approprié l'idée qu'un calcul approché sans estimation de l'erreur n'a guère de valeur scientifique. Bien évidemment, l'erreur va être elle-même calculée graphiquement. Dans l'*Appendice* de 1889, Massau donnera des procédés très élaborés : en faisant apparaître le reste des formules de Newton-Cotes comme l'intégrale d'une fonction que l'on sait construire, il fera en sorte que l'erreur d'intégration puisse être calculée à son tour par le procédé général d'intégration graphique ! Le propos est plus modeste dans le Livre I de 1878 que nous sommes en train de parcourir. On procède par majoration et minoration de la fonction à intégrer. Dans le cas d'une fonction concave ou convexe, une combinaison de la méthode des trapèzes et de celle du point milieu conduit à un encadrement très simple. C'est la traduction graphique de ce qui est connu sous le nom de « méthode de Poncelet » (*cf.* figure 6).

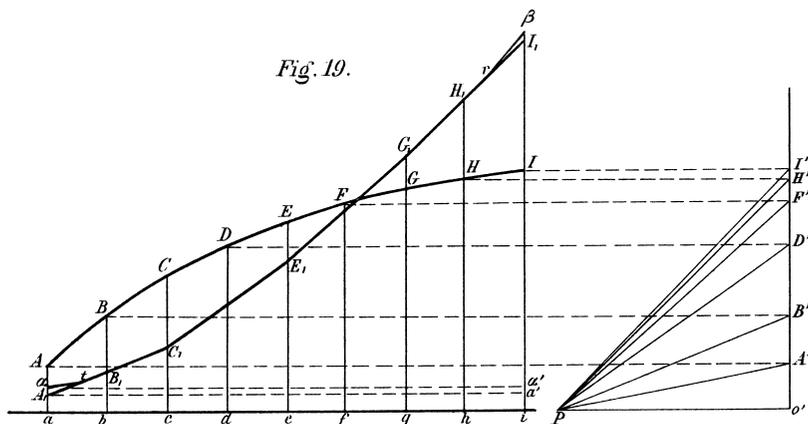


Figure 6. Évaluation graphique de l'erreur par la méthode de Poncelet [Massau 1878–1887, Livre I, Planche II]

Soit donc AI une courbe donnée, supposée concave. Sa projection ai sur l'axe des abscisses est divisée en un nombre pair de parties égales. On obtient d'abord une intégrale plus grande que l'intégrale cherchée en

remplaçant la courbe $ABCDEFGHI$ par ses tangentes aux points B , D , F et H , qui sont au-dessus de la courbe (c'est la règle du point milieu). Les ordonnées moyennes des trapèzes délimités par ces tangentes sont précisément les ordonnées de B , D , F et H , ce qui donne naissance à la courbe intégrale $A_1C_1E_1G_1I_1$. L'intégrale cherchée est donc majorée par la différence des ordonnées de I_1 et de A_1 , soit $\int_a^i f(t)dt \leq a'I_1$. Dans un second temps, le polygone inscrit $ABDFHI$, qui est au-dessous de la courbe, fournit une intégrale moindre que l'intégrale cherchée (c'est la règle des trapèzes). Par la méthode des abscisses moyennes, on construit la courbe intégrale $\alpha C_1E_1G_1r\beta$, d'où, cette fois, la minoration $\int_a^i f(t)dt \geq \alpha'\beta$. Si, en suivant la méthode de Poncelet, on prend comme valeur approchée de l'intégrale la moyenne des valeurs fournies par les tangentes et les trapèzes, on obtient finalement l'évaluation suivante de l'erreur

$$\left| \int_a^i f(t)dt - \frac{\alpha'\beta + a'I_1}{2} \right| \leq \frac{a'I_1 - \alpha'\beta}{2} = \frac{a'\alpha' - I_1\beta}{2}.$$

Ainsi, par un simple report au compas de deux longueurs, pour obtenir leur différence, et un simple partage en deux du segment obtenu, le dessinateur obtient, en fin de travail, une construction exacte d'un majorant de l'erreur d'intégration. L'habileté de Massau a consisté ici à choisir deux courbes intégrales approchées ayant une large partie commune, de manière à réduire au maximum le nombre de tracés à réaliser. Par rapport au calcul proprement dit d'une valeur approchée de l'intégrale, l'évaluation de l'erreur ne nécessite qu'un travail complémentaire infime. Après cet exposé des principes fondamentaux de l'intégration graphique, le Livre I se termine par des considérations plus techniques sur les changements d'axes, les changements d'unités et les problèmes pratiques posés par les intégrations successives (sachant que deux intégrales d'ordre n d'une même fonction diffèrent d'une fonction polynomiale de degré $n - 1$ en raison des n constantes d'intégration, il faut apprendre à gérer graphiquement le passage d'une de ces intégrales à une autre).

3.3. Refonder les opérations du calcul graphique

Le Livre II de 1878 rassemble une collection d'applications de l'intégration graphique à des problèmes usuels d'algèbre, de géométrie et de mécanique. L'objectif est maintenant de retrouver la totalité des

constructions utilisées dans le calcul graphique à partir de l'opération type introduite dans le Livre I. Plus tard, Massau écrira que, dès le début de ses recherches, il ne souhaitait rien de moins que « constituer l'intégration graphique comme science exacte » et « employer comme opérateur universel » [Massau 1889, p. 433]. Son ambition était, en quelque sorte, de simplifier, d'unifier, de réorganiser les constructions disparates employées par les ingénieurs et de leur donner une légitimité mathématique.

De fait, une fois admise l'opération type, on constate que toutes les opérations mathématiques courantes s'interprètent comme des intégrations graphiques, à commencer par l'addition et la multiplication (cf. figure 7).

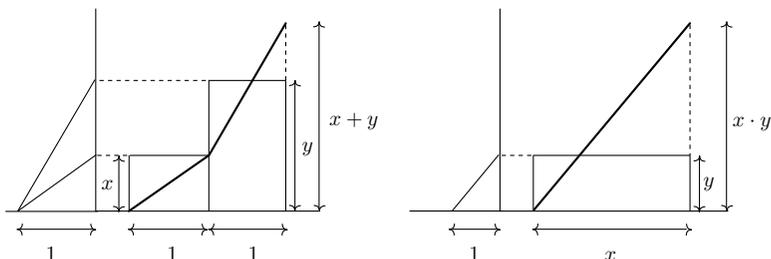


Figure 7. L'addition et la multiplication en tant qu'intégrations graphiques

À partir de là, on peut construire toutes les expressions formées à partir d'un nombre fini de sommes et de produits. C'est le cas des polynômes, d'où la faculté de résoudre graphiquement les équations algébriques. Disposant de l'intégration, on aura accès en plus aux objets transcendants qui s'expriment par des intégrales de divers ordres. On conçoit donc facilement qu'aucun problème usuel ne devrait résister à l'intégration graphique : il sera toujours possible de trouver dans le cadre de cette théorie une solution adaptée, au moins sous forme approchée. Les polynômes jouant un rôle considérable dans l'approximation des fonctions qui ne sont pas connues de manière exacte, voyons de plus près comment Massau construit un polynôme de degré n . Pour fixer les idées, on se placera dans le cas $n = 4$ (cf. figure 8), mais ce qui suit se généralise de manière évidente à un degré quelconque.

Considérons deux points a et b d'abscisses respectives x et $x + \Delta x$, et des ordonnées données $y = aA$, $y_1 = a_1A_1$, $y_2 = a_2A_2$, $y_3 = a_3A_3$, $y_4 = a_4A_4$

Fig. 30

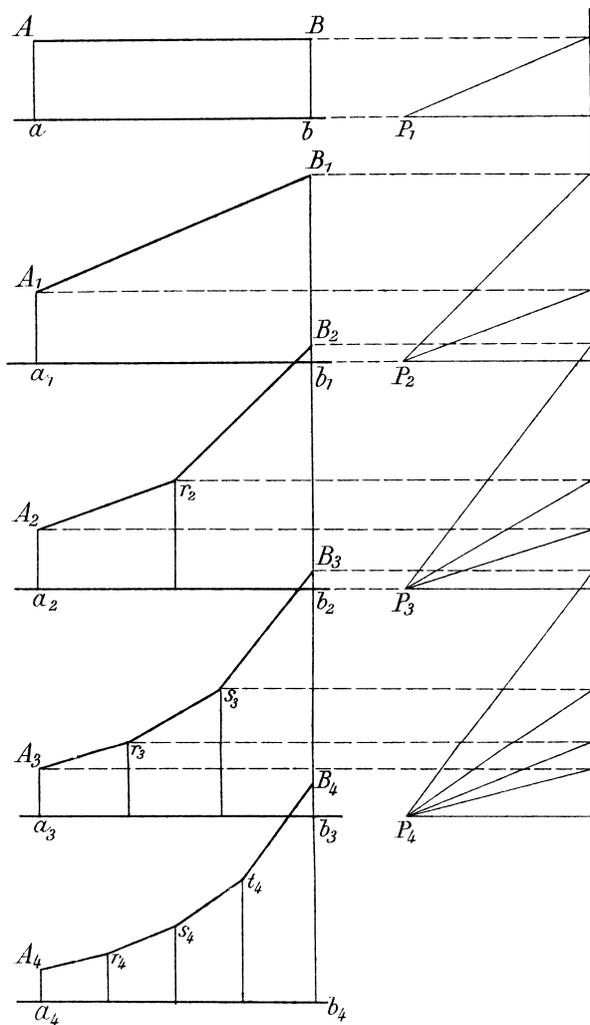


Figure 8. Construction d'une courbe polynomiale
 [Massau 1878-1887, Livre II, Planche XXX]

(pour plus de clarté, le graphique a été dissocié en cinq parties, mais, en fait, les différents segments $[a_i, b_i]$ doivent être vus comme superposés).

On procède à quatre intégrations successives de la manière suivante : à l'étape i , on partage l'intervalle $[a_i, b_i]$ en i parties égales et l'on construit, à partir du point donné A_i un polygone dont les côtés successifs ont pour pentes les ordonnées des sommets de l'étape précédente. À la première étape, on obtient un segment A_1B_1 , où l'ordonnée de B_1 est

$$y'_1 = y_1 + y\Delta x.$$

La deuxième étape conduit à un polygone $A_2r_2B_2$; les ordonnées respectives de r_2 et B_2 sont

$$y'_2 = y_2 + y_1 \frac{\Delta x}{2},$$

$$y''_2 = y'_2 + y'_1 \frac{\Delta x}{2} = y_2 + y_1 \Delta x + y \frac{(\Delta x)^2}{2}.$$

La troisième étape donne ensuite naissance à un polygone $A_3r_3s_3B_3$ dont les sommets r_3 , s_3 et B_3 ont pour ordonnées respectives

$$y'_3 = y_3 + y_2 \frac{\Delta x}{3},$$

$$y''_3 = y'_3 + y'_2 \frac{\Delta x}{3} = y_3 + y_2 \frac{2\Delta x}{3} + y_1 \frac{(\Delta x)^2}{6},$$

$$y'''_3 = y''_3 + y''_2 \frac{\Delta x}{3} = y_3 + y_2 \Delta x + y_1 \frac{(\Delta x)^2}{2} + y \frac{(\Delta x)^3}{6}.$$

De façon analogue, la quatrième intégration conduit à un polygone $A_4r_4s_4t_4B_4$, dont le dernier sommet B_4 a pour ordonnée

$$y''''_4 = y_4 + y_3 \frac{\Delta x}{1!} + y_2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + y_1 \frac{(\Delta x)^3}{3!} + y \frac{(\Delta x)^4}{4!}.$$

On l'aura compris : l'idée directrice de Massau est de traduire graphiquement la formule de Taylor. Un polynôme $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$ étant donné, il suffit maintenant, pour construire la valeur de f au point x , d'appliquer la construction précédente avec $a = 0$, $b = x$, $y = 24\alpha_4$, $y_1 = 6\alpha_3$, $y_2 = 2\alpha_2$, $y_3 = \alpha_1$ et $y_4 = \alpha_0$. Les ordonnées des points terminaux B , B_1 , B_2 , B_3 , B_4 seront alors respectivement $f''''(x)$, $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$. On constate donc que le point final B_4 de la construction a pour ordonnée $f(x)$ et que le dernier segment construit, t_4B_4 , a pour pente $f'(x)$. On obtient ainsi une construction par points et tangentes de la courbe polynomiale : il suffit de répéter l'algorithme précédent pour autant de valeurs de x que nécessaire.

Avant Massau, on pratiquait deux méthodes usuelles de construction des polynômes : celle donnée au XVIII^e siècle par le Hongrois Johann Andreas von Segner [1761] et celle publiée en 1867 par un obscur capitaine du génie de l'armée autrichienne, Eduard Lill [1867a, 1867b]. Toutes deux sont des équivalents graphiques du schéma de Horner, dont l'idée essentielle est de mettre une expression polynomiale

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sous la forme

$$(\cdots ((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0$$

afin de minimiser le nombre de multiplications à effectuer. La construction de Segner repose sur le tracé de parallèles, celle de Lill sur le tracé de perpendiculaires, mais, dans les deux cas, on parvient à minimiser de façon analogue le nombre de constructions géométriques élémentaires à réaliser. Ces deux méthodes classiques sont, bien entendu, connues de Massau — il en parle à deux reprises [Massau 1878–1887, Livre II, p. 208–209 et Livre IV, p. 18–19] — mais notre ingénieur préfère naturellement la construction nouvelle qu'il a imaginée, car elle rentre pleinement dans le cadre de l'intégration graphique : pour obtenir un polynôme de degré n , on intègre n fois sa dérivée n -ième, qui est une constante. Dans une livraison ultérieure [Massau 1878–1887, Livre V, p. 312], il ira un peu plus loin en remarquant que, une fois construit un polygone $A_n r_n s_n \dots B_n$ pour une certaine valeur de x , ce polygone détermine complètement la courbe parabolique de degré n . Il expliquera alors comment construire simplement n'importe quel autre point de la courbe à partir de ce polygone, sans refaire à chaque fois les intégrations successives.

3.4. Réinterpréter les constructions de la statique graphique

Après cette réorganisation des calculs mathématiques les plus courants, la fin du Livre II est consacrée à des applications à la mécanique. On y découvre que de nombreuses quantités intervenant dans les travaux quotidiens de l'ingénieur, notamment les moments statiques, les moments d'inertie et les centres de gravité des surfaces, peuvent s'exprimer à l'aide d'intégrations successives et relèvent donc de façon naturelle de la nouvelle théorie. Pour donner une idée de ces considérations, examinons l'un des exemples les plus significatifs du Livre II, celui d'une poutre droite

plus fastidieuses. Avec habileté, Massau transforme l'expression de M en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} M &= \int_b^c (c-x)p(x) dx = \left[(c-x) \int_b^x p(t) dt \right]_b^c - \int_b^c (-1) \int_b^x p(t) dt dx. \\ &= \int_b^c \left(\int_b^x p(t) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Le lieu des moments fléchissants apparaît alors comme l'intégrale première du lieu des efforts tranchants et l'intégrale seconde de la courbe des charges. Ce lieu est donc simplement la courbe B_2A_2 obtenue par intégration graphique directe de la courbe précédente B_1A_1 .

Le cas de forces isolées sans charge continue est particulièrement instructif (*cf.* figure 10). On suppose que la poutre est soumise à des forces P, P', P'', P''' s'exerçant en des points isolés. Le lieu des efforts tranchants, qui présente un saut brusque à chacun de ces points, est une courbe en escalier $A_0AB_0BC_0CD_0Dd$. Le lieu des moments fléchissants est l'intégrale seconde $a_1A_1B_1C_1D_1d_1$, construite à l'aide d'un pôle P et à partir d'un point initial a_1 .

Massau remarque alors qu'on peut se passer de tracer le lieu des efforts tranchants et construire directement le lieu des moments fléchissants de la manière suivante : il suffit de porter les forces bout à bout, de prendre un pôle quelconque P , de joindre ce pôle aux extrémités des forces ainsi portées et d'utiliser les directions obtenues comme directions des côtés successifs du polygone cherché (la figure 11, que je me suis permis de réaliser moi-même en modifiant la figure précédente, illustre cet algorithme).

Cette construction directe fait l'objet de la remarque suivante :

« Ce tracé graphique des moments fléchissants dans le cas de forces isolées est exposé dans les ouvrages de statique graphique où on le déduit du polygone funiculaire » [Massau 1878–1887, Livre II, p. 248].

