Astérisque

CHRISTOPHE BREUIL

Introduction générale

Astérisque, tome 319 (2008), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__1_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 1–12

INTRODUCTION GÉNÉRALE

par

Christophe Breuil

1. Retour sur la genèse du programme de Langlands p-adique

Fixons un nombre premier p. Ce paragraphe contient une description de la genèse ayant conduit à la découverte des premiers cas de la correspondance locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

1.1. La conjecture de Fontaine-Mazur. — On peut dire sans exagération que la recherche d'une correspondance entre (certaines) représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ - ou de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ - et (certaines) représentations p-adiques de dimension 2 - ou de dimension n - de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, dont les représentations de de Rham de Fontaine, est un vieux désir de plusieurs arithméticiens : citons par exemple J.-P. Serre (voir [**28**]), B. Mazur, R. Langlands, J.-M. Fontaine ([**21**]), M. Harris, M.-F. Vignéras, P. Schneider, etc. Ce désir s'est trouvé (re)stimulé en 2000 par l'énoncé de la conjecture sur les multiplicités modulaires ([**11**], [**4**], [**24**]), elle-même issue des calculs ayant conduit aux derniers cas de Taniyama-Weil ([**17**], [**9**]). Mais il n'est nul besoin de faire appel à cette conjecture pour motiver *a priori* la recherche d'une correspondance p-adique, car cette dernière est en quelque sorte déjà en germe dans la conjecture de Fontaine-Mazur, comme nous tentons de l'expliquer ci-dessous.

Fixons une fois pour toutes des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit F un corps de nombres, $\mathbb{A}_F$ le groupe localement compact des adèles de F et $n \geq 1$ un entier. On normalise les applications de réciprocité locales de telle sorte que les Frobenius géométriques s'envoient sur les inverses des uniformisantes.

L'énoncé conjectural classique suivant est dû à Langlands, Fontaine, Mazur et Tate :

Conjecture 1.1. — *Il y a une unique bijection entre les deux ensembles :*
{classes d'isomorphismes de représentations automorphes paraboliques algébriques $\pi = \otimes' \pi_l$ *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\}$

$$\updownarrow$$

© Astérisque 319, SMF 2008

{classes d'isomorphismes de représentations continues irréductibles $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ non ramifiées en presque toutes les places et potentiellement semi-stables aux places divisant p}
telle que, pour toute place finie $\mathfrak{l} \mid \ell$, $\ell \neq p$, $\pi_{\mathfrak{l}}$ et $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ se déterminent mutuellement par la correspondance de Langlands locale (convenablement normalisée).

On rappelle que la correspondance locale a été établie dans [**22**] et [**23**] et qu'une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est algébrique si, pour chaque place infinie, la restriction à $\mathbb{C}^\times$ du paramètre de Langlands correspondant est une somme directe de caractères $z \mapsto z^{a-\frac{n-1}{2}}\overline{z}^{b-\frac{n-1}{2}}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ (voir [**13**]). En fait, la correspondance $\pi_{\mathfrak{l}} \leftrightarrow \rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ ci-dessus passe par la représentation de Weil-Deligne, conjecturalement F-semi-simple, associée à la représentation p-adique $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$. Mais pour $\ell \nmid p$, cette représentation de Weil-Deligne détermine $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$. L'unicité dans la conjecture 1.1 est une conséquence du théorème de Čebotarev du côté galoisien et du théorème de multiplicité 1 fort du côté automorphe.

Plusieurs cas de la conjecture 1.1 sont démontrés (e.g. le cas $n = 1$), mais nous n'en faisons pas la liste ici. Aux places $\mathfrak{p}$ divisant p, il est connu depuis longtemps que $\pi_{\mathfrak{p}}$ en général *ne* determine *pas* $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, mais seulement (conjecturalement) une petite partie : la représentation de Weil-Deligne associée à $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$ ([**20**]). Pourtant, π détermine bien la représentation globale ρ, donc *a fortiori* $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, ce qui veut dire que ce qui manque à $\pi_{\mathfrak{p}}$ pour déterminer $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$ est quand même « quelque part » dans π. À l'origine du programme de Langlands p-adique est la volonté de comprendre ce qu'il faut rajouter à $\pi_{\mathfrak{p}}$ pour reconstruire $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. Autrement dit, on veut élucider l'apparition de la théorie de Hodge p-adique côté Galois en termes de théorie des représentations côté automorphe.

Voilà une façon un petit peu moins vague de formuler cet objectif :

Question 1. — *Peut-on associer à π une représentation « p-adique naturelle » $\widehat{\pi} = \otimes'\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ telle que, pour toute place finie $\mathfrak{l}$, $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ et $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ se déterminent mutuellement ?*

« Naturelle » veut dire par exemple que $\widehat{\pi}$ ou ses facteurs $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ se réalisent dans des espaces de cohomologie convenables. Pour $\mathfrak{l} \nmid p$, on peut déjà prendre $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}} = \pi_{\mathfrak{l}}$, de sorte que la tâche principale est de définir $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \mid p$. Plus précisément, on veut donc que $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}}$ détermine $\pi_{\mathfrak{p}}$, mais aussi contienne la donnée supplémentaire permettant de reconstruire complètement la représentation p-adique $\rho_{\mathfrak{p}} = \rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. D'un point de vue local, on cherche donc de nouvelles correspondances $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}} \leftrightarrow \rho_{\mathfrak{p}}$.

Si $\widehat{\pi}$ existe, l'espoir est que la correspondance $\pi \leftrightarrow \rho$ de la conjecture 1.1 se « factorise » naturellement par $\pi \to \widehat{\pi} \leftrightarrow \rho$ où, dans le dernier cas, les représentations locales se déterminent mutuellement place par place, et où l'analyse aux places infinies côté automorphe est remplacée par de l'analyse p-adique aux places divisant p. C'est exactement ce qui se passe lorsque $n = 1$, comme nous l'expliquons maintenant.

1.2. Le cas GL_1. — Soit $\mathbb{A}_F^f$ l'anneau des adèles finis de F et $(\mathbb{A}_F^\times)^0$ la composante connexe de 1 dans $\mathbb{A}_F^\times$. Lorsque $n = 1$, π (comme dans la conjecture 1.1) n'est autre qu'un caractère de Hecke algébrique :

$$\chi : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times.$$

Soit I l'ensemble des plongements $\iota : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ et χ_∞ la partie infinie de χ. Comme χ est algébrique, il y a un unique caractère $\chi_0 : \mathbb{A}_F^\times \to \{\pm 1\}$ trivial sur $(\mathbb{A}_F^f)^\times (\mathbb{A}_F^\times)^0$ et des entiers $(a_\iota)_{\iota \in I}$ uniques tels que pour $x \in F^\times$:

$$\chi_\infty(x) = \chi_0(x) \Pi_{\iota \in I} \iota(x)^{a_\iota}.$$

De plus, par des résultats classiques (voir e.g. [**23**]), $\chi(\mathbb{A}_F^f)$ est en fait contenu dans une extension finie de $\mathbb{Q}$ de sorte que, via les deux plongements fixés, on peut voir $\chi_\mathfrak{l}$ pour toute place finie $\mathfrak{l}$ comme un caractère :

$$\chi_\mathfrak{l} : F_\mathfrak{l}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times.$$

À chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de F divisant p et chaque plongement $\sigma : F_\mathfrak{p} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ est associé un unique plongement $\iota(\mathfrak{p}, \sigma) : F \hookrightarrow \mathbb{C}$, que l'on peut voir comme un plongement $\iota(\mathfrak{p}, \sigma) : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ via l'injection fixée $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}{\hookrightarrow} & \overline{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_\mathfrak{p} & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & \overline{\mathbb{Q}}_p \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est le plongement fixé $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On définit $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ comme $\widehat{\chi} = \otimes' \widehat{\chi}_\mathfrak{l}$ où :

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_\mathfrak{l} &= \chi_0 \mid_{F_\mathfrak{l}^\times} \text{ si } \mathfrak{l} \text{ est infini} \\ \widehat{\chi}_\mathfrak{l} &= \chi_\mathfrak{l} \text{ si } \mathfrak{l} \text{ est fini, } \mathfrak{l} \nmid p \\ \widehat{\chi}_\mathfrak{p} &= \chi_\mathfrak{p} \prod_{\sigma : F_\mathfrak{p} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \sigma^{a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}} \text{ si } \mathfrak{l} = \mathfrak{p} \mid p. \end{aligned}$$

Notons :

$$r_F : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_F^\times / \overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times}$$

l'application de réciprocité globale où $(\mathbb{A}_F^\times)^0$ est la composante connexe neutre de $\mathbb{A}_F^\times$ et $\overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times}$ désigne la fermeture de $(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times$ dans $\mathbb{A}_F^\times$. Le lemme suivant est une conséquence facile des définitions qui précèdent, de la compatibilité entre les applications de réciprocité locale et globale et du théorème de Čebotarev :

Lemme 1.2. — *Le caractère $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ se factorise en un caractère (encore noté) $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times / \overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ tel que :*

$$\widehat{\chi} \circ r_F : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times = \mathrm{GL}_1(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

est la représentation ρ (de dimension 1) de la correspondance 1.1.

En d'autres termes, la correspondance $\pi = \chi \leftrightarrow \rho$ de la conjecture 1.1 se factorise bien naturellement par $\pi \to \widehat{\pi} = \widehat{\chi} \leftrightarrow \rho$.

Pour passer au cas $n > 1$, il faut d'abord généraliser la construction du caractère « localement algébrique » $\widehat{\chi}_{\mathfrak{p}}$ ci-dessus. Cela n'est pas difficile si l'on suppose que la représentation automorphe algébrique π est de plus « régulière » au sens de [**13**].

1.3. Représentations localement algébriques de $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}})$. — Rappelons qu'à une représentation algébrique π comme au §1.1 et à un plongement $\iota : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ est associée une liste de poids $a_\iota = (a_{\iota,1}, \cdots, a_{\iota,n})$ dans $\mathbb{Z}$: voir [**13**, §3.3] (attention que la normalisation n'est pas tout à fait la même que celle de *loc. cit.* : on remplace ici $\pi|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ par $\pi|\cdot|^{\frac{n-1}{2}}$). On dit que π est régulière si, pour tout plongement ι, les $a_{\iota,j}$ sont des entiers distincts, que l'on ordonne de façon croissante avec j.

Soit $L(\iota)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$) de plus haut poids :

$$a_{\iota,1} \leq a_{\iota,2} - 1 \leq a_{\iota,3} - 2 \leq \cdots \leq a_{\iota,n} - n + 1,$$

i.e. $L(\iota)$ est l'induite « algébrique » des matrices triangulaires supérieures à $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ du caractère algébrique :

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1^{a_{\iota,1}} x_2^{a_{\iota,2}-1} \cdots x_n^{a_{\iota,n}-n+1}.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de F divisant p, $\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ un plongement et $\iota(\mathfrak{p}, \sigma) : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ le plongement associé au couple $(\mathfrak{p}, \sigma)$ défini au §1.2. On note $\mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma)$ la représentation de $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}})$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ donnée par :

$$\mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma) = L(\iota(\mathfrak{p}, \sigma)) \circ \sigma$$

où l'on désigne encore par σ l'injection $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ induite par $\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On pose enfin :

$$\begin{aligned} \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}} &= \bigotimes_{\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma) \\ \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}} &= \pi_{\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

La représentation localement algébrique $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ est l'exact analogue du caractère localement algébrique $\chi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}} = \widehat{\chi}_{\mathfrak{p}} = \chi_{\mathfrak{p}} \otimes (\otimes_{\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \sigma^{a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}})$ du §1.2 (modulo le décalage ci-dessus sur les poids $a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma),j}$ que nous n'expliquons pas ici). Mais contrairement au cas $n = 1$, on ne peut poser $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ car la représentation $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ n'est toujours pas suffisante en général pour déterminer la représentation galoisienne $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. L'idée supplémentaire est alors que la donnée manquante pour « retrouver » la représentation $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, au moins lorsque celle-ci est irréductible, pourrait être la donnée d'une *complétion p-adique unitaire* convenable de $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$, ou, ce qui revient au

même, la donnée d'une norme p-adique sur $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ (à équivalence près) invariante sous l'action de $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}})$.

À l'heure actuelle, et avec ce degré de généralité, il n'est pas sûr que ce scénario soit le bon (il est peut-être encore trop simpliste). Mais on sait maintenant que pour $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, c'est vraiment ce qui se passe. L'idée de l'existence de diverses complétions de $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ a été suggérée par la conjecture sur les multiplicités modulaires de [**11**]. Nous expliquons ceci maintenant.

1.4. La conjecture sur les multiplicités modulaires. — Rappelons d'abord brièvement son énoncé. Considérons les données suivantes :

(i) k est un entier ≥ 2 ;

(ii) $\tau : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est une représentation de noyau ouvert qui s'étend à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (où $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ est le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$) ;

(iii) $\overline{\rho}_p : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est une représentation de noyau ouvert satisfaisant $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = \overline{\mathbb{F}}_p$.

Soit $\mathscr{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ tel que τ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O})$ et $\overline{\rho}_p$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}/\mathfrak{m}_{\mathscr{O}})$ (le corps résiduel). Mazur a montré qu'il existait une $\mathscr{O}$-algèbre locale noethérienne complète $R(\overline{\rho}_p)$ de corps résiduel $\mathscr{O}/\mathfrak{m}_{\mathscr{O}}$ et une représentation continue $\rho_p^{\mathrm{univ}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(R(\overline{\rho}_p))$ se réduisant sur $\overline{\rho}_p$ modulo l'idéal maximal de $R(\overline{\rho}_p)$ et possédant la propriété d'être une déformation « universelle » de $\overline{\rho}_p$.

***Définition 1.3* ([17, 9, 11]).** — On dit qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $R(\overline{\rho}_p)$ est de type (k, τ) s'il existe un morphisme continu de $\mathscr{O}$-algèbres $\iota : R(\overline{\rho}_p) \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ de noyau $\mathfrak{p}$ tel que la représentation composée :

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\rho_p^{\mathrm{univ}}} \mathrm{GL}_2(R(\overline{\rho}_p)) \xrightarrow{\iota} \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

possède les propriétés suivantes :

(i) ρ_p est de Rham à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$;

(ii) la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ de la représentation de Weil-Deligne associée à ρ_p ([**20**]) est isomorphe à τ.

Rappelons que les travaux de Mebkhout, André puis Kedlaya (indépendamment) ajoutés à ceux de Berger ([**1**]) ont permis de démontrer qu'une représentation de de Rham était la même chose qu'une représentation potentiellement semi-stable (cf. [**1**]).

Notons :

$$R(k, \tau, \overline{\rho}_p) = \frac{R(\overline{\rho}_p)}{\bigcap_{(k,\tau)} \mathfrak{p}}$$

l'intersection étant prise sur les idéaux premiers de type (k, τ) (s'il n'y en a pas, on convient que $R(k, \tau, \overline{\rho}_p) = 0$). Notons $\mu_{\mathrm{gal}}(k, \tau, \overline{\rho}_p)$ la multiplicité de Hilbert-Samuel

de l'anneau local $R(k,\tau,\overline{\rho}_p)\otimes\mathscr{O}/\mathfrak{m}_{\mathscr{O}}$. L'idée est que l'entier $\mu_{\mathrm{gal}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$, purement galoisien, peut être *prédit* par l'étude de certaines représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Plus précisément, Henniart a montré dans l'appendice de [**11**] que, via la correspondance locale de Langlands usuelle pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on pouvait associer de manière canonique à la représentation τ une représentation irréductible d'image finie $\sigma(\tau)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (définie sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ par exemple). Considérons la représentation p-adique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$:

$$\sigma(k,\tau)=\sigma(\tau)\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2.$$

On peut « classer selon $\overline{\rho}_p$ » les représentations irréductibles apparaissant dans la décomposition de la semi-simplifiée modulo p de $\sigma(k,\tau)$ et on peut considérer le nombre $\mu_{\mathrm{aut}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ de composantes dans chaque classe (c'est une somme de multiplicités). La conjecture est alors :

Conjecture 1.4 **([11], [4]).** — $\mu_{\mathrm{aut}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)=\mu_{\mathrm{gal}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$.

Pour être précis, la conjecture initiale de [**11**] supposait par prudence $k<p$ (car elle n'avait été vérifiée que dans de tels cas, cf. le commentaire de [**4**, §8.3]). Ce sont les travaux de Kisin qui ont permis de supprimer sans remords cette hypothèse inutile, tout en prouvant une partie significative de la conjecture 1.4 et en montrant du même coup qu'elle était effectivement intimement liée à la correspondance p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**24**]).

Voici l'heuristique : la raison pour laquelle la conjecture 1.4 peut faire penser à une correspondance p-adique est, en gros, la suivante. Les calculs montrent que les anneaux $R(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ font intervenir « à fond » la théorie de Hodge p-adique, c'est-à-dire qu'ils dépendent, et avec eux les multiplicités $\mu_{\mathrm{gal}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$, de façon compliquée des représentations galoisiennes p-adiques ρ_p de la définition 1.3, et pas seulement de leurs poids de Hodge-Tate ou de leurs représentations de Weil-Deligne associées. Or, il est *quand même* possible de retrouver les multiplicités $\mu_{\mathrm{gal}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ à partir des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations localement algébriques $\sigma(\tau)\otimes\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$. Cela suggère qu'en poussant plus loin la théorie des représentations côté GL_2, il doit être possible de retrouver les représentations galoisiennes ρ_p elles-mêmes à partir de représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (contenant par exemple $\sigma(\tau)\otimes\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$).

1.5. Les premiers cas. — Partons donc d'une représentation de de Rham irréductible $\rho_p:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ de poids de Hodge-Tate distincts $(0,k-1)$ et de déterminant ε^{k-1} où ε est le caractère cyclotomique p-adique. Supposons pour simplifier que la représentation de Weil-Deligne associée à ρ_p par [**20**] est F-semi-simple et que la représentation lisse irréductible π_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui lui correspond est de dimension infinie. On normalise ici π_p de sorte que son caractère central est donné par $x\mapsto|x|_p^{k-2}$ où $|\cdot|_p$ est la norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p^\times$ ($|p|_p=1/p$).

Puisque, lorsque le groupe est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, on est amené dans la conjecture 1.4 à considérer des représentations localement algébriques $\sigma\otimes\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$, il est naturel de considérer, lorsque le groupe est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, les représentations localement algébriques

$\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$. Quand π_p est supercuspidale, on les obtient par exemple par induction compacte des précédentes.

Le premier cas test est celui où ρ_p est cristalline (dans ce cas, π_p est une série principale non ramifiée). Des calculs montrent alors que, lorsque π_p vient d'une représentation cristalline ρ_p comme ci-dessus, les représentations $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ admettent toutes un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-réseau (de type fini sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) et que, de plus, la réduction de ce réseau modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_p$ a pour semi-simplification une représentation lisse admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui a l'une des deux formes $I(r,\eta)$ ou $R(r,\lambda,\eta)$ suivantes :

$$\begin{aligned} I(r,\eta) &= \Big(\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2\big)/T\Big) \otimes (\eta \circ \det) \\ R(r,\lambda,\eta) &= \Big(\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2\big)/(T-\lambda)\Big)^{\mathrm{ss}} \otimes (\eta \circ \det) \\ &\quad \oplus \Big(\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^{[p-3-r]} \overline{\mathbb{F}}_p^2\big)/(T-\lambda^{-1})\Big)^{\mathrm{ss}} \otimes (\eta \circ \det) \end{aligned}$$

où $r \in \{0, \cdots, p-1\}$, $[p-3-r]$ est l'unique entier dans $\{0, \cdots, p-2\}$ congru à $p-3-r$ modulo $p-1$, $\eta : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère lisse, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, « ss » signifie « semi-simplifiée » et T est l'opérateur de Hecke « T_p ». De plus, à chaque fois que l'on trouve la forme $I(r,\eta)$, la semi-simplifiée modulo p de ρ_p est irréductible de restriction à l'inertie $\omega_2^{r+1}\eta \oplus \omega_2^{p(r+1)}\eta$, et à chaque fois que l'on trouve la forme $R(r,\lambda,\eta)$, la semi-simplifiée modulo p de ρ_p est réductible isomorphe à $\mathrm{nr}(\lambda^{-1})\omega^{r+1}\eta \oplus \mathrm{nr}(\lambda)\eta$ (où $\mathrm{nr}(x)$ est le caractère non-ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ envoyant un Frobenius arithmétique absolu sur x, ω est le caractère ε modulo p et ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2).

Ces phénomènes ont été découverts par des calculs sur des valeurs spéciales, ou petites, de k dans [**6**], mais sont maintenant prouvés en généralité (voir [**2**]). Ils amènent clairement à *définir* la correspondance semi-simple modulo p suivante :

(i) $I(r,\eta)$ correspond à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ de restriction à l'inertie $\omega_2^{r+1}\eta \oplus \omega_2^{p(r+1)}\eta$ et de déterminant $\omega^{r+1}\eta^2$;

(ii) $R(r,\eta)$ correspond à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $\mathrm{nr}(\lambda^{-1})\omega^{r+1}\eta \oplus \mathrm{nr}(\lambda)\eta$.

1.6. Cas semi-stables non cristallins. — Le deuxième cas test est celui où ρ_p est semi-stable non-cristalline (toujours irréductible). Dans ce cas, π_p est, à torsion non ramifiée près, la représentation de Steinberg. On souhaite comme précédemment trouver des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ possédant des réseaux dont les semi-simplifications correspondent aux semi-simplifications des représentations semi-stables ρ_p par la correspondance semi-simple modulo p du §1.5. Mais si l'on considère un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-réseau de type fini sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$, on se rend compte assez vite que sa réduction modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_p$ est de longueur *infinie*, et donc ne peut être de l'une des deux formes $I(r,\eta)$ ou $R(r,\lambda,\eta)$ précédentes.

Par ailleurs, les représentations semi-stables ρ_p comme ci-dessus dépendent, outre de k, d'un paramètre $\mathscr{L} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ (appelé l'« invariant $\mathscr{L}$ ») et les calculs de [**11**] montrent que ce paramètre se retrouve dans la semi-simplification modulo p de $\rho_p = \rho_p(k, \mathscr{L})$. L'idée est alors la suivante : il existe en fait plusieurs classes de commensurabilité de $\overline{\mathbb{Z}}_p$-réseaux stables sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ (mais pas engendrés par un nombre fini de vecteurs sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$), ces classes sont paramétrées par $\mathscr{L} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ et leur réduction est de la forme $I(r, \eta)$ ou $R(r, \lambda, \eta)$. De plus, chaque classe de commensurabilité donne lieu à une classe d'équivalence de normes en posant, si $R_{\mathscr{L}}$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $v \in R_{\mathscr{L}}$:

$$\|v\|_{\mathscr{L}} = \sup_{\substack{\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \\ \lambda v \in R_{\mathscr{L}}}} |\lambda|_p$$

et on peut considérer le complété $\widehat{\pi}_p$ de $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ pour la (classe d'équivalence de la) norme $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$. On espère que cet espace de Banach p-adique unitaire (i.e. possédant une norme invariante, à savoir le prolongement continu de la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$) « correspond » à la représentation galoisienne semi-stable $\rho_p(k, \mathscr{L})$, et que les semi-simplifiées modulo p se correspondent comme au §1.5. Notons que cela entraîne alors en particulier que ce Banach est *admissible* au sens de [**26**].

Un candidat pour ces complétions a été défini dans [**7**] via le demi-plan de Drinfeld et la théorie des représentations localement analytiques de Schneider et Teitelbaum ([**27**], [**25**]), puis plus directement dans [**8**, §3] comme espace fonctionnel. Des calculs assez laborieux ont montré que, pour de petites valeurs de k, la réduction modulo p de ces complétions avait bien les bonnes propriétés ([**12**]). Nous notons $B(k, \mathscr{L})$ ces complétions dans la suite.

1.7. Compatibilité local-global. — Se pose alors la question de relier les espaces de Banach $B(k, \mathscr{L})$ à la théorie globale. Soit $(Y(p^n)_{\overline{\mathbb{Q}}})_n$ la tour des courbes modulaires affines sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont les points complexes sont $\mathfrak{h}/\Gamma(p^n)$ (en fait, il faut prendre plusieurs « copies » de cette tour), dans [**19**], Emerton étudie les espaces de Banach p-adiques munis d'une action continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\widehat{H}^1 = \Big(\varprojlim_m \big(\varinjlim_n H^1_{\text{ét}}(Y(p^n)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Z}}_p/p^m\overline{\mathbb{Z}}_p) \big) \Big) \Big[\frac{1}{p}\Big]$$

et montre d'une part qu'ils sont admissibles, d'autre part qu'ils contiennent toutes les représentations localement algébriques $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ pour π_p composante locale en p d'une représentation automorphe parabolique algébrique régulière π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Lorsque la représentation galoisienne globale ρ est semi-stable non-cristalline en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (comme au §1.6), il est tentant de demander que la complétion de $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ induite par $\widehat{H}^1$ soit précisément (à torsion près) $B(k, \mathscr{L})$ (où k est le « poids » de π et $\mathscr{L}$ l'invariant apparaissant sur $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$). Un premier effort, utilisant les symboles modulaires et une construction due à Darmon et Orton, a abouti à montrer dans la première version de [**8**] qu'il y avait au moins (dans beaucoup

de cas) un morphisme continu de $B(k,\mathscr{L})$ dans cette complétion. Cela entraînait le résultat nouveau suivant (déduit de la description explicite de $B(k,\mathscr{L})$, voir [**8**]) :

Théorème 1.5. — *Les distributions p-adiques μ_p associées à la représentation automorphe π annulent les fonctions $h(z)$ sur $\mathbb{Q}_p$ de la forme :*

$$h(z)=\sum_{i\in I}\lambda_i(z-a_i)^{n_i}\big(\log_0(z-a_i)+\mathscr{L}\mathrm{val}(z-a_i)\big)$$

où I est fini, $\lambda_i\in\overline{\mathbb{Q}}_p$, $a_i\in\mathbb{Q}_p$, $-1+k/2<n_i\leq k-2$, $\deg(\sum_{i\in I}\lambda_i(z-a_i)^{n_i})<-1+k/2$, $\log_0$ est le logarithme d'Iwasawa et val *la valuation p-adique usuelle.*

Ce résultat allait conduire Colmez à découvrir que la théorie des (φ,Γ)-modules devait jouer un rôle absolument crucial dans le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

1.8. La découverte de l'interprétation par les (φ,Γ)-modules. — Le lien avec les (φ,Γ)-modules est une découverte fondamentale pour la suite du programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui a permis d'une part de remplacer les conjectures et résultats partiels par des théorèmes complets d'autre part de pousser la théorie (pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) beaucoup plus loin.

Son origine est la suivante : la théorie de Coleman, Kato et Perrin-Riou donne une construction des distributions p-adiques μ_p ci-dessus via la cohomologie galoisienne à partir d'un système d'Euler. Par ailleurs la théorie des (φ,Γ)-modules due à Fontaine, puis étendue par Colmez et Berger, est une théorie qui fournit un cadre approprié pour reformuler les résultats et constructions de Perrin-Riou et Kato en donnant une description particulièrement explicite des représentations galoisiennes p-adiques et de leur cohomologie. En cherchant à redémontrer le théorème 1.5 via la construction de μ_p issue des (φ,Γ)-modules, Colmez découvrit dans [**16**] que le dual topologique $B(k,\mathscr{L})^*$ du Banach $B(k,\mathscr{L})$ pouvait se reconstruire *directement* à partir du (φ,Γ)-module $D(k,\mathscr{L})$ (un $\overline{\mathbb{Q}}_p[[X]][1/X]^\wedge$-module libre de rang 2) de la représentation galoisienne $\rho_p(k,\mathscr{L})$.

Théorème 1.6 **([16])**. — *On a un isomorphisme naturel :*

$$B(k,\mathscr{L})^*\simeq\big(\varprojlim_{\psi}D(k,\mathscr{L})\big)^{\mathrm{b}}$$

où $\psi : D(k,\mathscr{L})\to D(k,\mathscr{L})$ est un certain opérateur surjectif et où $\big(\varprojlim_{\psi}D(k,\mathscr{L})\big)^{\mathrm{b}}$ (aussi noté $\psi^{-\infty}(D(k,\mathscr{L}))^{\mathrm{b}}$) est le $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel des suites (infinies) ψ-compatibles bornées d'éléments de $D(k,\mathscr{L})$.

De plus, les structures du (φ,Γ)-module $D(k,\mathscr{L})$ (à savoir, l'action du Frobenius φ et celle du groupe $\Gamma=\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_p)$) permettent de retrouver facilement l'action du sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des matrices triangulaires supérieures. Mais surtout, l'isomorphisme ci-dessus permet de montrer, en utilisant les propriétés de $D(k,\mathscr{L})$, que

$B(k,\mathscr{L})$ est toujours non-nul, admissible, topologiquement irréductible en restriction au Borel, et, par [**2**], qu'il a la « bonne » réduction modulo p (voir §1.5).

Ce théorème a été rapidement étendu dans [**3**] au cas cristallin du §1.5, et permet dans ce cas de montrer que $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ n'a qu'une seule complétion p-adique unitaire (mais dans le cas cristallin, ρ_p ne dépend de rien d'autre que π_p et k). Puis il a été étendu dans [**15**] au cas où ρ_p est trianguline mais plus forcément de Rham. Dans ce cas, on ne dispose plus de représentations localement algébriques analogues aux représentations $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ (mais on dispose de séries principales localement analytiques au sens de [**27**]).

1.9. Fin de la genèse et développements ultérieurs. — Avec l'apparition des (φ,Γ)-modules, on peut dire que la période de genèse, échelonnée entre 2000 et 2004, s'achève (pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ du moins) et que la théorie « sérieuse » commence. Depuis 2004, citons en bref et par ordre chronologique les principales nouvelles étapes : la construction des bonnes représentations $\widehat{\pi}_p = B(\rho_p)$ (encore des espaces de Banach munis d'une action unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) lorsque ρ_p est de Rham mais réductible ([**10**]), la construction d'un foncteur associant des représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ à certains Banach admissibles munis d'une action unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**14**]), la construction, via des arguments de déformations, puis par des arguments directs, de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach admissibles unitaires $B(\rho_p)$ pour *toute* représentation p-adique ρ_p de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ([**14**]), la description (presque) complète du $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach $\widehat{H}^1$ du §1.7 utilisant l'ensemble des résultats obtenus sur le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**18**]) et enfin la description des vecteurs localement analytiques de $B(\rho_p)$ en termes de « (φ,Γ)-modules analytiques » et, dans les cas de Rham, des vecteurs localement algébriques en termes de « φ-modules filtrés » ([**14**]). Je renvoie les lecteurs à l'introduction du volume II (par Colmez) pour une description plus détaillée de l'aspect (φ,Γ)-modules.

2. Contenu des trois volumes

L'idée de départ en janvier 2004 était de réunir en un volume beaucoup des articles sur le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, qui à l'époque concernaient principalement le cas des représentations semi-stables de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Mais les résultats et la théorie évoluant très rapidement au fil des mois (puis des années !), il fallut passer de un volume à trois, tandis que certains articles sur le sujet paraissaient déjà dans d'autres revues. Il devint aussi naturel d'inclure des articles sur les (φ,Γ)-modules (vu l'importance grandissante de ces derniers) ne faisant pas directement référence au programme de Langlands p-adique.

Les deux premiers volumes sont donc consacrés aux (φ,Γ)-modules, tandis que le dernier volume contient des articles globaux ou locaux sur le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (et des questions liées) n'utilisant pas les (φ,Γ)-modules (dont les premiers articles sur le sujet). Décrivons très succinctement le contenu de chaque volume.

Le premier volume ne parle pas de représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, mais parle abondamment de représentations p-adiques de groupes de Galois comme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ traitées via leurs (φ,Γ)-modules associés. En particulier, il contient (entres autres) la courte preuve par Berger de la conjecture « faiblement admissible implique admissible » (via les (φ,Γ)-modules et un théorème de Kedlaya), un article de Berger-Colmez traitant le cas de familles de représentations galoisiennes, des articles de Iovita, Brinon et Andreatta sur les (φ,Γ)-modules en dimension supérieure, un article de Kedlaya sur la filtration par les pentes et divers articles de Colmez sur les (φ,Γ)-modules, dont celui définissant les représentations triangulines.

Le deuxième volume contient le traitement par les (φ,Γ)-modules du programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, c'est-à-dire la construction et l'étude des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires $B(\rho_p)$ associés aux représentations p-adiques ρ_p de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (leurs vecteurs localement analytiques et algébriques, leur réduction modulo p, etc.). Les articles sont pour l'essentiel dus à Colmez, avec un article de Berger sur la réduction modulo p et un article de Breuil-Berger sur le cas cristabellin. Il contient aussi en préambule un article de Vignéras expliquant la construction de $\mathrm{GL}_n(F)$-Banach unitaires ℓ-adiques ($\ell \neq p$) associés aux représentations ℓ-adiques de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ ainsi qu'un article de référence dû à Colmez sur les résultats d'analyse p-adiques utilisés. Voir l'introduction du volume II pour une description plus détaillée de ces articles et de leur genèse.

Enfin, le troisième volume contient des articles pour beaucoup écrits avant ceux du deuxième volume et ne faisant pas intervenir les (φ,Γ)-modules : les premiers cas non-triviaux de compatibilité local-global dans le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (Breuil et Breuil-Emerton : cas ordinaires et semi-stables), les premiers calculs de compatibilité à la réduction modulo p utilisant le demi-plan de Drinfeld (Breuil-Mézard), plusieurs articles sur l'invariant $\mathscr{L}$ (Colmez, puis Bertolini-Darmon-Iovita), un article de Iovita-Coleman sur une explicitation via la géométrie rigide des théorèmes de comparaison de Tsuji et Faltings dans le cas des courbes. Enfin, il contient aussi des articles récents d'Emerton et Paskunas calculant les groupes d'extensions entre représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en caractéristique p.

Références

[1] L. Berger – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[2] ———, Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, vol. II de cet *Astérisque*.

[3] L. Berger & C. Breuil – Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, vol. II de cet *Astérisque*.

[4] C. Breuil – p-adic Hodge theory, deformations and local Langlands, cours au C.R.M. de Barcelone, `http://www.ihes.fr/~breuil/publications.html`, 2001.

[5] ———, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. I, *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[6] ———, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[7] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **37** (2004), p. 559–610.

[8] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et cohomologie étale complétée, vol. III de cet *Astérisque*.

[9] C. BREUIL, B. CONRAD, F. DIAMOND & R. TAYLOR – On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 843–939.

[10] C. BREUIL & M. EMERTON – Représentations p-adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et compatibilité local-global, vol. III de cet *Astérisque*.

[11] C. BREUIL & A. MÉZARD – Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ en $l = p$, *Duke Math. J.* **115** (2002), p. 205–310.

[12] ———, Représentations semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p, vol. III de cet *Astérisque*.

[13] L. CLOZEL – Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité, in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, 1990, p. 77–159.

[14] P. COLMEZ – Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, vol. II de cet *Astérisque*.

[15] ———, Série principale unitaire pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, vol. II de cet *Astérisque*.

[16] ———, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, vol. II de cet *Astérisque*.

[17] B. CONRAD, F. DIAMOND & R. TAYLOR – Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 521–567.

[18] M. EMERTON – A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, *Pure Appl. Math. Q.* **2** (2006), p. 279–393.

[19] ———, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms, *Invent. Math.* **164** (2006), p. 1–84.

[20] J.-M. FONTAINE – Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 321–347.

[21] ———, Lettre à M.-F. Vignéras, 14 février 1988.

[22] M. HARRIS & R. TAYLOR – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, 2001.

[23] G. HENNIART – Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique, *Invent. Math.* **139** (2000), p. 439–455.

[24] M. KISIN – The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2, prépublication, 2006.

[25] P. SCHNEIDER & J. TEITELBAUM – $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations, *Represent. Theory* **5** (2001), p. 111–128.

[26] ———, Banach space representations and Iwasawa theory, *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[27] ———, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 443–468.

[28] J-P. SERRE – Lettre à Tate, 7 août 1987, in *Œuvres complètes*, vol. 4, Springer, 2000, p. 524–534.

C. BREUIL, C.N.R.S. & I.H.É.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France • *E-mail :* breuil@ihes.fr

Astérisque

LAURENT BERGER

Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés

Astérisque, tome 319 (2008), p. 13-38

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__13_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 13–38

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES ET (φ, N)-MODULES FILTRÉS

par

Laurent Berger

Résumé. — L'objet de cet article est de montrer que les deux catégories suivantes sont équivalentes (1) la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés (2) la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba tels que l'algèbre de Lie de Γ_K agit localement trivialement.

De plus, on montre que sous cette équivalence, les (φ, N, G_K)-modules filtrés admissibles correspondent aux (φ, Γ_K)-modules étales, ce qui nous permet de donner une nouvelle démonstration du théorème de Colmez-Fontaine.

***Abstract* (p-adic differential equations and filtered (φ, N)-modules).** — The goal of this article is to show that the following two categories are equivalent (1) the category of filtered (φ, N, G_K)-modules (2) the category of (φ, Γ_K)-modules over the Robba ring such that the Lie algebra of Γ_K acts locally trivially.

Furthermore, we show that under this equivalence, the admissible filtered (φ, N, G_K)-modules correspond to the étale (φ, Γ_K)-modules, which gives a new proof of Colmez-Fontaine's theorem.

Introduction

Dans tout cet article, K est un corps local qui contient $\mathbf{Q}_p$ et qui est muni d'une valuation discrète étendant la valuation p-adique et pour laquelle K est complet et de corps résiduel parfait k_K. Pour $n \leqslant \infty$, on pose $K_n = K(\mu_{p^n})$ et $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

(φ, N, G_K)-modules filtrés et (φ, Γ_K)-modules. — L'objet de cet article est de construire une équivalence de catégories entre deux catégories utilisées dans la théorie des représentations p-adiques et des équations différentielles p-adiques (on se reportera au chapitre I pour des rappels sur ces catégories). Il s'agit de :

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 12H25, 13K05, 14F30.
Mots clefs. — Représentations p-adiques, (φ, N)-modules filtrés, équations différentielles p-adiques, (φ, Γ)-modules.

© Astérisque 319, SMF 2008

1. la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés, dont la sous-catégorie des objets admissibles paramétrise les représentations p-adiques potentiellement semi-stables du groupe de Galois absolu G_K du corps K ;
2. la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba tels que l'algèbre de Lie de Γ_K agit localement trivialement, qui généralise la notion d'équation différentielle p-adique munie d'une structure de Frobenius.

On construit un foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ qui à un (φ, N, G_K)-module filtré D associe un (φ, Γ_K)-module $\mathscr{M}(D)$ sur l'anneau de Robba $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème A. — *Le $\otimes$-foncteur exact $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés, dans la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

Étant donné un (φ, N, G_K)-module filtré D, le (φ, Γ_K)-module $\mathscr{M}(D)$ admet (par le théorème [**19**, théorème 6.10] de Kedlaya) une filtration canonique par les « pentes de Frobenius ». Nous calculons ces pentes en terme des invariants t_H et t_N de D et de ses sous-objets. Comme corollaire de ces calculs, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème B. — *Le (φ, N, G_K)-module filtré D est admissible si et seulement si $\mathscr{M}(D)$ est étale.*

Application aux représentations p-adiques. — Comme application du théorème B, on obtient une nouvelle démonstration du théorème [**12**, théorème A] de Colmez-Fontaine :

Théorème. — *Si D est un (φ, N, G_K)-module filtré admissible, alors il existe une représentation p-adique V potentiellement semi-stable telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = D$.*

Enfin, les constructions précédentes nous permettent de préciser les liens entre les divers invariants que l'on peut associer à une représentation p-adique potentiellement semi-stable V (qui devient semi-stable sur une extension galoisienne finie L de K). Ces invariants sont :

1. le $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$;
2. l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$;
3. le (φ, Γ_K)-module étale sur l'anneau de Robba $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$.

À l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, on associe (cf définition III.2.2) son espace $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ de G_L-solutions, qui est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module, et on montre dans le théorème III.2.3 comment la donnée de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ détermine une filtration sur $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$, ce qui en fait un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré. On a alors (les notations restantes sont définies dans le corps du texte) :

Théorème C. — *Si V est une représentation p-adique de G_K semi-stable quand on la restreint à G_L, alors :*

1. $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$;
2. $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$;
3. $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty),N=0}$.

Ces identifications sont compatibles à toutes les structures en présence.

Cela permet notamment de « retrouver la filtration » sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ quand on le construit à partir de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ (cf [**9**, proposition 5.6] pour une construction similaire).

Enfin, nous montrons comment reconstruire, pour une représentation semi-stable V, le (φ,Γ_K)-module $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ (comme dans [**10**, §4.3.1]).

Théorème D. — *Si V est une représentation semi-stable de G_K et si*

- *$\{e_i\}_{i=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ adaptée à la décomposition par les pentes de Frobenius ;*
- *$N(e_i) = \sum_{j=1}^{d} n_{j,i} e_j$;*
- *$\{f_j\}_{j=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ adaptée à la filtration et $\varphi^{-n}(e_i) = \sum_{j=1}^{d} p_{j,i}^{(n)} f_j$,*

alors $x = \sum_{i=1}^{d} x_i(X) \otimes e_i \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ appartient à $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ si et seulement si :

1. *$N(x_j) + \sum_{i=1}^{d} n_{j,i} x_i = 0$ pour $j = 1 \cdots d$;*
2. *$\sum_{i=1}^{d} \iota_n(x_i) p_{j,i}^{(n)} \in t^{-t_H(f_j)} K_n[\![t]\!]$ pour $j = 1 \cdots d$ et $n \geqslant n(r)$;*
3. *$\mathrm{ord}(x_i) \leqslant -\mathrm{pente}(e_i)$ pour $i = 1 \cdots d$.*

Ceci permet de construire « explicitement » les éléments de $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ ce qui a des applications directes à la correspondance de Langlands p-adique.

Remerciements : Je remercie Pierre Colmez, Jean-Marc Fontaine et Kiran Kedlaya pour des discussions éclairantes sur certains points de cet article ainsi que Francesco Baldassarri et le referee pour leurs commentaires sur une première version.

I. Rappels et compléments

Dans tout cet article, K est un corps local qui contient $\mathbf{Q}_p$ et qui est muni d'une valuation discrète étendant la valuation p-adique et pour laquelle K est complet et de corps résiduel parfait k_K.

On écrit $\mu_{p^n} \subset \overline{K}$ (la clôture algébrique de K) pour désigner l'ensemble des racines p^n-ièmes de l'unité, et pour $n \geqslant 1$, on définit $K_n = K(\mu_{p^n})$ ainsi que $K_\infty = \cup_{n=1}^{+\infty} K_n$. Si $n = 0$, on pose $K_0 = W(k_K)[1/p]$ ce qui fait que K/K_0 est totalement ramifiée. Les notations ne sont donc pas vraiment compatibles, mais elles sont usuelles. Finalement, K_0' désigne l'extension maximale non-ramifiée de K_0 contenue dans K_∞.

Soient $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ le noyau du caractère cyclotomique $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ et $\Gamma_K = G_K/H_K$ le groupe de Galois de K_∞/K, qui s'identifie via le

caractère cyclotomique à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$. On note $\sigma : \widehat{K_0^{\mathrm{nr}}} \to \widehat{K_0^{\mathrm{nr}}}$ le Frobenius absolu (qui relève $x \mapsto x^p$ sur k_K^{sep}).

I.1. Les $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés. — Le corps L désigne une extension galoisienne finie de K, et $G_{L/K}$ le groupe de Galois de L/K. La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés et sa sous-catégorie pleine de $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles sont étudiées en détail dans [**15**, §4]. Nous nous contentons donc de rappeler les définitions et quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module est un L_0-espace vectoriel D de dimension finie et muni d'une application σ-semi-linéaire bijective $\varphi : D \to D$, d'une application linéaire $N : D \to D$ qui vérifie $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action semi-linéaire de $G_{L/K}$ qui commute à φ et N. Si $L = K$, on parle tout simplement de (φ, N)-module (relatif à K).

Un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré est la donnée d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module D et d'une filtration décroissante exhaustive et separée $\mathrm{Fil}^i D_L$ sur $D_L = L \otimes_{L_0} D$, par des sous L-espaces vectoriels stables par $G_{L/K}$. Il est équivalent de se donner une filtration sur $D_K = D_L^{G_{L/K}}$.

La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés est une catégorie additive $\mathbf{Q}_p$-linéaire qui admet des noyaux et des conoyaux (mais qui n'est pas abélienne), ainsi que des produits tensoriels et des Hom internes.

Par abus de langage, on dira que D est un (φ, N, G_K)-module filtré s'il existe une extension finie galoisienne L/K telle que D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré.

Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré de dimension 1, on définit $t_H(D)$ comme le plus grand entier i tel que $\mathrm{Fil}^i D_L \neq 0$ et si $\varphi(d) = \lambda d$ avec $d \in D$, alors $v_p(\lambda)$ ne dépend pas du choix de $d \neq 0$ et on définit $t_N(D) = v_p(\lambda)$. Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré de dimension $\geqslant 1$, on définit $t_H(D) = t_H(\det D)$ et $t_N(D) = t_N(\det D)$. Si $e \in D_L$, on pose $t_H(e) = t_H(L \cdot e)$.

On dit qu'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré D est admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si pour tout sous-objet D' de D, on a $t_N(D') - t_H(D') \geqslant 0$. La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés et elle est de plus abélienne.

Rappelons que la principale source de $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles est la suivante : si V est une représentation p-adique de G_K dont la restriction à G_L est semi-stable, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible.

I.2. L'anneau de Robba. — Définissons ici quelques anneaux de séries formelles (ces constructions sont faites en détail dans [**11**]). Si r est un réel positif et $F = K_0$ (pour alléger un peu les notations), soit $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ l'anneau des séries formelles $f(X) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X^k$ où $\{a_k \in F\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite bornée telle que $f(X)$ converge sur la couronne $0 < v_p(X) \leqslant 1/r$. Cet anneau est muni d'une action de Γ_F, qui est triviale sur les coefficients et donnée par $\gamma(X) = (1+X)^{\chi(\gamma)} - 1$ et on peut définir un Frobenius $\varphi : \mathbf{B}_F^{\dagger,r} \to \mathbf{B}_F^{\dagger,pr}$ qui est σ-semi-linéaire sur les coefficients et tel que $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$. Le « théorème de préparation de Weierstrass » montre que

$\mathbf{B}_F^\dagger = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ est un corps. Ce corps n'est pas complet pour la norme de Gauss et on appelle $\mathbf{B}_F$ son complété qui est un corps local de dimension 2 dont le corps résiduel s'identifie à $k_K(\!(\overline{X})\!)$.

On pose aussi $F_n = F(\mu_{p^n})$ ainsi que $F_\infty = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ ce qui fait que l'extension K_∞/F_∞ est une extension finie de degré de ramification $e_K \leqslant [K_\infty : F_\infty]$ et par la théorie du corps de normes de [**18, 23**] il lui correspond une extension séparable $k'_K(\!(\overline{X}_K)\!)/k_K(\!(\overline{X})\!)$ de degré $[K_\infty : F_\infty]$ qui nous permet de définir des extensions non-ramifiées $\mathbf{B}_K/\mathbf{B}_F$ et $\mathbf{B}_K^\dagger/\mathbf{B}_F^\dagger$ de degré $[K_\infty : F_\infty]$. On peut montrer que $\mathbf{B}_K^\dagger = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ et qu'il existe $r_0(K)$ tel que si $r \geqslant r_0(K)$, alors $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ est un $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$-module libre de rang $[K_\infty : F_\infty]$ qui s'identifie à un anneau de séries formelles $f(X_K) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X_K^k$ où $\{a_k \in K'_0\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite bornée telle que $f(X_K)$ converge sur la couronne $0 < v_p(X_K) \leqslant 1/e_K r$. L'élément $\overline{X}_K$ vérifie une équation d'Eisenstein sur $k'_K(\!(\overline{X})\!)$ qu'on peut relever en une équation sur $\mathbf{B}_{K'_0}^{\dagger,r}$; l'action de Γ_K s'étend naturellement à $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ de même que le Frobenius $\varphi : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \to \mathbf{B}_K^{\dagger,pr}$.

L'anneau $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ s'identifiant à un anneau de séries formelles convergeant sur une couronne, il est naturellement muni d'une topologie de Fréchet, la topologie de la « convergence compacte » sur les couronnes $C_K[r;s] = \{z \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p},\ 1/e_K s \leqslant v_p(z) \leqslant 1/e_K r\}$ pour $s \geqslant r$, et son complété $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ pour cette topologie s'identifie à l'anneau de séries formelles $f(X_K) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X_K^k$ où $\{a_k \in K'_0\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite non nécessairement bornée telle que $f(X_K)$ converge sur la couronne $0 < v_p(X_K) \leqslant 1/e_K r$. Par exemple, si on pose $t = \log(1+X)$, alors $t \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ pour tout $r \geqslant 0$. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ est « l'anneau de Robba ». Nous allons rappeler quelques-uns des résultats de [**2**, §4] qui nous seront utiles dans la suite.

Il existe $r(K)$ que l'on peut supposer $\geqslant r_0(K)$ tel que si $p^{n-1}(p-1) \geqslant r \geqslant r(K)$, alors on a une application injective $\iota_n : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \to K_n[\![t]\!]$ (c'est l'application φ^{-n} de [**6**, §III.2]). Par exemple si $K = K_0$, alors $\iota_n(X) = \varepsilon^{(n)}\exp(t/p^n) - 1$ où $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de 1 et ι_n agit par σ^{-n} sur les coefficients. On définit $n(r)$ comme étant le plus petit entier n tel que $p^{n-1}(p-1) \geqslant r$ ce qui fait que $\iota_n : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \to K_n[\![t]\!]$ est définie dès que $n \geqslant n(r)$.

L'application ι_n se prolonge en une application injective $\iota_n : \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} \to K_n[\![t]\!]$. Le groupe Γ_K est un groupe de Lie de dimension 1 qui agit sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ et l'algèbre de Lie de Γ_K agit aussi sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$, cette action étant donnée par $\nabla(f) = \log(\gamma)(f)/\log_p(\chi(\gamma))$ pour $\gamma \in \Gamma_K$ assez proche de 1. Si $f = f(X) \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r}$ alors $\nabla(f(X)) = t(1+X)df/dX$. Si $f \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ alors on pose $\partial(f) = t^{-1}\nabla(f)$ ce qui fait que si $f = f(X) \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r}$ alors $\partial(f(X)) = (1+X)df/dX$ et que si $f \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$ vérifie une équation algébrique $P(f) = 0$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^\dagger$ telle que $P'(f) \neq 0$, alors on peut aussi calculer $\partial(f)$ par la formule $\partial(f) = -(\partial P)(f)/P'(f)$. En particulier $\partial(f) = 0$ si et seulement si $f \in K'_0$.

Lemme I.2.1. — *Si $w \geqslant 1$ alors il existe $t_{n,w} \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ tel que $\iota_n(t_{n,w}) = 1$ mod $t^w K_n[\![t]\!]$ et $\iota_m(t_{n,w}) \in t^w K_n[\![t]\!]$ si $m \neq n$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la solution du problème des « parties principales » (voir [**20**, §8]). □

Rappelons que les anneaux $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ et donc aussi $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ sont des anneaux de Bézout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini en est principal. Ceci a un certain nombre de conséquences pour lesquelles on se reportera par exemple à [**19**, §2]. Dans la suite, on pose $q = \varphi(X)/X = ((1+X)^p - 1)/X$, ce qui fait que $\iota_n(\varphi^{n-1}(q))$ est une uniformisante de $K_n[\![t]\!]$.

Proposition I.2.2. — *Si I est un idéal principal de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, qui divise (t^h) pour $h \geqslant 0$, alors I est engendré par un élément de la forme $\prod_{n=n(r)}^{+\infty}(\varphi^{n-1}(q)/p)^{j_n}$ avec $j_n \leqslant h$.*

Démonstration. — Rappelons que l'on a une décomposition $t = X\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}(\varphi^{n-1}(q)/p)$. Le lemme [**2**, lemme 4.9] montre que $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}/\varphi^{n-1}(q) \simeq K_n$ et donc que les idéaux $(\varphi^{n-1}(q))$ sont premiers (et même maximaux) dans $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$. Ceci montre que si x divise t^h, alors x est le produit d'une unité par un élément de la forme $\prod_{n=n(r)}^{+\infty}(\varphi^{n-1}(q)/p)^{j_n}$ et il reste à appliquer cela à un générateur de l'idéal I. □

I.3. Les (φ,Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba. — Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition des φ-modules et des (φ,Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba ainsi que quelques résultats techniques concernant ces objets. Pour des définitions d'ordre plus général, on peut voir [**19**, §2.5]. Un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ est un $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathbf{D}$ libre de rang fini (noté d) et muni d'une application φ-semi-linéaire toujours notée $\varphi : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ telle que $\varphi^*(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ (on note $\varphi^*(\mathbf{D})$ le φ-module engendré par $\varphi(\mathbf{D})$). Un (φ,Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ est un φ-module muni en plus d'une action de Γ_K semi-linéaire par rapport à l'action de ce groupe sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et commutant à φ. On a un résultat de descente galoisienne (voir aussi [**19**, §2.5]) pour les (φ,Γ_K)-modules.

Définition I.3.1. — Si L/K est une extension galoisienne finie, et si $\mathbf{D}$ est un (φ,Γ_L)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}$, on dit que $\mathbf{D}$ est muni d'une action de $G_{L/K}$ si le groupe G_K agit sur $\mathbf{D}$ et si de plus :

1. $H_L \subset G_K$ agit trivialement sur $\mathbf{D}$;
2. l'action de $G_L/H_L \subset G_K/H_L$ induite coïncide avec celle de Γ_L.

La proposition suivante se trouve essentiellement dans [**19**, corollary 2.7] :

Proposition I.3.2. — *Si L/K est une extension galoisienne finie et si $\mathbf{D}$ est un (φ,Γ_L)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}$ muni d'une action de $G_{L/K}$, alors $\mathbf{D}^{H_K}$ est un (φ,Γ_K)-module et $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{H_K}$.*

Démonstration. — L'action de Γ_K sur $\mathbf{D}^{H_K}$ est donnée par l'isomorphisme $\Gamma_K = G_K/H_K$. Le fait que $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{H_K}$ suit de [**19**, lemma 2.6] (par exemple). Montrons que $\varphi^*(\mathbf{D}^{H_K}) = (\mathbf{D}^{H_K})$. Si $x \in \mathbf{D}^{H_K}$, et si $\{y_i\}$ est une base de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}$

contenue dans $\mathbf{D}^{H_K}$, alors on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{d} x_i \varphi(y_i)$ avec $x_i \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}$ et comme x et les y_i sont fixes par H_K, on a aussi $x_i \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ ce qui fait que $x \in \varphi^*(\mathbf{D}^{H_K})$. □

Le théorème suivant est une variante d'un résultat de Cherbonnier (voir [4]).

Théorème I.3.3. — *Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ alors il existe $r(\mathbf{D}) \geqslant r(K)$ tel que pour tout $r \geqslant r(\mathbf{D})$, il existe un unique sous $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathbf{D}_r$ de $\mathbf{D}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$;
2. *le $\mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ a une base contenue dans $\varphi(\mathbf{D}_r)$.*

En particulier, on a $\mathbf{D}_s = \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ pour tous $s \geqslant r$ et si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module, alors $\gamma(\mathbf{D}_r) = \mathbf{D}_r$ pour tout $\gamma \in \Gamma_K$.

Démonstration. — Comme $\mathbf{D}$ est un $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d, il en existe une base $e_1, \cdots, e_d$. Il existe alors $r = r(\mathbf{D})$ tel que la matrice de φ dans cette base est dans $\mathrm{GL}(d, \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$ et si l'on pose $\mathbf{D}_r = \oplus_{i=1}^{d} \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} e_i$, alors les deux conditions du théorème sont remplies. Si $\mathbf{D}_r^{(1)}$ et $\mathbf{D}_r^{(2)}$ sont deux $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-modules satisfaisant les deux conditions ci-dessus, et qu'on en choisit des bases, alors la matrice M de passage d'une base à l'autre et les matrices P_1 et P_2 de φ dans ces deux bases vont satisfaire la relation $\varphi(M) = P_1^{-1} M P_2$ avec P_1 et $P_2 \in \mathrm{GL}(d, \mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K})$ ce qui implique que $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$. En effet, si $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K})$ avec $s > pr$, alors $P_1^{-1} M P_2$ et donc $\varphi(M)$ est dans $\mathrm{M}(d, \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K})$. Mais $\varphi(\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}) \cap \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} = \varphi(\mathbf{B}^{\dagger,s/p}_{\mathrm{rig},K})$ ce qui fait que si $s > pr$, alors on peut remplacer s par s/p et donc finalement que $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$. Comme on peut en dire autant de M^{-1}, c'est que $M \in \mathrm{GL}(d, \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$ et donc finalement que $\mathbf{D}_r^{(1)} = \mathbf{D}_r^{(2)}$. □

Étant donné un φ-module $\mathbf{D}$ sur l'anneau de Robba, et $n \geqslant n(r)$ avec $r \geqslant r(\mathbf{D})$, l'application $\iota_n : \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \to K_n[\![t]\!]$ donne une structure de $\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$-module à $K_n[\![t]\!]$ et la formule $\iota_n(\lambda) \cdot x = \lambda x$ donne une structure de $\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$-module à $\mathbf{D}_r$ que l'on note alors $\iota_n(\mathbf{D}_r)$, ce qui nous permet de définir $K_n[\![t]\!] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})} \iota_n(\mathbf{D}_r)$. Pour alléger les notations, on écrit plutôt : $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$.

Proposition I.3.4. — *Si $\mathbf{D}$ est un φ-module de rang d sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et si $\mathbf{D}^{(1)}$ et $\mathbf{D}^{(2)}$ sont deux sous-$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-modules libres de rang d et stables par φ de $\mathbf{D}[1/t] = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}$ tels que :*

1. $\mathbf{D}^{(i)}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$ *si* $i = 1, 2$;
2. $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r^{(1)} = K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r^{(2)}$ *pour tout* $n \gg 0$,

alors $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}^{(2)}$.

Démonstration. — Comme $\mathbf{D}^{(1)}[1/t] = \mathbf{D}^{(2)}[1/t]$, il existe $h \geqslant 0$ tel que $t^h\mathbf{D}^{(2)} \subset \mathbf{D}^{(1)}$. Choisissons r tel que $r \geqslant \max(r(\mathbf{D}^{(1)}), r(\mathbf{D}^{(2)}))$ et tel qu'en plus :

$$K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{(1)}_r = K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{(2)}_r$$

pour tout $n \geqslant n(r)$. Les diviseurs élémentaires de $t^h\mathbf{D}^{(2)} \subset \mathbf{D}^{(1)}$ sont des idéaux de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ qui divisent t^h et donc de la forme $(\prod_{n\geqslant n(r)} \varphi^{n-1}(q^{\beta_{n,i}}))$ pour $i = 1, \ldots, d$ par la proposition I.2.2. Comme le calcul des diviseurs élémentaires commute à la localisation, on voit que ceux de l'inclusion $t^h K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{(2)}_r \subset K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{(1)}_r$ sont donnés par les idéaux $(t^{\beta_{n,i}})$ ce qui fait que $\beta_{n,i} = h$ pour tous n, i et donc finalement que $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}^{(2)}$. □

II. Construction de (φ, Γ_K)-modules

L'objet de ce chapitre est de montrer comment construire un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, c'est-à-dire un objet « global », à partir de conditions locales. Comme application, on donne la construction d'un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ à partir d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré.

II.1. Recollement de réseaux locaux. — Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ alors on a une application naturelle :

$$\varphi_n : K_{n+1}(\!(t)\!) \otimes_{K_n(\!(t)\!)} \left[K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r\right] \longrightarrow K_{n+1}(\!(t)\!) \otimes^{\iota_{n+1}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$$

définie par $\varphi_n[f(t) \otimes (g(t) \otimes \iota_n(x))] = f(t)g(t) \otimes \iota_{n+1}(\varphi(x))$ en utilisant le fait que $\varphi(\mathbf{D}_r) \subset \mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$, que $\iota_{n+1}(\mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K}) \subset K_{n+1}[\![t]\!]$ et que $\iota_{n+1}(\varphi(\lambda)) = \iota_n(\lambda)$ si $\lambda \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$.

Définition II.1.1. — Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et si $r \geqslant r(\mathbf{D})$ et $\{M_n\}_{n\geqslant n(r)}$ est une suite de $K_n[\![t]\!]$-réseaux de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$, alors on dit que $\{M_n\}$ est une suite φ-compatible si $\varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} M_n) = M_{n+1}$.

On vérifie sans mal que la donnée d'un sous-φ-module $\mathbf{M}$ de rang maximal d'un φ-module $\mathbf{D}$ détermine une suite φ-compatible de $K_n[\![t]\!]$-réseaux de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ en posant $M_n = K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$. Le théorème suivant donne la réciproque de cette construction.

Théorème II.1.2. — *Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et si $\{M_n\}_{n\geqslant n(r)}$ est une suite φ-compatible de réseaux de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$, alors il existe un unique sous φ-module $\mathbf{M}$ de $\mathbf{D}[1/t]$ tel que $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)$. Enfin, on a $\mathbf{M}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$.*

Si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module et si les M_n sont stables sous l'action induite de Γ_K, alors $\mathbf{M}$ est lui aussi un (φ, Γ_K)-module.

L'unicité de $\mathbf{M}$ résulte immédiatement de la proposition I.3.4 et le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de l'existence d'un tel $\mathbf{M}$.

Lemme II.1.3. — *Il existe un entier $h \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n(r)$ on ait :*

$$t^h K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \subset M_n \subset t^{-h} K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r.$$

Démonstration. — Comme $M_{n(r)}$ est un réseau de $K_{n(r)}((t)) \otimes^{\iota_{n(r)}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$, il existe h tel que l'inclusion ci-dessus est vraie pour $n = n(r)$. Le fait que :

$$\varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r) = K_{n+1}[\![t]\!] \otimes^{\iota_{n+1}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$$

et que $\varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} M_n) = M_{n+1}$ montrent que si l'inclusion est vraie pour n elle est aussi vraie pour $n+1$, ce qui montre le lemme par récurrence. □

Lemme II.1.4. — *Si on pose $\mathbf{M}_r = \{x \in t^{-h}\mathbf{D}_r$ tels que $\iota_n(x) \in M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)\}$, alors $\mathbf{M}_r$ est un $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d.*

Démonstration. — Comme les applications $\iota_n : t^{-h}\mathbf{D}_r \to M_n[1/t]$ sont continues, $\mathbf{M}_r$ est fermé dans $t^{-h}\mathbf{D}_r$. D'autre part, le lemme II.1.3 montre que $t^h\mathbf{D}_r \subset \mathbf{M}_r$ et le théorème de Forster (cf [**2**, théorème 4.10] pour une démonstration) montre alors que $\mathbf{M}_r$ est un $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d. □

Lemme II.1.5. — *On a $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)$.*

Démonstration. — Comme $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$ et M_n sont complets pour la topologie t-adique, il suffit de montrer que l'application naturelle $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r \to M_n/t^hM_n$ est surjective pour tout n. Si $x \in M_n$, alors le lemme II.1.3 montre qu'il existe $y \in t^{-h}\mathbf{D}_r$ tel que $\iota_n(y) - x \in t^hM_n$. Le lemme I.2.1 appliqué à $w = 3h$ nous donne un élément $t_{n,3h}$ et on pose $z = t_{n,3h}y$ ce qui fait que :

$$\iota_n(z) - \iota_n(y) \in t^{2h}K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \subset t^hM_n$$

tandis que si $m \neq n$ alors :

$$\iota_m(z) \in t^{2h}K_m[\![t]\!] \otimes^{\iota_m}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \subset t^hM_m \subset M_m$$

ce qui fait finalement que $z \in \mathbf{M}_r$ et on trouve bien que l'application naturelle :

$$K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r \to M_n/t^hM_n$$

est surjective. □

Démonstration du théorème II.1.2. — Les deux lemmes précédents montrent que si l'on pose $\mathbf{M}_r = \{x \in t^{-h}\mathbf{D}_r$ tels que $\iota_n(x) \in M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)\}$, alors $\mathbf{M}_r$ est un $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d et $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)$ et qu'on peut donc poser $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$. Le fait que la suite de réseaux $\{M_n\}$

est φ-compatible montre que $\varphi^*(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}$ et que $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \varphi^*(\mathbf{M})_{pr} = M_n$ pour tout $n \geqslant n(pr)$ et la proposition I.3.4 appliquée à $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{M}$ et $\mathbf{D}^{(2)} = \varphi^*(\mathbf{M})$ montre alors qu'en fait $\varphi^*(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$. Enfin le fait que $\mathbf{M}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$ suit immédiatement du lemme II.1.4.

L'assertion quant à l'action éventuelle de Γ_K est évidente. □

II.2. Des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés aux (φ, Γ_K)-modules. — Soit ℓ_X une variable ; on prolonge les actions de φ et de Γ_K à $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X]$ par les formules suivantes : $\varphi(\ell_X) = p\ell_X + \log(\varphi(X)/X^p)$ et $\gamma(\ell_X) = \ell_X + \log(\gamma(X)/X)$. Bien sûr, il faut penser à ℓ_X comme à « $\log(X)$ ». On définit alors un opérateur de monodromie N sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X]$ par la formule $N(\ell_X) = -p/(p-1)$ et on prolonge l'application ι_n à $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X]$ par $\iota_n(\ell_X) = \log(\varepsilon^{(n)} \exp(t/p^n) - 1) \in K_n[\![t]\!]$.

Si D est un (φ, N)-module filtré (relatif à K), on pose $\mathbf{D} = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{K_0} D)^{N=0}$. On montre facilement que :

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{K_0} D,$$

et cela implique en particulier que $\mathbf{D}$ est un φ-module. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $K_0 = \varphi^{-n}(K_0) \subset K$ ce qui nous donne une structure de $\varphi^{-n}(K_0)$-module sur K et sur D que l'on note alors $\iota_n(D)$ et nous écrivons $K \otimes^{\iota_n}_{K_0} D$ au lieu de $K \otimes_{\varphi^{-n}(K_0)} \iota_n(D)$ pour alléger les notations ; l'application $\xi_n : K \otimes_{K_0} D \to K \otimes^{\iota_n}_{K_0} D$ qui envoie $\mu \otimes x$ sur $\mu \otimes \iota_n(\varphi^n(x))$ est un alors isomorphisme (rappelons que $\iota_n = \varphi^{-n}$) que l'on utilise pour définir une filtration sur $D^n_K = K \otimes^{\iota_n}_{K_0} D$. On définit une filtration sur $K_n(\!(t)\!)$ par la formule $\mathrm{Fil}^i K_n(\!(t)\!) = t^i K_n[\![t]\!]$ ce qui nous donne une filtration sur $K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K$, et on pose $M_n(D) = \mathrm{Fil}^0(K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K)$. Le foncteur $D \mapsto M_n(D)$ est alors un $\otimes$-foncteur exact.

De plus, en utilisant l'application $\iota_n : \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \to K_n[\![t]\!]$ et le fait que :

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{K_0} D,$$

on trouve que :

$$K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r = K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K$$

et donc que $M_n(D)$ est un réseau de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$.

Proposition II.2.1. — *La famille de réseaux $\{M_n\}$ de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ définie par $M_n(D) = \mathrm{Fil}^0(K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K)$ est φ-compatible.*

Démonstration. — Le $K_n[\![t]\!]$-module $M_n(D) = \mathrm{Fil}^0(K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K)$ est libre de rang d, engendré par une base de la forme $t^{-h_i} \otimes \xi_n(e_i)$ où $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant d}$ est une base de D_K adaptée à la filtration et $h_i = t_H(e_i)$, ce qui fait que $M_{n+1}(D) = \varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} M_n(D))$ puisque $\xi_{n+1} = \varphi_n \circ \xi_n$ sur D_K. □

Définition II.2.2. — Si D est un (φ, N)-module filtré relatif à K, soit $\mathscr{M}(D)$ le (φ, Γ_K)-module fourni par le théorème II.1.2 à partir des réseaux :

$$M_n(D) = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$$

pour le (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D} = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_F D)^{N=0}$.

Proposition II.2.3. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré et D' est le (φ, N)-module filtré relatif à L qu'on en déduit (par oubli de l'action de $G_{L/K}$), alors $\mathscr{M}(D')$ est un (φ, Γ_L)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L}$ muni d'une action de $G_{L/K}$ (cf définition I.3.1).*

Démonstration. — Vérification immédiate. □

Définition II.2.4. — Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, alors on définit $\mathscr{M}(D) = \mathscr{M}(D')^{H_K}$.

Rappelons (cf [**15**, 4.3.2]) que par définition on a une filtration $\mathrm{Fil}^i D_L$ sur $D_L = L \otimes_{L_0} D$ et que si $\mathrm{Fil}^i D_K$ est la filtration induite sur $D_K = K \otimes_{K_0} D$, alors $\mathrm{Fil}^i D_L = L \otimes_K \mathrm{Fil}^i D_K$. On a construit au début du paragraphe un isomorphisme $G_{L/K}$-équivariant $D_L \to D_L^n$ que l'on utilise pour définir $D_K^n = (D_L^n)^{G_{L/K}}$ ce qui fait que $D_L^n = L \otimes_K D_K^n$.

Proposition II.2.5. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, et si on pose $M_n(D_K) = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$, alors $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r = M_n(D_K)$ pour tout $n \geqslant n(r)$.*

Démonstration. — Par construction, $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r \subset \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_L D_L^n)^{H_K}$. Ce que l'on a rappelé ci-dessus montre que $\mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_L D_L^n)^{H_K} = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$ et donc $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r \subset M_n(D_K)$.

Si $x \in M_n(D_K)$, alors $x \in L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L}} \mathscr{M}(D')_r = L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r$. Finalement, comme x est fixé par H_K, on a $x \in (L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r)^{H_K} = K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r$ ce qui montre que l'application $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r \to M_n(D_K)$ est un isomorphisme. □

Théorème II.2.6. — *Le foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ est un $\otimes$-foncteur exact de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés dans la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et le rang de $\mathscr{M}(D)$ est égal à la dimension de D.*

Démonstration. — Si l'on a une suite exacte $0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$, alors montrons que $\mathscr{M}(D_2) \to \mathscr{M}(D_3)$ est surjectif. Comme on l'a dit plus haut, les foncteurs $D \mapsto M_n(D)$ sont des $\otimes$-foncteurs exacts. Comme $M_n(D_2) \to M_n(D_3)$ est surjectif pour tout n, l'image $\mathbf{M}$ de $\mathscr{M}(D_2)$ dans $\mathscr{M}(D_3)$ vérifie la condition que $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = M_n(D_3)$ du théorème II.1.2 pour $D = D_3$ et par unicité, on a donc que l'image de $\mathscr{M}(D_2)$ dans $\mathscr{M}(D_3)$ est $\mathscr{M}(D_3)$ tout entier, ce qui fait que $\mathscr{M}(D_2) \to \mathscr{M}(D_3)$ est bien surjectif. La vérification du fait que $\mathscr{M}(D_1 \otimes D_2) = \mathscr{M}(D_1) \otimes \mathscr{M}(D_2)$ et celle des autres conditions sont similaires. □

Dans le chapitre suivant, nous allons déterminer l'image essentielle du foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ et montrer que ce foncteur est une équivalence de catégories sur son image essentielle.

III. Construction de (φ, N, G_K)-modules filtrés

L'objet de ce chapitre est de montrer comment on peut associer à certains (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ un (φ, N, G_K)-module filtré. Cette construction est un inverse de celle du chapitre précédent.

III.1. L'algèbre de Lie de Γ_K. — Le groupe Γ_K s'identifie, via le caractère cyclotomique, à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$, et c'est donc un groupe de Lie p-adique de dimension 1. Son algèbre de Lie : $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de rang 1 dont une base est donnée par l'opérateur $\log(\gamma)/\log_p \chi(\gamma)$ qui ne dépend pas du choix de $\gamma \in \Gamma_K$.

Proposition III.1.1. — *Si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ alors l'algèbre de Lie de Γ_K agit par un opérateur différentiel $\nabla_{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ qui commute à φ et à l'action de Γ_K et qui vérifie $\nabla_{\mathbf{D}}(\lambda x) = \nabla(\lambda)x + \lambda\nabla_{\mathbf{D}}(x)$.*

Démonstration. — La démonstration est semblable à celle de [**2**, lemme 5.2] et du paragraphe qui la suit. Soit $V_{[r;s]}$ la valuation sup sur la couronne $C_K[r;s]$. La topologie de $\mathbf{D}_r$ est la topologie de Fréchet définie par l'ensemble $\{V_{[r;s]}\}_{s \geqslant r}$. Fixons $s \geqslant r$; l'action de Γ_K sur $\mathbf{D}_r$ est continue, et il existe donc un sous-groupe ouvert $\Gamma_s \subset \Gamma_K$ tel que $V_{[r;s]}((1-\gamma)x) \geqslant V_{[r;s]}(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbf{D}_r$ et $\gamma \in \Gamma_s$. La série d'opérateurs :

$$-\frac{1}{\log_p \chi(\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\gamma)^n}{n}$$

converge alors vers un opérateur continu $\nabla_{\mathbf{D},s}$ de $\mathbf{D}_r$ vers sa complétion pour $V_{[r;s]}$, qui ne dépend pas du choix de $\gamma \in \Gamma_s$. Ces opérateurs $\nabla_{\mathbf{D},s}$ se recollent en un opérateur $\nabla_{\mathbf{D}} : \mathbf{D}_r \to \mathbf{D}_r$ qui est continu pour la topologie de Fréchet.

Enfin le fait que $\nabla_{\mathbf{D}}(\lambda x) = \nabla(\lambda)x + \lambda\nabla_{\mathbf{D}}(x)$ résulte par passage à la limite du fait que :

$$(1-\gamma)(\lambda \cdot x) = (1-\gamma)(\lambda) \cdot x + \lambda \cdot (1-\gamma)(x) - (1-\gamma)(\lambda) \cdot (1-\gamma)(x). \qquad \square$$

Définition III.1.2. — On dit que l'opérateur $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement trivial sur un (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}$ s'il existe r tel que :

$$K_{n(r)}((t)) \otimes^{\iota_{n(r)}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r = K_{n(r)}((t)) \otimes_{K_{n(r)}} \left(K_{n(r)}((t)) \otimes^{\iota_{n(r)}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \right)^{\nabla_{\mathbf{D}}=0}.$$

Avant de continuer, faisons quelques rappels sur les modules à connexion. Soit E un corps de caractéristique 0, et M un $E((t))$-espace vectoriel de dimension finie d muni d'une connexion $\nabla_M : M \to M$ qui étend $\nabla : f(t) \mapsto t \cdot df/dt$. Une section

horizontale de M est un élément de $M^{\nabla_M=0}$ et un argument classique montre que $\dim_E M^{\nabla_M=0} \leqslant d$.

On dit que la connexion ∇_M est régulière si M possède un $E[\![t]\!]$-réseau M_0 tel que $\nabla_M(M_0) \subset M_0$ et on dit que la connexion ∇_M est triviale si M possède un $E[\![t]\!]$-réseau M_0 tel que $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$. Un argument d'approximations successives montre que dans ce dernier cas, $M_0^{\nabla_M=0}$ est un E-espace vectoriel de dimension d et que $M_0 = E[\![t]\!] \otimes_E M_0^{\nabla_M=0}$. On voit donc que la connexion ∇_M est triviale si et seulement si $\dim_E M^{\nabla_M=0} = d$, et que dans ce cas $M_0 = E[\![t]\!] \otimes_E M^{\nabla_M=0}$ est l'unique $E[\![t]\!]$-réseau de M tel que $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$.

Lemme III.1.3. — *Si N est un sous-$E((t))$-espace vectoriel de M stable par la connexion ∇_M, et si ∇_M est triviale sur M, alors elle est aussi triviale sur N.*

Démonstration. — Si M_0 est un $E[\![t]\!]$-réseau de M tel que $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$, alors $M_0 \cap N$ est un $E[\![t]\!]$-réseau de N et $\nabla_M(M_0 \cap N) \subset t(M_0 \cap N)$ ce qui fait que la connexion ∇_M est triviale sur N. □

La terminologie de la définition III.1.2 est compatible avec ce que l'on vient de rappeler : $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale si et seulement si $\nabla_{\mathbf{D}}$ est triviale sur le $K_{n(r)}((t))$-module à connexion $K_{n(r)}((t)) \otimes^{\iota_{n(r)}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$. En particulier, si $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale sur $\mathbf{D}$ et si $\mathbf{D}'$ est un sous-objet de $\mathbf{D}$, alors $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale sur $\mathbf{D}'$.

Lemme III.1.4. — *Si $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale sur $\mathbf{D}$, alors, $\nabla_{\mathbf{D}}$ est triviale sur $K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ pour tout $n \geqslant n(r)$.*

Dans ce cas, si D_n est le réseau de $K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ tel que $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$, alors $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} D_n)$.

Démonstration. — Si $D_n = K_n[\![t]\!] \otimes_{K_n} (K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r)^{\nabla_{\mathbf{D}}=0}$, alors par hypothèse, $\nabla_{\mathbf{D}}(D_{n(r)}) \subset tD_{n(r)}$ et si $n \geqslant n(r)$ et $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$ alors $\nabla_{\mathbf{D}}(D_{n+1}) \subset tD_{n+1}$ si D_{n+1} est le réseau de $K_{n+1}((t)) \otimes^{\iota_{n+1}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ donné par $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} D_n)$ puisque $\nabla_{\mathbf{D}}$ commute à φ_n, ce qui montre le résultat par récurrence. □

Proposition III.1.5. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, alors $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale sur $\mathscr{M}(D)$.*

Démonstration. — Par la proposition II.2.5, on a $K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r = K_n((t)) \otimes_K D_K^n$ et comme $G_{L/K}$ est fini, $\nabla_{\mathbf{D}} = 0$ sur D_K^n. □

Cette proposition montre que si $\mathbf{M}$ est dans l'image du foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, alors $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale sur $\mathbf{M}$. Nous allons voir que réciproquement, si $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale sur $\mathbf{M}$, alors $\mathbf{M}$ est dans l'image du foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$.