Massau veut dire par là que le tracé alors en usage chez les ingénieurs, bien qu'il paraisse plus direct, repose en fait sur des principes étrangers à la question et masque la nature mathématique de l'objet étudié, à savoir qu'il s'agit d'une intégrale seconde. Une ligne directrice essentielle de l'œuvre de Massau, sur laquelle j'aurai plus loin l'occasion de revenir longuement, s'affirme déjà avec force : dégager de la statique un certain nombre de procédés ancrés dans la pratique des ingénieurs et retrouver

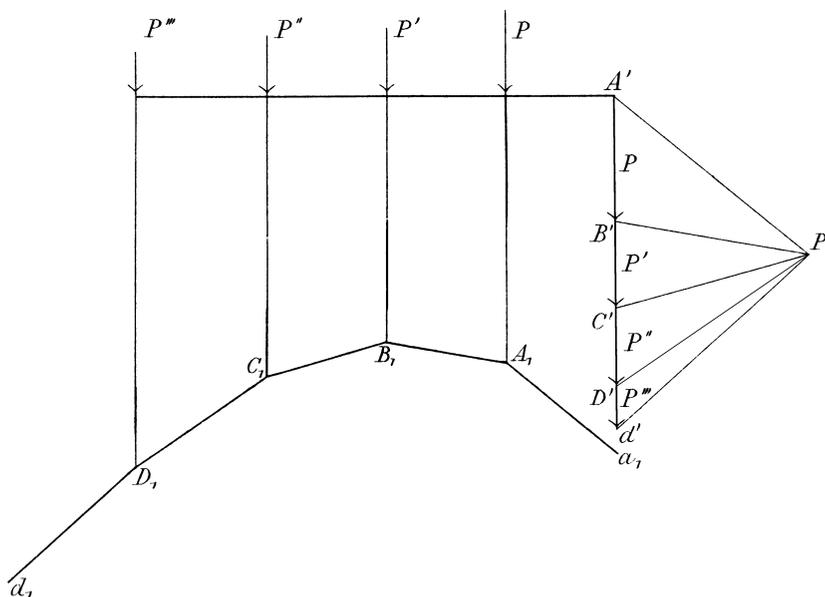


Figure 11. Même calcul par le polygone funiculaire

des points où les intégrales ont la même inclinaison α , est appelée par Massau une « courbe isocline ». Les isoclines (sous le nom de « directrices ») avaient déjà été introduites par Jean Bernoulli [1694] dans les débuts du calcul infinitésimal comme un moyen universel de construction des équations différentielles, utile en particulier dans les cas fort nombreux où les équations ne se laissent pas intégrer par quadratures. Cependant, il semble que cette idée prometteuse ait été aussitôt oubliée : en dehors de quelques lettres échangées entre Bernoulli et ses contemporains, on ne la retrouve jamais dans la littérature avant qu'elle réapparaisse soudain chez Massau. Chez ce dernier, le recours aux lignes d'égale inclinaison a peut-être été inspiré par des pratiques en vigueur en topographie, en hydrographie ou en météorologie (courbes de niveau, courbes isobares, courbes isothermes, etc.) [Runge & Willers 1915, p. 143].

Après avoir construit avec soin des isoclines assez rapprochées 1, 2, 3, 4, 5, 6 (cf. figure 12), on part d'un point arbitraire A de la première courbe et l'on construit un polygone d'intégration $ABCD$ dont les côtés successifs ont les directions associées aux isoclines et dont les sommets successifs

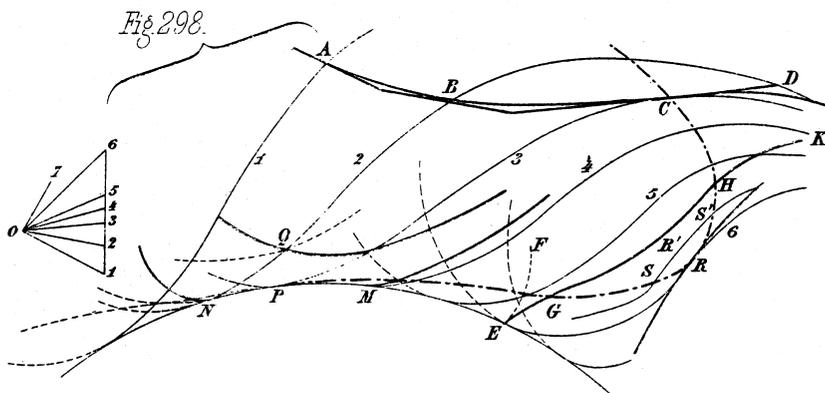


Figure 12. *Intégration graphique d'une équation différentielle*
 [Massau 1878-1887, Livre VI, Planche XIII]

sont pris « plus ou moins au milieu des intervalles qui séparent les courbes isoclines » [Massau 1878–1887, Livre VI, p. 502].

Massau adapte ainsi sa méthode des abscisses moyennes. Le « plus ou moins au milieu » n'est pas davantage précisé : on peut en fait, par une fausse position et une correction, déterminer exactement un point A_1 entre les isoclines 1 et 2 dont l'abscisse tombe au milieu des abscisses de A et B , de même pour les sommets suivants $B_1, C_1, etc.$; dans ce cas, le polygone obtenu est un polygone circonscrit à la courbe intégrale (comme sur la figure 12) et on obtient une généralisation de la méthode des trapèzes. On pourrait aussi, à partir d'un point initial choisi arbitrairement entre les isoclines 1 et 2, prendre pour B_1 le symétrique de A_1 par rapport à B , et ainsi de suite : on obtiendrait alors un polygone inscrit dans la courbe intégrale et une généralisation de la méthode du point milieu. L'essentiel est de remarquer que l'on accède, d'une façon ou d'une autre, à des méthodes d'ordre 2, alors qu'avant Massau, la construction graphique des courbes intégrales des équations différentielles se faisait essentiellement par la méthode d'Euler d'ordre 1. Massau suggère même que l'on pourrait aller plus loin :

« on obtiendra plus d'approximation en traçant les tangentes de manière qu'elles enveloppent une parabole d'un certain degré, ce que l'on peut faire par quelques tâtonnements, en utilisant les propriétés des polygones d'intégration » [Massau 1878–1887, Livre VI, p. 502].

Plus tard, il reprendra ce prolongement sous une autre forme :

« Soit $f(x, y, y') = 0$, l'équation différentielle d'une courbe; on se donne un point initial (x_0, y_0) de la courbe; on calcule y'_0 ; on trouve un point voisin (x_1, y_1) en remplaçant la courbe intégrale par sa tangente; on calcule y'_1 , on trouve un troisième point. [...] par la méthode des approximations successives on peut donner à ce tracé une exactitude comparable à celle des meilleures formules de quadratures approchées. Ainsi, après avoir calculé y_1 par la méthode du rectangle, on peut déterminer y'_1 et appliquer la méthode du trapèze pour obtenir plus exactement y_1 . Ayant trouvé de cette façon y'_0, y'_1, y'_2 , on peut appliquer la méthode de Simpson et ainsi de suite » [Massau 1889, p. 427].

En combinant convenablement les directions associées à plusieurs isoclines successives⁵, on peut donc trouver assez facilement, pour les équations différentielles, des équivalents graphiques des formules de quadrature de Newton-Cotes, alors que le même problème est difficile à résoudre sous forme numérique en raison des équations implicites qui apparaissent à chaque pas du calcul. Des algorithmes numériques d'ordre supérieur à 2 ne seront découverts qu'au tournant du XX^e siècle, avec les méthodes de Runge, Heun et Kutta.

Contrairement à ce qu'il avait fait pour les équations simples $dy/dx = f(x)$, Massau ne développe guère les constructions associées au cas général $F(x, y, dy/dx) = 0$. Son discours prend ici une direction nouvelle : il ne s'intéresse plus tellement à un calcul graphique précis des valeurs numériques des intégrales, mais à l'allure globale de leurs courbes représentatives. Pour cela, il considère les isoclines comme les projections des courbes de niveau de la « surface des inclinaisons » d'équation $F(x, y, z) = 0$. Cela permet de caractériser la courbe des inflexions, la courbe des rebroussements, les points singuliers et les solutions singulières. Notre ingénieur examine ensuite en détail le cas où les isoclines sont des droites concourantes. Dans le cas général, lorsque les isoclines passent par un même point, qu'il appelle « foyer », il étudie les intégrales dans les environs de ce point, en remplaçant les lignes isoclines par leurs tangentes, et détermine très soigneusement les diverses dispositions possibles autour d'un foyer : ces dispositions correspondent à ce que nous appelons aujourd'hui un foyer (Massau dit « point asymptotique »), un col et un nœud.

⁵ L'ajustement de courbes paraboliques de haut degré aux pentes fournies par les isoclines peut se faire par le trait, comme chez Massau, mais aussi par l'emploi de pistolets, ces instruments de dessin que les Anglo-Saxons appellent « *French curves* » ou « *marine curves* » [Donnell 1942, p. 335–336].

En guise d'application, on revient ensuite à l'hydraulique, avec l'étude du mouvement permanent des eaux courantes dans un canal découvert. On s'intéresse aux variations de la profondeur h en fonction de la longueur s du canal. Dans le cas d'un lit de section rectangulaire dont la largeur croît uniformément avec s , on doit résoudre l'équation différentielle

$$h^3 s^3 \left(i - \frac{dh}{ds} \right) = \frac{q^2}{ga^2} \left[\left(gb - \frac{dh}{ds} \right) s - h \right],$$

où i est la pente du fond, g l'intensité de la pesanteur, a le coefficient de proportionnalité entre la largeur du canal et s , b une constante dépendant de la nature des parois du canal et déterminée expérimentalement. Sous l'hypothèse que la pente du fond est assez faible, Massau construit les isoclines et étudie le comportement des courbes intégrales selon les méthodes développées précédemment (*cf.* figure 13). On découvre qu'il y a un point asymptotique P : les courbes intégrales s'approchent indéfiniment de P en tournant autour de lui.

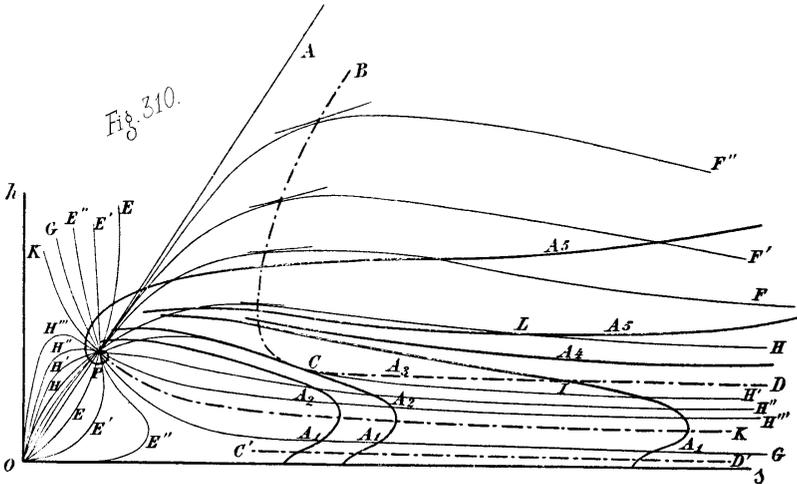


Figure 13. Courbes intégrales d'un problème hydraulique
[Massau 1878-1887, Livre VI, Planche XIII]

On s'éloigne par là du calcul graphique considéré comme simple technique de calcul numérique. Dans une telle situation, où il y a des constantes déterminées expérimentalement et de nombreuses hypothèses simplificatrices, la précision des résultats est évidemment illusoire. Massau

évolue donc vers une sorte de calcul graphique qualitatif, dont le but est le tracé global des courbes intégrales et la description de leurs propriétés. Il écrit par exemple :

« L'intégration graphique des équations différentielles conduit aussi à des résultats utiles ; nous avons montré par des exemples [...] que l'on pouvait par la géométrie intégrer des équations qui résistent assez bien aux méthodes analytiques » [Massau 1889, p. 435].

Cet aspect apparaît de manière significative dans les conclusions de l'exemple du canal : la partie de l'axe hydraulique au voisinage du point P n'est pas possible à concevoir dans la réalité, mais le fait que le point P soit proche de l'origine, là où la largeur de la section est nulle, montre qu'il y a au départ des vitesses très grandes. Massau, redevenant pleinement ingénieur, en conclut qu'il faut installer un appareil au début du canal pour créer ces vitesses initiales, avant d'entrer dans la partie de l'axe hydraulique qui est réalisable concrètement [Massau 1878–1887, Livre VI, p. 531].

Les considérations théoriques de Massau sur le comportement global des courbes intégrales font inévitablement songer aux préoccupations d'Henri Poincaré à la même époque. Entre 1881 et 1886, Poincaré a publié en quatre parties un long mémoire intitulé « Sur les courbes définies par une équation différentielle ». Dans ce mémoire, qui a été étudié en détail par Christian Gilain [1991], Poincaré classe, lui aussi, les points singuliers des équations différentielles du premier ordre dans le domaine réel et étudie le comportement des courbes intégrales au voisinage de ces points. Sachant que Massau a publié son Livre VI en 1887, est-il envisageable qu'il ait lu auparavant le travail de Poincaré et qu'il s'en soit inspiré ? C'est peu probable car, en fait, Massau avait déjà présenté une première version de son Livre VI le 3 décembre 1877 à la section de Charleroi de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand, ainsi qu'en témoigne le bulletin mensuel de cette association [Massau 1884–1887, Préface, p. 244–247]. D'autre part, le vocabulaire, les notations et les démonstrations de Massau sont manifestement différents de ceux de Poincaré. Enfin, Massau, tout au long de son œuvre, cite des dizaines de personnes dont les travaux sont en rapport avec les siens : pourquoi n'aurait-il pas parlé de Poincaré ? La question est encore plus complexe dans la mesure où Viacheslav Dobrovolski [1972] a signalé que la priorité de la classification des points singuliers des équations

différentielles revenait au mécanicien russe N.E. Joukovski, dans une thèse de 1876 sur la cinématique des corps liquides. Avec l'intervention de la mécanique des fluides, on se rapproche étrangement des recherches hydrauliques de Massau. Sur cette question des points singuliers, qui nous éloigne ici de notre sujet mais qui mériterait d'être approfondie ailleurs, on ne peut que constater l'existence de deux courants de travaux sans lien apparent entre eux, l'un chez les mathématiciens académiques, l'autre chez les ingénieurs, avec des résultats analogues qui ont pu être redécouverts plusieurs fois, y compris au sein du même courant.

4. POUR SITUER L'INTÉGRATION GRAPHIQUE DE MASSAU

Jusqu'ici, j'ai analysé assez longuement les travaux de Massau pour eux-mêmes. Il était important de le faire, tant cet ensemble de publications est aujourd'hui méconnu. Au-delà de cette première approche descriptive et technique, il reste à situer l'œuvre de l'ingénieur belge dans son contexte : nous allons voir que cette œuvre s'inscrit dans une longue tradition de recherches théoriques et pratiques sur les quadratures, qu'elle est représentative d'une culture au carrefour des mathématiques et des sciences de l'ingénieur, et qu'elle est révélatrice d'une ligne de fracture entre les sphères scientifiques francophone et germanophone.

4.1. Sur l'histoire des quadratures graphiques

Le problème des quadratures est l'un des plus anciens des mathématiques. Pourtant, en dehors des intégrations analytiques exactes et des formules numériques approchées, l'histoire des techniques concrètes de quadrature employées par les différents corps de métier reste largement à écrire. On ne dispose que de peu d'informations à ce sujet. La lecture de documents comme le *Cours de calcul graphique des surfaces* [Prédhumeau 1923] enseigné à l'École spéciale des travaux publics dans les années vingt permet toutefois de se persuader de la richesse insoupçonnée de cette question. A.Y. Fraser [1886, p. 29] nous précise qu'avant l'invention des planimètres, trois sortes de méthodes pratiques ont été couramment utilisées pour évaluer l'aire des surfaces. Soit on partage la surface donnée par des ordonnées parallèles équidistantes, on mesure ces ordonnées et on traite les résultats numériquement ou graphiquement ; soit on place sur la surface une feuille transparente ou une plaque de verre finement

quadrillée, on compte les petits carrés entièrement inclus dans la surface et on estime ceux qui sont seulement inclus en partie ; soit on dessine la surface sur une feuille de carton ou de métal, on la découpe et on la pèse.