III.2. Équations différentielles p-adiques. — Dans ce paragraphe, nous déterminons l'image essentielle du foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$. Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ muni d'un opérateur différentiel $\partial_{\mathbf{D}}$ qui étend l'opérateur $\partial : f \mapsto (1+X)df/dX$ et tel que $\partial_{\mathbf{D}} \circ \varphi = p \cdot \varphi \circ \partial_{\mathbf{D}}$, alors on dit que $\mathbf{D}$ est une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius.

Si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et si $\mathbf{D}$ est stable par l'opérateur $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$, alors $\mathbf{D}$ est une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius.

Rappelons tout d'abord le théorème de monodromie p-adique, conjecturé par Crew et démontré par André, Kedlaya et Mebkhout (cf [**1**], [**19**] et [**22**] ainsi que le séminaire Bourbaki [**9**]) :

Théorème III.2.1. — *Si $\mathbf{D}$ est une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius, alors il existe une extension finie L/K telle que l'application naturelle :*

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L'_0} \left(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}\right)^{\partial_D=0} \to \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}$$

est un isomorphisme.

Supposons maintenant que $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ qui est stable par l'opérateur $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$ et posons $S_L(\mathbf{D}) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D})^{\partial_D=0}$. C'est un L'_0-espace vectoriel qui hérite d'une action résiduelle de Γ_K triviale sur un sous-groupe ouvert (puisque $t\partial_D = \nabla_D = 0$). Quitte à remplacer L par une extension finie, on peut donc supposer que Γ_L agit trivialement sur $S_L(\mathbf{D})$, ce qui fait que $L'_0 = L_0$ et on pose alors $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}) = S_L(\mathbf{D})$ ce qui fait que :

$$\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}) = \left(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}\right)^{G_L}$$

est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module tel que :

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}.$$

Définition III.2.2. — Le L_0-espace vectoriel $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$ est alors appelé l'espace des G_L-solutions du (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}$.

On peut donc reformuler le théorème III.2.1 ci-dessus et la discussion qui suit en disant que si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ qui est stable par l'opérateur $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$, alors il admet des G_L-solutions pour L assez grand.

Théorème III.2.3. — *Si $\mathbf{M}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ tel que $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale, alors il existe un unique (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D} \subset \mathbf{M}[1/t]$ tel que $\mathbf{D}[1/t] = \mathbf{M}[1/t]$ et tel que $\partial_{\mathbf{M}}(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$.*

De plus, la donnée de $\mathbf{M}$ détermine une filtration sur $L \otimes_{L_0} \mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$ et donc une structure de $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré sur $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$ qui a la propriété que $\mathbf{M} = \mathscr{M}(\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}))$.

Démonstration. — Comme $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale, il existe une famille de réseaux D_n de $K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$ tels que $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$ et comme $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} D_n)$ par le lemme III.1.4, la famille $\{D_n\}$ est φ-compatible. Par le théorème II.1.2, il existe donc un (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}$ tel que $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r = D_n$. Comme $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$ pour tout n, on a $\nabla_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \subset t\mathbf{D}$ ce qui fait que $\mathbf{D}$ muni de la connexion $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$ est une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius ce qui montre le premier point. L'unicité de $\mathbf{D}$ suit du fait que l'on a nécessairement $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r = D_n$ pour tout $n \geqslant n(r)$.

Par le théorème de monodromie p-adique de André, Kedlaya et Mebkhout que l'on a rappelé ci-dessus en III.2.1, et la discussion qui le suit, le (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}$ admet des G_L-solutions pour L/K assez grand. Posons $D = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$ pour alléger les notations ; nous allons construire une filtration sur $D_L = L \otimes_{L_0} D$ à la manière de [**9**, proposition 5.6].

On a des isomorphismes :

$$L_n((t)) \otimes_L D_L^n = L_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \simeq L_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$$

que l'on utilise pour définir $\mathrm{Fil}^i D_L^n = D_L^n \cap t^i L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$ et l'isomorphisme $D_L \to D_L^n$ permet de définir $\mathrm{Fil}^i D_L$. Par définition, l'isomorphisme $D_L \to D_L^n$ est donné par $\mu \otimes x \mapsto \mu \otimes \iota_n(\varphi^n(x))$ et donc l'isomorphisme $D_L \to D_L^{n+1}$ coïncide avec la composition $D_L \to D_L^n \xrightarrow{\varphi_n} D_L^{n+1}$ ce qui fait que la filtration induite sur D_L ne dépend pas de n.

Enfin, on a $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$ ce qui fait que $\mathbf{M} = \mathscr{M}(D) = \mathscr{M}(\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}))$.

Remarquons pour terminer que dans le cas particulier où $\mathbf{M} = \mathbf{D}$, alors la filtration sur D_K est donné par $\mathrm{Fil}^i D_K = D_K$ si $i \leqslant 0$ et $\mathrm{Fil}^i D_K = 0$ si $i \geqslant 1$. Si on suppose de plus que $\mathbf{M}$ est étale, alors on est dans la situation étudiée dans [**2**, §5.6]. □

En rassemblant les théorèmes II.2.6 et III.2.3, on trouve :

Théorème III.2.4. — *Le $\otimes$-foncteur exact $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, qui va de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés, vers la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

En particulier, on a le résultat suivant qui nous servira dans la suite (on dit qu'un sous-(φ, Γ)-module est saturé si il l'est en tant que sous-module).

Corollaire III.2.5. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, et si $\mathbf{M}'$ est un sous-(φ, Γ_K)-module saturé de $\mathbf{M} = \mathscr{M}(D)$, alors il existe un sous-objet $D' \subset D$ tel que $\mathbf{M}' = \mathscr{M}(D')$.*

Démonstration. — Par le lemme III.1.3 et la remarque qui le suit, la connexion $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale sur $\mathbf{M}'$ et on peut donc écrire $\mathbf{M}' = \mathscr{M}(D')$ pour un

$(\varphi, N, G_{M/K})$-module filtré où M/K est une extension suffisamment grande. L'inclusion $\mathbf{M}' \subset \mathbf{M}$ nous donne par fonctorialité une inclusion de $(\varphi, N, G_{M/K})$-modules filtrés $D' \subset D$, ce qui fait que $G_{M/L}$ agit trivialement sur D' et donc que D' est un sous-$(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré de D. □

IV. Pentes de Frobenius

Nous calculons dans ce paragraphe les pentes de Frobenius des (φ, Γ_K)-modules $\mathscr{M}(D)$ associés aux (φ, N, G_K)-modules filtrés D. En particulier, on montre que D est admissible si et seulement si $\mathscr{M}(D)$ est étale.

IV.1. Rappels sur les pentes de Frobenius. — Rappelons le théorème principal (le théorème 6.10) de [**19**]. Pour cela, il convient de noter que les anneaux $\Gamma_{\mathrm{an,con}}$ et $\Gamma_{\mathrm{con}}[1/p]$ de Kedlaya sont nos anneaux $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et $\mathbf{B}^{\dagger}_{K}$.

Théorème IV.1.1. — *Si* $\mathbf{M}$ *est un* φ*-module sur* $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$*, alors* $\mathbf{M}$ *admet une filtration canonique* $\{0\} = \mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{M}_\ell = \mathbf{M}$ *par des sous* φ*-modules telle que :*

1. *pour* $i = 1, \cdots, \ell$*, le quotient* $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1}$ *est isocline de pente spéciale* s_i *;*
2. $s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell$ *;*
3. *chaque quotient* $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1}$ *peut s'écrire* $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{N}_i$ *où* $\mathbf{N}_i$ *est un* φ*-module sur* $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ *isocline de pente générique* s_i*.*

De plus, les conditions (1) et (2) ci-dessus déterminent la filtration, et les $\mathbf{N}_i$ *du (3) sont aussi uniques.*

Nous ne rappelons pas ce que sont les pentes spéciales et génériques, mais signalons que si $\mathbf{M}$ est de rang 1 alors les pentes spéciales et génériques coïncident, et si de plus on a $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \cdot x$ où $\varphi(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathscr{O}_{K_0'}$, alors cette pente est égale à $v_p(\lambda)$.

Si $\mathbf{M}$ est un (φ, Γ_K)-module, alors, comme l'action de Γ_K commute à φ, les $\mathbf{M}_i$ sont stables par Γ_K puisque la filtration est canonique et les $\mathbf{N}_i$ sont aussi stables par Γ_K par unicité.

Définition IV.1.2. — On dit qu'un φ-module $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ est étale si dans le théorème IV.1.1 ci-dessus, $\ell = 1$ et $s_1 = 0$, c'est-à-dire s'il existe un (φ, Γ_K)-module étale (i.e. de pente générique nulle) $\mathbf{M}^{\dagger}$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ tel que $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{M}^{\dagger}$.

Proposition IV.1.3. — *Si* $\mathbf{M}$ *est un* φ*-module, dont les pentes* $s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell$ *sont* $\geqslant 0$*, et* $x \in \mathbf{M}$ *est tel que* $\varphi(x) = \lambda x$ *avec* $\lambda \in K_0'$*, alors* $\lambda \in \mathscr{O}_{K_0'}$*.*

Démonstration. — Le vecteur x est un vecteur propre de Frobenius. La démonstration de [**19**, theorem 6.10] montre que $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}$ est de pente égale à la plus petite pente spéciale de $\mathbf{M}$. Les pentes spéciales de $\mathbf{M}$ sont définies à partir des vecteurs propres de Frobenius (cf [**19**, §4.4]) ce qui fait que si $s_1 \geqslant 0$, alors $v_p(\lambda) \geqslant 0$. □

IV.2. Calcul des pentes de $\mathscr{M}(D)$. — Le résultat principal de ce chapitre est le théorème ci-dessous :

Théorème IV.2.1. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, alors la pente de $\det \mathscr{M}(D)$ est égale à $t_N(D) - t_H(D)$.*

Démonstration. — Comme le foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ est un $\otimes$-foncteur exact, on a $\det \mathscr{M}(D) = \mathscr{M}(\det D)$ et d'autre part on a par définition $t_N(D) = t_N(\det D)$ et $t_H(D) = t_H(\det D)$ ce qui fait qu'il suffit de montrer le théorème quand D est de rang 1. Si e est une base de D telle que $\varphi(e) = p^\nu \lambda_0 e$ où $\lambda_0 \in \mathscr{O}_{K_0}^*$ et $t_H(e) = \eta$, alors on voit que $\mathscr{M}(D) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} t^{-\eta} \otimes e$ et que $\varphi(t^{-\eta} \otimes e) = p^{\nu-\eta}\lambda_0 \cdot t^{-\eta} \otimes e$ ce qui fait que la pente de $\mathscr{M}(D)$ est égale à $\nu - \eta$ et vaut bien $t_N(D) - t_H(D)$. □

Proposition IV.2.2. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, alors D est admissible si et seulement si $\mathscr{M}(D)$ est un (φ, Γ_K)-module étale.*

Démonstration. — Supposons tout d'abord que D est admissible. Le théorème [**19**, theorem 6.10] de Kedlaya rappelé ci-dessus montre que $\mathscr{M}(D)$ admet une filtration canonique par des sous (φ, Γ_K)-modules isoclines de pentes croissantes. La somme de ces pentes (comptées avec multiplicités) est la pente de $\det \mathscr{M}(D)$ (cf [**19**, prop 5.13]) et vaut donc $t_N(D) - t_H(D) = 0$. Pour montrer que $\mathscr{M}(D)$ est isocline de pente nulle, il suffit donc de montrer que les pentes de $\mathscr{M}(D)$ sont $\geqslant 0$. Par le corollaire III.2.5, tout sous-objet de $\mathscr{M}(D)$ est de la forme $\mathscr{M}(D')$ où $D' \subset D$ et la pente de $\det \mathscr{M}(D')$ vaut $t_N(D') - t_H(D') \geqslant 0$ puisque D est supposé admissible. On en conclut que $\mathscr{M}(D)$ ne peut pas contenir de sous-objet isocline de pente < 0 et donc que $\mathscr{M}(D)$ est étale.

Montrons maintenant que si $\mathscr{M}(D)$ est étale, alors D est admissible. La pente de $\det \mathscr{M}(D)$ est nulle et donc $t_N(D) - t_H(D) = 0$. Si D' est un sous-objet de D, de dimension d', alors $\det(D')$ est de dimension 1 dans $\wedge^{d'} D$ et $\mathscr{M}(\det D')$ est un sous-φ-module de rang 1 de $\mathscr{M}(\wedge^{d'} D)$. Par la proposition IV.1.3, et comme $\mathscr{M}(\wedge^{d'} D) = \wedge^{d'} \mathscr{M}(D)$ est lui-même étale, la pente de $\mathscr{M}(\det D')$ est $\geqslant 0$ ce qui fait que $t_N(D') - t_H(D') \geqslant 0$. On en conclut que D' est admissible. □

Remarque IV.2.3. — Comme on le verra au chapitre V, la proposition IV.2.2 ci-dessus permet de redémontrer le théorème d'admissibilité de Colmez-Fontaine en utilisant la correspondance entre représentations p-adiques et (φ, Γ_K)-modules étales.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la proposition IV.2.2 ci-dessus.

Théorème IV.2.4. — *Le $\otimes$-foncteur exact $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, qui va de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés admissibles, vers la catégorie des (φ, Γ_K)-modules étales sur $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

Remarque IV.2.5. — Ce théorème permet notamment de retrouver le théorème de Faltings-Totaro qui affirme que la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés admissibles est stable par produits tensoriels.

Remarque IV.2.6. — En général, on peut se demander comment calculer les pentes de $\mathscr{M}(D)$. Posons $\mu(D) = (t_N(D) - t_H(D))/\dim D$. Si D est irréductible, alors $\mathscr{M}(D)$ est aussi irréductible et le théorème IV.2.1 montre que $\mathscr{M}(D)$ est isocline de pente $\mu(D)$. Cela suggère un procédé pour calculer les pentes de $\mathscr{M}(D)$ en général : parmi tous les sous-objets irréductibles $D' \subset D$, en choisir un $D_{\min}$ qui minimise $\mu(D')$. Les pentes de $\mathscr{M}(D)$ sont alors : $\mu(D_{\min})$ et les pentes de $D/D_{\min}$.

Remarque IV.2.7. — Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors $\mathscr{M}(D)$ peut très bien contenir des sous-objets de pente > 0. Ceci n'est pas en contradiction avec le théorème de Kedlaya, car c'est la filtration par des pentes croissantes qui est canonique.

Exemple IV.2.8. — Voici quelques exemples de calcul de $\mathscr{M}(D)$ pour des φ-modules filtrés D relatifs à $\mathbf{Q}_p$. Dans tous les cas, $D = \mathbf{Q}_p e \oplus \mathbf{Q}_p f$.

1. $\varphi(e) = e$, $\varphi(f) = pf$, $\mathrm{Fil}^0 D = D$, $\mathrm{Fil}^1 D = \mathbf{Q}_p(e+f)$ et $\mathrm{Fil}^2 D = \{0\}$. Ce D est admissible. Une base de $\mathscr{M}(D)$ est donnée par e et $\alpha e + f$ où α est une fonction telle que $\alpha(\zeta_{p^n} - 1) = p^{-n}$ pour $n \gg 0$. Il y a deux sous-φ-modules dans $\mathscr{M}(D)$: celui engendré par e est de pente 0 et celui engendré par f est de pente 1.
2. $\varphi(e) = e$, $\varphi(f) = pf$, $\mathrm{Fil}^0 D = D$, $\mathrm{Fil}^1 D = \mathbf{Q}_p e$ et $\mathrm{Fil}^2 D = \{0\}$. Ce D n'est pas admissible. Une base de $\mathscr{M}(D)$ est donnée par $t^{-1}e$ et f. Il y a deux sous-φ-modules dans $\mathscr{M}(D)$: celui engendré par $t^{-1}e$ est de pente -1 et celui engendré par f est de pente 1.
3. $\varphi(e) = p^2 f$, $\varphi(f) = e$, $\mathrm{Fil}^0 D = D$, $\mathrm{Fil}^{1,2} D = \mathbf{Q}_p e$ et $\mathrm{Fil}^3 D = \{0\}$. Ce D est admissible. Une base de $\mathscr{M}(D)$ est donnée par e/t_+^2 et f/t_-^2 où les fonctions :

$$t_+(X) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+X)^{p^{2n}} - 1}{p((1+X)^{p^{2n-1}} - 1)} \quad \text{et} \quad t_-(X) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+X)^{p^{2n-1}} - 1}{p((1+X)^{p^{2n-2}} - 1)}$$

sont les produits partiels pairs et impairs de $t = \log(1+X)$. Il y a deux sous-φ-modules dans $\mathscr{M}(D)$, engendrés par $e \pm pf$, qui sont tous les deux de pente 1.

V. Applications aux représentations p-adiques

L'objet de ce chapitre est de donner des applications des constructions ci-dessus aux représentations p-adiques. Dans tout ce chapitre, une représentation p-adique de G_K est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K.

V.1. Anneaux de Fontaine et représentations p-adiques. — Dans ce paragraphe, nous donnons de brefs rappels sur certains aspects de la théorie des représentations p-adiques. Afin d'étudier les représentations p-adiques, on construit un certains nombres d'anneaux de périodes, et nous avons besoin des anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ définis dans [**14**] et de l'anneau $\mathbf{B}^{\dagger}$ défini dans [**5**]. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre qui est aussi un (φ, N, G_K)-module (mais $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ est de dimension infinie et G_K n'agit pas à travers un quotient fini cette fois) et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est un corps qui est aussi une $\mathbf{Q}_p$-algèbre filtrée. On a de plus une injection $K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ ce qui fait que l'on peut voir $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ comme une sorte de (φ, N, G_K)-module filtré.

Étant donnée une représentation p-adique V de G_K, le K_0-espace vectoriel $(\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension $\leqslant \dim(V)$ et on dit que V est semi-stable si sa dimension est $= \dim(V)$. Si V n'est pas semi-stable mais le devient quand on la restreint à un sous-groupe ouvert G_L de G_K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$ est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible. En fait, $L \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ s'identifie naturellement à $L \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ où $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$.

On dit qu'une représentation p-adique V est de de Rham si le K-espace vectoriel $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension $\dim(V)$ et la construction précédente montre que les représentations potentiellement semi-stables sont de de Rham. La réciproque est aussi vraie, ainsi que Fontaine l'avait conjecturé dans [**15**, §6.2] (c'est la conjecture de monodromie pour les représentations p-adiques. Voir le « séminaire Bourbaki » [**9**] pour des détails sur cette conjecture ; la démonstration du fait que la conjecture de Crew (la conjecture de monodromie pour les équations différentielles p-adiques) implique la conjecture de monodromie pour les représentations p-adiques se trouve dans [**2**] et la conjecture de Crew est démontrée dans [**1, 19, 22**]. Des démonstrations « directes » de la conjecture de monodromie pour les représentations p-adiques se trouvent dans [**11, 17**]).

Dans une autre direction, le corps $\mathbf{B}^{\dagger}$ est muni d'un Frobenius φ et d'une action de G_K telle que $(\mathbf{B}^{\dagger})^{H_K} = \mathbf{B}_K^{\dagger}$. Si $\mathbf{D}^{\dagger}$ est un (φ, Γ_K)-module étale et de dimension d sur $\mathbf{B}_K^{\dagger}$, alors on peut montrer que $V(\mathbf{D}^{\dagger}) = (\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger})^{\varphi=1}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension d qui hérite d'une action de G_K. Si on combine les résultats de Fontaine (cf [**13**]) et le théorème de Cherbonnier-Colmez (cf [**5**]), on trouve que le foncteur $\mathbf{D}^{\dagger} \to V(\mathbf{D}^{\dagger})$ est une équivalence de catégories de la catégorie des (φ, Γ_K)-modules étales sur $\mathbf{B}_K^{\dagger}$ vers la catégorie des représentations p-adiques de G_K ; on note $V \mapsto \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ l'inverse de ce foncteur.

Si V est de de Rham, alors on peut montrer (cf [**16**, proposition 3.25]) que la connexion $\nabla_{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ est localement triviale, et le théorème III.2.3 (qui dans ce cas est aussi donné dans [**2**, théorème 5.10]) montre qu'il existe alors un unique (φ, Γ_K)-module $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ de rang $\dim(V)$ contenu dans $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ et tel que $\nabla_{\mathbf{D}}(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \subset t\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. Cette construction est d'ailleurs le point de départ d'une démonstration du théorème de monodromie pour les représentations p-adiques.

V.2. Représentations potentiellement semi-stables. — Si V est une représentation p-adique de G_K qui devient semi-stable quand on la restreint à G_L pour une extension galoisienne finie L/K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$ est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible. L'objet de ce paragraphe est de montrer comment on peut utiliser le théorème IV.2.4 pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Colmez-Fontaine (cf [**12**, théorème A]) rappelé ci-dessous :

Théorème V.2.1. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible, alors il existe une représentation p-adique V de G_K qui devient semi-stable quand on la restreint à G_L et telle que $D = \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$.*

Démonstration. — Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible, alors le théorème IV.2.4 montre que $\mathscr{M}(D)$ est un (φ, Γ_K)-module étale sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ ce qui fait que l'on peut écrire $\mathscr{M}(D) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}$ où $\mathbf{D}^{\dagger}$ est un (φ, Γ_K)-module étale sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$. Par la construction $\mathbf{D}^{\dagger} \mapsto V(\mathbf{D}^{\dagger})$ rappelée au paragraphe précédent, il existe une représentation p-adique V de G_K telle que $\mathbf{D}^{\dagger} = \mathbf{D}^{\dagger}(V)$.

Rappelons que par [**2**, théorème 3.6], si V est une représentation p-adique de G_K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V))^{\Gamma_L}$. Dans notre cas, le fait que :

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{L_0} D$$

et que $(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t])^{\Gamma_L} = L_0$ montrent que $D = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V))^{\Gamma_L}$ et donc que $D = \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ en tant que $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules. Il reste à voir que la filtration de $L \otimes_{L_0} D$ construite dans le théorème III.2.3 coïncide avec la filtration provenant de l'isomorphisme $(L \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{G_{L/K}} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Pour cela, il suffit de constater que par [**2**, §2.4], l'application ι_n envoie $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et donc $L_n((t)) \otimes_L D_L$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ ce qui fait que, comme pour n assez grand on a (cf [**2**, §5.3] et [**16**, §3]) :

$$L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)),$$

la filtration construite dans le théorème III.2.3 coïncide avec la filtration provenant de celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, et donc de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

On a donc construit une représentation p-adique V de G_K dont la restriction à G_L est semi-stable et telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = D$ en tant que $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés. □

Remarque V.2.2. — La démonstration ci-dessus utilise la construction $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ mais pas la caractérisation de l'image essentielle de ce foncteur, ce qui fait que notre démonstration n'utilise pas le théorème de monodromie p-adique (mais on utilise la filtration par les pentes de Frobenius).

Pour finir, nous allons récapituler les différents objets que l'on associe à une représentation p-adique V de G_K semi-stable quand on la restreint à G_L. Ces objets sont :

1. le $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$;
2. l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$;
3. le (φ, Γ_K)-module étale sur l'anneau de Robba $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$.

Ces objets sont reliés entre eux de la manière suivante (rappelons que par le théorème III.2.3, la donnée de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ détermine une filtration sur $L \otimes_{L_0} \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$) :

Théorème V.2.3. — *Si V est une représentation p-adique de G_K semi-stable quand on la restreint à G_L, alors :*

1. $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ *avec la filtration provenant de* $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$;
2. $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$;
3. $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{H_K, N=0}$.

Ces identifications sont compatibles à toutes les structures en présence.

Démonstration. — La démonstration du théorème V.2.1 montre que l'on a $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$. Si on pose $\mathbf{N} = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{H_K, N=0}$, alors $\mathbf{N}[1/t] = \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ et $\mathbf{N}$ est un (φ, Γ_K)-module tel que $\nabla_{\mathbf{N}}(\mathbf{N}) \subset t\mathbf{N}$ ce qui fait que $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ par [**2**, théorème 5.10]. Enfin, le fait que $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$ et que $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)[1/t] = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))[1/t]$ montrent que $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ avec la filtration provenant de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$. □

Remarquons que le fait qu'on retrouve l'action de $G_{L/K}$ à partir de $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ avait été observé par Marmora (cf [**21**, §4.2]).

V.3. Construction de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$. — Dans tout ce paragraphe, V est une représentation semi-stable de G_K. Comme on l'a signalé au paragraphe précédent, on peut récupérer $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ par la recette $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V))$. Plus explicitement, si on regarde comment le foncteur $\mathscr{M}$ est défini, on voit que $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ est l'ensemble des $x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ tels que :

1. $N(x) = 0$;
2. $\varphi^{-n}(x) \in \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V))$ pour tout $n \geqslant n(r)$.

L'objet de ce chapitre est de montrer comment récupérer le $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K$-module $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ à partir de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$.

Rappelons que l'on a construit dans [**2**, §2] un anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ qui contient $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ et aussi l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ de [**2**, §1.2] (dont on rappelle brièvement la construction ci-dessous). Nous allons rappeler la définition de l'ordre d'un élément $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$. Pour cela, rappelons (cf [**2**, §2.1]) que l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ construit dans [**5**] est un sous-anneau du corps des fractions $W(\widetilde{\mathbf{E}})[1/p]$ de l'anneau des vecteurs de Witt sur un corps valué

$\widetilde{\mathbf{E}}$ et que si $x = \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ et si I est un intervalle compris dans $[r; +\infty[$, alors la formule :

$$V_I(x) = \left\lfloor \inf_{\alpha \in I} \inf_{k \in \mathbf{Z}} k + \frac{p-1}{p\alpha} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_k) \right\rfloor$$

définit une valuation sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ et que par définition (cf [**2**, §2.3]), $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ est le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ pour la topologie de Fréchet définie par l'ensemble des valuations $\{V_{[r;s]}\}_{s \geqslant r}$.

Si $s \geqslant r$, on a par conséquent une valuation $V_{[s;s]}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ dont on peut montrer (cf [**11**, §7.2] et [**2**, lemme 2.7]) que la restriction à $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ coïncide avec la partie entière de la valuation associée à la norme « sup sur la couronne de rayon $p^{-1/e_k s}$ ». Posons $\rho = (p-1)/p$. Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ et n est assez grand, alors $\varphi^{-n}(x) \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,\rho}_{\mathrm{rig}}$. On pose $I(x) = \{s \in \mathbf{R} \text{ tels que la suite } \{ns + V_{[\rho,\rho]}(\varphi^{-n}(x))\} \text{ est bornée inférieurement}\}$, ce qui fait que soit $I(x)$ est vide, soit il existe $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $I(x) = [\alpha; \infty[$ ou $I(x) =]\alpha; \infty[$.

Définition V.3.1. — Si $I(x) = [\alpha; \infty[$, on dit que x est d'ordre α et si $I(x) =]\alpha; \infty[$ on dit que x est d'ordre α^+. On écrit alors $\mathrm{ord}(x) = \alpha$ ou $\mathrm{ord}(x) = \alpha^+$.

Rappelons que l'on a écrit ℓ_X pour l'élément $\log(\pi)$ de [**2**, §2.4] et que $\log(\pi) = \log[\overline{\pi}] + \log([\overline{\pi}]/\pi)$ avec $\log([\overline{\pi}]/\pi) \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p}$ ce qui nous permet de prolonger $\mathrm{ord}(\cdot)$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\ell_X] = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}]]$ en décidant que $\mathrm{ord}(x_0 + x_1 \log[\overline{\pi}] + \cdots + x_k \log[\overline{\pi}]^k) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{ord}(x_i) + i$.

Proposition V.3.2. — *La fonction* ord *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{ord}(x+y) \leqslant \max(\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y))$ *et* $\mathrm{ord}(xy) \leqslant \mathrm{ord}(x) + \mathrm{ord}(y)$ *;*
2. $t = \log(1+X)$ *est d'ordre* 1 *et* $\mathrm{ord}(tx) = \mathrm{ord}(x) + 1$ *;*
3. $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ *appartient à* $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ *si et seulement si* $\mathrm{ord}(x) \leqslant 0$ *;*
4. *Si* $f(X_K) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X_K^i \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, *et* $s \geqslant 0$, *alors notre définition de l'ordre coïncide avec la définition habituelle, c'est-à-dire que* $s \in I(x)$ *si et seulement si* $\{v_p(a_i) + s \log(i)/\log(p)\}_{i \geqslant 1}$ *est bornée inférieurement.*

Démonstration. — Le point (1) est immédiat. Le point (2) suit du fait que $\varphi(t) = pt$. Le point (3) suit du fait que $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ appartient à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ si et seulement si $\{V_{[r;s]}(x)\}_{s \geqslant r}$ est bornée inférieurement, c'est-à-dire si $0 \in I(x)$.

Pour montrer le point (4), rappelons (cf [**2**, §2.1]) que $V_{[r;s]}(\varphi^{-1}(x)) = V_{[pr;ps]}(x)$ et donc que $s \in I(x)$ si et seulement si la suite $\{ns + V_{[\rho_n,\rho_n]}(x)\}$ est bornée inférieurement, avec $\rho_n = p^{n-1}(p-1)$ (ce qui fait que $\rho = \rho_0$). Si $f(X_K) \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, et $s \geqslant r$, alors $V_{[s;s]}(f(X_K)) = \lfloor v_p(\sup_{z \in C_K[s;s]} |f(z)|_p) \rfloor$, et par la théorie classique des fonctions holomorphes, on a :

$$v_p\left(\sup_{z \in C_K[\rho_n;\rho_n]} |f(z)|_p\right) = \inf_{i \in \mathbf{Z}} \left(v_p(a_i) + \frac{i}{e_K p^{n-1}(p-1)}\right),$$

ce qui fait que pour montrer le point (4), il suffit de montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. la suite $\{v_p(a_i) + s\log(i)/\log(p)\}_{i\geqslant 1}$ est bornée inférieurement ;
2. la suite double $\{ns + v_p(a_i) + i/(e_K p^{n-1}(p-1))\}_{i\geqslant 1, n\geqslant n(r)}$ est bornée inférieurement.

Ceci est un exercice d'analyse (réelle !). □

La propriété (2) de la proposition ci-dessus nous permet d'étendre ord à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\ell_X, 1/t]$ en posant $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(t^h x) - h$ pour $h \gg 0$.

Si $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{cris}}$ dénote l'anneau construit dans [**14**], tel que $\mathbf{B}_{\mathrm{st}} = \mathbf{B}^{+}_{\mathrm{cris}}[\log[\overline{\pi}], 1/t]$, alors l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ est défini par $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}} = \cap_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{cris}})$ et a les propriétés suivantes :

1. si V est une représentation p-adique, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}], 1/t]\otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$;
2. $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ et en fait, c'est le complété pour la topologie de Fréchet du sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ formé des éléments $\sum_{k\gg -\infty} p^k[x_k]$ tels que $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_k) \geqslant 0$ pour tout k.

Le lemme suivant est immédiat et généralise le (2) de la proposition ci-dessus.

Lemme V.3.3. — *Soit V une représentation semi-stable de G_K et D un sous-φ-module de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ de pente $\alpha \in \mathbf{Q}$. Si $M = (m_{j,i}) \in \mathrm{M}(d, \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}], 1/t])$ est la matrice d'éléments de D dans une base de V, alors $\mathrm{ord}(m_{j,i}) = \alpha$.*

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème V.3.4. — *Si V est une représentation semi-stable de G_K et si*

- *$\{e_i\}_{i=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ adaptée à la décomposition par les pentes de Frobenius ;*
- *$N(e_i) = \sum_{j=1}^{d} n_{j,i}e_j$;*
- *$\{f_j\}_{j=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ adaptée à la filtration et $\varphi^{-n}(e_i) = \sum_{j=1}^{d} p^{(n)}_{j,i} f_j$,*

alors $x = \sum_{i=1}^{d} x_i \otimes e_i \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ appartient à $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ si et seulement si :

1. *$N(x_j) + \sum_{i=1}^{d} n_{j,i}x_i = 0$ pour $j = 1\cdots d$;*
2. *$\sum_{i=1}^{d} \iota_n(x_i)p^{(n)}_{j,i} \in t^{-t_H(f_j)}K_n[\![t]\!]$ pour $j = 1\cdots d$ et $n \geqslant n(r)$;*
3. *$\mathrm{ord}(x_i) \leqslant -\mathrm{pente}(e_i)$ pour $i = 1\cdots d$.*

Démonstration. — Un petit calcul montre que la condition (1) est équivalente à $N(x) = 0$ et que la condition (2) est équivalente à $\varphi^{-n}(x) \in \mathrm{Fil}^0(K_n(\!(t)\!)\otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V))$ pour tout $n \geqslant n(r)$, ce qui fait que, comme on l'a rappelé plus haut, $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ si et seulement s'il satisfait à (1) et (2).

Supposons donc que $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ satisfait (3). Si $\{v_i\}_{i=1\cdots d}$ est une base de V et si l'on écrit $e_i = \sum_{j=1}^d m_{j,i} v_j$, alors $m_{j,i} \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}], 1/t]$ et le fait que e_i est dans un φ-module de pente $\mathrm{pente}(e_i)$ implique par le lemme V.3.3 que $\mathrm{ord}(m_{j,i}) \leqslant \mathrm{pente}(e_i)$, ce qui fait que si $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i = \sum_{j=1}^d y_j v_j$, alors $\mathrm{ord}(y_j) = \mathrm{ord}(\sum_{i=1}^d x_i m_{j,i}) \leqslant 0$. Par le (3) de la proposition V.3.2, cela implique que $y_j \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et donc que $y_j \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \mathbf{B}^{\dagger,r}$ ce qui fait que $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$. La réciproque est immédiate. □

Remarque V.3.5. — Si $K = K_0$ et $N = 0$, alors la condition (2) équivaut à : « pour tout $n \geqslant n(r)$, la fonction $\sum_{i=1}^d \varphi^n(p^{(n)}_{j,i}) x_i(X)$ a un zéro d'ordre au moins $-t_H(f_j)$ en $\varepsilon^{(n)} - 1$ ». La stabilité de $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ sous l'action de Γ_K montre que l'on peut remplacer $\varepsilon^{(n)}$ par n'importe quelle racine primitive p^n-ième de 1.

Appendice A

Liste des notations

Voici une liste des principales notations dans l'ordre où elles apparaissent :

I : K, k_K, K_n, K_∞, K_0, K'_0, G_K, H_K, Γ_K, σ.

I.1 : L, $G_{L/K}$, D_L, $t_N(D)$, $t_H(D)$.

I.2 : F, $\mathbf{B}^{\dagger,r}_F$, φ, $\mathbf{B}^\dagger_F$, $\mathbf{B}_F$, e_K, $\mathbf{B}_K$, $\mathbf{B}^\dagger_K$, $r_0(K)$, $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K$, $C_K[r;s]$, $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, t, $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$, $r(K)$, ι_n, $n(r)$, ∇, ∂, q.

I.3 : $\mathbf{D}_r$, $r(\mathbf{D})$, $\otimes^{\iota_n}$.

II.1 : φ_n, M_n.

II.2 : ℓ_X, ξ_n, D^n_K, $M_n(D)$, $\mathscr{M}(D)$.

III.1 : $\nabla_{\mathbf{D}}$, $V_{[r;s]}$.

III.2 : $\partial_{\mathbf{D}}$, $S_L(\mathbf{D})$, $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$.

V.1 : $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{B}^\dagger$, $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, $\mathbf{D}^\dagger(V)$, $V(\mathbf{D}^\dagger)$, $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$.

V.3 : $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$, $V_{[r;s]}$, ord, $\log[\overline{\pi}]$, $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}$.

Appendice B

Erratum à [2]

Comme cet article fait assez naturellement suite à « Représentations p-adiques et équations différentielles » [2], il me semble utile de donner un erratum. Je remercie P. Colmez, J.-M. Fontaine, J. Teitelbaum et H. Zhu pour leurs remarques.

Exemple 2.8, 1 : remplacer $\mathbf{A}^+_{\mathrm{max}}$ par $\mathbf{A}_{\mathrm{max}}$.

Sections 3.3, 5.5 : Kedlaya a complètement modifié son article [34] et la plupart des numéros des références sont donc incorrects.

Théorème 4.10 : le théorème 4.10 est en fait dû à Forster, voir : O. Forster, Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln, Math. Zeitschrift, 97, p. 376ff, 1967.

Proposition 2.24 : l'application log n'est bien sûr pas définie pour $x = 0$. De plus je ne l'ai définie que pour $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ mais plus tard, je l'utilise sur $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$ (par exemple : $\log(\pi_K)$). Il faut donc l'étendre à $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$ ce que fait Colmez dans [**11**]. On peut aussi le faire « à la main ».

Démonstration du lemme 5.27 : remplacer $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}^{\dagger,r}, K)$ par $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K^{\dagger,r})$ et de même, remplacer $\mathrm{M}_d(\mathbf{A}^{\dagger,r}, K)$ par $\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_K^{\dagger,r})$.

Matrices : j'ai écrit les matrices « à l'envers », par exemple si f et g sont deux applications semi-linéaires, alors dans mes notations $\mathrm{Mat}(fg) = f(\mathrm{Mat}(g))\,\mathrm{Mat}(f)$. Pour retrouver la notation habituelle, il faut tout transposer (ce que j'ai fait dans mes autres articles).

Démonstration de la proposition 5.15 : il n'est pas vrai que $\iota_n(N_s) = K_n[\![t]\!] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Ce qui est vrai, c'est que l'image de ι_n est dense pour la topologie t-adique. C'est ce qui est démontré et utilisé dans le reste de la preuve.

p.229 l.3 : remplacer $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ par $\widetilde{\mathbf{A}}$.

L'anneau $\mathbf{B}_K^\dagger$: il est affirmé que l'anneau $\mathbf{B}_K^\dagger$ est un anneau de séries formelles à coefficients dans F ce qui n'est pas toujours le cas. C'est un anneau de séries formelles à coefficients dans l'extension maximale non-ramifiée de F dans K_∞, qui peut être plus grande que F. Comme il est vrai que $(\mathbf{B}_K^\dagger)^{\Gamma_K} = F$, cela n'affecte pas les résultats de l'article, et les démonstrations sont presque inchangées.

Monodromie : pour retrouver le (φ, N)-module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\cdot)$, il faut prendre $N(\log(\pi)) = -p/(p-1)$ au lieu de $N(\log(\pi)) = -1$.

Diagramme p. 271 : dans le diagramme en haut de la page, remplacer ∇_M par la connexion associée à ∂_M.

Lemme 2.7 : remplacer $k \gg 0$ par $k \gg -\infty$ dans $\sum_{k \gg 0} p^k[x_k]$.

Références

[1] Y. André – Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.

[2] L. Berger – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[3] ———, Limites de représentations cristallines, *Compos. Math.* **140** (2004), p. 1473–1498.

[4] F. Cherbonnier – Représentations p-adiques surconvergentes, Thèse, Université d'Orsay, 1996.

[5] F. Cherbonnier & P. Colmez – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[6] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[7] P. Colmez – Représentations cristallines et représentations de hauteur finie, *J. reine angew. Math.* **514** (1999), p. 119–143.

[8] ———, Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[9] ———, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[10] ———, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319, Séminaire Bourbaki, vol. 2002/2003, exposé n° 919.

[11] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ce volume.

[12] P. COLMEZ & J.-M. FONTAINE – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[13] J.-M. FONTAINE – Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[14] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Astérisque* **223** (1994), p. 59–111.

[15] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[16] ———, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, *Astérisque* **295** (2004), p. 1–115.

[17] ———, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication Orsay, 2004.

[18] J.-M. FONTAINE & J.-P. WINTENBERGER – Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), p. A367–A370.

[19] K. S. KEDLAYA – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 93–184.

[20] M. LAZARD – Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet, *Publ. Math. I.H.É.S.* **14** (1962), p. 47–75.

[21] A. MARMORA – Irrégularité et conducteur de Swan p-adiques, *Doc. Math.* **9** (2004), p. 413–433.

[22] Z. MEBKHOUT – Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

[23] J.-P. WINTENBERGER – Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), p. 59–89.

LAURENT BERGER, Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon
E-mail : laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr • *Url :* www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/

Astérisque

FABRIZIO ANDREATTA
OLIVIER BRINON

Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif

Astérisque, tome 319 (2008), p. 39-116
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__39_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 39–116

SURCONVERGENCE DES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES : LE CAS RELATIF

par

Fabrizio Andreatta & Olivier Brinon

Résumé. — On généralise le formalisme de Tate-Sen, ce qui permet d'étendre la théorie de Sen et de prouver la surconvergence des représentations p-adiques dans le cas relatif.

Abstract. — We generalize Tate-Sen's formalism; this allows to extend Sen's theory and to prove the overconvergence of p-adic representations in the relative case.

1. Introduction

Soit V un anneau de valuation discrète complet, de caractéristique 0, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note K son corps des fractions et v la valuation normalisée par $v(p) = 1$. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on note $\overline{V}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$. La valuation v s'étend de façon unique en une valuation de $\overline{K}$, qu'on note encore v. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on choisit $\varepsilon^{(n)} \in \overline{K}$ une racine p^n-ième de l'unité, de sorte que $\left(\varepsilon^{(n+1)}\right)^p = \varepsilon^{(n)}$. Soit $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} K\left[\varepsilon^{(n)}\right]$ l'extension cyclotomique de K. C'est une extension galoisienne de K, dont le groupe de Galois s'identifie, via le caractère cyclotomique χ, à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$. Écrivons $\mathsf{Im}(\chi) \simeq \mathbf{Z}_p \times F$ où F est fini. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $K_n = K_\infty^{p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$, et $K_0 = K$. On note V_n le normalisé de V dans K_n (c'est l'anneau des entiers de K_n) et on pose $V_\infty = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} V_n$. Enfin, pour $\delta \in v\left(\overline{K}^\times\right)$, on note p^δ un élément de valuation δ dans V_∞.

Posons $G_K = \mathsf{Gal}\left(\overline{K}/K\right)$ et notons $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ la catégorie des représentations p-adiques de G_K, dont les objets sont les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de G_K et les morphismes les applications

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 11S15, 11S20, 13K05, 14E22.
Mots clefs. — représentations p-adiques, théorie de Sen, (φ, Γ)-modules.

© Astérisque 319, SMF 2008

$\mathbf{Q}_p$-linéaires équivariantes. Dans [**17**], Fontaine a construit un corps $\mathcal{E}$ de valuation discrète de caractéristique 0, absolument non ramifié, de corps résiduel imparfait, muni d'un opérateur de Frobenius φ et d'une action de $\mathsf{Gal}(K_\infty/K)$ qui commutent. En utilisant la théorie du corps des normes (*cf.* [**21**]), il construit un isomorphisme $\mathsf{Gal}\left(\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}/\mathcal{E}\right) \simeq \mathsf{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)$ et en déduit une équivalence de catégories ([**17**, Théorème 3.4.3]) entre $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ et la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathcal{E}$, donnée par le foncteur $V \mapsto \mathrm{D}(V) = \left(\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^{\mathsf{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)}$. Un (φ,Γ)-module étale sur $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{E}$-espace vectoriel D de dimension finie muni d'un opérateur de Frobenius φ et d'une action de $\mathsf{Gal}(K_\infty/K)$ semi-linéaires et qui commutent, et qui contient un $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-réseau $\mathcal{D}$ (où $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathcal{E}$) tel que le linéarisé de Frobenius $\varphi\otimes 1 \colon \mathcal{D}\otimes^{\varphi}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ est un isomorphisme. Notons qu'il existe une version « entière » de ce qui précède, s'appliquant aux $\mathbf{Z}_p$-représentations de G_K, *i.e.* aux $\mathbf{Z}_p$-modules de type fini munis d'une action linéaire et continue de G_K.

Dans [**8**], le résultat de Fontaine est raffiné de la façon suivante. Les corps $\mathcal{E}$ et $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$ (notés $\mathbf{B}_K$ et $\mathbf{B}$ respectivement par Colmez, et c'est ce système de notation qui est adopté dans ce travail) admettent les sous-corps $\mathbf{B}_K^\dagger$ et $\mathbf{B}^\dagger$ respectivement, constitués des éléments dits surconvergents (car ils admettent une description en termes de fonctions analytiques sur des couronnes). Comme précédemment, ces corps permettent de construire un foncteur $V \mapsto \mathrm{D}^\dagger(V) = \left(\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^{\mathsf{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)}$ de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ dans la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_K^\dagger$. Le résultat principal de [**8**] est que ce foncteur est une équivalence de catégories, *i.e.* que le foncteur D se factorise par $\mathrm{D}^\dagger$ (*loc. cit.* Proposition III.5.1 et Corollaire III.5.2).

Parmi les applications principales de ce résultat, il y a les formules de réciprocité explicites, qui permettent de reconstruire les invariants $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ à partir de $\mathrm{D}^\dagger(V)$ (ce qui n'est pas possible à partir de $\mathrm{D}(V)$, parce qu'il n'y a pas de morphisme naturel de $\mathbf{B}$ dans $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ou de $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ dans $\mathbf{B}$, *cf.* [**8**, II]). C'est l'un des points de départ des travaux de Berger, Colmez, Fontaine et al. qui ont permis la preuve de la conjecture de monodromie p-adique (*cf.* [**10**]).

Décrivons maintenant le cadre dans lequel on va travailler. Soit d un entier, $T_1,\dots,T_d$ des indéterminées et $R^0 = V\{T_1^{\pm 1},\dots,T_d^{\pm 1}\}$ le séparé complété de $V\left[T_1^{\pm 1},\dots,T_d^{\pm 1}\right]$ pour la topologie p-adique. On se donne un anneau $\widetilde{R}$ obtenu à partir de R^0 en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;

(loc) complétion p-adique d'une localisation ;

(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

On suppose en outre que $V\left[T_1^{\pm 1},\dots,T_d^{\pm 1}\right] \to \widetilde{R}$ est à fibres géométriquement régulières ou que $\widetilde{R}$ est de dimension de Krull inférieure à 2, et que $k \to \widetilde{R}\otimes_V k$ est

géométriquement intègre. Il en résulte que $T_1, \ldots, T_d$ est une p-base de $\widetilde{R} \otimes_V k$. Dans ces conditions, le théorème de pureté de Faltings s'applique, cf. 3.2.

Soit E une clôture algébrique de $\mathsf{Frac}\left(\widetilde{R}\right)$. On note $\overline{R}$ la réunion des sous-$\widetilde{R}$-algèbres finies S de E telles que $S[p^{-1}]$ est une extension étale de $\widetilde{R}[p^{-1}]$. On se donne une sous-$\widetilde{R}$-algèbre finie normale R de E telle que $R[p^{-1}]$ est étale sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$.

En particulier, R est séparée et complète pour la topologie p-adique, et $R \subset \overline{R}$. On suppose en outre que K est algébriquement clos dans $R[p^{-1}]$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on choisit $T_i^{(n)} \in \overline{R}$ une racine p^n-ième de T_i, de sorte que $\left(T_i^{(n+1)}\right)^p = T_i^{(n)}$. On pose $R'_n = R\left[T_1^{(n)}, \ldots, T_d^{(n)}\right]$ et on note R_n le normalisé de $R'_n.V_n$ dans $\overline{R}$ (on a $R_n[p^{-1}] = (R'_n.V_n)[p^{-1}]$) et $R_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n$. En particulier, on a $R_\infty \subset \overline{R}$.

On pose $\mathcal{G}_R = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, $\Gamma_R = \mathsf{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ et $\mathcal{H}_R = \mathsf{Ker}\left(\mathcal{G}_R \to \Gamma_R\right)$. L'anneau $\overline{R}$ est stable par $\mathcal{G}_R$. Le groupe Γ_R s'insert dans la suite exacte

$$1 \to \widetilde{\Gamma}_R \to \Gamma_R \to \Gamma_V \to 1$$

où $\widetilde{\Gamma}_R = \mathsf{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R.V_\infty[p^{-1}]\right)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de $\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{R}} = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{Z}_p \gamma_i$ où γ_i est défini par :

$$\gamma_i\left(T_j^{(n)}\right) = \begin{cases} \varepsilon^{(n)} T_i^{(n)} & \text{si } j = i \\ T_j^{(n)} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Si $g \in \Gamma_R$, on a les relations $g\gamma_i g^{-1} = \gamma_i^{\chi(g)}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. On choisit γ_0 un générateur topologique de la partie libre de $\mathsf{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R'_\infty[p^{-1}]\right)$.

Si B est une sous-$\widetilde{R}$-algèbre de $\overline{R}$, on note $\widehat{B} = \varprojlim_n B/p^n B$ son séparé complété pour la topologie p-adique. Par continuité, $\mathcal{G}_R$ agit sur $\widehat{\overline{R}}$. On prolonge la valuation p-adique sur $\overline{K}$ en une application $v\colon \overline{R}[p^{-1}] \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ en posant

$$v(x) = \max\left\{n \in \mathbf{Q}, x \in p^n \overline{R}\right\}.$$

Ce n'est pas une valuation en général (à moins que R soit local), mais vérifie les propriétés (i)-(iv) de la section suivante.

Dans [**3**], la théorie des (φ, Γ)-modules et l'équivalence de catégories de [**17**] ont été généralisées aux $\mathbf{Z}_p$-représentations de $\mathcal{G}_R$: on a des anneaux $\mathbf{A}_R \subset \mathbf{A}$ (généralisant $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}}$) et une équivalence de catégories

$$\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{G}_R) \longrightarrow \mathbf{Mod}^{\text{ét}}_{\mathbf{A}_R}(\varphi, \Gamma_R), \quad V \longmapsto (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_R}$$

(*cf.* théorème 4.34). L'objectif principal de ce travail est de prouver l'analogue de [**8**, Proposition III.5.1] à ce cadre (théorème 4.35).

Le plan de l'article est le suivant.

La preuve de la surconvergence des représentations p-adiques repose sur des techniques dues à Sen, qui ont été axiomatisées dans le cas « classique » par Colmez (formalisme de Tate-Sen [**10**]). L'objet de la première partie de ce travail est de généraliser ces axiomes au cas « relatif ». Rappelons que la méthode de Sen comporte deux étapes, une descente de $\mathcal{G}_R$ à Γ_R, et une « décomplétion », qui fait intervenir des « traces normalisées de Tate généralisées » (*cf.* section 2). On pocède par décomplétions partielles (variable par variable). Une difficulté réside dans le fait que lorsque $d > 0$, le groupe Γ_R n'est pas commutatif. Elle est à l'origine de l'axiome (TS3) (b) (qui est une nouveauté par rapport à [**10**]).

Cela permet d'étendre (théorème 3.1) un résultat classique de Sen (c'était l'objet de [**6**] dans le cas où $R[p^{-1}]$ est un corps, à corps résiduel non nécessairement parfait) : l'application naturelle

$$\varinjlim_{S} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right)$$

déduite des l'inclusions $S_\infty \subset \widehat{\overline{R}}$, est bijective (la limite inductive étant prise sur les sous-R-algèbres S de $\overline{R}$ telles que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne). Cet énoncé se reformule en termes de $\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$-représentations (corollaire 3.14). Remarquons qu'en utilisant l'action infinitésimale de $\widetilde{\Gamma}_R$, il implique le résultat local de Faltings sur la théorie des fibrés de Higgs (*cf.* remarque 3.15).

Dans la dernière partie, on rappelle les constructions et résultats de [**3**] qui nous sont utiles, on définit les éléments surconvergents et on applique le formalisme de Tate-Sen pour prouver le théorème 4.35, qui affirme qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{G}_R) \longrightarrow \mathbf{Mod}^{\text{ét}}_{\mathbf{A}_R^\dagger}(\varphi, \Gamma_R), \quad V \longmapsto (\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_R}$$

où $\mathbf{A}^\dagger$ (resp. $\mathbf{A}_R^\dagger$) désigne le sous-anneau des éléments surconvergents de $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}_R$). Un point technique important (et nouveau) est la construction d'un anneau $\mathbf{A}_R^+$ (*cf.* proposition 4.42). Sa construction, assez délicate, est requise par le besoin d'une structure « entière » de $\mathbf{A}_R$ ayant de bonnes propriétes topologiques.

La motivation principale de ce travail est d'étendre les formules de réciprocité au cas relatif, c'est-à-dire de relier [**3**] et [**7**] (où les anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, B_{dR} sont construits et les notions de représentation p-adique cristalline, de de Rham sont étudiées dans la situation considérée dans cette article).

Cet article doit beaucoup à P. Colmez : sans [**10**] et [**11**], il n'aurait d'ailleurs certainement pas vu le jour. Les auteurs lui sont reconnaissants pour ses commentaires qui ont permis de le clarifier, et de leur avoir en outre communiqué des travaux non publiés.

Pendant l'élaboration de ce travail, le second auteur a bénéficié du soutien du Marie Curie Research Training Network dans le cadre du Réseau de Géométrie Algébrique

et d'Arithmetique Européen, à l'Università degli Studi di Padova et à la Graduate School of Mathematical Sciences de Tokyo. Il remercie ces deux institutions pour leur hospitalité, ainsi que F. Baldassarri et T. Saito pour leur accueil.

2. La méthode de Sen généralisée

Ce qui suit est une généralisation de propriétés démontrées par Sen dans [**26**], l'axiomatisation qui en est faite étant directement inspirée par l'exposé de Colmez dans [**10**, 3.2 et 3.3].

Soient p un nombre premier, G un groupe profini et $\widetilde{\Lambda}$ une $\mathbf{Z}_p$-algèbre intègre munie d'une application $v\colon \widetilde{\Lambda} \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ telle que :

(i) $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $v(xy) \geq v(x) + v(y)$;
(iii) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$;
(iv) $v(p) > 0$ et $v(px) = v(p) + v(x)$.

L'anneau $\widetilde{\Lambda}$ est donc muni d'une topologie séparée. Supposons de plus $\widetilde{\Lambda}$ complet pour cette topologie, et muni d'une action continue de G, telle que $v(g(x)) = v(x)$ pour tout $x \in \widetilde{\Lambda}$ et $g \in G$.

Soient $d \in \mathbf{N}$ et H un sous-groupe fermé distingué de G tel que $\Gamma = G/H$ est muni d'un homomorphisme continu $\chi\colon \Gamma \to \mathbf{Z}_p^\times$ d'image ouverte, de noyau isomorphe à $\mathbf{Z}_p^d$ et tel que $\gamma g \gamma^{-1} = g^{\chi(\gamma)}$ pour tout $g \in \mathsf{Ker}(\chi)$ et tout $\gamma \in \Gamma$. Soient $\gamma_0 \in \Gamma$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \mathsf{Aut}\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ tels que $\chi(\gamma_0)^{\mathbf{Z}_p}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$ et $\mathsf{Ker}(\chi)$ est un sous-groupe ouvert de $\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{Z}_p\,\gamma_i$.

Si G' est un sous-groupe ouvert distingué de G, on pose $H' = H \cap G'$ et $\Gamma_{G'} = G'/H' \hookrightarrow \Gamma$. On suppose que pour tout tel G', il existe $m_0(G') \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$, on a

(a) $\gamma_i^{p^{m_0(G')}} \in \Gamma_{G'}$;
(b) il existe une suite croissante $\left(\Lambda_{m,G'}^{(i)}\right)_{m \geq m_0(G')}$ de sous-anneaux fermés de $\widetilde{\Lambda}^{H'}$;
(c) il existe une suite d'applications $\left(\tau_{m,G'}^{(i)}\colon \widetilde{\Lambda}^{H'} \to \Lambda_{m,G'}^{(i)}\right)_{m \geq m_0(G')}$;

de sorte que les conditions suivantes (conditions de *Tate-Sen*) sont vérifiées :

(TS1) Il existe $c_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que quels que soient les sous-groupes ouverts distingués $H_1 \subseteq H_2$ de H, il existe $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ vérifiant $v(\alpha) > -c_1$ tel que $\sum_{\tau \in H_2/H_1} \tau(\alpha) = 1$;

(TS2) Il existe $c_2 = c_2(G') \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ et tout $m \geq m_0(G')$

(a) $\tau_{m,G'}^{(i)}$ est $\Lambda_{m,G'}^{(i)}$-linéaire et $\tau_{m,G'}^{(i)}(x) = x$ si $x \in \Lambda_{m,G'}^{(i)}$;
(b) pour tout $x \in \widetilde{\Lambda}^{H'}$, on a $v\left(\tau_{m,G'}^{(i)}(x)\right) \geq v(x) - c_2$ et $\lim_{m\to\infty} \tau_{m,G'}^{(i)}(x) = x$;

(c) $\tau^{(i)}_{m,G'}$ commute aux $\tau^{(j)}_{m',G'}$;

(d) si $i \in \{1,\dots,d\}$, l'anneau $\Lambda^{(i)}_{m,G'}$ est stable par G/H' et $\tau^{(i)}_{m,G'}$ commute à l'action de G/H' ;

(d') l'anneau $\Lambda^{(0)}_{m,G'}$ est stable par $\gamma_0^{p^{m_0(G')}}$, $\tau^{(0)}_{m,G'}$ commute à $\gamma_0^{p^{m_0(G')}}$ et $\tau^{(0)}_{m,G'} \circ \tau^{(1)}_{m,G'} \circ \cdots \circ \tau^{(d)}_{m,G'}$ commute à G/H' ;

(TS3) Posons $X^{(i)}_{m,G'} = \left(1 - \tau^{(i)}_{m,G'}\right)\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)$.

(a) Il existe $c_3 = c_3(G') \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que pour tout $m \geq m_0(G')$ et tout $i \in \{0,\dots,d\}$, l'application $1 - \gamma_i^{p^m}$ est inversible sur $X^{(i)}_{m,G'}$ et pour tout $x \in X^{(i)}_{m,G'}$, on a

$$v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{-1}(x)\right) \geq v(x) - c_3.$$

(b) Il existe $c_4 = c_4(G') \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que pour tout $m \geq m_0(G')$, tout $i \in \{1,\dots,d\}$ et tout $x \in \Lambda^{(i)}_{m,G'}$, on a $v\left(\left(\gamma_i^{p^m} - 1\right)(x)\right) \geq v(x) + c_4$.

Remarquons que la condition (iv) implique $v(1) = 0$. Par ailleurs, si G' est un sous-groupe ouvert distingué de G, alors le groupe G/H' (où $H' = H \cap G'$) est topologiquement engendré par un nombre *fini* d'éléments.

Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Si $U = (u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$, on pose $v(U) = \min\limits_{1\leq i,j\leq n} v\left(u_{i,j}\right)$. Dans tout ce qui suit, $\widetilde{\Lambda}$ et ses sous-anneaux seront munis de la topologie définie par v. Ainsi, quand on parlera de cocycles et d'ensembles de cohomologie, il s'agira toujours (même lorsque ce n'est pas précisé) de cocycles et de cohomologie *continus*.

Lemme 2.1. — ([**26**, Lemma 1]). *Soient H_0 un sous-groupe ouvert distingué de H, $m > c_1$ un entier (où c_1 est la constante de (TS1)) et $U\colon H_0 \to \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ un cocycle continu tel que pour tout $g \in H_0$, on a $v\left(U_g - 1\right) > m$. Alors il existe $B \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ vérifiant $v(B-1) > m - c_1$ tel que si $U'_g := B^{-1}U_g g(B)$, on a $v\left(U'_g - 1\right) > m+1$ pour tout $g \in H_0$.*

Démonstration. — Comme $v(1) = 0$ et $v\left(U_g - 1\right) > m > c_1 > 0$, on a $v(U_g) \geq 0$ pour tout $g \in H_0$. Comme U est continu, il existe un sous-groupe ouvert distingué H_1 de H_0 tel que

$$g' \in H_1 \Rightarrow v\left(U_{g'} - 1\right) > m + c_1 + 1.$$

Soit T un ensemble de représentants de H_0/H_1. La condition (TS1) fournit un élément $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ tel que $v(\alpha) > -c_1$ et $\sum\limits_{\tau\in T} \tau(\alpha) = 1$. On considère la série de Poincaré

$$B = \sum_{\tau\in T} \tau(\alpha) U_\tau.$$

Pour $g \in H_0$, on a $g(B) = \sum_{\tau \in T} g\tau(\alpha) g(U_\tau)$. Si $\tau \in T$, la condition de cocycle implique que $g(U_\tau) = U_g^{-1} U_{g\tau}$. Par ailleurs, l'élément $g\tau$ s'écrit de façon unique $\tau' g'$ avec $\tau' \in T$ et $g' \in H_1$. On a alors

$$v(U_{g\tau} - U_{\tau'}) = v(U_{\tau' g'} - U_{\tau'}) = v(U_{\tau'} \tau'(U_{g'}) - U_{\tau'}) > m + c_1 + 1,$$

car $v(\tau'(U_{g'} - 1)) = v(U_{g'} - 1) > m + c_1 + 1$ (on a $g' \in H_1$) et $v(U_{\tau'}) \geq 0$. Comme $v\left(U_g^{-1}\right) \geq 0$, on a $v\left(g(U_\tau) - U_g^{-1} U_{\tau'}\right) > m + c_1 + 1$. Par ailleurs, on a $g\tau(\alpha) = \tau' g'(\alpha) = \tau'(\alpha)$ (car $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$). Comme $v(\tau'(\alpha)) = v(\alpha) > -c_1$, on a $v\left(g\tau(\alpha) g(U_\tau) - \tau'(\alpha) U_g^{-1} U_{\tau'}\right) > m + 1$. Enfin, τ' décrit T quand τ décrit T, d'où $\sum_{\tau \in T} \tau'(\alpha) U_g^{-1} U_{\tau'} = U_g^{-1} B$. On a donc $v\left(g(B) - U_g^{-1} B\right) > m + 1$.
Par ailleurs, on a $B - 1 = \sum_{\tau \in T} \tau(\alpha)(U_\tau - 1)$ vu que $\sum_{\tau \in T} \tau(\alpha) = 1$. Comme $v(\alpha) > -c_1$ et $v(U_\tau - 1) > m$, on a donc $v(B - 1) > m - c_1 > 0$. Comme $\widetilde{\Lambda}$ est complet, la série $1 + (1 - B) + (1 - B)^2 + \cdots$ converge : on a $B \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$. Enfin, comme $v\left(g(B) - U_g^{-1} B\right) > m+1$, $v(U_g) \geq 0$ et $v\left(B^{-1}\right) \geq 0$, on a bien $v\left(B^{-1} U_g g(B) - 1\right) > m + 1$. □

Proposition 2.2. — ([**26**, Proposition 4]). *Si $g \mapsto U_g$ est un cocycle continu $H \to \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$, il existe un sous-groupe ouvert H' de H tel que la restriction de U à H' soit cohomologue au cocycle trivial.*

Démonstration. — Comme U est continu, il existe un sous-groupe ouvert distingué H' de H tel que $v(U_g - 1) > c_1 + 1$ pour tout $g \in H'$. En partant de $U_1 = U_{|H'}$, une application répétée du lemme 2.1 avec $H_0 = H'$ fournit une suite de cocycles $\left(U_m \colon H' \to \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right)_{m \geq 1}$ et une suite $(B_m)_{m \geq 1}$ d'éléments de $\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ telles que

(1) $v(B_m - 1) > m$,

(2) $U_{m+1}(g) = B_m^{-1} U_m(g) g(B_m)$,

(3) $v(U_m(g) - 1) > m + c_1$

pour tout $g \in H'$. La condition (1) assure que le produit infini $B = \prod_{m=1}^{\infty} B_m$ converge dans $\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$. Les conditions (2) et (3) impliquent que $B^{-1} U_g g(B) = 1$ pour tout $g \in H'$: la restriction de U à H' est cohomologue au cocycle trivial. □

Corollaire 2.3. — *On a*

$$\mathrm{H}^1\left(H, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\substack{H' \trianglelefteqslant H \\ \text{ouvert}}} \mathrm{H}^1\left(H/H', \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)\right)$$

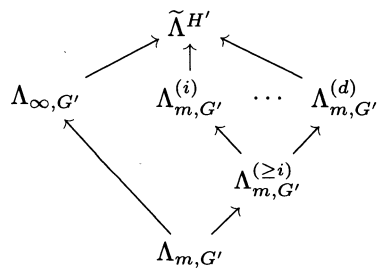
$$\mathrm{H}^1\left(G, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\substack{G' \trianglelefteqslant G \\ \text{ouvert}}} \mathrm{H}^1\left(G/(H \cap G'), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H \cap G'}\right)\right)$$

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 2.2 et des suites d'inflation-restriction

$$1 \to \mathrm{H}^1\left(H/H', \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(H, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(H', \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right),$$
$$1 \to \mathrm{H}^1\left(G/(H\cap G'), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(G, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(H\cap G', \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right)\square$$

Pour décrire $\mathrm{H}^1\left(G, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right)$, il s'agit de comprendre les ensembles $\mathrm{H}^1\left(G/H', \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)\right)$ pour tout sous-groupe ouvert distingué G' de G, où $H' = H \cap G'$. Ce qui suit a pour but montrer que l'ensemble $\mathrm{H}^1\left(G/H', \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)\right)$ est en bijection avec $\mathrm{H}^1\left(G/H', \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{\infty,G'}\right)\right)$ où $\Lambda_{\infty,G'}$ est un anneau plus simple que $\widetilde{\Lambda}^{H'}$, que nous allons maintenant définir.

Pour $j \in \{0,\dots,d\}$ et $m \geq m_0(G')$, on pose $\Lambda_{m,G'}^{(\geq j)} = \bigcap_{i=j}^{d} \Lambda_{m,G'}^{(i)}$. On pose $\Lambda_{m,G'} = \Lambda_{m,G'}^{(\geq 0)} = \bigcap_{i=0}^{d} \Lambda_{m,G'}^{(i)}$ et $\Lambda_{\infty,G'} = \bigcup_{m=m_0(G')}^{\infty} \Lambda_{m,G'}$. On a donc la situation suivante



L'inclusion $\Lambda_{\infty,G'} \subset \widetilde{\Lambda}^{H'}$ induit une application

$$\iota\colon \mathrm{H}^1\left(G/H', \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{\infty,G'}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(G/H', \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)\right).$$

Théorème 2.4. — ([**26**, Proposition 6]). *L'application ι est bijective.*

D'après (TS2) (a), si $m \geq m_0(G')$ et $i \in \{0,\dots,d\}$, l'opérateur $\tau_{m,G'}^{(i)}$ est un projecteur de $\widetilde{\Lambda}^{H'}$ sur $\Lambda_{m,G'}^{(i)}$. En particulier, on a $X_{m,G'}^{(i)} = \mathsf{Ker}\left(\tau_{m,G'}^{(i)}\right)$ et pour $x \in \widetilde{\Lambda}^{H'}$, on a $x \in \Lambda_{m,G'}^{(i)} \Leftrightarrow \tau_{m,G'}^{(i)}(x) = x$. De plus, d'après la condition (TS2) (b), $\tau_{m,G'}^{(i)}\colon \widetilde{\Lambda}^{H'} \to \Lambda_{m,G'}^{(i)}$ est continu, ainsi, $\widetilde{\Lambda}^{H'} = X_{m,G'}^{(i)} \oplus \Lambda_{m,G'}^{(i)}$ est une décomposition en somme de sous-espaces fermés. Par ailleurs, d'après (TS2) (d), si $i \in \{1,\dots,d\}$, les sous-espaces $X_{m,G'}^{(i)}$ et $\Lambda_{m,G'}^{(i)}$ sont stables par G/H', et d'après (TS2) (d'), les sous-espaces $X_{m,G'}^{(0)}$ et $\Lambda_{m,G'}^{(0)}$ sont stables par $\gamma_0^{p^{m_0(G')}}$. En particulier, les sous-espaces $\Lambda_{m,G'}^{(\geq i)}$ sont stables par G/H' si $i \in \{1,\dots,d\}$. C'est encore vrai pour $i = 0$ vu que $\tau_{m,G'}^{(0)} \circ \tau_{m,G'}^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_{m,G'}^{(d)}$ commute à G/H' d'après (TS2) (d').

Pour $i \in \{0, \dots, d\}$, posons $\Lambda^{(i)}_{\infty,G'} = \bigcup_{m=m_0(G')}^{\infty} \Lambda^{(i)}_{m,G'}$.

Lemme 2.5. — *Le sous-espace $\Lambda^{(j)}_{m',G'}$ est stable par $\tau^{(i)}_{m,G'}$ pour tous $i, j \in \{0, \dots, d\}$ et $m, m' \in \mathbf{N}_{\geq m_0(G')} \cup \{\infty\}$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $m' \geq m_0(G')$. D'après (TS2) (c), on a $\tau^{(j)}_{m',G'} \circ \tau^{(i)}_{m,G'} = \tau^{(i)}_{m,G'} \circ \tau^{(j)}_{m',G'}$. Si $x \in \Lambda^{(j)}_{m',G'}$, on a donc $\tau^{(j)}_{m',G'} \left(\tau^{(i)}_{m,G'}(x)\right) = \tau^{(i)}_{m,G'}(x)$, soit $\tau^{(i)}_{m,G'}(x) \in \Lambda^{(j)}_{m',G'}$. □

Proposition 2.6. — ([**26**, Proposition 3]). *Soient $i \in \{0, \dots, d\}$, $m \geq m_0(G')$ et $W \subset \widetilde{\Lambda}^{H'}$ un sous-$\Lambda^{(i)}_{m,G'}$-module de type fini stable par $\gamma_i^{p^m}$. Alors $W \subset \Lambda^{(i)}_{\infty,G'}$.*

Démonstration. — Soit $w_1, \dots, w_r$ une famille génératrice de W sur $\Lambda^{(i)}_{m,G'}$, et w le vecteur colonne dont les composantes sont $w_1, \dots, w_r$. Comme W est stable par $\gamma_i^{p^m}$, pour tout $m' \geq m$ il existe $M_{m'} \in \mathrm{M}_r\left(\Lambda^{(i)}_{m,G'}\right)$ telle que $\gamma_i^{p^{m'}}(w) = M_{m'} w$. Par continuité de l'action de $\Gamma_{G'}$, on a $\lim_{m' \to \infty} M_{m'} = 1$. Il existe $m' \geq m_0(G')$ tel que $v\left(M_{m'} - 1\right) \geq c_3 + 1$. Posons $x_{m'} = \left(1 - \tau^{(i)}_{m',G'}\right)(w)$. C'est un vecteur colonne à coefficients dans $X^{(i)}_{m',G'}$. Par ailleurs, comme $M_{m'}$ est à coefficients dans $\Lambda^{(i)}_{m,G'} \subseteq \Lambda^{(i)}_{m',G'}$, on a $\tau^{(i)}_{m',G'}(M_{m'}) = M_{m'}$, et donc $\gamma_i^{p^{m'}}(x_{m'}) = M_{m'} x_{m'}$ vu que $\tau^{(i)}_{m',G'}$ commute à l'action de $\gamma_i^{p^{m_0(G')}\mathbf{Z}_p}$ (condition (TS2) (d) et (d')). En particulier, on a $x_{m'} = \left(\gamma_i^{p^{m'}} - 1\right)^{-1}((M_{m'} - 1)x_{m'})$ (rappelons que $1 - \gamma_i^{p^{m'}}$ est inversible sur $X^{(i)}_{m',G'}$ d'après (TS3) (a)). D'après la condition (TS3) (a) encore, on a donc

$$v(x_{m'}) \geq v\left((M_{m'} - 1)x_{m'}\right) - c_3 \geq v\left(M_{m'} - 1\right) + v(x_{m'}) - c_3 \geq v(x_{m'}) + 1,$$

d'où $v(x_{m'}) = +\infty$ *i.e.* $x_{m'} = 0$, soit $\tau^{(i)}_{m',G'}(w) = w$: le vecteur w est à coefficients dans $\Lambda^{(i)}_{m',G'}$. On a donc $W \subset \Lambda^{(i)}_{m',G'} \subset \Lambda^{(i)}_{\infty,G'}$. □

Lemme 2.7. — *L'application ι est injective.*

Démonstration. — Soit $U, U' \colon \Gamma \to \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{\infty,G'}\right)$ deux cocycles. Comme G/H' est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, il existe un entier m tel que $U_g, U'_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$ pour tout $g \in G/H'$. Supposons que U et U' sont cohomologues dans $\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)$: il existe $M \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)$ tel que pour tout $g \in G/H'$, on a $M^{-1} U_g g(M) = U'_g$, soit $g(M) = U_g^{-1} M U'_g$. Pour $i \in \{0, \dots, d\}$, notons W_i le sous-$\Lambda^{(i)}_{m,G'}$-module de $\widetilde{\Lambda}^{H'}$ engendré par les coefficients de la matrice M. D'après ce qui précède, ce sous-module est stable par $\gamma_i^{p^m}$. Comme il est de type fini, la proposition 2.6 assure que $W_i \subset \Lambda^{(i)}_{\infty,G'}$. La matrice M est donc à coefficients dans

$\Lambda^{(0)}_{\infty,G'} \cap \cdots \cap \Lambda^{(d)}_{\infty,G'} = \Lambda_{\infty,G'}$, et les cocycles U et U' sont déjà cohomologues dans $\mathsf{GL}_n(\Lambda_{\infty,G'})$. □

Lemme 2.8. — ([**26**, Proposition 2 (b)]). *Soient $i \in \{0,\dots,d\}$, $m \geq m_0(G')$, $c \in \Lambda^{(i)}_{m,G'}$ et $y \in X^{(i)}_{m,G'}$ tels que*

$$v\left(c + \left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(y)\right) \geq (c_2 + c_3)r.$$

Alors $v(y) \geq (c_2 + c_3)(r-1)$.

Démonstration. — Posons $z = c + \left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(y)$. On a $v\left(\left(1 - \tau^{(i)}_{m,G'}\right)(z)\right) = v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(y)\right) \geq (c_2 + c_3)r - c_2$ d'après la propriété (TS2) (b) (car $c \in \Lambda^{(i)}_{m,G'}$ est invariant par $\tau^{(i)}_{m,G'}$ et $y \in X^{(i)}_{m,G'} = \mathsf{Ker}\left(\tau^{(i)}_{m,G'}\right)$). La condition (TS3) (a) appliquée à y implique alors $v(y) \geq (c_2 + c_3)r - c_2 - c_3$. □

Lemme 2.9. — ([**26**, Lemma 3]). *Pour $i \in \{0,\dots,d\}$, l'application*

$$\mathrm{H}^1\left(G/H', \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{\infty,G'}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(G/H', \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{\infty,G'}\right)\right)$$

(déduite de l'inclusion $\Lambda^{(\geq i)}_{\infty,G'} \subset \Lambda^{(\geq i+1)}_{\infty,G'}$) est surjective (où on a posé $\Lambda^{(\geq i)}_{\infty,G'} = \bigcup_{m=m_0(G')}^{\infty} \Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}$ pour $i \leq d$ et $\Lambda^{(\geq d+1)}_{\infty,G'} = \widetilde{\Lambda}^{H'}$).

Il s'agit de montrer que tout cocycle $U\colon \Gamma \to \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{\infty,G'}\right)$ est cohomologue à un cocycle à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{\infty,G'}\right)$. Comme G/H' est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, il existe un entier $m \geq m_0(G')$ tel que U est à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$ $(= \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)$ si $i = d)$.

Pour alléger les notations, on pose $\gamma_{i,m} = \gamma_i^{p^m}$ pour $m \geq m_0(G')$. La preuve du lemme 2.9, qui occupe l'essentiel du reste de cette section, est divisée en plusieurs lemmes.

Lemme 2.10. — *Il existe $m \geq m_0(G')$ tel que, quitte à tordre U en un cocycle cohomologue, on a $U_{\gamma_{i,m}} \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$ et $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$ pour tout $g \in G/H'$.*

Démonstration. — Par continuité de U, on peut supposer (quitte à augmenter m) que $v\left(U_{\gamma_{i,m}} - 1\right) \geq 3(c_2 + c_3)$. Soient $A_3 = U_{\gamma_{i,m}}$, $B_3 = R_3 = 1 \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$. On va construire par récurrence des suites $(A_r)_{r\geq 3}$, $(B_r)_{r\geq 3}$ et $(R_r)_{r\geq 3}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $A_r, B_r \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$ et $R_r \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$ pour tout $r \geq 3$,

(ii) $A_{r+1} = B_{r+1}^{-1} A_r \gamma_{i,m}(B_{r+1})$ pour tout $r \geq 3$,

(iii) $v(A_r - R_r) \geq (c_2 + c_3)r$ et $v(B_r - 1) \geq (c_2 + c_3)(r-1)$ pour tout $r \geq 3$.

Remarquons déjà que les conditions (ii) et (iii) impliquent que $v(A_{r+1}-A_r)\geq(c_2+c_3)r$. En particulier, on a $v(A_r-A_3)\geq 3(c_2+c_3)$ et *a fortiori* $v(A_r-1)\geq 3(c_2+c_3)$.

Supposons A_r, B_r, R_r construits. Posons $R_{r+1}=\tau^{(i)}_{m,G'}(A_r)\in \mathrm{M}_n\left(\Lambda^{(i)}_{m,G'}\right)$. D'après le lemme 2.5, le sous-espace $\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}$ est stable par $\tau^{(i)}_{m,G'}$, comme $A_r\in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$, on a aussi $R_{r+1}\in \mathrm{M}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$ et donc $R_{r+1}\in \mathrm{M}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$. On a $R_{r+1}-A_r=-\left(1-\tau^{(i)}_{m,G'}\right)(A_r)\in \mathrm{M}_n\left(X^{(i)}_{m,G'}\right)$: d'après la propriété (TS3) (a), il existe $S_r\in \mathrm{M}_n\left(X^{(i)}_{m,G'}\right)$ tel que $R_{r+1}-A_r=(1-\gamma_{i,m})(S_r)$.

Par ailleurs, comme $A_r, R_r\in \mathrm{M}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$, la matrice $R_{r+1}-A_r=(1-\gamma_{i,m})(S_r)$ est tuée par $\tau^{(j)}_{m,G'}$ pour $j\in\{i+1,\dots,d\}$. Par injectivité de $1-\gamma_{i,m}$ sur $X^{(i)}_{m,G'}$ (condition (TS3) (a)), il en est de même de S_r *i.e.* $S_r\in \mathrm{M}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$.

On a $v(A_r-R_r)\geq(c_2+c_3)r$ donc $v(R_r-R_{r+1}+(1-\gamma_{i,m})S_r)\geq(c_2+c_3)r$. D'après le lemme 2.8, on a en fait $v(S_r)\geq(c_2+c_3)(r-1)$. Posons $B_{r+1}=1-S_r$, on a donc $v(B_{r+1}-1)\geq(c_2+c_3)(r-1)$. Posons $N_r=A_r-1$, on a $v(N_r)\geq 3(c_2+c_3)$ d'après ce qui précède.

La matrice B_{r+1} est inversible et $B_{r+1}^{-1}=1+S_r+S_r^2+\cdots\in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$ (car $v(S_r)\geq(c_2+c_3)(r-1)$, $r\geq 3$ et $\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}$ est fermé dans $\widetilde{\Lambda}^{H'}$). Soit $A_{r+1}=B_{r+1}^{-1}A_r\gamma_{i,m}(B_{r+1})$, on a

$$v\left(A_{r+1}-(1+S_r)(1+N_r)(1-\gamma_{i,m}(S_r))\right)\geq 2(c_2+c_3)(r-1).$$

Comme $2(c_2+c_3)(r-1)\geq(c_2+c_3)(r+1)$ (on a $r\geq 3$), $v(S_rN_r)\geq(c_2+c_3)(r+2)$ et $v(S_r\gamma_{i,m}S_r)\geq 2(c_2+c_3)(r-1)$, on a donc

$$v\left(A_{r+1}-1-N_r-(1-\gamma_{i,m})S_r\right)\geq(c_2+c_3)(r+1)$$

i.e. $v(A_{r+1}-R_{r+1})\geq(c_2+c_3)(r+1)$.

Ces suites étant construites, posons $B=B_3B_4\cdots$. Les inégalités $v(B_r-1)\geq(c_2+c_3)(r-2)$ impliquent que le produit converge dans $\mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i+1)}_{m,G'}\right)$. Par ailleurs, les suites $(A_r)_{r\geq 3}$ et $(R_r)_{r\geq 3}$ sont de Cauchy donc convergent dans $\mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$ (rappelons que $\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}$ est fermé dans $\widetilde{\Lambda}$ qui est complet). Par construction, elles ont la même limite qu'on note R. On a alors $B^{-1}U_{\gamma_{i,m}}\gamma_{i,m}(B)=R\in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$: quitte à tordre le cocycle U par B, on peut supposer que $U_{\gamma_{i,m}}\in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$. □

Lemme 2.11. — *Supposons que $U_{\gamma_{i,m}}\in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$, avec $m\geq m_0(G')$. Alors quitte à augmenter m, on a $U_g\in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$ pour tout $g\in\Gamma_{G'}$.*

Démonstration. — PREMIER CAS : $i\in\{1,\dots,d\}$. Pour $g\in \mathsf{Ker}(\chi)\cap\Gamma_{G'}$, on a $\gamma_{i,m}g=g\gamma_{i,m}$ et donc $U_{\gamma_{i,m}}\gamma_{i,m}(U_g)=U_g g\left(U_{\gamma_{i,m}}\right)$. Si $M=U_{\gamma_{i,m}}\in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$, on a donc $\gamma_{i,m}(U_g)=M^{-1}U_g g(M)$. Soit W_g le sous-$\Lambda^{(i)}_{m,G'}$-module de $\widetilde{\Lambda}^{H'}$ engendré par les

coefficients de U_g. Il est de type fini, et stable par $\gamma_{i,m}$ (parce que $\Lambda^{(i)}_{m,G'}$ est stable par g en vertu de (TS2) (d)). D'après la proposition 2.6, on a $W_g \subset \Lambda^{(i)}_{\infty,G'}$: quitte à augmenter m, on peut supposer $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(i)}_{m,G'}\right)$ et donc $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$. Comme $\mathsf{Ker}(\chi) \cap \Gamma_{G'}$ est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, on peut donc supposer (quitte à augmenter m un nombre fini de fois) que $U_h \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$ pour tout $h \in \mathsf{Ker}(\chi) \cap \Gamma_{G'}$.

Si $g \in \Gamma_{G'}$, on a $g^{-1}\gamma_{i,m}g = h \in \mathsf{Ker}(\chi) \cap \Gamma_{G'}$ d'où $U_{\gamma_{i,m}}\gamma_{i,m}(U_g) = U_g g(U_h)$ et donc $\gamma_{i,m}(U_g) = U^{-1}_{\gamma_{i,m}} U_g g(U_h)$. Soit W_g le sous-$\Lambda^{(i)}_{m,G'}$-module de $\widetilde{\Lambda}^{H'}$ engendré par les coefficients de U_g, il est de type fini, et stable par $\gamma_{i,m}$ car $U_{\gamma_{i,m}}, U_h \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(i)}_{m,G'}\right)$ et $\Lambda^{(i)}_{m,G'}$ est stable par $\Gamma_{G'}$. On en déduit comme précédement que $W_g \subset \Lambda^{(i)}_{\infty,G'}$: quitte à augmenter m, on peut supposer $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(i)}_{m,G'}\right)$ et donc $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$. En faisant ce qui précède pour une famille *finie* de générateurs topologiques de $\Gamma_{G'}$, on se ramène à $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq i)}_{m,G'}\right)$ pour tout $g \in \Gamma_{G'}$.

DEUXIÈME CAS : $i = 0$. On a $U_{\gamma_{0,m}} \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$ et $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(\geq 1)}_{m,G'}\right)$ pour tout $g \in G/H'$. Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$ et $\alpha \in \mathbf{Z}_p$, posons $M_j(\alpha) = \left(1 - \tau^{(0)}_{m,G'}\right)\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right)$, c'est une matrice à coefficients dans $X^{(0)}_{m,G'} \cap \Lambda^{(\geq 1)}_{m,G'}$ (car $\Lambda^{(\geq 1)}_{m,G'}$ est stable par $\tau^{(0)}_{m,G'}$ en vertu du lemme 2.5). Par ailleurs, d'après la condition (TS2) (b), l'application $\alpha \mapsto M_j(\alpha)$ est continue. Montrons que quitte à augmenter m, on a $M_j(1) = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Comme U est continu, on peut supposer, quitte à augmenter m, que $v\left(\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}} - 1\right)\right) \geq v(p) + 2c_2$ pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}_p$. D'après la propriété (TS2) (b), on a alors $v\left(M_j(\alpha)\right) \geq v(p) + c_2$ et $v\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right) - 1\right) \geq v(p) + c_2$.

Lemme 2.12. — *Sous les conditions qui précèdent, on a*

(i) $v\left(M_j(\alpha+\beta) - M_j(\alpha) - M_j(\beta)\right) \geq \min\left(v(M_j(\alpha)), v(M_j(\beta))\right) + \min(v(p), c_4)$;

(ii) $v\left(M_j(\alpha+\beta) - M_j(\alpha)\right) \geq \min\left(v(M_j(\alpha)) + v\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}} - 1\right), v(M_j(\beta))\right) - c_2$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_p$.

Démonstration. — Écrivons $\gamma^{\alpha+\beta}_{j,m} = \gamma^\alpha_{j,m}\gamma^\beta_{j,m}$: on a donc $U_{\gamma^{\alpha+\beta}_{j,m}} = U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\gamma^\alpha_{j,m}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)$. Comme $U_{\gamma^x_{j,m}} = \tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^x_{j,m}}\right) + M_j(x)$ pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, on a

$$\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^{\alpha+\beta}_{j,m}}\right) + M_j(\alpha+\beta) = \left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right) + M_j(\alpha)\right)\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right) + M_j(\beta)\right).$$

Commençons par remarquer que puisque $\tau^{(1)}_{m,G'} \circ \cdots \circ \tau^{(d)}_{m,G'}$ et $\tau^{(0)}_{m,G'} \circ \tau^{(1)}_{m,G'} \circ \cdots \circ \tau^{(d)}_{m,G'}$ commutent à l'action de G/H' (d'après (TS2) (d) et (d')), l'espace $X^{(0)}_{m,G'} \cap \Lambda^{(\geq 1)}_{m,G'} = \mathsf{Im}\left(\left(1 - \tau^{(0)}_{m,G'}\right) \circ \tau^{(1)}_{m,G'} \circ \cdots \circ \tau^{(d)}_{m,G'}\right)$ est stable par G/H'. En particulier, les matrices $\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)\right)$ et $\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))$ sont à coefficients dans $\Lambda_{m,G'}$ et $X^{(0)}_{m,G'} \cap \Lambda^{(\geq 1)}_{m,G'}$

respectivement. Ainsi le produit $\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right)\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)\right)$ est à coefficients dans $\Lambda_{m,G'}$, et les produits $M_j(\alpha)\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)\right)$ et $\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right)\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))$ sont à coefficients dans $X^{(0)}_{m,G'}\cap\Lambda^{(\geq 1)}_{m,G'}$. On a donc

$$(1)\quad M_j(\alpha+\beta)=M_j(\alpha)\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)\right)+\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right)\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))+ \\ +\left(1-\tau^{(0)}_{m,G'}\right)\left(M_j(\alpha)\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))\right).$$

• Montrons l'inégalité (i). D'après (1), on a

$$M_j(\alpha+\beta)-M_j(\alpha)-M_j(\beta)= \\ M_j(\alpha)\left(\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)\right)-1\right)+\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right)-1\right)\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))+ \\ +\left(\gamma^\alpha_{j,m}-1\right)(M_j(\beta))+\left(1-\tau^{(0)}_{m,G'}\right)\left(M_j(\alpha)\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))\right).$$

Minorons la « valuation » de chacun des termes du membre de droite. On a déjà

$$\begin{cases} v\left(M_j(\alpha)\left(\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)\right)-1\right)\right)\geq \\ \quad\geq v(M_j(\alpha))+v\left(\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)\right)-1\right)\geq v(M_j(\alpha))+v(p) \\ v\left(\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right)-1\right)\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))\right)\geq \\ \quad\geq v\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\right)-1\right)+v\left(\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))\right)\geq v(M_j(\beta))+v(p) \end{cases}$$

car $v\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^x_{j,m}}\right)-1\right)\geq v(p)+c_2>v(p)$ pour tout $x\in\mathbf{Z}_p$ par hypothèse.

Par ailleurs, comme $M_j(\beta)$ est à coefficients dans $\Lambda^{(j)}_{m,G'}$, on a $v\left(\left(\gamma^\alpha_{j,m}-1\right)(M_j(\beta))\right)\geq v(M_j(\beta))+c_4$ en vertu de (TS3) (b). Enfin, on a

$$v\left(\left(1-\tau^{(0)}_{m,G'}\right)\left(M_j(\alpha)\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))\right)\right)\geq v(M_j(\alpha))+v(M_j(\beta))-c_2 \\ \geq v(M_j(\alpha))+v(p)$$

en vertu de (TS2) (b) et parce que $v(M_j(x))\geq v(p)+c_2$ pour tout $x\in\mathbf{Z}_p$ par hypothèse. On a bien

$$v\big(M_j(\alpha+\beta)-M_j(\alpha)-M_j(\beta)\big)\geq\min\big(v(M_j(\alpha))+v(p),v(M_j(\beta)) \\ +v(p),v(M_j(\beta))+c_4,v(M_j(\alpha))+v(p)\big) \\ \geq\min\big(v(M_j(\alpha)),v(M_j(\beta))\big)+\min(v(p),c_4).$$

• Montrons l'inégalité (ii). D'après (1), on a

$$M_j(\alpha+\beta)-M_j(\alpha)=M_j(\alpha)\gamma^\alpha_{j,m}\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^\beta_{j,m}}\right)-1\right)+\left(1-\tau^{(0)}_{m,G'}\right)\left(U_{\gamma^\alpha_{j,m}}\gamma^\alpha_{j,m}(M_j(\beta))\right).$$

On a donc

$$v\left(M_j(\alpha+\beta)-M_j(\alpha)\right) \geq$$
$$\min\left(v(M_j(\alpha))+v\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^{\beta}_{j,m}}-1\right)\right), v\left(\left(1-\tau^{(0)}_{m,G'}\right)\left(U_{\gamma^{\alpha}_{j,m}}\gamma^{\alpha}_{j,m}(M_j(\beta))\right)\right)\right).$$

Comme $v\left(\tau^{(0)}_{m,G'}\left(U_{\gamma^{\beta}_{j,m}}-1\right)\right) \geq v\left(U_{\gamma^{\beta}_{j,m}}-1\right)-c_2$ et

$$v\left(\left(1-\tau^{(0)}_{m,G'}\right)\left(U_{\gamma^{\alpha}_{j,m}}\gamma^{\alpha}_{j,m}(M_j(\beta))\right)\right) \geq v\left(U_{\gamma^{\alpha}_{j,m}}\gamma^{\alpha}_{j,m}(M_j(\beta))\right)-c_2$$

en vertu de (TS2) (b), et comme $v\left(U_{\gamma^{\alpha}_{j,m}}\right) \geq 0$ vu que $v\left(\left(U_{\gamma^{\alpha}_{j,m}}-1\right)\right) \geq v(p)+2c_2 > 0$ (par hypothèse), on a bien

$$v\left(M_j(\alpha+\beta)-M_j(\alpha)\right) \geq \min\left(v(M_j(\alpha))+v\left(U_{\gamma^{\beta}_{j,m}}-1\right), v(M_j(\beta))\right)-c_2. \quad \square$$

Lemme 2.13. — *Sous les conditions qui précèdent, on a*

$$v(M_j(\alpha\beta)) \geq v(M_j(\alpha))+v_p(\beta)\min(v(p),c_4)$$

pour tout $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}_p$. En particulier, on a toujours $v(M_j(\alpha\beta)) \geq v(M_j(\alpha))$.

Démonstration. — Commençons par montrer que pour tout $\beta \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $v\left(M_j(\alpha\beta)-M_j(\alpha)\beta\right) \geq v\left(M_j(\alpha)\right)+\min(v(p),c_4)$. On procède par récurrence sur β (l'énoncé étant trivial lorsque $\beta=1$). Supposons $\beta>1$. D'après le lemme 2.12 (i), on a

$$v\left(M_j(\alpha\beta)-M_j(\alpha)\beta\right) \geq \min\left(v(M_j((\beta-1)\alpha)), v(M_j(\alpha))\right)+\min(v(p),c_4)$$

Mais par hypothèse de récurrence, on a $v\left(M_j(\alpha(\beta-1))-M_j(\alpha)(\beta-1)\right) \geq v\left(M_j(\alpha)\right)+\min(v(p),c_4)$, et donc $v(M_j(\alpha(\beta-1))) \geq v\left(M_j(\alpha)\right)$. On a bien $v\left(M_j(\alpha\beta)-M_j(\alpha)\beta\right) \geq v\left(M_j(\alpha)\right)+\min(v(p),c_4)$.

On en déduit déjà que $v(M_j(\alpha\beta)) \geq v(M_j(\alpha))$ pour tout $\beta \in \mathbf{N}_{>0}$, inégalité qui reste vraie pour tout $\beta \in \mathbf{Z}_p$ par continuité. Dans le cas $\beta=p$, on a $v\left(M_j(p\alpha)-pM_j(\alpha)\right) \geq v(M_j(\alpha))+\min(v(p),c_4)$ et donc $v(M_j(p\alpha)) \geq v(M_j(\alpha))+\min(v(p),c_4)$. Une récurrence immédiate donne alors $v(M_j(p^r\alpha)) \geq v(M_j(\alpha))+r\min(v(p),c_4)$ pour tout $r \in \mathbf{N}$. Si $\beta \in \mathbf{Z}_p\setminus\{0\}$, on a $\beta=p^{v_p(\beta)}\beta'$ avec $\beta' \in \mathbf{Z}_p^{\times}$. On a alors

$$v(M_j(\alpha\beta)) = v\left(M_j\left(p^{v_p(\beta)}\alpha\beta'\right)\right) \geq v(M_j(\alpha\beta'))+v_p(\beta)\min(v(p),c_4)$$
$$\geq v(M_j(\alpha))+v_p(\beta)\min(v(p),c_4). \quad \square$$

Lemme 2.14. — *Sous les conditions qui précèdent, on a*

$$v\left(M_j(\alpha+\beta)-M_j(\alpha)\right) \geq v(M_j(1))+\min\left(v\left(U_{\gamma^{\beta}_{j,m}}-1\right), v_p(\beta)\min(v(p),c_4)\right)-c_2$$

pour tout $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}_p$.

Démonstration. — D'après le lemme 2.13 avec $\alpha = 1$, on a $v(M_j(\beta)) \geq v(M_j(1)) + v_p(\beta)\min(v(p), c_4)$. Par ailleurs, on a

$$v\left(M_j(\alpha+\beta) - M_j(\alpha)\right) \geq \min\left(v(M_j(\alpha)) + v\left(U_{\gamma_{j,m}^{\beta}} - 1\right), v(M_j(\beta))\right) - c_2$$

d'après le lemme 2.12 (ii). Comme $v(M_j(\alpha)) \geq v(M_j(1))$ d'après le lemme 2.13, on a bien

$$v\left(M_j(\alpha+\beta) - M_j(\alpha)\right) \geq v(M_j(1)) + \min\left(v\left(U_{\gamma_{j,m}^{\beta}} - 1\right), v_p(\beta)\min(v(p), c_4)\right) - c_2.$$

□

Le cocycle U étant continu, on peut supposer (quitte à augmenter m) que $v\left(U_{\gamma_{0,m}}\right) \geq 0$. Comme $\gamma_{0,m}\gamma_{j,m} = \gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})}\gamma_{0,m}$, on a $U_{\gamma_{0,m}}\gamma_{0,m}\left(U_{\gamma_{j,m}}\right) = U_{\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})}}\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})}\left(U_{\gamma_{0,m}}\right)$. L'anneau $\Lambda_{m,G'}$ étant stable par G/H', les matrices $U_{\gamma_{0,m}}$ et $\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})}\left(U_{\gamma_{0,m}}\right)$ sont à coefficients dans $\Lambda_{m,G'}$: en appliquant $1 - \tau_{m,G'}^{(0)}$ on a donc

$$U_{\gamma_{0,m}}\gamma_{0,m}(M_j(1)) = M_j\left(\chi(\gamma_{0,m})\right)\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})}\left(U_{\gamma_{0,m}}\right)$$

car $\gamma_{0,m}$ commute à $\tau_{m,G'}^{(0)}$, et donc

$$\gamma_{0,m}(M_j(1)) = \left(1 - U_{\gamma_{0,m}}\right)\gamma_{0,m}(M_j(1)) + M_j\left(\chi(\gamma_{0,m})\right)\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})}\left(U_{\gamma_{0,m}}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\left(\gamma_{0,m} - 1\right)\left(M_j(1)\right) = {} & \left(1 - U_{\gamma_{0,m}}\right)\gamma_{0,m}(M_j(1)) + \\ & + \left(M_j\left(\chi(\gamma_{0,m})\right) - M_j(1)\right)\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})}\left(U_{\gamma_{0,m}}\right) + M_j(1)\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})}\left(U_{\gamma_{0,m}} - 1\right).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}v\left(\left(\gamma_{0,m} - 1\right)\left(M_j(1)\right)\right) \geq & \\ \min\left(v(M_j(1)) + v\left(1 - U_{\gamma_{0,m}}\right), v\left(M_j\left(\chi(\gamma_{0,m})\right) - M_j(1)\right) + v\left(U_{\gamma_{0,m}}\right)\right)\end{aligned}$$

car G agit par isométries. Par ailleurs, on a $v\left(\left(\gamma_{0,m} - 1\right)\left(M_j(1)\right)\right) \leq v(M_j(1)) + c_3$ en vertu de (TS3) (a) (car $M_j(1)$ est à coefficients dans $X_{m,G'}^{(0)}$), et $v\left(U_{\gamma_{0,m}}\right) \geq 0$ par hypothèse. On a donc

$$(2) \qquad v(M_j(1)) \geq \min\left(v(M_j(1)) + v\left(1 - U_{\gamma_{0,m}}\right), v\left(M_j\left(\chi(\gamma_{0,m})\right) - M_j(1)\right)\right) - c_3.$$

D'après le lemme 2.14 avec $\alpha = 1$ et $\beta = \chi(\gamma_{0,m}) - 1$, on a

$$\begin{aligned}v\left(M_j(\chi(\gamma_{0,m})) - M_j(1)\right) \geq & \\ v(M_j(1)) + \min\left(v\left(U_{\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})-1}} - 1\right), v_p(\chi(\gamma_{0,m}) - 1)\min(v(p), c_4)\right) - c_2.\end{aligned}$$

On a $\lim_{m\to\infty} \chi(\gamma_{0,m}) = 1$: comme U est continu, on peut supposer (quitte à augmenter m) que

$$\min\left(v\left(U_{\gamma_{j,m}^{\chi(\gamma_{0,m})-1}}-1\right), v_p(\chi(\gamma_{0,m})-1)\min(v(p),c_4)\right) \geq c_3+c_2+1.$$

On a alors $v\left(M_j(\chi(\gamma_{0,m}))-M_j(1)\right) \geq v(M_j(1))+c_3+1$ (rappelons que $\min(v(p),c_4) > 0$). De même, par continuité, on peut supposer que $v\left(1-U_{\gamma_{0,m}}\right) \geq c_3+1$. L'inégalité (2) donne alors $v(M_j(1)) \geq v(M_j(1))+1$ et donc $M_j(1)=0$, ce qu'on voulait.

Remarque 2.15. — Les lemmes 2.12, 2.13 et 2.14 servent à montrer que pour m assez grand, on a l'inégalité $v\left(M_j(\chi(\gamma_{0,m}))-M_j(1)\right) \geq v(M_j(1))+c_3+1$. En effet, comme la fonction $\alpha \mapsto M_j(\alpha)$ dépend de m, on ne peut pas conclure que $\lim_{m\to\infty} v\left(M_j(\chi(\gamma_{0,m}))-M_j(1)\right) = \infty$ en utilisant un simple argument de continuité (vu que l'application $\alpha \mapsto M_j(\alpha)$ est continue *à m fixé*).

Fin de la démonstration du lemme 2.11. D'après ce qui précède, quitte à augmenter m un nombre fini de fois, on peut supposer que $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda^{(0)}_{m,G'}\right)$ et donc $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$ pour tout $g \in p^m \mathsf{Ker}(\chi)\cap\Gamma_{G'}$.

Soit $g \in \mathsf{Ker}(\chi)\cap\Gamma_{G'}$. On a $\gamma_{0,m'}g = g^{\chi(\gamma_{0,m'})}\gamma_{0,m'}$ et donc

$$U_{\gamma_{0,m'}\gamma_{0,m'}(U_g)} = U_g g\left(U_{g^{\chi(\gamma_{0,m'})-1}}\right) g^{\chi(\gamma_{0,m'})}\left(U_{\gamma_{0,m'}}\right).$$

Comme $\lim_{m'\to\infty} \chi(\gamma_{0,m'}) - 1 = 0$, on a $g^{\chi(\gamma_{0,m'})-1} \in p^m \mathsf{Ker}(\chi)\cap\Gamma_{G'}$ et donc $U_{g^{\chi(\gamma_{0,m'})-1}} \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$ pour $m' \geq m$ assez grand : quitte à remplacer m par m', on peut supposer $U_{g^{\chi(\gamma_{0,m})-1}} \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$. Les matrices $U^{-1}_{\gamma_{0,m}}$ et $g\left(U_{g^{\chi(\gamma_{0,m})-1}}\right) g^{\chi(\gamma_{0,m})}\left(U_{\gamma_{0,m}}\right)$ sont alors à coefficients dans $\Lambda_{m,G'}$ (rappelons que ce dernier est stable par G/H'). Si W_g désigne le sous $\Lambda^{(0)}_{m,G'}$-module de $\widetilde{\Lambda}^{H'}$ engendré par les coefficients de U_g, alors W_g est de type fini et stable par $\gamma_{0,m}$: d'après la proposition 2.6, on a $W_g \subset \Lambda^{(0)}_{\infty,G'}$. Quitte à augmenter m, on peut donc supposer $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$. En faisant ce qui précède pour une famille finie de générateurs topologiques de $\mathsf{Ker}(\chi)\cap\Gamma_{G'}$, on trouve $m \in \mathbf{N}$ tel que $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$ pour tout $g \in \mathsf{Ker}(\chi)\cap\Gamma_{G'}$.

Soit $g \in \Gamma_{G'}$. Comme $\mathsf{Im}(\chi)$ est commutatif, il existe $h \in \mathsf{Ker}(\chi)\cap\Gamma_{G'}$ tel que $\gamma_{0,m}g\gamma^{-1}_{0,m} = gh$. On a alors $U_{\gamma_{0,m}\gamma_{0,m}(U_g)} = U_g g\left(U_{h\gamma_{0,m}}\right)$. D'après ce qui précède, les matrices $U_{\gamma_{0,m}}$ et $U_{h\gamma_{0,m}} = U_h h\left(U_{\gamma_{0,m}}\right)$ sont à coefficients dans $\Lambda_{m,G'}$. On en déduit comme précédemment que U_g est en fait à coefficients dans $\Lambda^{(0)}_{\infty,G'}$ et donc que quitte à augmenter m, on peut supposer $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$. En faisant ce qui précède pour une famille *finie* de générateurs topologiques de $\Gamma_{G'}$, on se ramène à $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}\right)$ pour tout $g \in \Gamma_{G'}$, et on a fini. □

Fin de la démonstration du lemme 2.9. — D'après les lemmes 2.10 et 2.11, il existe $m \geq m_0(G')$ tel que $U_h \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}^{(\geq i)}\right)$ pour tout $h \in \Gamma_{G'}$. Soit $g \in G/H'$, on a $g^{-1}\gamma_{i,m}g = h \in \Gamma_{G'}$ car $\Gamma_{G'}$ est distingué dans G/H' (vu que G' l'est dans G), d'où $\gamma_{i,m}(U_g) = U_{\gamma_{i,m}}^{-1} U_g g(U_h)$. Soit W_g le sous-$\Lambda_{m,G'}^{(i)}$-module de $\widetilde{\Lambda}^{H'}$ engendré par les coefficients de U_g, il est de type fini, et stable par $\gamma_{i,m}$ car $U_{\gamma_{i,m}}, U_h \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}^{(\geq i)}\right)$ et $\Lambda_{m,G'}^{(\geq i)}$ est stable par G/H'. On en déduit (proposition 2.6) que $W_g \subset \Lambda_{\infty,G'}^{(i)}$: quitte à augmenter m, on peut supposer $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}^{(i)}\right)$ et donc $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}^{(\geq i)}\right)$. En faisant ce qui précède pour une famille *finie* de générateurs topologiques de G/H', on trouve $m \geq m_0(G')$ tel que $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{m,G'}^{(\geq i)}\right)$ pour tout $g \in G/H'$, et on a fini. □

Démonstration du théorème 2.4. — L'injectivité de ι est l'objet du lemme 2.7. Sa surjectivité résulte de l'application du lemme 2.9 à $i = d, d-1, \ldots, 0$, qui implique que chaque flèche dans le composé

$$\mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{\infty,G'}\right)\right) \to \cdots \to \mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{\infty,G'}^{(\geq i)}\right)\right) \to \cdots \to \mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H'}\right)\right)$$

est surjective. □

Théorème 2.16. — *On a*

$$\mathrm{H}^1\left(G, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\substack{G' \trianglelefteqslant G \\ \text{ouvert}}} \mathrm{H}^1\left(G/(H \cap G'), \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{\infty,G'}\right)\right).$$

Plus précisément, si $\widetilde{W}$ est un $\widetilde{\Lambda}$-module libre de rang n, muni d'une action semi-linéaire continue de G, alors il existe un sous-groupe ouvert distingué $G' \subseteq G$, un entier $m \geq m_0(G')$ et un sous-$\Lambda_{m,G'}$-module $W_\infty \subseteq \widetilde{W}$ libre de rang n, muni d'une action semi-linéaire continue de $G/(H \cap G')$ tels que l'application naturelle

$$\widetilde{\Lambda} \otimes_{\Lambda_{m,G'}} W_\infty \xrightarrow{\sim} \widetilde{W}$$

est un isomorphisme de G-modules.

Démonstration. — C'est la conjonction du corollaire 2.3 et du théorème 2.4. □

3. La théorie de Sen pour $R[p^{-1}]$

On applique les techniques de la section 2 pour prouver le résultat suivant.

Théorème 3.1. — *Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, l'application*

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right)$$

déduite de l'inclusion $S_\infty \subset \widehat{\overline{R}}$ est bijective (la limite inductive étant prise sur les sous-R_∞-algèbres normales S_∞ de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie sur $R_\infty[p^{-1}]$ et galoisienne sur $R[p^{-1}]$).

On applique le théorème 2.16. Il suffit pour cela de montrer que les conditions de Tate-Sen sont remplies pour $\widetilde{\Lambda} = \widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$ muni de l'application v, $G = \mathcal{G}_R$, $H = \mathcal{H}_R$, ainsi que l'égalité $\Lambda_{\infty,G'} = S_\infty[p^{-1}]$ pour $G' = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S[p^{-1}]\right)$ où $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est une sous-extension finie étale galoisienne de $\overline{R}[p^{-1}]$. Remarquons que $\Gamma = \Gamma_R$ satisfait les hypothèses de la section 2.

Soit S une sous-R-algèbre finie et normale de $\overline{R}$ (l'extension $R[p^{-1}] \subset S[p^{-1}]$ est étale). Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on note S_n le normalisé de $S.\widetilde{R}_n$ dans $\overline{R}$ et $S_\infty = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n$. Soit M_n (resp. L_n) le corps des fractions de S_n (resp. de $\widetilde{R}_n$). On dispose de la trace $\mathrm{Tr}_{M_n/L_n} : M_n \to L_n$. Comme $\widetilde{R}_n$ est normal et S_n entier sur $\widetilde{R}_n$, l'application Tr_{M_n/L_n} envoie S_n dans $\widetilde{R}_n$. Comme $\widetilde{R}_n[p^{-1}] \subseteq S_n[p^{-1}]$ est étale, il existe un unique idempotent $\mathfrak{e}_{S_n/\widetilde{R}_n} = \mathfrak{e}_n \in \left(S_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S_n\right)[p^{-1}]$ caractérisé par $m_n(x) = \left(\mathrm{Tr}_{M_n/L_n} \otimes \mathrm{Id}\right)(\mathfrak{e}_n.x)$ pour tout $x \in \left(S_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S_n\right)[p^{-1}]$, où $m_n : M_n \otimes_{L_n} M_n \to M_n$ est la multiplication.

Dans [**3**], le théorème de pureté de Faltings ([**14**, Theorem 3.1], [**15**, Theorem 4]) est raffiné de la façon suivante :

Théorème 3.2. — (Refined almost étaleness, [**3**, Theorems 5.1 & 5.11]). *Il existe un entier ℓ (qui ne dépend que de S) tel que $p^{\ell p^{-n}}\mathfrak{e}_n \in S_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Corollaire 3.3. — *Soient $S \subseteq S'$ deux sous-$\widetilde{R}$-algèbres finies normales de $\overline{R}$ (les extensions $\widetilde{R}[p^{-1}] \subseteq S[p^{-1}] \subseteq S'[p^{-1}]$ sont étales). Avec les notations qui précèdent, il existe un entier δ (qui ne dépend que de S et S') tel que $S_n/\mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ est tué par $p^{\delta p^{-n}}$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Soit S'' le normalisé de S' dans une clôture galoisienne de $S'[p^{-1}]$. Comme pour $n \in \mathbf{N}$ on a (avec des notations évidentes), $\mathrm{Tr}_{M''_n/M_n}(S''_n) \subseteq \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ on a une surjection $S_n/\mathrm{Tr}_{M''_n/M_n}(S''_n) \twoheadrightarrow S_n/\mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ et quitte à remplaçer S' par S'', on peut supposer que $S'[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]$ est galoisienne.

D'après le théorème 3.2, on a $p^{\ell p^{-n}}\mathfrak{e}_{S'/\widetilde{R},n} \in S'_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S'_n$ où ℓ est un entier indépendant de $n \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, l'idempotent $\mathfrak{e}_n = \mathfrak{e}_{S'/S,n} \in \left(S'_n \otimes_{S_n} S'_n\right)[p^{-1}]$ est l'image de $\mathfrak{e}_{S'/\widetilde{R},n}$ par l'homomorphisme surjectif $\left(S'_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S'_n\right)[p^{-1}] \twoheadrightarrow \left(S'_n \otimes_{S_n} S'_n\right)[p^{-1}]$. En effet, ces idempotents correspondent au facteur associé à l'identité de $\mathsf{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]\right)$ et de $\mathsf{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/\widetilde{R}_n[p^{-1}]\right)$ respectivement et l'homomorphisme n'est autre que la projection associée à l'inclusion $\mathsf{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]\right) \subseteq \mathsf{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/\widetilde{R}_n[p^{-1}]\right)$. On a donc aussi $p^{\ell p^{-n}}\mathfrak{e}_n \in S'_n \otimes_{S_n} S'_n$.

Écrivons $p^{\ell p^{-n}}\mathfrak{e}_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \otimes \mu_i$ avec $\lambda_i, \mu_i \in S'_n$. On a alors $p^{\ell p^{-n}} = m_n\big(p^{\ell p^{-n}} \otimes 1\big) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i)\mu_i$. En prenant la norme de cette égalité on voit que $p^{\ell p^{-n}[M'_n:M_n]}$ est la somme des $\prod_{i=1}^{r} \prod_{g\in G_i} g\big(\mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i)\mu_i\big)$, indexée par les partitions $G_1 \coprod \cdots \coprod G_r = \mathsf{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]\right)$. En regroupant les termes pour lesquels on a $\mathrm{Card}(G_i) = n_i$ avec $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{N}^r$ fixé, $p^{\ell p^{-n}[M'_n:M_n]}$ peut s'écrire comme une somme d'éléments de la forme $a_{\underline{n}} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i)^{n_i}$ où $a_{\underline{n}} \in S'_n$ est invariant sous $\mathsf{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]\right)$, donc dans S_n vu que ce dernier est normal. On a donc $p^{\ell p^{-n}[M'_n:M_n]} \in \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$. La suite $([M'_n : M_n])_{n\geq N}$ étant bornée, il suffit de prendre $\delta = \ell \max_{n\geq N}([M'_n : M_n])$. □

Remarquons que si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que l'extension $R_\infty[p^{-1}] \subseteq S_\infty[p^{-1}]$ est finie, alors il existe une sous-R-algèbre finie et normale S de $\overline{R}$ telle que S_∞ est la normalisation de $S.\widetilde{R}_\infty$.

Proposition 3.4. — *La propriété (TS1) est vérifiée.*

Démonstration. — Il s'agit de voir qu'il existe c_1 tel que pour tous $H_1 \subseteq H_2$ sous-groupes ouverts distingués de $\mathcal{H}_R$, il existe $\alpha \in \left(p^{-c_1}\widehat{\overline{R}}\right)^{H_1}$ tel que $\sum_{\tau\in H_2/H_1} \tau(\alpha) = 1$. Montrons que $c_1 = 1$ convient.

Les sous-groupes H_1 et H_2 correspondent à des extensions finies étales galoisiennes $S'_\infty[p^{-1}]$ et $S_\infty[p^{-1}]$ de $\widetilde{R}_\infty[p^{-1}]$ dans $\overline{R}[p^{-1}]$. Pour $N \in \mathbf{N}$ assez grand, elles proviennent de sous-extensions $\widetilde{R}_N \subseteq S_N \subseteq S'_N$ finies normales de $\overline{R}[p^{-1}]$ (donc $\widetilde{R}_N[p^{-1}] \subseteq S_N[p^{-1}] \subseteq S'_N[p^{-1}]$ sont étales). D'après le corollaire 3.3, il existe un entier δ indépendant de n tel que $p^{-\delta p^{-n}} \in \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n/S_n)$ pour $n \geq N$: pour n assez grand, on a donc $p \in \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n/S_n)$ et il existe $x \in S'_\infty \subset \widehat{\overline{R}}^{H_1}$ tel que $\sum_{\tau\in H_2/H_1} \tau(x) = p$. On peut prendre $\alpha = \frac{x}{p}$. □

Remarque 3.5. — En fait, n'importe quel $c_1 > 0$ convient.

Proposition 3.6. — *On a*

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right),$$

où la limite inductive est prise sur les sous-R_∞-algèbres normales S_∞ de $\overline{R}$ telles que l'extension $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie galoisienne.

Démonstration. — D'après la proposition 3.4 et le corollaire 2.3, on a

$$\varinjlim_{\substack{H_0 \trianglelefteqslant \mathcal{H}_R \\ \text{ouvert}}} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R/H_0, \mathsf{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}^{H_0}[p^{-1}]\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right).$$

Si H_0 est un sous-groupe ouvert distingué de $\mathcal{H}_R$, notons S_∞ le normalisé de R_∞ dans $\left(\overline{R}[p^{-1}]\right)^{H_0}$. L'extension $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est donc finie étale galoisienne. On a $\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{H_0} = \widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ (*cf.* [**14**, I.4 (c)]). □

Passons à la propriété (TS2).

Soit G' un sous-groupe ouvert distingué de G. Notons S le normalisé de R dans $\left(\overline{R}[p^{-1}]\right)^{G'}$. L'extension $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne et $G' = \mathcal{G}_S = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S[p^{-1}]\right)$. On a alors $H' = H \cap G' = \mathcal{H}_S = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S_\infty[p^{-1}]\right)$ et $\Gamma_S = \mathcal{G}_S/\mathcal{H}_S$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_R.

Rappelons tout d'abord que $\widetilde{\Lambda}^{H'} = \left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{\mathcal{H}_S} = \widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ (*cf.* [**14**, I.4 (c)]).

Commençons par construire les anneaux $\Lambda^{(i)}_{m,S} := \Lambda^{(i)}_{m,G'}$ et les applications $\tau^{(i)}_{m,S} := \tau^{(i)}_{m,G'}$. Fixons $m_0(S) = m_0(G') \in \mathbf{N}$ tel que pour $m \geq m_0(S)$, $S_{m+1}[p^{-1}]$ est un $S_m[p^{-1}]$-module libre de rang p^{d+1} (il suffit de choisir $m_0(S)$ assez grand tel que $p^{m_0(S)} \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{Z}_p\, \gamma_i \subseteq \widetilde{\Gamma}_S$).

Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose $S'^{(i)}_n = S\left[T^{(n)}_1, \ldots, T^{(n)}_{i-1}, T^{(n)}_{i+1}, \ldots, T^{(n)}_d\right].V_n$ et $S'^{(i)}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S'^{(i)}_n$. On rappelle que $S'_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S'_n$ avec $S'_n = S\left[T^{(n)}_1, \ldots, T^{(n)}_d\right]$. Pour $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $m \in \mathbf{N}$, on pose alors

$$\Lambda^{(i)}_{m,S} = \begin{cases} \left(\widehat{S'_\infty}.V_m\right)[p^{-1}] & \text{si } i = 0, \\ \left(\widehat{S'^{(i)}_\infty}.S_m\right)[p^{-1}] & \text{si } i \in \{1, \ldots, d\} \end{cases}$$

(rappelons que les chapeaux désignent la complétion pour la topologie p-adique). On a bien sûr $\Lambda^{(i)}_{m,S} \subset \widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $m \in \mathbf{N}$. Comme S'_∞ et V_m (resp. $S'^{(i)}_\infty$ et S_m avec $i \in \{1, \ldots, d\}$) sont invariants sous $\gamma_0^{p^m}$ (resp. $\gamma_i^{p^m}$), il en est de même de $\Lambda^{(0)}_{m,S}$ (resp. de $\Lambda^{(i)}_{m,S}$) par continuité.

Pour $n \geq m \geq m_0$, et $x \in S_n[p^{-1}]$, on pose

$$\tau^{(i)}_{m,S}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{n-m}} \operatorname{Tr}_{S_n/S'_n.V_m}(x) & \text{si } i = 0, \\ \dfrac{1}{p^{n-m}} \operatorname{Tr}_{S_n/S'^{(i)}_n.S_m}(x) & \text{si } i \in \{1, \ldots, d\} \end{cases}$$

(c'est bien défini par normalité de $(S'_n.V_m)[p^{-1}]$ et $\left(S'^{(i)}_n.S_m\right)[p^{-1}]$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$). La normalisation fait que $\tau^{(i)}_{m,S}(x)$ ne dépend pas de l'entier n assez grand tel que $x \in S_n[p^{-1}]$. Ce qui précède définit donc des applications

$\tau^{(0)}_{m,S}\colon S_\infty[p^{-1}] \to (S'_\infty.V_m)[p^{-1}]$ et $\tau^{(i)}_{m,S}\colon S_\infty[p^{-1}] \to \left(S'^{(i)}_\infty.S_m\right)[p^{-1}]$ pour $i \in \{1,\dots,d\}$ et $m \geq m_0(S)$.

Lemme 3.7. — *Il existe une constante $a(S) \in \mathbf{N}$ telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, $i \in \{0,\dots,d\}$ et $x \in S_{m+1}[p^{-1}]$, on a $v\left(\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)\right) \geq v(x) + \frac{1}{p-1}(1-a(S)p^{-m})$.*

Démonstration. — Pour $i=0$, cela résulte du fait que l'extension cyclotomique K_∞/K est potentiellement régulière (*cf.* [**20**, 1.5 Proposition 1.11]) : la suite $(i_m)_{m\in\mathbf{N}}$ des nombres de ramification vérifie $i_m - i_{m-1} \equiv p^m e_K$ pour $m \gg 0$ (où e_K désigne l'indice de ramification absolu de K). Il existe donc une constante $a_0 \in \mathbf{N}$ telle que

$$i_m \geq \frac{e_K}{p-1}\left(p^m - a_0\right)$$

et donc $v\left(\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)\right) \geq v(x) + \frac{1}{p-1}\left(1-a_0p^{-m}\right)$ pour tout $x \in V_{m+1}$ (car la valuation normalisée de K_m est $p^m e_K v$), et *a fortiori* pour $x \in S_{m+1}[p^{-1}]$.

Soit $i \in \{1,\dots,d\}$. Quitte à augmenter $a(S)$, il suffit de le montrer pour m assez grand. On peut donc supposer que $S'^{(i)}_{m+1}.S_m = S'^{(i)}_{m+1} \otimes_{S'^{(i)}_m} S_m$. D'après [**3**, Corollary 3.10], on a

$$p^{\frac{c(S)}{p^m}} S_{m+1} \subseteq \bigoplus_{r=0}^{p-1} S'^{(i)}_{m+1} \otimes_{S'^{(i)}_m} S_m \left(T_i^{(m+1)}\right)^r \subseteq S_{m+1}$$

où $c(S)$ est une constante qui ne dépend que de S. Si $x \in S_{m+1}[p^{-1}]$, on peut donc écrire $x = \sum_{r=0}^{p-1} x_r \left(T_i^{(m+1)}\right)^r$ avec $x_r \in \left(S'^{(i)}_{m+1} \otimes_{S'^{(i)}_m} S_m\right)[p^{-1}]$ et $v(x_r) \geq v(x) - \frac{c(S)}{p^m}$ pour $0 \leq r < p$. On a alors

$$\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x) = \sum_{r=1}^{p-1} x_r \left(\left(\varepsilon^{(m+1)}\right)^{rp^m} - 1\right)\left(T_i^{(m+1)}\right)^r.$$

Comme $\left(\varepsilon^{(m+1)}\right)^{rp^m} - 1 = \left(\varepsilon^{(1)}\right)^r - 1 \in \left(\varepsilon^{(1)}-1\right)V_1 = p^{\frac{1}{p-1}}V_1$, on a $v\left(\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)\right) \geq v(x) + \frac{1}{p-1} - \frac{c(S)}{p^m}$ et *a fortiori* $v\left(\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)\right) \geq v(x) + \frac{1}{p-1}(1-a(S)p^{-m})$, où $a(S) = a_0 + (p-1)c(S)$. □

Lemme 3.8. — *Pour tout $m \geq m_0(S)$, $i \in \{0,\dots,d\}$ et $x \in S_{m+1}[p^{-1}]$, on a $v\left(\tau^{(i)}_{m,S}(x)\right) \geq v(x) - a(S)p^{-m}$ (où $a(S)$ est la constante du lemme 3.7).*

Démonstration. — On a $1+X+X^2+\cdots+X^{p-1} = (1-X)^{p-1} + pA(X)$ avec $A(X) \in \mathbf{Z}[X]$ et $A(1)=1$. Comme $p\tau^{(i)}_{m,S}(x) = \left(1+\gamma_i^{p^m}+\gamma_i^{2p^m}+\cdots+\gamma_i^{(p-1)p^m}\right)(x)$, on a $p\tau^{(i)}_{m,S}(x) = \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{p-1}(x) + pA\left(\gamma_i^{p^m}\right)(x)$. En appliquant le lemme 3.7 successivement à x, $\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x), \dots, \left(\gamma_i^{p^m}-1\right)^{p-2}(x)$, on a $v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{p-1}(x)\right) \geq v(x) + 1 - a(S)p^{-m}$. Comme par ailleurs $v\left(pA\left(\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) \geq v(x)+1$, on a $v\left(p\tau^{(i)}_{m,S}(x)\right) \geq v(x) + 1 - a(S)p^{-m}$ *i.e.* $v\left(\tau^{(i)}_{m,S}(x)\right) \geq v(x) - a(S)p^{-m}$. □

Soient $i \in \{0, \dots, d\}$, $m \geq m_0(S)$ et $x \in S_\infty[p^{-1}]$. Pour $n \in \mathbf{N}$ tels que $x \in S_n[p^{-1}]$ et $n \geq m$, on a $\tau_{m,S}^{(i)}(x) = \left(\tau_{m,S}^{(i)} \circ \tau_{m+1,S}^{(i)} \circ \cdots \circ \tau_{n-1,S}^{(i)}\right)(x)$ et donc $v\left(\tau_{m,S}^{(i)}(x)\right) \geq v(x) - \frac{a(S)p^{-m+1}}{p-1}$ par une application répétée du lemme 3.8. En particulier, l'application $\tau_{m,S}^{(i)}$ est continue (pour la topologie p-adique). On la prolonge par continuité à $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$, et on note encore $\tau_{m,S}^{(i)}$ le prolongement. Pour $i = 0$ (resp. $i \in \{1, \dots, d\}$), l'image de $\tau_{m,S}^{(i)}$ est incluse dans l'adhérence de $(S'_\infty.V_m)[p^{-1}]$ (resp. $\left(S_\infty^{\prime(i)}.S_m\right)[p^{-1}]$), c'est-à-dire dans $\Lambda_{m,S}^{(i)}$. On dispose donc d'applications

$$\tau_{m,S}^{(i)} \colon \widehat{S}_\infty[p^{-1}] \to \Lambda_{m,S}^{(i)}$$

pour $i \in \{0, \dots, d\}$ et $m \geq m_0(S)$.

Proposition 3.9. — *La propriété (TS2) est vérifiée.*

Démonstration. — (a) L'application $\tau_{m,S}^{(0)} \colon S_\infty[p^{-1}] \to (S'_\infty.V_m)[p^{-1}]$ (resp. $\tau_{m,S}^{(i)} \colon S_\infty[p^{-1}] \to \left(S_\infty^{\prime(i)}.S_m\right)[p^{-1}]$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$) est $(S'_\infty.V_m)[p^{-1}]$-linéaire (resp. $\left(S_\infty^{\prime(i)}.S_m\right)[p^{-1}]$-linéaire) par linéarité de l'application trace. Par continuité, l'application $\tau_{m,S}^{(i)}$ est $\Lambda_{m,S}^{(i)}$-linéaire pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$ et $m \geq m_0(S)$. Par ailleurs, comme $\tau_{m,S}^{(i)}(1) = 1$, on a $\tau_{m,S}^{(i)}(x) = x$ pour tout $x \in \Lambda_{m,S}^{(i)}$.

(b) La première moitié de la condition (TS2) (b) est vérifiée avec $c_2(S) = \frac{pa(S)}{p-1}$ d'après ce qui suit le lemme 3.8. Si $x \in S_\infty$, on a $x \in S_m$ et donc $\tau_{m,S}^{(i)}(x) = x$ pour m assez grand. Par continuité, on a donc $\lim\limits_{m \to \infty} \tau_{m,S}^{(i)}(x) = x$ pour tout $x \in \widehat{S}_\infty[p^{-1}]$.

(c) La condition (TS2) (c) résulte de la transitivité de la trace.

(d) Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. L'extension $\left(S_\infty^{\prime(i)}.S_m\right)[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne (elle contient les racines p^n-ièmes de l'unité) : elle est donc stable par $G/H' = \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Par continuité, il en est de même de $\Lambda_{m,S}^{(i)}$. De même, pour tout $n \geq m \geq m_0(S)$, l'extension $\left(S_n^{\prime(i)}.S_m\right)[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne : le sous-groupe $\mathsf{Gal}\left(S_n[p^{-1}]/\left(S_n^{\prime(i)}.S_m\right)[p^{-1}]\right)$ de $\mathsf{Gal}\left(S_n[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ est distingué. En particulier, si $g \in G/H'$, l'application $\gamma \mapsto g^{-1}\gamma g$ est un automorphisme de $\mathsf{Gal}\left(S_n[p^{-1}]/\left(S_n^{\prime(i)}.S_m\right)[p^{-1}]\right)$. On a donc $g \circ \tau_{m,S}^{(i)} = \tau_{m,S}^{(i)} \circ g$ sur $S_n[p^{-1}]$, donc sur $S_\infty[p^{-1}]$ et sur $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$.

(d′) L'extension $(S'_\infty.V_m)[p^{-1}]$ est stable par γ_0. Il en est donc de même de $\Lambda_{m,S}^{(0)}$ par continuité. Comme $\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}$ est commutatif, $\tau_{m,S}^{(0)}$ commute à γ_0. Reste à voir que $\tau_{m,S} := \tau_{m,S}^{(0)} \circ \tau_{m,S}^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_{m,S}^{(d)}$ commute à G/H'. Par continuité, il suffit de le vérifier sur $S_\infty[p^{-1}]$, et donc sur $S_n[p^{-1}]$ pour $n \geq m \geq m_0(S)$. Soient

$g \in G/H'$ et $x \in S_n[P^{-1}]$. Posons $y = \left(\tau_{m,S}^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_{m,S}^{(d)}\right)(x) \in S_m.V_n[p^{-1}]$. Comme $\tau_{m,S}^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_{m,S}^{(d)}$ commute à g d'après ce qui précède, on a $g(y) = \left(\tau_{m,S}^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_{m,S}^{(d)}\right)(g(x))$: il s'agit de vérifier que $g \circ \tau_{m,S}^{(0)} = \tau_{m,S}^{(0)} \circ g$ sur $S_m.V_n[p^{-1}]$, ce qui est immédiat. □

Remarque 3.10. — (1) La propriété (TS2) (c) résulte des propriétés (TS2) (d) et (d'). En effet, comme $\tau_{m,S}^{(i)}$ commute à γ_i, les applications $\tau_{m,S}^{(i)}$ et $\tau_{m',S}^{(i)}$ commutent, et si $i \neq j$, on a $i \neq 0$ (quitte à échanger i et j), et l'application $\tau_{m,S}^{(i)}$ commute à γ_j donc à $\tau_{m',S}^{(j)}$ pour tout $m, m' \geq m_0(S)$.

(2) L'opérateur $\tau_{m,S}^{(0)}$ ne commute pas à l'action de G/H', parce que l'extension $(S'_\infty.V_m)[p^{-1}]$ n'est pas galoisienne. Par exemple, si $m' > m \geq m_0(S)$, et $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a $\gamma_i \tau_{m,S}^{(0)}\left(T_i^{(m')}\right) = \varepsilon^{(m')} T_i^{(m')}$ et $\tau_{m,S}^{(0)}\left(\gamma_i\left(T_i^{(m')}\right)\right) = \tau_{m,S}^{(0)}\left(\varepsilon^{(m')} T_i^{(m')}\right) = 0$.

Proposition 3.11. — *La propriété (TS3) est vérifiée.*

Démonstration. — (a) Notons $X_{m,S}^{(i)} = \left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)$.

• Commençons par montrer que l'application $1 - \gamma_i^{p^m}$ est bijective sur $\left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$. Il suffit donc de montrer que pour $n \geq m$, l'application $1 - \gamma_i^{p^m}$ est bijective sur $\left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(S_n[p^{-1}]\right)$ qui n'est autre que le noyau de la trace $\mathrm{Tr}_{S_n/S'_n.V_m}$ si $i = 0$ et $\mathrm{Tr}_{S_n/S_n'^{(i)}.S_m}$ si $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Tout d'abord, l'application est injective parce que

$$\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(x) = 0 \Rightarrow x \in \begin{cases} S'_n.V_m[p^{-1}] & \text{si } i = 0 \\ S_n'^{(i)}.S_m[p^{-1}] & \text{si } i \in \{1, \ldots, d\} \end{cases}$$

et donc $x = \left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)(x) = 0$ (car $1 - \tau_{m,S}^{(i)}$ est le projecteur de $S_n[p^{-1}]$ orthogonal à $\tau_{m,S}^{(i)}$).

Cas $i = 0$: le sous-module $\left(1 - \tau_{m,S}^{(0)}\right)\left(S_n[p^{-1}]\right)$ est déduit par extension des scalaires du sous-module des éléments de trace nulle pour l'extension $V_n[p^{-1}]/V_m[p^{-1}]$ (en effet, S et V_n sont linéairement disjoints sur V_m car $m \geq m_0(S)$). Il est donc libre sur $(S'_n.V_m)[p^{-1}]$ et admet une base dans laquelle la matrice de $1 - \gamma_0^{p^m}$ est à coefficients dans $V_m[p^{-1}]$. Comme cette matrice est celle d'une application injective et est à coefficients dans le corps $V_m[p^{-1}]$, elle est inversible d'inverse à coefficients dans $V_m[p^{-1}] \subseteq (S'_n.V_m)[p^{-1}]$: l'application $1 - \gamma_0^{p^m}$ est donc bijective sur $\left(1 - \tau_{m,S}^{(0)}\right)\left(S_n[p^{-1}]\right)$.

Cas $i \in \{1, \ldots, d\}$: la famille $\left(\left(T_i^{(n)}\right)^r\right)_{0 \leq r < p^{n-m}}$ est une base de $S_n[p^{-1}]$ sur $\left(S_n'^{(i)}.S_m\right)[p^{-1}]$ (là encore, cela découle du fait que $S_n'^{(i)}$ et S_m sont linéairement

disjoints sur $S_m'^{(i)}$, vu que $m \geq m_0(S)$). Le polynôme minimal de $\left(T_i^{(n)}\right)^r$ sur $\left(S_n'^{(i)}.S_m\right)[p^{-1}]$ étant $X^{p^{n-m-v(r)}} - \left(T_i^{(m)}\right)^{r/p^{v(r)}}$, on a

$$\tau_{m,S}^{(i)}\left(\left(T_i^{(n)}\right)^r\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < r < p^{n-m}. \end{cases}$$

Le sous-module $\left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)(S_n)[p^{-1}]$ est donc libre sur $\left(S_n'^{(i)}.S_m\right)[p^{-1}]$ et admet $\left(\left(T_i^{(n)}\right)^r\right)_{0<r<p^{n-m}}$ comme base. Comme

$$\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)\left(\left(T_i^{(n)}\right)^r\right) = \left(1 - \left(\varepsilon^{(n)}\right)^{rp^m}\right)\left(T_i^{(n)}\right)^r = \left(1 - \left(\varepsilon^{(n-m)}\right)^r\right)\left(T_i^{(n)}\right)^r,$$

la matrice de l'application $1 - \gamma_i^{p^m}$ dans cette base est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les éléments $1 - \left(\varepsilon^{(n-m)}\right)^r$ pour $0 < r < p^{n-m}$. Comme ils sont tous non nuls, ils sont inversibles dans $V_{n-m}[p^{-1}] \subseteq \left(S_n'^{(i)}.S_m\right)[p^{-1}]$: l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est donc bijective sur $\left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)(S_n)[p^{-1}]$.

• Montrons maintenant qu'il existe une constante $c_3 = c_3(S) \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$, $m \geq m_0(S)$ et $x \in X_{m,S}^{(i)}$, on a $v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) \leq v(x) + c_3$.

D'après la condition (TS2) (b) (proposition 3.9), le sous-anneau $\bigcup_{m'=0}^{\infty} \Lambda_{m+m',S}^{(i)}$ est dense dans $\widehat{S}_\infty[p^{-1}] = \widetilde{\Lambda}^{H'}$: il suffit de traiter le cas $x \in \Lambda_{m+m',S}^{(i)}$ pour $m' \in \mathbf{N}$. On construit par récurrence une suite croissante $(\delta_{m'})_{m' \in \mathbf{N}}$ telle que pour $x \in \Lambda_{m+m',S}^{(i)}$, on a $v\left(\left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)(x)\right) \geq v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) - \delta_{m'}$. On prend $\delta_0 = 0$.

Soit $m' \geq 1$ et $x \in \Lambda_{m+m'+1,S}^{(i)}$. Posons

$$y = \left(1 + \gamma_i^{p^{m+m'}} + \cdots + \gamma_i^{(p-1)p^{m+m'}}\right)(x) = p\tau_{m+m',S}^{(i)}(x).$$

Par hypothèse de récurrence, on a $v\left(\left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(\frac{y}{p}\right)\right) \geq v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)\left(\frac{y}{p}\right)\right) - \delta_{m'}$. Comme $\tau_{m+m',S}^{(i)}$ commute à G/H', on a

$$\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)\left(\frac{y}{p}\right) = \left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)\left(\tau_{m+m',S}^{(i)}(x)\right) = \tau_{m+m',S}^{(i)}\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)$$

soit $v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)\left(\frac{y}{p}\right)\right) \geq v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) - \frac{a(S)p^{1-m-m'}}{p-1}$ d'après ce qui suit le lemme 3.8. Comme $\tau_{m,S}^{(i)}\left(\frac{y}{p}\right) = \tau_{m,S}^{(i)}(x)$, on a donc

$$v\left(\frac{y}{p} - \tau_{m,S}^{(i)}(x)\right) \geq v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) - \frac{a(S)p^{1-m-m'}}{p-1} - \delta_{m'}.$$

Par ailleurs, on a

$$\left(1-\gamma_i^{p^{m+m'}}\right)(x)=\left(1+\gamma_i^{p^m}+\cdots+\gamma_i^{(p^{m'}-1)p^m}\right)\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x),$$

on a donc $v(px-y)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)$. Ainsi, on a

$$v\left(\left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)(x)\right)=v\left(\left(x-\frac{y}{p}\right)+\left(\frac{y}{p}-\tau_{m,S}^{(i)}(x)\right)\right)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-\delta_{m'+1}$$

avec $\delta_{m'+1}=\max\left\{1,\delta_{m'}+\frac{a(S)p^{1-m-m'}}{p-1}\right\}$. On peut donc prendre $c_3(S)=1+\frac{p^2a(S)}{(p-1)^2}$. En effet, pour tout $m,m'\in\mathbf{N}$, on a $\delta_{m'}\leq 1+\frac{a(S)p^{2-m}}{(p-1)^2}\leq c_3(S)$.

Si $x\in X_{m,S}^{(i)}\cap\Lambda_{m+m',S}^{(i)}$, on a $\left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)(x)=x$ et $v\left(\left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)(x)\right)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-\delta_{m'}$ d'où $v(x)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-c_3$. Cette inégalité reste vraie pour $x\in X_{m,S}^{(i)}$ quelconque par continuité.

Il résulte de ce qui précède que $1-\gamma_i^{p^m}$ induit un automorphisme bicontinu de $\left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$. Mais $S_\infty[p^{-1}]$ est dense dans $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ et $1-\tau_{m,S}^{(i)}$ est continu : $\left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$ est dense dans $X_{m,S}^{(i)}$, et par continuité, $1-\gamma_i^{p^m}$ induit un automorphisme bicontinu de $X_{m,S}^{(i)}$.

(b) Comme les éléments de $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ sont invariants sous $\gamma_i^{p^m}$, la condition (TS3) (b) est vérifiée avec $c_4\in\mathbf{R}_{>0}$ quelconque. □

Lemme 3.12. — *Avec les notations de la section 2, on a* $\Lambda_{\infty,G'}=\Lambda_{\infty,S}=S_\infty[p^{-1}]$.

Démonstration. — Rappelons que $\Lambda_{\infty,S}=\bigcup_{m\geq m_0(S)}\Lambda_{m,S}$ avec $\Lambda_{m,S}=\bigcap_{i=0}^{d}\Lambda_{m,S}^{(i)}$. Il suffit donc de montrer que pour tout $m\geq m_0(S)$, on a $\Lambda_{m,S}=S_m[p^{-1}]$. Pour $i\in\{1,\ldots,d\}$ et $n\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$, posons $S_n'^{(\geq i)}=\bigcap_{j=i}^{d}S_n'^{(j)}$. Par définition, on a $\Lambda_{m,S}^{(d)}=\left(\widehat{S_\infty'^{(\geq d)}}.S_m\right)[p^{-1}]$. Supposons qu'on a un $i\in\{2,\ldots,d\}$ avec $\left(\tau_{m,S}^{(i)}\circ\tau_{m,S}^{(i+1)}\circ\cdots\circ\tau_{m,S}^{(d)}\right)\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)=\left(\widehat{S_\infty'^{(\geq i)}}.S_m\right)[p^{-1}]$. Le sous-espace $\left(S_\infty'^{(\geq i)}.S_m\right)[p^{-1}]$ est envoyé sur $\left(S_\infty'^{(\geq i-1)}.S_m\right)[p^{-1}]$ par $\tau_{m,S}^{(i-1)}$. Par continuité, on a donc $\tau_{m,S}^{(i-1)}\left(\left(\widehat{S_\infty'^{(\geq i)}}.S_m\right)[p^{-1}]\right)=\left(\widehat{S_\infty'^{(\geq i-1)}}.S_m\right)[p^{-1}]$ et donc

$$\left(\tau_{m,S}^{(i-1)}\circ\tau_{m,S}^{(i)}\circ\cdots\circ\tau_{m,S}^{(d)}\right)\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)=\left(\widehat{S_\infty'^{(\geq i-1)}}.S_m\right)[p^{-1}].$$

Une application répétée de ce qui précède montre donc que

$$\left(\tau_{m,S}^{(1)}\circ\tau_{m,S}^{(2)}\circ\cdots\circ\tau_{m,S}^{(d)}\right)\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)=\left(\widehat{S_\infty'^{(\geq 1)}}.S_m\right)[p^{-1}].$$

On a $S_\infty'^{(\geq 1)} = S.V_\infty$ et $\tau_{m,S}^{(0)}$ envoie $(V_\infty.S_m)\,[p^{-1}]$ sur $S_m[p^{-1}]$. Par continuité, on a donc

$$\tau_{m,S}^{(0)}\left(\left(\widehat{S_\infty'^{(\geq 1)}}.S_m\right)[p^{-1}]\right) = S_m[p^{-1}].$$

On a bien $\Lambda_{m,S}[p^{-1}] = \left(\tau_{m,S}^{(0)} \circ \tau_{m,S}^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_{m,S}^{(d)}\right)\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right) = S_m[p^{-1}]$. □

On en déduit le résultat suivant, dû à Faltings ([**14**, III Theorem 1.3]), mais par une méthode différente de *loc. cit.* (ici, on a suivi fidèlement la méthode de Tate).

Corollaire 3.13. — *On a* $\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{\mathcal{G}_S} = S[p^{-1}]$.

Démonstration. — D'après la condition (TS3) (a) (proposition 3.11), si $x \in X_{m,S}^{(i)}$, on a $v(x) \geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) - c_3(S)$. Si x est fixe sous $\gamma_i^{p^m}$, on a $v(x) = +\infty$ *i.e.* $x = 0$. Ainsi, $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ est l'ensemble des éléments de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ fixes par $\gamma_i^{p^m}$ et donc $\Lambda_{m,S}$ est l'ensemble des éléments de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ fixes par $\gamma_i^{p^m}$ pour $i \in \{0,\ldots,d\}$. On a donc $\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{\mathcal{G}_S} \subseteq S_\infty[p^{-1}]$ d'après le lemme 3.12, soit $\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{\mathcal{G}_S} = \left(S_\infty[p^{-1}]\right)^{\Gamma_S} = S[p^{-1}]$. □

Démonstration du théorème 3.1. — En vertu des propositions 3.4, 3.9 et 3.11, l'anneau $\widetilde{\Lambda} = \widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$ muni de l'application v, de l'action de $G = \mathcal{G}_R$ vérifie les propriétés (TS1), (TS2) et (TS3) avec $H = \mathcal{H}_R$, et pour tout sous-groupe ouvert distingué $G' = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S[p^{-1}]\right)$ de G, tout $i \in \{0,\ldots,d\}$ et tout $m \geq m_0(S)$, les anneaux $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ et les applications $\tau_{m,s}^{(i)}$ construites après la proposition 3.6. Il suffit donc d'appliquer le théorème 2.16, en utilisant le fait que $\Lambda_{\infty,G'} = S_\infty[p^{-1}]$ en vertu du lemme 3.12. □

Corollaire 3.14. — *Soit W un $\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$-module libre de rang n, muni d'une action semi-linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$. Alors il existe un $R_\infty[p^{-1}]$-module projectif D de rang n, muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ_R, tel que $W \simeq \widehat{\overline{R}}[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} D$ en tant que $\mathcal{G}_R$-modules.*

Démonstration. — L'action de $\mathcal{G}_R$ sur W est décrite par un cocycle continu $U\colon \mathcal{G}_R \to \mathsf{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)$. D'après le théorème 3.1, il existe une sous-R-algèbre finie normale S de $\overline{R}$ telle que l'extension finie étale $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne et U est cohomologue à un cocycle provenant par inflation-restriction d'un cocycle $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to \mathsf{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$. Cela signifie qu'il existe un sous-S_∞-module libre D_S de W, muni d'une action semi-linéaire continue de $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ tel que $W \simeq \widehat{\overline{R}}[p^{-1}] \otimes_{S_\infty[p^{-1}]} D_S$ en tant que $\mathcal{G}_R$-modules. Mais la descente étale, pour l'extension finie étale galoisienne $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$, implique l'existence d'un

$R_\infty[p^{-1}]$-module projectif de rang n muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ_R, tel que $D_S \simeq S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} D$ en tant que $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$-modules. □

Remarque 3.15. — Notons que dans [**16**], Faltings a construit une équivalence de catégories entre la catégorie des « petites représentations généralisées » et celle des « petits fibrés de Higgs » dans ce cadre (il en donne aussi une version globale sur les schémas propres à singularités toroïdales sur $\mathsf{Spec}(V)$). Son résultat est très proche du corollaire 3.14 : avec les notations de ce dernier et sous des hypothèses de petitesse convenables, le fibré de Higgs (M, θ) associé à la représentation généralisée W se déduit de D par descente à $R \otimes_V V_\infty[p^{-1}]$, l'élément $\theta \in \mathrm{End}(M) \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/V}(-1)$ étant donné par les endomorphismes de Sen généralisés, induits par l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie de $\Gamma_R \cap \mathsf{Ker}(\chi)$ sur D (cf. [**6**]).

4. La théorie de Sen pour les (φ, Γ)-modules

4.1. Rappels et définitions. — Dans ce qui suit, on rappelle la construction (faite dans [**3**]) de l'anneau des normes généralisé (le lecteur est mis en garde que l'anneau noté R dans [**3**] correspond à $\widetilde{R}$). Comme dans la section précédente, on pose $G = \mathcal{G}_R$, $H = \mathcal{H}_R$ et $\Gamma = \Gamma_R$.

Soit $1 > \delta > 0$ tel que $p^\delta \in V_\infty$. Si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie, on définit $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty} := \lim\limits_{\infty \leftarrow n} S_\infty/p^\delta S_\infty$ où les morphismes de transition sont donnés par le Frobenius. Par [**3**, Lemma 4.10] c'est aussi l'ensemble des éléments $(a_0, \ldots, a_n, \ldots) \in \prod\limits_{\mathbf{N}} \widehat{S_\infty}$ tels que $a_{n+1}^p = a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; en particulier, il ne depend pas de δ. Par construction $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ est muni d'un Frobenius φ et de l'action de $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ lorsque $S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne.

Soit S une sous-R-algèbre finie normale de $\overline{R}$. On sait ([**3**, Theorems 5.1 & 5.11]) qu'il existe $1 > \delta_S > 0$ et $N_S \in \mathbf{N}$, qui ne dépendent que de S, tels que pour $n \geq N_S$, p^{δ_S} appartient à V_{N_S} et $S_n + p^{\delta_S} S_{n+1} = S_{n+1}^p + p^{\delta_S} S_{n+1}$ comme sous-anneaux de S_{n+1}. On définit $\mathbf{E}_S^+$ comme le sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ constitué des éléments $(a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ tels que $a_n \in S_n/p^{\delta_S} S_n$ pour $n \geq N_S$. On pose $x_0 = \varepsilon = \left(\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots\right) \in \mathbf{E}_S^+$, $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$ et $x_i = \left(T_i^{(0)}, T_i^{(1)}, \ldots\right) \in \mathbf{E}_S^+$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$. Remarquons que $\mathbf{E}_S^+$ est stable par l'action du Frobenius φ sur $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$. Dans le cas où $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne, posons $G' = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S[p^{-1}]\right)$, $H' = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S_\infty[p^{-1}]\right) = \mathcal{H}_S$ et $\Gamma_S = \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/S[p^{-1}]\right)$. L'anneau $\mathbf{E}_S^+$ est alors stable par $G/H' = \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Finalement on pose $\mathbf{E}_S := \mathbf{E}_S^+\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} := \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$. On munit ces anneaux de la topologie $\overline{\pi}$-adique. Remarquons que les anneaux $\mathbf{E}_S^+$ et $\mathbf{E}_S$ ne dépendent que de S_∞.

On définit alors $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ comme le séparé complété, pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, de $\varinjlim_{S_\infty} \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ et $\mathbf{E}^+$ comme $\varinjlim_S \mathbf{E}^+_S$, la limite étant prise sur les sous-R_∞-algèbres normales S_∞ de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie (resp. sur les sous-R-algèbres finies normales S de $\overline{R}$). On pose $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}^+\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ et $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$. Tous ces anneaux sont munis d'une action continue de $\mathcal{G}_R$ (*cf.* [**3**, Proposition 6.14]).

Lemme 4.1. — *On a*

(a) *les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ sont parfaits ;*

(b) *les anneaux $\mathbf{E}^+_S$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^+_S$ sont séparés et complets pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;*

(c) $\mathbf{E}^+_V = k_\infty[\![\overline{\pi}_K]\!]$ *où k_∞ est le corps résiduel de V_∞ et $\overline{\pi}_K^{(n)}$ une uniformisante de V_n pour $n \gg 0$;*

(d) $\mathbf{E}^+_{R^0} = \mathbf{E}^+_V\left\{x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}\right\}$ *(séparé complété de $\mathbf{E}^+_V\left[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}\right]$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique) ;*

(e) *l'anneau $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ est un anneau intègre noethérien régulier, et s'obtient à partir de $\mathbf{E}^+_{R^0}$ en itérant les opérations suivantes :*

  (i) *extension complète, topologiquement de type fini et formellement étale pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;*

  (ii) *complétion, pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, d'une localisation ;*

  (iii) *complétion par rapport à un idéal contenant $\overline{\pi}$.*

(f) *il existe $\ell \in \mathbf{N}$ tel qu'on a la factorisation $\overline{\pi}^\ell \widetilde{\mathbf{E}}^+_S \to \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\widetilde{R}} \otimes_{\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}} \mathbf{E}^+_S \to \widetilde{\mathbf{E}}^+_S$;*

(g) *les anneaux $\mathbf{E}^+_S$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^+_S$ sont normaux et les extensions $\mathbf{E}_{\widetilde{R}} \subset \mathbf{E}_S$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{R}} \subset \widetilde{\mathbf{E}}_S$ sont finies étales de degré égal au degré de $\widetilde{R}_\infty[p^{-1}] \subseteq S_\infty[p^{-1}]$;*

(h) $\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+\right)^{\mathcal{H}_S} = \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{H}_S} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$, $\left(\mathbf{E}^+\right)^{\mathcal{H}_S} = \mathbf{E}^+_S$ *et* $\mathbf{E}^{\mathcal{H}_S} = \mathbf{E}_S$.

Démonstration. — (a) résulte de [**3**, Prop. 4.4] ;

(b) résulte de [**3**, Prop. 4.4 et Prop. 4.5] ;

(c) est [**3**, Cor. 4.6] ;

(d) résulte de [**3**, Cor. 4.7] ;

(e) d'après [**3**, Thm. 5.1 & 5.11], il existe M et $N = N\left(\widetilde{R}, M\right) \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq N$ et tout $s \leq M$, on a un isomorphisme $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \Big/ (\varepsilon - 1)^{p^{n-s}} \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{R}_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) \widetilde{R}_n$, et donc

$$\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \widetilde{R}_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) \widetilde{R}_n$$

les morphismes de transition étant donnés par le Frobenius. Rappelons que

$$\widetilde{R}_n = \widetilde{R} \otimes_V V_n \left[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\right],$$

et que $\widetilde{R}$ est déduit de R^0 par les opérations (ét), (loc) et (comp) de l'introduction. Dans le cas d'une opération $\widetilde{R}' \subset \widetilde{R}$ de type (ét) (resp. (loc), resp. (comp)), les extensions

$$\widetilde{R}'_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) \widetilde{R}'_n \to \widetilde{R}_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) \widetilde{R}_n$$

sont étales (resp. des localisations par rapport à un système multiplicatif, resp. des complétions par rapport à un idéal, indépendant de n) : l'extension $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'} \to \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ est topologiquement de type fini et formellement étale pour la topologie $\overline{\pi}$-adique (resp. le complété, pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, d'une localisation, resp. le complété par rapport à un idéal contenant $\overline{\pi}$).

(f) résulte du [**3**, Lemma 4.15] ;

(g) résulte de [**3**, Thm. 4.9, Thm. 5.1 et Thm. 5.11] ;

(h) n'est autre que [**3**, Prop. 6.14]. □

Soit v_p la valuation discrète sur K normalisée par $v_p(p) = 1$. Soit $v_{\mathbf{E}}$ la valuation discrète sur $\mathbf{E}_V$ normalisée par $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K) = p^n v_p(\overline{\pi}_K^{(n)})$ pour $n \gg 0$. On prolonge $v_{\mathbf{E}}$ en une application $v_{\mathbf{E}} \colon \widetilde{\mathbf{E}} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ en posant

$$v_{\mathbf{E}}(x) = \frac{p}{p-1} \max \left\{ n \in \mathbf{Q}, x \in \overline{\pi}^{-n} \widetilde{\mathbf{E}}^+ \right\}.$$

Ce n'est pas une valuation en général, mais vérifie les propriétés (i)-(iv) de la section 2.

On pose $\widetilde{\mathbf{A}}_S = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_S\right)$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_S^+\right)$, resp. $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}\right)$, resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+\right)$). On munit $\widetilde{\mathbf{A}}$ de la topologie faible définie comme la topologie de la limite projective $\widetilde{\mathbf{A}} = \varprojlim_{\infty \leftarrow n} \mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}\right)$, chaque $\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}\right)$ étant muni de la topologie produit $\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}\right) \cong \widetilde{\mathbf{E}}^n$ (l'isomorphisme étant donné par les composantes fantômes), la topologie sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ étant la topologie induite par $v_{\mathbf{E}}$. L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}$ est alors séparé et complet pour cette topologie et les actions de $\mathcal{G}_R$ et du Frobenius sont continues (*cf.* [**3**, Proposition 7.2)]. De plus, les sous-anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_S$, $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont fermés pour cette topologie.

Pour $r \in \mathbf{Q}_{>0}$, on note $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ l'ensemble des éléments $z = \sum_{k=0}^{\infty} p^k [z_k]$ de $\widetilde{\mathbf{A}}$ tels que

$$\lim_{k \to \infty} r v_{\mathbf{E}}(z_k) + k = +\infty.$$

On pose $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}[p^{-1}]$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}_{>0}} \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger[p^{-1}]$. Pour $z = \sum_{k \in \mathbf{Z}} p^k [z_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, on pose alors

$$w_r(z) = \inf_{k \in \mathbf{Z}} \left(r v_{\mathbf{E}}(z_k) + k \right)$$

(on a $w_r = r v^{(0,r]}$ avec les notations de [**11**, 5.2]). Cela définit une application $v = w_r \colon \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Rappelons quelques propriétés de w_r et de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

Proposition 4.2. — *(cf.* [**11**, 5.2]*)*

(a) *Pour tout* $r \in \mathbf{Q}_{>0}$, *on a* $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ *et la topologie induite par* w_r *sur* $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ *coïncide avec la topologie faible.*

(b) *(cf. loc. cit. Proposition 5.4 et corollaire 5.5) L'application* w_r *vérifie les propriétés (i)-(iv) de la section 2. En particulier,* $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ *est un sous-anneau de* $\widetilde{\mathbf{A}}$. *En outre, si* $z \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, *on a* $w_r(g(z)) = w_r(z)$ *pour* $g \in \mathcal{G}_R$ *et* $w_{p^{-1}r}(\varphi(z)) = w_r(z)$. *En particulier,* $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ *est stable par* $\mathcal{G}_R$ *et* φ *induit un homéomorphisme de* $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ *sur* $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-1}r]}$.