Les deux dernières de ces méthodes, dont la précision dépend avant tout de la qualité du matériel utilisé et du soin de l'opérateur, ne peuvent guère être améliorées dans leur principe. Par contre, la première idée se prête à des approfondissements intéressants. Puisqu'on a ramené la mesure d'une surface à la mesure d'une somme de longueurs, on peut tout simplement utiliser une bande de papier sur laquelle on reporte bout à bout les différentes ordonnées, ou employer des appareils spéciaux analogues à un curvimètre [Prédhumeau 1923, p. 51–54]. On peut aussi, à partir des ordonnées mesurées sur l'épure, mettre en œuvre les différentes formules numériques de quadrature approchée [Merrifield 1868, p. 420]. Ces formules supposent en général des ordonnées équidistantes, ce qui n'est pas toujours le cas lorsqu'il s'agit de calculer l'aire sous une courbe obtenue expérimentalement à partir de mesures disparates. Edward Charles Pickering [1874] propose alors la procédure semi-graphique suivante : on construit soigneusement la courbe par points à partir des valeurs dont on dispose, puis on trace sur la figure des ordonnées équidistantes et on lit sur la courbe la valeur de chacune d'elles. Dans le même ordre d'idées, des techniques purement graphiques sont aussi employées, qui consistent à découper la surface en petits triangles, rectangles ou trapèzes que l'on transforme, par des constructions géométriques exactes, en un seul carré de même aire que la surface initiale. On retrouve alors le sens premier du mot « quadrature ». En pratique, plutôt qu'à un carré, on préfère souvent se ramener à un seul rectangle de côté 1, ou à un seul triangle de côté 2, de manière à obtenir l'aire par la mesure directe d'une longueur. Sous différentes formes, cette idée est abondamment développée dans les premiers ouvrages de calcul graphique [Cousinéry 1839] et dans les traités de statique graphique [Culmann 1866, 1880]. Des recherches sur ce thème continuent jusque vers la fin du XIX^e siècle. Par exemple, Édouard Collignon [1887] publie une nouvelle méthode graphique de quadrature, en fait une variante de la méthode des trapèzes, reposant sur une construction géométrique originale pour transformer deux trapèzes juxtaposés, pas forcément de bases égales, en un seul rectangle de même aire : il résout ainsi astucieusement le problème du calcul de l'aire sous une courbe

lorsque les ordonnées ne sont pas équidistantes. De plus, la même idée permet une mise en œuvre graphique très simple de la règle de Simpson.

À partir du début du XIX^e siècle, on a cherché à fabriquer des appareils pour réaliser mécaniquement la sommation des petits éléments de surface inclus dans un contour fermé. Ces appareils, que l'on appelle en général « planimètres », reposent sur l'emploi d'une roulette graduée dont on mesure l'angle de rotation. Le premier instrument de ce type semble avoir été construit en 1814 par l'ingénieur bavarois Johann Martin Hermann. Le mécanisme est déplacé parallèlement à l'axe des abscisses, avec un pointeur qui suit une courbe d'équation $y = f(x)$. Une roulette liée au pointeur tourne par friction sur un cône, de sorte que son angle de rotation soit proportionnel à l'ordonnée de la courbe. Ainsi, pour un déplacement élémentaire dx le long de l'axe des abscisses, la roulette tourne (à un coefficient près dépendant des dimensions de l'appareil) d'un angle $f(x)dx$ et, pour un déplacement le long d'un segment $[a, b]$, elle tourne d'un angle total $\int_a^b f(x)dx$. Après Hermann, d'autres inventeurs imaginèrent de faire tourner la roulette intégrante sur un disque, puis directement sur le plan de la feuille de papier, pour aboutir notamment, en 1854, au fameux planimètre polaire de Jakob Amsler où la roulette se déplace par une combinaison de mouvements de rotation et de glissement. Ces divers planimètres, qui réalisent de manière spectaculaire une intégration théoriquement exacte, eurent un grand succès commercial et furent fabriqués à des centaines de milliers d'exemplaires, mais ce n'est pas ici le lieu de refaire leur histoire : je renvoie pour cela aux ouvrages incontournables de Willers [1926, 1943, 1951], où l'on trouvera près de neuf cents références bibliographiques et la description détaillée de certaines d'instruments, ainsi qu'aux deux articles récents de Joachim Fischer [1995, 2002] qui font maintenant autorité dans ce domaine.

L'idée de quadrature par découpage d'une surface en petits éléments géométriques simples, indépendamment des multiples déclinaisons que l'on vient d'évoquer, remonte finalement à l'Antiquité. À partir du XVII^e siècle, un nouvel ensemble de méthodes va naître de la découverte du lien surprenant entre les quadratures et le problème inverse des tangentes : construire une courbe connaissant ses tangentes ou, plus généralement, une propriété de ces dernières. Les triangles construits par Massau autour du pôle pour transformer les ordonnées de la courbe donnée en direc-

tions de tangentes pour la courbe intégrale cherchée ne rappellent-ils pas les triangles caractéristiques leibniziens? Effectivement, chez les fondateurs du calcul infinitésimal, on trouve déjà des intégrations graphiques d'équations différentielles par petits éléments de tangente, sous diverses formes équivalentes à la méthode numérique d'Euler [Tournès 2003]. Cependant, les constructions des premiers temps du calcul infinitésimal, qui paraissent des plus naturelles en lien avec la conception d'une courbe en tant que polygone formé de côtés infiniment petits se confondant avec des segments de tangentes, ont été surtout mobilisées pour étudier des courbes intégrales d'équations aux variables mêlées du type $y' = f(x, y)$, dans le cas fréquent où ces équations résistent aux méthodes analytiques exactes. On ne les rencontre pas en pratique pour les équations différentielles simples du type $y' = f(x)$ avec le but avoué de calculer l'aire sous une courbe. C'est seulement dans le dernier tiers du XIX^e siècle, en particulier avec Massau, que se répand l'idée que les quadratures graphiques pourraient être obtenues comme application de la construction des courbes intégrales. Et c'est justement ce changement de point de vue parmi les calculateurs, ce passage potentiellement fécond des quadratures graphiques à l'intégration graphique, qu'il me semble important de mettre en évidence.

4.2. L'environnement direct des travaux de Massau

Venons-en donc maintenant aux recherches analogues à celles de Massau, c'est-à-dire celles dont le but affiché est de construire la courbe intégrale et d'en tirer des applications. Pour replacer ces travaux dans leur contexte scientifique, pour faire apparaître leurs connexions éventuelles, proposons-nous de parcourir les publications antérieures à 1890 qui, soit citent Massau, soit sont citées par lui.

Massau nous renseigne⁶ très précisément sur la genèse de ses idées [Massau 1878–1887, Livre II, p. 248]. Il mentionne deux sources d'inspiration. Tout d'abord, c'est dans l'enseignement de l'un de ses professeurs à l'École du génie civil de l'université de Gand, Émile Boudin, qu'il a découvert que le moment fléchissant d'une poutre droite était une intégrale seconde et pouvait donc être construit indépendamment du polygone funiculaire.

⁶ Dans une note de bas de page de la seconde livraison de son premier mémoire, parue en 1878.

Cette démonstration de Boudin a été le point de départ de ses recherches : elle lui a donné l'idée de l'intégration graphique et l'envie d'en tirer le meilleur parti. Massau reconnaît qu'il a ensuite beaucoup appris du mémoire de Collignon [1872] sur l'intégromètre présenté peu auparavant par Marcel Deprez [1871], mémoire qui l'a convaincu de l'importance de l'intégration par la mise en évidence de tout ce qu'on peut lui rattacher. Dans l'*Appendice* de 1889, on apprend aussi [Massau 1889, p. 426] que c'est un mémoire de Boudin, paru en 1862 et intitulé « De l'axe hydraulique des cours d'eau contenus dans un lit prismatique, et des dispositifs réalisant, en pratique, ses formes diverses » [Boudin 1862], qui lui a suggéré l'idée des isoclines pour l'étude géométrique directe des courbes intégrales d'une équation différentielle. En résumé, au vu des quelques informations qui précèdent et des autres références mentionnées par Massau à l'occasion de questions diverses sans rapport direct avec l'intégration graphique, on peut dire que les sources de notre ingénieur ont été, pour l'essentiel, les cours de l'université de Gand, les diverses revues belges de sciences de l'ingénieur et les *Annales des Ponts et Chaussées* de Paris dont il était, semble-t-il, un lecteur des plus assidus.

Toujours dans l'aperçu historique de l'*Appendice* de 1889, Massau fait un inventaire et une analyse des autres publications qu'il a pu consulter sur l'intégration graphique. Il s'agit d'un inventaire *a posteriori* : lors de ses premières recherches de la période 1873–1878, Massau ne connaissait probablement pas celles de ces publications qui sont antérieures à 1878, car sinon pourquoi n'aurait-il pas cité leurs auteurs à côté de Boudin, Collignon et Deprez ? Quoi qu'il en soit, la liste de références fournie par Massau constitue un point de départ utile pour faire revivre plusieurs lignées parallèles de recherches analogues aux siennes dans les années 1870–1890.

Il faut mentionner en premier lieu un opuscule tout à fait remarquable publié à Prague en 1872 sous le titre *Ueber graphische Integration* [Šolín 1872]. Son auteur, Josef Marcell Šolín, ingénieur et mathématicien tchèque, deviendra ensuite, à partir de 1876, professeur de mécanique de construction à l'école polytechnique tchèque de Prague⁷. Si ce court traité

⁷ Dans la Tchéquie du XIX^e siècle, gouvernée depuis Vienne, l'allemand était la langue officielle. L'université et l'école polytechnique de Prague étaient allemandes. Sous la poussée du nationalisme tchèque, ces institutions évoluèrent progressivement

(huit pages et une planche de quatre figures) est remarquable, c'est parce que c'est le premier ouvrage connu traitant spécifiquement de l'intégration graphique. De plus, il est aussi riche qu'il est bref. Šolín commence par analyser la construction d'une courbe dérivée $y' = F'(x)$ à partir des tangentes d'une courbe primitive $y = F(x)$ et se propose de réaliser la construction inverse de manière approchée. Pour cela, sur chaque petit intervalle, il assimile la courbe dérivée à une droite et la courbe primitive à un arc de parabole, ce qui le conduit à former un polygone circonscrit dont les sommets tombent au milieu des intervalles de la subdivision. Il s'agit donc de la méthode des trapèzes, la première des méthodes que Massau exposera plus tard. Le propos est illustré par un bel exemple : la construction de l'intégrale indéfinie $\int (\cos x/x) dx$, d'où l'on déduit, par lecture de la différence de deux ordonnées, le calcul de l'intégrale définie $\int_{0,5}^2 (\cos x/x) dx$. Ajoutons que Šolín perçoit lui aussi l'intérêt qu'il y a à construire une courbe intégrale plutôt qu'une simple intégrale définie :

« Si on a déduit d'une fonction dérivée donnée $F'(x)$ la fonction primitive $F(x)$, on peut considérer celle-ci comme dérivée d'une nouvelle fonction primitive $F_1(x)$ et construire cette dernière, donc intégrer deux fois, trois fois, ..., n fois »⁸ [Šolín 1872, p. 6].

Šolín propose ensuite une généralisation de sa méthode des trapèzes aux équations différentielles $\varphi(x, y, y') = 0$ ou $y' = \varphi(x, y)$: tout comme chez Massau, la construction se fait à l'aide des isoclines $\varphi(x, y) = h$, avec une détermination par corrections successives des sommets du polygone circonscrit. Šolín évoque une application possible à l'équation de Riccati $y' = ay^2 + bx^m$, qui n'est pas intégrable par quadratures, et traite l'exemple $m = 2$, facile à construire puisque les isoclines sont des cercles concentriques. Enfin, pour les équations différentielles totales à trois variables, de la forme $dz = M dx + N dy$ avec deux fonctions M et N de x et y vérifiant $dM/dy = dN/dx$, la surface solution $z = F(x, y)$ passant par le point initial (x_0, y_0, z_0) est visualisée grâce à ses sections par

vers une scission en deux parties, une tchèque et une allemande. C'est ainsi que l'école polytechnique tchèque de Prague devint autonome en 1869 (voir [Maurer 1998, p. 395] ou [Nový 1996, p. 503]). Joseph Marcell Šolín (1841–1912), qui y enseigna, fut l'un des membres de la fameuse école géométrique tchèque qui brilla dans la seconde moitié du XIX^e siècle et jusqu'à la Seconde Guerre mondiale.

⁸ « Hat man aus einer gegebenen Derivation die Urfunction abgeleitet, so kann man diese als Derivirte einer weiteren Urfunction ansehen und letztere construiren u. s. f., also doppelt, dreifach, ... n fach integriren ». La traduction est mienne.

des plans parallèles aux plans $y0z$ et $x0z$. Ces sections sont représentées par projection orthogonale sur les plans de coordonnées et rabattement selon les techniques de la géométrie descriptive. On construit d'abord les sections $x = x_0$ et $y = y_0$ à partir des équations différentielles ordinaires $dz = M(x_0, y)dy$ et $dz = N(x, x_0)dx$, puis d'autres sections de proche en proche.

Le petit traité de Šolín est un joyau sorti de nulle part : aucune source n'est évoquée, aucune référence n'est citée. Quelle surprise d'y retrouver à peu près toutes les idées de départ de Massau ! Pourtant, il est quasiment certain que Massau ne connaissait pas le travail de Šolín au moment où il a formulé ses thèses sur l'intégration graphique. Beaucoup de choses différent d'ailleurs entre les deux hommes : le vocabulaire, les notations, les exemples. On imagine que Massau a dû ressentir une certaine amertume en découvrant plus tard que Šolín lui avait en partie volé la priorité. On le sent lorsqu'il écrit, en 1889 :

« Avant nos travaux, il n'existait, comme intégration graphique, que la méthode inverse des tangentes, c'est-à-dire un tracé grossièrement approché, équivalent à la méthode des rectangles (Sonnet) ou des trapèzes (Šolín) » [Massau 1889, p. 433].

Par cette phrase, il cherche à minorer l'importance de l'ingénieur tchèque en le mettant dans le même sac que ses autres prédécesseurs. Massau ne peut alors que se recentrer sur ce qui reste son apport personnel incontestable : des intégrations graphiques pas seulement d'ordre 1 et 2, mais d'ordre quelconque, une réorganisation de l'ensemble du calcul graphique à partir de l'intégration graphique et une gigantesque collection d'applications dans tous les domaines. Comment comparer quelques idées de départ à peine esquissées sur huit pages à une œuvre monumentale de 1400 pages, fruit de vingt-cinq années de labeur ? Massau mérite bien d'être considéré comme le créateur de l'intégration graphique en tant que corps de doctrine. Il n'en reste pas moins qu'il est troublant de constater que deux ingénieurs, un Belge et un Tchèque, ont pu formuler les mêmes idées au même moment de façon indépendante.

Le petit fascicule de Šolín a connu une postérité en Allemagne. Un ingénieur de Hambourg, Christian Nehls, futur inspecteur des constructions hydrauliques de la ville, s'intéresse de son côté au calcul graphomécanique des intégrales à partir de 1872. Dans un premier temps, il ne connaît pas le travail de Šolín. Ses recherches s'inscrivent dans la

lignée des applications que Jakob Amsler [1856] a données de son nouveau planimètre polaire. Après une première série d'articles [Nehls 1872, 1874a, 1874b] sur ce planimètre et sur son emploi pour le calcul des aires, moments statiques et moments d'inertie, Nehls rédige un article plus théorique intitulé « *Ueber graphisch-mechanisches Integriren* » [Nehls 1875], dans lequel il montre comment de larges classes d'intégrales définies, simples et multiples, peuvent être mises sous des formes se prêtant à un calcul avec un planimètre, soit en coordonnées cartésiennes, soit en coordonnées polaires. Jusque-là, rien à voir avec l'intégration graphique au sens de Massau : Nehls se situe dans le grand courant de recherches du XIX^e siècle lié à l'invention et à la popularisation des instruments mécaniques d'intégration. C'est un peu plus tard, dans un livre plus important intitulé *Ueber graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik* [Nehls 1877], que l'ingénieur de Hambourg cite pour la première fois son homologue pragois Šolín. Dans cet ouvrage de synthèse qui connut trois éditions jusqu'en 1885, Nehls expose les méthodes de calcul par le trait de Šolín aux côtés de ses propres méthodes reposant sur l'emploi des planimètres. Il présente la méthode des trapèzes en y ajoutant une variante de son cru qui est la traduction graphique de la méthode classique du point milieu, mais, comme Šolín, il ne dépasse pas les méthodes d'ordre 2 : au-delà, il se contente d'appliquer les formules usuelles de quadrature numérique aux ordonnées mesurées sur la courbe à intégrer ; contrairement à Massau, il ne construit pas ces formules. Nehls traite successivement des équations différentielles $y' = f(x)$, $y' = f(x, y)$, $y'' = f(x)$, $y'' = f(x, y)$, puis donne des applications à la statique graphique. Dans ces applications, il fait souvent un raisonnement analytique et, seulement à la fin, construit le résultat trouvé ; là encore, il se distingue de Massau qui, lui, exécute la totalité du calcul sous forme graphique. En définitive, on se retrouve face à un traité disparate, qui mêle méthodes anciennes, emploi du planimètre et idées de Šolín. Bien que ne dégagant pas la même impression de cohérence et d'élégance que son concurrent belge, il a été longtemps considéré comme l'ouvrage de référence dans les pays germanophones.