(c) *(cf. loc. cit. Proposition 5.6) L'anneau* $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ *est séparé et complet pour la topologie définie par* w_r.

(d) *(cf. loc. cit. Corollaire 6.3,* [**8**, Corollaire II.1.5]*) On a* $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = \frac{p}{p-1}$ *donc* $w_r\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right) = 0$ *pour tout* $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_{>0}$. *Si* $r \leq 1$, *on a* $\pi = u[\overline{\pi}]$ *avec* $u \in \widetilde{\mathbf{A}}$ *et* $w_r(u) \geq 0$. *Si* $r < 1$, *alors* u *est une unité de* $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ *et* $w_r(u) = 0$. *En particulier, pour* $r \leq 1$, *on a* $w_r(\pi) \geq w_r([\overline{\pi}]) = \frac{pr}{p-1}$, *avec égalité si* $r < 1$.

Démonstration. — (a) Si $z = \sum_{k=0}^{\infty} p^k[z_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$, on a $v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et donc $rv_{\mathbf{E}}(z_k) + k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *i.e.* $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$. Par ailleurs, si $(A, N) \in \mathbf{Q}_{>0} \times \mathbf{N}$, on a les inclusions

$$\left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+,\ (\forall k \leq A)\ v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{A}{r}\right\} \subseteq \left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+,\ w_r(z) \geq A\right\} \subseteq \left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+,\ (\forall k \leq N)\ v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{A-N}{r}\right\}$$

ce qui montre que la topologie induite par w_r et la topologie faible de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont les mêmes.

(b) Pour $k \in \mathbf{Z}$ et $z = \sum_{k\in\mathbf{Z}} p^k[z_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, posons $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z) = \inf_{j\leq k} v_{\mathbf{E}}(z_j)$. Les applications $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}$ ont les propriétés suivantes :

(1) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z) = \infty \Leftrightarrow z \in p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}$;

(2) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(y+z) \geq \inf\left(v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(y), v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z)\right)$ avec égalité si $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(y) \neq v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z)$;

(3) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(yz) \geq \inf_{i+j\leq k}\left(v_{\mathbf{E}}^{\leq i}(y) + v_{\mathbf{E}}^{\leq j}(z)\right)$;

(4) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(\varphi(z)) = pv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z)$;

(5) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(g(z)) = v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z)$ pour $g \in \mathcal{G}_R$.

En particulier, les applications $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}$ sont des semi-normes. Par ailleurs, par définition, la topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ est la topologie définie par la famille $\left\{v_{\mathbf{E}}^{\leq k}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$. L'assertion (b) résulte alors du fait que $w_r(z) = \inf_{k\in\mathbf{Z}}\left(rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z) + k\right)$.

(c) La séparation de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ découle du fait que w_r vérifie la condition (i) de la section 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ qui tend vers 0 pour w_r. Comme $w_r(a_n) = \inf_{k\in\mathbf{N}} \left(rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n) + k\right)$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$: la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge donc dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ (pour la topologie faible) vers un élément a, tel que $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a) \geq \inf_{n\in\mathbf{N}} v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. En particulier, on a $rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a) + k \geq \inf_{n\in\mathbf{N}} \left(rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n) + k\right)$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n) + k \geq w_r(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme à n fixé $rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n)+k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a)+k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *i.e.* $a \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

(d) On a $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = v\left((\varepsilon-1)^{(0)}\right) = \lim_{n\to\infty} v\left(\left(\varepsilon^{(n)}-1\right)^{p^n}\right) = \frac{p}{p-1}$.

On peut écrire $\pi = [\varepsilon] - 1 = [\overline{\pi}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \cdots$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, avec $\alpha_n \in \mathbf{Z}\left[\varepsilon^{\frac{1}{p^n}} - 1\right]$ sans terme constant. Cela se voit par récurrence en utilisant la formule $\varphi(\pi) = [\varepsilon]^p - 1 = (\pi+1)^p - 1$, qui donne $[\overline{\pi}^p] + p[\alpha_1^p] + p^2[\alpha_2^p] + \cdots = \left(1 + [\overline{\pi}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \cdots\right)^p - 1$, et permet de calculer les α_n de proche en proche. On a donc $v_{\mathbf{E}}(\alpha_n) \geq v_{\mathbf{E}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{p^n}} - 1\right) = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, d'où $v_{\mathbf{E}}(\alpha_1) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = -1$ et $v_{\mathbf{E}}(\alpha_n) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geq -\frac{p}{p-1} \geq -n$ si $n \geq 2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, écrivons $\alpha_n = \overline{\pi}a_n$ avec $a_n \in \widetilde{\mathbf{E}}$. On a alors $\pi = u[\overline{\pi}]$ avec $u = 1 + a \in \widetilde{\mathbf{A}}$ où $a = p[a_1] + p^2[a_2] + \cdots$. Si $r \leq 1$, on a $w_r(a) = \inf_{n\in\mathbf{N}_{>0}} (rv_{\mathbf{E}}(a_n) + n) \geq 1 - r \geq 0$. Supposons maintenant $r < 1$. On a $u \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $w_r(a) \geq 1-r > 0$, d'où $w_r(1-u) > 0$ et $w_r(u) = 0$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est complet pour la topologie définie par w_r d'après ce qui précède, l'élément u est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$. □

Remarque 4.3. — L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ n'est pas complet pour w_r.

On pose $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_S^{(0,r]} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}\right)^{\mathcal{H}_S}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_S^{\dagger} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\right)^{\mathcal{H}_S}$. Remarquons que $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}/p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cong \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}/p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger} \cong \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$.

4.2. Descente de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ à $\widetilde{\mathbf{B}}_S^{\dagger}$

Proposition 4.4. — *(cf.* [**11**, Lemme 10.1]*). L'anneau $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, muni de l'action de $\mathcal{H}_R$, vérifie la propriété (TS1).*

Démonstration. — Fixons $c_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ quelconque. Soient $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \mathcal{H}_S$ des sous-groupes ouverts distingués. Ils correspondent à des extensions finies galoisiennes $R_\infty[p^{-1}] \subseteq S_\infty[p^{-1}] \subseteq S'_\infty[p^{-1}]$. Notons $\mathrm{Tr}_{S'/S}$ l'opérateur $\sum_{\tau\in H_2/H_1} \tau$. D'après 4.1 (h), on a $\widetilde{\mathbf{A}}^{H_1} = \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{H_2} = \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$. En outre, l'extension $\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ modulo p est étale d'après *loc. cit.* Remark 7.14 et Lemma 7.15. Par ailleurs, l'opérateur $\mathrm{Tr}_{S'/S}$ coïncide

avec la trace $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$. Il existe donc $\alpha_0 \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$ tel que $\mathrm{Tr}_{S'/S}(\alpha_0) = 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{Tr}_{S'/S}(\varphi^{-n}(\alpha_0)) = 1$ et $v_{\mathbf{E}}(\varphi^{-n}(\alpha_0)) = p^{-n} v_{\mathbf{E}}(\alpha_0)$: quitte à remplacer α_0 par $\varphi^{-n}(\alpha_0)$ pour n assez grand, on peut supposer que $v_{\mathbf{E}}(\alpha_0) > \max\left(-r^{-1}, -c_1\right)$.

On peut alors écrire $a = \mathrm{Tr}_{S'/S}([\alpha_0]) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p^k [z_k]$. Comme $v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq v_{\mathbf{E}}(\alpha_0) > -r^{-1}$ (*cf.* [**11**, 5.1]), on a $r v_{\mathbf{E}}(z_k) + k > k - 1$ pour $k \in \mathbf{N}_{>0}$, et donc $a = 1 + b$ avec $w_r(b) > 0$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est complet pour la topologie définie par w_r, l'élément a est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et donc dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)^{H_2}$. De plus, on a $w_r(a) = w_r(a^{-1}) = 0$. Soit alors $\alpha = a^{-1}[\alpha_0] \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)^{H_1}$. Par construction, on a $\mathrm{Tr}_{S'/S}(\alpha) = 1$. En outre, on a $w_r(\alpha) \geq w_r(a^{-1}) + w_r([\alpha_0]) = v_{\mathbf{E}}(\alpha_0) > -c_1$. □

Lemme 4.5. — *Soient $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ et $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$. Pour $s \in]0, r]$, on a $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,s]}$ et $w_s(z) \geq \frac{s}{r} w_r(z)$. En particulier, il existe $s \in]0, r]$ tel que $w_s(pz) > 0$.*

Démonstration. — On peut supposer $s < r$. Écrivons $z = \sum_{n=0}^{\infty} p^k [z_k]$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on a $v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{1}{r}(w_r(z) - k)$ donc $s v_{\mathbf{E}}(z_k) + k \geq \frac{s}{r} w_r(z) + \left(1 - \frac{s}{r}\right) k$. Comme $1 - \frac{s}{r} > 0$, on a $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,s]}$ et $w_s(z) \geq \frac{s}{r} w_r(z)$. Enfin, on a $w_s(pz) = 1 + w_s(z) \geq 1 + \frac{s}{r} w_r(z) > 0$ si s est assez petit. □

Proposition 4.6. — *Le couple $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}, p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\right)$ est hensélien.*

Démonstration. — On reprend la preuve de Matsuda (*cf.* [**23**, Proposition 2.2]). Il s'agit de montrer que tout polynôme unitaire $f(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}[X]$ tel que $f(X) \equiv X^n (X-1)^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}[X]$ admet une factorisation $f(X) = P(X)Q(X)$ avec $P(X), Q(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}[X]$, $P(X) \equiv X^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}[X]$ et $Q(X) \equiv (X-1)^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}[X]$.

Écrivons $f(X) = f^{\dagger}(X) + X^n f^*(X)$ avec $f^{\dagger}(X) = f_0 + f_1 X + \cdots + f_{n-1} X^{d-1}$ et $f^*(X) = f_n + f_{n+1} X + \cdots + f_{2n} X^n$ où $f^{\dagger}(X) \equiv 0 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}[X]$ et $f^*(X) \equiv (X-1)^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}[X]$. Il existe $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que $f_j \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ pour tout $j \in \{0, \ldots, 2n\}$. Par hypothèse, on a $f_j \equiv (-1)^{j-n}\binom{n}{j-n} \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$: d'après le lemme 4.5, quitte à diminuer r, on peut supposer que $w_r\left(f_j - (-1)^{j-n}\binom{n}{j-n}\right) > 0$ pour tout $j \in \{0, \ldots, 2n\}$. En particulier, on a $w_r(f_n - 1) > 0$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ est complet pour w_r (*cf.* proposition 4.2 (b)), l'élément f_n est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$. Il en est donc de même de $f^*(X)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$. Posons alors $F = -f^{\dagger}(X)/f^*(X) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m X^m \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$. D'après ce qui précède, on a $w_r(f_j) > 0$ pour $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $w_r(f_j) \geq 0$ pour $j \in \{n+1, \ldots, 2n\}$, on a donc $w_r(F_m) \geq w_r\left(f^{\dagger}(X)\right) > 0$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ (où $w_r\left(f^{\dagger}(X)\right) = \min_{0 \leq j < n} w_r(f_j)$). Notons qu'en outre, on a $F(X) \equiv 0 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$.

On cherche à résoudre

$$(*) \qquad X^n - (X^n - F(X))\,G(X) = R(X)$$

avec $G(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $R(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[X]$ de degré $< n$. On construit pour cela des suites $\left(G^{(u)}(X)\right)_{u\in\mathbf{N}}$ et $\left(R^{(u)}(X)\right)_{u\in\mathbf{N}}$ par récurrence sur $u \in \mathbf{N}$, de sorte qu'on a $G^{(u)}(X) \in p^u\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $R^{(u)}(X) \in p^u\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[X]$ de degré $< n$. On pose $G^{(0)}(X) = 1$ et $R^{(0)}(X) = 0$. Les éléments $G^{(u)}(X)$ et $R^{(u)}(X)$ étant construits, on définit $G^{(u+1)}(X)$ et $R^{(u+1)}(X)$ par

$$(**) \qquad G^{(u)}(X)F(X) = X^nG^{(u+1)}(X) + R^{(u+1)}(X) \qquad \deg\left(R^{(u+1)}(X)\right) < n$$

dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$. Comme $F(X) \equiv 0 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$, une récurrence immédiate implique qu'on a bien $G^{(u)}(X) \in p^u\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $R^{(u)}(X) \in p^u\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[X]$ pour tout $u \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, on a $w_r\left(G^{(u+1)}(X)\right), w_r\left(R^{(u+1)}(X)\right) \geq w_r\left(G^{(u)}(X)\right) + w_r(F(X))$ (avec des notations évidentes), d'où $w_r\left(G^{(u+1)}(X)\right), w_r\left(R^{(u+1)}(X)\right) \geq uw_r(F(X))$ pour tout $u \in \mathbf{N}$ (on a $w_r\left(G^0(X)\right) = 0$). Comme $w_r(F(X)) \geq w_r\left(f^\dagger(X)\right) > 0$, les séries $G(X) = \sum_{u=0}^{\infty} G^{(u)}(X)$ et $R(X) = \sum_{u=0}^{\infty} R^{(u)}(X)$ convergent dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[X]$ respectivement. En additionnant les égalités $(**)$ pour $u \in \mathbf{N}$, on a $G(X)F(X) = X^n(G(X) - 1) + R(X)$ *i.e.* $(*)$.

Par construction, on a $G(X) \equiv 1 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$ (parce que $G^{(0)}(X) = 1$) : d'après le lemme 4.5, quitte à diminuer r, on peut supposer que le terme constant de $G(X)$ est de la forme $1 + g$ avec $w_r(g) > 0$, donc inversible. La série $G(X)$ est alors inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$. On pose alors $Q(X) = f^*(X)/G(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $P(X) = X^n - R(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[X]$. On a déjà $P(X) \equiv X^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^\dagger[X]$ (en effet, on a $R(X) \equiv 0 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[X]$, parce que $R^{(0)}(X) = 0$). Par ailleurs, $P(X)Q(X) = f^*(X)(X^n - R(X))/G(X) = f^*(X)(X^n - F(X)) = f(X)$, et donc $Q(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}[X]$, avec $Q(X) \equiv (X-1)^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_S^\dagger[X]$. □

Proposition 4.7. — *Soit S_∞ une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que l'extension $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie galoisienne. Alors l'extension correspondante $\widetilde{\mathbf{A}}_S^\dagger/\widetilde{\mathbf{A}}_R^\dagger$ est finie étale galoisienne.*

Démonstration. — Commençons par montrer que l'extension est finie. D'après [**3**, Theorem 4.9 et Proposition 6.14], l'extension $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ est finie étale galoisienne. Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ une famille génératrice, avec $\alpha_j \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $\overline{\pi}^m\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+ \subseteq \sum_{j=1}^r \alpha_j\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$. Montrons que $\widetilde{\mathbf{A}}_S^\dagger = \sum_{j=1}^r [\alpha_j]\widetilde{\mathbf{A}}_R^\dagger$.

Soit $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^\dagger$. Pour $c \in \mathbf{N}$ convenable, on peut écrire $z = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^c}\right)^k [z_k]$ où $z_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Comme $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+ \subseteq \frac{1}{\overline{\pi}^m}\sum_{j=1}^r \alpha_j\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$, on peut écrire

$[z_k] = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{r}[\alpha_j]\left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^m}\right)^u[z_{k,j,u}]$, avec $z_{k,j,u} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{R_\infty}$ (on le voit par récurrence, en regardant modulo p^u). Fixons $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que $r < \min(c^{-1}, m^{-1})$. Comme $rm < 1$, les sommes $z_{k,j} = \sum_{u=0}^{\infty}\left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^m}\right)^u[z_{k,j,u}]$ convergent dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$. En outre, on a $w_r(z_{k,j}) = \min_{u\in\mathbf{N}}(rv_{\mathbf{E}}(z_{k,j,u}) + (1-rm)u) \geq 0$. On peut alors écrire $z = \sum_{j=1}^{r}[\alpha_j]a_j$ avec $a_j = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^c}\right)^k z_{k,j}$. La somme a_j converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ car pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $w_r\left(\left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^c}\right)^k z_{k,j}\right) \geq (1-rc)k + w_r(z_{k,j})$, $rc < 1$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ est complet pour w_r (proposition 4.2 (ii)). On a bien $z \in \sum_{j=1}^{r}[\alpha_j]\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \subseteq \sum_{j=1}^{r}[\alpha_j]\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$, ce qu'on voulait.

Comme $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ est finie étale, il existe un unique idempotent $\overline{\mathfrak{e}}_{S/R} \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}}\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ tel que $m(x) = \left(\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}}\otimes\mathrm{Id}\right)(\overline{\mathfrak{e}}_{S/R}.x)$, où $m\colon \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}}\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \to \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ désigne la multiplication. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$ est fini sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$, il en est de même de $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}}\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$. D'après la proposition 4.6, le couple $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}}\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger},(p)\right)$ est donc Hensélien (*cf.* [**25**, XI Proposition 2]). Comme la réduction modulo p de ce dernier est précisément $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}}\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$, l'idempotent $\overline{\mathfrak{e}}_{S/R}$ se relève de façon unique en un idempotent $\mathfrak{e}_{S/R} \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}}\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$.

L'extension $\widetilde{\mathbf{A}}_S/\widetilde{\mathbf{A}}_R$ est finie étale galoisienne, et son groupe de Galois s'identifie à celui de l'extension $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$, car $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ sont séparés et complets pour la topologie p-adique, de réduction modulo p respectives $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$. L'image, encore notée $\mathfrak{e}_{S/R}$ de l'idempotent dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R}\widetilde{\mathbf{A}}_S$ vérifie donc $m(x) = \left(\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_S/\widetilde{\mathbf{A}}_R}\otimes\mathrm{Id}\right)(\mathfrak{e}_{S/R}.x)$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_S\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R}\widetilde{\mathbf{A}}_S$ (où $m\colon \widetilde{\mathbf{A}}_S\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R}\widetilde{\mathbf{A}}_S \to \widetilde{\mathbf{A}}_S$ désigne toujours la multiplication), parce que c'est vrai modulo p et qu'il y a unicité du relèvement. Comme $\mathcal{G}_R$ respecte la surconvergence, la trace $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_S/\widetilde{\mathbf{A}}_R}$ envoie $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$: on note $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}/\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}}$ sa restriction à $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$. L'idempotent $\mathfrak{e}_{S/R}$ vérifie donc $m(x) = \left(\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}/\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}}\otimes\mathrm{Id}\right)(\mathfrak{e}_{S/R}.x)$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}}\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$, *i.e.* l'extension $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}/\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$ est étale. Elle est galoisienne car l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ l'est. □

Proposition 4.8. — *On a*

$$\varinjlim_{S_\infty}\mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right),\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R,\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}\right)\right)$$

et

$$\varinjlim_{S_\infty}\mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right),\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}_S^{\dagger}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R,\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\right)\right)$$

où la limite inductive est prise sur les sous-R_∞-algèbres normales S_∞ de $\overline{R}$ telles que l'extension $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie galoisienne.

Démonstration. — Comme les applications en question sont des limites inductives d'applications d'inflation, elles sont injectives. Montrons leur surjectivité.

Soit $U\colon \mathcal{H}_R \to \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\right)$ un cocycle continu (pour la topologie faible). Comme $\mathcal{H}_R$ est compact, il existe $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que U est à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}\right)$. En effet, $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \bigcup\limits_{r\in\mathbf{Q}_{>0}} \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, est muni de la topologie de la limite inductive, et pour tous $r, s \in \mathbf{Q}_{>0}$ tels que $s \leq r$, l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,s]}$ est ouverte (cela résulte du fait que $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ est un voisinage de 0 pour la topologie faible –cela se vérifie modulo p^n pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$–, et du fait que $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ est un groupe pour l'addition).

Notons $\widetilde{\mathbf{A}}_{\geq 0}^{(0,r]}$ le sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ constitué des éléments z tels que $w_r(z) \geq 0$ (dans [8], cet anneau est noté $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{r^-}$). On a $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \bigcup\limits_{m\in\mathbf{Z}} p^m \widetilde{\mathbf{A}}_{\geq 0}^{(0,r]}$. En outre, comme $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_{\geq 0}^{(0,r]}$, ce dernier est ouvert dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$. Comme U est continu et $\mathcal{H}_R$ compact, il existe un sous-groupe ouvert et normal H_0 de $\mathcal{H}_R$ tel que $U_g \equiv 1 \mod p\mathrm{M}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^+\right)$. En particulier, U est à valeurs dans $1 + p\mathrm{M}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_{\geq 0}^{(0,r]}\right)$ et continu pour la topologie définie par w_r (car sur $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ cette dernière coïncide avec la topologie faible en vertu de la proposition 4.2 (a)). En outre, on a $w_r\left(U_g - 1\right) \geq 1$ pour $g \in H_0$ et donc $U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)$ (car $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est complet pour w_r, *cf.* proposition 4.2). D'après les propositions 2.2 et 4.4, quitte à remplaçer H_0 par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que la restriction de U à H_0 est triviale, *i.e.* que U est cohomologue à un cocycle provenant par inflation d'un cocycle $\mathcal{H}_R/H_0 \to \mathsf{GL}_n\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\right)^{H_0}\right)$.

Le sous-groupe H_0 de $\mathcal{H}_R$ correspond à une sous-R_∞-algèbre normale S_∞ de $\overline{R}$ telle que l'extension $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie. Quitte à remplacer H_0 par un sous-groupe ouvert, on peut de plus supposer $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ galoisienne.

Le cas d'un cocycle $U\colon \mathcal{H}_R \to \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right)$, plus simple, se traite de façon analogue. □

4.3. Décomplétion. — Soit S une sous-R-algèbre finie normale de $\overline{R}$. On note $\mathbf{A}_S$ l'unique (*cf.* proposition 4.42) sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ caractérisé par les propriétés suivantes :

(a) $\mathbf{A}_S$ est complet pour la topologie faible ;
(b) $\mathbf{A}_S \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_S = p\mathbf{A}_S$;

(c) on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_S & \twoheadrightarrow & \mathbf{E}_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathbf{A}}_S & \twoheadrightarrow & \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \end{array}$$

(d) $[x_i] \in \mathbf{A}_S$ pour $i \in \{0, \dots, d\}$;

(e) il existe une sous-$\mathbf{A}^+_{\mathrm{W}(k)}$-algèbre $\mathbf{A}^+_S$ de $\mathbf{A}_S$ et $r_S \in \mathbf{Q}_{>0}$ tels que :

(i) il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{p}{\pi^a} \in \mathbf{A}^+_S$ et $\mathbf{A}^+_S / \frac{p}{\pi^a}\mathbf{A}^+_S \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}^+_S$;

(ii) si $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_{>0}$ sont tels que $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{pr_S}{p-1}$, on a $\mathbf{A}^+_S \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^+_S \left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$;

(iii) $\mathbf{A}^+_S$ est complet pour la topologie faible.

(f) $\mathbf{A}_S$ est stable sous l'action de φ et sous celle de $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ lorsque $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne.

Remarquons que $\mathbf{A}_S$ est l'unique $\mathbf{A}_R$-algèbre finie étale relevant l'extension finie étale $\mathbf{E}_R \subset \mathbf{E}_S$ (*cf.* [**3**, Definition 7.7]). D'après [**3**, Proposition 7.8], $\mathbf{A}_S$ est une sous-$\mathbf{A}_R$-algèbre régulière de $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$.

Proposition 4.9. — (i) $\varphi\colon \mathbf{E}_S \to \mathbf{E}_S$ *est libre de rang* p^{d+1}, *de base* $(x_0^{\alpha_0} \cdots x_d^{\alpha_d})_{0 \le \alpha_i < p}$.

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *le* $\mathbf{E}_S$*-module* $\varphi^{-n}(\mathbf{E}_S) = \mathbf{E}_S\left[x_0^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right] \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ *est libre de base*

$$\left(x_0^{\frac{\alpha_0}{p^n}} \cdots x_d^{\frac{\alpha_d}{p^n}}\right)_{0 \le \alpha_i < p^n}$$

De plus, il existe une constante $c_S \in \mathbf{N}_{>0}$, *qui ne dépend que de* S, *telle que pour tout*

$$z = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ 0 \le \alpha_i < p^n}} z_{\underline{\alpha}} x_0^{\frac{\alpha_0}{p^n}} \cdots x_d^{\frac{\alpha_d}{p^n}} \in \varphi^{-n}(\mathbf{E}_S)$$

avec $z_{\underline{\alpha}} \in \mathbf{E}_S$ *pour* $\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}$, *on a*

$$v_{\mathbf{E}}(z) - c_S v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \le \min_{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}} \left(v_{\mathbf{E}}(z_{\underline{\alpha}})\right) \le v_{\mathbf{E}}(z).$$

(iii) *L'anneau* $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \varphi^{-n}(\mathbf{E}_S)$ *est dense dans* $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$.

Démonstration. — (i) C'est [**3**, Corollary 4.7 (ii)].

(ii) La première partie résulte de (i). L'inégalité $\min_{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}} \left(v_{\mathbf{E}}(z_{\underline{\alpha}})\right) \le v_{\mathbf{E}}(z)$ étant claire, on va déterminer c_S tel que $v_{\mathbf{E}}(z) - c_S \le \min_{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}} \left(v_{\mathbf{E}}(z_{\underline{\alpha}})\right)$. En appliquant [**3**,

Lemma 4.15] aux extensions $\mathbf{E}^+_{\mathrm{W}(k)} \subset \mathbf{E}^+_V$ et $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \subset \mathbf{E}^+_S$ on sait qu'il existe $c_{S,1}$ et $c_{S,2} \in \mathbf{N}$, dépendant seulement de S et pas de n, tels que $\overline{\pi}^{c_{S,1}}\varphi^{-n}\left(\mathbf{E}^+_V\right) \subset \mathbf{E}^+_{\mathrm{W}(k)}\left[x_0^{\frac{1}{p^n}}\right]$ et

$$\overline{\pi}^{c_{S,2}}\varphi^{-n}\left(\mathbf{E}^+_S\right) \subseteq \varphi^{-n}\left(\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\right) \otimes_{\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}} \mathbf{E}^+_S = \varphi^{-n}\left(\mathbf{E}^+_V\right) \otimes_{\mathbf{E}^+_V} \mathbf{E}^+_S\left[x_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right].$$

Posons $c_S = c_{S,1} + c_{S,2} + 1$. On a alors $\overline{\pi}^{c_S-1}\varphi^{-n}\left(\mathbf{E}^+_S\right) \subseteq \mathbf{E}^+_S\left[x_0^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right]$. Soit h l'entier tel que $(-h+1)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geq v_{\mathbf{E}}(z) \geq -hv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. En particulier, $\overline{\pi}^h z \in \mathbf{E}^+_S$ et alors $v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\pi}^{h+c_S-1}z_{\underline{\alpha}}\right) \geq 0$ pour chaque $\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}$. Donc, $\min\limits_{\underline{\alpha}\in\mathbf{N}^{d+1}}\left(v_{\mathbf{E}}(z_{\underline{\alpha}})\right) \geq -(h + c_S - 1)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geq v_{\mathbf{E}}(z) - c_S v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$.

L'assertion (iii) résulte de [**3**, Cor. 5.4]. □

Corollaire 4.10. — (i) $\varphi\colon \mathbf{A}_S \to \mathbf{A}_S$ *est libre de rang* p^{d+1}, *de base* $\left([x_0]^{\alpha_0}\cdots[x_d]^{\alpha_d}\right)_{0\leq\alpha_i<p}$.

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *le* $\mathbf{A}_S$*-module* $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_S) = \mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right] \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S$ *est libre de base*

$$\left([x_0]^{\frac{\alpha_0}{p^n}}\cdots[x_d]^{\frac{\alpha_d}{p^n}}\right)_{0\leq\alpha_i<p^n}$$

(iii) *L'anneau* $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]$ *est dense dans* $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ *pour la topologie faible.*

Démonstration. — L'assertion (i) résulte de la proposition 4.9 (i) et du fait que $\mathbf{A}_S$ est séparé et complet pour la topologie p-adique. Comme précédemment, on en déduit (ii). L'assertion (iii) se vérifie modulo p^n pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Comme la topologie induite sur $\widetilde{\mathbf{A}}_S/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S \simeq \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S/p\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)^n$ est la topologie produit, il suffit de regarder le cas $n = 1$. Mais $\mathbf{A}_S/p\mathbf{A}_S = \mathbf{E}_S$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_S/p\widetilde{\mathbf{A}}_S = \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$, et c'est précisément l'énoncé proposition 4.9 (iii). □

Pour $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $n \in \mathbf{N}$ on pose

$$\mathbf{A}_S^{(i)}(n) = \mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_{i-1}]^{\frac{1}{p^n}}, [x_{i+1}]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]$$
$$\mathbf{E}_S^{(i)}(n) = \mathbf{E}_S\left[x_0^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_{i-1}^{\frac{1}{p^n}}, x_{i+1}^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right]$$

Notons que les $\mathbf{A}_S^{(i)}(n)$ sont des sous-anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}_S = \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathcal{H}_S}$. Pour $i \in \{0, \ldots, d\}$, on pose $\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty) := \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_S^{(i)}(n)$ et $\mathbf{E}_S^{(i)}(\infty) := \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}_S^{(i)}(n)$.

4.4. Traces normalisées de Tate généralisées. — En utilisant 4.10 (ii) on définit l'application $\mathbf{A}_S$-linéaire

$$\tau_m^{(i)} = \tau_{m,S}^{(i)} \colon \bigcup_{n \geq m} \varphi^{-n}(\mathbf{A}_S) \longrightarrow \widetilde{\mathbf{A}}_S$$

$$a = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ 0 \leq \alpha_k < p^n}} a_{\underline{\alpha}} \prod_{k=0}^{d} [x_k]^{\frac{\alpha_k}{p^n}} \longmapsto \sum_{p^{n-m} | \alpha_i} a_{\underline{\alpha}} \prod_{k=0}^{d} [x_k]^{\frac{\alpha_k}{p^n}}$$

où pour tout $\underline{\alpha}$, on a $a_{\underline{\alpha}} \in \mathbf{A}_S$.

Si $b \in \mathbf{N}$, on note $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \left\{ \frac{p}{\pi^b} \right\}$ l'adhérence de $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \left[\frac{p}{\pi^b} \right]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour la topologie faible (*cf.* section 4.9). Rappelons (lemme 4.39) que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a

$$\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ / p^n \widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \left\{ \frac{p}{\pi^b} \right\} \Big/ \left(\frac{p}{\pi^b} \right)^n \widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \left\{ \frac{p}{\pi^b} \right\} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S / p^n \widetilde{\mathbf{A}}_S$$

si bien que la topologie induite par la topologie p-adique de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \left\{ \frac{p}{\pi^b} \right\}$ est la toplogie $\frac{p}{\pi^b}$-adique.

Proposition 4.11. — *L'application $\tau_{m,S}^{(i)}$ induit un projecteur $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)} \left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}} \right]$-linéaire continu,*

$$\tau_{m,S}^{(i)} \colon \widetilde{\mathbf{A}}_S \longrightarrow \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)} \left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}} \right], \tag{3}$$

où $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}$ désigne l'adhérence de $\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour la topologie faible. On a les propriétés suivantes :

(i) *Lorsque $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne, l'opérateur $\tau_{m,S}^{(i)}$ commute avec l'action de $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ si $i \neq 0$, et il commute à l'action de $\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}$ lorsque $i = 0$;*

(ii) *pour chaque $n \in \mathbf{Z}$ tel que $m + n \geq 0$ on a $\varphi^n \circ \tau_{m+n,S}^{(i)} = \tau_{m,S}^{(i)} \circ \varphi^n$;*

(iii) *pour chaque n et $m \in \mathbf{N}$ et i et $j \in \{0, \ldots, d\}$ on a $\tau_{m,S}^{(i)} \circ \tau_{n,S}^{(j)} = \tau_{n,S}^{(j)} \circ \tau_{m,S}^{(i)}$;*

(iv) *la restriction de $\tau_{m,S}^{(i)}$ à $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ coïncide avec $\tau_{m,R}^{(i)}$;*

(v) *si $b \in \mathbf{N}$ est tel que $\mathbf{A}_S^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \left\{ \frac{p}{\pi^b} \right\}$ (cf. proposition 4.42), on a*

$$\tau_{m,S}^{(i)} \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \left\{ \frac{p}{\pi^b} \right\} \right) \subseteq \frac{1}{\pi^{c_S}} \widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \left\{ \frac{p}{\pi^{b+c_S}} \right\}.$$

Démonstration. — D'après le corollaire 4.10 (ii), si $n \geq m$, le $\mathbf{A}_S^{(i)}(n) \left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}} \right]$-module $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_S) = \mathbf{A}_S \left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}} \right]$ est libre de de rang p^{n-m}, de base $\left([x_i]^{\frac{j}{p^n}} \right)_{0 \leq j < p^{n-m}}$. On en déduit que si $a = \sum_{j=0}^{p^{n-m}-1} a_j [x_i]^{\frac{j}{p^n}} \in \varphi^{-n}(\mathbf{A}_S)$, où pour tout $j \in \{0, \ldots, p^{n-m} - 1\}$, on a $a_j \in \mathbf{A}_S^{(i)}(n) \left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}} \right]$, alors $\tau_{m,S}^{(i)}(a) = a_0$ et $\tau_{m,S}^{(i)}$ est un projecteur $\mathbf{A}_S^{(i)}(n) \left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}} \right]$-linéaire qui satisfait les propriétés (i)-(iv). En

particulier, on obtient un projecteur $\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-linéaire

$$\tau_{m,S}^{(i)}\colon \bigcup_{n\geq m}\varphi^{-n}(\mathbf{A}_S)\longrightarrow \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right].$$

Dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+$, on a $\pi=[\overline{\pi}]+p\alpha$ avec $\alpha\in\widetilde{\mathbf{A}}_S^+$: si $n\in\mathbf{N}_{>0}$, on a donc $\pi^{p^n}=[\overline{\pi}]^{p^n}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S^+$. La topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+$ coïncide donc avec la topologie définie par la famille d'idéaux $\left\{\left(p^n,\pi^k\right)\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\right\}_{n,k\in\mathbf{N}}$. D'après le lemme 4.39, si $b\in\mathbf{N}_{>0}$, la topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ coïncide donc avec la topologie définie par la famille d'idéaux $\left\{I_{n,k}=\left(\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n,\pi^k\right)\right\}_{n,k\in\mathbf{N}}$.

Posons $A_{S,b}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}_S^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]\left[\frac{p}{\pi^b}\right]$ (*cf.* proposition 4.42). Supposons $b\in\mathbf{N}_{>0}$ tel que $\mathbf{A}_S^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. On a alors $A_{S,b}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. Notons $\widetilde{A}_{S,b}$ l'adhérence de $A_{S,b}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour la topologie définie par la famille $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbf{N}}$: en particulier, $\widetilde{A}_{S,b}$ est complet pour la topologie faible et on a $\widetilde{A}_{S,b}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$.

D'après la proposition 4.9, on a $\overline{\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+}\subseteq\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_S^+\left[x_0^{\frac{1}{p^n}},\ldots,x_d^{\frac{1}{p^n}}\right]}$ (où la barre désigne le complété pour la topologie $\overline{\pi}$-adique). On a donc l'inclusion

$$\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\widetilde{A}_{S,b}+\frac{p}{\pi^b}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$$

(rappelons que $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}/\frac{p}{\pi^b}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$, $\mathbf{A}_S^+/\frac{p}{\pi^a}\mathbf{A}_S^+\xrightarrow{\sim}\mathbf{E}_S^+$ et $\frac{p}{\pi^a}\in\mathbf{A}_S^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$). On a donc $\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\widetilde{A}_{S,b}+\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ et donc $\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\widetilde{A}_{S,b+c_S}+\left(\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right)^N\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ pour tout $N\in\mathbf{N}_{>0}$. Ainsi, on a

$$\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\bigcap_{N=1}^{\infty}\left(\widetilde{A}_{S,b+c_S}+\left(\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right)^N\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\right)$$

dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right\}$, *i.e.* $\pi^{c_S}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ est inclus dans l'adhérence de $\widetilde{A}_{S,b+c_S}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right\}$ pour la topologie $\frac{p}{\pi^{b+c_S}}$-adique, qui n'est autre que $\widetilde{A}_{S,b+c_S}$ lui-même (vu qu'il est complet pour la topologie définie par les idéaux $\left\{\left(\left(\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right)^n,\pi^k\right)\right\}_{n,k\in\mathbf{N}}$). On a donc

$$\widetilde{A}_{S,b}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\frac{1}{\pi^{c_S}}\widetilde{A}_{S,b+c_S}. \tag{4}$$

Mais $\tau_{m,S}^{(i)}$ est continu sur $A_{S,b}$ muni de la topologie définie par la famille $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbf{N}}$, car $\tau_{m,S}^{(i)}(I_{n,k})\subseteq I_{n,k}$ (*cf.* définition de $A_{S,b}$) : il se prolonge donc en une application sur $\widetilde{A}_{S,b}$ (à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$) continue pour la topologie définie par la famille $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbf{N}}$, donc *a fortiori* pour la topologie faible. Comme $c_S>0$, il en est de même sur $\widetilde{A}_{S,b+c_S}$, et donc sur $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left[\pi^{-1}\right]\subseteq\widetilde{A}_{S,b+c_S}\left[\pi^{-1}\right]$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left[\pi^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour la topologie faible, $\tau_{m,S}^{(i)}$ se prolonge en un endomorphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ continu pour la topologie faible.

Comme la restriction de $\tau_{m,S}^{(i)}$ à $\bigcup_{n\geq m}\varphi^{-n}(\mathbf{A}_S)$ est à valeurs dans $\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ et est $\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-linéaire, l'endomorphisme $\tau_{m,S}^{(i)}$ est à valeurs dans $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]}$ et est $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]}$-linéaire par continuité.

Enfin, on a $\tau_{m,S}^{(i)}(A_{S,b})\subseteq A_{S,b}$ et donc $\tau_{m,S}^{(i)}\left(\widetilde{A}_{S,b}\right)\subseteq\widetilde{A}_{S,b}$ par continuité, les inclusions (4) impliquent alors

$$\tau_{m,S}^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\right)\subseteq\frac{1}{\pi^{c_S}}\widetilde{A}_{S,b+c_S}\subseteq\frac{1}{\pi^{c_S}}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right\}$$

ce qu'on voulait. □

Lemme 4.12. — *(cf.* [**11**, Lemme 8.9]*) Si* $\overline{z}\in\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ *est tel que* $v_{\mathbf{E}}(\overline{z})\geq-\frac{kp}{p-1}$*, alors on a une écriture (unique) dans* $\widetilde{\mathbf{A}}_S$

$$[\overline{z}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{\pi^{k+\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil}}[\overline{y}_n]$$

où $\overline{y}_n\in\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ *pour tout* $n\in\mathbf{N}$.

Démonstration. — Si $a=\sum_{n=0}^{\infty}p^n[\overline{a}_n]\in\widetilde{\mathbf{A}}_S$ et $N\in\mathbf{N}$, on a

$$w_1\left(\frac{[\overline{\pi}]^N}{p}(a-[\overline{a}_0])\right)=\inf_{n\geq0}\left(Nv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})+v_{\mathbf{E}}(\overline{a}_{n+1})+n\right)\geq Nv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})-1+w_1(a).$$

Construisons les $\overline{y}_n$ par récurrence. On pose $y_0=\pi^k[\overline{z}]$, d'où $\overline{y}_0=\overline{\pi}^k\overline{z}$ et si $y_0,\dots,y_n\in\widetilde{\mathbf{A}}_S$ sont construits, on pose

$$y_{n+1}=\frac{\pi^{\left\lceil\frac{(p-1)(n+1)}{p}\right\rceil-\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil}}{p}(y_n-[\overline{y}_n])=$$
$$=\left(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\right)^{\left\lceil\frac{(p-1)(n+1)}{p}\right\rceil-\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil}\frac{[\overline{\pi}]^{\left\lceil\frac{(p-1)(n+1)}{p}\right\rceil-\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil}}{p}(y_n-[\overline{y}_n])$$

(où $\overline{y}_n$ désigne l'image de y_n modulo p). Comme $w_1(\pi)\geq w_1([\overline{\pi}])$ (proposition 4.2 (d)), on a $w_1(y_{n+1})\geq v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})\left(\left\lceil\frac{(p-1)(n+1)}{p}\right\rceil-\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil\right)-1+w_1(y_n)$ d'après ce qui a été dit au début de la preuve. Une récurrence immédiate montre donc que $w_1(y_n)\geq\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})-n+w_1(y_0)=\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil\frac{p}{p-1}-n+\frac{kp}{p-1}+v_{\mathbf{E}}(\overline{z})$ (proposition 4.2 (d)). Comme $v_{\mathbf{E}}(\overline{z})\geq-\frac{kp}{p-1}$ par hypothèse, on a $w_1(y_n)\geq0$ et donc $\overline{y}_n\in\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ pour tout $n\in\mathbf{N}$. □

Lemme 4.13. — *Soit* $\overline{z}\in\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$.

(a) *On a* $v_{\mathbf{E}}\left(\tau_{m,S}^{(i)}(\overline{z})\right)\geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z})-\frac{(c_S+1)p}{p-1}$.

(b) *Soit* $r'_S = \frac{(p-1)r_S}{p-1+p(c_S+1)r_S} < 1$ *(cf. proposition 4.42). Pour tout* $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ *tel que* $r < r'_S$, *si on pose* $c_2(S) = \frac{rp(c_S+2)}{p-1}$, *on a*

$$w_r\left(\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{z}])\right) \geq w_r([\overline{z}]) - c_2(S).$$

Démonstration. — On peut supposer $z \neq 0$. Soit $k \in \mathbf{Z}$ le plus petit entier tel que $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \geq -\frac{kp}{p-1}$. En particulier, on a $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq -\frac{(k-1)p}{p-1}$, soit $-\frac{(k+1)p}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{2p}{p-1}$.

(a) D'après la proposition 4.11, on a $v_{\mathbf{E}}\left(\tau^{(i)}_{m,S}\left(\frac{\overline{z}}{\overline{\pi}^k}\right)\right) \geq -c_S v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = -\frac{pc_S}{p-1}$, donc $v_{\mathbf{E}}\left(\tau^{(i)}_{m,S}(\overline{z})\right) \geq -\frac{(c_S+k)p}{p-1} = -\frac{(k-1)p}{p-1} - \frac{(c_S+1)p}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{(c_S+1)p}{p-1}$.

(b) D'après le lemme 4.12, on peut écrire $[\overline{z}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{\pi^{k+\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil}}[\overline{y}_n]$ avec $\overline{y}_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ (somme convergente pour la topologie faible). On a donc $\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{z}]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{\pi^{k+\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil}}\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{y}_n])$ (d'après la proposition 4.11, l'application $\tau^{(i)}_{m,S}$ est continue pour la topologie faible), d'où

$$w_r\left(\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{z}])\right) \geq \inf_{n\in\mathbf{N}}\left[w_r\left(\frac{p^n}{\pi^{k+\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil}}\right) + w_r\left(\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{y}_n])\right)\right].$$

D'après la proposition 4.11, si $b = \left\lceil\frac{p-1}{pr_S}\right\rceil$, on a $\tau^{(i)}_{m,S}\left(\widetilde{\mathbf{A}}^+_S\right) \subseteq \frac{1}{\pi^{c_S}}\widetilde{\mathbf{A}}^+_S\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right\}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\overline{y}_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ d'où $[\overline{y}_n] \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_S$: on a $\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{y}_n]) \in \frac{1}{\pi^{c_S}}\widetilde{\mathbf{A}}^+_S\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right\}$. Comme $r < 1$, on a $w_r(\pi) = \frac{pr}{p-1}$ (proposition 4.2 (d)), donc $w_r\left(\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right) = 1 - \frac{rp(b+c_S)}{p-1} > 1 - \frac{rp}{p-1}\left(\frac{p-1}{pr_S} + c_S + 1\right) > 0$: on a $w_r(x) \geq 0$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_S\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_S}}\right\}$. Ainsi, on a $w_r\left(\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{y}_n])\right) \geq -rc_S w_r(\pi) = -\frac{rpc_S}{p-1}$. Par ailleurs, on a $w_r\left(\frac{p^n}{\pi^{k+\left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil}}\right) = n - \left(k + \left\lceil\frac{(p-1)n}{p}\right\rceil\right)w_r(\pi)$, d'où

$$w_r\left(\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{z}])\right) \geq n - \left(k + \frac{(p-1)n}{p} + 1\right)\frac{rp}{p-1} - \frac{rpc_S}{p-1} = (1-r)n - \frac{rp(k+c_S+1)}{p-1}.$$

Puisque $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq -\frac{(k-1)p}{p-1}$ soit $-\frac{(k+1)p}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{2p}{p-1}$, on a donc $w_r\left(\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{z}])\right) \geq rv_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{rp(c_S+2)}{p-1}$ *i.e.* $w_r\left(\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{z}])\right) \geq w_r([\overline{z}]) - c_2(S)$. □

Proposition 4.14. — *Si* $r < r'_S$ *(cf. lemme 4.13) et* $z \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S$, *alors* $\tau^{(i)}_{m,S}(z) \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S$ *et* $w_r\left(\tau^{(i)}_{m,S}(z)\right) \geq w_r(z) - c_2(S)$.

Démonstration. — Écrivons $z = \sum_{k=0}^{\infty} p^k[\overline{z}_k]$ avec $\overline{z}_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et $\lim_{k\to\infty} w_r\left(p^k[z_k]\right) = +\infty$. La série converge pour la topologie définie par w_r donc *a fortiori* pour la topologie faible : on a $\tau^{(i)}_{m,S}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k\tau^{(i)}_{m,S}([\overline{z}_k])$.

Comme on a $w_r\left(\tau_{m,S}^{(i)}([\overline{z}_k])\right) \geq w_r([\overline{z}_k]) - c_2(S)$ d'après le lemme 4.13, on a $\lim_{k\to\infty} w_r\left(p^k\tau_{m,S}^{(i)}([z_k])\right) = +\infty$, d'où $\tau_{m,S}^{(i)}(z) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$.

De plus, comme pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $w_r\left(p^k\tau_{m,S}^{(i)}([\overline{z}_k])\right) \geq w_r(p^k[\overline{z}_k]) - c_2(S) \geq w_r(z) - c_2(S)$, on a $w_r\left(\tau_{m,S}^{(i)}(z)\right) \geq \inf_{k\in\mathbf{N}}\left(w_r\left(\tau_{m,S}^{(i)}([\overline{z}_k])\right)\right) \geq w_r(z) - c_2(S)$. □

4.5. Vérification de la propriété (TS2). — On va construire les anneaux $\Lambda_{m,S}^{(i)}$. On note $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0} = \left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]},\ w_r(z) \geq 0\right\}$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$. Comme $w_r([\overline{\pi}]) = \frac{pr}{p-1} > 0$ (proposition 4.2 (d)), on a $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$.

Lemme 4.15. — *Si $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_{>0}$, l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ est inclus dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ (rappelons que $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right)$). De plus, si $\mathcal{A}_{S,(a,b)}$ désigne son adhérence pour la topologie définie par w_r, ou pour la topologie p-adique, cela revient au même, on a*

$$\mathcal{A}_{S,(a,b)} \subseteq \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0} \subseteq \frac{1}{[\overline{\pi}]^{\left\lceil\frac{a-1}{r}\right\rceil}}\mathcal{A}_{S,(a,b)}$$

(où, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lceil\alpha\rceil$ désigne le plus petit entier $\geq \alpha$).

Démonstration. — L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ étant complet pour la topologie définie par w_r (proposition 4.2 (c)) et $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ fermé pour cette dernière par définition, $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ est complet pour la topologie définie par w_r.

Supposons maintenant $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_{>0}$. Comme $w_r\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right) = 0$ (proposition 4.2 (d)), $\mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right)\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ est un sous-anneau de $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$. Comme $\mathcal{A}_{S,(a,b)}$ est l'adhérence de $\mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right)\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ pour la topologie définie par w_r, on a donc l'inclusion $\mathcal{A}_{S,(a,b)} \subseteq \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, écrivons $k = aq_k + s_k$ avec $q_k \in \mathbf{N}$ et $0 \leq s_k < a$ la division euclidienne de k par a. Tout élément $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S$ peut alors s'écrire de façon unique comme une somme

$$\sum_{k=0}^{\infty}[z_k]\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right)^{q_k}p^{s_k} \tag{5}$$

avec $z_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$. Comme $w_r\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right) = 0$ d'après la proposition 4.2 (d), on a $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ si et seulement si $\lim_{k\to\infty} rv_{\mathbf{E}}(z_k) + s_k = +\infty$ *i.e.* si et seulement si $\lim_{k\to\infty} v_{\mathbf{E}}(z_k) =$

$+\infty$ (c'est-à-dire lorsque la série (5) converge pour w_r). En outre, $z \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ si et seulement si on a de plus $rv_{\mathbf{E}}(z_k) + s_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Soit $z \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$. On a $[\overline{\pi}]^{\lceil \frac{a-1}{r} \rceil} z = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\overline{\pi}^{\lceil \frac{a-1}{r} \rceil} z_k\right] \left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{(\frac{p-1}{p})b}}\right)^{q_k} p^{s_k} \in \mathcal{A}_{S,(a,b)}$ car

$$v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\pi}^{\lceil \frac{a-1}{r} \rceil} z_k\right) \geq \frac{a-1}{r} v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{1}{r}\left((a-1)\frac{p}{p-1} - s_k\right) \geq \frac{a-1}{(p-1)r} \geq 0,$$

d'où la deuxième inclusion.

Reste à montrer que $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{(\frac{p-1}{p})b}}\right]$ est dense dans $\mathcal{A}_{S,(a,b)}$ pour la topologie p-adique. Soit $z \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$. Écrivons-le comme la somme d'une série (5). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq 0$. Posons alors

$$n_k = \min\left(q_k, \left\lfloor \frac{v_{\mathbf{E}}(z_k)}{b} \right\rfloor\right) \in \mathbf{N}$$

(où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière) : d'après ce qui précède, on a $n_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. On peut écrire

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\overline{\pi}^{-(\frac{p-1}{p})bn_k} z_k\right] \left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{(\frac{p-1}{p})b}}\right)^{q_k - n_k} p^{s_k + an_k}. \tag{6}$$

Comme $n_k \leq \frac{v_{\mathbf{E}}(z_k)}{b}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\overline{\pi}^{-(\frac{p-1}{p})bn_k} z_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$: la série (6) a tous ses termes dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{(\frac{p-1}{p})b}}\right]$ et converge pour la topologie p-adique. □

Remarque 4.16. — L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right)$ est un relèvement en caractéristique 0 de $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+ = \left(\mathbf{E}_S^+\right)^{\mathrm{perf}}$. Posons $Y = \mathsf{Spec}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right)$, $X = \mathsf{Spec}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}\right) = Y \setminus \mathrm{V}(\overline{\pi})$ et $\mathcal{P} = \mathsf{Spf}\left(\mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right)\right)$. On a alors une situation analogue à celle envisagée par Berthelot dans [**4**, 1.2]

$$X \overset{j}{\hookrightarrow} Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{P}$$

où j est une immersion ouverte et i une immersion fermée (remarquons toutefois que nos anneaux n'ont pas les propriétés de finitude requises dans *loc. cit.*). Si $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_{>0}$, notons $\mathcal{B}_{(a,b)} = \widehat{\mathrm{Bl}}_{\left(p^a, [\overline{\pi}]^{(\frac{p-1}{p})b}\right)} \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right)$ le schéma formel éclaté de $\mathcal{P}$ en l'idéal $I_{(a,b)} = \left(p^a, [\overline{\pi}]^{(\frac{p-1}{p})b}\right)$. Sur ce dernier, l'image inverse de $I_{(a,b)}$ est inversible. Alors $\mathsf{Spf}\left(\mathcal{A}_{S,(a,b)}\right) = \mathcal{U}_{(a,b)} \subseteq \mathcal{B}_{(a,b)}$ est l'ouvert formel où elle est engendrée par $[\overline{\pi}]^{(\frac{p-1}{p})b}$ (notons que d'après [**4**, 1.1.8], ce dernier est indépendant du choix d'un relèvement de $\overline{\pi}$ si $r < \frac{p-1}{p}$). C'est ce genre d'idée qu'ont utilisé Abbes et Saito pour

définir la filtration de ramification pour les corps locaux à corps résiduel imparfait (cf. [2]), le rationnel $\frac{a}{b}$ mesurant la ramification de $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^{+} \subseteq \mathbf{E}_{S}^{+}$ le long du diviseur défini par $\overline{\pi}$.

On note $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ l'adhérence de $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_{S}^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r, où l'intersection $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_{S}^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ est prise dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}$. On munit $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ de la topologie induite par w_r.

Corollaire 4.17. — *Si $r < r'_S$ (cf. lemme 4.13), le sous-anneau*

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_{S}^{+}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]\left[\pi^{-1}\right]$$

de $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}$ est contenu dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$ et est dense pour la topologie définie par w_r. En particulier, le sous-anneau $\bigcup_{m\in\mathbf{N}} \Lambda_{m,S}^{(i)}$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$ est dense lui aussi.

Démonstration. — Soient $b_S = \left\lceil \frac{p-1}{pr_S} \right\rceil$ (*cf.* proposition 4.42),

$$A_{S,b_S+c_S} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_{S}^{+}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]\left[\frac{p}{\pi^{b_S+c_S}}\right]$$

et $\widetilde{A}_{S,b_S+c_S}$ l'adhérence de A_{S,b_S+c_S} dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}$ pour la topologie définie par la famille d'idéaux $\{I_{n,k} = (\left(\frac{p}{\pi^{b_S+c_S}}\right)^n, \pi^k)\}_{n,k\in\mathbf{N}}$ (*cf.* preuve de la proposition 4.11). Si $r < r'_S = \frac{(p-1)r_S}{p-1+p(c_S+1)r_S}$, on a $w_r\left(\frac{p}{\pi^{b_S+c_S}}\right) = 1 - \frac{rp(b_S+c_S)}{p-1} > 1 - \frac{r}{r'_S} > 0$, donc $\widetilde{A}_{S,b_S+c_S} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$.

Par ailleurs, d'après le lemme 4.15, on sait que $\mathcal{A}_{S,(a,b)}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{+}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$ est dense dans $\mathcal{A}_{S,(a,b)}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$ pour la topologie définie par w_r, il l'est aussi dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$. L'inclusion (4) implique donc que $\widetilde{A}_{S,b_S+c_S}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r. Mais on a $[\overline{\pi}] = \pi + p\alpha$ avec $\alpha \in \widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{+}$, d'où $[\overline{\pi}] = \pi\left(1 + \frac{p}{\pi}\alpha\right) \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{+}\left\{\frac{p}{\pi^{b_S+c_S}}\right\}\right)^{\times}$ (car $b_S \geq 1$) *i.e.* $[\overline{\pi}] = u\pi$ avec u inversible dans $\widetilde{A}_{S,b_S+c_S}$ (*cf.* inclusion (4)). Ainsi, $\widetilde{A}_{S,b_S+c_S}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right] = \widetilde{A}_{S,b_S+c_S}\left[\pi^{-1}\right]$, et $\widetilde{A}_{S,b_S+c_S}\left[\pi^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r.

Comme $w_r\left(\frac{p}{\pi^{b_S+c_S}}\right) > 0$ et $w_r(\pi) > 0$, la topologie définie par la famille d'idéaux $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbf{N}}$ est plus fine que la topologie définie par w_r : l'anneau $A_{S,b_S+c_S}\left[\pi^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{A}_{S,b_S+c_S}\left[\pi^{-1}\right]$ donc dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{S}^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r. Mais

$$A_{S,b_S+c_S}\left[\pi^{-1}\right] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_{S}^{+}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]\left[\pi^{-1}\right]$$

est inclus dans $\bigcup_{m\in\mathbf{N}} \Lambda_{m,S}^{(i)}$. Ce dernier est donc dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r.

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right] & \hookrightarrow & \widetilde{A}_{S,b_S+c_S}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right] & = & \widetilde{A}_{S,b_S+c_S}\left[\pi^{-1}\right] \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & A_{S,b_S+c_S}\left[\pi^{-1}\right] & \hookrightarrow & \bigcup_{m\in\mathbf{N}} \Lambda_{m,S}^{(i)} \end{array} \qquad \square$$

Proposition 4.18. — *Si $r < r'_S$, la restriction de $\tau_{m,S}^{(i)}$ à $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ est un projecteur $\Lambda_{m,S}^{(i)}$-linéaire continu $\tau_{m,S}^{(i)} \colon \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \to \Lambda_{m,S}^{(i)}$.*

Démonstration. — Par construction, on a $\tau_{m,S}^{(i)}\left(\bigcup_{n\geq m} \varphi^{-n}\left(\mathbf{A}_S\right)\right) \subseteq \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. Par ailleurs, on a $\tau_{m,S}^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right) \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ et $\tau_{m,S}^{(i)}$ est continu pour w_r d'après la proposition 4.14 : on a donc $\tau_{m,S}^{(i)}\left(\Lambda_{n,S}^{(i)}\right) \subseteq \Lambda_{m,S}^{(i)}$ pour chaque $n \geq m$. L'anneau $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_{n,S}^{(i)}$ étant dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r (corollaire 4.17) et $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ complet pour cette dernière, on a $\tau_{m,S}^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right) \subseteq \Lambda_{m,S}^{(i)}$. Par ailleurs, $\tau_{m,S}^{(i)}$ est $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$-linéaire et induit l'identité sur $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$: par continuité, $\tau_{m,S}^{(i)}$ est $\Lambda_{m,S}^{(i)}$-linéaire et induit l'identité sur $\Lambda_{m,S}^{(i)}$. $\square$

Proposition 4.19. — *On suppose $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ galoisienne. Si $r < r'_S$, la famille $\left(\Lambda_{m,S}^{(i)}, \tau_{m,S}^{(i)}\right)_{\substack{0\leq i\leq d \\ m\in\mathbf{N}}}$ vérifie la condition (TS2).*

Démonstration. — La propriété (TS2)(a) n'est autre que la proposition 4.18. La première partie de la propriété (TS2)(b) résulte de la propriété 4.14 et la seconde du fait que $\tau_{m,S}^{(i)}$ induit l'identité sur $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ et que $\bigcup_{m\in\mathbf{N}} \Lambda_{m,S}^{(i)}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r (corollaire 4.17). La propriété (TS2) (c) résulte de la propriété 4.11 (iii). La propriété (TS2) (d) résulte de la propriété 4.11 (i) (si $x \in \Lambda_{m,s}^{(i)}$ et $g \in \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, on a $g(x) = g\left(\tau_{m,S}^{(i)}(x)\right) = \tau_{m,S}^{(i)}(g(x)) \in \Lambda_{m,S}^{(i)}$, de sorte que $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ est stable par $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$). Il en est de même de la première partie de la propriété de la propriété (TS2) (d').

Enfin, par continuité, la deuxième partie de la propriété (TS2) (d') se vérifie sur $\bigcup_{n\geq m} \varphi^{-n}\left(\mathbf{A}_S\right)$. Comme $\tau_{m,S}^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_{m,S}^{(d)}$ commute à $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ d'après ce qui précède, il s'agit de voir que la restriction de $\tau_{m,S}^{(0)}$ à $\varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_S\right)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ commute à $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ pour tout $n \geq m$. Mais si $a = \sum_{j=0}^{p^{n-m}-1} a_j[x_0]^{\frac{j}{p^m}}$ avec $a_j \in$

$\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)$, on a $g(a) = \sum_{j=0}^{p^{n-m}-1} g(a_j)[x_0]^{\frac{j\chi(g)}{p^n}}$ (rappelons que $\chi\colon \mathcal{G}_R \to \mathbf{Z}_p^\times$ désigne le caractère cyclotomique). Comme $\chi(g) \in \mathbf{Z}_p^\times$, on a $j\chi(g) \equiv 0 \mod p^m \mathbf{Z}_p \Leftrightarrow j \equiv 0 \mod p^m \mathbf{Z}_p$: le sous-anneau $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)$ étant stable par $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, on a $\tau_{m,S}^{(0)}(g(a)) = g(a_0) = g\left(\tau_{m,S}^{(0)}(a)\right)$ pour tout $g \in \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. □

4.6. Vérification de la propriété (TS3). — Rappelons (*cf.* lemme 4.13) qu'on a posé $c_2(S) = \frac{(c_S+2)r}{p-1}$.

Proposition 4.20. — (a) *Soit* $\overline{z} \in \mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]$. *On peut écrire* $\overline{z}$ *de façon unique comme* $\overline{z} = \sum_{j=0}^{p^n-1} \overline{z_j} x_i^{\frac{j}{p^{m+n}}}$, *avec* $\overline{z_j} \in \mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$. *En plus,* $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq \min_{0\leq j<p^n} v_{\mathbf{E}}(\overline{z_j}) + \frac{p(c_S+1)}{p-1}$.

(b) *Pour* $m,n \in \mathbf{N}$ *et* $r < r'_S$, *on a* $\Lambda_{m+n,S}^{(i)} = \bigoplus_{j=0}^{p^n-1} [x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}} \Lambda_{m,S}^{(i)}$, *et si* $z = \sum_{j=0}^{p^n-1} z_j [x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$ *(avec* $z_j \in \Lambda_{m,S}^{(i)}$ *pour* $0 \leq j < p^n$*), on a*

$$w_r(z) \leq \min_{0\leq j<p^n} w_r(z_j) + c_2(S).$$

Démonstration. — Posons

$$\alpha\colon \bigoplus_{j=0}^{p^n-1} \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] \longrightarrow \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]$$
$$(z_j)_{0\leq j<p^n} \longmapsto \sum_{j=0}^{p^n-1} z_j [x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$$

et

$$\beta\colon \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right] \longrightarrow \bigoplus_{j=0}^{p^n-1} \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$$
$$z \longmapsto \left(\tau_{m,S}^{(i)}\left([x_i]^{\frac{-j}{p^{m+n}}} z\right)\right)_{0\leq j<p^n}$$

D'après le corollaire 4.10 (ii) et la définition de $\tau_{m,S}^{(i)}$, les applications α et β sont bijectives, inverses l'une de l'autre. On déduit du lemme 4.13 la partie (a) de la proposition.

(b) Comme $\tau_{m,S}^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right) \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ (proposition 4.14), les applications α et β induisent des bijections inverses l'une de l'autre entre $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]\right)$ et $\bigoplus_{j=0}^{p^n-1} \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$. Pour $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]\right)$, on

a donc une écriture unique $z = \sum_{j=0}^{p^n-1} z_j [x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$ avec $z_j = \tau_{m,S}^{(i)}\left([x_i]^{\frac{-j}{p^{m+n}}} z\right) \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$, et d'après la proposition 4.14, on a $w_r(z_j) \geq w_r(z) - c_2(S)$ (car $r < r'_S$). En particulier, α et β sont continues pour la topologie définie par w_r : elles se prolongent par continuité en des homéomorphismes inverses l'un de l'autre $\alpha : \bigoplus_{j=0}^{p^n-1} \Lambda_{m,S}^{(i)} \xrightarrow{\sim} \Lambda_{m+n,S}^{(i)}$ et $\beta : \Lambda_{m+n}^{(i)} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j=0}^{p^n-1} \Lambda_m^{(i)}$. Par ailleurs, on a encore les inégalités $w_r(z_j) \geq w_r(z) - c_2(S)$ pour tout $z = \sum_{j=0}^{p^n-1} z_j [x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}} \in \Lambda_{m+n,S}^{(i)}$ et $0 \leq j < p^n$. □

Lemme 4.21. — *Il existe $m_0(S) \in \mathbf{N}$ ne dépendant que de S tel que pour tout $m \geq m_0(S)$, $i \in \{0, \ldots, d\}$ et tout $\overline{z} \in \mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$, on a*

$$v_{\mathbf{E}}\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p+1}{2(p-1)}.$$

Démonstration. — D'après [**3**, Theorems 5.1 & 5.11], il existe M et $N = N(S, M) \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq N$ et tout $s \leq M$, on a un isomorphisme $\mathbf{E}_S^+ \Big/ (\varepsilon - 1)^{p^{n-s}} \mathbf{E}_S^+ \xrightarrow{\sim} S_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) S_n$. D'après le lemme 3.7, il existe $a(S) \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et $i \in \{0, \ldots, d\}$, on a

$$v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) \geq v(x) + \frac{1}{p-1}\left(1 - a(S)p^{-m}\right)$$

pour tout $x \in S_{m+1}[p^{-1}]$. Cela implique que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $S_{m+1} \Big/ \frac{\left(\varepsilon^{(1)} - 1\right)}{\left(\varepsilon^{(m+1)} - 1\right)^{a(S)}} S_{m+1}$, et donc que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_S^+ \Big/ (\varepsilon - 1)^{p^{m-s}} \mathbf{E}_S^+$ si $1 - \frac{a(S)}{p^m} \geq \frac{1}{p^s}$.

Fixons $s \in \mathbf{N}$ tel que ce qui précède soit valable pour $\mathbf{E}_V^+$ et pour $\mathbf{E}_S^+$. Soit ℓ_V (resp. ℓ_S) tel que

$$(\varepsilon - 1)^{\ell_V} \Omega_{\mathbf{E}_V^+ / \mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+} = 0 \qquad (\text{resp. } (\varepsilon - 1)^{\ell_S} \Omega_{\mathbf{E}_S^+ / \mathbf{E}_{\underset{R}{\sim}}^+} = 0).$$

Soit $m_0(S)$ tel que $1 - \frac{a(S)}{p^m} \geq \frac{1}{p^s}$ et $p^{m-s} > \ell_V + \ell_S$ pour $m \geq m_0(S)$. On va démontrer que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_S^+ \Big/ (\varepsilon - 1)^{p^m - \ell_V - \ell_S} \mathbf{E}_S^+$ pour tout $m \geq m_0(S)$. L'homomorphisme $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+ / (\varepsilon - 1)^{p^m} \mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+$ puisque $\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+ = \lim_n \mathrm{W}(k)[\varepsilon^{(n)}]/(\varepsilon^{(n)} - 1)$. Comme $\gamma_i^{p^m} \equiv \mathrm{Id}$ sur $\mathbf{E}_V^+ \Big/ (\varepsilon - 1)^{p^{m-s}} \mathbf{E}_V^+$, on conclut que $\gamma_i^{p^m} - \mathrm{Id} = 0$ est une $\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+$-dérivation sur $\mathbf{E}_V^+ \Big/ (\varepsilon - 1)^{\min(2p^{m-s}, p^m)} \mathbf{E}_V^+$. Par hypothèse on a $(\varepsilon - 1)^{\ell_V} \Omega_{\mathbf{E}_V^+ / \mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+} = 0$ d'où $(\varepsilon - 1)^{\ell_V}\left(\gamma_i^{p^m} - \mathrm{Id}\right) = 0 \mod (\varepsilon - 1)^{\min(2p^{m-s}, p^m)} \mathbf{E}_V^+$. Cela signifie que $\gamma_i^{p^m} \equiv \mathrm{id}$ sur $\mathbf{E}_V^+ \Big/ (\varepsilon - 1)^{\min(2p^{m-s}, p^m) - \ell_V} \mathbf{E}_V^+$

vu que $\mathbf{E}_V^+$ est sans $(\varepsilon-1)$-torsion. On en déduit par induction que $\gamma_i^{p^m} \equiv \mathrm{Id}$ sur $\mathbf{E}_V^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V} \mathbf{E}_V^+$, donc aussi sur $\mathbf{E}_{R^0}^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V} \mathbf{E}_{R^0}^+$. Par le même raisonnement, $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V} \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$, car $\mathbf{E}_{R^0}^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V} \mathbf{E}_{R^0}^+ \subseteq \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V} \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$ est non-ramifiée. De même, on voit que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_S^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V-\ell_S} \mathbf{E}_S^+$.

On pose $\ell := \ell_V + \ell_S$. En appliquant φ^{-m}, on voit donc que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\varphi^{-m}\left(\mathbf{E}_S^+\right) \Big/ (\varepsilon-1)^{1-\ell p^{-m}} \varphi^{-m}\left(\mathbf{E}_S^+\right)$. Comme γ_i agit trivialement sur $x_j^{\frac{1}{p^n}}$ pour $j \neq i$ et $n \in \mathbf{N}$, on voit donc que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur

$$\bigcup_{n>m} \left(\varphi^{-m}\left(\mathbf{E}_S^+\right) \Big/ (\varepsilon-1)^{1-\ell p^{-m}} \varphi^{-m}\left(\mathbf{E}_S^+\right)\right)\left[x_0^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_{i-1}^{\frac{1}{p^n}}, x_{i+1}^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right].$$

Soit $\overline{z} \in \mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$. On a $\overline{z}^{p^m} \in \mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)$: d'après la proposition 4.9, on peut écrire

$$\overline{z}^{p^m} = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ 0<\alpha_j<p^n \\ \alpha_i=0}} \overline{z}_{\underline{\alpha}} x_0^{\frac{\alpha_0}{p^n}} \cdots x_{i-1}^{\frac{\alpha_{i-1}}{p^n}} x_{i+1}^{\frac{\alpha_{i+1}}{p^n}} \cdots x_d^{\frac{\alpha_d}{p^n}}$$

avec $\overline{z}_{\underline{\alpha}} \in \mathbf{E}_S$ et $v_{\mathbf{E}}\left(\overline{z}^{p^m}\right) \leq \min\limits_{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}} v_{\mathbf{E}}(\overline{z}_{\underline{\alpha}}) + c_S v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Quitte à multiplier $\overline{z}^{p^m}$ par une puissance convenable de $\overline{\pi}$, on peut supposer $0 \leq \min\limits_{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}} v_{\mathbf{E}}(\overline{z}_{\underline{\alpha}}) < v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. On a alors $0 \leq v_{\mathbf{E}}\left(\overline{z}^{p^m}\right) < (c_S+1) v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$, et donc $0 \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) < \frac{(c_S+1)}{p^m} v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Ainsi,

$$v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \geq \frac{p\left(1-\ell p^{-m}\right)}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p\left(1-(\ell+c_S+1)p^{-m}\right)}{p-1}$$

pour tout $\overline{z} \in \mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)$. Finalement, quitte à augmenter $m_0(S)$, on peut supposer

$$p\left(1-(\ell+c_S+1)p^{-m_0(S)}\right) > \frac{p+1}{2}. \qquad \square$$

Fixons $\mathbf{A}_S^+ \subseteq \mathbf{A}_S$ comme dans la proposition 4.42. Supposons $r < r_S$. Fixons $a, b \in \mathbf{N}_{>0}$ tels que $\frac{pr}{p-1} < \frac{a}{b} < \frac{pr_S}{p-1}$. On a alors $w_r\left(\frac{p^a}{\pi^b}\right) = a - \frac{bpr}{p-1} > 0$. Comme on a $\mathbf{A}_S^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p^a}{\pi^b}\right\}$, on a $w_r(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbf{A}_S^+$.

Proposition 4.22. — *Il existe $c_4(S) > \frac{r}{p-1}$ (ne dépendant que de S et de r) tel que pour tout $m \geq m_0(S)$, tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ et tout $r < \min\left(r'_S, \frac{2(p-1)}{p(2c_S+7)+1}\right)$, on a*

$$w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \geq w_r(z) + c_4(S)$$

pour tout $z \in \Lambda_{m,S}^{(i)}$.

Démonstration. — Soit

$$z \in \mathbf{A}_S^{+(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] = \bigcup_{n\geq m} \mathbf{A}_S^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_{i-1}]^{\frac{1}{p^n}}, [x_i]^{\frac{1}{p^m}}, [x_{i+1}]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]$$

et $\overline{z}$ son image dans $\mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$. Comme $r < r'_S$, pour $n > m$ assez grand, on a (*cf.* proposition 4.20) une écriture (unique) $z = \sum_{\substack{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1} \\ 0\leq n_j<p^n}} z_{\underline{n}}[x_0]^{\frac{n_0}{p^n}} \cdots [x_d]^{\frac{n_0}{p^n}}$ avec $z_{\underline{n}} \in \mathbf{A}_S^+$ pour tout $\underline{n}$ et $w_r(z) \leq \min_{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1}} w_r(z_{\underline{n}}) + c_2(S)$. Quitte à multiplier z par une puissance convenable de π, on peut supposer que $0 \leq \min_{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1}} w_r(z_{\underline{n}}) < w_r(\pi) = \frac{pr}{p-1}$. On a alors $0 \leq w_r(z) < \frac{p(c_S+3)r}{p-1}$ vu qu'on peut prendre $c_2(S) = \frac{p(c_S+2)r}{p-1}$.

On a $z - [\overline{z}] \in p\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p^a}{\pi^b}\right\}$, donc $w_r(z-[\overline{z}]) \geq w_r(p) = 1$ et *a fortiori* $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z-[\overline{z}])\right) \geq 1$. De même, on a $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z) - \left[\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right]\right) \geq 1$ et donc

$$w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z) - \left[\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right]\right) \geq 1.$$

Mais d'après le lemme 4.21, on a $v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p+1}{2(p-1)}$ *i.e.* $w_r\left(\left[\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right]\right) \geq w_r([\overline{z}]) + \frac{p+1}{2(p-1)}r$. Ainsi,

$$w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \geq \min\left(1, w_r([\overline{z}]) + \frac{p+1}{2(p-1)}r\right) = \min\left(1, w_r(z) + \frac{p+1}{2(p-1)}r\right)$$

vu que $w_r(z-[\overline{z}]) \geq 1$.

Comme $w_r(z) + \frac{p+1}{2(p-1)}r \leq \frac{p(c_S+3)r}{p-1} + \frac{p+1}{2(p-1)}r \leq 1$ (car $r < \frac{2(p-1)}{p(2c_S+7)+1}$), on a en fait

$$w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \geq w_r(z) + c_4(S)$$

avec $c_4(S) = \frac{p+1}{2(p-1)}r > \frac{r}{p-1}$. En inversant π et en prenant l'adhérence pour la topologie faible, on en déduit que cette inégalité est encore valable pour $z \in \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ (le membre de droite valant $-\infty$ lorsque $z \notin \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$). Elle l'est donc *a fortiori* pour $z \in \left(\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right) \cap \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ et donc pour $z \in \Lambda_{m,S}^{(i)}$. □

Posons $\widetilde{r}_S = \min\left(r'_S, \frac{2(p-1)}{p(2c_S+7)+1}\right)$.

Lemme 4.23. — *Supposons $i \in \{1, \ldots, d\}$. Soient $m \geq m_0(S)$, $n > 0$ et $0 < j < p^n$ des entiers. On définit l'application $\mathbf{Z}_p$-linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} \rho_{m,j,n}^{(i)} \colon \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] &\longrightarrow \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] \\ z &\longmapsto z - [\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\gamma_i^{p^m}(z). \end{aligned}$$

(a) *Notons $\overline{\rho}_{m,j,n}^{(i)} \colon \mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right] \to \mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$ l'application induite.*

(a.1) *On a* $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\rho}^{(i)}_{m,j,n}(\overline{z})\right) \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{1}{p-1}$ *pour tout* $\overline{z} \in \mathbf{E}^{(i)}_S(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$. *En particulier,* $\overline{\rho}^{(i)}_{m,j,n}$ *est continu pour la topologie* $\overline{\pi}$*-adique ;*

(a.2) $\overline{\rho}^{(i)}_{m,j,n}$ *induit une bijection d'inverse continu sur chaque sous-anneau du complété de* $\mathbf{E}^{(i)}_S(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$ *pour la topologie* $\overline{\pi}$*-adique qui est fermé (pour la topologie* $\overline{\pi}$*-adique), stable sous l'action de* γ_i*, qui contient* $\varepsilon^{\frac{1}{p^n}}$ *et dans lequel* $1-\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ *est inversible.*

(b) *Si* $r < \widetilde{r}_S$*, alors* $w_r(z) \leq w_r\left(\rho^{(i)}_{m,j,n}(z)\right) \leq w_r(z) + \frac{r}{p-1}$ *pour chaque* $z \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S \cap \left(\mathbf{A}^{(i)}_S(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$. *En particulier,* $\rho^{(i)}_{m,j,n}$ *définit une application continue sur* $\Lambda^{(i)}_{m,S}$ *pour la topologie définie par* w_r.

(c) *Supposons* $r < \widetilde{r}_S$. *On a* $w_r\left(\rho^{(i)}_{m,j,n}(z)\right) \leq w_r(z) + \frac{r}{p-1}$ *pour tout* $z \in \Lambda^{(i)}_{m,S}$. *En outre,* $\rho^{(i)}_{m,j,n}$ *est bijective sur chaque sous-anneau de* $\Lambda^{(i)}_{m,S}$ *qui est complet pour la topologie* w_r*-adique, stable sous l'action de* γ_i*, qui contient* $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^n}}$ *et dans lequel* $1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$ *est inversible.*

Démonstration. — Posons

$$f^{(i)}_{m,j,n} : \mathbf{A}^{(i)}_S(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] \longrightarrow \mathbf{A}^{(i)}_S(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right], \quad z \longmapsto \frac{z}{1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}}$$

et pour $y \in \mathbf{A}^{(i)}_S(\infty)$, $g_y(z) = z - f^{(i)}_{m,j,n}\left(\rho^{(i)}_{m,j,n}(z) - y\right)$. Ces applications sont bien définies et $\mathbf{Z}_p$-linéaires. Écrivons $\rho^{(i)}_{m,j,n}(z) = \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}} + \left(1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\right)z$. On a $g_0(z) = -\frac{\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)}{1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}}[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}$.