Dans la mouvance de cette école allemande de l'intégration graphique qui se constitue autour de Šolín et Nehls, il faut mentionner le Polonais

Bruno Abdank-Abakanowicz⁹, inventeur de l'un des premiers intégraphes. Abdank-Abakanowicz, insatisfait des premiers intégrateurs mécaniques (planimètres, intégromètres) qui avaient vu le jour depuis 1814, ambitionne de construire un nouveau type d'appareil :

« On se bornait d'ailleurs, dans tous les appareils de cette nature, à rechercher le *résultat final* de l'intégration ; ainsi les planimètres donnent simplement la mesure numérique de la surface considérée ; les totalisateurs dynamométriques, la somme du travail dépensé ou produit pendant un certain laps de temps : aucun d'eux ne peut fournir par des indications continues la loi intime suivant laquelle a été effectuée la sommation. Le but de nos recherches a été tout autre. Nous avons cherché à construire des intégrateurs qui non seulement effectuent la somme totale des éléments, mais donnent encore, sous forme de tracé graphique d'une courbe, la loi complète qui régit la sommation, permettant de suivre pas à pas, pour ainsi dire, le progrès de l'intégration et faisant connaître la succession des phases par lesquelles elle a passé. La courbe tracée par nos intégrateurs n'est autre chose que la *courbe intégrale* [...] » [Abdank-Abakanowicz, 1886, p. VI].

Le principe des nouveaux intégraphes est relativement simple : un pointeur suit une courbe donnée et l'ordonnée de cette courbe, transmise via un parallélogramme articulé, détermine l'orientation d'une roulette traçante qui mord dans le papier ; ainsi, la roulette enveloppe une nouvelle courbe dont les pentes sont les ordonnées de la courbe initiale : c'est la courbe intégrale cherchée. On retrouve finalement le même principe que dans les constructions par le trait de Massau, mais, cette fois, la courbe intégrale est tracée exactement d'un mouvement continu au lieu d'être obtenue par petits éléments. Une fois son appareil mis au point après diverses versions dont la première date de 1878, Abdank-Abakanowicz reprend toutes les applications de l'intégration graphique exposées par Nehls, mais en remplaçant la construction par points des courbes intégrales à l'aide du planimètre par un tracé continu avec son nouvel intégraphe [Abdank-Abakanowicz 1886]. Ainsi, l'œuvre de

⁹ À cette époque, la Pologne avait perdu son indépendance : son territoire était partagé entre la Russie, la Prusse et l'Autriche. De nombreux scientifiques polonais s'exilèrent, en particulier en France. Entre 1870 et 1882, la Société polonaise des sciences fut installée à Paris et publia douze volumes de *Mémoires* [Pawlikowska-Brożek 1996, p. 292]. C'est dans ce contexte que Bruno Abdank-Abakanowicz (1852–1900) travailla à Paris à partir de 1881, après avoir publié en Pologne ses premiers résultats sur les intégraphes [Abdank-Abakanowicz 1880]. C'était un élève de Wawrzyniec Żmurko, professeur aux écoles polytechniques de Vienne et de Lvov. En fait, Abdank-Abakanowicz [1886, p. 3–5] signale explicitement que, par ses intégraphes, il a cherché à mécaniser des méthodes d'intégration graphique par le trait rencontrées dans un ouvrage de Żmurko [1864].

ce Polonais inventif est l'exact pendant, dans le domaine du calcul graphomécanique, de ce qu'avait fait Massau pour le calcul par le trait : passer de l'évaluation numérique isolée d'une aire à la construction globale d'une courbe intégrale. Abdank-Abakanowicz réalise, en quelque sorte, le rêve qu'avait caressé un moment Massau lors de la formulation de sa quatrième thèse et qu'il avait échoué à réaliser lui-même. Une nouvelle fois, on assiste à des recherches parallèles, qui ont lieu en même temps et de manière indépendante (il est clair qu'Abdank-Abakanowicz, qui ne cite que des auteurs d'Allemagne ou de pays de l'Est, ignore l'existence de Massau en 1886). Dans sa petite « Note sur les intégraphes » de 1887, Massau, beau joueur, rendra hommage à la réussite de son collègue polonais [Massau 1887a, p. 41]. C'est peut-être, d'ailleurs, à partir de la lecture de cette note qu'Abdank-Abakanowicz fit connaissance avec l'œuvre de Massau et se pencha de plus près sur la littérature consacrée à l'intégration graphique. En effet, dans l'édition allemande¹⁰ de son traité sur les intégraphes [Abdank-Abakanowicz 1889], on trouve mention de Massau et d'autres auteurs qui n'étaient pas cités dans l'édition de 1886. On y rencontre également, en annexe, tout un développement sur la courbe intégrale et l'intégration graphique, très proche des idées de Massau.

Un autre article intrigant est celui publié en 1882 par Henry de Lisleferme, ingénieur de la marine en retraite [Lisleferme 1882]. Cet article contient la construction d'une courbe intégrale par assimilation à un polygone circonscrit obtenu par la méthode des trapèzes, tout comme chez Šolín ou chez Massau, et la construction des centres de gravité et des moments d'inerties par deux ou trois intégrations successives. La surprise vient de ce que Lisleferme, loin de citer Massau, attribue tout cela à l'enseignement donné par un certain Rossin, vers 1850, à l'École du génie maritime de Paris¹¹. Ces techniques graphiques, servant à profiler

¹⁰ Je remercie Joachim Fischer pour m'avoir signalé que l'édition allemande de 1889 n'était pas une simple traduction de l'édition française de 1886, mais qu'elle comportait d'importantes additions.

¹¹ Créée en 1765 à l'initiative d'Henry-Louis Duhamel du Monceau, inspecteur de la Marine, et du duc de Choiseul, ministre de la Guerre et de la Marine, l'École nationale supérieure du génie maritime avait pour but initial d'apporter aux maîtres-charpentiers de marine les connaissances théoriques, notamment en mathématiques et en physique, dont ils avaient besoin pour l'exercice de leur métier. En 1970, cette école fusionna avec trois autres écoles d'application de l'École polytechnique pour devenir l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA).

la carène d'un navire, se seraient transmises par tradition dans le milieu des ingénieurs maritimes. Massau, après avoir eu entre les mains des cours autographiés de l'École du génie maritime, conteste les souvenirs de Lisleferme : selon lui, Rossin ne procédait pas à une véritable intégration graphique, mais construisait les courbes intégrales par points à partir de quadratures numériques [Massau 1889, p. 429]. Une source indépendante confirme ces dires : Abdank-Abakanowicz [1886, p. 108–109], à un moment où il ne connaissait pas encore Massau ni Lisleferme, décrit de la même manière l'enseignement de Rossin à partir de renseignements recueillis auprès de Jules-Ambroise Pollard, un autre professeur de l'École du génie maritime. Selon les procédés en usage chez les constructeurs de navire, la courbe intégrale était tracée en appliquant une latte flexible sur les points fournis par le calcul. Il n'en reste pas moins que l'idée de construire les courbes intégrales pour accéder à des intégrations répétées était bien présente depuis longtemps chez les ingénieurs maritimes.

Pour compléter ces données issues des milieux francophones et germanophones, il est instructif de jeter un coup d'œil du côté de l'Italie. Sachant que les maîtres italiens du calcul graphique, Luigi Cremona et Antonio Favaro, sont des héritiers directs de l'école allemande de statique graphique, il ne sera peut-être pas superflu de fournir au préalable quelques éléments supplémentaires d'information sur une discipline que nous avons déjà rencontrée, trop rapidement il est vrai, à plusieurs reprises. La statique graphique a été fondée dans les années 1860 par l'ingénieur allemand Carl Culmann, recruté en 1855 comme professeur à l'Institut polytechnique de Zurich après avoir travaillé à la construction de chemins de fer. Il faut savoir qu'à cette époque, l'essor des chemins de fer s'accompagnait de la multiplication de structures métalliques (ponts, halls de gare, *etc.*) dont le calcul à l'aide de méthodes analytiques était extrêmement long et fastidieux. Face à cette situation, Culmann constitua une méthode originale de calcul graphique, exposée dans son ouvrage principal *Die graphische Statik* [Culmann 1866], qui permet à l'ingénieur de résoudre, sans passer par l'analyse, la quasi-totalité des questions relevant de l'art des constructions. La statique graphique repose sur l'emploi systématique du polygone des forces (formé de vecteurs représentant les forces d'un système en équilibre) et du polygone funiculaire (obtenu en assimilant le système à une corde fictive en équilibre sous l'effet de poids

appliqués en certains de ses points), deux notions qui remontent à la *Nouvelle mécanique* (1687) de Pierre Varignon. Du point de vue théorique, Culmann s'appuya sur les concepts de la géométrie projective pour asseoir son système. La statique graphique, grâce à un langage figuratif adapté à l'intuition de l'ingénieur, grâce à des procédés de calcul rapides et élégants, se répandit rapidement en Italie, en Russie, en Autriche, en Allemagne et aux États-Unis. Par contre, elle fut adoptée tardivement en France, à partir de 1884, et encore plus tard en Angleterre. Vers la fin du XIX^e siècle, elle était massivement utilisée partout. On l'enseigna dans les écoles d'ingénieurs jusque vers les années soixante. L'histoire de cette discipline originale a été étudiée en profondeur par les historiens allemands Erhard Scholz [1984, 1989, 1994] et Bertram Maurer [1998].

Pour revenir aux relations éventuelles de Massau avec les spécialistes italiens de calcul graphique, on peut constater tout d'abord qu'il n'y a nulle trace des méthodes de l'ingénieur belge dans l'enseignement initial de Favaro à l'université de Padoue et dans le traité qui en est résulté [Favaro 1877]. En parcourant la traduction française du cours de Favaro par l'ingénieur des Arts et Manufactures Paul Terrier [Favaro 1879, 1885], on trouve un chapitre très traditionnel sur les « Opérations graphiques sur les aires » (avec Euclide pour principale référence), puis un chapitre sur la « Transformation des figures curvilignes » reprenant les ouvrages classiques de Cousinéry, Culmann et Cremona. La seule concession à la modernité est un dernier chapitre sur le « Planimètre polaire ». Face à cette situation, Massau a envoyé à Favaro le Livre I de son mémoire, à la suite de quoi Favaro aurait incorporé les nouvelles méthodes d'intégration graphique dans son enseignement à Padoue et en aurait fait part à son collègue Carlo Saviotti, professeur de statique graphique à l'École d'application des ingénieurs de l'université de Rome [Massau 1887a, p. 38–39]. Ce qui est certain, c'est que Favaro a donné son accord pour que le traducteur Paul Terrier ajoute à l'édition française de son cours un appendice exposant en détail les méthodes de Massau. Cet appendice a probablement joué un grand rôle pour la diffusion des idées de l'ingénieur belge dans les pays francophones. Quant à Saviotti, il a publié, d'abord en Italie [Saviotti 1882] puis en Belgique [Saviotti 1883], une importante « Note sur les méthodes graphiques d'intégration » qui expose très clairement le lien entre, d'une part, les méthodes de Culmann utilisant le polygone

funiculaire et, d'autre part, une nouvelle méthode d'intégration qu'il appelle « méthode du faisceau funiculaire » et qui ressemble beaucoup à celle de Massau. Je reviendrai plus loin sur les rapports entre statique graphique et intégration graphique. Pour l'instant, il est curieux de noter que Saviotti cite uniquement Nehls. Il est vrai que, comme Šolín et Nehls, l'ingénieur italien ne présente que la méthode des trapèzes, ce qui le conduit, pour divers problèmes exigeant des intégrations successives, à des constructions approximatives là où Massau donnait des constructions exactes. C'est probablement la similitude de l'article de Saviotti avec le Livre I de Massau qui a conduit les éditeurs belges de la *Revue universelle des mines* à accompagner l'article de Saviotti d'une note rappelant les apports de leur compatriote de l'École de Gand [Saviotti 1883, p. 485]. Mais il semble difficile de savoir si Saviotti a effectivement tiré parti, directement ou indirectement, du Livre I de Massau, ou s'il en a retrouvé indépendamment les résultats.

Au-delà de cette controverse, la première phrase du mémoire de Saviotti permet de relancer de manière inattendue la recherche des sources de l'intégration graphique :

« La lecture des mémoires du général Poncelet, qui se rattachent à la statique graphique, et particulièrement de celui qui traite de la *solution des principales questions de la stabilité des voûtes*, appelle l'attention sur la grande ingéniosité que ce savant géomètre apportait dans l'application des méthodes graphiques à ces différents problèmes » [Saviotti 1883, p. 483].

Dans le mémoire de Jean-Victor Poncelet auquel Saviotti fait allusion [Poncelet 1835], on étudie la stabilité d'une voûte en la décomposant en voussoirs fictifs dont on calcule le poids et le moment par rapport à la clé, puis l'on détermine graphiquement le point de rupture correspondant au maximum de la poussée admissible. Le poids et le moment sont des intégrales de fonctions données elles-mêmes graphiquement. Pour calculer ces intégrales, Poncelet propose deux méthodes. C'est la seconde de ces méthodes qui nous intéresse ici, car il s'agit d'une version graphique de la formule de quadrature de Simpson. Les deux courbes à intégrer sont $a_0m_1m_2\dots m_8$ et $s_0s_1s_2\dots s_8$ (*cf.* figure 14). Sur chaque intervalle de la subdivision, par exemple a_3a_4 , on fait comme si la courbe à intégrer était une parabole $m_3n_3m_4$ et l'on construit l'ordonnée moyenne μ_3 au tiers du segment n_3o_3 qui joint l'arc à la corde sur la verticale issue du milieu α_3 de l'intervalle a_3a_4 . Ensuite, Poncelet ne construit pas explicitement les

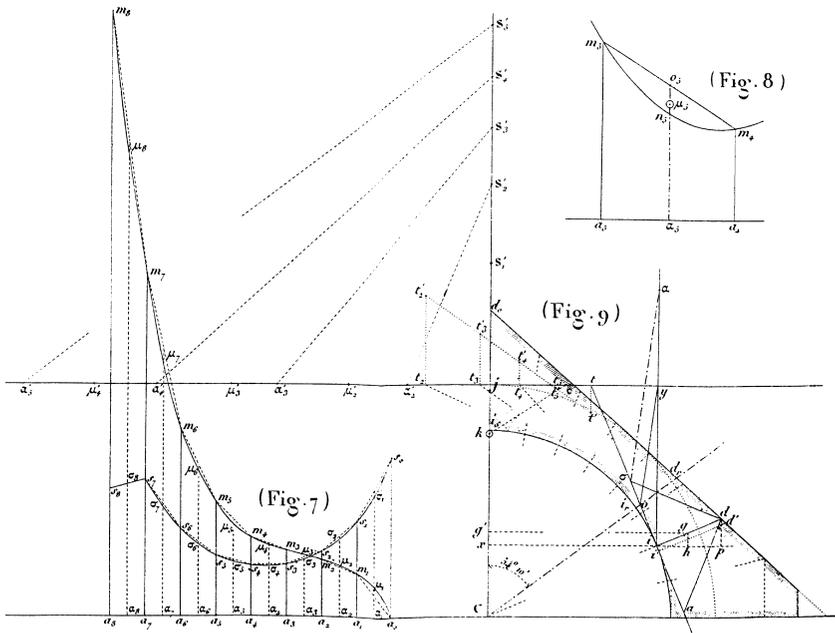


Figure 14. Quadratures graphiques par la méthode de Simpson
[Poncelet 1835, Planche III]

deux courbes intégrales, mais il reporte les ordonnées de l'une et de l'autre sur deux axes orthogonaux, car, en fait, c'est de la relation entre les deux primitives qu'il a besoin pour la solution graphique de son problème de voûte.

Ce travail innovant de Poncelet est passé totalement inaperçu de ceux qui se sont occupés ultérieurement d'intégration graphique. De tous les auteurs que j'ai cités jusqu'ici, seul Saviotti mentionne Poncelet, mais sans en tirer aucun enseignement, car lui-même, comme ses inspirateurs de l'école germanique, ne dépasse pas les idées initiales de Šolín. En dehors de Massau, personne n'est d'ailleurs jamais allé, sous forme graphique, au-delà de la méthode des trapèzes. Il est étrange que Massau, qui a pourtant lu Saviotti, ne parle jamais de ce travail de Poncelet. Peut-être n'a-t-il pas pu se résoudre, après avoir admis de mauvaise grâce que Šolín l'avait précédé pour la méthode des trapèzes, à admettre aussi que Poncelet en avait fait de même pour celle de Simpson ?

On trouve ailleurs, dans l'œuvre de Poncelet, des méthodes originales d'intégration graphique. Dans ses cours de mécanique industrielle à l'École du génie et de l'artillerie de Metz [Poncelet 1827–1830], il s'intéresse notamment au calcul de la trajectoire des bombes. Pour tracer les courbes intégrales des équations différentielles qui interviennent en balistique, il propose soit une construction par petits segments de tangentes, soit, ce qui est plus inédit, une construction par petits arcs de cercles osculateurs, technique bien adaptée aux équations du second ordre puisque ces équations se mettent naturellement sous une forme équivalente faisant intervenir le rayon de courbure. Cette méthode de Poncelet a été perfectionnée et développée avec diverses variantes par le général Isidore Didion [1848]. On la retrouve ensuite dans tous les traités de balistique. Le *Dictionnaire des mathématiques appliquées* d'Hippolyte Sonnet [1867], un bon ouvrage de référence de l'époque qui nous concerne, ne cite d'ailleurs que Poncelet et Didion dans ses articles en rapport avec l'intégration graphique (« Calcul par le trait », « Quadrature », « Trajectoires (tracé des) »). Là encore, Massau, qui connaissait pourtant ce dictionnaire, n'a rien tiré en apparence de l'enseignement de Poncelet.

4.3. Plusieurs lignées de recherches parallèles

Le diagramme de la figure 15 tente de résumer ce qui précède en représentant le réseau des recherches liées à celles de Massau. On a distingué deux types de relations entre un auteur (antérieur) A et un auteur (postérieur) B : un trait plein signifie que B a tiré parti de A en incorporant des résultats de A dans ses propres travaux, un trait pointillé marque que B a seulement pris connaissance *a posteriori* de l'existence de A, sans être influencé par son œuvre. Ce diagramme s'arrête en 1889 : je n'ai pas jugé utile de faire figurer les dernières recherches de Massau sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles, car, dans ce domaine, on ne trouve pas de travaux comparables aux siens.

De ce diagramme, on peut tirer diverses analyses. En premier lieu, il est clair que l'œuvre de Massau est extrêmement personnelle et originale, presque monolithique. Lorsqu'il a formulé ses thèses et écrit ses premiers articles, il n'avait manifestement pas lu grand-chose. Par la suite, tout au long de sa carrière, bien qu'il se soit sérieusement documenté sur tout ce qui touchait à l'intégration graphique et graphomécanique, il semble n'avoir jamais été beaucoup influencé par les lectures qu'il

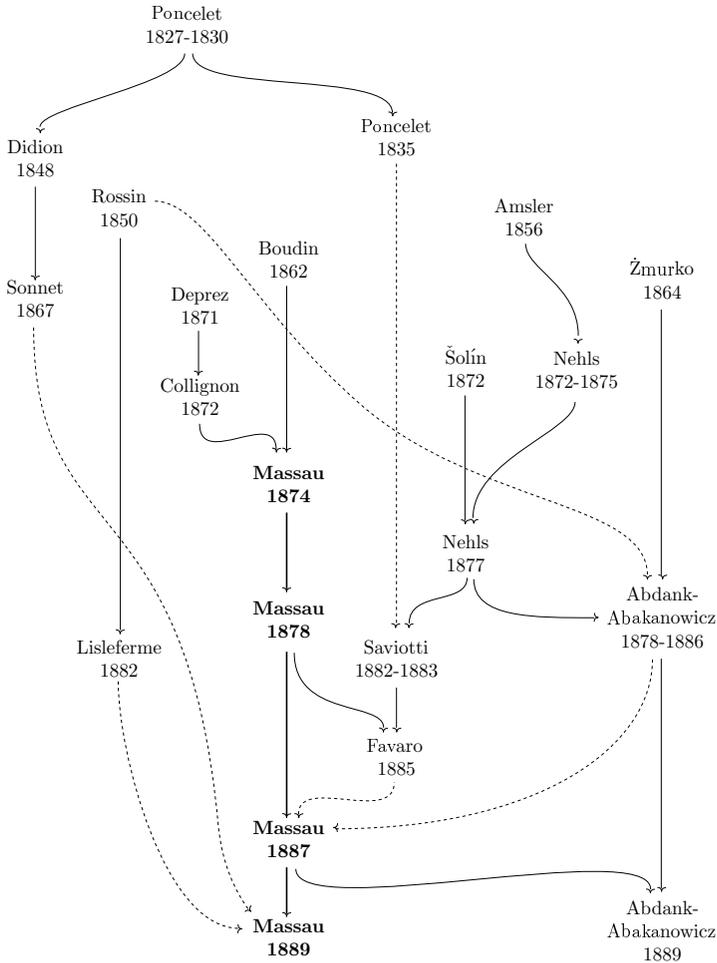


Figure 15. Recherches sur l'intégration graphique autour de Massau

a pu faire. Dans ses mémoires, il est effectivement difficile d'identifier des apports externes. Il reste malgré tout frappant de constater qu'à l'époque de Massau, il y a eu un foisonnement de recherches similaires, en grande partie indépendantes. À partir de 1850, en raison du développement industriel, les ingénieurs sont confrontés à des besoins accrus en calcul numérique. C'est justement une période où de nombreuses études sont lancées sur la conception et la fabrication d'instruments

mécaniques d'intégration, censés enrichir la panoplie de base du calculeur et lui faciliter l'exécution, toujours délicate, des opérations du calcul infinitésimal. La perception des limites inévitables de ces instruments, exacts en théorie mais souvent peu précis en pratique en raison de leur imperfection matérielle, entraîne par contrecoup un retour théorique sur les méthodes de calcul par le trait, économiques et prometteuses. Un tel contexte général explique probablement que des recherches analogues se soient développées en divers lieux. Comment expliquer alors que ces recherches paraissent relativement isolées les unes des autres, avec peu d'interactions ? Tout d'abord, il semble y avoir un cloisonnement entre les divers corps d'ingénieurs (artillerie, génie maritime, génie civil, *etc.*). Chacun a ses écoles, ses enseignants, ses revues, ses méthodes, ses traditions. Chacun développe les méthodes mathématiques de calcul dont il a besoin, mais en situation, au sein des problèmes de sa spécialité. Dans ces conditions, on conçoit que les méthodes nouvelles de calcul soient peu diffusées, difficiles à repérer au sein d'une littérature professionnelle spécialisée, facilement oubliées et réinventées à plusieurs reprises. Qui, ayant besoin d'une méthode d'intégration, pensera à ouvrir un mémoire sur la stabilité des voûtes ? Quel ingénieur des Ponts et Chaussées ira lire une revue d'artillerie ou de génie maritime ?

À un autre niveau, il faut prendre en compte le poids des écoles nationales et l'obstacle des langues. Il n'est guère étonnant d'assister à deux courants indépendants de recherches, de styles différents, l'un dans la sphère francophone, l'autre dans la sphère germanophone. C'est dans le monde germanophone qu'ont été inventés les premiers instruments mécaniques d'intégration (planimètres d'Hermann, Oppikofer, Wetli, Amsler, *etc.*), c'est là que se trouvent, dans les dernières décennies du XIX^e siècle, les principaux fabricants de ces instruments (Amsler à Schaffhausen, Ott à Kempen, Coradi à Zurich). Tout naturellement, les ingénieurs d'Allemagne et des pays d'Europe centrale ont eu tendance à s'appuyer sur des objets devenus pour eux d'utilisation coutumière : ils ont cherché soit à exploiter les planimètres existants pour construire la courbe intégrale par points (Nehls), soit à les modifier pour en faire des intégraphes capables de tracer la courbe intégrale d'un mouvement continu (Abdank-Abakanowicz). À l'opposé, il faut se souvenir que les pères du calcul par le trait sont français : Descartes, d'abord, qui élucide les liens entre

géométrie et algèbre, et traduit sous forme de constructions géométriques les opérations algébriques de base ; Louis-Ézéchiél Pouchet, pendant la Révolution française, qui popularise l'« arithmétique linéaire » (*i.e.* le calcul au moyen de lignes) et les premiers abaqués auprès des artisans et commerçants ; les ingénieurs des Ponts et Chaussées de Paris, Barthélémy-Édouard Cousinéry, qui écrit le premier traité de calcul par le trait, et Lalanne, qui imagine de nouveaux abaqués à droites concourantes ; Poncelet, enfin, qui accorde une place importante au calcul graphique dans son enseignement à l'École de Metz. Massau, comme les autres ingénieurs francophones que nous avons rencontrés, se situe indéniablement dans cette longue tradition française où le calcul par le trait, caractérisé par une certaine pureté théorique et une grande économie de moyens, a toujours eu la prédominance sur l'emploi d'instruments mécaniques.

En se plaçant d'un autre point de vue que celui de l'opposition entre calcul par le trait et calcul graphomécanique, il importe d'ajouter que les ingénieurs allemands étaient, depuis les années 1860, formés à la statique graphique de Culmann, corps de doctrine très élaboré qui fournit, à sa façon, des réponses satisfaisantes toutes prêtes à la plupart des problèmes de l'ingénieur, y compris aux problèmes d'intégration. Il est probable qu'on ne ressentait donc pas, dans les pays sous influence germanique, le besoin d'entreprendre d'importantes recherches sur l'intégration graphique : seuls Šolín et Nehls s'y sont aventurés, mais sans pousser très loin leurs investigations. Dans la sphère francophone, la statique graphique était, au contraire, peu répandue (les premiers enseignements à Paris n'ont été créés qu'en 1884), alors qu'il existait déjà, vers 1870, un corpus, certes disparate mais néanmoins significatif, de connaissances sur l'intégration graphique au sein des divers corps d'ingénieurs. Massau représente, dans la lignée des Poncelet, Didion, Rossin, Boudin, Collignon, *etc.*, une sorte d'aboutissement naturel de cet ample courant souterrain et inorganisé.

Au passage, il convient de dire un mot spécifique sur la place de Poncelet. Peut-on considérer ce dernier comme le « père » de l'intégration graphique par le trait ? Ses méthodes de calcul ont-elles exercé une réelle influence ou ont-elles été aussitôt oubliées ? Il est difficile de répondre car toutes les publications fondatrices de l'intégration graphique ont eu lieu dans les années 1870, soit deux générations après Poncelet. Il manque

une génération pendant laquelle on ne sait pas comment aurait pu se faire une transmission éventuelle. Les idées de Poncelet ont-elles été diffusées régulièrement à travers des enseignements oraux et des cours autographiés? C'est possible, car, tant en France qu'en Allemagne, de nombreux ingénieurs sont issus directement de l'École de Metz ou ont été formés ailleurs par d'anciens élèves de Poncelet. Mais il est difficile d'en dire plus pour l'instant. Il est tout aussi envisageable que, en dehors du cas établi des artilleurs, les méthodes d'intégration graphique de Poncelet aient sombré dans l'oubli avant d'être réinventées plus tard.

En dernier lieu, après tout ce qui a été écrit depuis le début de cet article, on ne manque pas d'être surpris par l'absence des pays anglo-saxons dans ce large débat sur l'intégration graphique qui se développe au XIX^e siècle dans la partie continentale de l'Europe et qui culmine dans la période 1870–1890. L'explication se trouve dans une enquête menée dans les années 1890 par la *British Association for the Advancement of Science* [Hele Shaw 1890–1894]. Une commission de sept universitaires et ingénieurs fut chargée d'examiner la maigre place accordée aux méthodes graphiques en Grande-Bretagne et en Irlande, de rechercher les raisons du retard pris sur le Continent dans ce domaine et de proposer une réforme des écoles d'ingénieurs pour faire évoluer positivement la situation. Dans son rapport, la commission constate tout d'abord que le calcul graphique, créé et largement diffusé sur le Continent, est longtemps resté inaccessible aux ingénieurs britanniques faute d'ouvrages disponibles en anglais [Hele Shaw 1893, p. 386]. Le premier traité en anglais ne paraît effectivement qu'en 1890 : c'est la traduction par Thomas Hudson Beare des *Elementi di calcolo grafico* de Luigi Cremona [1874]. Un second phénomène est que, sur le Continent, on a créé de nombreuses écoles techniques dévolues aux sciences appliquées, avec des chaires très spécialisées dont les titulaires ont contribué fortement à l'organisation et à l'évolution des connaissances de base de l'ingénieur. Rien de tel en Angleterre, où la formation des ingénieurs se fait dans les universités et dépend en grande partie de chaires plus générales [Hele Shaw 1894, p. 610]. Face à cette situation inquiétante, la commission propose l'instauration, pour tous les futurs ingénieurs britanniques, d'un cours spécialisé de calcul graphique à enseigner conjointement avec celui de géométrie descriptive. Pour définir le contenu d'un tel cours, la commission a étudié une collection d'ouvrages continentaux,

dans laquelle on constate qu'il n'y a quasiment que des ouvrages allemands ou italiens. On retrouve donc, dans les conclusions de l'enquête, toutes les considérations classiques sur le calcul des surfaces par découpage en petits éléments et sur l'usage des planimètres, mais rien qui rappelle, ni de près ni de loin, l'intégration graphique au sens de Massau. Ce dernier n'est même pas cité : en 1894, rien encore de son œuvre n'a filtré en Angleterre !

Compte tenu des faibles compétences des Britanniques concernant le calcul graphique en général, on comprend qu'ils n'aient participé que de loin aux recherches spécialisées sur l'intégration graphique. Il faut quand même signaler quelques travaux isolés, intéressants quoique totalement déconnectés de ceux de Massau et largement indépendants des autres travaux continentaux. William Thomson (Lord Kelvin) est l'un des premiers à voir l'intérêt qu'il y aurait à relier mécaniquement un planimètre à un cylindre d'enregistrement, de manière à représenter graphiquement les variations de l'angle mesurant l'aire sous la courbe [Thomson & Tait 1879, p. 491]. Thomson imagine diverses applications d'un tel tracé continu de la courbe intégrale et rêve même d'intégrations successives par couplage mécanique de plusieurs planimètres, la courbe sortant de chacun d'eux servant d'entrée au suivant. Ces projets visionnaires resteront longtemps de nature spéculative, faute d'une technologie suffisamment avancée pour les concrétiser. Ils ne deviendront réalité que dans les années trente, avec la fabrication de grands analyseurs différentiels pour résoudre des problèmes d'électricité industrielle.

Charles Vernon Boys [1881], s'appuyant de son côté sur une analyse critique des instruments antérieurs, conçoit un nouvel appareil d'intégration qui repose sur des idées analogues à celles déjà développées par Abdank-Abakanowicz depuis quelques années. Il s'ensuivra une vive querelle de priorité entre les deux hommes, mais il est clair que leurs travaux sont complètement indépendants¹². Sans connaître les travaux continentaux, Boys s'approprie à son tour le principe directeur de l'intégration graphique, à savoir que le tracé des courbes intégrales est plus prometteur

¹² Ainsi que le rapporte Abdank-Abakanowicz [1886, p. 49], Boys finira par déclarer : « Je me sens obligé de mentionner que le professeur Abdank-Abakanowicz a déjà inventé un intégrateur basé sur les mêmes principes mathématiques », tandis qu'Abdank-Abakanowicz écrira de son côté : « M. Boys a trouvé, indépendamment de moi et sans avoir connaissance de mes travaux antérieurs, le même principe cinématique pour l'intégration ».

que le simple calcul graphique des quadratures. Parlant des intégrateurs qu'il a pu observer, il enchaîne en écrivant :

«I do not think it advisable to say more concerning them, except that none of them do their work by the method of the mathematician, but in their own way. The machine, however, which I have the honour of bringing before the notice of the Physical Society is an exact mechanical translation of the mathematical method of integrating ydx , and thus forms a third type of instrument. The mathematical rule may be described in words as follows : – Required the area between a curve, the axis of x , and two ordinates. It is necessary to draw a new curve such that its steepness, as measured by the tangent of the inclination, for any value of x may be proportional to the ordinate of the given curve for the same value of x . The ascent then made by the new curve in passing from one ordinate to the other is a measure of the area required» [Boys 1881, p. 342–343].

Les rares ouvrages de calcul graphique connus outre-Manche étant d'origine allemande ou italienne, il n'est pas surprenant que les Britanniques, ainsi qu'on vient de le voir, se soient centrés sur l'usage des instruments mécaniques d'intégration plutôt que sur le calcul par le trait. Dans ce dernier domaine, c'est à peu près le néant : un seul article de recherche, tardif, est à signaler. Robert Franklin Muirhead [1911] publie à Édimbourg une construction des polynômes par intégrations successives, quasiment identique à celle de Massau. L'idée est naïvement présentée comme totalement nouvelle alors qu'elle a été divulguée par Massau trente-trois ans auparavant et que, entre-temps, elle a été reprise plusieurs fois dans des traités de calcul graphique fort populaires sur le Continent.