(b) Remarquons tout d'abord que $\rho^{(i)}_{m,j,n}$ et $f^{(i)}_{m,j,n}$ sont bien définies sur $\Lambda^{(i)}_{m,S}$ car $\Lambda^{(i)}_{m,S}$ est stable par γ_i et contient $[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}$ (rappelons que $i \neq 0$). Comme $w_r\left(1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\right) = w_{p^{-n_j}r}\left(1-[\varepsilon]\right) = \frac{r}{p^{n_j-1}(p-1)} \leq \frac{r}{p-1}$ (où $n_j = n - v(j) \geq 1$), et $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \geq w_r(z) + c_4(S)$ (proposition 4.22), on a $w_r\left(g_0(z)\right) = w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) - w_r\left(1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\right) \geq w_r(z) + c_4(S) - \frac{r}{p-1}$. En particulier, pour tout $y \in \Lambda^{(i)}_{m,S}$, et $z_1, z_2 \in \Lambda^{(i)}_{m,S}$, on a $w_r\left(g_y(z_2) - g_y(z_1)\right) \geq w_r(z_2 - z_1) + c_4(S) - \frac{r}{p-1}$, car $g_y(z_2) - g_y(z_1) = g_0(z_2 - z_1)$. Comme $c_4(S) > \frac{r}{p-1}$, l'application g_y est contractante pour tout $y \in \Lambda^{(i)}_{m,S}$. Comme $\Lambda^{(i)}_{m,S}$ est séparé et complet pour la topologie définie par w_r, elle admet un unique point fixe : pour tout $y \in \Lambda^{(i)}_{m,S}$, il existe un unique $x \in \Lambda^{(i)}_{m,S}$ tel que $g_y(x) = x$ *i.e.* $\rho^{(i)}_{m,j,n}(x) = y$. L'application $\rho^{(i)}_{m,j,n}$ est donc bijective sur $\Lambda^{(i)}_{m,S}$. Par ailleurs, avec les notations qui précèdent, on a $w_r(x-y) \geq w_r\left(g_y(y) - y\right)$

(car x est la limite de la suite définie par $x_0 = y$ et $x_{n+1} = g_y(x_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$). Comme $g_y(y) - y = \frac{[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}} \gamma_i^{p^m}(y)}{1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}}$, on a donc $w_r(x-y) \geq w_r(y) - \frac{r}{p-1}$, d'où $w_r(x) \geq w_r(y) - \frac{r}{p-1}$.

(c) Résulte de (b) en remarquant que g_y est définie sur les sous-anneaux de $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ qui satisfont aux conditions de (c).

(a) Comme $v_{\mathbf{E}}\left(1-\varepsilon^{\frac{j}{p^n}}\right) = \frac{1}{p^{nj-1}(p-1)} \leq \frac{1}{p-1}$ et $v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p+1}{2(p-1)}$ (lemme 4.21), on a $v_{\mathbf{E}}\left(g_0(\overline{z})\right) = v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) - v_{\mathbf{E}}\left(1-\varepsilon^{\frac{j}{p^n}}\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p+1}{2(p-1)} - \frac{1}{p-1} > v_{\mathbf{E}}(\overline{z})$. En particulier, pour $\overline{y} \in \mathbf{E}_S^{+(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$, l'application $g_{\overline{y}}$ est continue et contractante pour la topologie $\overline{\pi}$-adique. On conclut comme dans la preuve du (b). □

Proposition 4.24. — *Supposons $i \in \{1,\dots,d\}$ et $m \geq m_0(S)$. Alors,*

(a) *L'application $1-\gamma_i^{p^m}$ induit une bijection de $\left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_S\right)$ dans lui-même, et pour tout $\overline{z} \in \left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_S\right)$, on a $v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p(c_S+2)}{p-1}$.*

(b) *Si $r < \widetilde{r}_S$, l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ induit une bijection de*

$$X_{m,S}^{(i)} = \left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)$$

dans lui-même, et pour tout $z \in X_{m,S}^{(i)}$, on a

$$w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \leq w_r(z) + c_2(S) + \frac{r}{p-1}.$$

Démonstration. — (b) Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $z \in \Lambda_{m+n,S}^{(i)}$. D'après la proposition 4.20, on a une écriture unique $z = \sum_{j=0}^{p^n-1} z_j [x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$, avec $z_j \in \Lambda_{m,S}^{(i)}$ et $w_r(z) \leq w_r(z_j) + c_2(S)$ pour tout $j \in \{0,\dots,p^n-1\}$. On a de plus $\tau_{m,S}^{(i)}(z) = 0$ si et seulement si $z_0 = 0$, ce que l'on suppose dans ce qui suit. On a (avec les notations du lemme 4.23) $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z) = \sum_{j=1}^{p^n-1} \rho_{m,j,n}^{(i)}(z_j)[x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$. Mais les applications $\left\{\rho_{m,j,n}^{(i)} \colon \Lambda_{m,S}^{(i)} \to \Lambda_{m,S}^{(i)}\right\}_{0<j<p^n}$ sont bijectives : il en est donc de même de $1-\gamma_i^{p^m} \colon \left(\Lambda_{m+n,S}^{(i)}\right)^{\tau_{m,S}^{(i)}=0} \to \left(\Lambda_{m+n,S}^{(i)}\right)^{\tau_{m,S}^{(i)}=0}$. Par ailleurs, on a $w_r\left(\rho_{m,j,n}^{(i)}(z_j)\right) \leq w_r(z_j) + \frac{r}{p-1}$ pour tout $0 < j < p^n$. Comme $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \leq \min_{0<j<p^n} w_r\left(\rho_{m,j,n}^{(i)}(z_j)\right) + c_2(S)$ d'après la proposition 4.20, on a

$$w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \leq \min_{0<j<p^n} w_r(z_j) + c_2(S) + \frac{r}{p-1} \leq w_r(z) + c_2(S) + \frac{r}{p-1}.$$

On a $\Lambda^{(i)}_{m+n,S} = \Lambda^{(i)}_{m,S} \oplus \left(\Lambda^{(i)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(i)}_{m,S}=0}$ d'où

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda^{(i)}_{m+n,S} = \Lambda^{(i)}_{m,S} \oplus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\Lambda^{(i)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(i)}_{m,S}=0}\right).$$

Comme $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda^{(i)}_{m+n,S}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S$ pour la topologie définie par w_r (corollaire 4.17), il en est de même de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\Lambda^{(i)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(i)}_{m,S}=0}$ dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S\right)^{\tau^{(i)}_{m,S}=0} = X^{(i)}_{m,S}$. Comme $1 - \gamma_i^{p^m}$ induit un homéomorphisme de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\Lambda^{(i)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(i)}_{m,S}=0}$ dans lui-même, il en est de même sur $X^{(i)}_{m,S}$ par continuité. Par ailleurs, on a encore $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \leq w_r(z) + c_2(S) + \frac{r}{p-1}$ pour tout $z \in X^{(i)}_{m,S}$ par continuité.

(a) Résulte du lemme 4.23 comme dans la preuve du (b). □

Lemme 4.25. — *Soient $m \geq m_0(S)$, $n > v\left(\chi(\gamma_0)^{p^m} - 1\right)$ et $0 < j < p^n$ des entiers. Soit $\lambda \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $v\left(\chi(\gamma_0)^{\lambda p^m} - 1\right) = n$. Écrivons $\chi(\gamma_0)^{\lambda p^m} = 1 + p^n u$ où $u \in \mathbf{Z}_p^{\times}$ et posons*

$$\begin{aligned} \rho^{(0)}_{m,j,n} \colon \mathbf{A}^{(0)}_S(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] &\longrightarrow \mathbf{A}^{(0)}_S(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] \\ z &\longmapsto z - [\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}} \gamma_0^{\lambda p^m}(z). \end{aligned}$$

(a) *Notons $\overline{\rho}^{(0)}_{m,j,n} \colon \mathbf{E}^{(0)}_S(\infty)\left[x_0^{\frac{1}{p^m}}\right] \to \mathbf{E}^{(0)}_S(\infty)\left[x_0^{\frac{1}{p^m}}\right]$ l'application induite.*

(a.1) *On a $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\rho}^{(0)}_{m,j,n}(\overline{z})\right) \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{1}{p-1}$ pour tout $\overline{z} \in \mathbf{E}^{(0)}_S(\infty)\left[x_0^{\frac{1}{p^m}}\right]$. En particulier, $\overline{\rho}^{(0)}_{m,j,n}$ est continue pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;*

(a.2) *$\overline{\rho}^{(0)}_{m,j,n}$ induit une bijection d'inverse continu sur chaque sous-anneau du complété de $\mathbf{E}^{(i)}_S(\infty)\left[x_0^{\frac{1}{p^m}}\right]$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique qui est fermé (pour la topologie $\overline{\pi}$-adique), stable sous l'action de γ_0 et qui contient $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^m}}$.*

(b) *Supposons $r < \widetilde{r}_S$. Alors pour tout $z \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S \cap \left(\mathbf{A}^{(0)}_S(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$, on a $w_r(z) \leq w_r\left(\rho^{(0)}_{m,j,n}(z)\right) \leq w_r(z) + \frac{r}{p-1}$. En particulier, $\rho^{(0)}_{m,j,n}$ définit une application continue sur $\Lambda^{(0)}_{m,S}$ pour la topologie définie par w_r.*

(c) *Supposons $r < \widetilde{r}_S$. On a $w_r\left(\rho^{(0)}_{m,j,n}(z)\right) \leq w_r(z) + \frac{r}{p-1}$ pour tout $z \in \Lambda^{(0)}_{m,S}$. En outre, $\rho^{(0)}_{m,j,n}$ est bijective sur chaque sous-anneau de $\Lambda^{(0)}_{m,S}$ complet pour la topologie w_r-adique, stable sous l'action de γ_0 et qui contient $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^m}}$.*

Démonstration. — Posons

$$f^{(0)}_{m,j,n}\colon \mathbf{A}^{(0)}_S(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] \longrightarrow \mathbf{A}^{(0)}_S(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]$$
$$z \longmapsto \frac{z}{1-[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}}$$

et pour $y \in \mathbf{A}^{(0)}_S(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]$, $g_y(z) = z - f^{(0)}_{m,j,n}\left(\rho^{(0)}_{m,j,n}(z) - y\right)$. Ces applications sont bien définies et $\mathbf{Z}_p$-linéaires. Écrivons $\rho^{(0)}_{m,j,n}(z) = \left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}} + \left(1-[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}\right)z$. On a $g_0(z) = -\frac{\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)}{1-[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}}[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}$.

(b) Remarquons tout d'abord que les applications $\rho^{(0)}_{m,j,n}$ et $f^{(0)}_{m,j,n}$ sont bien définies sur $\Lambda^{(0)}_{m,S}$ car $\Lambda^{(0)}_{m,S}$ est stable par γ_0 et contient $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^m}}$. Comme $w_r\left(1-[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}\right) \leq \frac{r}{p-1}$ (*cf.* preuve du lemme 4.23), et $w_r\left(\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)\right) \geq w_r(z) + c_4(S)$ (proposition 4.22 et récurrence sur λ), on a $w_r\left(g_0(z)\right) \geq w_r(z) + c_4(S) - \frac{r}{p-1}$. Comme $c_4(S) > \frac{r}{p-1}$, on conclut comme dans la preuve du lemme 4.23 que l'application g_y est contractante pour tout $y \in \Lambda^{(i)}_{m,S}$ et donc qu'elle admet un unique point fixe $x \in \Lambda^{(0)}_{m,S}$, et que ce dernier vérifie $w_r(x) \geq w_r(y) - \frac{r}{p-1}$.

(c) Résulte de (b) en remarquant que g_y est définie sur chaque sous-anneau de $\Lambda^{(0)}_{m,S}$ satisfaisant aux conditions de (c).

(a) Analogue à la preuve du (b) (*cf.* preuve du lemme 4.23). □

Proposition 4.26. — *Supposons $m \geq m_0(S)$.*

(a) *L'application $1-\gamma_0^{p^m}$ induit une bijection de $\left(1-\tau^{(0)}_{m,S}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_S\right)$ dans lui-même, et pour chaque $\overline{z} \in \left(1-\tau^{(0)}_{m,S}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_S\right)$ on a $v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p(c_S+2)}{p-1}$.*

(b) *Supposons $r < \widetilde{r}_S$. Alors l'application $1-\gamma_0^{p^m}$ induit une bijection de $X^{(0)}_{m,S} = \left(1-\tau^{(0)}_{m,S}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S\right)$ dans lui-même, et pour tout $z \in X^{(0)}_{m,S}$, on a*

$$w_r\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(z)\right) \leq w_r(z) + c_2(S) + \frac{r}{p-1}.$$

Démonstration. — Soient $n > v\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)$ et $\lambda \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $v\left(\chi(\gamma_0)^{\lambda p^m}-1\right) = n$. Écrivons $\chi(\gamma_0)^{\lambda p^m} = 1 + p^n u$ où $u \in \mathbf{Z}_p^\times$.

(b) Soit $z \in \Lambda^{(0)}_{m+n,S}$. D'après la proposition 4.20, on a une écriture unique $z = \sum_{j=0}^{p^n-1} z_j[x_0]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$, avec $z_j \in \Lambda^{(0)}_{m,S}$ et $w_r(z) \leq w_r(z_j) + c_2(S)$ pour tout $j \in \{0,\dots,p^n-1\}$. On a de plus $\tau^{(0)}_{m,S}(z) = 0$ si et seulement si $z_0 = 0$, ce que l'on suppose dans ce qui suit. On a (avec les notations du lemme 4.25) $\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z) = \sum_{j=1}^{p^n-1} \rho^{(0)}_{m,j,n}(z_j)[x_0]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$. Mais les applications $\left\{\rho^{(0)}_{m,j,n}\colon \Lambda^{(0)}_{m,S} \to \Lambda^{(0)}_{m,S}\right\}_{0<j<p^n}$ sont

bijectives : il en est donc de même de $1-\gamma_i^{\lambda p^m}:\ \left(\Lambda^{(0)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(0)}_{m,S}=0}\to\left(\Lambda^{(0)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(0)}_{m,S}=0}$. Par ailleurs, on a $w_r\left(\rho^{(0)}_{m,j,n}(z_j)\right)\leq w_r(z_j)+\frac{r}{p-1}$ pour tout $0<j<p^n$. Comme dans la preuve de la proposition 4.24, on en déduit que

$$w_r\left(\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)\right)\leq w_r(z)+c_2(S)+\frac{r}{p-1}$$

pour tout $z\in\left(\Lambda^{(0)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(0)}_{m,S}=0}$. Mais $1-\gamma_0^{\lambda p^m}=\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)\left(1+\gamma_0^{p^m}+\cdots+\gamma_0^{(\lambda-1)p^m}\right)$ d'où $w_r\left(\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)\right)\geq w_r\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(z)\right)$ pour tout $z\in\Lambda^{(0)}_{m+n,S}$. Il en résulte que

$$1-\gamma_i^{p^m}:\ \left(\Lambda^{(0)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(0)}_{m,S}=0}\to\left(\Lambda^{(0)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(0)}_{m,S}=0}$$

est lui aussi bijectif, et que pour tout $z\in\left(\Lambda^{(0)}_{m+n,S}\right)^{\tau^{(0)}_{m,S}=0}$, on a

$$w_r\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(z)\right)\leq w_r(z)+c_2(S)+\frac{r}{p-1}.$$

Un argument de passage à la limite identique à celui de la proposition 4.24 permet alors de conclure.

(a) Analogue à la preuve de (b). □

Proposition 4.27. — *Si $r<\widetilde{r}_S$, la famille $\left(\Lambda^{(i)}_{m,S},\tau^{(i)}_{m,S}\right)_{\substack{0\leq i\leq d\\ m\geq m_0(S)}}$ vérifie la condition (TS3).*

Démonstration. — C'est la conjonction des propositions 4.24 et 4.26 (pour (TS3) (a), on peut prendre $c_3(S)=c_2(S)+\frac{r}{p-1}$) et de la proposition 4.22 (pour (TS3) (b)). □

4.7. Application : surconvergence des représentations p-adiques. — On définit l'anneau $\mathbf{A}$ comme étant le complété, pour la topologie p-adique, du sous-anneau $\bigcup_{S_\infty}\mathbf{A}_S$ de $\widetilde{\mathbf{A}}$, la réunion étant prise sur les sous-R_∞-algèbres S_∞ de $\overline{R}$ qui sont normales (*cf.* [**3**, 7.8]). D'après [**3**, Proposition 7.8], pour toute sous-R-algèbre finie normale S de $\overline{R}$, on a $\mathbf{A}_S=\mathbf{A}^{\mathcal{H}_S}$.

Pour $r\in\mathbf{Q}_{>0}$ on pose $\mathbf{A}^{(0,r]}:=\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\cap\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}^{(0,r]}:=\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}\cap\mathbf{B}$ l'intersection étant prise dans $\widetilde{\mathbf{B}}$. On définit $\mathbf{A}^\dagger:=\bigcup_r\mathbf{A}^{(0,r]}=\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\cap\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}^\dagger:=\bigcup_r\mathbf{B}^{(0,r]}=\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\cap\mathbf{B}$. On pose $\mathbf{A}^{(0,r]}_S:=\left(\mathbf{A}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_S}$, $\mathbf{B}^{(0,r]}_S:=\left(\mathbf{B}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_S}$, $\mathbf{A}^\dagger_S:=\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^{\mathcal{H}_S}$ et $\mathbf{B}^\dagger_S:=\left(\mathbf{B}^\dagger\right)^{\mathcal{H}_S}$.

Proposition 4.28. — *On a les propriétés suivantes :*

(a) $\mathbf{A}^{(0,r]}_S=\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S\cap\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}^\dagger_S=\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_S\cap\mathbf{A}_S$, $\mathbf{B}^{(0,r]}_S=\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}_S\cap\mathbf{B}_S$ *et* $\mathbf{A}^\dagger_S=\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_S\cap\mathbf{B}_S$.

(b) $\mathbf{A}^{(0,r]}_S$ *est séparé et complet pour la topologie définie par w_r.*

(c) *Pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *on a* $\varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_S^{(0,p^m r]}\right) = \mathbf{A}_S^{(0,r]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right] = \bigcap_{i=0}^{d} \Lambda_{m,S}^{(i)}$.

(d) *Si* $r < r'_S$ *(cf. lemme 4.13), le sous-anneau* $\mathbf{A}_S^+\left[\pi^{-1}\right]$ *de* $\mathbf{A}_S$ *est contenu dans* $\mathbf{A}_S^{(0,r]}$ *et est dense pour la topologie définie par* w_r.

(e) $\mathbf{A}_S^{(0,r]}/p\mathbf{A}_S^{(0,r]} \cong \mathbf{E}_S$ *pour* $r < \frac{(p-1)r_S}{p}$ *(cf. proposition 4.42). En particulier,* $\mathbf{A}_S^\dagger/p\mathbf{A}_S^\dagger \cong \mathbf{E}_S$.

(f) *Le couple* $\left(\mathbf{A}_S^\dagger, p\mathbf{A}_S^\dagger\right)$ *est hensélien.*

(g) *Les extensions* $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^\dagger \subseteq \mathbf{A}_S^\dagger$ *et* $\mathbf{B}_{\widetilde{R}}^\dagger \subseteq \mathbf{B}_S^\dagger$ *sont finies et étales.*

Démonstration. — (a) L'assertion résulte de ce que par définition $\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_S} = \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ et du fait que $\mathbf{A}^{\mathcal{H}_S} = \mathbf{A}_S$ (*cf.* [**3**, Proposition 7.8 (iii)]).

(b) Découle de (a), du fait que $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est séparé et complet pour la topologie définie par w_r (proposition 4.2 (c)) et du fait que $\mathbf{A}_S$ est séparé et complet pour la topologie faible par construction (et *a fortiori* pour la topologie définie par w_r).

(c) Par définition, $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ est l'adhérence de $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ pour la topologie définie par w_r. D'après la proposition 4.18, l'opérateur $\tau_{m,S}^{(0)} \circ \cdots \circ \tau_{m,S}^{(d)}$ est $\mathbf{A}_S^{(0,r]}$-linéaire continu : l'image de $\Lambda_{m,S}^{(i)}$ est contenue dans l'adhérence de $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ pour la topologie définie par w_r. Le cas $m = 0$ résulte de (a) et (b). Le cas général découle du fait que $\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right] = \varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)$ (corollaire 4.10 (ii)) et du fait que $\varphi^{-m} : \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,p^m r]} \to \widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ est un isomorphisme topologique (proposition 4.2 (b)).

(d) On sait (proposition 4.42) que $\mathbf{A}_S^{(0,r]}$ contient $\mathbf{A}_S^+$ pour $r < \frac{(p-1)r_S}{p}$. On a montré dans le corollaire 4.17 que si $r < r'_S$, le sous-anneau

$$\bigcup_{m\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_S^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]\left[\pi^{-1}\right]$$

de $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}$ est dense pour la topologie définie par w_r. D'après le corollaire 4.10, on sait que $\bigcup_{m\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ est un $\mathbf{A}_S$-module libre de base

$$\left\{[x_0]^{\frac{i_0}{p^m}} \cdots [x_d]^{\frac{i_d}{p^m}}\right\}_{\substack{m\in\mathbf{N} \\ 0\leq i_j<p^m}}.$$

Comme $w_r\left([x_0]^{\frac{i_0}{p^m}} \cdots [x_d]^{\frac{i_d}{p^m}}\right) = 0$, une suite $\left\{\sum a_{m,i_0,\ldots,i_d}^{(k)} [x_0]^{\frac{i_0}{p^m}} \cdots [x_d]^{\frac{i_d}{p^m}}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy pour la topologie définie par w_r si et seulement si $\left\{a_{m,i_0,\ldots,i_d}^{(k)}\right\}$ est de Cauchy pour chaque m, $i_0, \ldots, i_d$. La conclusion en résulte.

(e) Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}/p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{E}}_S$ et $\mathbf{A}_S/p\mathbf{A}_S = \mathbf{E}_S$ (proposition 4.42), on a $p\mathbf{A}_S^{(0,r]} = \mathbf{A}_S^{(0,r]} \cap (p\mathbf{A}_S)$ d'après le (a). On a donc $\mathbf{A}_S^{(0,r]}/p\mathbf{A}_S^{(0,r]} \subseteq \mathbf{A}_S/p\mathbf{A}_S = \mathbf{E}_S$. L'assertion résulte de (d) et de la proposition 4.42.

(f) Les couples $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}, p\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\right)$ et $(\mathbf{A}_S, p\mathbf{A}_S)$ sont henséliens, le premier d'après la proposition 4.6 et le second parce que $\mathbf{A}_S$ est séparé et complet pour la topologie p-adique. L'assertion découle alors de (a).

(g) Montrons que $\mathbf{A}_S^{\dagger}$ est un $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{\dagger}$-module de type fini. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ éléments de $\mathbf{A}_S^{+}$, dont les images modulo $p\mathbf{A}_S^{+}$ engendrent $\mathbf{E}_S^{+}$ comme $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^{+}$-module : on a $\mathbf{A}_S^{+} = \alpha_1\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+} + \cdots + \alpha_s\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+} + p\mathbf{A}_S^{+}$. L'anneau $\mathbf{A}_S^{+}$ étant complet pour la topologie faible (proposition 4.42 (iii)) donc *a fortiori* pour la topologie p-adique, on conclut que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ engendrent $\mathbf{A}_S^{+}$ comme $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+}$-module. On déduit alors de (d) que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ engendrent $\mathbf{A}_S^{(0,r]}$ comme $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{(0,r]}$-module si $r < r'_S$. En particulier, $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{\dagger} \subseteq \mathbf{A}_S^{\dagger}$ est finie. La preuve qu'elle est aussi étale résulte alors de (f) comme dans la preuve de la proposition 4.7. □

Théorème 4.29. — *Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, les applications*

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}\left(\mathbf{A}_S^{\dagger}\right)\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}\right)\right)$$

et

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}\left(\mathbf{B}_S^{\dagger}\right)\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\right)\right),$$

(déduites des inclusions $\mathbf{A}_S^{\dagger} \subset \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$ et $\mathbf{B}_S^{\dagger} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$) sont bijectives, la limite inductive étant prise sur les sous-R_∞-algèbres normales S_∞ de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie sur $R_\infty[p^{-1}]$ et galoisienne sur $R[p^{-1}]$.

Démonstration. — On prouve le théorème pour $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$. Le cas de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ est analogue.

D'après la proposition 4.8, on a une bijection

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}\right)\right)$$

et de même

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}\right)\right)$$

où la limite inductive est prise les sous-R_∞-algèbres normales S_∞ de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie sur $R_\infty[p^{-1}]$ et galoisienne sur $R[p^{-1}]$.

Soit S une sous-R-algèbre finie normale de $\overline{R}$ telle que l'extension finie étale $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne (remarquons que les R_∞-algèbres S_∞ qui se déduisent de telles algèbres forment un système cofinal parmi celles qui sont seulement supposées être galoisiennes sur $R[p^{-1}]$). Si $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ vérifie $r < \widetilde{r}_S$, les conditions (TS2) et

(TS3) sont remplies par la famille $\left(\Lambda_{m,S}^{(i)}, \tau_{m,S}^{(i)}\right)_{\substack{0\leq i\leq d \\ m\geq m_0(S)}}$ (propositions 4.19 & 4.27). D'après le théorème 2.4 (appliqué à $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, $G = \mathcal{G}_R$, $G' = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S[p^{-1}]\right)$ et $H' = \mathcal{H}_S$), l'application naturelle

$$\iota_{S,r}\colon \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\Lambda_{\infty,S}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)\right)$$

est bijective. Mais d'après la proposition 4.28 (c), on a $\bigcap_{i=0}^{d} \Lambda_{m,S}^{(i)} = \varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_S^{(0,p^m r]}\right)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, de sorte que

$$\iota_{S,r}\colon \varinjlim_{m\geq m_0(S)} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_S^{(0,p^m r]}\right)\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)\right)$$

Comme $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, on a

$$\varinjlim_{\substack{r\in\mathbf{Q}_{>0} \\ r<\widetilde{r}_s}} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\right)\right)$$

et

$$\varinjlim_{\substack{r\in\mathbf{Q}_{>0} \\ r<\widetilde{r}_s}} \varinjlim_{m\geq m_0(S)} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_S^{(0,p^m r]}\right)\right)\right) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{m\geq m_0(S)} \varinjlim_{\substack{r\in\mathbf{Q}_{>0} \\ r<\widetilde{r}_s}} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_S^{(0,p^m r]}\right)\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}\left(\mathbf{A}_S^{\dagger}\right)\right)\right)$$

On en déduit la bijection

$$\varinjlim_{\substack{r\in\mathbf{Q}_{>0} \\ r<\widetilde{r}_s}} \iota_{s,r}\colon \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}\left(\mathbf{A}_S^{\dagger}\right)\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\right)\right).$$

Le théorème en résulte. □

Remarque 4.30. — Pour prouver le théorème 4.29, on ne peut pas appliquer directement le théorme 2.16 avec $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, parce qu'étant donné un cocycle U, provenant par inflation d'un cocycle sur $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r]}\right)$, les

propriétés (TS2) et (TS3) sont vérifiées pour $r < \widetilde{r}_S$, ce qui n'est pas forcément le cas du r dont on est partis. On ne peut pas non plus le faire avec $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$, parce que les nombres $c_2(S)$, $c_3(S)$ et $c_4(S)$ dépendent de r, et tendent vers 0 lorsque r tend vers 0. Cela explique pourquoi on a ici séparé la descente et la décomplétion.

Pour appliquer ce théorème aux (φ, Γ_R)-modules, il faut raffiner la proposition 2.6 et le lemme 2.7.

Lemme 4.31. — (a) *Soit* $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}$ *l'adhérence de* $\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)$ *dans* $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ *pour la topologie faible. Soient* $m \in \mathbf{N}$ *et* $W \subset \widetilde{\mathbf{A}}_S$ *un sous-*$\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$*-module de type fini stable par* $\gamma_i^{p^m}$. *Alors* $W \subset \bigcup_{n \geq m} \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^n}}\right]$.

(b) *De même, si* $W \subset \widetilde{\mathbf{B}}_S$ *est un sous-*$\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}, \frac{1}{p}\right]$*-module de type fini stable par* $\gamma_i^{p^m}$, *alors* $W \subset \bigcup_{n \geq m} \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^n}}, \frac{1}{p}\right]$.

Démonstration. — (*cf.* preuve de 2.6). (a) Soit $w^{(1)}, \ldots, w^{(r)}$ une famille génératrice de W sur $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$, et w le vecteur colonne dont les composantes sont $w^{(1)}, \ldots, w^{(r)}$. Pour tout $m' \geq m$ soit $M_{m'} \in \mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ telle que $\gamma_i^{p^{m'}}(w) = M_{m'}w$. Posons $y_{m'} = \left(1 - \tau_{m',S}^{(i)}\right)(w)$. Comme $\tau_{m',S}^{(i)}(M_{m'}) = M_{m'}$, car $M_{m'}$ est à coefficients dans $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$, on a $\gamma_i^{p^{m'}}(y_{m'}) = M_{m'}y_{m'}$ vu que $\tau_{m',S}^{(i)}$ commute à l'action de γ_i (proposition 4.11 (i)). D'après les propositions 4.24 (a) et 4.26 (a), l'application $1 - \gamma_i^{p^{m'}}$ est inversible sur $\left(1 - \tau_{m',S}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_S\right)$ d'inverse continu. *A fortiori* $1 - \gamma_i^{p^m}$ est inversible sur $\left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)$ (puisque son quotient modulo p coïncide avec $\left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_S\right)$). En particulier, si v_p désigne la valuation p-adique sur $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ normalisée par $v_p(p) = 1$, on a $v_p\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)z\right) = v_p(z)$ pour tout $z \in \left(1 - \tau_{m,S}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)$.

S'il existe $m' \geq m$ tel que $v_p(1 - M_{m'}) > 0$, alors

$$v_p(y_{m'}) = v_p\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)y_{m'}\right) = \\ = v_p\left(\left(1 - M_{m'}\right)y_{m'}\right) \geq v_p(1 - M_{m'}) + v_p(y_{m'}) > v_p(y_{m'})$$

d'où $v_p(y_{m'}) = +\infty$ *i.e.* $y_{m'} = 0$.

Supposons au contraire que $v_p(1 - M_{m'}) = 0$ pour tout $m' \geq m$. Soit $\overline{M}_{m'} \in \mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{E}_S^{(i)}(\infty)}\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ la réduction de $M_{m'}$ modulo p. Par continuité de l'action de Γ_S pour la topologie définie par $v_{\mathbf{E}}$, on a $\lim_{m' \to \infty} \overline{M}_{m'} = 1$: quitte à augmenter m, on peut supposer $m \geq m_0(S)$ (*cf.* lemme 4.21) et $v_{\mathbf{E}}\left(1 - \overline{M}_m\right) \geq \frac{p(c_S+2)}{p-1} + 1$. Soit

h_m la valuation p-adique de y_m. Si $h_m < +\infty$, notons $\overline{y}_m$ la réduction de $p^{-h_m}y_m$ modulo p. D'après les propositions 4.24 (a) et 4.26 (a), on a

$$v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_m) \geq v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\overline{M}_m\right)\overline{y}_m\right) - \frac{p(c_S+2)}{p-1}$$
$$\geq v_{\mathbf{E}}\left(1-\overline{M}_m\right) + v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_m) - \frac{p(c_S+2)}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_m) + 1$$

d'où $v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_m) = +\infty$ *i.e.* $\overline{y}_m = 0$, ce qui contredit le fait que $h_m < +\infty$. On a donc $h_m = +\infty$ et $y_m = 0$.

Dans tous les cas, on conclut que quitte à augmenter m, on a $y_m = 0$, soit $\tau_{m,S}^{(i)}(w) = w$: le vecteur w est à coefficients dans le séparé complété $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$ de $\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$ pour la topologie faible d'après la proposition 4.11.

(b) Soit $w^{(1)},\dots,w^{(r)}$ une famille génératrice de W sur $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}},\frac{1}{p}\right]$ constituée d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$, et w le vecteur colonne dont les composantes sont $w^{(1)},\dots,w^{(r)}$. Comme précédement, pour $m' \geq m$ on a $M_{m'} \in \mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}},\frac{1}{p}\right]\right)$ telle que $\gamma_i^{p^{m'}}(w) = M_{m'}w$. Par continuité de l'action de Γ_S, pour m' assez grand, on a $M_{m'} \in \mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ (car $\widetilde{\mathbf{B}}_S = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{p^n}\widetilde{\mathbf{A}}_S$) : quitte à augmenter m, on peut supposer que $M_m \in \mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$. Il suffit alors d'appliquer le (a) au sous-$\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-module de W engendré par $w^{(1)},\dots,w^{(r)}$. □

Lemme 4.32. — *Pour chaque $m \in \mathbf{N}$ on a $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S) = \overline{\mathbf{A}_S^{(0)}(\infty)}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] \cap \cdots \cap \overline{\mathbf{A}_S^{(d)}(\infty)}\left[[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$.*

Démonstration. — Le cor. 4.10 (ii) affirme que $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S) = \mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\cdots[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. On conclut en remarquant que $\overline{\mathbf{A}_S^{(0)}(\infty)}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] \cap \cdots \cap \overline{\mathbf{A}_S^{(d)}(\infty)}\left[[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ est l'image de $\tau_{m,S}^{(0)} \circ \cdots \circ \tau_{m,S}^{(d)}$. □

Proposition 4.33. — *Soit S_∞ une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie sur $R_\infty[p^{-1}]$ et galoisienne sur $R[p^{-1}]$. Soient U,U' : $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)$ (resp. U,U' : $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_S)\right)$) deux cocycles tels qu'il existe $M \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)$ (resp. $M \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}_S\right)$) avec $U'_g = M^{-1}U_g g(M)$ pour tout $g \in \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Alors $M \in \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)$ (resp. $M \in$*

$\mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_S)\right)$). *En particulier, les applications*

$$\mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)\right)$$

et

$$\mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_S)\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}_S\right)\right)$$

sont injectives.

Démonstration. — (*cf.* preuve du lemme 2.7). On va prouver la première assertion, la deuxième se traitant de façon analogue. Soit $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ une extension finie étale de groupe de Galois $G_{S/R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}] = SR_\infty[p^{-1}]$. On a alors la suite exacte $0 \to \Gamma_S \to \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to G_{S/R} \to 0$.

Comme $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments (car $G_{S/R}$ est fini), il existe un entier m tel que $U_g, U'_g \in \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)\right)$ pour tout $g \in \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Pour tout $g \in \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, on a $M^{-1}U_g g(M) = U'_g$, soit $g(M) = U_g^{-1}MU'_g$. Pour $i \in \{0, \dots, d\}$, notons W_i le sous-$\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-module de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ engendré par les coefficients de la matrice M. Ce sous-module est stable par $\gamma_i^{p^m}$ et il est de type fini. Le lemme 4.31 assure que quitte à augmenter m, on a $W_i \subset \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. La matrice M est donc à coefficients dans $\overline{\mathbf{A}_S^{(0)}(\infty)}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] \cap \cdots \cap \overline{\mathbf{A}_S^{(d)}(\infty)}\left[[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. Cette intersection n'est autre que $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)$ en vertu du lemme 4.32. En particulier, les cocycles U et U' sont déjà cohomologues dans $\mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)$. □

Soit V un $\mathbf{Z}_p$-module (resp. un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel) de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$. On pose

$$\mathcal{D}^\dagger(V) := \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)^{\mathcal{H}_R}, \qquad \mathcal{D}(V) := \left(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)^{\mathcal{H}_R}.$$

On voit que $\mathcal{D}^\dagger(V)$ (resp. $\mathcal{D}(V)$) est un $\mathbf{A}_R^\dagger$-module (resp. un $\mathbf{A}_R$-module) muni d'une action résiduelle de Γ_R et d'un opérateur de Frobenius φ (défini par $\varphi \otimes 1$ sur $\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$).

On définit la catégorie des (φ, Γ_R)-modules étales sur $\mathbf{A}_R^\dagger$ (resp. sur $\mathbf{A}_R$) comme étant la catégorie des $\mathbf{A}_R^\dagger$-modules (resp. des $\mathbf{A}_R$-modules) M de type fini munis d'une action semilinéaire de Γ_R et d'un opérateur semilinéaire φ commutant à l'action de Γ_R, qui sont étales *i.e.* tels que $\varphi \otimes 1 \colon M \otimes^{\varphi}_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_R \to M$ est un isomorphisme.

Théorème 4.34. — *Le foncteur $\mathcal{D}$ définit une équivalence de catégories abéliennes tensorielles entre la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-modules de type fini munis d'une action linéaire et*

continue de $\mathcal{G}_R$ et celle des (φ, Γ_R)-modules étales sur $\mathbf{A}_R$. Un quasi-inverse est donné par $D \mapsto (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_R} D)^{\varphi=1}$.

Démonstration. — [**3**, Theorem 7.11]. □

Théorème 4.35. — *Soit V un $\mathbf{Z}_p$-module (resp. un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel) de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$. Le $\mathbf{A}_R^\dagger$-module (resp. $\mathbf{B}_R^\dagger$-module) $\mathcal{D}^\dagger(V)$ est étale, de type fini, projectif si V est libre. En outre,*

$$V = \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)\right)^{\varphi=1} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(V) = \mathbf{A}_R \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V).$$

Par ailleurs, si V est libre de rang n il existe une sous-R_∞-algèbre normale S_∞ de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie sur $R_\infty[p^{-1}]$, galoisienne sur $R[p^{-1}]$ et $\mathbf{A}_S^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)$ est un $\mathbf{A}_S^\dagger$-module libre de rang n.

Démonstration. — Le cas où V est un $\mathbf{Z}_p$-module de torsion résulte du théorème 4.34 puisque $\mathbf{A}^\dagger/p^n\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}/p^n\mathbf{A}$.

Supposons que V est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini sans torsion. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base du $\mathbf{Z}_p$-module V. L'action de $\mathcal{G}_R$ sur V est décrite dans cette base par un cocycle continu $U\colon \mathcal{G}_R \to \mathsf{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$. Soit $\alpha \in \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right)\right)$ l'image de ce cocycle. D'après le théorème 4.29, il existe une sous-R_∞-algèbre normale S_∞ de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie sur $R_\infty[p^{-1}]$, galoisienne sur $R[p^{-1}]$ et telle que $\alpha \in \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S^\dagger)\right)\right)$: il existe $M_0 \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right)$ tel que $g \mapsto M_0^{-1} U_g g(M_0)$ est trivial sur $\mathcal{H}_S$, et à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S^\dagger)\right)$.

D'après le théorème 4.34, on a $\mathcal{D}(V)/p\mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(V/pV)$. Le module V/pV étant fini, quitte à remplacer S_∞ par une extension finie, on peut supposer que le $\mathbf{A}_S$-module $\mathcal{D}(V) \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S$ est libre de rang égal au rang du $\mathbf{Z}_p$-module V. Soit $\{r_1, \dots, r_n\}$ une base de ce $\mathbf{A}_S$-module et $N \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{A})$ la matrice de changement de base de $\{e_1, \dots, e_n\}$ dans $\{r_1, \dots, r_n\}$: le cocycle $g \mapsto N^{-1} U_g g(N)$ est trivial sur $\mathcal{H}_S$ et à valeurs dans $\mathsf{GL}_n(\mathbf{A}_S)$. Soit β son image dans $\mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n(\mathbf{A}_S)\right)$.

Comme α et β ont même image dans $\mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)\right)$, ils ont même image dans $\mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)\right)$ en vertu de la proposition 4.33. Le groupe $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ étant topologiquement de type fini, on peut supposer (quitte à changer la base $\{r_1, \dots, r_n\}$ et à remplacer M_0 par $\varphi^k(M_0)$ pour $k \in \mathbf{N}$ convenable) que $M_0^{-1} U_g g(M_0) = N^{-1} U_g g(N)$ pour tout $g \in \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$.

Soit $M = NM_0^{-1} \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)$. Comme $g \mapsto M_0^{-1} U_g g(M_0)$ et $g \mapsto N^{-1} U_g g(N)$ sont triviaux sur $\mathcal{H}_S$, on a $g(M) = M$ pour tout $g \in \mathcal{H}_S$ et donc $M \in \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)$. Par ailleurs, on a $M^{-1} U_g g(M) = U_g$ pour tout $g \in \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. La proposition 4.33 affirme qu'on a en fait $M \in \mathsf{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)$. Là encore, quitte à remplacer,

pour $k' \in \mathbf{N}$ convenable, M_0 et N par $\varphi^{k'}(M_0)$ et $\varphi^{k'}(N)$ respectivement, on peut supposer que $M \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{A}_S)$. On a donc $M_0 = M^{-1}N \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{A}) \cap \mathsf{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right) = \mathsf{GL}_n\left(\mathbf{A}^\dagger\right)$.

En particulier, l'application naturelle $\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_S^\dagger} \mathcal{D}_S^\dagger(V) \to \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}_R$-modules, où $\mathcal{D}_S^\dagger(V) = \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)^{\mathcal{H}_S}$ est libre de rang n sur $\mathbf{A}_S^\dagger$ et muni d'une action de $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Rappelons que $\mathbf{A}_R^\dagger \subset \mathbf{A}_S^\dagger$ et $\mathbf{A}_R \subset \mathbf{A}_S$ sont finies étales et que $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_R \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathbf{A}_S^\dagger$ d'après la proposition 4.28. Par descente étale, le $\mathbf{A}_R^\dagger$-module $\mathcal{D}^\dagger(V) = \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)^{\mathcal{H}_R}$ est projectif de rang n, muni d'une action de Γ_R et tel que $\mathcal{D}_S^\dagger(V) = \mathbf{A}_S^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}_R^\dagger(V)$. En étendant les scalaires à $\mathbf{A}_R$ et par fidèle platitude de $\mathbf{A}_S$ sur $\mathbf{A}_R$, on en déduit que $\mathcal{D}(V) = \mathbf{A}_R \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)$.

De même, en utilisant les égalités $\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p$ (car $\mathbf{Z}_p \subseteq \left(\mathbf{A}^\dagger\right)^{\varphi=1} \subseteq \mathbf{A}^{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p$) et $\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_S^\dagger} \mathcal{D}_S^\dagger(V) = \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$, on a bien $V = \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)\right)^{\varphi=1}$.

Si V est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une action linéaire continue de $\mathcal{G}_R$, il contient (par compacité de $\mathcal{G}_R$) un réseau stable par $\mathcal{G}_R$. Il existe donc $S_\infty\left[p^{-1}\right]$ comme précédemment, tel que $\mathcal{D}(V) \otimes_{\mathbf{B}_R} \mathbf{B}_S$ est un $\mathbf{B}_S$-module libre comme de rang n. Le raisonnement est alors analogue au précédent. □

4.8. Application : l'opérateur ψ. — Dans la théorie classique des (φ, Γ_K)-modules, on définit un inverse à gauche du Frobenius, noté ψ, qui est très important pour étudier la cohomologie d'Iwasawa des (φ, Γ_K)-modules (voir [9]).

D'après le corollaire 4.10, si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie, le $\mathbf{A}_S$-module $\varphi^{-1}(\mathbf{A}_S)$ est libre, de base $\left([x_0]^{\alpha_0/p} \cdots [x_d]^{\alpha_d/p}\right)_{0 \leq \alpha_i < p}$. Comme $\mathbf{A}$ est le complété, pour la topologie p-adique, de la réunion des $\mathbf{A}_S$, le $\mathbf{A}$-module $\varphi^{-1}(\mathbf{A})$ est lui aussi libre, de base $\left([x_0]^{\alpha_0/p} \cdots [x_d]^{\alpha_d/p}\right)_{0 \leq \alpha_i < p}$. On pose alors

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} \\ a &\longmapsto \frac{1}{p^{d+1}} \operatorname{Tr}_{\varphi^{-1}(\mathbf{A})/\mathbf{A}}(\varphi^{-1}(a)) \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

(i) $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$;

(i) ψ commute à l'action de $\mathsf{Aut}\left(\overline{R}/\widetilde{R}\right)$ donc en particulier à l'action de $\mathcal{G}_R$;

(iii) si $a \in \mathbf{A}$ s'écrit $\varphi^{-1}(a) = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ 0 \leq \alpha_i < p}} a_{\underline{\alpha}} \prod_{i=0}^{d} [x_i]^{\frac{\alpha_i}{p}}$, on a $\psi(a) = a_{\underline{0}}$;

(iv) si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie, alors la restriction de ψ à $\mathbf{A}_S$ coïncide avec $\tau_{0,S}^{(0)} \circ \cdots \circ \tau_{0,S}^{(d)} \circ \varphi^{-1}$;

(v) $\psi\left(\mathbf{A}^\dagger\right) \subset \mathbf{A}^\dagger$.

Comme ψ commute à l'action de $\mathcal{G}_R$, si V est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$, les modules $\mathcal{D}(V)$ et $\mathcal{D}^\dagger(V)$ héritent d'une action de ψ qui commute à celle de Γ_R. Alors,

Proposition 4.36. — *Le module $\mathcal{D}(V)^{\psi=0}$ admet une décomposition*

$$\mathcal{D}(V)^{\psi=0} = \mathcal{D}(V)_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}(V)_d$$

telle que pour chaque $i \in \{0, \ldots, d\}$,

(i) *$\mathcal{D}(V)_i$ est un sous-$\varphi(\mathbf{A}_R)$-module de $\mathcal{D}(V)$ stable par Γ_R ;*

(ii) *la formation de $\mathcal{D}(V)_i$ est fonctorielle en V (la numérotation des variables étant fixée) ;*

(iii) *si $m \in \mathbf{N}$ est tel que $\gamma_i^{p^m} \in \Gamma_R$, alors $\gamma_i^{p^m} - 1$ est bijectif sur $\mathcal{D}(V)_i$, et admet un inverse continu si $pV = 0$.*

Démonstration. — • Supposons V de torsion. Soit S une sous-R-algèbre finie normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est galoisienne et $\mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S_\infty[p^{-1}]\right)$ agit trivialement sur V. Soit $H_{S/R} = \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right)$. On a alors $\mathcal{D}(V) = \left(V \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}_S\right)^{H_{S/R}}$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $m \in \mathbf{N}$ soit $\tau_{m,S}^{(i)} \colon \widetilde{\mathbf{A}}_S \to \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ le projecteur introduit dans la proposition 4.11. On pose

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(V)_d &:= \left(\left(1 - \tau_{0,S}^{(d)} \otimes 1\right) \circ \left(\varphi^{-1} \otimes 1\right)\left(\mathbf{A}_S \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)\right)^{H_{S/R}} \\
\mathcal{D}(V)_i &:= \left(\left(1 - \tau_{0,S}^{(i)} \otimes 1\right) \circ \left(\tau_{0,S}^{(i+1)} \otimes 1\right) \circ \cdots \right. \\
&\qquad \left. \circ \left(\tau_{0,S}^{(d)} \otimes 1\right) \circ \left(\varphi^{-1} \otimes 1\right)\left(\mathbf{A}_S \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)\right)^{H_{S/R}} \qquad \text{si} \quad 0 \leq i < d.
\end{aligned}$$

Comme $\tau_{0,S}^{(i)}$ est idempotent, les propriétés (i) et (ii) sont claires. On remarque aussi que cette définition ne dépend pas du choix de S_∞, grâce à la propriété 4.11 (iv).

Soit $m_V \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $m \geq m_V$ et $i \in \{0, \ldots, d\}$, l'élément $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur V (rappelons que V est fini) et $\gamma_i^{p^m} \in \Gamma_S$. Fixons $m \geq m_V$. D'après le proposition 4.20, si $z \in \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]$ on a une écriture unique $z = \sum_{j=0}^{p-1} z_j [x_i]^{\frac{j}{p^{m+1}}}$, avec $z_j \in \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. On a de plus $\tau_{m,S}^{(i)}(z) = 0$ si et seulement si $z_0 = 0$ et, dans ce cas, on a (avec les notations des lemmes 4.23 et 4.25) $\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z) = \sum_{j=1}^{p-1} \rho_{m,j,1}^{(i)}(z_j)[x_i]^{\frac{j}{p^{m+1}}}$. Pour $m \geq m_V$, les applications

$$\rho_{m,j,1}^{(i)} \colon \tau_{m,S}^{(i)}\left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]\right) \to \tau_{m,S}^{(i)}\left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]\right)$$

sont bijectives d'inverses continus modulo p par 4.23 et 4.25. On déduit (*cf.* propositions 4.24 et 4.26) que pour $m \geq m_V$, l'application $1 - \gamma_i^{p^m}$ est bijective et admet un

inverse continu modulo p sur

$$(1-\tau_{m,S}^{(i)})\circ\tau_{m,S}^{(i+1)}\circ\cdots\circ\tau_{m,S}^{(d)}\left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]\right).$$

Comme $\tau_{0,S}^{(i)}=\varphi^m\circ\tau_{m,S}^{(i)}\circ\varphi^{-m}$ d'après la proposition 4.11 (ii), il en est de même sur

$$(1-\tau_{0,S}^{(i)})\circ\tau_{0,S}^{(i+1)}\circ\cdots\circ\tau_{0,S}^{(d)}\left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p}}\right]\right).$$

En tensorisant par V (rappelons que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur V pour $m\geq m_V$), on en déduit que l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective et admet une inverse continu modulo p sur $\mathcal{D}(V)_i$ pour $m\geq m_V$.

Si $m<m_V$, on écrit $1-\gamma_i^{p^{m_V}}=(1-\gamma_i^{p^m})(1+\gamma_i^{p^m}+\cdots+\gamma_i^{p^m(p^{m_V-m}-1)})$: la propriété (iii) en résulte.

• Dans le cas général, on écrit V comme $\varprojlim_n V/p^nV$ et on pose $\mathcal{D}(V)_i=\varprojlim_n\mathcal{D}(V/p^nV)_i$. On se ramène alors au cas précédent par dévissage. □

Soit V un $\mathbf{Z}_p$-module libre de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$. Posons $\mathcal{D}^\dagger(V)_i=\mathcal{D}(V)_i\cap\mathcal{D}^\dagger(V)$.

Lemme 4.37. — *Soient S une sous-R-algèbre finie normale de $\overline{R}$ et*

$$\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i:=\left(1-\tau_{0,S}^{(i)}\right)\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p}},\ldots,[x_i]^{\frac{1}{p}}\right]\right).$$

Pour tout $m\geq m_0(S)$ et $r<\frac{\widetilde{r}_S}{p^m}$ (voir le lemme 4.23 pour les notations), l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective d'inverse continu sur $\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i$.

Démonstration. — Il résulte des propositions 4.24 et 4.26 que si $m\geq m_0(S)$ et $r<\frac{\widetilde{r}_S}{p^m}$, l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective d'inverse continu sur

$$\left(1-\tau_{m,S}^{(i)}\right)\circ\tau_{m,S}^{(i+1)}\circ\cdots\circ\tau_{m,S}^{(d)}\left(\mathbf{A}_S^{(0,p^mr]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]\right).$$

Mais $\mathbf{A}_S^{(0,p^mr]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]=\varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p}}\right]\right)$. Comme $\varphi^{-m}\circ\tau_{0,S}^{(i)}=\tau_{m,S}^{(i)}\circ\varphi^{-m}$ pour tout $i\in\{0,\ldots,d\}$ (proposition 4.11 (ii)), on en déduit que si $m\geq m_0(S)$ et $r<\frac{\widetilde{r}_S}{p^m}$, l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective d'inverse continu sur $\varphi^{-m}\left(\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i\right)$. En appliquant φ^m, on voit qu'il en est de même sur $\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i$. □

Pour $i\in\{0,\ldots,d\}$, posons $\mathcal{D}^\dagger(V)_i=\mathcal{D}^\dagger(V)\cap\mathcal{D}(V)_i$. On munit $\mathbf{A}^\dagger=\bigcup_{r\in\mathbf{Q}_{>0}}\mathbf{A}^{(0,r]}$ de la topologie de la limite inductive. En considérant $\mathcal{D}^\dagger(V)_i\subset\mathcal{D}^\dagger(V)\subseteq\mathbf{A}^\dagger\otimes_{\mathbf{Z}_p}V\cong\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^n$, on munit $\mathcal{D}^\dagger(V)_i$ de la topologie induite par celle de $\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^n$. On remarque que $\mathcal{D}^\dagger(V)_i$ est fermé pour cette topologie (car c'est le cas de $\left(1-\tau_{0,S}^{(i)}\right)\circ\tau_{0,S}^{(i+1)}\circ\cdots\circ\tau_{0,S}^{(d)}(\mathbf{A}_S)$ dans $\mathbf{A}_S$). Montrons l'analogue de [8, Prop. II.6.1] dans le cas relatif :

Proposition 4.38. — *Si $m \in \mathbf{N}$ est tel que $\gamma_i^{p^m} \in \Gamma_R$, l'application $\gamma_i^{p^m} - 1$ est bijective sur $\mathcal{D}^\dagger(V)_i$, d'inverse continu.*

Démonstration. — Commençons par introduire quelques notations. Si S est une sous-R-algèbre finie normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est galoisienne, on pose $\mathcal{D}_S^\dagger(V) = \mathbf{A}_S^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $T^{(n)}$ une sous-S-algèbre finie normale de $\overline{R}$ telle que $T_\infty^{(n)}[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est galoisienne et $\mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/T_\infty^{(n)}[p^{-1}]\right)$ agit trivialement sur V/p^nV. Soit $H_{T^{(n)}/S} = \mathsf{Gal}\left(T_\infty^{(n)}[p^{-1}]/S_\infty[p^{-1}]\right)$. On pose

$$\mathcal{D}_S\left(V/p^nV\right)_i = \left(\left(1-\tau_{0,T^{(n)}}^{(i)}\otimes 1\right)\circ\left(\tau_{0,T^{(n)}}^{(i+1)}\otimes 1\right)\circ\cdots \circ\left(\tau_{0,T^{(n)}}^{(d)}\otimes 1\right)\circ\left(\varphi^{-1}\otimes 1\right)\left(\mathbf{A}_{T^{(n)}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\left(V/p^nV\right)\right)\right)^{H_{T^{(n)}/S}}$$

et $\mathcal{D}_S(V)_i = \varprojlim_n \mathcal{D}_S\left(V/p^nV\right)_i$. Finalement, on pose $\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i = \mathcal{D}_S(V)_i \cap \mathcal{D}_S^\dagger(V)$.

On démontre la proposition suivante [**8**, Prop. II.6.4]. Comme $1-\gamma_i^{p^{m+n}} = (1-\gamma_i^{p^m})(1+\gamma_i^{p^m}+\cdots+\gamma_i^{p^{m+n}-p^m})$, il suffit de vérifier que $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijectif sur $\mathcal{D}^\dagger(V)_i$ d'inverse continu pour m assez grand. D'après le théorème 4.35, il existe une sous-R_∞-algèbre S_∞ de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne et $\mathcal{D}_S^\dagger(V)$ est un $\mathbf{A}_S^\dagger$-module libre de rang n, où n est le rang du $\mathbf{Z}_p$-module V. Fixons une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathcal{D}_S^\dagger(V)$ sur $\mathbf{A}_S^\dagger$. Alors $\mathcal{D}_S = \mathbf{A}_S \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathcal{D}(V)$ est un $\mathbf{A}_S$-module libre de base $(e_1,\ldots,e_n)$. Supposons que S_∞ soit la normalisation de SR_∞ où S est une sous-R-algèbre normale et finie de $\overline{R}$. On prend m tel que $\gamma_i^{p^m} \in \Gamma_S$.

Comme $\mathcal{D}^\dagger(V)$ est un module étale, la famille $(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))$ est encore une base de $\mathcal{D}_S^\dagger(V)$ sur $\mathbf{A}_S^\dagger$. Par ailleurs, pour $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathbf{A}_{T^{(n)}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} (V/p^nV) = \mathbf{A}_{T^{(n)}} \otimes_{\mathbf{A}_S} (\mathcal{D}_S(V)/p^n\mathcal{D}_S(V))$ d'où

$$\mathcal{D}_S(V/p^nV)_i = \left(1-\tau_{0,S}^{(i)}\otimes 1\right)\circ\left(\tau_{0,S}^{(i+1)}\otimes 1\right)\circ\cdots \circ\left(\tau_{0,S}^{(d)}\otimes 1\right)\circ\left(\varphi^{-1}\otimes 1\right)\left(\mathcal{D}_S(V)/p^n\mathcal{D}_S(V)\right).$$

Comme $e_j \in \mathcal{D}_S^\dagger(V)$, on a $\left(\tau_{0,S}^{(i)}\otimes 1\right)(e_j) = e_j$, et donc (avec des notations évidentes)

$$\mathcal{D}_S(V/p^nV)_i = \bigoplus_{j=1}^d \left((\mathbf{A}_S)_i/p^n(\mathbf{A}_S)_i\right)e_j.$$

En passant à la limite projective sur n, on a $\mathcal{D}_S(V)_i = \bigoplus_{j=1}^d (\mathbf{A}_S)_i e_j$, d'où $\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i = \bigoplus_{j=1}^d (\mathbf{A}_S^\dagger)_i e_j$ (on a $(\mathbf{A}_S^\dagger)_i = (\mathbf{A}_S)_i \cap \mathbf{A}^\dagger$).

Soit $z = \sum_{j=1}^{n} z_j e_j \in \mathcal{D}_S^\dagger(V)_i$. En utilisant le lemme 4.37, on pose

$$f_i(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)^{-1} (z_j) e_j.$$

On a alors, $z - f_i\left((1-\gamma_i^{p^m})(z)\right) = -f_i\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_i^{p^m}(z_j)\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(e_j)\right)$. On pose

$$\begin{aligned} g_{i,z} \colon \mathcal{D}_S^\dagger(V)_i &\longrightarrow \mathcal{D}_S^\dagger(V)_i \\ y &\longmapsto y - f_i\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(y) - z\right). \end{aligned}$$

L'action de Γ_S sur $\mathcal{D}^\dagger(V)$ est décrite, dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, par un cocycle continu sur $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/S[p^{-1}]\right)$ à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\left(\mathbf{A}_S^\dagger\right)$. On choisit $r < \frac{\widetilde{r}_S}{p^m}$ tel que $e_j \in \mathbf{A}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et tel que l'image $C = C_m$ de $\gamma_i^{p^m}$ est à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)$. Par continuité, il existe $m' \geq m$, tel que $m' \geq m_0(S)$ et $w_r(1 - C_{m'}) > c_2(S) + \frac{r}{p-1}$ (avec les notations des propositions 4.24 et 4.26). On a pas forcément $r < \frac{\widetilde{r}_S}{p^{m'}}$, mais montrons qu'on peut s'y ramener. Posons $r' = \frac{r}{p^{m'-m}}$: on a $r' < \frac{\widetilde{r}_S}{p^{m'}}$, et en vertu de du lemme 4.5, on a $w_{r'}(1-C_{m'}) \geq \frac{r'}{r} w_r(1-C_{m'})$. Rappelons qu'on a $c_2(r) := c_2(S,r) = \frac{p(c_S+2)r}{p-1}$ (*cf.* lemme 4.13). On a donc $w_{r'}(1 - C_{m'}) > \frac{p(c_S+2)r'}{p-1} + \frac{r'}{p-1} = c_2(r') + \frac{r'}{p-1}$. Quitte à remplacer m par m' et r par r', on peut donc supposer que $m \geq m_0(S)$, $w_r(1-C) > c_2(S) + \frac{r}{p-1}$ et $r < \frac{\widetilde{r}_S}{p^m}$.

Pour $z \in \bigoplus_{j=1}^{d} \left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i e_j$ on pose $w_r(z) = \min_{1 \leq j \leq n} (w_r(z_j))$, où $(z_1, \ldots, z_n)$ est l'image de z dans $\left(\mathbf{A}^{(0,r]}\right)^n$ par le composé $\bigoplus_{j=1}^{d} \left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i e_j \subseteq \mathbf{A}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V \xrightarrow{\sim} \left(\mathbf{A}^{(0,r]}\right)^n$. Remarquons que cette définition ne dépend pas du choix de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ du $\mathbf{A}^{(0,r]}$-module $\mathbf{A}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$.

D'après les propositions 4.24 et 4.26, on a alors $w_r(f_i(z)) \geq w_r(z) - c_2(S) - \frac{r}{p-1}$, et donc $w_r(g_{i,0}(y)) \geq w_r(y) + w_r(1-C) - c_2(S) - \frac{r}{p-1}$. Pour $y_1, y_2 \in \bigoplus_{j=1}^{d} \left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i e_j$ on a alors

$$w_r(g_{i,z}(y_1) - g_{i,z}(y_2)) = w_r(g_{i,0}(y_1 - y_2)) \geq w_r(y_1 - y_2) + w_r(1-C) - c_2(S) - \frac{r}{p-1}.$$

En particulier, l'application $g_{i,z}$ est contractante pour la topologie définie par w_r : elle admet donc un unique point fixe y_z. Comme f_i est une bijection, y_z est l'unique solution de l'équation $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(y) = z$.

Par ailleurs, y_z est la limite de la suite définie par $y_0 = z$ et $y_{n+1} = g_{i,z}(y_n)$: on a $w_r(y_z - z) \geq w_r(g_{i,z}(z) - z)$. Comme $g_{i,z}(z) - z = -f_i\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z) - z\right) =$

$f_i\left(\gamma_i^{p^m}(z)\right)$, on a en outre $w_r(y_z - z) \geq w_r(z) - c_2(S) - \frac{p}{p-1}$. L'application $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{-1}$ est donc bien définie et continue sur $\bigoplus_{j=1}^{d}\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i e_j$. Mais $\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i = \varinjlim_{0<r<\widetilde{r}_S} \bigoplus_{j=1}^{d}\left(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\right)_i e_j$, muni de la topologie de la limite inductive. On en déduit que $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{-1}$ est bien défini et continu sur $\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i$.

On a $\mathcal{D}^\dagger(V)_i = \left(\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i\right)^{H_{S/R}}$, où $H_{S/R} = \mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right)$. Le groupe $\mathbf{Z}_p\,\gamma_i$ agit par conjugaison sur le groupe fini $H_{S/R}$ (car $\mathcal{H}_R$ est distingué dans $\mathcal{G}_R$). Le noyau de cette action est un sous-groupe ouvert d'indice fini : quitte à augmenter m, on peut supposer que $g\gamma_i^{p^m} = \gamma_i^{p^m} g$ pour tout $g \in H_{S/R}$. Si $z \in \mathcal{D}^\dagger(V)_i$, on a alors $g\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{-1}(z) = \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{-1}(g(z)) = \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{-1}(z)$. Ainsi, $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{-1}\left(\mathcal{D}^\dagger(V)_i\right) \subseteq \left(\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i\right)^{H_{S/R}} = \mathcal{D}^\dagger(V)_i$ et la conclusion suit. □

4.9. Appendicite aiguë. — L'objet de cet appendice, de nature essentiellement technique, est de construire des relèvements $\mathbf{A}_S$ et $\mathbf{A}_S^+$ de $\mathbf{E}_S$ et $\mathbf{E}_S^+$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour toute sous-$\widetilde{R}$-algèbre finie normale S de $\overline{R}$ (*cf.* proposition 4.42). L'anneau $\mathbf{A}_S^+$ joue le rôle de structure entière dans $\mathbf{A}_S$, qui est crucial pour les questions de nature topologique dans les anneaux d'éléments surconvergents.

Soit B un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ fermé pour la topologie faible, contenant π et tel que $B \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_S = pB$. Si $b \in \mathbf{N}$, on note $D_b = B\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ l'image de $B\{u\}/(\pi^b u - p)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ (où $B\{u\}$ désigne l'anneau des polyômes en l'indéterminée u et à coefficients dans B complété pour la topologie faible).

Lemme 4.39. — *L'application naturelle $B/pB \to D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b$ est un isomorphisme : on a $D_b \cap p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S = \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n D_b$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En particulier, $D_b/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n D_b$ est sans π-torsion et D_b est séparé et complet pour la topologie $\frac{p}{\pi^b}$-adique.*

Démonstration. — Le composé $B/pB \to D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b \to \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ est l'inclusion. Comme l'application naturelle $B/pB \to D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b$ est surjective, c'est un isomorphisme. L'anneau D_b étant sans $\frac{p}{\pi^b}$-torsion, l'application $D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b \to \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n D_b/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^{n+1} D_b$ est un isomorphisme. Une récurrence sur n utilisant l'injectivité de $D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b \to \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ montre alors l'injectivité de $D_b/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n D_b \to \widetilde{\mathbf{A}}_S/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, et D_b fermé pour la topologie faible, D_b est aussi séparé et complet pour la topologie $\frac{p}{\pi^b}$-adique. □

Lemme 4.40. — *Soit $h \in \mathbf{N}$ et $C = B\{t_1, \ldots, t_h\}$ le complété, pour la topologie faible, de l'anneau de polynômes en les variables $t_1, \ldots, t_h$. Soient $I \subseteq C$ un idéal et $\overline{z} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_h) \in (B/pB)^h$ un zéro de $I \otimes_B (B/pB)$. On suppose que l'application*

$\mathrm{d}\otimes_B(B/pB)$ *est un isomorphisme quand on inverse* $\overline{\pi}$, *où* $\mathrm{d}\colon I/I^2 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{h}(C/I)\,\mathrm{d}t_j$ *est induite par la dérivation. Alors il existe un unique zéro* $z=(z_1,\dots,z_h)\in \widetilde{\mathbf{A}}_S^h$ *relevant* $\overline{z}$. *En outre, il existe* $b\in\mathbf{N}$ *tel que* $z\in D_b^h$.

Démonstration. — Soient $f_1,\dots,f_h \in I$ tels que $\mathrm{d}(f_1),\dots,\mathrm{d}(f_h)$ engendrent le $(C/I)\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$-module $\left(\bigoplus_{j=1}^{h}(C/I)\,\mathrm{d}t_j\right)\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$. Soit $c\in\mathbf{N}$ tel que $\overline{\pi}^c\,\mathrm{d}(f_j)\in \bigoplus_{j=1}^{h}(C/I)\,\mathrm{d}t_j$ pour tout $j\in\{1,\dots,h\}$. Soit $J=\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_{1\leq i,j\leq h}\in \mathrm{M}_h(C)$ la matrice jacobienne associée. Il existe $\overline{M}\in\mathrm{M}_h(B/pB)$ tel que $\overline{M}J(\overline{z})=\overline{\pi}^{ch}\,\mathrm{I}_h$. Soit $b\geq 3ch$.

On construit par récurrence une suite $(z(n))_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$ d'éléments de D_b^h telle que :

(1) $z(1)\equiv \overline{z} \mod \frac{p}{\pi^{ch}}D_b^h$ (rappelons que $B/pB\hookrightarrow D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b$ d'après le lemme 4.39) ;

(2) $f_j(z(n))\equiv 0 \mod \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^{n+1}D_b$ pour tout $j\in\{1,\dots,h\}$ et tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$;

(3) $z(n)\equiv z(n-1) \mod \frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}D_b^h$ pour $n\geq 2$.

Remarquons que la suite ainsi construite converge dans D_b^h (pour la topologie faible) en vertu du lemme 4.39.

Soit M un relèvement de $\overline{M}$ dans $\mathrm{M}_h(B)$. Soit $z(0)$ un relèvement quelconque de $\overline{z}$ dans D_b^h : il existe $y(1)\in D_b^h$ tel que $f(z(0))=(f_1(z(0)),\dots,f_h(z(0)))=py(1)$. Posons $z(1)=z(0)-\frac{p}{\pi^{ch}}My(1)$. On a $f(z(1))\equiv f(z(0))-\frac{p}{\pi^{ch}}J(z(0))My(1) \mod \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^2 D_b^h$. Comme $MJ(z(0))\equiv \pi^{ch}\,\mathrm{I}_h \mod p\mathrm{M}_h(B)$, on a $f(z(0))-\frac{p}{\pi^{ch}}J(z(0))My(1)\equiv 0 \mod p^2D_b^h$ et donc $f(z(1))\equiv 0 \mod \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^2 D_b^h$ *i.e.* (1) et (2) pour $n=1$ sont vérifiés.

Soit $n\geq 2$ et supposons $z(1),\dots,z(n-1)$ construits. Il existe $y(n)\in D_b^h$ tel que $f(z(n-1))=(f_1(z(n-1)),\dots,f_h(z(n-1)))=\left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^n y(n)$ et posons

$$z(n)=z(n-1)-\frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}My(n).$$

La condition (3) est clairement vérifiée. Par ailleurs, on a

$$f(z(n))\equiv f(z(n-1))-\frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}J(z(n-1))My(n) \mod \left(\frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}\right)^2 D_b^h.$$

Comme $MJ(z(n-1))\equiv \pi^{ch}\,\mathrm{I}_h \mod p\mathrm{M}_h(B)$, on a $f(z(n-1))-\frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}J(z(n-1))My(n)\equiv 0 \mod \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^{n+1}D_b^h$. En outre, on a $\left(\frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}\right)^2=\left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^{2n-1}\frac{p}{\pi^{3ch}}\in \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^{n+1}D_b$ vu que $b\geq 3ch$ et $n\geq 2$.

Dans le cas où π est inversible dans B, la matrice $J(\overline{z})$ est inversible dans $\mathrm{M}_h(B/pB)$, ce qui implique l'unicité de la suite $\left(z(n) \mod p^{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$. On en

déduit l'unicité de $z \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)^h$ tel que $f_j(z) = 0$ pour $j \in \{1, \ldots, h\}$ et tel que $z \equiv \overline{z}$ mod $p\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)^h$.

Soit $f \in I$, montrons que $f(z) = 0$. Par hypothèse et choix de $(f_1, \ldots, f_h)$, il existe $a \in \mathbf{N}$ (indépendant de f) tel que $\pi^a f \in (f_1, \ldots, f_h) + (I + pB)I$ (rappelons que d est C/I-linéaire). Pour $N \in \mathbf{N}$, on a alors $\pi^{Na} f \in (f_1, \ldots, f_h) + (I + pB)^N I$. Par ailleurs, pour tout $g \in I$, on a $g(z) \in p\widetilde{\mathbf{A}}_S$ par définition de z : on a $\pi^{Na} f(z) \in p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_S$, *i.e.* $f(z) \in p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_S$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ est séparé pour la topologie p-adique, on a fini. □

Lemme 4.41. — *Soit B comme précédemment. Supposons de plus que $B \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$, la projection*

$$B\{t_1, \ldots, t_h\} \longrightarrow (B/p^k B)\{\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_h\}$$

est surjective, où $B\{t_1, \ldots, t_h\}$ est le complété de l'anneau de polynômes $B[t_1, \ldots, t_h]$ pour la topologie faible, et $(B/p^k B)\{\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_h\}$ est le complété de l'anneau de polynômes $(B/p^k B)[\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_h]$ pour la topologie π-adique.

Si en outre $U \subseteq B$ est une partie multiplicative telle que $U^{-1}B \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$, la projection

$$\widehat{U^{-1}B} \to \left(U^{-1}B/p^k U^{-1}B\right)^\wedge$$

est surjective, où $\widehat{U^{-1}B}$ est le complété de $U^{-1}B$ pour la topologie faible et $\left(U^{-1}B/p^k U^{-1}B\right)^\wedge$ le complété de $U^{-1}B/p^k U^{-1}B$ pour la topologie π-adique.

Démonstration. — Soit $\overline{b} \in (B/p^k B)\{\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_h\}$ (resp. $\left(U^{-1}B/p^k U^{-1}B\right)^\wedge$). Écrivons-le comme la somme d'une série $\overline{b} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\pi}^n \overline{b}_n$ où $\overline{b}_n \in (B/p^k B)[\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_h]$ (resp. $\overline{b}_n \in U^{-1}B/p^k U^{-1}B$). Relevons la suite $\left(\overline{b}_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ en une suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $b_n \in B[t_1, \ldots, t_h]$ (resp. $b_n \in U^{-1}B$). Montrons que la suite $(\pi^n b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $B[t_1, \ldots, t_h]$ (resp. dans $U^{-1}B$) pour la topologie faible. En effet, la somme $b = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n b_n$ converge alors dans $B\{t_1, \ldots, t_h\}$ (resp. dans $\widehat{U^{-1}B}$) en un relèvement de $\overline{b}$. D'après le lemme 4.39, on a

$$\widetilde{\mathbf{A}}_S^+/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \Big/ \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S.$$

Comme $\pi^{b(n-1)}\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} / \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S^+$, il suffit de montrer que pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, on a $\pi^{n+m} \equiv 0$ dans $\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+/\overline{\pi}^m\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right) = \widetilde{\mathbf{A}}_S/\left(p^n, [\overline{\pi}]^m\right)\widetilde{\mathbf{A}}_S$. En effet, cela implique alors que $\pi^{bn+m} \equiv 0$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} / \left(\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n, [\overline{\pi}]^m\right)\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ et donc que l'image de $\pi^k b_k$ dans

$$\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}[t_1, \ldots, t_h] \Big/ \left(\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n, [\overline{\pi}]^m\right)\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}[t_1, \ldots, t_h]$$

$$(\text{resp. } \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \Big/ \left(\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n, [\overline{\pi}]^m\right)\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\})$$

est nulle pour $k \geq bn+m$, ce qui implique que la suite converge vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}[t_1,\dots,t_h]$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$) pour la topologie faible (rappelons que d'après le lemme 4.39, on a $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \cap p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S = \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$).

On vu lors de la preuve de la proposition 4.2 (d) que $\pi = (1+a)[\overline{\pi}]$ avec $a = p[a_1] + p^2[a_2] + \cdots$ et $v_{\mathbf{E}}(a_k) \geq -\frac{p}{p-1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$. Pour $N \in \mathbf{N}$, on a alors $\pi^N = [\overline{\pi}]^N(1 + p[a_{N,1}] + p^2[a_{N,2}] + \cdots)$ avec $v_{\mathbf{E}}(a_{N,k}) \geq -\frac{kp}{p-1}$. Comme $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = \frac{p}{p-1}$, on a $v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\pi}^{n+m}a_{n+m,k}\right) \geq \frac{(n+m-k)p}{p-1} \geq \frac{mp}{p-1}$ pour $k \leq n$. □

Rappelons que $x_0 = \varepsilon := \left(\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots\right) \in \mathbf{E}_R^+$ et que pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$ on a posé $x_i = \left(T_i^{(0)}, T_i^{(1)}, \dots\right) \in \mathbf{E}_R^+$.

Proposition 4.42. — *Il existe un unique sous-anneau $\mathbf{A}_S$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ tel que :*

(a) *$\mathbf{A}_S$ est complet pour la topologie faible ;*

(b) *$p\widetilde{\mathbf{A}}_S \cap \mathbf{A}_S = p\mathbf{A}_S$;*

(c) *on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_S & \twoheadrightarrow & \mathbf{E}_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathbf{A}}_S & \twoheadrightarrow & \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \end{array}$$

(d) *$[x_i] \in \mathbf{A}_S$ pour $i \in \{0,\dots,d\}$.*

(e) *il existe une sous-$\mathbf{A}^+_{\mathrm{W}(k)}$-algèbre $\mathbf{A}_S^+$ de $\mathbf{A}_S$ et $r_S \in \mathbf{Q}_{>0}$ tels que :*

(i) *il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{p}{\pi^a} \in \mathbf{A}_S^+$ et $\mathbf{A}_S^+/\frac{p}{\pi^a}\mathbf{A}_S^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}_S^+$;*

(ii) *si $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_{>0}$ sont tels que $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{pr_S}{p-1}$, on a $\mathbf{A}_S^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$;*

(iii) *$\mathbf{A}_S^+$ est complet pour la topologie faible.*

De plus, par unicité, $\mathbf{A}_S$ est stable sous l'action de $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ et de φ.

Insistons sur le fait qu'en général, contrairement à l'anneau $\mathbf{A}_S$, l'anneau $\mathbf{A}_S^+$ n'est pas unique (c'est déjà le cas lorsque $d = 0$, et c'est lié à la ramification de S).

Démonstration. — Remarquons tout d'abord qu'on peut remplacer (ii) par

(ii') il existe $b \in \mathbf{N}$ tel que $\mathbf{A}_S^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$.

En effet, la propriété (ii) est alors vérifiée avec $r_S = \frac{p-1}{pb}$, car si $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{pr_S}{p-1}$, on a $\widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$ vu que $\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^\alpha = \pi^{\beta-b\alpha}\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}$.

Montrons de plus qu'en fait, la propriété suivante est vérifiée :

(iii') pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, la topologie induite sur $\mathbf{A}_S^+/p^n\mathbf{A}_S^+$ par la topologie faible de $\widetilde{\mathbf{A}}_S/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_S$ est la topologie π-adique, et $\mathbf{A}_S^+/p^n\mathbf{A}_S^+$ est fermé pour cette topologie.

Cela implique la propriété (e)(iii) et que $\mathbf{A}_S = \varprojlim_n \left(\left(\mathbf{A}_S^+/p^n\mathbf{A}_S^+\right)[\pi^{-1}]\right)$.

Posons $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+ = \mathrm{W}(k)[\![\pi]\!]$ (rappelons que k est le corps résiduel de V et que $\pi = [\varepsilon] - 1$). L'anneau $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ complet pour la topologie faible et relève $\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+ = k[\![\overline{\pi}]\!]$. On note $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}$ l'adhérence, pour la topologie faible, de $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$. Les conditions (a)-(e) impliquent que l'anneau $\mathbf{A}_S$, s'il existe, contient nécessairement l'anneau $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}$. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [**3**, Lemma 10.1].