4.4. Intégration graphique et statique graphique

Comme on a pu s'en rendre compte à différentes reprises dans les paragraphes précédents, sans doute de manière quelque peu pointilliste, le développement de l'intégration graphique n'est pas sans rapport avec la statique graphique. Pour aller plus loin dans la compréhension de l'œuvre de Massau, pour en saisir pleinement tous les enjeux, il est indispensable d'explicitier davantage ce rapport. Au moment où Massau effectue ses recherches sur l'intégration graphique, Culmann, le « père » de la statique graphique, est considéré comme quelqu'un de très important dans les milieux liés au génie civil. Il n'est donc pas surprenant que l'ingénieur belge cherche à se situer par opposition à son homologue allemand. Ainsi que nous l'avons vu plus haut sur un exemple, Massau a montré dans son mémoire de 1878–1887 que de nombreuses constructions de la statique graphique masquaient en fait des intégrations. Dans l'*Appendice* de 1889,

il reprend longuement cette analyse en citant nommément Culmann :

« Dans les traités de statique graphique, on traçait le lieu des moments fléchissants dans le cas de forces isolées, au moyen du polygone funiculaire. Si au lieu de considérer ce tracé comme une opération unique, nous traçons d'abord le lieu des efforts tranchants, nous voyons que le lieu des moments fléchissants est l'intégrale d'une ligne à gradins. Nous pouvons donc affirmer : 1° que Culmann et ses continuateurs n'ont pas vu que le lieu des moments fléchissants était l'intégrale du lieu des efforts tranchants, sinon ils auraient appliqué immédiatement l'intégration d'une ligne à gradins au problème précédent, 2° que l'intégration exacte d'une ligne à gradins était si peu soupçonnée qu'on ne la reconnaissait pas lorsqu'elle se présentait d'elle-même, déduite de considérations de statique. Nous arrivons aux mêmes conclusions en examinant l'épure de Culmann relative au mouvement des terres; il s'agit tout simplement d'intégrer un polygone; Culmann résout ce problème par la transformation des triangles en triangles équivalents de hauteur 2; ces constructions pénibles ne peuvent pas être comparées au tracé si élégant que fournit l'intégration graphique » [Massau 1889, p. 436–437].

Cette situation est générale :

« Tous les problèmes utiles à l'art de l'ingénieur se ramènent à construire des intégrales de divers ordres; exemples : lignes des surfaces, courbes de moments, lignes de résultantes, lignes de pression, courbes funiculaires, lieu des efforts tranchants, des moments fléchissants, courbes élastiques, *etc.* La plupart de ces propriétés étaient ignorées [...]. L'existence de la statique graphique nous démontrera plus loin que Culmann et ceux qui l'ont suivi ignoraient complètement que la courbe funiculaire fût une intégrale seconde » [Massau 1889, p. 435–436].

Alors que Massau se montre toujours très courtois avec les personnes qu'il cite, il n'a pas de mots assez durs pour parler de Culmann :

« La raison pour laquelle les inventeurs de la statique graphique sont arrivés à des résultats si pitoyables doit être cherchée dans l'influence de la géométrie allemande. On a voulu supprimer toute idée de mesure et transformer complètement la géométrie de Poncelet; on a voulu écarter l'analyse de la statique; on a fini par oublier que le calcul intégral existait. [...] Ce qui nous étonne profondément, c'est qu'une science aussi ridicule ait pu se maintenir si longtemps. [...] N'est-il pas triste de constater que la statique graphique [...] ait pu impunément se propager et cela dans la patrie de Leibnitz [*sic*], deux siècles après ses immortelles découvertes » [Massau 1889, p. 440–442].

Ces longues citations agressives font nettement apparaître que Massau se pose en rival direct de Culmann. Son ambition profonde est de détrôner la statique graphique, théorie indirecte fondée sur la géométrie projective des Allemands, pour la remplacer par l'intégration graphique, théorie plus naturelle issue du calcul infinitésimal. Si les objets manipulés par l'ingénieur de construction sont des intégrales, pourquoi ne pas les calculer directement comme des intégrales? Massau veut retrouver le sens mathématique premier de ces objets : selon lui, il est plus impor-

tant de comprendre la nature profonde de ce que l'on calcule plutôt que d'appliquer des recettes, certes efficaces, mais reposant sur des principes étrangers à la question. Culmann ne saurait-il donc pas que les objets mathématiques usuels de l'ingénieur sont des intégrales? L'accusation est manifestement injuste. Le problème ne se pose pas en ces termes car l'objectif explicite de Culmann est de fournir à l'ingénieur des constructions simples, élégantes, faciles à retenir et reposant sur des considérations de géométrie élémentaire. Au contraire de Massau, il souhaite évacuer le calcul infinitésimal de sa méthode de calcul graphique, ce qui n'est pas à mépriser si l'on veut obtenir des méthodes accessibles à des ingénieurs ou des techniciens n'ayant pas toujours reçu une formation mathématique de niveau supérieur. En fait, et c'est peut-être ce qui irrite le plus Massau, la statique graphique, en raison de sa simplicité et de son succès, a envahi progressivement des domaines fort éloignés de son champ d'application d'origine. Pour des problèmes qui se traduisent par des équations différentielles ou des équations aux différences finies, on construit les solutions, non en les considérant comme ce qu'elles sont d'emblée, c'est-à-dire des intégrales, mais en les interprétant, par analogie, comme des solutions de problèmes fictifs de statique se prêtant à l'emploi du polygone funiculaire. C'est ainsi, par exemple, que René Poussin [1905, 1909] traite la question du calcul des primes d'assurances! Massau ne cesse de pester contre ce détournement généralisé du polygone funiculaire :

« Le polygone funiculaire est l'opérateur par excellence de la statique graphique; on l'emploie partout où il y a moyen de l'introduire. [...] le polygone funiculaire combiné avec des transformations basées sur les lignes proportionnelles devient ainsi un polygone de sommation et de multiplication. [...] Ce sont surtout ces applications mystérieuses du polygone funiculaire qui ont pu faire croire que l'on se trouvait en présence d'une science nouvelle où le polygone funiculaire devenait un agent systématique de calcul graphique » [Massau 1889, p. 431-432].

On ne peut guère comprendre l'œuvre de Massau sans garder à l'esprit cette rivalité exacerbée avec Culmann. L'ambition profonde de Massau était d'apparaître comme un nouveau fondateur du calcul graphique, celui qui aurait enfin fait reposer le calcul graphique sur sa base naturelle, à savoir l'opération type de l'intégration graphique. Massau voulait libérer définitivement le calcul graphique de la statique pour en faire une méthode purement mathématique. Ce point de vue a été rapidement compris par certains ingénieurs français, comme Maurice d'Ocagne :

« [...] l'extension prise par la notion primitive, sous la forme des courbes funiculaires

qui permettaient d'effectuer graphiquement de véritables intégrations, fit sentir la possibilité de nouvelles généralisations. Il était nécessaire pour cela que ces diverses notions se dégagent nettement du caractère quelque peu mécanique qu'elles tenaient de leur origine et fussent assises sur un fondement purement géométrique. Cette nouvelle réforme a été l'œuvre d'un savant ingénieur belge, M. Massau, qui, en une série de remarquables Mémoires, parus de 1878 à 1890, a définitivement constitué une méthode générale d'intégration graphique, absolument affranchie de toute sujétion par rapport à la statique » [Ocagne, 1908, p. XIX].

Cependant, au moins dans les premières décennies qui suivirent la publication des œuvres de Massau, la statique graphique reste la théorie en vogue chez les ingénieurs de construction, y compris en France où, d'ailleurs, elle vient juste de pénétrer. En Allemagne, patrie de Culmann, il est encore moins qu'ailleurs question de changer les habitudes issues de la statique graphique. La théorie de Massau y est certes encore inconnue, mais il est intéressant d'examiner quel accueil les Allemands ont réservé aux travaux comparables de Christian Nehls. Un élève de Culmann, Wilhelm Ritter, critique le caractère impropre, selon lui, des procédés de Nehls :

« D'après nous, une fois que le dessin est choisi comme méthode pour la résolution de problèmes de statique, la détermination des solutions et tout le raisonnement doivent également s'appuyer, autant que possible, sur la géométrie »¹³ (cité dans [Maurer 1998, p. 202]).

Par là, Ritter conteste le recours fait par Nehls à des méthodes analytiques dont les résultats sont traduits seulement à la fin en constructions géométriques. D'autre part, en accord avec son maître Culmann, Ritter ne voit pas l'intérêt pratique du recours à l'intégration graphique ; il pense que le technicien de construction saisira mieux les « méthodes simples et claires de la statique graphique »¹⁴ [*Ibid.*].

4.5. L'influence de l'intégration graphique de Massau

René Charlier, un ingénieur des constructions civiles issu de l'université de Gand, a écrit en 1934 un *Traité d'intégration graphique* [Charlier 1934] dont la substance provient d'un cycle de vingt conférences données à l'école polytechnique de Rio de Janeiro. Ce volume, le premier d'une

¹³ « Nach unserer Ansicht sollte sich, wenn einmal das Zeichnen als Hilfsmittel zur Lösung statischer Aufgaben gewählt wird, auch die Ableitung der Lösungen, die ganze Beweisführung so viel als möglich auf die Geometrie stützen ».

¹⁴ « die einfachen und übersichtlichen Methoden der graphischen Statik ». Les traductions sont miennes.

série de neuf destinée aux ingénieurs constructeurs en béton armé, est fort intéressant car Charlier y commente lucidement les raisons pour lesquelles les méthodes de Massau, malgré leurs avantages incontestables, n'ont reçu que peu d'écho auprès des ingénieurs de construction. La première de ces raisons est que les mémoires de Massau sont gros et peu didactiques. Les techniques d'intégration graphique y sont noyées dans une multitude d'applications, ce qui fait que ces traités n'ont jamais pu être adoptés par les utilisateurs comme des ouvrages de référence. Même les anciens élèves de l'université de Gand, qui avaient reçu un enseignement directement issu des cours de Massau, semblent avoir été rebutés par cette présentation indigeste et, d'après Charlier, ont peu à peu abandonné la théorie de leur illustre prédécesseur pour revenir aux pratiques anciennes. En second lieu, ces mémoires ont connu une diffusion très faible en dehors du milieu des ingénieurs belges. Personne, après Massau, ne s'est chargé de les récrire sous une forme plus facile à assimiler, ni de les traduire en langue étrangère.

D'une certaine façon, le titre adopté par Massau pour son « Mémoire sur l'intégration graphique » a été trompeur pour le public étranger. Ce mémoire, qui a été peu lu dans tous ses détails, a été d'emblée considéré comme un ouvrage de mathématiques, un ouvrage d'analyse numérique présentant des méthodes nouvelles de calcul graphique. C'est sous cet angle qu'il a été reconnu par les grands spécialistes de calcul numérique et graphique de la fin du XIX^e siècle et du début du XX^e siècle, qui incorporent rapidement les idées de Massau à leurs traités, en y voyant des méthodes mathématiques pouvant servir à des calculs généraux dans tous les domaines. Par exemple, dans le cours libre de calcul graphique et nomographie ouvert à la Sorbonne en 1907, Maurice d'Ocagne fait une large place aux méthodes de Massau en les introduisant ainsi :

« Dans l'œuvre de M. Massau, marquée au coin de l'esprit le plus inventif, l'exposé des principes n'est pas séparé d'applications de belle ampleur, et d'intérêt considérable, mais au milieu desquels ils sont un peu noyés. Il nous a paru qu'en les détachant de cet ensemble pour les enchaîner suivant un ordre plus didactique, on pourrait, pour une majorité d'étudiants, les mettre mieux en valeur » [Ocagne 1908, p. XIX].

On retrouve ici clairement la même appréciation que celle de Charlier à propos d'une œuvre fourre-tout difficile à lire, et la confirmation qu'Ocagne n'en a retenu que des techniques mathématiques d'intégration

graphique, désormais coupées de leurs applications initiales. À cette époque, personne, ou presque, n'a remarqué que le mémoire de Massau était avant tout un traité de génie civil. On n'a pas bien réalisé que l'une de ses principales ambitions était de promouvoir une méthode nouvelle, complète et cohérente, destinée à supplanter la statique graphique, alors omniprésente, de Culmann.

Cet état de fait est nettement perceptible dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, publiée en Allemagne de 1898 à 1935, et dans son adaptation française, l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, dont la parution a commencé en 1904 et a été interrompue en 1916 en raison de la guerre. La version française n'est pas une simple traduction : elle contient des ajouts écrits par des mathématiciens français, ce qui permet en fin de compte de discerner certaines nuances entre science allemande et science française. Ces encyclopédies nous offrent un témoignage assez complet et fidèle des mathématiques du début du XX^e siècle, ou du moins de ce qui, au sein des mathématiques, était alors considéré comme important. Il est donc intéressant de scruter quelle place fut accordée à Massau dans les trois articles qui traitent de sujets en rapport direct avec le calcul graphique. Dans l'article de Runge et Willers [1915] intitulé «*Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen*», les trois grands mémoires de Massau sont mentionnés dans les références bibliographiques. Leur contenu, correctement analysé, est honnêtement situé par rapport aux travaux de la même époque. En ce qui concerne les quadratures, les apports personnels de l'ingénieur belge sont bien mis en évidence : adaptation graphique de la règle de Simpson (Poncelet n'est pas cité), construction des formules de quadrature de Newton-Cotes et de Gauss, évaluation graphique de l'erreur, intégrations répétées et gestion des constantes d'intégration, etc. Pour les équations différentielles ordinaires, Massau se voit attribuer un rôle un peu injustement minoré, pris en tenaille entre les anticipations de Šolín et les améliorations d'Ocagne, mais il retrouve ensuite toute sa place dans la partie sur les équations aux dérivées partielles, où est valorisée sa méthode des caractéristiques pour les équations de type hyperbolique. Bref, pas de doute, Massau est considéré comme un mathématicien important par les spécialistes allemands d'analyse numérique. La situation est

radicalement différente dans l'article «*Die graphische Statik der starren Körper*» rédigé par Lebrecht Henneberg [1909]. Sur 90 pages, une seule est consacrée aux liens entre statique graphique et intégration graphique. À cette occasion, Massau n'est même pas cité; seules sont évoquées les recherches allemandes conduites autour de Nehls. Cette fois, en tant qu'ingénieur, en tant que créateur concurrent de Culmann, Massau est complètement ignoré des Allemands.

Les deux articles précédents, celui de Runge et Willers d'une part, celui de Henneberg de l'autre, n'ont pas été traduits pour l'édition française. Par contre, le troisième article qui nous intéresse ici, celui de Rudolf Mehmke [1901] intitulé «*Numerisches Rechnen*» dans l'encyclopédie allemande, a été repris dans l'édition française sous le titre «Calculs numériques», avec des enrichissements de Maurice d'Ocagne [Mehmke & Ocagne 1909]. Dans cet article, il y a un paragraphe particulièrement significatif sur la construction fondamentale du calcul graphique. On trouve d'abord la phrase suivante, qui est la traduction d'une phrase de Mehmke de l'édition allemande :

« Les expressions de la forme

$$\frac{a_1}{b_1} c_1 + \frac{a_2}{b_2} c_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} c_n$$

peuvent s'obtenir au moyen des polygones d'addition et de multiplication de K. (Ch.) Culmann; ces polygones se déduisent d'ailleurs aisément des polygones funiculaires de la Statique ».

Le texte continue par une phrase ajoutée par Ocagne pour l'édition française :

« Il semble d'ailleurs plus rationnel, ainsi que le fait J. Massau, de rendre le calcul graphique proprement dit indépendant de la statique en ramenant ses constructions à des considérations purement géométriques et d'ailleurs fort simples » [Mehmke & Ocagne 1909, p. 331].

Tout est dit dans la juxtaposition de ces deux phrases. N'importe quel problème de calcul numérique se ramène naturellement au calcul d'expressions du type mentionné, car on ne peut concrètement effectuer que des additions et des multiplications en nombre fini. Or, ces sommes de produits peuvent s'interpréter soit comme des sommes de Riemann, c'est-à-dire des intégrales, soit comme des sommes de moments de forces traduisant des équilibres statiques. Ainsi, l'intégration graphique de Massau et le polygone funiculaire de Culmann sont bien deux constructions

graphiques équivalentes. Toutes deux sont universelles, c'est-à-dire permettent la résolution graphique, exacte ou approchée, de n'importe quel problème. Mais Culmann reste la référence incontournable des Allemands, tandis que Massau devient volontiers celle des Français.

CONCLUSION

L'œuvre de Junius Massau dans le domaine de l'intégration graphique a connu un destin complexe et surprenant. Les mémoires originaux, longs et touffus, ont probablement été très peu lus dans un premier temps, même s'ils ont été réédités sous forme de tirés à part en France. Au départ, ce sont la traduction française du traité de Favaro [1885] grâce à l'appendice ajouté par Paul Terrier, et surtout le cours de Maurice d'Ocagne [1908] qui ont permis une diffusion des idées de l'ingénieur belge. C'est sans doute à partir de là que les mathématiciens appliqués allemands ont incorporé ces idées dans leurs cours de calcul graphique en les mêlant aux leurs ([Runge 1912], [Sanden 1914], [Mehmke 1917], [Willers 1928]). Les méthodes de Massau se sont ensuite progressivement répandues dans toute l'Europe, parfois sans référence à leur inventeur. On peut noter que, contrairement à d'autres ouvrages fondateurs du calcul graphique, tels ceux de Culmann, Cremona, Favaro, Ocagne ou Runge, le mémoire de Massau de 1878–1887 n'a jamais été traduit dans une langue étrangère. Cependant, Massau est partout cité comme un pionnier de l'intégration graphique. On retrouve son influence, directement ou indirectement, dans des dizaines de publications jusque dans les années cinquante. De façon générale, dans les traités de calcul graphique de la première moitié du XX^e siècle, les anciens chapitres sur le calcul graphique des aires ont disparu pour céder la place à des chapitres sur l'intégration graphique, preuve que le nouveau point de vue l'a emporté. On a même écrit des traités spécialisés entièrement consacrés à l'intégration graphique ([Willers 1920], [Gerstenbrandt 1926], [Charlier 1934]). En ce qui concerne les équations différentielles ordinaires, la méthode des isoclines a connu de multiples variantes, approfondissements et généralisations [Tournès 2003]. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, l'intégration graphique par les caractéristiques a conservé une grande importance pratique jusqu'à l'apparition des ordinateurs, à tel point que le mémoire de 1900–1904 a été traduit en anglais en 1948 [Massau 1948] avant d'être réédité en français

[Massau 1952] dans le cadre des célébrations organisées en Belgique pour le centenaire de la naissance de l'ingénieur.

Dès la fin du XIX^e siècle, des recherches d'envergure s'appuient sur les nouveaux procédés d'intégration graphique. C'est ainsi, par exemple, qu'Henry Léauté [1891] étudie le mouvement troublé des moteurs suite à une perturbation brusque ou que Willers [1907] se penche sur la torsion d'un corps en rotation autour de son axe. Cependant, on constate que ces applications se situent en dehors du champ pour lequel la méthode avait été développée. Ingénieur des Ponts et Chaussées, Massau destinait l'intégration graphique au calcul des ponts, des routes, des chemins de fer et des voies navigables. Comme nous l'avons vu, son objectif était de mettre au point une nouvelle méthode de calcul graphique pour l'ingénieur du génie civil. Dans toute son œuvre, il a analysé, réinterprété, modifié, simplifié, rationalisé les constructions de la statique graphique. En ce sens, ses travaux peuvent être considérés, au moins en creux, comme appartenant à l'histoire de la statique graphique. Mais, dans ce qui était son ambition profonde, à savoir détrôner Culmann et reléguer la statique graphique aux oubliettes, il a échoué. L'intégration graphique a connu un large succès ... sauf auprès des ingénieurs du génie civil qui, pour l'essentiel, ont continué à pratiquer les constructions bien établies de la statique graphique. L'intégration graphique s'est constituée finalement comme une discipline nouvelle, indépendante de la statique graphique, et destinée à traiter des problèmes qui n'étaient pas déjà du ressort direct de cette dernière. On constate par exemple que dans le cours de mathématiques appliquées de l'École polytechnique enseigné dans les années cinquante, il y a encore deux chapitres bien distincts, « Statique graphique » et « Intégration graphique », sans connexion aucune entre eux [Brard 1956].

Peu diffusée quoiqu'ayant exercé une influence indéniable, louée en France plus qu'en Allemagne, reconnue par les mathématiciens appliqués davantage que par les ingénieurs du génie civil, l'œuvre de Massau, loin d'être jugée pour sa valeur scientifique intrinsèque, a fait les frais de clivages professionnels, sociaux et nationaux extrêmement tenaces. La place aujourd'hui accordée à Massau dans l'histoire des sciences est héritière de cette situation. D'un côté, on ne parle quasiment pas de lui dans les travaux récents d'histoire des mathématiques, mais là, il ne s'agit

pas d'un oubli ponctuel : dans un contexte général où les mathématiques pratiquées par les ingénieurs ont moins attiré l'attention des historiens que celles prônées par les mathématiciens académiques, il s'agit du fait que le calcul graphique dans sa totalité était, jusqu'à récemment, nié en tant que composante essentielle de la science du calcul. De l'autre côté, en ce qui concerne les sciences de l'ingénieur, les historiens allemands de la statique graphique, Erhard Scholz et Bertram Maurer, se situant dans la tradition germanique, n'ont pas non plus accordé à Massau une place significative¹⁵. L'histoire des sciences ne pourrait donc pas se dégager du poids des traditions et des nationalités ? Peut-être me revenait-il, en tant qu'historien francophone, de rééquilibrer la balance en faveur de Massau ?

ANNEXE

Description analytique des trois grands mémoires de Massau sur l'intégration graphique

1) Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications (1878–1887)

* *Livre I : Méthodes générales (1878, 43 p.)*. — Massau introduit l'opération fondamentale qu'il appelle « intégration graphique », à savoir construire graphiquement la courbe intégrale d'une courbe donnée. À cet effet, il expose diverses méthodes, exactes et approchées.

* *Livre II : Applications à l'algèbre, à la géométrie et à la mécanique (1878, 79 p.)*. — On retrouve, à partir de l'intégration graphique, un grand nombre de constructions du calcul graphique et de la statique graphique. Sont examinés successivement la construction des courbes usuelles, la résolution des équations, le calcul des aires planes et des moments des divers ordres, les moments statiques et les moments d'inertie, les efforts tranchants et les moments fléchissants d'une poutre droite sollicitée normalement à son axe par des forces situées dans le plan de symétrie de la poutre, l'équilibre des systèmes articulés.

* *Livre III : Calcul d'un projet de route (1884, 80 p.)*. — Il s'agit ici de l'exposé d'une méthode basée sur l'intégration graphique pour effectuer tous les calculs des terrassements nécessaires à l'établissement d'une route.

¹⁵ Maurer, par exemple, ne lui consacre qu'un paragraphe de cinq lignes dans un livre extrêmement fouillé de plus de 500 pages [Maurer 1998, p. 201].

Cette méthode est plus simple que celles utilisées auparavant. La seconde partie du livre, qui n'a plus de rapport avec l'intégration graphique, contient d'importants résultats sur la théorie des abaques.

* *Livre IV : Applications à la stabilité des constructions (1887, 296 p.)*.

Ce livre est consacré à la stabilité des constructions en maçonnerie. Massau montre comment on peut, par ses méthodes, déterminer sans aucun calcul les dimensions des murs de soutènement et de réservoir. Il étudie longuement la stabilité des voûtes, fait voir que les anciennes théories sont inexactes et propose une nouvelle théorie plus satisfaisante.

* *Livre V : Poutres droites et courbes (1887, 188 p.)*. — Il est question maintenant de la déformation des poutres droites ou courbes, à section constante ou variable, dans diverses conditions de sollicitation. En interprétant les lieux des efforts tranchants et des moments fléchissants comme des intégrales, il devient possible de trouver graphiquement tous les éléments d'une poutre droite, quels que soient la charge, les conditions d'appui et le nombre de travées.

* *Livre VI : Applications à l'hydraulique (1887, 51 p.)*. — Ce dernier livre s'occupe du tracé de l'axe hydraulique des cours d'eau non prismatiques. On y trouve un chapitre important sur l'intégration graphique des équations différentielles du premier ordre par la méthode des isoclines, avec des considérations originales sur l'étude qualitative des équations différentielles.

2) Appendice au mémoire sur l'intégration graphique et ses applications (1889)

* *Note I : Sur la construction des fonctions entières (28 p.)*. — Massau présente quatre méthodes pour construire une courbe polynomiale de degré $n-1$ satisfaisant à n conditions portant sur la fonction et ses dérivées de divers ordres.

* *Note II : Théorème sur l'influence d'une charge mobile (58 p.)*. — On étudie ici le comportement d'une poutre sous l'influence d'une charge mobile (c'est le problème qui se pose par exemple lorsqu'un train passe sur un pont). Massau montre que tout se ramène à l'étude d'une poutre sollicitée par une charge fictive égale à la dérivée de la charge mobile. Un « théorème de la charge dérivée » lui permet de résoudre toutes les questions où il s'agit de chercher la fatigue maximale d'une poutre : les solutions déjà connues sont immédiatement retrouvées, des problèmes

entièrement nouveaux sont ensuite abordés.

* *Note III : Sur les moments des divers ordres (8 p.).* — Dans cette note technique préparatoire, on exprime le moment d'ordre n d'une surface autour d'un axe à l'aide d'une intégrale d'ordre $n + 1$, puis on interprète comme une intégrale-moment le reste de la formule de Taylor et celui de la loi suprême de Wronski.

* *Note IV : Accords de surfaces et de systèmes concentrés (25 p.).* — Cette note développe une autre théorie préparatoire appelée « théorie des accords » : on dit qu'une fonction $f(x)$ forme un accord de degré $n + 1$ entre deux abscisses x_0 et X si, en intégrant n fois à partir de l'abscisse x_0 , les n intégrales obtenues s'annulent en X . Cela équivaut à dire que $\int_{x_0}^X P(x)f(x)dx = 0$ pour tout polynôme P de degré au plus $n - 1$.

* *Note V : Calcul d'une intégrale d'ordre n par une quadrature (25 p.).* On s'intéresse à la détermination de l'intégrale d'ordre n d'une fonction $F(x)$ connaissant n conditions portant sur cette intégrale et sur ses dérivées. Cette intégrale est la somme d'une fonction polynomiale de degré $n - 1$ satisfaisant aux mêmes conditions — on sait la construire d'après la Note I — et d'un reste. Grâce à sa théorie des accords, Massau parvient à mettre le reste sous la forme d'une intégrale dépendant de $F(x)$ et d'une fonction représentée par une suite d'arcs polynomiaux parfaitement déterminés. Il retrouve ainsi le reste d'une formule d'Hermite, mais sous une forme qui fait intervenir une seule quadrature et qui se prête bien à une évaluation graphique.

* *Note VI : L'interpolation parabolique (7 p.).* — En adaptant la méthode de la note précédente, on calcule sous une forme analogue l'erreur d'interpolation commise en remplaçant une courbe quelconque déterminée par n points (ou des points et des dérivées) par une courbe polynomiale de degré $n - 1$.

* *Note VII : Compléments d'intégration graphique (8 p.).* — Cette note présente de nouvelles méthodes pour construire exactement, par points et tangentes, les intégrales d'ordre quelconque d'une courbe polynomiale.

* *Note VIII : Intégrations approchées (42 p.).* — Toujours grâce à sa théorie des accords, Massau retrouve assez facilement les formules de quadrature de Newton-Cotes et de Gauss, en mettant systématiquement l'erreur sous une forme adaptée à une évaluation graphique. On retrouve au passage des formules d'Hermite, Markov et Mansion, mais avec des

démonstrations plus simples. Des méthodes sont également données pour calculer l'erreur dans le cas d'intégrations successives.

* *Note IX : L'interpolation par la méthode des moindres carrés (21 p.)*.

On s'intéresse ici au problème plus général de l'interpolation d'une fonction $F(x)$ par un polynôme $P(x)$ de degré $n-1$ non entièrement déterminé par les conditions imposées. La détermination se fait par la méthode des moindres carrés, en minimisant l'intégrale $\int_{x_0}^X [F(x) - P(x)]^2 dx = 0$.

* *Note X : Les accords et les poutres droites (18 p.)*. — La théorie des accords permet de trouver d'autres méthodes de calcul pour les quantités liées à une poutre droite, dans les cas d'une poutre sur deux appuis, d'une poutre encastree, d'une poutre sur plusieurs travées, d'une poutre à section variable et de poutres superposées.

* *Note XI : Aperçu historique (19 p.)*. — Cette dernière note occupe une place à part, car il s'agit d'un « aperçu historique des recherches diverses qui ont quelques rapports avec notre système de constructions graphiques » [Massau 1889, p. 185]. Cet aperçu est précieux pour l'historien car Massau y dévoile l'origine de ses idées et les sources auxquelles il a puisé.

3) Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles (1900–1904)

* *Chapitre I : Intégration par élément suivant une variable (1900, 17 p.)*.

Massau critique d'abord les méthodes en usage pour l'intégration approchée des équations aux dérivées partielles à deux variables dépendantes et deux variables indépendantes. Ces méthodes, qui reposent sur le calcul de proche en proche, à partir d'une courbe initiale donnée, de petits éléments de surface par la série de Taylor, conduisent dans la pratique à des résultats aberrants. La raison de ces dysfonctionnements est que l'on suppose à tort les fonctions analytiques là où, dans la réalité, il y a des discontinuités (apparition soudaine d'une crue, présence d'un mur de soutènement, etc.).

* *Chapitre II : Intégration graphique par les caractéristiques (1900, 42 p.)*. Sur les surfaces intégrales, il existe des lignes selon lesquelles se propagent les discontinuités des courbes initiales : ce sont les lignes caractéristiques qui avaient été mises en évidence par Monge. Massau divise le domaine des variables en compartiments sur chacun desquels on peut obtenir une solution analytique. Il construit alors les solutions

comme des espèces de polyèdres dont les arêtes sont obtenues à partir des caractéristiques et dont les faces sont des intégrales régulières.

* *Chapitre III : Du mouvement varié des eaux courantes (1900, 62 p.)*. La méthode d'intégration graphique par les caractéristiques est appliquée au problème de l'écoulement non stationnaire de l'eau dans un canal ouvert, dont les équations avaient été établies par Saint-Venant et Boussinesq.

* *Chapitre IV : Équilibre limite des terres sans cohésion (1902-1904, 271 p.)*. — Pour cette autre application, on se restreint au cas particulier d'un massif prismatique à génératrices horizontales. Dans ce cas, il suffit d'étudier les pressions dans une section droite : il n'y a alors que deux variables indépendantes. Le mémoire, inachevé à cause du décès de son auteur, devait se poursuivre par une généralisation aux équations à n variables indépendantes.

BIBLIOGRAPHIE

ABDANK-ABAKANOWICZ (Bruno)

[1880] *Integrator*, Warszawa : Noskowski, 1880.

[1886] *Les intégrales. La courbe intégrale et ses applications*, Paris : Gauthier-Villars, 1886.

[1889] *Die Integrphen. Die Integralkurve und ihre Anwendungen*, trad. allemande par Emil Bitterli de [Abdank-Abakanowicz 1886] avec des compléments, Leipzig : Teubner, 1889.

AMSLER (Jakob)

[1856] *Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter*, Schaffhausen : Beck, 1856.

BERNOULLI (Jean)

[1694] *Modus generalis construendi omnes æquationes differentiales primi gradus, Acta eruditorum*, nov. 1694, p. 435-437. Réimp. dans *Johannis Bernoulli Opera omnia*, vol. 1, Lausanne & Genève : Bousquet, 1742, p. 123-125.

BOUDIN (Émile)

[1862] De l'axe hydraulique des cours d'eau contenus dans un lit prismatique, et des dispositifs réalisant, en pratique, ses formes diverses, *Annales des travaux publics de Belgique*, 20 (1862), p. 397-555.

BOUNY (François)

[1954] Quelques remarques historiques et critiques au sujet de la théorie des vecteurs de Massau, dans Comité national de mécanique théorique et appliquée, éd., *Colloque Junius Massau tenu à Mons et Gand les 26 et 27 avril 1952*, Bruxelles : Palais des Académies, 1954, p. 52-73.

BOYS (Charles Vernon)

[1881] An integrating-machine, *The Philosophical Magazine*, 5 (1881), p. 342-348.

BRARD (Roger)

- [1956] *Cours de mathématiques appliquées de l'École polytechnique. Fascicule III : Statique graphique, intégration graphique, nomographie*, Paris : École polytechnique, 1956.

BUREAU (Florent)

- [1967] *Notice sur Junius Massau, membre de l'Académie*, Bruxelles : Palais des Académies, 1967.
- [1968] *Florilège des sciences en Belgique pendant le XIX^e siècle et le début du XX^e. Junius Massau*, Bruxelles : Académie royale de Belgique, classe des sciences, 1968.

CHARLIER (René)

- [1934] *Traité d'intégration graphique*, Paris & Liège : Béranger, 1934.

COLLIGNON (Édouard)

- [1872] Note sur un appareil propre à donner la surface, le moment d'inertie et les coordonnées du centre de gravité d'une aire plane, *Annales des Ponts et Chaussées (série Mémoires et documents)*, 3 (1872), p. 223–237.
- [1887] Une méthode graphique de quadrature, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15 (1887), p. 145–146.

COUSINÉRY (Barthélémy-Édouard)

- [1839] *Le Calcul par le trait, ses éléments et ses applications à la mesure des lignes, des surfaces et des cubes, à l'interpolation graphique et à la détermination, sur l'épure, de l'épaisseur des murs de soutènement et des murs de culées des voutes*, Paris : Carilian-Gœury & Dalmont, 1839.