Écrivons $\mathbf{E}_V^+ = \mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+\left[\overline{t}_0\right] / \left(\overline{f}_0\right)$ (rappelons que $\mathbf{E}_V^+ / \mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+$ est une extension d'anneaux de valuation discrète complets, d'extension résiduelle séparable, elle est donc monogène). Relevons le polynôme $\overline{f}_0$ en $f_0 \in \mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+[t_0]$. D'après le lemme 4.40 appliqué à $B = \widetilde{\mathbf{A}}_S^+$, le polynôme f_0 admet un unique zéro z_0 relevant l'image de $\overline{t}_0$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$, et on a $z_0 \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ pour b assez grand. Notons alors $\mathbf{A}_V^+$ la sous-$\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+$-algèbre de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ engendrée par z_0 et $\mathbf{A}_V$ l'adhérence de $\mathbf{A}_V^+[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour la topologie faible. En appliquant le lemme 4.40 à $B = \mathbf{A}_S$ (s'il existe), on voit que ce dernier contient nécessairement $\mathbf{A}_V$. En outre, l'application du lemme 4.40 à $B = \mathbf{A}_V$ montre que ce dernier ne dépend pas du choix du relèvement (notons qu'en général, ce n'est pas le cas de $\mathbf{A}_V^+$). La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [**3**, Lemma 10.1].

On a $\mathbf{E}_{R^0}^+ = \mathbf{E}_V^+\left\{x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}\right\}$ (complété pour la topologie $\overline{\pi}$-adique) : posons

$$\mathbf{A}_{R^0}^+ = \mathbf{A}_V^+\left\{[x_1]^{\pm 1}, \ldots, [x_d]^{\pm 1}\right\}$$

(adhérence de $\mathbf{A}_V^+\left[[x_1]^{\pm 1}, \ldots, [x_d]^{\pm 1}\right]$ pour la topologie faible). D'après le lemme 4.41, on a $\mathbf{A}_{R^0}^+/p\mathbf{A}_{R^0}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}_{R^0}^+$. On note $\mathbf{A}_{R^0}$ l'adhérence, pour la topologie faible, de $\mathbf{A}_{R^0}^+[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$. On a encore $\mathbf{A}_{R^0}^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. D'après la propriété (c) et ce qui précède, l'anneau $\mathbf{A}_S$, s'il existe, contient nécessairement $\mathbf{A}_{R^0}$. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [**3**, Lemma 10.1] (en utilisant le lemme 4.41).

D'après le lemme 4.1 (e), l'anneau $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$ s'obtient à partir de $\mathbf{E}_{R^0}^+$ en itérant les opérations suivantes :

(ét) extension complète, topologiquement de type fini et formellement étale pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;

(loc) complétion, pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, d'une localisation ;

(comp) complétion par rapport à un idéal contenant $\overline{\pi}$.

Supposons que $\widetilde{R}$ est obtenu à partir d'une R^0-algèbre $\widetilde{R}'$ par l'une des opérations (ét), (loc) ou (comp) de l'introduction, de sorte que $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ est obtenu à partir de $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ par l'opération correspondante.

Cas d'une extension de type (ét) :

Comme $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ est topologiquement de type fini sur $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$, on a $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \simeq \overline{C}/\overline{I}$, où $\overline{C} = \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_h\}$ désigne le séparé complété de l'anneau de polynômes $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}[\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_h]$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, et $\overline{I} \subseteq \overline{C}$ un idéal. En outre, l'application induite par la dérivation $\bar{\mathrm{d}}\colon \overline{I}/\overline{I}^2 \to \bigoplus_{j=1}^{h} (\overline{C}/\overline{I})\,\mathrm{d}\bar{t}_j$ est un isomorphisme, car $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'} \subseteq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ est formellement étale pour la topologie $\overline{\pi}$-adique.

Soit $\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_h \in \overline{I}$ dont l'image par $\bar{\mathrm{d}}$ est une base du $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$-module $\bigoplus_{j=1}^{h} \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\,\mathrm{d}\bar{t}_j$. On peut supposer que $\overline{I} = (\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_h)$. En effet, si ce n'est pas le cas, posons

$$E' := \left(\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}/\overline{\pi}\,\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}\right)[\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_h]/(\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_h).$$

Alors le morphisme $\mathsf{Spec}\left(\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}/\overline{\pi}\,\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\right) = \mathsf{Spec}\left(E'/\overline{I}\right) \to \mathsf{Spec}\,(E')$ est une immersion fermée. C'est aussi une immersion ouverte car l'inclusion des idéaux $(\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_h) \subseteq \overline{I}$ de $\left(\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}/\overline{\pi}\,\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}\right)[\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_h]$ est un isomorphisme sur un ouvert de $\left(\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}/\overline{\pi}\,\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}\right)[\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_h]$ qui contient $\mathsf{Spec}\left(\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}/\overline{\pi}\,\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\right) = \mathsf{Spec}\left(E'/\overline{I}\right)$ (*cf.* [**22**, Corollaire 17.12.2]). L'anneau E' est donc le produit de deux anneaux : $E' \simeq \left(E'/\overline{I}\right) \times E''$ et $E'/\overline{I} = E'[\bar{t}_{h+1}]/(\bar{t}_{h+1}\bar{e} - 1)$ avec $\bar{e} = (1,0) \in \left(E'/\overline{I}\right) \times E''$. Soit $e \in \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}\left\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_h\right\}/(\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_h)$ l'idempotent qui relève $\bar{e}$ et soit $\overline{f}_{h+1} = \bar{t}_{h+1}e - 1$. On conclut que $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \cong \mathbf{E}_{\widetilde{R}'}\left\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{h+1}\right\}/\left(\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_{h+1}\right)$ et que $\overline{\mathrm{d}f}_1, \dots, \overline{\mathrm{d}f}_{h+1}$ est une $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$-base de $\bigoplus_{j=1}^{h+1} \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\,\mathrm{d}\bar{t}_j$.

Comme $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}/p\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'} \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$, le lemme 4.41 montre que $\overline{C} = C/pC$ où $C = \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}\{t_1, \dots, t_h\}$ est le complété de l'anneau de polynômes $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}[t_1, \dots, t_h]$ pour la topologie faible : il existe $f_1, \dots, f_h \in C$ relevant la famille $\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_h \in \overline{I}$. Notons $I \subseteq C$ l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_h$ et $A = C/I$. L'image de $I \otimes_C \overline{C}$ dans $\overline{C}$ n'étant autre que $\overline{I}$, la suite exacte

$$I \otimes_C \overline{C} \longrightarrow \overline{C} \longrightarrow A/pA \longrightarrow 0$$

montre que $A/pA = \overline{C}/\overline{I} = \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$. Par ailleurs, l'homomorphisme $A^h \to I/I^2$ (qui envoie $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 étant en j-ème coordonnée, sur f_j) est surjectif par construction. Il induit un homomorphisme surjectif $(A/pA)^h \to (I/I^2) \otimes_A (A/pA)$. Mais le composé avec l'application naturelle $(I/I^2) \otimes_A (A/pA) \to \overline{I}/\overline{I}^2$ n'est autre que l'isomorphisme $(A/pA)^h \to \overline{I}/\overline{I}^2$ inverse de $\bar{\mathrm{d}}$. L'homomorphisme $(A/pA)^h \to (I/I^2) \otimes_A (A/pA)$ est donc un isomorphisme, et il en est de même de l'application

naturelle $(I/I^2)\otimes_A (A/pA) \to \overline{I}/\overline{I}^2$.

$$(A/pA)^h \twoheadrightarrow (I/I^2)\otimes_A (A/pA) \xrightarrow{\sim} \overline{I}/\overline{I}^2$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (I/I^2)\otimes_A (A/pA) & \xrightarrow{\mathrm{d}\otimes(A/pA)} & \left(\bigoplus_{j=1}^{h}(C/I)\,\mathrm{d}\,\overline{t}_j\right)\otimes_A (A/pA) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ \overline{I}/\overline{I}^2 & \xrightarrow{\overline{\mathrm{d}}} & \bigoplus_{j=1}^{h}(\overline{C}/\overline{I})\,\mathrm{d}\,\overline{t}_j \end{array}$$

identifie $\mathrm{d}\otimes(A/pA)$ avec $\overline{\mathrm{d}}$, qui est un isomorphisme. On peut donc appliquer le lemme 4.40 à $B=\widetilde{\mathbf{A}}_S$: il existe un unique morphisme de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$-algèbres $A\to\widetilde{\mathbf{A}}_S$ relevant l'inclusion $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\subseteq\widetilde{\mathbf{E}}^+_S$. Notons $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ l'image de A dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$. Comme $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ est sans p-torsion (c'est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$), on a $\mathrm{gr}_p\left(\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}\right)\simeq\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}[s]$ (anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ en une variable). Par ailleurs, on a $A/pA\simeq\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\simeq\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}/p\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$: l'homomophisme naturel surjectif $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}[s]\to\mathrm{gr}_p(A)$ est donc un isomorphisme, et l'application $A\to\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ est un isomorphisme. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [**3**, Lemma 10.1] (en utilisant le lemme 4.41).

Notons $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$ l'adhérence de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour la topologie faible. L'application du lemme 4.40 à $B=\mathbf{A}_S$, s'il existe, montre qu'on a nécessairement $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}\subseteq\mathbf{A}_S$. En outre, on a toujours $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}^+_S\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$.

Cas d'une extension de type (loc) :

Écrivons $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ comme le complété de $\overline{U}^{-1}\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, où $\overline{U}\subseteq\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ est une partie multiplicative. Notons U l'image inverse de $\overline{U}$ dans $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$. C'est une partie multiplicative de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$, qui est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_S\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ (cela se vérifie modulo $\frac{p}{\pi^b}$). Notons alors $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ l'adhérence (pour la topologie faible) de $U^{-1}\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_S\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [**3**, Lemma 10.1] (en utilisant le lemme 4.41). Notons $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$ l'adhérence de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour la topologie faible. La condition (c) montre que $\mathbf{A}_S$, s'il existe, contient nécessairement $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$. En effet, un élément de U est inversible modulo $p\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$, donc dans $\mathbf{A}_S\supseteq\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$ qui est complet pour la topologie faible (donc *a fortiori* pour la topologie p-adique). Cela montre en particulier l'unicité de $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$.

CAS D'UNE EXTENSION DE TYPE (COMP) :

Écrivons $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ comme le complété de $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ pour la topologie $\overline{J}$-adique, où $\overline{J} \subseteq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ est un idéal contenant $\overline{\pi}$. Notons J l'image inverse de $\overline{J}$ dans $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$ et $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ le complété de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$ pour la topologie J-adique. On a la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccc} J \subseteq \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'} & \hookrightarrow & \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}'}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \\ \downarrow & \searrow & & \nearrow & \\ \overline{J} \subseteq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'} & & \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}} & & \end{array}$$

L'homomorphisme pointillé existe par complétude de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ pour la topologie J-adique. Cette dernière résulte du fait que pour tout $N \in \mathbf{N}_{>0}$, l'anneau

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \Big/ \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^N \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \simeq \mathrm{W}_N\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\widetilde{R}}\right)[x]/(x^N, x\pi^b - p)$$

est complet pour la topologie induite par la topolologie J-adique, étant un quotient de $\mathrm{W}_N\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\widetilde{R}}\right)[x]/(x^N)$. Mais ce dernier est complet pour la topologie induite par la topologie J-adique, étant libre sur $\mathrm{W}_N\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\widetilde{R}}\right)$, pour lequel la topologie J-adique correspond à la topologie $\overline{J}$-adique sur les composantes fantômes (on utilise le fait que $a^{p^N} \equiv [\overline{a}]^{p^N} \mod p^N \mathrm{W}_N\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{R}}\right)$). L'inclusion $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'} \subseteq \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ relève l'inclusion $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \subseteq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$. Par ailleurs, d'après [**3**, 10.8] appliqué à $R^1 = \widetilde{R}'$ et $R^2 = \widetilde{R}$, l'anneau ainsi obtenu est une sous-$\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$-algèbre de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$, complète pour la topologie faible. Notons maintenant $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$ le complété de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}[\pi^{-1}]$ pour la topologie faible. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [**3**, Lemma 10.1] (en utilisant le lemme 4.41).

Si $\mathbf{A}'_{\widetilde{R}}$ est une autre $\mathbf{A}_{\widetilde{R}'}$-algèbre vérifiant les propriétés (a)-(e), notons $\mathbf{A}''^+_{\widetilde{R}}$ le complété de $\mathbf{A}'^+_{\widetilde{R}}$ pour la topologie J-adique. Comme ci-dessus, on montre que c'est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. Notons $\mathbf{A}''_{\widetilde{R}}$ le complété de $\mathbf{A}''^+_{\widetilde{R}}[\pi^{-1}]$ pour la topologie faible. On a alors des homomorphismes $\mathbf{A}_{\widetilde{R}} \to \mathbf{A}''_{\widetilde{R}} \leftarrow \mathbf{A}'_{\widetilde{R}}$, qui sont des isomorphismes sur les gradués pour la topologie p-adique : ce sont des isomorphismes, d'où l'unicité.

PASSAGE DE $\widetilde{R}$ À S.

Finalement, l'extension $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \to \mathbf{E}^+_S$ est finie étale après changement de base à $\mathbf{E}_{\widetilde{R}} = \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$. On a donc $\mathbf{E}^+_S = \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\left[\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_r\right]/\overline{I}$ où $\overline{I}$ un idéal tel que l'application déduite de la dérivation $\overline{\mathrm{d}}\colon \overline{I}/\overline{I}^2 \to \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbf{E}^+_S \,\mathrm{d}\,\overline{t}_j$ induit un isomorphisme quand on inverse $\overline{\pi}$. Comme dans le cas (ét) on peut supposer de plus qu'il existe $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r \in \overline{I}$ engendrant $\overline{I}$ quand on inverse $\overline{\pi}$. Soit $a \in \mathbf{N}$ tel que $\overline{\pi}^a \overline{I} \subseteq \left(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r\right)$. On pose $C = \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}\{t_1, \ldots, t_r\}$. Comme $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}/p\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$, on a $C/pC = \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\left[\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_r\right]$: il existe $f_1, \ldots, f_r \in C$ relevant $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r$. Notons $I \subseteq C$ l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_r$ et

$A := C/I$: on a $(A/pA)[\overline{\pi}^{-1}] = (\overline{C}/\overline{I})[\overline{\pi}^{-1}] = \mathbf{E}_S$ et l'application $\mathrm{d} \otimes (A/pA)\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ (où $\mathrm{d}\colon I/I^2 \to \bigoplus_{j=1}^{r} (C/I)\,\mathrm{d}\bar{t}_j$ est l'application déduite de la dérivation) s'identifie à $\overline{\mathrm{d}} \otimes_{\mathbf{E}_S^+} \mathbf{E}_S^+\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$, qui est un isomorphisme. On peut donc appliquer le lemme 4.40 à $B = \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$: il existe un entier b' et un unique homomorphisme de $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+$-algèbres $A \to \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+b'}}\right\}$ relevant $\mathbf{E}_S^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}_S^+$. On peut supposer que $b > a$. Notons $\mathbf{A}_S^+$ l'image de l'homomorphisme induit $C\{t_{r+1}\}/(I, \pi^a t_{r+1} - p) \to \widetilde{\mathbf{A}}_S^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+b'}}\right\}$.

Montrons (e)(i). On a un morphisme

$$A/pA = \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+\left[\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r\right]/\left(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r\right) \to \mathbf{A}_S^+/\frac{p}{\pi^a}\mathbf{A}_S^+ \to \mathbf{E}_S^+ = \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+\left[\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r\right]/\overline{I}.$$

Si $\overline{g} \in \overline{I}$, alors $\overline{\pi}^a \overline{g} \in \left(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r\right)$. Soit $g \in C$ un relèvement de $\overline{g}$. Il existe alors $f \in C$ tel que $\pi^a g - pf \in I$. On a donc $\pi^a(g - t_{r+1}f) \in IC\{t_{r+1}\}/(\pi^a t_{r+1} - p)$ et $\pi^a(g - p/\pi^a f) = 0$ dans A_S^+ soit $g = p/\pi^a f \in \mathbf{A}_S^+$: son image est nulle dans $\mathbf{A}_S^+/\frac{p}{\pi^a}\mathbf{A}_S^+$, et on a bien $\mathbf{A}_S^+/\frac{p}{\pi^a}\mathbf{A}_S^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}_S^+$.

En particulier, comme $\mathbf{A}_S^+$ et $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+\left\{\frac{p}{\pi^a}\right\}$ sont complets pour la topologie $\left(\frac{p}{\pi^a}, \pi\right)$-adique et $\mathbf{A}_S^+/\left(\frac{p}{\pi^a}, \pi\right)\mathbf{A}_S^+ = \mathbf{E}_S^+/\overline{\pi}\mathbf{E}_S^+$ est un $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$-module de type fini, $\mathbf{A}_S^+$ est un $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+\left\{\frac{p}{\pi^a}\right\}$-module de type fini. Écrivons $\mathbf{A}_S^+$ comme un quotient $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+\left\{\frac{p}{\pi^a}\right\}^n \to \mathbf{A}_S^+$. On a la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+\left\{\frac{p}{\pi^a}\right\}^n & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{R}}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_S^+ & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{A}}_S \end{array}$$

Pour montrer la propriété (iii'), il suffit de démontrer que la topologie quotient sur $\mathbf{A}_S^+$ coïncide avec la topologie induite par la topologie faible de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$. Il suffit pour cela de vérifier que la topologie quotient sur $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ coïncide avec la topologie faible. Cela résulte du fait que pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$, il existe un entier N_m tel que

$$\widetilde{\mathbf{A}}_S^+/p^m\widetilde{\mathbf{A}}_S^+ \subseteq \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\pi^{N_m}}\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{R}}^+/p^m\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{R}}^+\right)$$

(ce qui se voit pas récurrence, et utilisant le lemme 4.1 (f)).

Notons enfin $\mathbf{A}_S$ l'adhérence de $\mathbf{A}_S^+[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ pour la topologie faible. Rappelons qu'on alors $\mathbf{A}_S = \varprojlim_n \left(\left(\mathbf{A}_S^+/p^n\mathbf{A}_S^+\right)[\pi^{-1}]\right)$, si bien que $\mathbf{A}_S$ vérifie les propriétés (a)-(e). L'unicité de $\mathbf{A}_S$ résulte du fait que $\mathbf{A}_{\widetilde{R}} \to \mathbf{A}_S$ est l'unique relèvement de l'extension étale $\mathbf{E}_{\widetilde{R}} \to \mathbf{E}_S$.

Par unicité, l'anneau $\mathbf{A}_S$ est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Pour voir que $\mathbf{A}_S$ est stable par φ, remarquons tout d'abord que $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}$ l'est. Par ailleurs, si $R_1 \subseteq R_2$ est une des extensions suivantes :

(1) $\mathrm{W}(k) \subseteq V$;
(2) $V \subseteq R^0$;
(3) une extension de type (ét) ;
(4) une extension de type (loc) ;
(5) une extension de type (comp) ;
(6) $\widetilde{R} \subseteq S$;

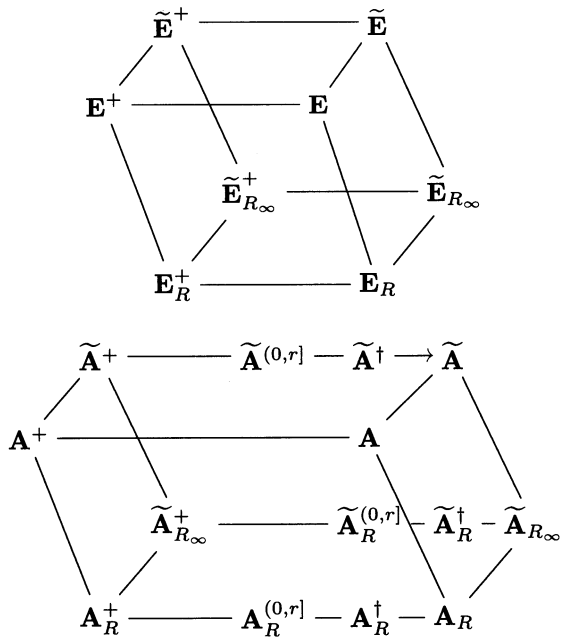
et si $\mathbf{A}_{R_1}$ est stable par φ, il en est de même de $\mathbf{A}_{R_2}$. Pour les cas (1), (3), (4), (5) et (6), cela résulte de ce que le morphisme $\mathbf{A}_{R_1}$-linéaire

$$1 \otimes \varphi \colon \mathbf{A}_{R_1,\varphi} \otimes_{\mathbf{A}_{R_1}} \mathbf{A}_{R_2} \to \widetilde{\mathbf{A}}_S$$

(induit par la restriction de φ à $\mathbf{A}_{R_2}$), est injectif car sa réduction modulo p l'est (c'est $1 \otimes \varphi \colon \mathbf{E}_{R_1,\varphi} \otimes_{\mathbf{E}_{R_1}} \mathbf{E}_{R_2} \simeq \mathbf{E}_{R_2} \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}_S$). On vérifie son image satisfait aux conditions (a)-(e) : c'est donc $\mathbf{A}_{R_2}$. Pour le cas (2), cela résulte simplement de ce que $\varphi([x_i]) = [x_i]^p$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. □

Remarque 4.43. — (1) Il résulte de la démonstration précédente que lorsque $S = \widetilde{R}$, on peut prendre $a = 0$, *i.e.* qu'il existe $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ tel que $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}/p\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}} \cong \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$.

(2) Lorsque $\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty}) \subseteq K_\infty$ est non ramifiée et $\widetilde{R} \subseteq S$ est étale, il résulte de la démonstration précédente que le sous-anneau $\mathbf{A}^+_S$ de $\mathbf{A}_S$ est unique, contenu dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_S$, stable φ et par $\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$.



Références

[1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–61 – Documents Mathématiques, vol. 3, Société Mathématique de France, 2003.

[2] A. ABBES & T. SAITO – Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Amer. J. Math.* **124** (2002), p. 879–920.

[3] F. ANDREATTA – Generalized ring of norms and generalized (ϕ, Γ)-modules, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), p. 599–647.

[4] P. BERTHELOT – Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie, prépublication, 1996.

[5] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative, Chapitres 1-4*, Masson, 1985.

[6] O. BRINON – Une généralisation de la théorie de Sen, *Math. Ann.* **327** (2003), p. 793–813.

[7] ———, Représentations cristallines p-adiques et de de Rham dans le cas relatif, *Mémoires de la SMF* **112** (2008).

[8] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[9] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[10] P. COLMEZ – Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[11] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ce volume.

[12] P. COLMEZ & J.-M. FONTAINE – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[13] P. DELIGNE – *Cohomologie étale (SGA $4\frac{1}{2}$)*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–61, Lecture Notes in Mathematics, vol. 569, Springer, 1977.

[14] G. FALTINGS – p-adic Hodge theory, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), p. 255–299.

[15] ———, Almost étale extensions, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (II), Astérisque* **279** (2002), p. 185–270.

[16] ———, A p-adic Simpson correspondence, *Adv. Math.* **198** (2005), p. 847–862.

[17] J.-M. FONTAINE – Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[18] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Périodes p-adiques, Astérisque* **223** (1994), p. 59–111.

[19] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[20] ———, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III), Astérisque* **295** (2004), p. 1–115.

[21] J.-M. FONTAINE & J.-P. WINTENBERGER – Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), p. A367–A370.

[22] A. GROTHENDIECK – Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, *Publ. Math. I.H.É.S.* **32** (1967), p. 361.

[23] S. MATSUDA – Local indices of p-adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings, *Duke Math. J.* **77** (1995), p. 607–625.

[24] H. MATSUMURA – *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, 1986.

[25] M. RAYNAUD – *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 169, Springer, 1970.

[26] S. SEN – Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

[27] J-P. SERRE – *Corps locaux*, 3^{e} éd., Hermann, 1968.

[28] J. T. TATE – p-divisible groups, in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, 1967, p. 158–183.

FABRIZIO ANDREATTA, Università di Milano, Dipartimento di Matematica « Federigo Enriques », via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italia • *E-mail :* andreat@mat.unimi.it

OLIVIER BRINON, Institut Galilée - Département de Mathématiques, Université Paris 13 - 99, avenue Jean-Baptiste Clément - F93430, Villetaneuse, France • *E-mail :* brinon@math.univ-paris13.fr

Astérisque

PIERRE COLMEZ

Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham

Astérisque, tome 319 (2008), p. 117-186

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__117_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 117–186

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE ET REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM

par

Pierre Colmez

Résumé. — La conjecture de monodromie p-adique de Fontaine « de Rham implique potentiellement semi-stable » est maintenant un théorème : Berger a montré comment associer à une représentation de de Rham un module différentiel avec structure de Frobenius sur l'anneau de Robba, ce qui permet de ramener cette conjecture à la conjecture de monodromie de Crew qui a ensuite été démontrée par André, Mebkhout et Kedlaya de manière indépendante. Dans cet article, nous donnons une nouvelle démonstration de la conjecture de Fontaine ne s'appuyant pas sur la théorie des équations différentielles p-adiques.

***Abstract* (Finite-dimensional vector spaces and de Rham representations).** — The p-adic monodromy conjecture of Fontaine "de Rham implies potentially semi-stable" is now a theorem : Berger showed how to attach to a de Rham representation a differential module with a Frobenius structure over the Robba ring, which reduced Fontaine's conjecture to Crew's monodromy conjecture proved afterwards, independently by André, Mebkhout and Kedlaya. In this paper, we give a new proof of Fontaine's conjecture which bypasses the theory of p-adic differential equations.

Introduction

0.1. Notations. — Soient k_F un corps parfait de caractéristique p, $\mathscr{O}_F = W(k_F)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k_F et $F = \mathscr{O}_F[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de $\mathscr{O}_F$, ce qui fait de F un corps complet pour la valuation p-adique v_p (que l'on suppose normalisée par $v_p(p) = 1$), d'anneau des entiers $\mathscr{O}_F$ et de corps résiduel k_F.

On se fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F. La valuation v_p s'étend de manière unique à $\overline{F}$ et on note C le complété de $\overline{F}$ pour la valuation v_p. Si $K \subset \overline{F}$ est une extension algébrique de F, on note $\mathscr{O}_K$ l'anneau des entiers de K et k_K son corps résiduel.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S.
Mots clefs. — p-adique, Banach, représentations, semi-stable, anneaux de Fontaine.

© Astérisque 319, SMF 2008

On se fixe aussi un système $(\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\overline{F}$ vérifiant $\varepsilon^{(0)}=1$, $\varepsilon^{(1)}\neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p=\varepsilon^{(n)}$ si $n\in\mathbf{N}$. Ceci fait de $\varepsilon^{(n)}$ une racine primitive p^n-ième de l'unité.

Si K est une extension finie de F, on note K_n le corps $K(\varepsilon^{(n)})$ et K_∞ l'extension cyclotomique de K réunion des K_n. On note $\mathscr{G}_K$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/K)$ et $\chi:\mathscr{G}_K\to\mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Soit aussi $\mathscr{H}_K$ le noyau de la restriction de χ à $\mathscr{G}_K$ de telle sorte que $\mathscr{H}_K=\mathrm{Gal}(\overline{F}/K_\infty)$ et soit $\Gamma_K=\mathscr{G}_K/\mathscr{H}_K=\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Alors χ se factorise à travers Γ_K et l'image de Γ_K par χ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$.

0.2. La conjecture de monodromie p-adique de Fontaine. — Soit K une extension finie de F et soit V une $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension d de $\mathscr{G}_K$, c'est-à-dire un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension d muni d'un morphisme continu de groupes de $\mathscr{G}_K$ dans $\mathrm{GL}(V)$. Soient $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}\subset\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}}\subset\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ les anneaux introduits par Fontaine [**14, 15, 17**] pour classifier les $\mathbf{Q}_p$-représentations de $\mathscr{G}_K$ venant de la géométrie, et soit $t\in\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}$ le « $2i\pi$ p-adique de Fontaine ». Rappelons que V est *de de Rham* si $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}[\frac{1}{t}]\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}[\frac{1}{t}])^d$ en tant que $\mathscr{G}_K$-module, ce qui équivaut à ce que le K-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)=(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}[\frac{1}{t}]\otimes_{\mathbf{Q}_p}V)^{\mathscr{G}_K}$ soit de dimension d. De même, V est *semi-stable* si $\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}}[\frac{1}{t}]\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}}[\frac{1}{t}])^d$ en tant que $\mathscr{G}_K$-module. Une représentation semi-stable est *a fortiori* de de Rham ; réciproquement, une représentation de de Rham est semi-stable si et seulement si $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ possède une base sur K constituée d'éléments de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}}[\frac{1}{t}]\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$. On dit que V est *potentiellement semi-stable* s'il existe une extension finie L de K telle que V soit semi-stable en tant que $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_L$. Une représentation potentiellement semi-stable est de de Rham (car $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ contient $\overline{F}$) et notre but, dans cet article, est de donner une nouvelle démonstration du résultat suivant qui avait été conjecturé par Fontaine [**18**].

Théorème 0.1. — *Toute représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ est potentiellement semi-stable.*

Les démonstrations existantes [(1)] de ce théorème passent par la théorie des équations différentielles p-adiques. En utilisant la théorie des (φ,Γ)-modules [**16, 6**], Berger [**4**] a associé à une représentation de de Rham V un module différentiel $\mathbf{N}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ avec structure de Frobenius sur l'anneau de Robba et a montré que V était semi-stable si et seulement si ce module était quasi-unipotent, réduisant ainsi la conjecture de Fontaine à la conjecture de monodromie p-adique de Crew [**13**]. La conjecture de Crew a ensuite été démontrée de manière indépendante par André [**1**], par Mebkhout [**25**] et par Kedlaya [**24**] ; je renvoie à [**10**] pour plus de détails. Des trois démonstrations

(1) Depuis la première version de cet article, Fontaine [**20**] a fabriqué une autre démonstration évitant le recours à la théorie des équations différentielles p-adiques ; un de ses ingrédients n'est pas sans rappeler les techniques du n° 3.3 de cet article.

de la conjecture de Crew à notre disposition, celle de Kedlaya est celle qui utilise le moins la théorie des équations différentielles p-adiques : elle repose à la place sur une classification à la Dieudonné-Manin des φ-modules sur l'anneau de Robba, ce qui lui permet par dévissage de se ramener au cas d'un module isocline traité par Tsuzuki [**29, 8**].

0.3. Principe de la démonstration. — Notre démonstration de la conjecture de Fontaine est parallèle à celle obtenue en combinant les travaux de Berger et Kedlaya, mais évite complètement la théorie des (φ, Γ)-modules et celle des équations différentielles p-adiques (il reste quand-même un fantôme de ces théories dans la démonstration de certains points). Elle a été obtenue en deux temps. Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, le seul point où la théorie des équations différentielles p-adiques est utilisée dans les travaux de Kedlaya est à travers le théorème de Tsuzuki. Or celui-ci admet un équivalent (prop. 0.2 ci-dessous), dû à Sen [**26**], dans la théorie des représentations galoisiennes (cf. [**4**, n° 5.6] pour l'équivalence des résultats de Sen et de Tsuzuki) ; avec ce fait en tête, il n'est pas très difficile de fabriquer une démonstration de la conjecture de Fontaine ne faisant pas référence aux équations différentielles p-adiques, en faisant du mécano avec les arguments de Berger et Kedlaya (c'est cette démonstration qui apparaît en filigrane dans cette introduction). Par la suite, des questions provenant de la théorie des déformations de représentations galoisiennes [**5**] nous ont amené à essayer de rendre les ingrédients de la démonstration les plus directs possibles (et à expliciter comment les constantes se comportent dans une famille) dans l'espoir que ceux-ci s'adaptent à une démonstration « en famille ».

Nous remplaçons le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya par un résultat analogue (cf. prop 0.3) pour certains φ-modules sur l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}})$, et utilisons cette décomposition pour une variante $\widetilde{\mathbf{N}}^+_{\mathrm{rig}}(V)$ du module $\mathbf{N}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ de Berger. Le théorème de Tsuzuki est remplacé par le résultat suivant de Sen [**26**] (bien antérieur à la définition de représentation semi-stable !), selon lequel une représentation de de Rham dont les poids de Hodge-Tate sont nuls (ce qui se traduit par l'existence d'un isomorphisme de $\mathscr{G}_K$-modules de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sur $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$) est potentiellement non ramifiée et donc, *a fortiori*, potentiellement semi-stable.

Proposition 0.2. — *Si V est une représentation de Hodge-Tate de $\mathscr{G}_K$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'inertie de $\mathscr{G}_K$ agit à travers un quotient fini ;*

(ii) *les poids de Hodge-Tate de V sont tous nuls.*

Le dévissage permettant de se ramener au cas « isocline » est un peu plus délicat que dans le cas des équations différentielles p-adiques, et repose sur des calculs de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine et, plus précisément (cf. prop. 0.4

ci-dessous) sur un énoncé du type « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » pour les $\mathscr{G}_K$-modules

$$\mathbf{U}_{h,a} = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi^h = p^a} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}'_{h,a} = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}})^{\varphi^h = p^a}.$$

Les méthodes pour faire ces calculs, bien que relativement techniques, sont parfaitement huilées : elle remontent à l'article fondateur de Tate [**28**].

Signalons que Fontaine avait démontré [**19**] le théorème 0.1 ci-dessus (avant qu'il ne soit démontré en toute généralité) pour les représentations de dimension 2, par une méthode qui rappelle un peu celle décrite ci-dessus.

L'analogue du théorème de Dieudonné-Manin auquel il a été fait allusion plus haut est le suivant

Proposition 0.3. — *Soit M un sous-$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-réseau de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ et soit $M_{\mathrm{rig}} = \{x \in (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^d,\ \varphi^n(x) \in M,\ \text{quel que soit } n \in \mathbf{Z}\}$. Alors M_{rig} est un $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-module libre de rang d, et il existe une base $e_1, \dots, e_d$ de M_{rig} sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ vérifiant :*

(i) *il existe $h \in \mathbf{N}$ et $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_d \in \mathbf{N}$ tels que $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$ si $1 \leqslant i \leqslant d$;*

(ii) *$\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_d)$ est une base de M sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Rappelons que l'on obtient $\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}}$ à partir de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}$ en lui adjoignant un analogue p-adique u de $\log p$. On a alors $\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}} = \mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}[u]$, et la dérivation $N = -\frac{d}{du} : \mathbf{B}^+_{\mathrm{st}} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{st}}$ commute à l'action de $\mathscr{G}_K$. Le résultat du type « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » auquel il a été fait allusion ci-dessus est alors le suivant. (Le corps E_h apparaissant dans l'énoncé est l'extension non ramifiée de degré h de $\mathbf{Q}_p$.)

Proposition 0.4. — *Soient a et h des entiers $\geqslant 1$.*

(i) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $\mathbf{U}_{h,a}$ tel que $\sigma \mapsto \varphi^{-n}(c_\sigma)$ soit un cobord dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors, si $a \neq h$ (resp. si $a = h$), il existe $c \in \mathbf{U}_{h,a}$ (resp. $c \in E_h^{\mathscr{G}_K} u + \mathbf{U}_{h,a}$) tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_K$.*

(ii) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $\mathbf{U}'_{h,a}$ tel que $\sigma \mapsto N^k(\varphi^{-n}(c_\sigma))$ soit un cobord dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, pour tous $k, n \in \mathbf{N}$. Alors il existe $c \in \mathbf{U}'_{h,a}$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_K$.*

0.4. Démonstration de la conjecture de Fontaine. — Nous renvoyons aux n° 0.5 et n° 0.6 pour des commentaires sur la démonstration des propositions 0.3 et 0.4 ; nous allons maintenant montrer comment on peut en déduire la conjecture de monodromie de Fontaine. (L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ apparaissant ci-dessous est défini par $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} = \cap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}})$; on a aussi $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[u]$, et on aurait pu définir les $\mathscr{G}_K$-modules $\mathbf{U}_{h,a}$ et $\mathbf{U}'_{h,a}$ par $\mathbf{U}_{h,a} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi^h = p^a}$ et $\mathbf{U}'_{h,a} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{\varphi^h = p^a}$.)

Soit V une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, de dimension d, à poids de Hodge-Tate $\leqslant 0$ (on peut s'y ramener en tordant par une puissance convenable du caractère cyclotomique). Soit $\mathbf{N}^+_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$; l'hypothèse selon laquelle les

poids de Hodge-Tate de V sont $\leqslant 0$ implique que $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ est un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$.

Soit $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V) = \{x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \mid \varphi^{-n}(x) \in \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V), \text{ quel que soit } n \in \mathbf{Z}\}$. La proposition 0.3 ci-dessus appliquée à $M = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ nous fournit le résultat suivant :

Proposition 0.5. — *$\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ est un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module libre de rang d. Plus précisément, $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ possède une base $e_1, \dots, e_d$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ vérifiant :*

(i) *il existe $h \in \mathbf{N}$ et $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_d \in \mathbf{N}$ tels que $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$ si $1 \leqslant i \leqslant d$;*

(ii) *$\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_d)$ est une base de $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Comme $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ en tant que $\mathscr{G}_K$-module, la proposition 0.6 ci-dessous montre qu'il existe une extension finie L de $\mathscr{G}_K$ telle que $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ contienne d éléments indépendants sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, fixes par I_L. Mais $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ est inclus dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, ce qui prouve que V est semi-stable en tant que représentation de I_L et donc aussi en tant que représentation de $\mathscr{G}_L$, ce que l'on cherchait à démontrer.

Proposition 0.6. — *Soit Y un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module libre de rang d muni d'actions semi-linéaires de φ et $\mathscr{G}_K$ commutant entre elles. Si Y possède une base $e_1, \dots, e_d$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ vérifiant :*

(i) *il existe $h \in \mathbf{N}$ et $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_d \in \mathbf{N}$ tels que $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$ si $1 \leqslant i \leqslant d$,*

(ii) *le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module engendré par $\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_d)$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ en tant que $\mathscr{G}_K$-module, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,*

alors il existe une extension finie L de K et une base $f_1, \dots, f_d$ de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} Y$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) *f_i est fixe par le sous-groupe d'inertie I_L de $\mathscr{G}_L$.*

(b) *$f_i = e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} e_j$, avec $\alpha_{i,j} \in \mathbf{U}'_{h,a_i-a_j}$ (et donc $\varphi^h(f_i) = p^{a_i} e_i$) ;*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal r de l'ensemble $\{a_1, \dots, a_d\}$. Si $r = 1$ (i.e. si tous les a_i sont égaux à un entier a), alors $W = E_h e_1 \oplus \cdots \oplus E_h e_d$ est l'ensemble des $x \in Y$ vérifiant $\varphi^h(x) = p^a x$; c'est donc un E_h-espace vectoriel de dimension d stable par $\mathscr{G}_K$. D'autre part, le $\mathscr{G}_K$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} W = \oplus_{i=0}^{h-1} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{E_h} \varphi^i(W)$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{hd}$, d'après la propriété (ii) de la base $e_1, \dots, e_d$. Ceci signifie que W, vu comme $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_K$, est une représentation de de Rham dont tous les poids de Hodge-Tate sont nuls ; on déduit du théorème de Sen (prop. 0.2) l'existence d'une extension finie L de K telle que les e_i soient fixes par I_L, ce qui conclut l'étude du cas $r = 1$.

Si $r \neq 1$, soit s le plus petit entier tel que $a_{s+1} \neq a_1$, et soient Y' le sous-$\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module de Y engendré par $e_1, \dots, e_s$ et $Y'' = Y/Y'$. Comme $a_j > a_s$, pour tout $j \geqslant s+1$, le E_h-espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_s$ est aussi l'espace $Y^{\varphi^h = p^{a_1}}$.

On en déduit que Y' est stable par φ et $\mathscr{G}_K$, ce qui fait que Y' et Y'' sont munis d'actions de φ et $\mathscr{G}_K$ commutant entre elles. D'autre part, si $n \in \mathbf{N}$, on a la suite exacte

$$0 \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} \varphi^n(Y') \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} \varphi^n(Y) \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} \varphi^n(Y'') \to 0$$

de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-modules munis d'une action de $\mathscr{G}_K$. On en déduit la suite exacte

$$0 \to (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} \varphi^n(Y'))^{\mathscr{G}_K} \to (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} \varphi^n(Y))^{\mathscr{G}_K} \to (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} \varphi^n(Y''))^{\mathscr{G}_K},$$

et comme $\dim_K((\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} \varphi^n(Y))^{\mathscr{G}_K}) = d$, par hypothèse, et $\dim_K M^{\mathscr{G}_K} \leqslant \mathrm{rg}_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}} M$, si M est un-$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module libre de rang fini muni d'une action de $\mathscr{G}_K$, on en déduit le fait que Y' (muni de la base $e_1, \dots, e_s$) et Y'' (muni de la base $\overline{e}_{s+1}, \dots, \overline{e}_d$, où $\overline{e}_j$ désigne l'image de e_j dans Y'') vérifient les conditions de la proposition. On peut appliquer les résultats obtenus pour $r = 1$ à Y' et l'hypothèse de récurrence à Y'', ce qui nous fournit une extension finie L de K et des $\alpha_{i,j} \in \mathbf{U}'_{h,a_i-a_j}$, pour $s+1 \leqslant j < i \leqslant d$, tels que I_L agisse trivialement sur $g_1 = e_1, \dots, g_s = e_s$ et sur $\overline{g}_i = \overline{e}_i + \sum_{j=s+1}^{i-1} \alpha_{i,j} \overline{e}_j$, pour $s+1 \leqslant i \leqslant d$. Soit $g_i = e_i + \sum_{j=s+1}^{i-1} \alpha_{i,j} e_j$ si $s+1 \leqslant i \leqslant d$. Si $\sigma \in I_L$ et si $i \geqslant s+1$, alors $(\sigma - 1) \cdot g_i \in Y'$, ce qui permet de l'écrire sous la forme $\sum_{j=1}^{s} \beta_{i,j,\sigma} e_j$, et comme g_i vérifie $\varphi^h(g_i) = p^{a_i} g_i$, l'application $\sigma \mapsto \beta_{i,j,\sigma}$ est un 1-cocycle sur I_L à valeurs dans $\mathbf{U}'_{h,a_i-a_j}$.

Soit M_n le sous-$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module engendré par $\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_d)$. Comme la matrice de passage de $e_1, \dots, e_d$ à $g_1 + N^k(g_1), \dots, g_d + N^k(g_d)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, les $\varphi^n(g_i + N^k(g_i))$ forment une base de M_n sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ dans laquelle la matrice de $\sigma \in I_L$ est $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1}_s & B_{k,n,\sigma} \\ 0 & \mathbf{1}_{d-s} \end{smallmatrix}\right)$, où $B_{k,n,\sigma}$ est celle des $\varphi^n(\beta_{i,j,\sigma} + N^k(\beta_{i,j,\sigma}))$. L'hypothèse selon laquelle M_n est isomorphe à $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$, en tant que $\mathscr{G}_K$-module, se traduit donc par la nullité de l'image, dans $H^1(I_L, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$, des cocycles $\sigma \mapsto \varphi^n(\beta_{i,j,\sigma} + N^k(\beta_{i,j,\sigma}))$, pour $s+1 \leqslant i \leqslant d$ et $1 \leqslant j \leqslant d$, quels que soient $n \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}$. On déduit de la proposition 0.4 l'existence de $\beta_{i,j} \in \mathbf{U}'_{h,a_i-a_j}$ tel que l'on ait $\beta_{i,j,\sigma} = (1-\sigma) \cdot \beta_{i,j}$, pour tout $\sigma \in I_L$. Il suffit alors de poser $f_i = g_i$ si $i \leqslant s$ et $f_i = g_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_{i,j} e_i$ si $s+1 \leqslant i \leqslant d$ pour obtenir une base de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} Y$ vérifiant les conditions souhaitées. Ceci permet de conclure.

0.5. Remarques sur le théorème « de Dieudonné-Manin ». — Les travaux de Kedlaya et Berger utilisent l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ (que Kedlaya note $\Gamma^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{an,con}}\dots$) au lieu de l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$; cet anneau contient $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et peut s'obtenir en localisant et complétant $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. C'est un anneau de Bézout [tout idéal engendré par un nombre fini d'éléments est

principal (cf. [**24**, th. 3.20]) et tout sous-module fermé [(2)] d'un module libre est libre (la démonstration de [**4**, th. 4.10] pour l'anneau de Robba s'étend sans problème)]. Par ailleurs, tout φ-module Y de rang d sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ admet une base $e_1, \dots, e_d$ vérifiant $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$, où h est un entier $\geqslant 1$ et $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_d \in \mathbf{Z}$ (théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya [**24**, th. 4.16] ; ce théorème est loin d'être une évidence). Pour démontrer la proposition 0.3, on peut appliquer ce qui précède à $Y = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}} M$, et obtenir une base $e_1, \dots, e_d$ de Y sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ ayant les propriétés voulues. Comme un élément x de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ vérifiant $\varphi^h(x) = p^a x$ appartient à $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ (cf. [**4**, prop. 3.2] ou lemme 10.10), cette base est en fait constituée d'éléments de M. Pour démontrer que les e_i forment une base de M sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$, on utilise des résultats standard (du type « suites exactes fondamentales ») dans les anneaux de Fontaine (cf. lemme 3.25 et cor. 3.26).

La démonstration de la proposition 0.3 que nous donnons dans le texte principal est totalement différente de celle esquissée ci-dessus : à la place du théorème de Kedlaya, nous utilisons la théorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie développée dans [**9**] pour construire la décomposition. Le principe de la démonstration est d'étudier les sous-E_h-espaces vectoriels $W_{h,a} = (\mathbf{U}_{h,a})^d \cap M_{\mathrm{rig}}$ de M_{rig} (où l'on a noté E_h l'extension non ramifiée de degré h de $\mathbf{Q}_p$) et, en particulier, de comprendre comment leur « dimension » varie avec a. C'est pour pouvoir parler de dimension que l'on a besoin « d'analytifier » la situation et de considérer $\mathbf{U}_{h,a}$ et $W_{h,a}$ comme les C-points de E_h-Espace Vectoriels $\mathbb{U}_{h,a}$ et $\mathbb{W}_{h,a}$. L'étude de la E_h-Dimension de $\mathbb{W}_{h,a}$ se fait par des arguments combinatoires qui reposent sur les ingrédients suivants :

- la formule $\dim_{E_h} \mathbb{W}_{h,a} = (da - t_H(M), d)$ si $a \gg 0$ [$t_H(M)$ est la longueur du $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$-module $(\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}})^d / M$] ;
- une variante $0 \to t_h \mathbb{U}_{h,a} \to \mathbb{U}_{h,a+1} \to \mathbb{V}^1 \to 0$ de la suite exacte fondamentale [t_h est « la » période d'un Lubin-Tate pour E_h et, si d est un entier, $\mathbb{V}^d$ est l'Espace Vectoriel trivial de Dimension $(d, 0)$] ;
- le fait que la Dimension (a, b) d'un sous-E_h-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ ne contenant pas de $\mathbb{V}^1$ vérifie $a < b$;
- le fait que $\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de $\mathbb{V}^1$ (cet énoncé est l'analogue analytique du fait que $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de sous-anneau isomorphe à C stable par $\mathscr{G}_K$), ce qui permet de montrer que le sous-$\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$-Module engendré par un E_h-Espace Vectoriel de Dimension (a, b) est de rang $\leqslant b$.

(2) $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ est la limite inductive, pour $r > 0$, d'anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ de Fréchet, et on dit qu'un sous-module M de $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}})^d$ est fermé si on peut l'ecrire comme une limite inductive de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$-modules M_r, où M_r est fermé dans $(\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})^d$, pour $r > 0$ assez petit (muni de la topologie induite par celle de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$, M serait dense s'il était de rang d).

Le premier de ces ingrédients permet de minorer la Dimension de $\mathbb{W}_{h,a}$, alors que les trois autres permettent de majorer la différence entre la Dimension de $\mathbb{W}_{h,a+1}$ et celle de $\mathbb{W}_{h,a}$, ce qui fournit suffisamment de contraintes pour tout déterminer.

0.6. Remarques sur le théorème « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ ». — L'espace $\mathbf{U}'_{h,a}$ de la proposition 0.4 est une extension de $\mathbf{B}_m = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^m\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ (avec $m = a$) par une certaine $\mathbf{Q}_p$-représentation $V'_{h,a}$ de $\mathscr{G}_K$, de dimension finie. On peut étudier les $H^i(\mathscr{G}_K, \mathbf{B}_m)$ par dévissage en utilisant les résultats de Tate sur les $H^i(\mathscr{G}_K, C(k))$; cela permet de ramener la démonstration de la proposition 0.4 à vérifier que l'on a $H^1_g(\mathscr{G}_K, V'_{h,a}) = H^1_{\mathrm{st}}(\mathscr{G}_K, V'_{h,a})$, ce que Hyodo [**23**] a fait par des arguments de dimension dans le cas où le corps résiduel est fini. Malheureusement, pour prouver le théorème 0.1, on a besoin du résultat dans le cas où le corps résiduel est algébriquement clos et il nous faut nous rabattre sur les techniques introduites par Berger [**3**, n° IV.2] pour étendre le résultat de Hyodo au cas d'un corps résiduel parfait quelconque. Ceci nous oblige à étudier la cohomologie galoisienne de l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ (ou plutôt des anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ dont $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ est la réunion) qui, chassé par la porte du théorème de Dieudonné-Manin, rentre donc par la fenêtre...

On part d'un cocycle continu $\sigma \mapsto c_\sigma$ sur $\mathscr{G}_K$, à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, tel que, pour k assez grand, $\sigma \mapsto \varphi^{-k}(c_\sigma)$ se trivialise dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, et on lui fait subir le traitement suivant :

- un peu de « descente presque étale » permet de descendre de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}_K = (\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})^{\mathscr{H}_K}$;
- des « traces de Tate normalisées » permettent de descendre de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}_K$ à $\mathbf{B}^{]0,r]}_{K,n}$ qui est un anneau de fonctions analytiques (en π) sur une couronne ;
- l'existence de fonctions analytiques prenant des valeurs données en des points donnés permet d'utiliser l'hypothèse de trivialité dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ pour annuler notre cocycle en « les racines de l'unité », ce qui permet de le rendre divisible par $t = \log(1+\pi)$;
- finalement, on est ramené au problème de trouver une primitive analytique d'une fonction analytique sur une couronne, ce qui est possible sauf si le résidu de cette fonction analytique est non nul, auquel cas la primitive fait intervenir la fonction logarithme, ce qui explique l'apparition du u (et le passage de $\mathbf{U}_{h,a}$ à $\mathbf{U}'_{h,a}$) dans le cas général.

0.7. Organisation de l'article. — L'article comporte deux parties totalement indépendantes : l'une regroupant les §§1-3, consacrée à la démonstration de la proposition 0.3 et l'autre regroupant les §§4-10, aux calculs de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine.

La partie consacrée aux anneaux de Fontaine est beaucoup plus longue que ce qu'elle pourrait être car, en vue d'applications aux familles de représentations p-adiques, nous avons explicité la plupart des constantes implicites se trouvant dans les énoncés de la théorie des (φ, Γ)-modules. Une des raisons qui nous ont poussé à faire ceci (outre les applications sus-mentionnées) est que beaucoup des résultats de la théorie des (φ, Γ)-modules reposent sur le théorème de surconvergence de [**6**]. Malheureusement, l'article en question est entouré d'un flou topologique assez inquiétant et nous avons profité de l'occasion pour faire une mise au point (les techniques restent globalement inchangées, mais les énoncés sont précisés et renforcés ; ils sont utilisés dans [**5**] pour redémontrer la surconvergence des (φ, Γ)-modules, et généralisés aux (φ, Γ)-modules sur une base dans [**2**]).

0.8. Remerciements. — Des discussions avec Laurent Berger, lors d'un séjour au département de mathématiques de l'université de Harvard en octobre 2002, ont été le facteur déclenchant pour la rédaction de cet article. En particulier, la démonstration du théorème de Dieudonné-Manin via la théorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie a été obtenue au cours de ce séjour.

Par ailleurs, la rédaction de cet article a bénéficié de la sérénité d'esprit procurée par la contemplation des couchers de soleil depuis le jardin de l'institut Tata de Bombay en novembre 2002 ; je voudrais en profiter pour remercier ces deux institutions, L. Berger et R. Sujatha de leur hospitalité, ainsi que le programme d'échanges franco-indien CEFIPRA qui a rendu possible le séjour à l'institut Tata.

1. Rappels et compléments sur les Espaces Vectoriels de Dimension finie

L'objet de ce §, outre de rappeler certains faits de base concernant la théorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie développée dans [**9**], est d'étendre, ce qui se fait sans douleur, ladite théorie aux E-Espaces Vectoriels, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

1.1. Espaces Vectoriels de Dimension finie. — Pour nous, une C-algèbre de Banach Λ est une C-algèbre unitaire complète pour une norme $\| \ \|_\Lambda$ vérifiant les conditions

(i) $\|cx\|_\Lambda = |c| \cdot \|x\|_\Lambda$ si $c \in C$ et $x \in \Lambda$,

(ii) $\|x+y\|_\Lambda \leqslant \sup(\|x\|_\Lambda, \|y\|_\Lambda)$ et $\|xy\|_\Lambda \leqslant \|x\|_\Lambda \cdot \|y\|_\Lambda$ si $x, y \in \Lambda$.

Le *Spectre* $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ de Λ est l'ensemble des morphismes continus $s : \Lambda \to C$ de C-algèbres et on dit que Λ est *spectrale* si $\|x\|_\Lambda = \sup_{s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)} |s(x)|$. (Comme il s'agit du spectre maximal, cet espace aurait aussi pu être noté $\mathrm{Spm}(\Lambda)$...)

Une C-algèbre de Banach Λ est dite *connexe* si elle ne possède pas d'idempotent autre que 0 et 1 ; elle est dite *p-close* si tout élément $x \in \Lambda$ vérifiant $\|x-1\|_\Lambda < 1$ a

une racine p-ième dans Λ et elle est dite *sympathique* si elle est spectrale, connexe et p-close. Toute algèbre de Banach spectrale et connexe possède une clôture sympathique $\widetilde{\Lambda}$ obtenue en rajoutant suffisamment de racines p-ièmes et en complétant [**9**, n° 5.5].

Un *Espace Vectoriel* $\mathbb{W}$ est un foncteur (covariant) de la catégorie des algèbres sympathiques dans celle des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels vérifiant la condition : pour toute algèbre sympathique Λ, l'application naturelle de $\mathbb{W}(\Lambda)$ dans le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel des applications $\mathrm{Spec}(\Lambda) \to \mathbb{W}(C)$ est injective. Ce procédé s'étend à d'autres catégories comme, par exemple, celle des anneaux [**9**, § 7]. Les exemples les plus simples de tels objets sont :

- les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie : si U est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, on peut voir U comme un Espace Vectoriel en posant $U(\Lambda) = U$, pour toute l'algèbre sympathique Λ, et en prenant l'identité pour tous les morphismes de transition ;
- si $d \in \mathbf{N}$, l'Espace Vectoriel $\mathbb{V}^d$ défini par $\mathbb{V}^d(\Lambda) = \Lambda^d$, pour toute l'algèbre sympathique Λ, et le morphisme évident $\Lambda_1^d \to \Lambda_2^d$, si $s : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ est un morphisme d'algèbres sympathiques.

Un Espace Vectoriel $\mathbb{W}$ est dit *de Dimension finie* s'il admet une présentation de la forme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V & & & & & & \\ & & & \searrow & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathbb{Y} & \longrightarrow & \mathbb{V}^d & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \searrow & & & \\ & & & & & & \mathbb{W} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où U et V sont les Espaces Vectoriels associés à des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie et les suites

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow 0$$

sont des suites exactes d'Espaces Vectoriels. (On rappelle que, par définition, c'est le cas si et seulement si, pour toute algèbre sympathique, la suite exacte correspondante est exacte.) A un tel Espace Vectoriel, on peut associer sa dimension principale $\dim_{\mathrm{pr}}(\mathbb{W}) = d \in \mathbf{N}$, sa dimension résiduelle $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}) = \dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p} V \in \mathbf{Z}$ et sa Dimension $\mathrm{Dim}(\mathbb{W}) = (\dim_{\mathrm{pr}}(\mathbb{W}), \dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W})) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$. Un des principaux résultats [**9**, §7] de la théorie est le suivant :

Proposition 1.1. — (i) *Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel de Dimension finie, sa Dimension ne dépend pas de la présentation choisie.*

(ii) *Si* $f : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ *est un morphisme d'Espaces Vectoriels, et si* $\mathbb{W}_1$ *et* $\mathbb{W}_2$ *sont de Dimension finie, alors* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont des Espaces Vectoriels de Dimension finie et on a* $\operatorname{Dim}(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{Dim}(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Dim}(\mathbb{W}_1)$.

Remarque 1.2. — On peut reformuler cette proposition sous la forme : la catégorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie est une catégorie additive munie de fonctions additives $\dim_{\mathrm{pr}}$, $\dim_{\mathrm{res}}$ et Dim caractérisées par les formules

(a) $\dim_{\mathrm{pr}}(\mathbf{Q}_p) = 0$, $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbf{Q}_p) = 1$ et $\operatorname{Dim}(\mathbf{Q}_p) = (0,1)$;

(b) $\dim_{\mathrm{pr}}(\mathbb{V}^1) = 1$, $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{V}^1) = 0$ et $\operatorname{Dim}(\mathbb{V}^1) = (1,0)$.

Plus généralement, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ *contenue dans* C, on définit un E-Espace Vectoriel comme un foncteur de la catégorie des algèbres sympathiques dans celle des E-espaces vectoriels. Comme E est contenu dans C, l'Espace Vectoriel $\mathbb{V}^d$ est un E-espace vectoriel. On dispose d'un morphisme naturel (oubli de la E-structure) de la catégorie des E-Espaces Vectoriels dans celle des Espaces Vectoriels et on dit qu'un E-Espace Vectoriel est de Dimension finie s'il l'est en tant qu'Espace Vectoriel. La proposition 1.1 admet comme conséquence immédiate l'énoncé suivant :

Proposition 1.3. — *la catégorie des* E*-Espaces Vectoriels de Dimension finie est une catégorie additive munie de fonctions additives* $\dim_{\mathrm{pr},E}$, $\dim_{\mathrm{res},E}$ *et* Dim_E *caractérisées par la formules*

(a) $\dim_{\mathrm{pr},E}(E) = 0$, $\dim_{\mathrm{res},E}(E) = 1$ *et* $\operatorname{Dim}_E(E) = (0,1)$;

(b) $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{V}^1) = 1$, $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{V}^1) = 0$ *et* $\operatorname{Dim}_E(\mathbb{V}^1) = (1,0)$.

Remarque 1.4. — (i) Si $\mathbb{W}$ est un E-Espace Vectoriel de Dimension $\operatorname{Dim}_E(\mathbb{W}) = (a,b)$, alors $\operatorname{Dim}\mathbb{W} = (a, [E : \mathbf{Q}_p] \cdot b)$;

(ii) Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel, alors $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbb{W}$ est naturellement muni d'une structure de E-Espace Vectoriel et $\operatorname{Dim}_E(E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbb{W}) = ([E : \mathbf{Q}_p] \cdot a, b)$, si $\operatorname{Dim}\mathbb{W} = (a,b)$.

1.2. Le corps des éléments additifs. — Soit $C\{X\}$ la C-algèbre des séries $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, où $a_n \in C$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Si on munit $C\{X\}$ de la norme de Gauss $\|f\|_G = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n|$, alors $C\{X\}$ devient une C-algèbre de Banach, spectrale, connexe, dont le spectre s'identifie naturellement à $\mathscr{O}_C$. Si $\widetilde{C\{X\}}$ est la clôture sympathique de $C\{X\}$, alors la clôture intégrale $C\{X\}^{(\infty)}$ de $C\{X\}$ dans $\widetilde{C\{X\}}$ est dense dans $\widetilde{C\{X\}}$ par construction [**9**, n° 5.5] et est une extension étale galoisienne de $C\{X\}$ dont on note H_C le groupe de Galois. Le groupe H_C est, par construction, un pro-p-groupe abélien (i.e. un $\mathbf{Z}_p$-module compact) ; son action sur $C\{X\}^{(\infty)}$ s'étend, par continuité, à $\widetilde{C\{X\}}$. D'autre part, on note T_C l'ensemble des morphismes continus $\tau : \widetilde{C\{X\}} \to \widetilde{C\{X\}}$ de C-algèbres, tels que $\tau(X) - X \in C$.

On a alors $\tau(X) - X \in \mathscr{O}_C$, ce qui nous fournit une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_C \longrightarrow \mathrm{T}_C \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow 1$$

de groupes topologiques, l'application de T_C dans $\mathscr{O}_C$ étant donnée par $\tau \mapsto x(\tau) = \tau(X) - X$.

On choisit une fois pour toutes $s_0 \in \mathrm{Spec}(\widetilde{C\{X\}})$ vérifiant $s_0(X) = 0$ [i.e. s_0 est au-dessus de $0 \in \mathscr{O}_C = \mathrm{Spec}(C\{X\})$]. Alors $\tau \mapsto s_0 \circ \tau$ est une bijection de T_C sur $\mathrm{Spec}(\widetilde{C\{X\}})$. Si $f \in \widetilde{C\{X\}}$, on note $f(\tau)$ [resp. $f(0)$] l'élément $s_0 \circ \tau(f)$ [resp. $s_0(f)$] de C. On dit que $f \in \widetilde{C\{X\}}$ est *additif* si l'on a $f(\sigma\tau) = f(\sigma) + f(\tau)$ quels que soient $\sigma, \tau \in \mathrm{T}_C$, et on dit que f, additif, est *de rang* r (resp. *de rang fini*) si $U_f^0 = f(\mathrm{H}_C)$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de rang r (resp. de rang fini).

On note $\mathscr{C} \subset \widetilde{C\{X\}}$ l'ensemble des éléments additifs de rang fini. On dispose d'une injection naturelle $c \mapsto cX$ de C dans $\mathscr{C}$.

Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel, $\ell \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ est dit *additif de rang* r si :

(a) $\ell(\sigma\tau) = \ell(\sigma) + \ell(\tau)$ quels que soient $\sigma, \tau \in \mathrm{T}_C$;

(b) $\ell(\mathrm{H}_C)$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de rang r.

Si $\mathbb{W} = \mathbb{V}^1$, on retombe sur la notion précédente. Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel de Dimension finie, et si $\ell \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ est un élément additif de rang fini, on note L_ℓ le sous $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbb{W}(C)$ engendré par $\ell(\mathrm{T}_C)$ et $\mathbb{L}_\ell$ le sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{W}$ engendré par L_ℓ. L'Espace Vectoriel $\mathbb{L}_\ell$ est appelé *le sous-Espace Vectoriel de* $\mathbb{W}$ *engendré par* ℓ.

Si $f \in \mathscr{C}$, on appelle *Graphe* de f le sous-Espace Vectoriel $\mathbb{L}_{X,f}$ de $\mathbb{V}^2$ engendré par l'élément additif (X, f) de $\mathbb{V}^2(\widetilde{C\{X\}})$. Le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\mathrm{L}_{X,f} = \mathbb{L}_{X,f}(C)$ est le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par le graphe Γ_f de f, où

$$\Gamma_f = \{(s_C \circ \tau(X), s_C \circ \tau(f)) \mid \tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C\} = \{(x(\tau), f(\tau)),\ \tau \in \mathrm{T}_C\}.$$

On dispose de deux projection pr_1 et pr_2 de $\mathbb{L}_{X,f}$ sur $\mathbb{V}_1$ envoyant $(x(\tau), f(\tau))$ sur $x(\tau)$ et $f(\tau)$ respectivement. Si $g \in \mathscr{C}$, il existe dans $\mathbb{L}_{X,f}(\widetilde{C\{X\}})$ un unique $\widetilde{g}$ additif vérifiant $\mathrm{pr}_1(\widetilde{g}) = g$ et on définit le composé $f \cdot g$ de f et g par la formule naturelle $f \cdot g = \mathrm{pr}_2(\widetilde{g})$. On a alors le résultat suivant [**9**, §6] :

Proposition 1.5. — *Muni des lois* $+$ *et* $\cdot$, *l'ensemble* $\mathscr{C}$ *est un corps non commutatif, de centre* $\mathbf{Q}_p$, *dont* C *est un sous-corps commutatif maximal.*

Il existe une (unique) famille $(X_\alpha)_{\alpha \in C}$ d'éléments de $\widetilde{C\{X\}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $X_{\alpha+\beta} = X_\alpha X_\beta$, si $\alpha, \beta \in C$;

(ii) $X_\alpha = e^{\alpha X} \in C\{X\}$, si $\alpha \in \mathfrak{a} = \{x \in C \mid v_p(x) > \frac{1}{p-1}\}$;

(iii) $X_\alpha(0) = 1$, si $\alpha \in C$.

De plus, si $\alpha \in C$, il existe $\chi_\alpha(\tau) \in C^*$ tel que l'on ait $\tau(X_\alpha) = \chi_\alpha(\tau)X_\alpha$. L'application $\tau \to \chi_\alpha(\tau)$ est un morphisme de groupes de T_C dans C^* et la restriction de χ_α à H_C est à valeurs dans $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$. Si $\alpha \in \mathfrak{a}$ et si $\tau \in \mathrm{H}_C$, il existe un unique élément $\psi_\alpha(\tau)$ de $\mathbf{Z}_p$ tel que l'on ait $\chi_{p^{-n}\alpha}(\tau) = (\varepsilon^{(n)})^{\psi_\alpha(\tau)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. L'application $\tau \mapsto \psi_\alpha(\tau)$ est un morphisme de groupes de H_C dans $\mathbf{Z}_p$.

Si $f \in \mathscr{C}$, la restriction de f à H_C est un morphisme de groupes continu et, si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ est une base de $U_f^0 = f(\mathrm{H}_C)$ sur $\mathbf{Z}_p$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathfrak{a}$ uniquement déterminés tels que la restriction de f à H_C soit égale à $\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \psi_{\alpha_i}$. L'image de $\sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes \alpha_i$ dans $C \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{a} = C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ ne dépend d'aucun des choix que l'on a faits, ce qui nous fournit une application naturelle $\delta : \mathscr{C} \to C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$.

Remarque 1.6. — Il est assez malaisé de réconcilier la structure de corps de $\mathscr{C}$ avec la suite exacte de la proposition 1.7 ci-dessous, mais un calcul immédiat montre que, si $f \in \mathscr{C}$ vérifie $\delta(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes \beta_i \in C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$, et si $c \in C$, alors

$$\delta(c \cdot f) = \sum_{i=1}^r c\alpha_i \otimes \beta_i \quad \text{et} \quad \delta(f \cdot c) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes c\beta_i.$$

C'est à partir de cette expression que l'on montre que C est un sous-corps commutatif maximal.

L'application $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha\beta$ induit par linéarité une application $\mathrm{Tr} : C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C \to C$. On a alors [**9**, §10] le résultat suivant.

Proposition 1.7. — *Les applications* δ *et* Tr *définies ci-dessus donnent naissance à la suite exacte de* C*-espaces vectoriels* (« à droite » et « à gauche »)

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathscr{C} \xrightarrow{\delta} C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C \xrightarrow{\mathrm{Tr}} C \longrightarrow 0$$

Remarque 1.8. — Le rang de f se lit sur $\delta(f)$ comme le montre la construction de l'application δ : si $\delta(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes \beta_i$, où $\beta_1, \dots, \beta_r$ forment une famille libre sur $\mathbf{Q}_p$ et aucun des α_i n'est nul, alors $\mathrm{rg}(f) = r$. En particulier,

(a) f est de rang 0 si et seulement si $f \in C$;

(b) f ne peut pas être de rang 1.

1.3. Le commutant de E dans $\mathscr{C}$. — Soit $\mathscr{C}_E \subset \mathscr{C}$ le commutant de E ; c'est un sous-corps de $\mathscr{C}$ qui joue, pour les E-Espaces Vectoriels de Dimension finie, le rôle que joue $\mathscr{C}$ pour les Espaces Vectoriels de Dimension finie. Nous allons avoir besoin d'analyser sa structure d'un peu plus près.

Lemme 1.9. — *Si* $f \in \mathscr{C}$*, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathscr{C}_E$;

(ii) $\delta(f \cdot c) = \delta(c \cdot f)$ *quel que soit* $c \in E$.

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) est une évidence ; montrons la réciproque. Si $c \in E$, soit $u(c) = c \cdot f - f \cdot c$. Par hypothèse, on a $\delta(u(c)) = 0$ et donc $u(c) \in C$. D'autre part, on a

$$u(cd) = cd \cdot f - f \cdot cd = cd \cdot f - c \cdot f \cdot d + c \cdot f \cdot d - f \cdot cd = c \cdot u(d) + u(c) \cdot d,$$

et comme c, d, $u(c)$ et $u(d)$ sont des éléments de C et donc commutent deux à deux, l'application $c \mapsto u(c)$ est une $\mathbf{Q}_p$-dérivation sur E ; elle est donc identiquement nulle, ce qui permet de conclure.

Lemme 1.10. — *Si $f \in \mathscr{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathscr{C}_E$;

(ii) *le Graphe $\mathbb{L}_{X,f}$ de f est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^2$.*

Démonstration. — (i)⇒(ii) : si $f \in \mathscr{C}$ et $g \in \mathscr{C}$, alors $\mathbb{L}_{X,f}$ contient l'élément $(g, f \cdot g)$ de $\mathscr{C}^2 \subset \mathbb{V}^2(\widetilde{C\{X\}})$. En particulier, si $f \in \mathscr{C}_E$, si $c \in E$ et si $g = cX$, alors $\mathbb{L}_{X,f}$ contient $(cX, f \cdot c) = (cX, cf) = c(X, f)$. Comme (X, f) engendre $\mathbb{L}_{X,f}$, on en déduit l'inclusion $c\mathbb{L}_{X,f} \subset \mathbb{L}_{X,f}$ qui prouve que $\mathbb{L}_{X,f} \subset \mathbb{V}^2$ est stable par multiplication par un élément de E.

(ii)⇒(i) : si $c \in E$, on a $\mathrm{pr}_1(c(X, f)) = \mathrm{pr}_1(cX, cf) = cX$ et, comme (cX, cf) est additif, on déduit de la formule définissant la multiplication dans $\mathscr{C}$ (cf. prop. 1.5), que $cf = \mathrm{pr}_2(cX, cf) = f \cdot c$, ce qui permet de conclure.

Remarque 1.11. — Le lemme précédent montre que, si $f \in \mathscr{C}_E$, alors $U_f = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} f(\mathrm{H}_C)$ est un E-espace vectoriel. On définit le *E-rang* $\mathrm{rg}_E(f)$ de f comme la dimension de ce E-espace vectoriel.

Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de E sur $\mathbf{Q}_p$ et soit $e_1^*, \dots, e_d^*$ la base de E duale de $e_1, \dots, e_d$ pour la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(xy)$. L'élément $\sum_{i=1}^d e_i^* \otimes e_i$ de $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} E \subset C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ correspond à l'identité de $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}_p}(E) \cong E^* \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$, si on utilise l'isomorphisme $E^* \cong E$ induit par la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(xy)$. En particulier, cet élément ne dépend pas de la base $e_1, \dots, e_d$; nous le noterons e_E. Par ailleurs, si $c \in E$, on a $\mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(cx \cdot y) = \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(x \cdot cy)$, ce qui se traduit par le fait que e_E commute à E (i.e. $\sum_{i=1}^d ce_i^* \otimes e_i = \sum_{i=1}^d e_i^* \otimes e_i c$ si $c \in E$). Ceci nous permet de définir une application C-linéaire $\iota_E : C \otimes_E C \to C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ par la formule

$$\iota_E(x \otimes y) = x \cdot e_E \cdot y = \sum_{i=1}^d x e_i^* \otimes e_i y.$$

Cette application est injective comme on le voit en l'écrivant dans une base de C sur E.

Proposition 1.12. — *Si $x \in C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *x commute à E ;*

(ii) *x est dans l'image de ι_E.*

Démonstration. — (ii)⇒(i) est une conséquence du fait que e_E commute à E. Pour la réciproque, choisissons une base $(\beta_j)_{j\in J}$ de C sur E, ce qui fait de $(e_i\beta_j)_{1\leqslant i\leqslant d, j\in J}$ une base de C sur $\mathbf{Q}_p$. On peut alors écrire x de manière unique sous la forme $\sum_{i,j} x_{i,j}e_i^*\otimes e_i\beta_j$, où $x_{i,j}$ est un élément de C nul pour presque tout couple (i,j), et il s'agit de prouver que $x_{i,j}$ ne dépend pas de i.

On a $ce_i = \sum_{k=1}^d \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(ce_ie_k^*)e_k$ et donc

$$x\cdot c = \sum_{j\in J}\sum_{k=1}^d \Big(\sum_{i=1}^d \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(ce_ie_k^*)e_j^*x_{i,j}\Big)\otimes e_k\beta_j.$$

Par ailleurs,

$$c\cdot x = \sum_{j\in J}\sum_{k=1}^d cx_{k,j}e_k^*\otimes e_k\beta_j,$$

ce qui fait que x commute à E si et seulement si $ce_k^*x_{k,j} = \sum_{i=1}^k \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(ce_ie_k^*)e_j^*x_{i,j}$ quels que soient $1\leqslant k\leqslant d$ et $c\in E$. On peut en particulier appliquer cette identité à $c = (e_k^*)^{-1}e_\ell^*$ et obtenir $e_\ell^*x_{k,j} = e_\ell^*x_{\ell,j}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 1.13. — *Il existe une unique application $\delta_E : \mathscr{C}_E \to C\otimes_E C$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_E & \xrightarrow{\delta_E} & C\otimes_E C \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_E} \\ \mathscr{C} & \xrightarrow{\delta} & C\otimes_{\mathbf{Q}_p} C \end{array}$$

Démonstration. — La proposition 1.12 montre que l'image de $\mathscr{C}_E$ par δ est incluse dans l'image de $C\otimes_E C$ par ι_E ; l'injectivité de ι_E permet de conclure.

Théorème 1.14. — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \mathscr{C}_E & \xrightarrow{\delta_E} & C\otimes_E C & \xrightarrow{\mathrm{Tr}} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_E} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \mathscr{C} & \xrightarrow{\delta} & C\otimes_{\mathbf{Q}_p} C & \xrightarrow{\mathrm{Tr}} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif et les lignes horizontales sont exactes.

Démonstration. — Pour la commutativité du diagramme, la seule chose à vérifier est que l'on a $\mathrm{Tr}\circ\iota_E = \mathrm{Tr}$, ce qui suit du lemme 1.15 ci-dessous. Maintenant, la ligne du bas est exacte d'après la proposition 1.7 ; l'exactitude de celle du haut s'en déduit par une chasse au diagramme sans difficulté, la surjectivité de Tr étant évidente.

Lemme 1.15. — *Soient K un corps, $P \in K[X]$ un polynôme séparable de degré d et $L = K[X]/P$. Alors, si $e_1, \dots, e_d$ est une base de L sur K et si $e_1^*, \dots, e_d^*$ est la base de L sur K, duale de $e_1, \dots, e_d$ pour la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$, on a*

$$\sum_{i=1}^{d} e_i e_i^* = 1.$$

Démonstration. — Comme on l'a déjà vu, l'algèbre L étale sur K, l'élément $\sum_{i=1}^d e_i^* \otimes e_i$ de $L \otimes_K L$ ne dépend pas du choix de la base $e_1, \dots, e_d$; il en est donc *a fortiori* de même de $\sum_{i=1}^d e_i e_i^*$. Par ailleurs, cette quantité ne change pas si on remplace K par une extension, ce qui permet de supposer que K contient toutes les racines de P et donc que $L \cong K^d$. On peut alors prendre pour e_i l'idempotent de K^d projetant sur le i-ième facteur, auquel cas on a $e_i^* = e_i$ et $\sum_{i=1}^d e_i e_i^* = \sum_{i=1}^d e_i = 1$, ce qui permet de conclure.

Remarque 1.16. — Si $f \in \mathscr{C}_E$ et si $\delta_E(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes \beta_i$, où $\beta_1, \dots, \beta_r$ forment une famille libre sur E et aucun des α_i n'est nul, alors $\mathrm{rg}_E(f) = r$. En particulier,

(a) $\mathrm{rg}_E(f) = 0$ si et seulement si $f \in C$;

(b) $\mathrm{rg}_E(f) \neq 1$ quel que soit $f \in \mathscr{C}_E$.

2. Sous-Espaces Vectoriels des Anneaux de Fontaine

Dans ce §, nous rappelons un certain nombre de résultats du §9 de [**9**] comme la définition des Espaces Vectoriels $\mathbb{B}_m$ et $\mathbb{B}_{h,a}$, et les complétons sur certains points. En particulier, les propositions 2.4 et 2.18, qui fournissent des conditions numériques sur les sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{V}^d$ et $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, joueront un rôle crucial dans la démonstration du théorème « de Dieudonné-Manin ».

2.1. Sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{V}^d$. — Dans tout ce qui suit, Λ désigne une algèbre sympathique « générique ». On définit l'Anneau $\mathbb{A}$ comme le foncteur en anneaux sur les algèbres sympathiques associant à Λ sa boule unité. On note $\mathbb{B}$ l'Anneau $\mathbb{A}[\frac{1}{p}]$; on a donc $\mathbb{B}(\Lambda) = \Lambda$. On peut aussi voir $\mathbb{B}$ comme l'Espace Vectoriel $\mathbb{V}^1$ en oubliant la structure d'anneau.

On dispose d'un foncteur naturel de la catégorie des C-espaces vectoriels de dimension finie dans celle des E-Espaces Vectoriels de Dimension finie, à savoir le foncteur $\mathrm{W} \mapsto \mathbb{B} \otimes_C \mathrm{W}$. Ce foncteur est exact (évident) et, si W est de dimension d sur C, alors $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{B} \otimes_C \mathrm{W}) = (d, 0)$.

La plupart des résultat de ce n° sont des conséquences de l'énoncé suivant, qui découle de [**9**, prop. 7.13] appliqué à l'injection de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{V}^1$.