CREMONA (Luigi)

- [1874] *Elementi di calcolo grafico*, Torino : Paravia, 1874. Trad. all. par Maximilian Curtze, *Elemente des graphischen Calculs*, Leipzig : Quandt & Händel, 1875. Trad. angl. par Thomas Hudson Beare dans *Graphical Statics. Two Treatises on the Graphical Calculus and Reciprocal Figures in Graphical Statics*, Oxford : Clarendon Press, 1890.

CULMANN (Carl)

- [1866] *Die graphische Statik*, Zürich : Meyer & Zeller, 1866; 2^e éd. (refondue), vol. 1, 1875. Trad. fr. de la 2^e éd. allemande par G. Glasser, J. Jacquier & A. Valat, *Traité de statique graphique*, Paris : Dunod, 1880.

DAUBEN (Joseph Warren), éd.

- [2000] *The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A Selective Annotated Bibliography*, revised edition on CD-ROM edited by Albert C. Lewis, in cooperation with the International Commission on the History of Mathematics, Providence : American Mathematical Society, 2000.

DELA RUYE (Jean) & LASALLE (Maurice), éd.

- [1953] Centenaire Junius Massau, *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, deuxième fascicule, 1953.

DEMOULIN (Alphonse)

- [1913] Junius Massau (1852–1909), dans *Liber Memorialis* de l'université de Gand, vol. 2, 1913, p. 250–257; rééd. dans [Massau 1952], p. 1–9.

DEPREZ (Marcel)

- [1871] Instrument servant à calculer mécaniquement la valeur des aires, des centres de gravité et des moments d'inertie des figures planes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 73 (1871), p. 785–787.

- DIDION (Isidore)
 [1848] *Traité de balistique*, Paris : Leneuveu, 1848 ; 2^e éd. Paris : Dumaine, 1860.
- DOBROVOLSKI (Viacheslav Alekseevich)
 [1972] Sur l'histoire de la classification des points singuliers des équations différentielles, *Revue d'histoire des sciences*, 25 (1972), p. 3–11.
- DONNELL (Lloyd Hamilton)
 [1942] Some refinements in methods of graphical integration, *Journal of The Franklin Institute* 233 (1942), p. 331–348.
- EVESHAM (Harold Ainsley)
 [1982] *The History and Development of Nomography*, Ph. D. Thesis, University of London, 1982.
 [1986] Origins and development of nomography, *Annals of the History of Computing*, 8 (1986), p. 324–333.
 [1994] *Nomography*, dans [Grattan-Guinness 1994], vol. 1, p. 573–584.
- FAVARO (Antonio)
 [1877] *Lezioni di statica grafica*, Padova : Sacchetto, 1877.
 [1879] *Leçons de statique graphique. Première partie. Géométrie de position*, trad. de l'italien par Paul Terrier, Paris : Gauthier-Villars, 1879.
 [1885] *Leçons de statique graphique. Deuxième partie. Calcul graphique*, trad. de l'italien par Paul Terrier, avec appendice et notes du traducteur, Paris : Gauthier-Villars, 1885.
- FISCHER (Joachim)
 [1995] Instrumente zur mechanischen Integration. Ein Zwischenbericht, dans Schütt (Hans-Werner) & Weiss (Burghard), éd.s., *Brückenschläge. 25 Jahre Lehrstuhl für Geschichte der exakten Wissenschaften und der Technik an der Technischen Universität Berlin, 1969–1994*, Berlin : Verlag für Wissenschafts- und Regionalgeschichte Dr. Michael Engel, 1995, p. 111–156.
 [2002] Instrumente zur mechanischen Integration II. Ein (weiterer) Zwischenbericht, dans Schürmann (Astrid) & Weiss (Burghard), éd.s., *Chemie-Kultur-Geschichte. Festschrift für Hans-Werner Schütt anlässlich seines 65. Geburtstages*, Berlin/Diepholz : Verlag für Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, 2002, p. 143–155.
- FRASER (A.Y.)
 [1886] Two mechanical integrators or planimeters, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 4 (1886), p. 29–36.
- GERSTENBRANDT (Josef)
 [1926] *Die graphische Integration*, Wittenberg : Ziemsen, 1926.
- GILAIN (Christian)
 [1991] La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 34 (1991), p. 215–242.
- GILLISPIE (Charles Coulston), éd.
 [1970–1990] *Dictionary of Scientific Biography*, 18 vols., New York : Charles Scribner's Sons, 1970–1990.
- GOLDSTEIN (Catherine), GRAY (Jeremy) & RITTER (Jim), éd.s.
 [1996] *L'Europe mathématique. Mathematical Europe*, Paris : Maison des sciences de l'homme, 1996.
- GOLDZIHER (Charles)
 [1912] On graphical integration, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 30 (1912), p. 49–53.

GRATTAN-GUINNESS (Ivor), éd.

- [1994] *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, 2 vols., London & New York : Routledge, 1994.

HELE SHAW (Henry Selby)

- [1890] First report of the Committee, consisting of Mr W.H. Preece (Chairman), Professor H.S. Hele Shaw (Secretary), Messrs. B. Baker, W. Anderson, and G. Kapp, and Professors J. Perry and R.H. Smith, appointed to report on the development of graphic methods in mechanical science, dans *Report of the Fifty-Ninth Meeting of the British Association for the Advancement of Science (BAAS) held at Newcastle-upon-Tyne in September 1889*, London : John Murray, 1890, p. 322–327.
- [1893] Second report on the development of graphic methods in mechanical science, dans *Report of the Sixty-Second Meeting of the BAAS held at Edinburgh in August 1892*, London : John Murray, 1893, p. 373–531.
- [1894] The development of graphic methods in mechanical science. Third report, dans *Report of the Sixty-Third Meeting of the BAAS held at Nottingham in September 1893*, London : John Murray, 1894, p. 573–613.

HENNEBERG (Lebrecht)

- [1909] Die graphische Statik der starren Körper, dans *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, vol. 4, 1^{re} partie, Leipzig : Teubner, 1909, p. 345–434.

LÉAUTÉ (Henry)

- [1891] Du mouvement troublé des moteurs consécutif à une perturbation brusque. Nouvelle méthode graphique pour l'étude complète de ce mouvement, *Journal de l'École polytechnique*, 61 (1891), p. 1–33.

LILL (Eduard)

- [1867a] Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue, *C. R. Acad. sci. Paris*, 65 (1867), p. 854–857.
- [1867b] Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 6 (1867), p. 359–362.

LISLEFERME (Henry de)

- [1882] Note d'analyse géométrique d'après Rossin, ingénieur de la marine française, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 6 (1882), p. 242–246.

MASSAU (Junius)

- [1878–1887] Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications, *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, 2 (1878), p. 13–55, 203–281 ; 7 (1884), p. 53–132 ; 10 (1887), p. 1–535.
- [1883] Note sur les appuis des poutres des ponts en arc, *Ibid.*, 6 (1883), p. 45–55.
- [1884–1887] Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications (rééd. de [Massau 1878–1887] avec une préface), *Revue universelle des mines* (2), 16 (1884), p. 243–285, 579–650 ; 17 (1885), p. 1–80 ; 20 (1886), p. 1–60, 475–540 ; 21 (1887), p. 85–118, 308–391, 572–610 ; 22 (1887), p. 1–98.
- [1885] La statique graphique des forces de l'espace, *Bulletin mensuel de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, mai 1885, p. 78–82.
- [1887a] Note sur les intégrales, *Ibid.*, mars 1887, p. 30–60.
- [1887b] Note sur le calcul des cotisations des sociétés de secours mutuel, *Ibid.*, mai 1887, p. 72–90.

- [1888] Note sur la résolution graphique des équations du premier degré, *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, 11 (1888), p. 91–112.
- [1889] Appendice au mémoire sur l'intégration graphique et ses applications, *Ibid.*, 12 (1889), p. 185–443.
- [1891a] Note sur les transmissions par bielle et manivelle, *Ibid.*, 14 (1891), p. 209–246.
- [1891b] *La représentation proportionnelle*, Gand : Hoste, 1891 ; 2^e éd., 1892.
- [1891–1896] *Cours de mécanique de l'université de Gand*, autographié, 3^e éd., Gand : Lobel, vol. 1, 1891 ; vol. 2, 1893 ; vol. 3, 1896.
- [1900–1904] Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles, *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, 23 (1900), p. 95–214 ; (3^e sér.) 1 (1902), p. 135–226, 393–434 ; 2 (1903), p. 383–436 ; 3 (1904), p. 65–147.
- [1901] Considérations sur le mouvement varié des cours d'eau, *Ibid.* (3), 24 (1901), p. 47–72.
- [1903] Discours sur les ballons dirigeables, suivi d'une note sur l'aviation, *Ibid.* (3), 2 (1903), p. 357–382.
- [1904] Note sur les pièces chargées de bout, *Ibid.* (3), 3 (1904), p. 289–366.
- [1904–1905] Discours et note sur les géométries non euclidiennes, *Ibid.* (3), 3 (1904), p. 393–456 ; 4 (1905), p. 379–513.
- [1905] Note sur l'équation des cordes vibrantes, *Ibid.* (3), 4 (1905), p. 65–152.
- [1906] Discours sur l'enseignement de la géométrie descriptive, *Ibid.* (3), 5 (1906), p. 1–13.
- [1907] Sur la représentation des équations entières de degrés quelconques, *C. R. Acad. sci. Paris*, 145 (1907), p. 311–314.
- [1911–1913] *Leçons de mécanique rationnelle*, Gand : Van Goethem, vol. 1, 1911 ; vol. 2, 1913.
- [1948] *Unsteady Flow*, trad. angl. par Henri J. Putman de [Massau 1900–1904, chap. I–III], Allenspark : Rocky Mountain Hydraulic Laboratory, 1948.
- [1952] *Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles*, Édition du Centenaire par les soins du Comité national de mécanique, Mons : Delporte, 1952.
- MAURER (Bertram)
- [1998] *Karl Culmann und die graphische Statik*, Berlin : Verlag für Geschichte der Naturwissenschaft und Technik, 1998.
- MEHMKE (Rudolf)
- [1901] Numerisches Rechnen, dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, vol. 1, Leipzig : Teubner, 1901, p. 938–992.
- [1917] *Leitfaden zum graphischen Rechnen*, Leipzig : Teubner, 1917 ; 2^e éd. (augmentée et corrigée), 1924.
- MEHMKE (Rudolf) & OCAGNE (Maurice d')
- [1909] Calculs numériques, dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. I, vol. 4, Paris : Gauthier-Villars, 1909, p. 196–452 ; rééd. Paris : Gabay, 1993.
- MERRIFIELD (Charles Watkins)
- [1868] Example of the application of a graphical method to the problem of rectilinear motion in a homogeneous resisting medium, *The Phil. Mag.* (4), 35 (1868), p. 420–423.

MIHOC (Maria)

- [1998] On the classification of the nomographic functions of four variables, *Pure Mathematics and Applications*, 9 (1998), p. 129–137.

MUIRHEAD (Robert Franklin)

- [1911] A method for successive graphic integrations, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 29 (1911), p. 78–82.

NEHLS (Christian)

- [1872] *Der Amsler'sche Integrator*, *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 18 (1872).
- [1874a] Ueber den Amsler'schen Polar-Planimeter, und über graphisch-mechanisches Integriren im Allgemeinen, *Der Civilingenieur : Zeitschrift für das Ingenieurwesen* (2), 20 (1874), p. 71–124.
- [1874b] Graphisch-mechanische Bestimmung des aequatorialen Trägheitsmoments einer gegebenen Figur in Bezug auf eine beliebige Schwerpunkts-Achse derselben, *Ibid.*, 20 (1874), p. 295–300.
- [1875] Ueber graphisch-mechanisches Integriren, *Ibid.*, 21 (1875), p. 131–148, 261–272.
- [1877] *Ueber graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik*, Hannover : Rümpler, 1877; 2^e éd., Leipzig, 1882; 3^e éd., 1885.

NOVÛ (Lubòs)

- [1996] Les mathématiques et l'évolution de la nation tchèque (1860–1918), dans [Goldstein, Gray & Ritter 1996], p. 289–301.

OCAGNE (Maurice d')

- [1908] *Calcul graphique et nomographie*, Paris : Doin, 1908; 2^e éd. (revue et corrigée), 1914; 3^e éd., 1924.

PAWLIKOWSKA-BROŹEK (Zofia)

- [1996] On mathematical life in Poland, dans [Goldstein, Gray & Ritter 1996], p. 289–301.

PICKERING (Edward Charles)

- [1874] Graphical integration, *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 10 (1874), p. 79–81.

PONCELET (Jean-Victor)

- [1827–1830] *Cours de mécanique industrielle*, rédigé par Mr le capitaine du Génie Gosselin, Paris : Lithographie de Clouet, 1^{re} partie, 1827–1828; 2^e partie, 1828–1829; 3^e partie, 1830.
- [1835] Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes, *Mémorial de l'officier du génie*, 12 (1835), p. 151–213.

POUSSIN (René)

- [1905] *Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurances*, Paris : Dulac, 1905.
- [1909] Sur l'application du graphicisme aux calculs d'assurances, dans Castelnovo (Guido), éd., *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici (Roma, 6-11 aprile 1908)*, vol. III, Roma : Accademia dei Lincei, 1909, p. 228–232.

PRÉDHUMEAU (J.)

- [1923] *Cours de calcul graphique des surfaces*, Paris : École spéciale des travaux publics, 1923.

ROSE (Joshua)

- [1910] Junius Massau (1852–1909). Courte notice sur sa vie et ses travaux en mécanique et en géométrie vectorielle, *L'enseignement mathématique*, 12 (1910), p. 187–200.

- RUNGE (Carl)
 [1912] *Graphical methods*, New York : Columbia University Press, 1912. Éd. allemande, *Graphische Methoden*. Leipzig & Berlin : Teubner, 1915; 2^e éd. 1919.
- RUNGE (Carl) & WILLERS (Friedrich Adolf)
 [1915] Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, dans *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, vol. 2, 3^e partie, Leipzig : Teubner, 1915, p. 47–176.
- SANDEN (Horst von)
 [1914] *Praktische Analysis*, Leipzig & Berlin : Teubner, 1914; 2^e éd., 1923. Trad. angl. par H. Levy, *Practical mathematical analysis*, London : Methuen, 1923.
- SAVIOTTI (Carlo)
 [1882] Sui metodi grafici d'integrazione con applicazioni, *Giornale del Genio civile*, 20 (1882), p. 172–193.
 [1883] Note sur les méthodes graphiques d'intégration, *Revue universelle des mines* (2), 13 (1883), p. 483–511.
- SCHOLZ (Erhard)
 [1984] Projektive und vektorielle Methoden in Culmanns graphischer Statik, *Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, 21 (1984), n^o 2, p. 49–64.
 [1989] *Symmetrie, Gruppe, Dualität. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendung in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts*, Basel : Birkhäuser, 1989.
 [1994] *Graphical statics*, dans [Grattan-Guinness 1994], vol. 2, p. 987–993.
- SEGNER (Johann Andreas von)
 [1761] Methodus simplex et universalis, omnes omnium æquationum radices detegendi, *Novi commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanæ*, 7 (1761), p. 211–226.
- ŠOLÍN (Josef Marcell)
 [1872] *Ueber graphische Integration. Ein Beitrag zur Arithmographie*, Prag : Verlag der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1872.
- SONNET (Hippolyte)
 [1867] *Dictionnaire des mathématiques appliquées*, Paris : Hachette, 1867; 2^e éd., 1874; 3^e éd., 1879; 4^e éd., 1884.
- THOMSON (William) & TAIT (Peter Guthrie)
 [1879] *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, part I, Cambridge : University Press, 1879.
- TOURNÈS (Dominique)
 [2000] Pour une histoire du calcul graphique, *Revue d'histoire des mathématiques*, 6 (2000), p. 127–161.
 [2003] L'intégration graphique des équations différentielles ordinaires, *Historia mathematica*, 30 (2003), p. 457–493.
- WILLERS (Friedrich Adolf)
 [1907] Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 55 (1907), p. 225–263.
 [1920] *Graphische Integration*, Berlin & Leipzig : Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, 1920.
 [1926] *Mathematische Instrumente*, Berlin : Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, 1926.

- [1928] *Methoden der praktischen Analysis*, Berlin : de Gruyter, 1928; 2^e éd., 1950; 3^e éd., 1957; 4^e éd., 1971. Trad. angl. par Robert T. Beyer, *Practical analysis. Graphical and numerical methods*, New York : Dover, 1948.
- [1943] *Mathematische Instrumente*, München & Berlin : Oldenbourg, 1943.
- [1951] *Mathematische Maschinen und Instrumente*, Berlin : Akademie-Verlag, 1951.
- ŻMURKO (Wawrzyniec)
- [1864] *Wykład matematyki*, 2 vols., Lwów : Pillera, 1864.