Proposition 2.1. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^1$ de Dimension finie, et si $\mathbb{W} \neq \mathbb{V}^1$, alors $\mathbb{W}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie.*

Lemme 2.2. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ vérifiant $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W}) = r$, alors il existe une partie I à r éléments de $\{1,\dots,d\}$ telle que la projection π_I de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{V}^I$ donne naissance à la suite exacte*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}^I \longrightarrow 0,$$

où A est un E-espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant évident. Soit $\pi_i : \mathbb{V}^d \to \mathbb{B}$ l'application « i-ième coordonnée ». Si $r \geqslant 1$, il existe $i \in \{1,\dots,d\}$ tel que $\dim_{\mathrm{pr},E}(\pi_i(\mathbb{W})) \geqslant 1$, ce qui signifie que π_i est surjective (cf. prop. 2.1). L'Espace Vectoriel $\mathbb{W}' = \mathbb{W} \cap \ker\theta_i$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^{\{1,\dots,d\}-\{i\}}$ vérifiant $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W}) = r-1$; on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $J \subset \{1,\dots,d\} - \{i\}$ de cardinal $r-1$ telle que π_J donne naissance à la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{W}' \longrightarrow \mathbb{V}^J \longrightarrow 0,$$

où A est un E-espace vectoriel de dimension finie. Il suffit alors de prendre $I = J \cup \{i\}$ pour obtenir le résultat souhaité.

Lemme 2.3. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ de Dimension $(1,0)$, et si e est un élément non nul de de $\mathbb{W}(C)$, alors $\mathbb{W} = \mathbb{B} \cdot e$.*

Démonstration. — Soit $\delta : \mathbb{W} \oplus \mathbb{B} \to \mathbb{V}^d$ l'application $(x,b) \mapsto x - be$. Soit $\mathbb{Y}$ le noyau de δ. L'image de δ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ contenant $\mathbb{W}$. On en déduit que $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{Y}) \leqslant \dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{B}) = 1$. Par ailleurs, comme $\mathbb{Y}$ est inclus dans $\mathbb{V}^{d+1}$ et $\operatorname{Im}\delta$ dans $\mathbb{V}^d$, il résulte du lemme 2.2, que $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{Y}) \geqslant 0$ et $\dim_{\mathrm{res},E}(\operatorname{Im}\delta) \geqslant 0$, et comme

$$\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{Y}) + \dim_{\mathrm{res},E}(\operatorname{Im}\delta) = \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}) + \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{B}) = 0,$$

on en déduit que $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{Y}) = 0$. Enfin, comme $\mathbb{Y}$ est non trivial puisqu'il contient $(e,1)$, on en déduit, en utilisant la prop. 2.1, que $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{Y}) = (1,0)$. Considérons alors les projections naturelles de $\mathbb{Y}$ sur $\mathbb{W}$ et $\mathbb{B}$. Leurs noyaux respectifs sont de dimensions résiduelles $\geqslant 0$ et, comme $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{Y}) = 0$, les mêmes arguments que ci-dessus permettent de montrer que ces projections sont des isomorphismes. On en déduit le résultat.

Proposition 2.4. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de Dimension finie de $\mathbb{V}^d$, vérifiant $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W}) \geqslant \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W})$, alors $\mathbb{W}$ contient un sous-Espace isomorphe à $\mathbb{V}^1$.*

Démonstration. — Soient $r = \dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W})$ et $s = \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W})$. D'après le lemme 2.2, quitte à renuméroter les coordonnées de $\mathbb{V}^d$, on peut supposer que la projection de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{V}^r = \mathbb{V}^r \times \{0\}^{d-r}$, parallèlement à $\mathbb{V}^{d-r} = \{0\}^r \times \mathbb{V}^{d-r}$, est surjective ; le noyau A de cette projection est alors un sous-E-espace vectoriel de dimension de s de $\mathbb{V}^{d-r}$.

Si $1 \leqslant i \leqslant r$, notons $\widetilde{\ell_i} \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ le relèvement additif de $(0, \dots, X, \dots, 0) \in \mathbb{V}^r(\widetilde{C\{X\}})$, le X étant en i-ième position, et soit $\ell_i \in \mathbb{V}^{d-r}(\widetilde{C\{X\}})$ l'image de $\widetilde{\ell_i}$ par la projection de $\mathbb{V}^d$ sur $\mathbb{V}^{d-r}$, parallèlement à $\mathbb{V}^r$. On a $\delta_E(\ell_i) \in A \otimes_E C$, ce qui permet, ayant choisi une base $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ de A sur E, d'écrire $\delta_E(\ell_i)$ sous la forme $\delta_E(\ell_i) = \sum_{j=1}^s \alpha_j \otimes a_{i,j}$.

Comme $s \leqslant r$, il existe $\beta_1, \dots, \beta_r \in C$ non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^r a_{i,j}\beta_i = 0$, si $2 \leqslant j \leqslant s$. Soient alors $\widetilde{\ell} \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ le relèvement additif de $(\beta_1 X, \dots, \beta_r X) \in \mathbb{V}^r(\widetilde{C\{X\}})$, et ℓ l'image de $\widetilde{\ell}$ dans $\mathbb{V}^{d-r}(\widetilde{C\{X\}})$. On a $\ell = \sum_{i=1}^r \ell_i \cdot \beta_i$ et donc

$$\delta_E(\ell) = \sum_{i=1}^r \delta_E(\ell_i) \cdot \beta_i = \sum_{j=1}^s \alpha_j \otimes \Big(\sum_{i=1}^r a_{i,j}\beta_i \Big) = \alpha_1 \otimes \Big(\sum_{i=1}^r a_{i,1}\beta_i \Big).$$

En particulier, le E-rang de ℓ est $\leqslant 1$ et donc est nul (cf. (b) de la rem. 1.16), ce qui se traduit par le fait que la projection de $\mathbb{L}_{\widetilde{\ell}} \subset \mathbb{W}$ sur $\mathbb{B} \cdot (\beta_1, \dots, \beta_r)$ est injective et donc que $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{L}_{\widetilde{\ell}}) = (1, 0)$. Ceci permet de conclure.

Proposition 2.5. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$, alors il existe $r \leqslant d$ et un sous-E-Espace Vectoriel $\mathbb{Y}$ de $\mathbb{W}$ ne contenant pas de sous-Espace de Dimension $(1, 0)$ tel que l'on ait $\mathbb{W} = \mathbb{Y} \oplus \mathbb{V}^r$.*

Démonstration. — Si $\mathbb{W}$ contient un sous-Espace de Dimension $(1, 0)$, alors il existe $e \in \mathbb{W}(C)$ tel que $\mathbb{W}$ contienne $\mathbb{B} \cdot e$ d'après le lemme 2.3. Comme le foncteur $V \mapsto \mathbb{B} \otimes_C V$ est exact, si X est un supplémentaire de $C \cdot e$ dans C^d et $\mathbb{X} = \mathbb{B} \otimes_C X$, alors $\mathbb{X} \cong \mathbb{V}^{d-1}$ et l'application $(b, x) \mapsto be + x$ est un isomorphisme de $\mathbb{B} \cdot e \oplus (\mathbb{X} \cap \mathbb{W})$ sur $\mathbb{W}$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire la proposition.

2.2. Les Anneaux de Fontaine. — Nous allons rappeler très rapidement la construction des anneaux de Fontaine vus comme Anneaux, c'est-à-dire comme foncteurs de la catégorie des algèbres sympathiques dans celle des anneaux ; le lecteur est invité à se reporter à [**17**] ou [**9**, §9] pour les détails.

Soit $a \in \mathscr{O}_C$ avec $v_p(a) = \frac{1}{p}$. On définit l'Anneau $\mathbb{R}$ comme le foncteur

$$\Lambda \mapsto \mathbb{R}(\Lambda) = \{(x_n)_{n \in \mathbf{N}},\ x_n \in \mathbb{A}(\Lambda)/a\mathbb{A}(\Lambda) \text{ et } x_{n+1}^p = x_n \text{ si } n \in \mathbf{N}\}.$$

En particulier, $\mathbb{R}(\Lambda) \supset \mathbb{R}(C)$ contient l'élément ε formé à partir du système compatible de racines de l'unité que l'on s'est fixé. Si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbb{R}(\Lambda)$ et si $\hat{x}_n \in \mathbb{A}(\Lambda)$ a pour image x_n modulo a, alors la suite $\hat{x}_{n+k}^{p^k}$ converge, quand k tend vers $+\infty$, vers un élément $x^{(n)}$ de $\mathbb{A}(\Lambda)$ qui ne dépend que de x. Ceci permet de mettre $\mathbb{R}(\Lambda)$ en bijection

avec l'ensemble des suites $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $x^{(n)} \in \mathbb{A}(\Lambda)$ et $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$.

L'anneau $\mathbb{R}$ est un Anneau parfait de caractéristique p et on définit l'Anneau $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ comme le foncteur $\Lambda \mapsto W(\mathbb{R}(\Lambda))$ associant à Λ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{R}(\Lambda)$. Si $x \in \mathbb{R}(\Lambda)$, on note $[x] \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(\Lambda)$ son représentant de Teichmüller, et tout élément de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\Lambda)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, où $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}(\Lambda)$. Le Frobenius φ « élévation à la puissance p » sur $\mathbb{R}$ se relève en un morphisme d'Anneaux $\varphi : \mathbb{A}_{\text{inf}} \to \mathbb{A}_{\text{inf}}$; ce morphisme est bijectif.

On définit $\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}} \to \mathbb{A}$ par la formule $\theta(\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k x_k^{(0)}$; c'est un morphisme d'Anneaux, qui est surjectif et dont le noyau est l'idéal principal engendré par $\omega = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \cdots + [\varepsilon^{1/p}]^{p-1}$.

On note $\mathbb{B}_{\text{inf}}$ l'Anneau $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$ et on étend, par $\mathbf{Q}_p$-linéarité, φ en un isomorphisme d'Anneaux de $\mathbb{B}_{\text{inf}}$ et θ en un morphisme de d'Anneaux de $\mathbb{B}_{\text{inf}}$ sur $\mathbb{B}$.

Si $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathbb{B}_m$ l'Anneau $\mathbb{B}_{\text{inf}}/\omega^m\mathbb{B}_{\text{inf}}$; on a donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$. On définit l'Anneau $\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$ comme la limite projective des $\mathbb{B}_m$. Par construction, θ s'étend en un morphisme d'Anneaux de $\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$ sur $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$, et on a $\mathbb{B}_m = \mathbb{B}^+_{\text{dR}}/\omega^m\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$ quel que soit $m \in \mathbf{N}$. On note v_H la valuation sur $\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$ définie par $v_H(x) = m$, si $x \in \omega^m\mathbb{B}^+_{\text{dR}} - \omega^{m+1}\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$.

On définit l'Anneau $\mathbb{A}_{\text{max}}$ comme le séparé complété de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{\omega}{p}]$ pour la topologie p-adique et l'Anneau $\mathbb{B}^+_{\text{max}}$ par $\mathbb{B}^+_{\text{max}} = \mathbb{A}_{\text{max}}[\frac{1}{p}]$. L'identité de $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ se prolonge en une injection continue de $\mathbb{A}_{\text{max}}$ et, par $\mathbf{Q}_p$-linéarité, de $\mathbb{B}^+_{\text{max}}$ dans $\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$, qui permet de voir $\mathbb{B}^+_{\text{max}}$ comme un sous-Anneau de $\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$, ce que nous ferons.

Le morphisme de Frobenius $\varphi : \mathbb{A}_{\text{inf}} \to \mathbb{A}_{\text{inf}}$ se prolonge en un morphisme continu de $\mathbb{A}_{\text{max}}$ dans $\mathbb{A}_{\text{max}}$ et, par $\mathbf{Q}_p$-linéarité, en un morphisme de $\mathbb{B}^+_{\text{max}}$ dans $\mathbb{B}^+_{\text{max}}$; ce morphisme est injectif mais pas surjectif et on définit l'Anneau $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\text{rig}}$ comme l'intersection des $\varphi^n(\mathbb{B}^+_{\text{max}})$, pour $n \in \mathbf{N}$; ceci fait de $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\text{rig}}$ un Anneau sur lequel φ est bijectif. Par ailleurs, comme $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\text{rig}} \subset \mathbb{B}^+_{\text{max}}$, on considérera $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\text{rig}}$ comme un sous-Anneau de $\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$ sans plus de commentaire.

Les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \mathbb{R}(C)$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathbb{A}_{\text{inf}}(C)$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \mathbb{B}_{\text{inf}}(C)$, $\mathbf{B}_m = \mathbb{B}_m(C)$, $\mathbf{B}^+_{\text{dR}} = \mathbb{B}^+_{\text{dR}}(C)$, $\mathbf{B}^+_{\text{max}} = \mathbb{B}^+_{\text{max}}(C)$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\text{rig}} = \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\text{rig}}(C)$ sont étudiés plus en détail au § 5.

2.3. Sous-Espace Vectoriels de $\mathbb{B}_m$.— On peut aussi voir $\mathbb{B}_m$ comme un Espace Vectoriel en oubliant la structure d'anneau. On montre [**9**, cor. 9.23] que cet Espace est de Dimension $(m, 0)$ et on dispose de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega\mathbb{B}_{m-1} \longrightarrow \mathbb{B}_m \xrightarrow{\theta} \mathbb{B} \longrightarrow 0 ,$$

qui montre que $\mathbb{B}_m$ admet une filtration par les $\mathbb{W}_i = \omega^i \mathbb{B}_{m-i}$, vérifiant $\mathbb{W}_0 = \mathbb{B}_m$, $\mathbb{W}_m = 0$ et $\mathbb{W}_i/\mathbb{W}_{i+1} \cong \mathbb{V}^1$ si $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

Lemme 2.6. — *Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel admettant une filtration décroissante par des sous-Espaces Vectoriels $\mathbb{W}_i$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, avec $\mathbb{W}_0 = \mathbb{W}$ et $\mathbb{W}_i/\mathbb{W}_{i+1} \cong \mathbb{V}^1$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$ ($\mathbb{W}$ est donc de Dimension $(n,0)$) et si $\mathbb{X}$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{W}$, alors $\dim_{\mathrm{res}} \mathbb{X} \geqslant 0$.*

Démonstration. — Le résultat se démontre par récurrence sur n : il résulte de la prop. 2.1 que les seuls sous-Espaces Vectoriels de Dimension finie de $\mathbb{V}^1$ sont $\mathbb{V}^1$ et les sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathbb{V}^1(C)$; tous ces espaces ont une dimension résiduelle $\geqslant 0$. Pour passer de $n-1$ à n, soit $\mathbb{X}_1 = \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{X}$. On dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{X}_1 & \longrightarrow & \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{X}/\mathbb{X}_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{W}_1 & \longrightarrow & \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{V}^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les lignes horizontales sont exactes et les flèches verticales sont injectives. La dimension résiduelle de $\mathbb{X}$ est donc la somme de celle de $\mathbb{X}_1$ (qui est $\geqslant 0$ grâce à l'hypothèse de récurrence) et de celle de $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$ (qui est aussi positive puisque $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$ s'identifie à un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^1$). Ceci permet de conclure.

Corollaire 2.7. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de Dimension finie de $\mathbb{B}_m$, alors $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}) \geqslant 0$.*

2.4. Sous-Espaces Vectoriels de $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. — Si h est un entier $\geqslant 1$, on note E_h l'extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, de degré h ; on a donc $E_1 = \mathbf{Q}_p$. Soit $t_h \in \mathbf{B}^+_{\max}$ « la » période d'une forme différentielle invariante d'un groupe de Lubin-Tate associé à l'uniformisante p de l'extension E_h. En particulier, t_1 est, à multiplication près par un élément de $\mathbf{Q}_p^*$, le $2i\pi$ p-adique t de Fontaine, $\omega^{-1}t$ est une unité de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, et t_h est caractérisé (cf. [**12**, lemme 6.4.] ou [**9**, prop. 9.10, lemmes 9.17 et 9.18]), à multiplication près par un élément de E_h^*, par les propriétés :

(i) $\varphi^h(t_h) = pt_h$ et (ii) $v_H(t_h) = 1$;

et, de plus, t_h vérifie les propriétés

(iii) $v_H(\varphi^j(t_h)) = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant h-1$ et $t^{-1}\prod_{j=0}^{h-1}\varphi^j(t_h) \in \mathbf{Q}_p^*$;

(iv) t_h engendre l'idéal $\mathbb{J}^{[+\infty]}_{\max,h} = \{x \in \mathbb{B}^+_{\max}, \varphi^{nh}(x) \in t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\}$ de $\mathbb{B}^+_{\max}$.

La propriété (iv), qui est la plus délicate, est le point crucial pour démontrer l'exactitude des « suites exactes fondamentales » (cf. [**9**, n° 9.7]) que nous utiliserons sous la forme de la proposition 2.10.

Lemme 2.8. — *Si $x \in \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ vérifie $\varphi^{nh}(x) \in t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, alors x est divisible par t_h dans $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.*

Démonstration. — D'après la propriété (iv) de t_h, si $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire $\varphi^{-nh}(x)$ sous la forme $t_h y_n$, avec $y_n \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{max}}$. On a alors $t_h y_0 = x = \varphi^{nh}(t_h y_n) = p^n t_h \varphi^{nh}(y_n)$, ce qui prouve que y_0 appartient à $\varphi^{nh}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{max}})$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$; on en déduit l'appartenance de y_0 à $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 2.9. — *Soit $n \mapsto a_n$ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, périodique de période h. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un élément x de $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$:*

(i) *x est divisible par $\prod_{i=0}^{h-1} \varphi^{-i}(t_h)^{a_i}$ dans $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$;*

(ii) *$\varphi^n(x) \in t^{a_n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) suit des propriétés (i) et (ii) de t_h et l'implication (ii)⇒(i) se démontre par récurrence sur $a_0 + \cdots + a_{h-1}$ en utilisant le lemme précédent.

Si $a \in \mathbf{N}$, on note $\mathbb{U}_{h,a}$ le E_h-Espace Vectoriel $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{max}})^{\varphi^h = p^a} = (\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi^h = p^a}$. C'est un E_h-Espace Vectoriel de Dimension $\mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{U}_{h,a}) = (a, 1)$ (cf. [**9**, cor. 9.21]).

Proposition 2.10. — *Si $a \leqslant b$ sont des entiers, alors l'injection de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{max}}$ dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ induit la suite exacte*

$$0 \longrightarrow t_h^a \mathbb{U}_{h,b-a} \longrightarrow \mathbb{U}_{h,b} \longrightarrow \mathbb{B}_a \longrightarrow 0.$$

Corollaire 2.11. — *Si $b, a_0, \ldots, a_r \in \mathbf{N}$ et si $a = a_0 + \cdots + a_r$, alors $x \mapsto (x, \varphi(x), \ldots, \varphi^r(x))$ induit la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \big(\textstyle\prod_{i=0}^r \varphi^{-i}(t_h)^{a_i}\big)\mathbb{U}_{h,b} \longrightarrow \mathbb{U}_{h,a+b} \longrightarrow \oplus_{i=1}^r \mathbb{B}_{a_i} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Récurrence sur r utilisant la proposition précédente.

Corollaire 2.12. — *Si $b, a_0, \ldots, a_{h-1} \in \mathbf{N}$, si $a = a_0 + \cdots + a_{h-1}$, et si x est un élément de $\big(\prod_{i=0}^r \varphi^{-i}(t_h)^{-a_i}\big)\mathbb{U}_{h,a+b}$ tel que $\varphi^n(x) \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $x \in \mathbb{U}_{h,b}$.*

Démonstration. — Soit $y = \big(\prod_{i=0}^r \varphi^{-i}(t_h)^{a_i}\big)x$. La propriété (iii) de t_h montre que l'image de $\varphi^i(y)$ dans $\mathbb{B}_{a_i}$ est nulle, ce qui permet d'utiliser le corollaire précédent pour conclure.

2.5. Sous-Espaces Vectoriels de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$

Lemme 2.13. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de Dimension finie de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, alors $\mathbb{W} \cap t^k \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} = 0$ si k est assez grand.*

Démonstration. — Soit $\mathbb{W}_k = \mathbb{W} \cap t^k \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Comme $\cap_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} = 0$, on a $\cap_{k=0}^{+\infty} \mathbb{W}_k(C) = 0$. Si $\mathrm{Dim}\mathbb{W}_k = (a_k, b_k)$, la suite de terme général a_k est décroissante, et donc stationnaire pour $k \geqslant k_0$. Si $a_{k_0} \neq 0$, alors $\mathbb{W}_{k_0}(C)$ est de dimension non dénombrable sur $\mathbf{Q}_p$. Par ailleurs, si $k \geqslant k_0$, alors $\mathbb{W}_k(C)$ est de codimension finie (sur $\mathbf{Q}_p$) dans $\mathbb{W}_{k_0}(C)$ et donc $\cap_{k \geqslant k_0} \mathbb{W}_k(C)$ est de codimension dénombrable (sur $\mathbf{Q}_p$) dans $\mathbb{W}_{k_0}(C)$. Comme $\cap_{k=0}^{+\infty} \mathbb{W}_k(C) = 0$, cela conduit à une contradiction et donc $a_k = 0$ si $k \geqslant k_0$. La suite $(\mathbb{W}_k)_{k \geqslant k_0}$ est donc une suite décroissante de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie et, comme $\cap_{k=0}^{+\infty} \mathbb{W}_k(C) = 0$, on a $\mathbb{W}_k = 0$ si k est assez grand, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 2.14. — *$\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de sous-Espace Vectoriel isomorphe à $\mathbb{V}^1$.*

Démonstration. — Supposons le contraire. Soit $\mathbb{W} \subset \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ isomorphe à $\mathbb{V}^1$. Quitte à rempacer $\mathbb{W}$ par $t^{-i}\mathbb{W}$, on peut supposer que $\mathbb{W}$ n'est pas inclus dans le noyau de $\theta : \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \mathbb{B}_1$.

Soit $\mathbb{W}' = \mathbb{W} \cap t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et $\mathbb{W}'' = \theta(\mathbb{W})$. Comme $\mathbb{W} \cap t^k \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} = 0$ si $k \gg 0$, l'application naturelle de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{B}_k$ est injective si $k \gg 0$ et $\mathbb{W}'$ s'identifie à un sous-Espace Vectoriel de $t\mathbb{B}_{k-1} \subset \mathbb{B}_k$; en particulier, $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}') \geqslant 0$ (cf. lemme 2.6). Comme par ailleurs, $\mathbb{W}''$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{B}_1$, on a aussi $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}'') \geqslant 0$. Comme par hypothèse,

$$0 = \dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}) = \dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}') + \dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}''),$$

cela implique $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}'') = 0$, et comme $\mathbb{W}''$ est un sous-Espace Vectoriel non nul de $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{V}^1$, on a $\mathbb{W}'' = \mathbb{B}_1$ et θ est un isomorphisme de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{B}_1$. Soit $\ell_{\mathbb{W}} \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ l'image inverse de X par θ ; c'est un élément additif de rang 0 puisque θ est un isomorphisme.

Maintenant, $\mathbb{U} = \mathbb{U}_{1,1}$ est une extension non triviale de $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$ dans la catégorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie (c'est même l'extension universelle [**9**, n° 10.4]) ; soit $\ell_{\mathbb{U}}$ l'élément additif de $\mathbb{U}(\widetilde{C\{X\}})$ vérifiant $\theta(\ell_{\mathbb{U}}) = X$. Comme $\mathbb{U}$ est une extension non triviale de $\mathbb{B}_1$ par $\mathbf{Q}_p$, cela implique que $\ell_{\mathbb{U}}$ est de rang 1. On en déduit le fait que $f = \theta(t^{-1}(\ell_{\mathbb{W}} - \ell_{\mathbb{U}}))$ est un élément de $\mathscr{C}$ de rang 1 (en effet, $\ell_{\mathbb{W}}(\mathrm{H}_C) = 0$ puisque $\ell_{\mathbb{W}}$ est de rang 0, et donc $f(\mathrm{H}_C) = t^{-1}\ell_{\mathbb{U}}(\mathrm{H}_C)$ est un sous-$\mathbf{Z}_p$-réseau de $\mathbf{Q}_p$), ce qui contredit le (b) de la remarque 1.8 et permet de conclure.

Remarque 2.15. — Cet énoncé est l'analogue analytique du fait que $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de sous-anneau isomorphe à C stable par Galois.

Proposition 2.16. — *Si $\mathbb{W} \subset \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est un sous-E-Espace Vectoriel non nul de Dimension finie, alors* $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}) \geqslant 1$.

Démonstration. — Soit $\mathbb{W}_k = \mathbb{W} \cap t^k \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et soit k_0 le plus grand entier k tel que $\mathbb{W}_k \neq 0$ (cf. lemme 2.13). Alors $\mathbb{W}_{k_0}$ s'injecte dans $t^{k_0}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^{k_0+1}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \cong \mathbb{V}^1$, et comme

$\mathbb{W}_{k_0}$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, cette injection ne peut être un isomorphisme (lemme 2.14). On a donc $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W}_{k_0}) = 0$ et $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}_{k_0}) > 0$. Par ailleurs, $\mathbb{W}/\mathbb{W}_{k_0}$ s'injecte dans $\mathbb{B}_{k_0}$ et donc $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}/\mathbb{W}_{k_0}) \geqslant 0$. On en déduit l'inégalité

$$\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}) = \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}_{k_0}) + \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}/\mathbb{W}_{k_0}) > 0\,,$$

qui permet de conclure.

Soit $\mathbb{W}$ un sous-Espace Vectoriel de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$. Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W}$ le sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ engendré par $\mathrm{W} = \mathbb{W}(C)$ et soit $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}$ l'Espace Vectoriel engendré par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W}$: par définition, si Λ est une algèbre sympathique,

$$(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W})(\Lambda) = \{x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda))^d,\ s(x) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W} \text{ pour tout } s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)\}.$$

Lemme 2.17. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, alors $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}$ est un $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module libre de rang $\leqslant d$, et on a $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W}$.*

Démonstration. — $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ étant un anneau de valuation discrète d'uniformisante t, on peut trouver une base $e_1, \ldots, e_d$ de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, un entier $r \leqslant d$ et des entiers $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$ tels que $t^{a_1}e_1, \ldots, t^{a_r}e_r$ forment une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Soit alors Λ une algèbre sympathique et $x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda))^d$. On peut écrire x de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$, avec $x_i \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda)$ si $1 \leqslant i \leqslant d$. Maintenant, $x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W})(\Lambda)$ si et seulement si, quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, l'image de $s(x_i)$ est nulle dans $\mathbf{B}_k$ pour $k \leqslant a_i$ (resp. $k \in \mathbf{N}$) si $i \leqslant r$ (resp. $i \geqslant r+1$). Comme $\mathbb{B}_k$ est un Espace Vectoriel, cela signifie que l'image de x_i est nulle dans $\mathbb{B}_k(\Lambda)$ pour $k \leqslant a_i$ (resp. $k \in \mathbf{N}$) si $i \leqslant r$ (resp. $i \geqslant r+1$), et donc que $x_i \in t^{a_i}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda)$ (resp. $x_i = 0$) si $i \leqslant r$ (resp. $i \geqslant r+1$). Ceci permet de montrer que $t^{a_1}e_1, \ldots, t^{a_r}e_r$ forment une base de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}$ sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et permet de conclure.

Proposition 2.18. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, de Dimension $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{W}) = (a,h)$, alors le rang de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}$ est $\leqslant h$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur d, le cas $d = 1$ correspondant à la proposition 2.16. Si $i \in \mathbf{N}$, soit $\mathbb{W}_i = \mathbb{W} \cap ((\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^i \times \{0\}^{d-i})$. les $\mathbb{W}_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant d$ forment une suite croissante de E-Espaces Vectoriels de Dimension finie. Soit $i_0 \geqslant 1$ le plus petit i tel que $\mathbb{W}_i \neq 0$. Alors $\mathbb{W}_{i_0}$ (resp. $\mathbb{W}/\mathbb{W}_{i_0}$) s'identifie à un sous-$E$-Espace Vectoriel de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (resp. de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{d-i_0}$) et on a

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}) = \mathrm{rg}_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot (\mathbb{W}/\mathbb{W}_{i_0})) + 1 &\leqslant \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}/\mathbb{W}_{i_0}) + 1 \\ &= \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}) + 1 - \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}_{i_0}),\end{aligned}$$

et comme $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}_{i_0}) \geqslant 1$ d'après la proposition 2.16, cela permet de conclure.

3. Autour du théorème de Dieudonné-Manin

3.1. Énoncé des résultats. — Si $r = \frac{b}{k} \in \mathbf{Q}$, avec $k \geqslant 1$ et $(b,k) = 1$, on note $D_{[r]}$ le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\oplus_{i \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_p \cdot e_i$ muni de l'action du Frobenius φ donnée par

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } i \neq 0, \\ p^b e_1 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Soit M un sous-$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-réseau de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$. Comme $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est de valuation discrète d'idéal maximal engendré par t_h, il existe des entiers $a_1, \ldots, a_d$ et une base $u_1, \ldots, u_d$ de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ tels que $t_h^{a_1}u_1, \ldots, t_h^{a_d}u_d$ soit une base de M sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. On note $t_H(M)$ la quantité $\sum_{i=1}^d a_i$.

Soit $\mathbb{M} = \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}} M$ le sous-$\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$-réseau de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ engendré par M.

Lemme 3.1. — *$(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d/\mathbb{M}$ est un E_h-Espace Vectoriel de dimension $(t_H(M), 0)$.*

Démonstration. — On a $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d/\mathbb{M} = \oplus_{i=1}^d \mathbb{B}_{a_i} \cdot u_i$, ce qui permet de conclure.

Soit $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ le sous-$\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-Module de $(\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}})^d$ défini par

$$\mathbb{M}_{\mathrm{rig}} = \{x \in (\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}})^d,\ \varphi^n(x) \in \mathbb{M} \text{ quel que soit } n \in \mathbf{Z}\}.$$

Le résultat principal de ce § est le théorème suivant :

Théorème 3.2. — *Le $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-Module $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ est un $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-module libre de rang d admettant une décomposition sous la forme $\oplus_{i \in I} M_i$, où $M_i \cong \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{[r_i]}$.*

Remarque 3.3. — Les r_i, comptés avec multiplicité $\dim_{\mathbf{Q}_p} D_{[r_i]}$, s'appellent les *pentes* de $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$; il y a donc d pentes. La décomposition ci-dessus n'a rien d'intrinsèque ; par contre la filtration (croissante) par les sous-$\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-Modules $\mathbb{M}_{\mathrm{rig},r} = \oplus_{r_i \leqslant r} M_i$ est, elle, parfaitement intrinsèque.

Remarque 3.4. — Le théorème 3.2 admet comme corollaires faciles les corollaires 3.5 et 3.7 ci-dessous, mais ce n'est pas dans cet ordre que l'on peut établir les résultats. Une des difficultés de la démonstration est que l'on ne sait pas à l'avance quels vont être les dénominateurs des pentes de $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$, ce qui nous amène à commencer par démontrer le corollaire 3.7 en utilisant la théorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie ; on en déduit le corollaire 3.5 par des arguments purement combinatoires. Enfin, le théorème 3.2 se déduit du corollaire 3.5 de manière assez classique.

Si $h \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{Z}$, soit

$$\mathbb{W}_{h,a} = \mathbb{M}_{\mathrm{rig}}^{\varphi^h = p^a} = \{x \in (\mathbb{U}_{h,a})^d,\ \varphi^n(x) \in \mathbb{M} \text{ quel que soit } n \in \mathbf{N}\};$$

c'est un sous-E_h-Espace Vectoriel de $(\mathbb{U}_{h,a})^d$ dont on note $(w_{h,a}, w'_{h,a})$ la E_h-Dimension. Comme $\mathbb{U}_{h,a} = 0$ si $a < 0$, on a $w_{h,a} = w'_{h,a} = 0$ si $a < 0$.

Corollaire 3.5. — *Il existe des rationnels* $r_1 = \frac{a_1}{h_1}, \dots, r_d = \frac{a_d}{h_d}$, *un entier* $h_0 \geqslant 1$, *multiple de* $h_1, \dots, h_d$, *et une famille* $e_1, \dots, e_d$ *d'éléments de* $(\mathbf{B}^+_{\max})^d$ *vérifiant* $\varphi^{h_i}(e_i) = p^{a_i} e_i$, *tels que, si* h *est un multiple de* h_0, *alors*

$$\mathbb{W}_{h,a} = \oplus_{i=1}^d \mathbb{U}_{h,a-hr_i} \cdot e_i.$$

Lemme 3.6. — *Si* $r = \frac{b}{k}$, *alors*

$$\mathrm{Dim}_{E_h}\big((\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{[r]})^{\varphi^h = p^a}\big) = \begin{cases} (ka - hb, k) & \text{si } \frac{a}{h} \geqslant r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Si e est le p.g.c.d de k et h, l'application $i \mapsto i + h$ est périodique de période $\frac{k}{e}$ sur $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$; on en déduit un isomorphisme

$$(\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{[r]})^{\varphi^h = p^a} \cong \big(\mathbb{U}_{\frac{kh}{e}, \frac{ka-hb}{e}}\big)^e,$$

et le résultat. (L'isomorphisme en question est $x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k \mapsto (x_1, \dots, x_e)$.)

Corollaire 3.7. — *Il existe des entiers* $y'_{h,a}$, $y_{h,a}$ *tels que l'on ait*

(i) $0 \leqslant y_{h,a} < y'_{h,a}$ *et* $\sum_{a \in \mathbf{Z}} y'_{h,a} = d$;

(ii) $w'_{h,a} = w'_{h,a-1} + y'_{h,a}$ *et* $w_{h,a} = w_{h,a-1} + w'_{h,a-1} + y_{h,a-1}$.

Démonstration. — Il résulte du lemme 3.6 que $\mathrm{Dim}_{E_h} \mathbb{W}_{h,a} = \sum_{r_i \leqslant \frac{a}{h}} (a - hr_i, 1)$ et donc que

$$\begin{aligned} \mathrm{Dim}_{E_h} \mathbb{W}_{h,a} - \mathrm{Dim}_{E_h} \mathbb{W}_{h,a-1} &= \sum_{\frac{a-1}{h} < r_i \leqslant \frac{a}{h}} (a - hr_i, 1) + \sum_{r_i \leqslant \frac{a-1}{h}} (1, 0) \\ &= \sum_{\frac{a-1}{h} < r_i \leqslant \frac{a}{h}} (a - hr_i, 1) + (w'_{h,a-1}, 0); \end{aligned}$$

on en déduit le résultat en posant $(y_{h,a}, y'_{h,a}) = \sum_{\frac{a-1}{h} < r_i \leqslant \frac{a}{h}} (a - hr_i, 1)$.

3.2. Démonstration directe du corollaire 3.7. — On note $\mathbb{M}_{h,a}$ le sous-$\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$-Module $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot \mathbb{W}_{h,a}$ de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ engendré par $\mathbb{W}_{h,a}$, et $m_{h,a}$ son rang. On note aussi $W_{h,a}$ et $M_{h,a}$ respectivement les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathbb{W}_{h,a}(C)$ et $\mathbb{M}_{h,a}(C)$. On a $M_{h,a} = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot W_{h,a}$, et donc, en particulier, $W_{h,a} \subset M_{h,a}$.

Lemme 3.8. — *Si* $a \in \mathbf{Z}$, *alors* $\mathbb{W}_{h,a} \cap t_h \mathbb{M} = t_h \mathbb{W}_{h,a-1}$.

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{W}_{h,a} \cap t_h \mathbb{M}$. Alors $t_h^{-1} x \in (t_h^{-1} \mathbb{U}_{h,a})^d$ est tel que $\varphi^n(t_h^{-1} x) \in \mathbb{M} \subset (\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ (il faut regarder séparément les cas « h divise n » et « h ne divise pas n » et utiliser les propriétés (ii) et (iii) de t_h). D'après le corollaire 2.12, ceci implique que $t_h^{-1} x \in (\mathbb{U}_{h,a-1})^d$; on en déduit le résultat.

Lemme 3.9. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, on dispose de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow t_h\mathbb{W}_{h,a} \longrightarrow \mathbb{M}_{h,a} \cap \mathbb{W}_{h,a+1} \longrightarrow \mathbb{M}_{h,a}/t_h\mathbb{M}_{h,a} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — L'exactitude à gauche est une évidence et celle au milieu résulte du lemme 3.8. Pour montrer l'exactitude à droite, posons $m = m_{h,a}$ et choisissons une base $e_1, \dots, e_m$ de $\mathbb{M}_{h,a}$ sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ constituée d'éléments de $W_{h,a}$. Alors $\mathbb{M}_{h,a} \cap \mathbb{W}_{h,a+1}$ contient $\mathbb{U}_{h,1}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{U}_{h,1}e_m$ et l'exactitude à droite suit de ce que $\theta : \mathbb{U}_{h,1} \to \mathbb{B}_1$ est surjective.

Corollaire 3.10. — *On a $\mathbb{M}_{h,a} \subset \mathbb{M}_{h,a+1}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$, et $m_{h,a} = d$ si a est assez grand.*

Démonstration. — L'exactitude à droite de la suite du lemme 3.9 alliée à l'inclusion $W_{h,a} \subset M_{h,a}$ montre que $M_{h,a} \cap M_{h,a+1}$ se surjecte sur $M_{h,a}/t_hM_{h,a}$. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ étant de valuation discrète, cela implique que $M_{h,a} \cap M_{h,a+1}$ contient $M_{h,a}$ ou, autrement dit, que $M_{h,a} \subset M_{h,a+1}$. On en déduit, en utilisant le lemme 2.17, l'inclusion de $\mathbb{M}_{h,a}$ dans $\mathbb{M}_{h,a+1}$. D'autre part, M étant un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, il contient $(t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ pour un certain i, ce qui fait que $\mathbb{W}_{h,hi+a}$ contient $(t^i\mathbb{U}_{h,a})^d$ [et donc $m_{h,hi+a} = d$], si $a \in \mathbf{N}$. Ceci permet de conclure.

Lemme 3.11. — *Si a est assez grand, alors $w'_{h,a} = d$ et $w_{h,a} = da - ht_H(M)$.*

Démonstration. — Si $c \in \mathbf{N}$, soit $\mathbb{D}_c = (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d/(\mathbb{M} + (t_h^c\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d)$. Si $b \in \mathbf{N}$ est tel que M contienne $(t_h^b\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ et si $c \geqslant b$, alors $\mathbb{D}_c = (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d/\mathbb{M}$ et $x \in \mathbb{M}$ si et seulement si son image dans $\mathbb{D}_c$ est nulle.

Soit alors $a \geqslant hb$. Écrivons a sous la forme $a = a_0 + \cdots + a_{h-1}$, avec $a_0, \dots, a_{h-1} \geqslant b$. Il résulte de la discussion précédente que $\mathbb{W}_{h,a}$ est le noyau de l'application $x \mapsto (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{h-1}(x))$ de $(\mathbb{U}_{h,a})^d$ dans $\oplus_{i=0}^{h-1}\mathbb{D}_{a_i}$. D'autre part, cette application est surjective d'après le corollaire 2.11 puisque $\mathbb{D}_{a_i}$ est un quotient de $(\mathbb{B}_{a_i})^d$; on a donc

$$\mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{W}_{h,a}) = d\mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{U}_{h,a}) - \sum_{i=0}^{h-1} \mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{D}_{a_i}),$$

et on conclut en utilisant les formules (cf. lemme 3.1 pour la seconde)

$$\mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{U}_{h,a}) = (a, 1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{D}_{a_i}) = (t_H(M), 0).$$

Lemme 3.12. — *Le $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$-Module $\mathbb{M}/\mathbb{M}_{h,a}$ est sans torsion.*

Démonstration. — On a $\mathbb{M} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} M$ et $\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} M_{h,a}$ d'après le lemme 2.17. On en déduit l'égalité $\mathbb{M}/\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} (M/M_{h,a})$, et il suffit de montrer que $M/M_{h,a}$ est sans torsion. Soient $m = m_{h,a}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ une base de $M_{h,a}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, constituée d'éléments de $W_{h,a}$. Si $x \in M$ est tel que $t_hx \in M_{h,a}$, on peut écrire t_hx, de manière unique, sous la forme $x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m$ avec $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Comme $\theta : \mathbf{U}_{h,1} \to C$ est surjectif, il existe $\widetilde{x}_i \in \mathbf{U}_{h,1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, tel que $x_i - \widetilde{x}_i \in t_h \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Si $y_i = t_h^{-1}(x_i - \widetilde{x}_i)$, on a

$$\widetilde{x} = \widetilde{x}_1\alpha_1 + \cdots + \widetilde{x}_m\alpha_m = t_h x - t_h(y_1\alpha_1 + \cdots y_m\alpha_m),$$

et comme $y_1\alpha_1 + \cdots + y_m\alpha_m \in M_{h,a} \subset M$, on voit que $\widetilde{x} \in t_h M$. Par ailleurs $\widetilde{x} \in (\mathbf{U}_{h,a+1})^d$ et $\varphi^n(t_h^{-1}\widetilde{x}) \in M$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. D'après le corollaire 2.12, ceci implique $t_h^{-1}\widetilde{x} \in W_{h,a}$, et donc $x \in t_h M_{h,a}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 3.13. — *On a $\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{M}$ si $a \gg 0$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 3.10, $\mathrm{rg}_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}} \mathbb{M}_{h,a} = d = \mathrm{rg}_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}} \mathbb{M}$ si $a \gg 0$ et donc $\mathbb{M}/\mathbb{M}_{h,a}$ est un $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$-Module de torsion ; le lemme précédent montre que ce Module est nul, ce qui permet de conclure.

Comme $M/M_{h,a}$ et $M/M_{h,a-1}$ sont sans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-torsion, $M_{h,a-1}$ admet des supplémentaires dans $M_{h,a}$. Soient $M'_{h,a}$ un de ces supplémentaires, et $\mathbb{M}'_{h,a} = \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}} M'_{h,a}$. On a donc $\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{M}_{h,a-1} \oplus \mathbb{M}'_{h,a}$. Soit $\mathbb{Y}_{h,a} = \mathbb{M}'_{h,a} \cap (\mathbb{W}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1})$.

Lemme 3.14. — (i) *$\mathbb{Y}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1}$ contient $\mathbb{W}_{h,a}$.*

(ii) *L'application naturelle de $\mathbb{Y}_{h,a}$ dans $\mathbb{M}'_{h,a}/t_h\mathbb{M}'_{h,a}$ est injective.*

Démonstration. — Il suffit d'écrire $y \in \mathbb{W}_{h,a}$ sous la forme $y_1 + y_2$, avec $y_1 \in \mathbb{M}_{h,a-1}$ et $y_2 \in \mathbb{M}'_{h,a}$ car alors $y_2 = y - y_1$ appartient à $\mathbb{W}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1}$, et donc aussi à $\mathbb{Y}_{h,a}$.

Pour démontrer le (ii), partons de $y \in \mathbb{W}_{h,a} \cap t_h\mathbb{M}'_{h,a}$. Il existe donc $m' \in \mathbb{M}'_{h,a}$, $m \in \mathbb{M}_{h,a-1}$ et $w \in \mathbb{W}_{h,a}$ tels que l'on ait $y = t_h m' = m + w$. D'après le lemme 3.9, il existe $w' \in \mathbb{W}_{h,a} \cap \mathbb{M}_{h,a-1}$ et $m_1 \in t_h\mathbb{M}_{h,a-1}$, tels que $w' - m = t_h m_1$, ce qui se traduit par $t_h(m' + m_1) = w + w'$. On en déduit, en utilisant le lemme 3.8, que $w + w' \in t_h\mathbb{W}_{h,a-1}$, et comme $\mathbb{W}_{h,a-1} \subset \mathbb{M}_{h,a-1}$, cela implique $y = t_h m' \in \mathbb{M}_{h,a-1}$, et donc $y = 0$ puisque $\mathbb{M}_{h,a-1} \cap \mathbb{M}'_{h,a} = 0$. Ceci permet de conclure.

Le lemme précédent permet, entre autre, de montrer que $\mathbb{Y}_{h,a}$ est de Dimension finie ; on note $(y_{h,a}, y'_{h,a})$ sa E_h-Dimension.

Lemme 3.15. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, alors*

(i) $m_{h,a} - m_{h,a-1} \leqslant y'_{h,a}$.

(ii) $y_{h,a} < y'_{h,a}$, *si* $y'_{h,a} \neq 0$.

Démonstration. — $\mathbb{Y}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1}$ contient $\mathbb{W}_{h,a}$ et donc $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot \mathbb{Y}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1}$ est égal à $\mathbb{M}_{h,a}$. On en déduit l'inégalité $\mathrm{rg}_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot \mathbb{Y}_{h,a}) \geqslant m_{h,a} - m_{h,a-1}$. Comme par ailleurs, $\mathbb{Y}_{h,a} \subset \mathbb{M}'_{h,a}$, cette inégalité est une égalité et le (i) découle du corollaire 2.18.

Quant au (ii), il découle du (i), grâce à la proposition 2.4, une fois que l'on a remarqué que $\mathbb{Y}_{h,a}$, étant un sous-E_h-Espace Vectoriel de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$, ne contient pas de

$\mathbb{V}^1$ (prop. 2.14), et (lemme 3.14) que $\mathbb{Y}_{h,a}$ s'identifie à un sous-E_h-Espace Vectoriel de $\mathbb{M}'_{h,a}/t_h\mathbb{M}'_{h,a} \cong \mathbb{V}^{m_{h,a}-m_{h,a-1}}$.

Corollaire 3.16. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, alors $m_{h,a} - m_{h,a-1} = y'_{h,a}$ et $w'_{h,a} = m_{h,a}$.*

Démonstration. — On a $w'_{h,b} = \sum_{a \leqslant b} y'_{h,a} \geqslant \sum_{a \leqslant b} m_{h,a} - m_{h,a-1} = m_{h,b}$. Par ailleurs, pour $b \gg 0$, on a $w'_{h,b} = m_{h,b} = d$ (cf. corollaire 3.10 et lemme 3.11). Toutes les inégalités dans la somme sont donc des égalités, ce qui permet de conclure.

En regroupant les résultats obtenus dans le lemme 3.11 et les corollaires 3.13 et 3.16, on obtient le résultat suivant qui termine la démonstration du corollaire 3.7.

Corollaire 3.17. — *Les entiers $w'_{h,a}$, $w_{h,a}$, $y'_{h,a}$ et $y_{h,a}$ vérifient les relations*
(i) $\sum_{a \in \mathbf{Z}} y'_{h,a} = d$;
(ii) $y_{h,a} < y'_{h,a}$, *si* $y'_{h,a} \neq 0$;
(iii) $w'_{h,a} - w'_{h,a-1} = y'_{h,a}$ *et* $w_{h,a} - w_{h,a-1} = w'_{h,a-1} + y_{h,a}$.

3.3. Démonstration du corollaire 3.5. — Le principe de la démonstration est d'étudier ce qui se passe quand on remplace h par un multiple.

Proposition 3.18. — *Si $h, k \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{Z}$, alors*
(i) $\mathbb{W}_{kh,ka} = E_{kh} \otimes_{E_h} \mathbb{W}_{h,a}$;
(ii) $w_{kh,ka} = kw_{k,a}$, $w'_{kh,ka} = w'_{h,a}$ *et* $m_{kh,ka} = m_{h,a}$.

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence immédiate du (i). Soit $e_1, \dots, e_k$ une base de E_{kh} sur E_h. Comme $\varphi^h, \dots, \varphi^{kh}$ sont les éléments de $\mathrm{Gal}(E_{kh}/E_h)$, la matrice de coefficients $(\varphi^{jh}(e_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ est inversible. On peut donc trouver des éléments $a_1, \dots, a_k$ de E_{kh} tels que l'on ait $\sum_{i=1}^k \varphi^{kh}(e_i)a_i = 1$ et $\sum_{i=1}^k \varphi^{jh}(e_i)a_i = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Un petit calcul montre alors que les applications $(w_1, \dots, w_k) \mapsto \sum_{i=1}^k a_i w_i$ et $w \mapsto (w_1, \dots, w_k)$, avec $w_i = \sum_{j=1}^k p^{-ja}\varphi^{jh}(xe_i)$, sont inverses l'une de l'autre et envoient respectivement $(\mathbb{W}_{h,a})^k$ dans $\mathbb{W}_{kh,ka}$ et $\mathbb{W}_{kh,ka}$ dans $(\mathbb{W}_{h,a})^k$. Ceci permet de démontrer le (i) et termine la démonstration.

Lemme 3.19. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, alors*

$$\sum_{i=0}^{k-1} y'_{kh,ka-i} = y'_{h,a}.$$

Démonstration. — D'après le (iii) du cor. 3.17, on a

$$\sum_{i=0}^{k-1} y'_{kh,ka-i} = m_{kh,ka} - m_{kh,k(a-1)} = m_{h,a} - m_{h,a-1} = y'_{h,a}.$$

Lemme 3.20. — *Si $y_{h,a} = 0$ et si $k(a-1) < b \leqslant ka$, alors $y_{kh,b} = 0$.*

Démonstration. — On a $w_{kh,ka} - w_{kh,k(a-1)} = k(w_{h,a} - w_{h,a-1}) = kw'_{h,a-1}$, d'après le (ii) de la prop. 3.18 et le (iii) du cor. 3.17. Par ailleurs, d'après le (iii) du cor. 3.17, on a

$$w_{kh,ka} - w_{kh,k(a-1)} = \sum_{i=0}^{k-1} (w'_{kh,k(a-1)+i} + y_{kh,k(a-1)+i+1}) \geqslant kw'_{kh,k(a-1)} + \sum_{k(a-1)<b\leqslant ka} y_{kh,b}.$$

On en déduit le résultat, en utilisant l'égalité $w'_{h,a-1} = w'_{kh,h(a-1)}$ de la prop. 3.18.

Lemme 3.21. — *Si $y_{h,a} > 0$ et si $k = y'_{h,a}$, alors*

$$\sum_{k(a-1)<b\leqslant ka,\ y_{kh,b}\neq 0} (y'_{kh,b} - 1) < y'_{h,a} - 1.$$

Démonstration. — Notons que, d'après le lemme 3.15, $k = y'_{h,a} > y_{h,a} \geqslant 1$; en particulier, $k \geqslant 2$. On déduit du (ii) de la prop. 3.18 et du (iii) du cor. 3.17, que

$$k(w_{h,a} - w_{h,a-1}) = w_{kh,ka} - w_{kh,k(a-1)} = kw'_{kh,k(a-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} (iy'_{kh,ka-i} + y_{kh,ka-i})$$

et donc $\sum_{i=0}^{k-1} (iy'_{kh,ka-i} + y_{kh,ka-i})$ est divisible par k. Comme par ailleurs, d'après le lemme 3.19, $\sum_{i=0}^{k-1} y'_{kh,ka-i} = k$, il y a deux cas :

• il existe $0 \leqslant i \leqslant k-1$ tel que $y'_{kh,ka-i} = k$ et $y'_{kh,ka-j} = 0$ si $j \neq i$. Dans ce cas, on déduit du (ii) du cor. 3.17 que $y_{kh,ka-j} = 0$, si $j \neq i$ et que $y_{kh,ka-j} < y'_{kh,ka-i} = k$ est divisible par k, et donc est nul ; on a donc $\sum_{k(a-1)<b\leqslant ka,\ y_{kh,b}\neq 0} (y'_{kh,b} - 1) = 0 < k-1$;

• le cardinal r de l'ensemble des $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ vérifiant $y'_{kh,ka-i} \neq 0$ est $\geqslant 2$, auquel cas on obtient, en utilisant le lemme 3.19,

$$\sum_{k(a-1)<b\leqslant ka,\ y_{kh,b}\neq 0} (y'_{kh,b} - 1) \leqslant \Big(\sum_{k(a-1)<b\leqslant ka} y'_{kh,b} \Big) - r \leqslant y'_{h,a} - 2,$$

ce qui permet de conclure.

Définissons le défaut de h comme la quantité $\Delta(h) = \sum_{\{a, y_{h,a}\neq 0\}} (y'_{h,a} - 1)$. Comme $y'_{h,a} > y_{h,a}$, on a $\Delta(h) = 0$ si et seulement si $y_{h,a} = 0$ pour tout a, et donc si et seulement si $\mathbb{Y}_{h,a}$ est un E_h-espace vectoriel de dimension finie quel que soit $a \in \mathbf{Z}$.

Proposition 3.22. — *Il existe h tel que $\Delta(h) = 0$.*

Démonstration. — Soit h réalisant le minimum de $\Delta(h)$. Si $\Delta(h) \neq 0$, il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que $y_{h,a} \neq 0$ et, si $k = y'_{h,a}$, les lemmes 3.20 et 3.21 montrent que $\Delta(kh) < \Delta(h)$, ce qui conduit à une contradiction qui permet de conclure.

Supposons dorénavant que $\Delta(h) = 0$ et, si $b \in \mathbf{Z}$, soit $e_{b,j}$, pour $1 \leqslant j \leqslant y'_{h,b}$ une base de $\mathbb{Y}_{h,b}$ sur E_h. Soit de plus $I = \coprod_{b\in\mathbf{Z}} \{(b,j),\ 1 \leqslant j \leqslant y'_{h,b}\}$ et, si $i = (b,j) \in I$, soit $r_i = \frac{b}{h}$.

Proposition 3.23. — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a*

(i) $(\varphi^n(e_i))_{i\in I}$ *est une base de* M *sur* $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ *quel que soit* $n \in \mathbf{N}$;

(ii) $\mathbb{W}_{h,a} = \oplus_{i\in I}\big(\mathbb{U}_{h,a-hr_i}\cdot e_i\big)$ *si* $a \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. — Par construction, on a $\mathbb{M}_{h,a} = \oplus_{b\leqslant a}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}\cdot\mathbb{Y}_{h,a}$, ce qui montre que les e_i, avec $r_i \leqslant \frac{a}{h}$, engendrent $\mathbb{M}_{h,a}$. En particulier, comme $\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{M}$ si $a \gg 0$ (corollaire 3.13), les e_i, $i \in I$, engendrent un sous-réseau de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ et, comme $|I| = d$ ((i) du corollaire 3.17), cela montre que les e_i forment une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et donc aussi de M sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$.

En particulier, les e_i, $i \in I$ forment une famille libre sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et l'application naturelle $\oplus_{i\in I}\big(\mathbb{U}_{h,a-hr_i}\cdot e_i\big) \to \mathbb{W}_{h,a}$ est injective. Une récurrence immédiate sur a (utilisant le (ii) du corollaire 3.17) montrant que les E_h-Espaces Vectoriels $\mathbb{W}_{h,a}$ et $\oplus_{i\in I}\big(\mathbb{U}_{h,a-hr_i}\cdot e_i\big)$ ont la même dimension, cela prouve que cette application est un isomorphisme.

Finalement, si $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\mathbb{W}_{h,a} = \varphi^n(\mathbb{W}_{h,a}) = \oplus_{i\in I}\big(\varphi^n(\mathbb{U}_{h,a-hr_i})\cdot\varphi^n(e_i)\big) = \oplus_{i\in I}\big(\mathbb{U}_{h,a-hr_i}\cdot\varphi^n(e_i)\big),$$

ce qui montre que les $\varphi^n(e_i)$, $i \in I$, engendrent le même sous-$\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$-Module de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ que les e_i, $i \in I$, et termine la démonstration de la proposition.

3.4. Démonstration du théorème 3.2

Lemme 3.24. — *On a*

$$\sum_{i\in I} r_i = t_H(M).$$

Démonstration. — D'après le (ii) de la proposition 3.23 et le lemme 3.11, on a

$$\sum_{i\in I}(a - hr_i) = \dim_{\mathrm{pr},E_h}(\mathbb{W}_{h,a}) = da - ht_H(M),$$

si a est assez grand. Ceci permet de conclure.

Choisissons une bijection $I \simeq \{1,\dots,d\}$ et, si $1 \leqslant i \leqslant d$, soient $a_{i,1},\dots,a_{i,d} \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ les coordonnées de e_i. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})$ et soit $\delta = \det A$.

Lemme 3.25. — *On a* $t^{-t_H(M)}\delta \in E_h^*$.

Démonstration. — Comme $\varphi^h(e_i) = p^{hr_i}(e_i)$, on a $\delta \in \mathbf{U}_{h,\sum_{i=1}^d hr_i} = \mathbf{U}_{h,ht_H(M)}$. Par ailleurs, $\varphi^n(e_1),\dots,\varphi^n(e_d)$ forme une base de M sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, on a $v_H(\varphi^n(\delta)) = t_H(M)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$; le corollaire 2.11 montre que ceci implique l'appartenance de $\big(\prod_{i=0}^{h-1}\varphi^{-i}(t_h)^{-t_H(M)}\big)\delta$ à $\mathbf{U}_{h,0} = E_h$, ce qui, compte tenu de la propriété (iii) de t_h, permet de conclure.

Corollaire 3.26. — *Les* e_i, $i \in I$ *forment une base de* $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ *sur* $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$. D'après le lemme précédent, on peut écrire x sous la forme $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, avec $x_i \in \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] = \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t_h}, \dots, \frac{1}{\varphi^{h-1}(t_h)}]$. Par ailleurs, on a $\varphi^n(x_i) \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (puisque les $\varphi^n(e_i)$, $i \in I$, forment une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$) ; on en déduit, utilisant le corollaire 2.12 (pour $(\prod_{j=0}^{h-1} \varphi^{-i}(t_h)^a)x_i$, avec $a \gg 0$), l'appartenance de x_i à $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, ce qui permet de conclure.

Proposition 3.27. — *Soit h un entier $\geqslant 1$, soit $a \in \mathbf{Z}$ et soit e le p.g.c.d. de a et h. Soit Y un E_h-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de φ telle que l'on ait $\varphi^h(x) = p^a x$ quel que soit $x \in Y$. Alors*

(i) *Si $e \neq 1$, et si Y' est le sous-$E_{h/e}$-espace vectoriel de Y des éléments vérifiant $\varphi^{h/e}(x) = p^{a/e}x$, on a $Y = E_h \otimes_{E_{h/e}} Y'$.*

(ii) *Si a et h sont premiers entre eux, alors la dimension de Y sur E_h est un multiple ℓh de h et il existe des éléments $f_1, \dots, f_\ell$ de Y tels que les $\varphi^j(f_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$ et $0 \leqslant j \leqslant h-1$, forment une base de Y sur E_h.*

Démonstration. — Le (i) se démontre comme la proposition 3.19. Pour démontrer le (ii), introduisons l'algèbre $H_{h,a} = E_h \oplus E_h\varphi \oplus \cdots \oplus E_h\varphi^{h-1}$ avec les règles de commutation $\varphi^i \cdot \alpha = \varphi^i(\alpha) \cdot \varphi^i$ et la relation $\varphi^h = p^a$. C'est une algèbre à division de dimension h^2 sur $\mathbf{Q}_p$ et d'invariant $\frac{a}{h}$, et comme a et h sont premiers entre eux, cette algèbre est un corps (non commutatif). Par ailleurs, Y est naturellement un $H_{h,a}$-module de type fini et, $H_{h,a}$ étant un corps, c'est un $H_{h,a}$-module libre de rang fini. Il suffit de prendre pour $f_1, \dots, f_\ell$ une base de Y sur $H_{h,a}$ pour démontrer le (ii).

Le théorème 3.2 se déduit de la proposition ci-dessus (et du corollaire 3.26) en faisant une récurrence sur le nombre de pentes. Si tous les r_i, $i \in I$, sont égaux à $r = \frac{a}{h}$, on a $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}} = \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{E_h} \mathbb{Y}_{h,a}$, où $\mathbb{Y}_{h,a}$ est un E_h-espace vectoriel de dimension finie auquel on peut appliquer la proposition 3.27. Soit e le p.g.c.d. de a et h. En utilisant le (i), on obtient un isomorphisme $\mathbb{Y}_{h,a} = E_h \otimes_{E_{\frac{h}{e}}} \mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$ et en utilisant le (ii), on obtient une décomposition $\mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}} = \oplus_{i=1}^{\ell} E_{h.e} \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{Q}_p[\varphi] \cdot f_i)$ et $\mathbf{Q}_p[\varphi] \cdot f_i$ est isomorphe à $D_{[h/a]}$, ce qui permet de conclure.

Si le nombre de pentes est $\geqslant 2$, soit $r = \frac{a}{h}$ la plus grande des pentes, soit e le p.g.c.d. de a et h, et soit J le sous-ensemble des $i \in I$ vérifiant $r_i = r$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-$\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-Module M' engendré par les e_i, $i \in I - J$, et la proposition 3.27 à $\mathbb{W}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}/(\mathbb{W}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}} \cap M') \cong \mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$. (Comme on n'a rien imposé à $\mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$ en ce qui concerne φ, il n'a aucune raison d'être stable sous l'action de φ et on ne peut pas lui appliquer directement la proposition 3.27, mais l'isomorphisme précédent permet de le faire.) Si $f_1, \dots, f_\ell$ est une famille d'éléments de $\mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$ vérifiant les conclusions de la proposition 3.27, et si $\tilde{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, est un élément $\mathbb{W}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$ relevant f_i, alors $\mathbf{Q}_p[\varphi] \cdot \tilde{f}_i$ est isomorphe à $D_{[h/a]}$. On obtient alors une décomposition de $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ sous la

forme voulue en écrivant $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ sous la forme $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}} = M' \oplus \big(\oplus_{i=1}^{\ell} \widetilde{\mathbb{B}}^{+}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{Q}_p[\varphi] \cdot \tilde{f}_i)\big)$, et en utilisant la décomposition de M' fournie par l'hypothèse de récurrence.

4. Les anneaux de caractéristique p

Ce § est consacré à des rappels sur la théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger [**21, 30**]. Pour les applications aux familles de représentations p-adiques de $\mathscr{G}_K$, il s'avère utile de préciser comment les constantes dépendent de K, ce qui nous amène à entrouvrir la boite noire que cette théorie constitue d'habitude ; les rappels sont donc un peu longs...

4.1. Rappels sur les corps locaux. — On note $\mathscr{G}_F^s$, pour $s \geqslant -1$, les sous-groupes d'inertie de $\mathscr{G}_F$ en numérotation supérieure. En particulier, $\mathscr{G}_F^{-1} = \mathscr{G}_F$; le sous-groupe d'inertie I_F de $\mathscr{G}_F$ est égal $\mathscr{G}_F^s$, pour tout $s \in]-1, 0]$, et le sous-groupe d'inertie sauvage de $\mathscr{G}_F$ est la réunion des $\mathscr{G}_F^s$, avec $s > 0$.

Si $s \geqslant -1$, on note $\overline{F}^{(s)}$ l'intersection des $\overline{F}^{\mathscr{G}_F^t}$, pour $t > s$. En particulier, $\overline{F}^{(s)}$ est l'extension maximale non-ramifiée (resp. modérément ramifiée) de F si $s \in [-1, 0[$ (resp. si $s = 0$). Si $L \subset \overline{F}$ est une extension de F, et $s \geqslant -1$, on note $L^{(s)}$ le sous-corps $L \cap \overline{F}^{(s)}$ de L et on définit le *conducteur* $c(L) \in [-1, +\infty]$ de L comme la borne inférieure de l'ensemble des s tels que $L^{(s)} = L$. On dit que L est *profondément ramifiée* si $c(L) = +\infty$ (ceci ne peut, bien évidemment, se produire que si L est une extension infinie de F).

Lemme 4.1. — (i) $c(L) = -1$ *si et seulement si* L *est une extension non ramifiée de* F *;*

(ii) $c(L) = 0$ *si et seulement si* L *est une extension modérément ramifiée de* F *;*

(iii) $c(F_n) = n - 1$ *si* $n \in \mathbf{N}$, *et* $F_\infty^{(s)} = F_n$ *si* $n - 1 \leqslant s < n$ *;*

(iv) $c(L_1 L_2) = \sup(c(L_1), c(L_2))$, *si* L_1 *et* L_2 *sont deux extensions de* F.

Démonstration. — Les deux premiers points sont évidents ; le troisième est un résultat standard, et l'inégalité $c(L_1 L_2) \geqslant \sup(c(L_1), c(L_2))$ est immédiate sur la définition du conducteur. Réciproquement, si $s = \sup(c(L_1), c(L_2))$, on a $L_1 \subset \overline{F}^{(s)}$ et $L_2 \subset \overline{F}^{(s)}$, et donc $L_1 L_2 \subset \overline{F}^{(s)}$ et $c(L_1 L_2) \leqslant s$. Ceci permet de conclure.

Si K est une extension finie de F, notons $\mathfrak{d}_{K/F}$ sa différente. La formule suivante nous sera très utile :

$$v_p(\mathfrak{d}_{K/F}) = \int_{-1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{[K : K^{(s)}]}\Big)\, ds = \int_{-1}^{c(K)} \Big(1 - \frac{1}{[K : K^{(s)}]}\Big)\, ds.$$

On en déduit en particulier la majoration $v_p(\mathfrak{d}_{K/F}) \leqslant c(K) + 1$. Soit $n_0(K)$ le plus petit entier $\geqslant c(K) + 1$.

4.2. L'extension cyclotomique d'une extension finie de F

Lemme 4.2. — *Si $n \geqslant n_0(K)$, alors :*

(i) $c(K_n) = n-1$ *et* Γ_K *contient* $1+p^n\mathbf{Z}_p$;

(ii) K_{n+1}/K_n *est une extension totalement ramifiée de degré* p ;

(iii) $K_{n+1}^{(s)} = K_n^{(s)}$ *quel que soit* $s < n_0(K)-1$.

Démonstration. — On a $c(K_n) = \sup(c(K), c(F_n)) = \sup(c(K), n-1)$; on en déduit le (i) et le (ii). Par ailleurs, $K_n^{(s)} = K_{n+1}^{(s)} \cap K_n$, et donc $K_{n+1}^{(s)}/K_n^{(s)}$ est de degré p si $K_{n+1}^{(s)} \neq K_n^{(s)}$. Ceci implique que l'on a $K_{n+1} = K_{n+1}^{(s)}K_n$, ce qui conduit à une contradiction car

$$c(K_{n+1}) = n \text{ et } c(K_{n+1}^{(s)}K_n) = \sup(c(K_{n+1}^{(s)}), c(K_n)) \leqslant \sup(s, n-1) \leqslant n-1$$

si $s < n_0(K)-1 \leqslant n-1$. Ceci termine la démonstration.

Corollaire 4.3. — *Si $n \geqslant n_0(K)$, alors*

(i) $f(K_{n+1}/F_{n+1}) = f(K_n/F_n)$,

(ii) $e(K_{n+1}/F_{n+1}) = e(K_n/F_n)$;

(iii) *l'application naturelle de l'ensemble des plongements de K_∞ dans $\overline{F}$ au-dessus de F_∞ dans celui des plongements de K_n dans $\overline{F}$ au-dessus de F_n est une bijection ; en particulier, si K/L est galoisienne, alors* $\mathrm{Gal}(K_n/F_n) = \mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty) = \mathscr{H}_F/\mathscr{H}_L$.

Démonstration. — Tous ces points sont des conséquences immédiates du (ii) du lemme précédent.

On note d_{K_∞} le degré de l'extension K_∞/F_∞. On note e_{K_∞} (resp. f_{K_∞}) la limite de la suite de terme général $e(K_n/F_n)$ (resp. $f(K_n/F_n)$).

Remarque 4.4. — (i) d_{K_∞} est aussi le degré de l'extension K_n/F_n si $n \geqslant n_0(K)$.

(ii) Comme l'extension F_∞/F est totalement ramifiée, f_{K_∞} est aussi le degré de l'extension F'/F, où F' est l'extension non ramifiée maximale de F contenue dans K_∞.

(iii) On a $F' \subset K_n$ si $n \geqslant n_0(K)$.

(iv) $e_{K_\infty}f_{K_\infty} = d_{K_\infty}$.

Proposition 4.5. — *La suite de terme général $p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$ est stationnaire pour $n \geqslant n_0(K)$ et on a $p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) \leqslant \frac{1}{p-1}p^{n_0(K)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — On part des formules

$$v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) = v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F}) - v_p(\mathfrak{d}_{F_n/F}) = \int_{-1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{[F_n : F_n^{(s)}]} - \frac{1}{[K_n : K_n^{(s)}]}\Big)\, ds$$

et $p^n = \frac{p}{p-1}[F_n : F]$. Par ailleurs, $F_n^{(s)} = K_n^{(s)} \cap F_n$ et donc $[F_n : F_n^{(s)}] = [F_n K_n^{(s)} : K_n^{(s)}]$, ce qui nous donne

$$p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) = \frac{p}{p-1}\int_{-1}^{+\infty} [F_n^{(s)} : F]\Big(1 - \frac{1}{[K_n : F_n K_n^{(s)}]}\Big)\, ds.$$

Maintenant, si $s \geqslant n_0(K) - 1$, on a $K^{(s)} = K$ et donc $[K_n : F_n K_n^{(s)}] = 1$ puisque $n_0(K) - 1 \geqslant c(K)$, ce qui nous fournit la formule

$$p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) = \frac{p}{p-1}\int_{-1}^{n_0(K)-1} [F_n^{(s)} : F]\Big(1 - \frac{1}{[K_n : F_n K_n^{(s)}]}\Big)\, ds.$$

Pour obtenir la majoration de la proposition, il suffit alors de majorer $1 - \frac{1}{[K_n:F_n K_n^{(s)}]}$ par 1 et d'utiliser la formule

$$\int_{-1}^{n_0(K)-1} [F_n^{(s)} : F]\, ds = 1 + (p-1) + \cdots + (p-1)p^{n_0(K)-2} = p^{n_0(K)-1}.$$

Il reste à montrer que la suite $p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$ est stationnaire pour $n \geqslant n_0(K)$. Soient donc $n \geqslant n_0(K)$ et $s < n_0(K) - 1$. On a $F_n^{(s)} = F_{n+1}^{(s)} = F_k$, où k est le plus grand entier $\leqslant s + 1 \leqslant n_0(K)$, et donc $[F_{n+1}^{(s)} : F] = [F_n^{(s)} : F]$ quel que soit $s \in [-1, n_0(K) - 1]$. Par ailleurs, l'extension K_{n+1}/K_n est de degré p et, comme $K_{n+1}^{(s)} = K_n^{(s)}$ est de conducteur $\leqslant s \leqslant n - 1$, l'extension $F_{n+1}K_{n+1}^{(s)}/F_n K_n^{(s)}$ est non triviale et donc de degré p, elle aussi. On a donc $[K_{n+1} : F_{n+1}K_{n+1}^{(s)}] = [K_n : F_n K_n^{(s)}]$, ce qui permet de conclure.

Lemme 4.6. — *Si $x \in \mathscr{O}_{F_{n+1}}$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_{n+1}/F_n)$, alors $v_p(\sigma(x) - x) \geqslant \frac{1}{p-1}$.*

Démonstration. — x peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1} x_i(\varepsilon^{(n+1)})^i$, avec $x_i \in \mathscr{O}_{F_n}$ si $0 \leqslant i \leqslant p-1$. Par ailleurs, $\sigma(\varepsilon^{(n+1)}) = u_\sigma \varepsilon^{(n+1)}$, où u_σ est une racine p-ième de l'unité, et donc $\sigma(x) - x = \sum_{i=0}^{p-1} x_i(\varepsilon^{(n+1)})^i(u_\sigma^i - 1)$. Le résultat suit de la minoration $v_p(u-1) \geqslant \frac{1}{p-1}$ si $u^p = 1$.

Remarque 4.7. — Une conséquence de la proposition 4.5 est que $v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$: l'extension K_∞/F_∞ est presque étale.

Notons $\mathfrak{a}$ l'idéal des éléments de valuation $\geqslant \frac{1}{p}$.

Lemme 4.8. — *Si $n \geqslant n_0(K) + 1$ et si $x \in \mathscr{O}_{K_{n+1}}$, alors $\mathrm{N}_{K_{n+1}/K_n}(x) - x^p \in \mathfrak{a}$.*

Démonstration. — Soit $e_1, \ldots, e_d$ une base de $\mathscr{O}_{K_n}$ sur $\mathscr{O}_{F_n}$; c'est aussi une base de K_{n+1} sur F_{n+1} car K_{n+1}/K_n et F_{n+1}/F_n sont de degré p. Soit $e_1^*, \ldots, e_d^*$ la base de K_n sur F_n duale de $e_1, \ldots, e_d$ pour la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{K_n/F_n}(xy)$ qui est aussi la restriction à K_n de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{K_{n+1}/F_{n+1}}(xy)$. Les e_i^* sont éléments de $\mathfrak{d}_{K_n/F_n}^{-1}$ et donc vérifient $v_p(e_i^*) \geqslant -\frac{1}{p-1}p^{n_0(K)-n} \geqslant -\frac{1}{p(p-1)}$. On peut

alors écrire $x \in \mathscr{O}_{K_{n+1}}$ sous la forme $\sum_{i=1}^{d} x_i e_i^*$, avec $x_i = \mathrm{Tr}_{K_{n+1}/F_{n+1}}(xe_i) \in \mathscr{O}_{F_{n+1}}$. On a $\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n) = \mathrm{Gal}(F_{n+1}/F_n)$ et, comme $v_p(\sigma(x_i) - x_i) \geqslant \frac{1}{p-1}$ d'après le lemme 4.6, on obtient finalement,

$$v_p(\sigma(x) - x) = v_p\Big(\sum_{i=1}^{d}(\sigma(x_i) - x_i)e_i^*\Big) \geqslant \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p},$$

quel que soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)$. Comme $\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)$ est de cardinal p, cela permet de conclure.

Corollaire 4.9. — *Si $n \geqslant n_0(K) + 1$ et si $x \in \mathscr{O}_{K_{n+1}}/\mathfrak{a}$, alors $x^p \in \mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ et le morphisme d'anneaux $x \mapsto x^p$ de $\mathscr{O}_{K_{n+1}}/\mathfrak{a}$ dans $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ ainsi défini est surjectif.*

Démonstration. — Soient ω_{n+1} une uniformisante de K_{n+1} et $\omega_n = \mathrm{N}_{K_{n+1}/K_n}(\omega_{n+1})$; c'est une uniformisante de K_n. D'après le lemme précédent, on a $\omega_{n+1}^p = \omega_n$ dans $\mathscr{O}_{K_{n+1}}/\mathfrak{a}$. Tout élément de x de $\mathscr{O}_{K_{n+1}}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{n+1}^k [a_k]$, où les a_k sont des éléments de $k_{F'}$ et $[a_k] \in \mathscr{O}_{F'}$ est le représentant de Teichmüller de a_k, et on a $x^p = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_n^k [a_k^p]$ modulo p et donc, *a fortiori*, modulo $\mathfrak{a}$. On en déduit l'appartenance de x^p à $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ et, utilisant le fait que $k_{F'}$ est parfait, la surjectivité de $x \mapsto x^p$.

4.3. Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et certains de ses sous-anneaux. — Soit

$$\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, x_n \in \mathscr{O}_C/\mathfrak{a} \text{ et } x_{n+1}^p = x_n \text{ si } n \in \mathbf{N}\}.$$

L'anneau $\mathscr{O}_C/\mathfrak{a}$ étant de caractéristique p, l'application $x \mapsto x^p$ en est un morphisme et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est un anneau de caractéristique p sur lequel $\mathscr{G}_F$ agit naturellement (composante par composante). D'autre part, si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ et si $\hat{x}_n$ est un relèvement quelconque de x_n dans $\mathscr{O}_C$, la suite de terme général $\hat{x}_{n+k}^{p^k}$ converge dans $\mathscr{O}_C$ vers une limite $x^{(n)}$ qui ne dépend pas du choix des $\hat{x}_n$. Ceci permet de décrire $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ comme l'ensemble des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\mathscr{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. Soit $v_{\mathbf{E}} : \widetilde{\mathbf{E}}^+ \to \mathbf{R}$ l'application définie par $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$.

On peut voir $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$ comme un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et, si on pose $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$, on a $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = \frac{p}{p-1}$.

Si K est une extension finie de F, soient

$$\widetilde{\mathbf{E}}_K^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+,\ x_n \in \mathscr{O}_{K_\infty}/\mathfrak{a} \text{ si } n \in \mathbf{N}\},$$
$$\mathbf{E}_K^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+,\ x_n \in \mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a} \text{ si } n \text{ est assez grand}\}.$$

$\mathbf{E}_K^+$ contient ε et $\overline{\pi}$, ce qui nous permet de poser $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}^+[\overline{\pi}^{-1}]$, $\widetilde{\mathbf{E}}_K = \widetilde{\mathbf{E}}_K^+[\overline{\pi}^{-1}]$ et $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}_K^+[\overline{\pi}^{-1}]$ si K est une extension finie de F.

Proposition 4.10 **([21, 30])**. — (i) $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est un corps dont* $v_{\mathbf{E}}$ *est une valuation pour laquelle il est complet et dont le corps résiduel est* $\overline{k}_F$. *De plus l'action naturelle de* $\mathscr{G}_F$ *sur* $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est continue.*

(ii) $\mathbf{E}_F = k_F((\overline{\pi}))$ *et, plus généralement, si* K *est une extension finie de* F, *et si* F' *est l'extension maximale non ramifiée de* F *contenue dans* K_∞, *alors* $\mathbf{E}_K$, *muni de* $v_{\mathbf{E}}$, *est un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel* $k_{F'}$.

(iii) *Le sous-corps* $\mathbf{E} = \cup_{K \subset \overline{F}} \mathbf{E}_K$ *est une clôture séparable de* $\mathbf{E}_F$ *stable par* $\mathscr{G}_F$ *et, si* K *est une extension finie de* F, *alors* $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K) = \mathscr{H}_K$; *en particulier,* $\mathscr{H}_K$ *agit continûment sur* $\mathbf{E}$ *muni de la topologie discrète.*

(iv) $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est le complété de* $\mathbf{E}$ *pour la valuation* $v_{\mathbf{E}}$; *en particulier,* $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est algébriquement clos. De plus,* $\widetilde{\mathbf{E}}_K = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}_K}$ *est le complété de la clôture radicielle de* $\mathbf{E}_K$.

Démonstration. — Ce théorème constitue un cas particulier de la théorie du corps des normes ; le point (ii) et une partie du (iii) sont démontrés dans le n° suivant et nous renvoyons à [**30**] pour le reste.

4.4. L'anneau des normes

Proposition 4.11. — *L'anneau* $\mathbf{E}_K^+$ *est un anneau de valuation discrète, complet, de corps résiduel* $k_{F'}$. *De plus, si* $\overline{\pi}_K = (\overline{\pi}_{K,n})_{n \in \mathbf{N}}$ *est une uniformisante de* $\mathbf{E}_K^+$, *et si* $n \geqslant n_0(K) + 1$, *alors* $\overline{\pi}_{K,n}$ *appartient à* $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ *et tout relèvement* $\hat{\pi}_{K,n}$ *de* $\overline{\pi}_{K,n}$ *dans* $\mathscr{O}_{K_n}$ *est une uniformisante de* K_n.

Démonstration. — Par surjectivité de $x \mapsto x^p$ (cor. 4.9), on peut trouver une suite $X = (\overline{\omega}_n) \in \mathbf{E}_K^+$, telle que, si $n \geqslant n_0(K) + 1$, $\overline{\omega}_n$ soit l'image d'une uniformisante ω_n de K_n dans $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$. On a alors $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a} \cong k_{F'}[X]/X^{e_{K_n}/p}$ et $\mathbf{E}_K^+ = \varprojlim \mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ est donc isomorphe à $k_{F'}[[X]]$, l'application de $k_{F'}[[X]]$ dans $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ étant donnée par $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{p^{-1}e_{K_n}-1} a_k^{p^{-n}} \overline{\omega}_n^k$. En particulier, si $K = F$, on peut prendre $\omega_n = \varepsilon^{(n)} - 1$, ce qui montre que l'on a $\mathbf{E}_F = k_F((\overline{\pi}))$.

Maintenant, si $\overline{\pi}_K = (\overline{\pi}_{K,n})_{n \in \mathbf{N}}$ est une uniformisante quelconque de $\mathbf{E}_K^+$, on peut écrire $\overline{\pi}_K$ sous la forme $\overline{\pi}_K = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^k \in k_{F'}[[X]]$, avec $a_1 \neq 0$. Si $n \geqslant n_0(K) + 1$, on a alors $\overline{\pi}_{K,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \overline{\omega}_n^k$, ce qui fait que tout relèvement $\hat{\pi}_{K,n}$ diffère de l'uniformisante $\sum_{k=1}^{+\infty} [a_k] \omega_n^k$ de K_n par un élément de $\mathfrak{a}$ et est une uniformisante de K_n. Ceci termine la démonstration de la proposition.

Proposition 4.12. — *Si* K *est une extension finie de* F, *alors* $\mathbf{E}_K$ *est une extension séparable de degré* d_{K_∞} *de* $\mathbf{E}_F$, *d'indice d'inertie* f_{K_∞} *et d'indice de ramification* e_{K_∞}. *De plus, on a* $v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}) = \lim_{n \to +\infty} p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) \leqslant \frac{1}{p-1} p^{n_0(K)}$.

Démonstration. — Si $e_{K_\infty} = 1$, on a $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}_{F'} = k_{F'}((\overline{\pi}))$, et le résultat est évident. Nous supposerons donc dans ce qui suit que $e_{K_\infty} \geqslant 2$. Soit $\overline{\pi}_K = (\overline{\pi}_{K,n})_{n \in \mathbf{N}}$ une uniformisante de $\mathbf{E}_K$ et, si $n \geqslant n_0(K)+1$, soit $\hat{\pi}_{K,n}$ un relèvement de $\overline{\pi}_{K,n}$ dans $\mathscr{O}_{K_n}$.

Comme $n \geqslant n_0(K)+1 \geqslant n_0(K)$, l'extension K_n/F'_n est totalement ramifiée de degré $e = e_{K_\infty}$; le polynôme minimal P_n de $\hat{\pi}_{K,n}$ sur F'_n est donc un polynôme d'Eisenstein de degré e que l'on peut mettre sous la forme $P_n(X) = X^e + a_{e-1,n}X^{e-1} + \cdots + a_{0,n}$. Soit S l'ensemble des plongements de K_∞ dans $\overline{F}$ au-dessus F'_∞ ; d'après le (iii) du cor. 4.3, c'est aussi l'ensemble des plongements de K_n dans $\overline{F}$ au-dessus F'_n si $n \geqslant n_0(K)$ et on a $P_n(X) = \prod_{\sigma\in S}(X - \sigma(\hat{\pi}_{K,n}))$.

Notons $\overline{a}_{i,n}$ l'image de $a_{i,n}$ dans $\mathscr{O}_{F'_n}/\mathfrak{a}$, et $\overline{P}_n$ le polynôme $X^e + \overline{a}_{e-1,n}X^{e-1} + \cdots + \overline{a}_{0,n}$. On a aussi $\overline{P}_n(X) = \prod_{\sigma\in S}(X - \sigma(\overline{\pi}_{K,n}))$; on en déduit le fait que $a_i = (\overline{a}_{i,n})_{n\geqslant n_0(K)}$ appartient à $\mathbf{E}^+_{F'}$ et $P(X) = X^e + a_{e-1}X^{e-1} + \cdots + a_0 = \prod_{\sigma\in S}(X - \sigma(\overline{\pi}_K)) \in \mathbf{E}^+_{F'}[X]$. Par ailleurs, comme P_n est un polynôme d'Eisenstein, on a $v_p(a_{0,n}) = v_p(\varepsilon^{(n)} - 1)$ et donc $v_{\mathbf{E}}(a_0) = v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$; le polynôme P est donc un polynôme d'Eisenstein, ce qui prouve que c'est le polynôme minimal de $\overline{\pi}_K$ et que $\mathbf{E}_K$ est une extension totalement ramifiée de degré e_{K_∞} de $\mathbf{E}_{F'}$; l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est donc une extension d'indice d'inertie $[F' : F] = f_{K_\infty}$, d'indice de ramification e_{K_∞} et de degré $f_{K_\infty}e_{K_\infty} = d_{K_\infty}$.

Enfin, on a $v_{\mathbf{E}}(P'(\overline{\pi}_K)) = \lim_{n\to+\infty} p^n v_p(P'_n(\hat{\pi}_{K,n})) = \lim_{n\to+\infty} p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$. On déduit alors de la proposition 4.5 la non nullité de $P'(\overline{\pi}_K)$ qui montre que l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est séparable, et l'inégalité $v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}) = v_{\mathbf{E}}(P'(\overline{\pi}_K)) \leqslant \frac{1}{p-1}p^{n_0(K)}$ que l'on cherchait à établir.

5. Les anneaux parfaits

5.1. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ et certains de ses sous-anneaux. — Soient $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ et $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$. Par construction,

$$\widetilde{\mathbf{A}}/p\widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{E}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{A}}^+/p\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \widetilde{\mathbf{E}}^+$$

et tout élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}$) s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, où les x_k sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}$), et $[x_k]$ désigne le représentant de Teichmüller de x_k.

Ces anneaux sont naturellement munis de deux topologies : la topologie forte et la topologie faible. La *topologie forte* consiste à munir $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+$) de la topologie d'anneau la moins fine rendant continue la projection $\widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}^+$), où l'on a muni $\widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^+$) de la topologie discrète. La topologie forte sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ ou $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ n'est donc rien d'autre que la topologie p-adique.

La *topologie faible* sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+$) est la topologie d'anneau la moins fine rendant continue la projection $\widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}^+$), où l'on a muni $\widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^+$) de la topologie induite par la valuation $v_{\mathbf{E}}$. De manière explicite, si $k \in \mathbf{N}$, soit $w_k : \widetilde{\mathbf{A}} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction définie par $w_k(x) = \inf_{i\leqslant k} v_{\mathbf{E}}(x_i)$ si $x = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i[x_i] \in \widetilde{\mathbf{A}}$. Les propriétés suivantes de w_k sont immédiates :

(i) $w_k(x) = +\infty$ si et seulement si $x \in p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}$;
(ii) $w_k(x+y) \geqslant \inf(w_k(x), w_k(y))$ avec égalité si $w_k(x) \neq w_k(y)$;
(iii) $w_k(xy) \geqslant \inf_{i+j\leqslant k}(w_i(x) + w_j(y))$;
(iv) $w_k(\varphi(x)) = pw_k(x)$;
(v) $w_k(\sigma(x)) = w_k(x)$ si $\sigma \in \mathscr{G}_F$.

La topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ ou $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est la topologie définie par la famille de semi-valuations w_k, pour $k \in \mathbf{N}$ (i.e. une suite x_n a pour limite x si et seulement si, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, $w_k(x_n - x)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$).

Proposition 5.1. — (i) *L'application* $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ *est un homéomorphisme de* $(\widetilde{\mathbf{E}})^{\mathbf{N}}$ *(resp.* $(\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathbf{N}}$*) sur* $\widetilde{\mathbf{A}}$ *(resp.* $\widetilde{\mathbf{A}}^+$*) pour les topologies faible et forte.*
(ii) $\widetilde{\mathbf{A}}$ *et* $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ *sont séparés et complets pour les topologies forte et faible.*

Par fonctorialité des vecteurs de Witt, on peut relever (de manière unique) les actions de $\mathscr{G}_F$ et φ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, ce qui permet de munir les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ d'une action de $\mathscr{G}_F$ et d'une action du Frobenius φ commutant entre elles. De manière explicite,

$$\varphi\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k^p] \quad \text{et} \quad \sigma\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[\sigma(x_k)] \text{ si } \sigma \in \mathscr{G}_F.$$

Proposition 5.2. — *φ agit continûment sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ munis des topologies forte ou faible, et l'on a*

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{\varphi=1} = (\widetilde{\mathbf{A}}^+)^{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p.$$

Démonstration. — La continuité de l'action de φ est immédiate et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est invariant par φ si et seulement si on a $x_k^p = x_k$, et donc $x_k \in \mathbf{F}_p$, pour tout k, c'est-à-dire si et seulement si $x \in W(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}_p$.

Remarque 5.3. — Ni $\mathscr{H}_F$ ni, a fortiori, $\mathscr{G}_F$ n'agissent discrètement sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ ou $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, ce qui implique que ni $\mathscr{H}_F$ ni $\mathscr{G}_F$ n'agissent continûment sur $\widetilde{\mathbf{A}}$, ou $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ si on les munit de la topologie forte. Par contre, comme $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont homéomorphes à $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{N}}$ et $(\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathbf{N}}$ respectivement, $\mathscr{G}_F$ agit continûment sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ munis de la topologie faible.

Si $[K : F] < +\infty$, soient $\widetilde{\mathbf{A}}_K = W(\widetilde{\mathbf{E}}_K)$, $\widetilde{\mathbf{A}}_K^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}_K^+)$, Par construction, on a

$$\widetilde{\mathbf{A}}_K/p\widetilde{\mathbf{A}}_K = \widetilde{\mathbf{E}}_K \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{A}}_K^+/p\widetilde{\mathbf{A}}_K^+ = \widetilde{\mathbf{E}}_K^+.$$

Les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_K^+$ sont des sous-anneaux fermés de $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ respectivement que ce soit pour la topologie forte ou ou la topologie faible. D'autre part, on déduit du (iv) de la proposition 4.10 les égalités

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}_K} = \widetilde{\mathbf{A}}_K \quad \text{et} \quad (\widetilde{\mathbf{A}}^+)^{\mathscr{H}_K} = \widetilde{\mathbf{A}}_K^+.$$

Soit $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}]$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}_K = \widetilde{\mathbf{A}}_K[\frac{1}{p}]$) le corps des fractions de $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}_K$) et soient $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K^+ = \widetilde{\mathbf{A}}_K^+[\frac{1}{p}]$. Tout élément de $\widetilde{\mathbf{B}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}^+$) s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} p^k[x_k]$, où $(x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^+$) nuls pour k assez petit. Les actions de φ et $\mathscr{G}_F$ s'étendent par $\mathbf{Q}_p$-linéarité à $\widetilde{\mathbf{B}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ et l'on a

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\varphi=1} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+)^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p, \quad \widetilde{\mathbf{B}}^{\mathscr{H}_K} = \widetilde{\mathbf{B}}_K \quad \text{et} \quad (\widetilde{\mathbf{B}}^+)^{\mathscr{H}_K} = \widetilde{\mathbf{B}}_K^+.$$

5.2. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et certains de ses sous-anneaux. — Si $r > 0$, soit

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} = \Big\{x \in \widetilde{\mathbf{A}},\ \lim_{k\to-\infty} rw_k(x) + k = +\infty\Big\} =$$

$$= \Big\{x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}},\ \lim_{k\to-\infty} rv_{\mathbf{E}}(x_k) + k = +\infty\Big\}.$$

Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, posons $v^{(0,r]}(x) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{k}{r} = \inf_{k\in\mathbf{N}} w_k(x) + \frac{k}{r}$.

Proposition 5.4. — *La fonction $v^{(0,r]} : \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $v^{(0,r]}(x) = +\infty$ *si et seulement si* $x = 0$;

(ii) $v^{(0,r]}(x+y) \geqslant \inf(v^{(0,r]}(x), v^{(0,r]}(y))$, *si* $x, y \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$;

(iii) $v^{(0,r]}(xy) \geqslant v^{(0,r]}(x) + v^{(0,r]}(y)$, *si* $x, y \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$;

(iv) $v^{(0,r]}(pr) = v^{(0,r]}(x) + \frac{1}{r}$ *et* $v^{(0,r]}([\alpha]x) = v_{\mathbf{E}}(\alpha) + v^{(0,r]}(x)$, *si* $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}$ *et si* $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$;

(v) $v^{(0,r]}(\sigma(x)) = v^{(0,r]}(x)$ *et* $v^{(0,p^{-1}r]}(\varphi(x)) = pv^{(0,r]}(x)$ *si* $\sigma \in \mathscr{G}_F$ *et* $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

Démonstration. — Toutes ces propriétés sont des conséquences immédiates des propriétés de la fonction w_k.

Corollaire 5.5. — *Si $r > 0$, alors $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}$ stable sous l'action de $\mathscr{G}_F$ et φ induit un isomorphisme d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-1}r]}$.*

Proposition 5.6. — *$\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est séparé et complet pour la topologie définie par $v^{(0,r]}$.*

Démonstration. — La séparation suit du (i) de la proposition 5.4. Maintenant, si $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ tendant vers 0, alors a_i tend vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ (muni de la topologie faible) et la série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ vers une limite a vérifiant $w_k(a) \geqslant \inf_{i\in\mathbf{N}} w_k(a_i)$. Comme $\lim_{k\to+\infty} w_k(a_i) + \frac{k}{r} = +\infty$ et $\lim_{i\to+\infty}(\inf_{k\in\mathbf{N}} w_k(a_i) + \frac{k}{r}) = +\infty$, on en déduit le fait que $w_k(a) + \frac{k}{r}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, ce qui permet de conclure.

Remarque 5.7. — Si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ converge et a pour somme x dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

Proposition 5.8. — *Soient $r > 0$ et $C > -\infty$. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}$ tendant vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}$, et telle que l'on ait $v^{(0,r]}(x_n) \geqslant C$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,s]}$, quel que soit $s \in]0, r[$.*

Démonstration. — Si $x_n = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_{n,k}]$, les hypothèses se traduisent par

(i) $\lim_{n\to+\infty} v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) = +\infty$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$,

(ii) $\inf_{k\in\mathbf{N}} v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) + \frac{k}{r} \geqslant C$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

On a donc, si $s \in]0, r[$,

$$\inf_{k\in\mathbf{N}} \left(v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) + \frac{k}{s}\right) \geqslant \inf\left(C + k_0\frac{r-s}{rs}, \inf_{k\leqslant k_0}\left(v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) + \frac{k}{r}\right)\right).$$

Choisissant k_0 pour rendre le second terme grand et utilisant le (i), on en tire le fait que $\inf_{k\in\mathbf{N}}\left(v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) + \frac{k}{s}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui permet de conclure.

Lemme 5.9. — *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *x est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$;*

(ii) *$v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$ et $rv_{\mathbf{E}}(x_k) + k > 0$ si $k \geqslant 1$.*

Démonstration. — Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ et $y = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[y_k]$ sont deux éléments de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ vérifiant $xy = 1$, on a en particulier $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant -\frac{k}{r}$, $v_{\mathbf{E}}(y_k) \geqslant -\frac{k}{r}$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et $x_0y_0 = 1$; on en déduit l'égalité $v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$. Soit maintenant i_0 (resp. j_0) le plus grand entier i (resp. j) tel que $v_{\mathbf{E}}(x_i) = -\frac{i}{r}$ (resp. $v_{\mathbf{E}}(y_j) = -\frac{j}{r}$). On a donc $v_{\mathbf{E}}(x_iy_j) > -\frac{i_0+k_0}{r}$ si $i + j \leqslant i_0 + j_0$ et $(i, j) \neq (i_0, j_0)$ et $v_{\mathbf{E}}(x_{i_0}y_{j_0}) = -\frac{i_0+k_0}{r}$, ce qui nous donne $w_{i_0+j_0}(xy) = -\frac{i_0+k_0}{r}$. Comme par ailleurs, $w_{i_0+j_0}(xy) = 0$, on obtient $i_0 = j_0 = 0$, ce qui termine la démonstration de l'implication (i)⇒(ii).

Réciproquement, on peut écrire x sous la forme $[x_0](1-y)$, où $y = -\sum_{k=1}^{+\infty} p^k[x_0^{-1}x_k]$ vérifie $v^{(0,r]}(y) > 0$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n$ converge donc dans l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et x admet $[x_0^{-1}](\sum_{n=0}^{+\infty} y^n)$ comme inverse.

Proposition 5.10. — *Si $r > 0$, alors*

(i) *$\mathscr{G}_F$ agit continûment sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ muni de la topologie faible.*

(ii) *$\varphi : \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} \to \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-1}r]}$ est continu.*

Démonstration. — Le (ii) est une évidence et comme $v^{(0,r]}(\sigma(x)) = v^{(0,r]}(x)$, il suffit de vérifier que si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est fixé, alors $\sigma \mapsto \sigma(x)$ est continue, et on peut se contenter de vérifier la continuité en $\sigma = 1$.

Commençons par considérer le cas où $x = [\alpha]$, avec $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}$. Comme $\sigma \to \sigma(\alpha)$ est continue, il en est de même de $\sigma \to [\sigma(\alpha)]$ vue comme fonction à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ muni de la topologie faible, ce qui signifie que, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, $w_k([\sigma(\alpha)] - [\alpha])$ tend

vers $+\infty$ quand σ tend vers 1. Comme par ailleurs, on a $w_k([\sigma(\alpha)]-[\alpha]) \geqslant v_{\mathbf{E}}(\alpha)$, on en déduit le fait que $v^{(0,r]}([\sigma(\alpha)]-[\alpha])$ tend vers $+\infty$ quand σ tend vers 1.

La cas général s'en déduit en remarquant que, si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, la fonction $\sigma \to \sigma(x)$ est somme de la série de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty}(\sigma \to p^k[\sigma(x_k)])$ qui converge uniformément dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

Lemme 5.11. — *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$, il existe $s \in]0, r[$ tel que x soit une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,s]}$.*

Démonstration. — Comme $v_E(x_k) + \frac{k}{r}$ tend vers $+\infty$, il existe $C \geqslant 0$ tel que l'on ait $v_E(x_k) + \frac{k}{r} \geqslant -C$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. Il suffit alors de choisir s de telle sorte que l'on ait $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} > C$ pour que $v_E(x_k) + \frac{k}{s} > v_E(x_k) + \frac{k}{r} + kC > 0$ si $k \geqslant 1$, et donc que x soit une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,s]}$ d'après le lemme 5.9. Ceci permet de conclure.

Si $r > 0$, soit $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}[\frac{1}{p}]$; c'est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{B}}$. Finalement, soit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ la limite inductive (ou réunion) des $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$. On munit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ de la topologie de la limite inductive, chaque $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \cup_{n\in\mathbf{N}} p^{-n}\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ étant lui-même muni de la topologie de la limite inductive.

Proposition 5.12. — *$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ est un sous-corps de $\widetilde{\mathbf{B}}$ stable sous les actions de $\mathscr{G}_F$ et φ ; de plus, ces actions sont continues.*

Démonstration. — La seule chose qui ne résulte pas immédiatement de la proposition 5.10 est le fait que tout élément non nul de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ est inversible. Soit donc $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ avec $x_{k_0} \neq 0$. On peut écrire x sous la forme $p^{k_0}[x_{k_0}]y$ avec $y = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[y_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $y_0 = 1$. D'après le lemme 5.11, il existe $s \in]0, r[$ tel que y soit inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,s]}$, ce qui permet de conclure.

Si K est une extension finie de F, on définit un sous-corps $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ et des sous-anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$, pour $r > 0$ de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger}$ par

$$\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_K \quad \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_K \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_K.$$

On a aussi $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})^{\mathscr{H}_K}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]})^{\mathscr{H}_K}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]})^{\mathscr{H}_K}$.

5.3. Les anneaux $\mathbf{B}_{\max}^{+}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$. — Soit $\alpha \mapsto p^{\alpha}$ un morphisme de groupes de $\mathbf{Q}$ (muni de l'addition) dans $\overline{F}^*$ (muni de la multiplication) tel que $p^1 = p$. Soit $\widetilde{p} = (p, p^{1/p}, \dots) \in \widetilde{\mathbf{E}}^{+}$.

On note $\mathbf{A}_{\max}$ le séparé complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}[\frac{[\widetilde{p}]}{p}]$ pour la topologie p-adique et on pose $\mathbf{B}_{\max}^{+} = \mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$. Le Frobenius φ sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\max}$ et $\mathbf{B}_{\max}^{+}$; il est injectif mais pas bijectif.

On pose $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{B}^+_{\mathrm{max}})$. Par construction, $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ est un sous-anneau de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{max}}$ sur lequel φ est bijectif. On peut aussi l'obtenir en complétant $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie de Fréchet définie par la famille de semi-valuations $v^{[r,+\infty]}$, pour $r\in]0,1]$, avec $v^{[r,+\infty]}(x) = \inf_{k\in\mathbf{Z}}(\frac{k}{r} + v_E(x_k))$ si $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^+$. (En effet, si $k\in\mathbf{Z}$, alors $v^{[1,+\infty]}(x) \geqslant k$ si et seulement si $x \in p^k\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{[\bar{p}]}{p}]$, et donc $\varphi^n(\mathbf{B}^+_{\mathrm{max}})$ est le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la semi-valuation $v^{[p^{-n},+\infty]}$.)

5.4. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ et ses sous-anneaux. — On étend $v^{(0,r]}$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}[\frac{1}{p}]$ en posant $v^{(0,r]}(x) = \inf_{k\geqslant k_0}(v_{\mathbf{E}}(x_k)+\frac{k}{r})$ si $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k]$. On a alors $v^{(0,r]}(p^kx) = v^{(0,r]}(x) + \frac{k}{r}$ si $x\in\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et $k\in\mathbf{Z}$. Si $0<s\leqslant r$ et $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, soit $v^{[s,r]}(x) = \min(v^{(0,s]}(x), v^{(0,r]}(x))$. Remarquons que l'on a $v^{[s,r]}(x) = v^{(0,r]}(x)$, quel que soit $s\in]0,r[$, si $x\in\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, mais il n'y a pas de formule simple reliant $v^{[s,r]}(p^kx)$ à $v^{[s,r]}(x)$.

On note $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ pour la topologie (de Fréchet) induite par la famille de semi-valuations $v^{[s,r]}$, pour $0<s\leqslant r$. Comme on a $v^{[s_1,r]}(x)\geqslant v^{[s_2,r]}(x)$ si $r\geqslant s_1\geqslant s_2>0$, il suffit de prendre une suite s_n tendant vers 0 au lieu de tout $s\in]0,r[$ pour définir la topologie de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$; en particulier, cette topologie est définie par une famille dénombrable de semi-valuations, ce qui implique que $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ est métrisable ; on peut donc définir sa topologie par les suites convergentes et une suite x_n converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ si et seulement, quel que soit $s\in]0,r[$, la suite $v^{[s,r]}(x_{n+1}-x_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ a été étudié en détail par Berger [**4**, §2] qui montre, en particulier les résultats suivants :

Proposition 5.13. — (i) *$\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ contient $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et tout élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ peut s'écrire comme somme d'un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et d'un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$; une telle écriture est unique à addition près d'un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}\cap\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{B}}^+$.*

(ii) *Si K est une extension finie de F, alors $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}_K$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}_K = (\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})^{\mathscr{H}_K}$.*

5.5. Le logarithme et l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}$

Lemme 5.14. — (i) *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est une unité de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x_0-1)>0$, alors la série $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.*

(ii) *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x_0-1)>0$, alors la série $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$.*

Démonstration. — Nous ne démontrerons que le (ii), le (i) se démontrant exactement de la même manière. Soit $\alpha = v^{(0,r]}(x-1)$. Les hypothèses mises sur x se traduisent

par l'inégalité $\alpha > 0$. Par ailleurs, comme $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, on a $v^{[s,r]}(x-1) = \alpha$ quel que soit $s \in]0, r[$, et donc

$$v^{[s,r]}\Big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\Big) \geqslant v^{[s,r]}\Big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big) + nv^{[s,r]}(x-1) = n\alpha - \frac{v_p(n)}{s}$$

tend vers $+\infty$, quel que soit $s \in]0, r[$, quand n tend vers $+\infty$. Ceci permet de conclure.

Par exemple, $t = \log[\varepsilon]$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ sur lequel $\mathscr{G}_F$ agit par multiplication par le caractère cyclotomique. On aimerait bien étendre cette application à $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)^*$, mais pour cela, on est forcé d'étendre un peu l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ en rajoutant un analogue p-adique u de $\log p$.

Si $\sigma \in \mathscr{G}_F$, il existe $c(\sigma) \in \mathbf{Z}_p$ tel que l'on ait $\sigma(\widetilde{p}) = \widetilde{p}\varepsilon^{c(\sigma)}$ ($\sigma \mapsto c(\sigma)$ est le cocycle à valeurs dans $\mathbf{Z}_p(1)$ associé à p par la théorie de Kummer). Soit $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[u]$. On munit $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}$ d'un opérateur « de monodromie » $N = -\frac{d}{du}$ et d'une action de φ (resp. $\mathscr{G}_F$), compatible avec celle existant sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, en posant $\varphi(u) = pu$ (resp. $\sigma(u) = u + c(\sigma)t$). Les actions de φ et N commutent à celle de $\mathscr{G}_F$ et on a $N\varphi = p\varphi N$.

Proposition 5.15. — *Il existe une unique application* $\log : (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)^* \to \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}$ *vérifiant les propriétés suivantes* :

(i) $\log xy = \log x + \log y$;
(ii) $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ *si la série converge* ;
(iii) $\log[a] = 0$ *si* $a \in k_{\overline{F}}$;
(iv) $\log p = 0$ *et* $\log[\widetilde{p}] = u$.

De plus, on a $\varphi(\log x) = \log\varphi(x)$ *et* $\sigma(\log x) = \log\sigma(x)$ *si* $\sigma \in \mathscr{G}_F$. *Finalement, si* $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)^*$, *avec* $x_{k_0} \neq 0$, *alors* $N(\log x) = -v_{\mathbf{E}}(x_{k_0})$.

Démonstration. — Si $\alpha \in \mathbf{Q}$, on note $\widetilde{p}^\alpha$ l'élément $(p^\alpha, p^{\alpha/p}, \dots)$ de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. Tout élément de $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)^*$ peut alors s'écrire de manière unique sous la forme $x = p^k[\widetilde{p}^\alpha][a]y$, où $k \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \mathbf{Q}$, $a \in \overline{k}_F$, et $y = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[y_k]$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(y_0 - 1) > 0$. D'après le lemme 5.11, il existe donc $r > 0$ tel que y soit une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, ce qui permet de définir $\log x$ par la formule $\log x = \alpha u + \log y$. Le reste de la proposition est plus ou moins immédiat.

On note $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[u]$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}$; il est stable par N, φ et $\mathscr{G}_F$, et on a $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} = \cap_{n=0}^{+\infty}\varphi^n(\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}})$, si $\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}}$ désigne l'un des anneaux $\mathbf{B}^+_{\max}[u]$ ou $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}[u]$.

Proposition 5.16. — *Si* K *est une extension finie de* F, *alors* $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log})^{\mathscr{G}_K} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{\mathscr{G}_K} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\mathscr{G}_K} = K \cap F^{\mathrm{nr}}$.

Démonstration. — L'égalité $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log})^{\mathscr{G}_K} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{\mathscr{G}_K}$ correspond au cas particulier $V = \mathbf{Q}_p$ de la proposition 3.4 de [**4**], et l'égalité $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{\mathscr{G}_K} = K \cap F^{\mathrm{nr}}$ se déduit du résultat correspondant pour $\mathbf{B}^+_{\mathrm{st}}$ (cf. [**17**] ou [**11**, rem. 5.14]).

5.6. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

Proposition 5.17 **([14])**. — *L'application $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathscr{O}_C$, donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n] \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$, est un morphisme surjectif d'anneaux dont le noyau est un idéal principal engendré par $\xi = [\tilde{p}] - p$ ou encore par $\omega = \frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)} = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \cdots + [\varepsilon^{1/p}]^{p-1}$.*

On prolonge θ en un morphisme de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ sur C. Si $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{B}_m$ l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+/\xi^m\widetilde{\mathbf{B}}^+$ que l'on munit d'une structure d'anneau de Banach p-adique en prenant l'image de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ comme anneau d'entiers. On a en particulier $\mathbf{B}_1 = C$. On note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau $\varprojlim \mathbf{B}_m$ que l'on munit de la topologie (de Fréchet) de la limite projective. Par construction, θ s'étend en un morphisme continu de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $\mathbf{B}_1 = C$. L'action de $\mathscr{G}_F$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ s'etend par continuité en une action continue de $\mathscr{G}_F$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. La série définissant $t = \log[\varepsilon] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \pi^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et t est un générateur de $\ker \theta$

Lemme 5.18. — *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$;*

(ii) *la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k x_k^{(0)}$ converge dans C ;*

(iii) *$k + v_{\mathbf{E}}(x_k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$;*

(iv) *$x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,1]}$.*

Démonstration. — Les propriétés (iii) et (iv) sont équivalentes par définition de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,1]}$ et les propriétés (ii) et (iii) sont équivalentes par définition de $v_{\mathbf{E}}$. L'implication (i)⇒(ii) suit de la continuité de $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to C$; il ne reste donc plus que (iii)⇒(i) à prouver. Si $\lim_{k\to+\infty} k + v_{\mathbf{E}}(x_k) = +\infty$, la partie entière a_k de $k + v_{\mathbf{E}}(x_k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et on peut écrire x_k sous la forme $\tilde{p}^{-k+a_k} y_k$, avec $y_k \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$. On a alors

$$p^k[x_k] = (\frac{p}{[\tilde{p}]})^k [\tilde{p}]^{a_k}[y_k] = (1 + \frac{\xi}{p})^{-k}(p+\xi)^{a_k}[y_k].$$

Mais $(1 + \frac{\xi}{p})^{-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-k}{n} p^{-n}\xi^n$ est dans l'image de $p^{-m}\widetilde{\mathbf{A}}^+$ modulo ξ^{m+1} et $(p+\xi)^{a_k} = \sum_{n=0}^{a_k} \binom{a_k}{n} p^{a_k-n}\xi^n$ est dans l'image de $p^{a_k-m}\widetilde{\mathbf{A}}^+$ modulo ξ^{m+1}. On en déduit le fait que $p^k[x_k]$ est dans l'image de $p^{a_k-2m}\widetilde{\mathbf{A}}^+$ modulo ξ^{m+1} et donc tend vers 0 dans $\mathbf{B}_m$. Comme ceci est vrai quel que soit $m \in \mathbf{N}$, cela implique la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui permet de conclure.

Remarque 5.19. — Le morphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,1]}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ défini ci-dessus s'étend par continuité en un morphisme de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. De plus, la série $\log \frac{[\tilde{p}]}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{[\tilde{p}]}{p} - 1\right)^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui nous fournit un morphisme naturel d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}[u]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui commute à l'action de $\mathscr{G}_F$. Ce morphisme

étant injectif (cf. [4, prop. 2.25]), nous considérerons $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}[u]$ comme un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ sans plus de commentaires.

6. Les anneaux imparfaits

6.1. Les anneaux A, B, $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$. — Soit $\pi = [\varepsilon] - 1$. Comme les actions de φ et $\mathscr{G}_F$ sur π sont données par les formules

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1 \quad \text{et} \quad g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1,$$

l'anneau $\mathbf{A}_F^{+} = \mathscr{O}_F[[\pi]]$ est stable par φ et $\mathscr{G}_F$.

Soit $\mathbf{A}_F = \mathscr{O}_F[[\pi]]\{\frac{1}{\pi}\}$ l'adhérence de $\mathscr{O}_F[[\pi]][\frac{1}{\pi}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ pour la topologie forte (ou faible, cela revient au même car $\mathscr{O}_F[[\pi]]$ est complet pour les deux). C'est l'anneau des séries de Laurent de la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\pi^k$, où $a_k \in \mathscr{O}_F$ et $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$ et on a $\mathbf{A}_F/p\mathbf{A}_F = \mathbf{E}_F$. Soit $\mathbf{B}_F = \mathbf{A}_F[\frac{1}{p}] \subset \widetilde{\mathbf{B}}$ le corps des fractions de $\mathbf{A}_F$; les formules ci-dessus montrent que $\mathbf{B}_F$ est stable par $\mathscr{G}_F$ et φ.

Si $[K : F] < +\infty$, l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est finie et séparable et, comme $\widetilde{\mathbf{B}}$ est absolument non ramifié et a comme corps résiduel $\widetilde{\mathbf{E}}$ qui contient $\mathbf{E}_K$, il existe une unique extension (automatiquement non ramifiée) $\mathbf{B}_K$ de $\mathbf{B}_F$ de corps résiduel $\mathbf{E}_K$ contenue dans $\widetilde{\mathbf{B}}$. On note $\mathbf{A}_K$ l'anneau de ses entiers.

Comme $\mathbf{E} = \cup_{[K:F]<+\infty}\mathbf{E}_K$ est la clôture séparable de $\mathbf{E}_F$, l'extension maximale non ramifiée $\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}$ de $\mathbf{B}_F$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}$ est aussi la réunion des $\mathbf{B}_K$, où K parcourt les extensions finies de F. On note $\mathbf{B}$ l'adhérence de $\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}$ pour la topologie forte ; son anneau des entiers $\mathbf{A}$ est donc le complété de l'anneau des entiers de $\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}$ pour la topologie p-adique.

Proposition 6.1. — (i) *Si K est une extension finie de F, alors $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$ sont stables par φ.*

(ii) *Les sous-anneaux $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}$ sont stables sous l'action de $\mathscr{G}_F$ et φ.*

(iii) *$\mathscr{H}_F$ agit continuement sur $\mathbf{B}$ muni de la topologie forte.*

(iv) *Si K est une extension finie de F, on a $\mathbf{B}^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{B}_K$ et $\mathbf{A}^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{A}_K$.*

Démonstration. — (i) Si $\overline{x} \in \mathbf{E}_K^{+}$ est un élément primitif de l'extension séparable $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$, il en est de même de $\overline{x}^p$. Maintenant, si $x \in \mathbf{A}_K$ a pour réduction $\overline{x}$ modulo p et si $P \in \mathbf{A}_F[X]$ est le polynôme minimal de x sur $\mathbf{B}_F$, le polynôme minimal de $\varphi(x)$ sur $\mathbf{B}_F$ est le polynôme $\varphi(P) \in \mathbf{A}_F[X]$ dont la réduction modulo p est le polynôme minimal de $\overline{x}^p$. Il résulte alors du lemme de Hensel que l'on a $\varphi(x) \in \mathbf{B}_K$, ce qui montre que $\mathbf{B}_K$ (et donc aussi $\mathbf{A}_K$) est stable par φ.

(ii) La stabilité de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ par φ suit, par complétion, de celle de $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$ pour toute extension finie K de F. D'autre part, comme $g \in \mathscr{G}_F$ est un isomorphisme de

$\mathbf{B}_F$, l'unicité de $\mathbf{B}_K$ montre que g induit un isomorphisme de $\mathbf{B}_K$ sur $\mathbf{B}_{g(K)}$, ce qui montre que $\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}$ est stable par $\mathscr{G}_F$; il en est donc de même de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ par complétion.

(iii) On a $\mathrm{Gal}(\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}/\mathbf{B}_F) = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_F) = \mathscr{H}_F$, ce qui montre que $\mathscr{H}_F$ agit continûment sur $\mathbf{E} = \mathbf{A}/p\mathbf{A}$ muni de la topologie discrète et donc continûment sur $\mathbf{A}$ (et sur $\mathbf{B}$) muni de la topologie forte (p-adique).

(iv) Si K est une extension finie de F, on a $\mathbf{E}^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{E}_K$ et donc $(\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}})^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{B}_K$, ce qui permet de déduire l'identité $\mathbf{B}^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{B}_K$ du théorème d'Ax-Sen-Tate.

6.2. Les éléments π, π_K, π_n et $\pi_{K,n}$

Si K est une extension non ramifiée de F, on a $\mathbf{A}_K = \mathscr{O}_K \otimes_{\mathscr{O}_F} \mathbf{A}_F$. Dans le cas général, soit F' l'extension non ramifiée maximale de F contenue dans K_∞. Soit $\overline{\pi}_K$ une uniformisante de $\mathbf{E}_K$, soit $\overline{P}_K$ le polynôme minimal de $\overline{\pi}_K$ sur $\mathbf{E}_{F'}$ et soit $P_K \in \mathbf{A}_{F'}^+[X]$ dont la réduction modulo p est $\overline{P}_K$. D'après le lemme de Hensel, P_K a une unique racine π_K dans $\mathbf{A}_K$ dont la réduction modulo p est $\overline{\pi}_K$ et $\mathbf{A}_K$ est un $\mathbf{A}_{F'}$-module libre dont $(1, \pi_K, \dots, \pi_K^{e_K-1})$ est une base.

Dans toute la suite de ce texte, on se fixe pour chaque extension finie K de F un élément π_K construit comme ci-dessus (en posant $\pi_K = \pi$ si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée).

Lemme 6.2. — *$w_0\left(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\right) = 0$ et $w_k\left(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\right) \geqslant -k$, si $k \geqslant 1$.*

Démonstration. — On a $\pi = [\varepsilon] - 1 = [\overline{\pi}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \cdots$, où α_i est un polynôme en $\varepsilon^{p^{-i}} - 1$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et sans terme constant, ce qui implique $v_{\mathbf{E}}(\alpha_i) \geqslant v_{\mathbf{E}}(\varepsilon^{p^{-i}} - 1) = \frac{1}{(p-1)p^{i-1}}$. Écrivant alors π sous la forme $\pi = [\overline{\pi}](1 + p[a_1] + p^2[a_2] + \cdots)$, on a $v_{\mathbf{E}}(a_1) = v_{\mathbf{E}}(\alpha_1) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geqslant -1$ et $v_{\mathbf{E}}(a_i) \geqslant -v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geqslant -i$ si $i \geqslant 2$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 6.3. — *Si $r < 1$, alors $\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}$ est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $\log \pi \in \frac{p}{p-1} u + \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$.*

Lemme 6.4. — *$w_k(\pi_K) \geqslant -(2k-1) v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$ quel que soit $k \geqslant 1$.*

Démonstration. — Si $\pi_K = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$, montrons, par récurrence sur k, que l'on a $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant -(2k-1) v_{\mathbf{E}}(P_K'(\overline{\pi}_K))$. Soit $z_k = \sum_{n=0}^{k} p^n [x_n]$. Par construction, $P_K(z_k) \in p^{k+1}\mathbf{A}_K$; d'autre part, comme P_K est à coefficients dans $\mathbf{A}_F^+$, l'hypothèse de récurrence implique que, si $n \geqslant k+1$, alors

$$\begin{aligned} w_n(P_K(z_k)) &\geqslant \inf_{1 \leqslant i_j \leqslant k, i_1 + \cdots + i_r = n} \sum_{j=1}^{r} -(2i_j - 1) v_{\mathbf{E}}(P_K'(\overline{\pi}_K)) \\ &= - \sup_{1 \leqslant i_j \leqslant k, i_1 + \cdots + i_r = n} (2n - r) v_{\mathbf{E}}(P_K'(\overline{\pi}_K)) \geqslant -(2n-2) v_{\mathbf{E}}(P_K'(\overline{\pi}_K)), \end{aligned}$$

car $r \geqslant 2$ puisque $n \geqslant k+1$ et les $i_j \leqslant k$. En particulier, $w_{k+1}(P_K(z_k)) \geqslant -2kv_{\mathbf{E}}(P'_K(\overline{\pi}_K))$ et, si on note y_{k+1} l'image de $p^{-k-1}P_K(z_k)$ modulo p, on a $v_{\mathbf{E}}(y_{k+1}) \geqslant -2kv_{\mathbf{E}}(P'_K(\overline{\pi}_K))$. La congruence $P_K(z_{k+1}) \in p^{k+2}\mathbf{A}_K$ nous fournit alors la formule $y_{k+1} + P'_K(\overline{\pi}_K)x_{k+1} = 0$, qui permet de montrer l'inégalité voulue pour $k+1$, et permet de conclure.

Posons $r_K = \begin{cases} (2v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}))^{-1} & \text{si } \mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F \text{ est ramifiée,} \\ 1 & \text{si } \mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F \text{ est non ramifiée,} \end{cases}$

Lemme 6.5. — *Si $r < r_K$, alors $\pi_K \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et*

(i) $\frac{\pi_K}{[\overline{\pi}_K]}$ *est une unité de l'anneau des entiers de* $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$;

(ii) $\frac{P'_K(\pi_K)}{[P'_K(\overline{\pi}_K)]}$ *est une unité de l'anneau des entiers de* $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$.

Démonstration. — Le (i) a déjà été démontré au corollaire 6.3 dans le cas non ramifié et le cas ramifié suit du lemme 6.4.

On déduit du lemme 6.4 l'inégalité $w_k(P'_K(\pi_K)) \geqslant -(2k-1)v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$ si $k \geqslant 1$. On a donc

$$w_0\Big(\frac{P'_K(\pi_K)}{[P'_K(\overline{\pi}_K)]}\Big) = 0 \quad \text{et} \quad w_k\Big(\frac{P'_K(\pi_K)}{[P'_K(\overline{\pi}_K)]}\Big) \geqslant -\frac{k}{r_K} \text{ si } k \geqslant 1,$$

ce qui permet de démontrer le (ii) et termine la démonstration.

Si $n \in \mathbf{N}$, on pose $\pi_n = \varphi^{-n}(\pi)$ et $\pi_{K,n} = \varphi^{-n}(\pi_K)$.

Proposition 6.6. — *Si $n \geqslant n_0(K)+1$, alors $\theta(\pi_{K,n})$ est une uniformisante de K_n.*

Démonstration. — Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée, on a $K_n = F'_n$ si $n \geqslant n_0(K)$, et $\theta(\pi_{K,n}) = \theta(\pi_n) = \varepsilon^{(n)} - 1$ est une uniformisante de K_n.

Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est ramifiée, notons δ_K la quantité $v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$. On a $\pi_{K,n} = [\pi_K^{p^{-n}}] + \sum_{k=1}^{+\infty} p^k[\alpha_k]$, avec $v_{\mathbf{E}}(\alpha_k) \geqslant -p^{-n}(2k-1)\delta_K$. Comme $p^{-n}\delta_K < \frac{1}{p(p-1)}$ d'après la proposition 4.12, la suite de terme général $k - p^{-n}(2k-1)\delta_K$ est croissante pour $k \geqslant 1$, de minimum $1 - p^{-n}\delta_K > 1 - \frac{1}{p(p-1)} \geqslant \frac{1}{p}$, et tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. Ceci implique que la série définissant $\theta(\pi_{K,n})$ converge dans $\mathscr{O}_C$ vers un élément ayant même image $\overline{\pi}_{K,n}$ que $\pi_K^{p^{-n}}$ dans $\mathscr{O}_C/\mathfrak{a}$. D'après la proposition 4.12, il existe une uniformisante $\hat{\pi}_{K,n}$ de $\mathscr{O}_{K,n}$ ayant aussi $\overline{\pi}_{K,n}$ comme image modulo $\mathfrak{a}$.

Soit $P_{K,n} \in F_n[X]$ l'image de $\varphi^{-n}(P_K)$ par θ. Alors $P_{K,n}$ admet $\theta(\pi_{K,n})$ pour racine, et, comme $v_p(\theta(\pi_{K,n}) - \hat{\pi}_{K,n}) \geqslant \frac{1}{p}$, un développement de Taylor en $\theta(\pi_{K,n})$ nous fournit l'inégalité $v_p(P_{K,n}(\hat{\pi}_{K,n})) \geqslant \inf(\frac{1}{p} + v_p(P'_{K,n}(\theta(\pi_{K,n}))), \frac{2}{p})$. Par ailleurs, on a $p^{-n}v_{\mathbf{E}}(P'_K(\pi_K)) = p^{-n}\delta_K < \frac{1}{p(p-1)} \leqslant \frac{1}{p}$, et donc $v_p(P'_{K,n}(\hat{\pi}_{K,n})) = p^{-n}\delta_K < \frac{1}{p}$. On déduit alors du lemme de Hensel l'existence d'une unique solution x dans K_n de l'équation $P_{K,n}(x) = 0$ vérifiant $v_p(x - \hat{\pi}_{K,n}) > v_p(P'_{K,n}(\hat{\pi}_{K,n}))$, et cette solution est donc $\theta(\pi_{K,n})$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 6.7. — *Si $n \geqslant n_0(K)+1$, alors $\pi_{K,n} \in K_n[[t]]$.*

Démonstration. — Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée, on a $\pi_K = \pi$ et

$$\pi_{K,n} = \pi_n = \varepsilon^{(n)} \exp(p^{-n}t) - 1 \in F_n[[t]] \subset K_n[[t]].$$

Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est ramifiée, alors $\pi_{K,n}$ est une racine du polynôme $\varphi^{-n}(P_K)$ qui est à coefficients dans $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_{F'}^+) \subset F'_n[[t]]$ d'après ce qui précède, et comme $\theta(\pi_{K,n})$ est une racine simple de $\theta(\varphi^{-n}(P_K))$ appartenant à K_n, le lemme de Hensel (dans $K_n((t))$) montre que $\varphi^{-n}(P_K)$ a une unique solution dans $K_n[[t]]$ dont l'image par θ est $\theta(\pi_{K,n})$; ceci permet de conclure.

6.3. Le corps $\mathbf{B}^\dagger$ et ses sous-anneaux

On définit des sous-anneaux $\mathbf{A}^{(0,r]}$, $\mathbf{B}^{(0,r]}$, si $r>0$ et $\mathbf{B}^\dagger$ de $\mathbf{B}$ en posant

$$\mathbf{A}^{(0,r]} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}, \quad \mathbf{B}^{(0,r]} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger,$$

anneaux que l'on munit des topologies induites par les topologies respectives de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$. Si on utilise le fait que $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$) est un sous-anneau (resp. un sous-corps) de $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}$), stable par $\mathscr{G}_F$ et φ, on obtient la proposition suivante.

Proposition 6.8. — (i) *$\mathbf{B}^\dagger$ est un corps stable par $\mathscr{G}_F$ et φ.*

(ii) *Si $r>0$, les anneaux $\mathbf{A}^{(0,r]}$ et $\mathbf{B}^{(0,r]}$ sont stables par $\mathscr{G}_F$ et $x \in \mathbf{A}^{(0,r]}$ (resp. $x \in \mathbf{B}^{(0,r]}$) si et seulement si $\varphi(x) \in \mathbf{A}^{(0,p^{-1}r]}$ (resp. $\varphi(x) \in \mathbf{B}^{(0,p^{-1}r]}$),*

Si K est une extension finie de F, on définit des anneaux $\mathbf{A}_K^{(0,r]} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]} = (\mathbf{A}^{(0,r]})^{\mathscr{H}_K}$, si $r>0$ et $\mathbf{B}_K^\dagger = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)^{\mathscr{H}_K}$.

Soit $f_i = \pi_K^{i-1}$ si $1 \leqslant i \leqslant e_{K_\infty}$. Les f_i forment une base de $\mathbf{A}_K$ sur $\mathbf{A}_{F'}$ et on note $(f_i^*)_{1\leqslant i\leqslant e_{K_\infty}}$ la base de $\mathbf{A}_K$ sur $\mathbf{A}_{F'}$ duale de $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant e_{K_\infty}}$ pour la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto T_{K/F'}(xy) = \sum_{\sigma\in\mathscr{H}_{F'}/\mathscr{H}_K} \sigma(xy)$.

Lemme 6.9. — *Si $1 \leqslant i \leqslant e_{K_\infty}$, alors $f_i^* \in P'_K(\pi_K)^{-1}\mathbf{A}_{F'}^+[\pi_K]$.*

Démonstration. — On a $T_{K/F'}(P'_K(\pi_K)^{-1}\pi_K^j) = 0$ (resp. $T_{K/F'}(P'_K(\pi_K)^{-1}\pi_K^j) = 1$) si $j \leqslant e_{K_\infty}-2$ (resp. si $j = e_{K_\infty}-1$). Comme par ailleurs π_K^j est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{A}_{F'}^+$ en les π_K^j, pour $0 \leqslant j \leqslant e_{K_\infty}-1$, ceci permet de montrer que f_i^* est de la forme $P'_K(\pi_K)^{-1}Q_i(\pi_K)$, où $Q_i \in \mathbf{A}_{F'}^+[X]$ est unitaire de degré $e_{K_\infty}-1-i$.

Corollaire 6.10. — *Si $r<r_K$, alors $f_i^* \in \mathbf{A}^{(0,r]}$ et $v^{(0,r]}(f_i^*) \geqslant -v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme précédent et du lemme 6.5.

Corollaire 6.11. — (i) *$\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ est un $\mathbf{A}_F^{(0,r]}$-module libre de rang $[\mathbf{E}_K:\mathbf{E}_F]$, si $r<r_K$.*

(ii) *$\mathbf{B}_K^\dagger$ est une extension de degré $[\mathbf{E}_K:\mathbf{E}_F]$ de $\mathbf{B}_F^\dagger$.*

Démonstration. — Si les e_i, pour $1 \leqslant i \leqslant f_{K_\infty}$, forment une base de $\mathscr{O}_{F'}$ sur $\mathscr{O}_F$, alors les $e_i f'_j$, pour $1 \leqslant i \leqslant f_{K_\infty}$ et $1 \leqslant j \leqslant e_{K_\infty}$, forment une base de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ sur $\mathbf{A}_F^{(0,r]}$ et de $\mathbf{B}_K^\dagger$ sur $\mathbf{B}_F^\dagger$ puisque l'on peut écrire x sous la forme $x = \sum_{j=1}^{e_{K_\infty}} T_{K/F'}(\pi_K^{j-1}x) f_j^*$, et décomposer $T_{K/F'}(\pi_K^{j-1}x)$ dans la base des e_i, $1 \leqslant i \leqslant f_{K_\infty}$.

7. Anneaux imparfaits et séries de Laurent

7.1. L'anneau $\mathbf{A}_K$. — Il résulte de la proposition 4.10 que tout élément de $\mathbf{E}_K$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k \overline{\pi}_K^k$, où les a_k sont des éléments de $k_{F'}$. En relevant en caractéristique 0, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 7.1. — *Tout élément de $\mathbf{A}_K$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \pi_K^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_{F'}$ tendant vers 0 quand k tend vers $-\infty$;*

Démonstration. — Soit $s : \mathbf{E}_K \to \mathbf{A}_K$ la section de la réduction $x \mapsto \overline{x}$ modulo p, donnée par la formule

$$s\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \overline{\pi}_K^k\Big) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} [a_k] \pi_K^k.$$

Si $x \in \mathbf{A}_K$, on définit par récurrence une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{A}_K$ en posant $x_0 = x$ et $x_{n+1} = p^{-1}(x_n - s(\overline{x}_n))$. On a alors $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n s(\overline{x}_n)$.

7.2. L'anneau $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$

Lemme 7.2. — *Si $x \in \mathbf{E}_K$ et $0 < r < r_K$, alors $s(x) \in \mathbf{A}^{(0,r]}$ et $v^{(0,r]}(s(x)) = v_{\mathbf{E}}(x)$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du (i) du lemme 6.5.

Lemme 7.3. — *Si $x \in \mathbf{A}_K$ et $k \in \mathbf{N}$, alors $w_k(\frac{x - s(\overline{x})}{p}) \geqslant \inf(w_{k+1}(x), w_0(x) - \frac{k+1}{r_K})$.*

Démonstration. — On a $w_{k+1}(x - s(\overline{x})) \geqslant \inf(w_{k+1}(x), v_{\mathbf{E}}(\overline{x}) - \frac{k+1}{r_K})$, d'après le lemme précédent, et le lemme suit de ce que $w_0(x) = v_{\mathbf{E}}(\overline{x})$ et $w_k(x) = w_{k+1}(px)$.

Si $x \in \mathbf{A}_K$, définissons par récurrence, une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{A}_K$ en posant $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \frac{x_n - s(\overline{x}_n)}{p}$.

Lemme 7.4. — *Si $n \in \mathbf{N}$, alors $v_{\mathbf{E}}(\overline{x}_n) \geqslant \inf_{0\leqslant i\leqslant n}(w_i(x) - \frac{n-i}{r_K})$.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, $w_k(x_{n+1}) \geqslant \inf(w_{k+1}(x_n), w_0(x_n) - \frac{k+1}{r_K})$. Une récurrence immédiate (sur n) permet alors de montrer que l'on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$w_k(x_n) \geqslant \inf\Big(w_{k+n}(x), \inf_{0\leqslant i\leqslant n-1} w_i(x) - \frac{k+n-i}{r_K}\Big).$$

Le lemme correspond à $k = 0$.

Si $r > 0$ et si L est une extension finie de F, notons $\mathscr{A}_L^{(0,r]}$ l'ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ telles que $v_p(a_k) + kr$ tende vers $+\infty$ quand k tend vers $-\infty$. (on peut aussi voir $\mathscr{A}_L^{(0,r]}$ comme un réseau de l'anneau des fonctions analytiques bornées sur la couronne $0 < v_p(T) \leqslant r$). Si $f \in \mathscr{A}_L^{(0,r]}$, soit $v^{(r)}(f) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k) + kr$; l'application $v^{(r)}$ est une valuation sur $\mathscr{A}_L^{(0,r]}$ pour laquelle cet anneau est complet (exercice facile).

Proposition 7.5. — (i) *Si $r < r_K$, l'application $f \mapsto f(\pi_K)$ est un isomorphisme d'anneaux topologiques de $\mathscr{A}_{F'}^{(0,rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)]}$ sur $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$, et on a $v^{(0,r]}(f(\pi_K)) = \frac{1}{r} v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(f)$.*

(ii) *L'application $f \mapsto f(\pi_K)$ est un isomorphisme sur $\mathbf{B}_K^{(0,r]}$, de l'anneau des fonctions analytiques bornées sur la couronne $0 < v_p(T) \leqslant r$, à coefficients dans F'.*

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence directe du (i). Soit $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k \in \mathscr{A}_{F'}^{(0,rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)]}$. On peut, d'après le lemme 6.5, écrire $a_k \pi_K^k$ sous la forme $p^{v_p(a_k)}[\overline{\pi}_K^k]u$, où u est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$. Donc $v^{(0,r]}(a_k\pi_K^k) = kv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K) + \frac{v_p(a_k)}{r}$, ce qui permet de montrer que la série définissant $f(\pi_K)$ converge dans $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et que $v^{(0,r]}(f(\pi_K)) \geqslant \frac{1}{r} v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(f)$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite construite à partir de x comme au lemme 7.4, et soit f_n définie par $f_n(\pi_K) = s(\overline{x}_n)$, de telle sorte que $x = \sum_{n\in\mathbf{N}} p^n f_n(\pi_K)$. Alors $f_n \in T^{a_n}\mathscr{O}_{F'}[[T]]$, où $a_n = \frac{v_{\mathbf{E}}(\overline{x}_n)}{v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)}$ est, d'après le lemme 7.4, supérieur ou égal à $\frac{1}{v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)} \inf_{i\leqslant n}(w_i(x) + \frac{i-n}{r_K})$. On en déduit la minoration

$$v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(p^n f_n) \geqslant n + a_n r v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K) \geqslant r \inf_{i\leqslant n} \Big(\big(w_i(x) + \frac{i}{r}\big) + (n-i)\big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_K}\big)\Big).$$

Comme $w_i(x) + \frac{i}{r} \to +\infty$, et $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_K} > 0$, cela implique que $v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(p^n f_n) \to +\infty$, et comme $w_i(x) + \frac{i}{r} \geqslant v^{(0,r]}(x)$, pour tout i, on a $v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(p^n f_n) \geqslant r v^{(0,r]}(x)$, pour tout n. On en déduit la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} p^n f_n$ dans $\mathscr{A}_{F'}^{(0,rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)]}$ et, si f désigne la somme de cette série, la minoration $v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(f) \geqslant r v^{(0,r]}(x)$. Ceci permet de conclure.

7.3. L'anneau $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$. — Ce n° est adapté de [**4**, n° 4.1 et n° 4.5]. On définit l'anneau $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ comme l'adhérence de $\mathbf{B}_K^{(0,r]}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$; c'est aussi le complété de $\mathbf{B}_K^{(0,r]}$ pour la famille de semi-valuations $v^{[s,r]}$, $s \in]0, r[$ et la proposition 7.5 se traduit de la manière suivante.

Proposition 7.6. — *Si $r < r_K$, l'application $f \mapsto f(\pi_K)$ induit un isomorphisme d'anneaux de Fréchet de l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $0 < v_p(T) \leqslant rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)$ « à coefficients dans F' » sur $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$.*

Lemme 7.7. — *Soit $q = \pi^{-1}\varphi(\pi)$. Si $r < 1$, alors $v^{(0,r]}(\frac{q}{p} - 1) = \inf(\frac{p}{p-1}, p - \frac{1}{r})$.*

Démonstration. — $\frac{q}{p} - 1 = \sum_{k=2}^{p} p^{-1}\binom{p}{k}\pi^{k-1}$, ce qui permet d'utiliser la proposition 7.5 pour obtenir

$$v^{(0,r]}\Big(\frac{q}{p} - 1\Big) = \frac{1}{r}\Big(\inf_{2\leqslant k\leqslant p} v_p\Big(p^{-1}\binom{p}{k}\Big) + (k-1)\frac{rp}{p-1}\Big),$$

et le résultat (en regardant en $k = 2$ et $k = p$).

Corollaire 7.8. — (i) *Si $i \in \mathbf{N}$ et $r > 0$, alors* $v^{(0,r]}(\frac{\varphi^i(q)}{p} - 1) = \inf(\frac{p^{i+1}}{p-1}, p^i - \frac{1}{r})$.

(ii) *Si $i \in \mathbf{N}$ et $r > s > 0$, alors* $v^{[s,r]}(\frac{\varphi^i(q)}{p} - 1) = \inf(\frac{p^{i+1}}{p-1}, p^i - \frac{1}{s})$.

(iii) *Quand i tend vers $+\infty$, $\frac{\varphi^i(q)}{p}$ tend vers 1 dans $\mathbf{B}_F^{]0,r]}$, quel que soit $r > 0$.*

(iv) *Quand i tend vers $+\infty$, $\frac{p^i t}{\varphi^i(\pi)}$ tend vers 1 dans $\mathbf{B}_F^{]0,r]}$, quel que soit $r > 0$.*

Démonstration. — Le (i) suit du lemme précédent et de la formule $v^{(0,r]}(\varphi^i(x)) = p^i v^{(0,p^i r]}(x)$. Le (ii) est une conséquence du (i) et de la définition de $v^{[s,r]}$. Le (iii) suit du (ii) et de la définition de la topologie de $\mathbf{B}_F^{]0,r]}$, et le (iv) suit du (iii) et de la formule $\frac{p^i t}{\varphi^i(\pi)} = \prod_{n=i+1}^{+\infty} \frac{\varphi^n(q)}{p}$.

Lemme 7.9. — *Si $i \in \mathbf{N}$, alors*

$$\theta\Big(\varphi^{-n}\Big(\varphi^{i-1}(\pi)\cdot\frac{p^i t}{\varphi^i(\pi)}\Big)\Big) = \begin{cases} \varepsilon^{(1)} - 1 & \text{si } n = i, \\ 0 & \text{si } n \neq i. \end{cases}$$

Démonstration. — Évident.

Proposition 7.10. — *Soient $r > 0$ et $n \geqslant n_0(K) + 1$ vérifiant $p^n r \geqslant 1$. Si $(x_i)_{i\geqslant n}$ est une suite d'éléments de K_∞, avec $x_i \in K_i$ pour tout $i \geqslant n$, alors il existe $x \in \mathbf{B}_K^{]0,r]}$ tel que $\theta(\varphi^{-i}(x)) = x_i$ pour tout $i \geqslant n$.*

Démonstration. — Soit $(a_i)_{i\geqslant n}$ une suite d'éléments de $\mathbf{N}$ tendant vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$ et telle que $p^{a_i} x_i \in \mathscr{O}_{K_i}$, pour tout $i \geqslant n$. Soit

$$z_i = (\varepsilon^{(1)} - 1)\cdot p^{a_i} x_i \cdot \Big(\frac{p}{(\varepsilon^{(i)} - 1)^{(p-1)p^{i-1}}}\Big)^{a_i} \in \mathscr{O}_{K_i},$$

et soit $\tilde{z}_i$ élément de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ tel que $\theta(\varphi^{-i}(\tilde{z}_i)) = z_i$ (l'existence d'un tel $\tilde{z}_i$ est assurée par le lemme 6.6). Comme $v^{[s,r]}\big(\frac{\pi^{(p-1)p^{i-1}}}{p}\big)^{a_i} = (p^i - \frac{1}{s})a_i$ (d'après la prop. 7.5) tend, quel que soit $s \in]0, r[$, vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$, comme la suite de terme général $\frac{p^i t}{\varphi^i(\pi)}$ tend vers 1 et donc est bornée, et comme la suite de terme général $\tilde{z}_i$ est bornée, la série

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \varphi^{i-1}(\pi)\cdot\frac{p^i t}{\varphi^i(\pi)}\cdot\big(\frac{\pi^{(p-1)p^{i-1}}}{p}\big)^{a_i}\cdot\tilde{z}_i$$

converge dans $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ vers un élément x qui répond à la question comme on le voit en utilisant le lemme 7.9.

Proposition 7.11. — *Soient $r > 0$ et $n \geqslant n_0(K)+1$ vérifiant $p^n r \geqslant 1$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un élément de $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$:*

(i) $\theta(\varphi^{-i}(x)) = 0$ *quel que soit* $i \geqslant n$;

(ii) $x \in \frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,r]}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est évidente. Pour démontrer l'autre implication commençons par remarquer que la condition $n \geqslant n_0(K)+1$ implique que les $\pi_{K,i}^j$ (resp. les $\theta(\pi_{K,i})^j$), pour $0 \leqslant j \leqslant e_{K_\infty} - 1$, forment une base de $\varphi^{-i}(\mathbf{B}_K^{]0,r]})$ (resp. K_i) sur $\varphi^{-i}(\mathbf{B}_{F'}^{]0,r]})$ (resp. F'_n), ce qui permet de se ramener au cas $K = F'$. Dans ce cas, on peut (prop. 7.6) écrire x sous la forme $f(\pi)$, où f est une fonction analytique sur la couronne $0 < v_p(T) \leqslant \frac{pr}{(p-1)}$. La condition $\theta(\varphi^{-i}(x)) = 0$ se traduit par l'annulation de $f^{\varphi^{-i}}$ (et donc aussi de f) en $\varepsilon^{(i)} - 1$ (et donc aussi en ses conjugués) ; autrement dit, f est divisible par $\frac{(T+1)^{p^i}-1}{(T+1)^{p^{i-1}}-1}$, quel que soit $i \geqslant n$. La fonction $g = \frac{((T+1)^{p^{n-1}}-1)f}{\log(1+T)}$ est donc holomorphe sur la couronne $0 < v_p(T) \leqslant \frac{pr}{(p-1)}$, et on a $x = \frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}g(\pi)$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 7.12. — *Soient $r > 0$ et $n \geqslant n_0(K)+1$ vérifiant $p^n r \geqslant 1$. Alors l'application $x \mapsto (\theta(\varphi^{-i}(x)))_{i\geqslant n}$ induit la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \tfrac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,r]} \longrightarrow \mathbf{B}_K^{]0,r]} \longrightarrow \textstyle\prod_{i\geqslant n} K_i \longrightarrow 0.$$

8. Traces de Tate normalisées

8.1. Sur $\widehat{K}_\infty$. — C'est le cas considéré par Tate [**28**] ; la proposition 8.1 ci-dessous qui sert de modèle à tous les résultats de ce § est, avec la remarque 4.7, l'ingrédient permettant de calculer la cohomologie galoisienne de C. Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $x \in K_\infty$, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $x \in K_{n+k}$ et $\frac{1}{[K_{n+k}:K_n]}\mathrm{Tr}_{K_{n+k}/K_n}(x)$ ne dépend pas du choix de k ; on a donc construit de la sorte une application K_n-linéaire $\mathrm{R}_{K,n} : K_\infty \to K_n$.

Proposition 8.1. — (i) $\mathrm{R}_{K,n}$ *s'étend en une application K_n-linéaire continue de $\widehat{K}_\infty$ sur K_n et on a $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ si $x \in K_n$.*

(ii) $\sigma \circ \mathrm{R}_{K,n} = \mathrm{R}_{K^\sigma,n}$ *si* $\sigma \in \mathscr{G}_F$.

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_{K,n}(x) = x$.

8.2. Sur $\widetilde{\mathbf{E}}_K$. — Soit $I = p^{-\infty}\mathbf{Z} \cap [0,1[$; c'est un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Si $m \in \mathbf{N}$, soit $I_m = \{i \in I \mid v_p(i) \geqslant -m\}$, ce qui fait que I est la réunion croissante pour $m \in \mathbf{N}$ des I_m. Soit aussi $\mathbf{E}_{K,m} = \varphi^{-m}(\mathbf{E}_K)$; c'est un sous-corps de $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{E}_{K,\infty} = \cup_{m\in\mathbf{N}}\mathbf{E}_{K,m}$ est la clôture radicielle de $\mathbf{E}_K$.

Lemme 8.2. — *Si $m \in \mathbf{N}$, les ε^i, pour $i \in I_m$, forment une base de $\mathbf{E}_{F,m}^+$ sur $\mathbf{E}_F^+$.*

Démonstration. — $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$ étant une uniformisante de $\mathbf{E}_F$, tout élément de $\mathbf{E}_F^+$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{\pi}^n = \sum_{r=0}^{p^m-1} (\varepsilon-1)^r \varphi^m(b_r),$$

où les a_n sont des éléments de k_F et $b_r = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{-m}(a_{r+kp^m})\overline{\pi}^k$. On en déduit le fait que les $(\varepsilon-1)^r$ pour $0 \leqslant r \leqslant p^m - 1$ forment une base de $\mathbf{E}_F^+$ sur $\varphi^m(\mathbf{E}_F^+)$ et la matrice faisant passer de $(\varepsilon-1)^r$ aux ε^r étant triangulaire avec des 1 sur la diagonale, il en est de même des ε^r pour $0 \leqslant r \leqslant p^m - 1$. Il n'y a plus qu'à appliquer φ^{-m} pour en déduire le lemme.

Proposition 8.3. — *Soient K une extension finie de F et $c_K = v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}) + v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Alors,*

(i) *tout élément x de $\mathbf{E}_{K,m}$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i\in I_m} \varepsilon^i a_i(x)$, où $a_i(x) \in \mathbf{E}_K$ si $i \in I$, et on a l'encadrement*

$$v_{\mathbf{E}}(x) - c_K < \inf_{i\in I_m} v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) \leqslant v_{\mathbf{E}}(x);$$

(ii) *tout élément x de $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i\in I} \varepsilon^i a_i(x)$, où $(a_i(x))_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{E}_K$ tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies, et on a l'encadrement*

$$v_{\mathbf{E}}(x) - c_K < \inf_{i\in I} v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) \leqslant v_{\mathbf{E}}(x).$$

Démonstration. — Une base de $\mathbf{E}_{F,m}^+$ sur $\mathbf{E}_F^+$ est aussi une base de $\mathbf{E}_{F,m}$ sur $\mathbf{E}_F$; de plus, l'extension $\mathbf{E}_{F,m}/\mathbf{E}_F$ est radicielle alors que l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est séparable ; une base de $\mathbf{E}_{F,m}$ sur $\mathbf{E}_F$ est donc aussi une base de $\mathbf{E}_{K,m}$ sur $\mathbf{E}_K$; on en déduit l'existence et l'unicité de l'écriture.

D'autre part, l'inégalité $\inf_{i\in I_m} v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) \leqslant v_{\mathbf{E}}(x)$ est une évidence. Dans le cas $K = F$, l'autre inégalité est une conséquence des deux remarques suivantes :

(a) $\inf_{i\in I_m} v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) \geqslant 0$ si $v_{\mathbf{E}}(x) \geqslant 0$ (les ε^i forment une base de $\mathbf{E}_{F,m}^+$ sur $\mathbf{E}_F^+$).

(b) $a_i(\overline{\pi}^k x) = \overline{\pi}^k a_i(x)$ si $k \in \mathbf{Z}$ (par unicité de l'écriture).

Dans le cas général, soient $d = d_{K_\infty}$ et $\delta_K = v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$, et soient $(e_1,\dots,e_d)$ une base de $\mathbf{E}_K^+$ sur $\mathbf{E}_F^+$ et $(e_1^*,\dots,e_d^*)$ la base de $\mathbf{E}_K$ sur $\mathbf{E}_F$ duale de $(e_1,\dots,e_d)$ pour la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}(xy)$; les e_i^* forment donc une base de $\mathfrak{d}^{-1}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}$ sur

$\mathbf{E}_F^+$ et, en particulier, on a $v_{\mathbf{E}}(e_i^*) \geqslant -\delta_K$. Si $m \in \mathbf{N}$, alors $(e_1, \ldots, e_d)$ et $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ sont aussi des bases de $\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}$ duale l'une de l'autre pour la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}}(xy)$; on a donc, si $x \in \mathbf{E}_{K,m}$,

$$x = \sum_{k=1}^{d} \mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}}(xe_k) \cdot e_k^* \quad \text{et} \quad a_i(x) = \sum_{k=1}^{d} a_i(\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}}(xe_k)) \cdot e_k^*, \text{ si } i \in I_m,$$

et comme $v_{\mathbf{E}}(\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}}(xe_k)) \geqslant v_{\mathbf{E}}(x)$, on déduit le (i) du cas $K = F$.

Maintenant, $\cup_{m \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_{K,m}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ d'après le (iv) de la proposition 4.10 et l'inégalité $v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) > v_{\mathbf{E}}(x) - c_K$ montre que a_i s'étend par continuité en une application $\mathbf{F}_p$-linéaire continue de $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ dans $\mathbf{E}_K$, ce qui permet de déduire le (ii) du (i) par passage à la limite.

Remarque 8.4. — Si K est une extension non ramifiée de F, le lemme 8.2 montre que l'on $a_i(x) \in \mathbf{E}_K^+$ si $x \in \mathbf{E}_{K,m}^+$; un passage à la limite montre que ceci reste vrai si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}_K^+$.

8.3. Sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K$. — Si $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{A}_{K,m}$ le sous-anneau $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_K)$ de $\widetilde{\mathbf{A}}$. On a donc $\mathbf{A}_{K,m}/p\mathbf{A}_{K,m} = \mathbf{E}_{K,m}$.

Proposition 8.5. — (i) *Si K est une extension finie de F, alors*

(a) *tout élément x de $\mathbf{A}_{K,m}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{i \in I_m} [\varepsilon^i] a_i(x)$, où $a_i(x) \in \mathbf{A}_K$, si $i \in I_m$;*

(b) *tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{i \in I} [\varepsilon^i] a_i(x)$, où $(a_i(x))_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{A}_K$ tendant vers* 0 (pour la topologie faible) *quand i tend vers l'infini.*

(ii) *Si K est une extension non ramifiée de F et si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^+$, alors $a_i(x) \in \mathbf{A}_K^+$ quel que soit $i \in I$.*

Démonstration. — Les trois énoncés se démontrent de la même manière ; commençons par le (i) (b). Soit M le $\mathbf{A}_K$-module des familles $(a_i(x))_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbf{A}_K$ tendant vers 0 quand i tend vers l'infini. Pour démontrer le (i), il s'agit de prouver que l'application $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} [\varepsilon^i] a_i$ est un isomorphisme de M sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K$, ce qu'il suffit de vérifier modulo p puisque les modules considérés sont sans p-torsion et complets pour la topologie p-adique. Le (i) de la proposition 8.3 permet donc de conclure.

Le (i) (a) se démontre en remplaçant I par I_m dans la démonstration ci-dessus et en utilisant le (i) de la proposition 8.3. Le (ii) se démontre en remplaçant $\mathbf{A}_K$ par $\mathbf{A}_K^+$ et en utilisant la remarque 8.4.

Remarque 8.6. — L'unicité de la décomposition entraîne que les $a_i : \widetilde{\mathbf{A}}_K \to \mathbf{A}_K$ sont $\mathbf{A}_K$-linéaires.

Soit $\psi = p^{-1}\varphi^{-1} \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}$; c'est un inverse à gauche de φ qui commute à l'action de $\mathscr{G}_F$ (car φ le fait) et, d'autre part, dans la base $1, [\varepsilon], \ldots, [\varepsilon^{p-1}]$ de $\mathbf{A}$ sur $\varphi(\mathbf{A})$, cet opérateur est donné par la formule

$$\psi\big(\varphi(x_0) + \varphi(x_1)[\varepsilon] + \cdots + \varphi(x_{p-1})[\varepsilon^{p-1}]\big) = x_0.$$

Si $m \in \mathbf{N}$, soit $\mathrm{R}_{K,m} : \widetilde{\mathbf{A}}_K \to \widetilde{\mathbf{A}}_K$ l'application définie par

$$\mathrm{R}_{K,m}(x) = \sum_{i \in I_m} [\varepsilon^i] a_i(x).$$

Lemme 8.7. — *Si $n \geqslant m$ et $x \in \mathbf{A}_{K,n}$, alors $\mathrm{R}_{K,m}(x) = \varphi^{-m}\psi^{n-m}\varphi^n(x)$.*

Démonstration. — Si $j \in \mathbf{Z}$ et $z \in \mathbf{A}_K$, alors $\psi^{n-m}([\varepsilon^j]\varphi^n(z))$ vaut $[\varepsilon^{p^{m-n}j}]\varphi^m(z)$ (resp. 0) si p^{n-m} divise (resp. ne divise pas) j. On en déduit le résultat en utilisant le (i) (a) de la proposition 8.5.

Proposition 8.8. — (i) $\lim_{m \to +\infty} \mathrm{R}_{K,m}(x) = x$.

(ii) *Si $m \in \mathbf{N}$, alors $\mathrm{R}_{K,m} = \varphi^{-m} \circ \mathrm{R}_{K,0} \circ \varphi^m$.*

(iii) *$\mathrm{R}_{K,m}$ est une section $\mathbf{A}_{K,m}$-linéaire continue de l'inclusion de $\mathbf{A}_{K,m}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K$.*

(iv) *Si $\sigma \in \mathscr{G}_F$, alors $\sigma \circ \mathrm{R}_{K,m} = \mathrm{R}_{K^\sigma,m} \circ \sigma$. En particulier, $\mathrm{R}_{K,m}$ commute à l'action de Γ_K.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du (i) (b) de la proposition 8.5. Le (ii) et le (iv) découlent, par continuité, du lemme 8.7 et du fait que φ et ψ commutent à $\mathscr{G}_F$. Finalement, $\mathrm{R}_{K,0} = a_0$ est $\mathbf{A}_K$-linéaire d'après la remarque 8.6 et la $\mathbf{A}_{K,m}$-linéarité de $\mathrm{R}_{K,m}$ découle de la $\mathbf{A}_K$-linéarité de $\mathrm{R}_{K,0}$ et du (ii).

8.4. Sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$. — Si K est une extension finie de F, si $r > 0$ et si $m \in \mathbf{N}$, soit $\mathbf{A}_{K,m}^{(0,r]} = \mathbf{A}_{K,m} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$; on a aussi $\mathbf{A}_{K,m}^{(0,r]} = \varphi^{-m}(\mathbf{A}_K^{(0,p^{-m}r]})$.

Lemme 8.9. — *Si $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(\alpha) \geqslant -\ell v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$, alors on peut écrire $[\alpha]$ de manière unique sous la forme $[\alpha] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}}[\beta_n]$, où $a(n)$ est le plus petit entier $\geqslant \frac{p-1}{p}n$ et $\beta_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que, si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[\alpha_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}$ et si $b \in \mathbf{N}$, alors

$$v^{[0,1]}\Big(\frac{[\overline{\pi}]^b}{p}(x - [\alpha_0])\Big) = \inf_{k \geqslant 0}(bv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + v_{\mathbf{E}}(\alpha_{k+1}) + k) \geqslant bv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 1 + v^{[0,1]}(x).$$

Maintenant, on obtient les β_n du lemme par récurrence, en posant $x_0 = \pi^\ell[\alpha]$, $\beta_n = \overline{x}_n$ et

$$x_{n+1} = \frac{\pi^{a(n+1)-a(n)}}{p}(x_n - [\beta_n]) = \Big(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\Big)^{a(n+1)-a(n)} \frac{[\overline{\pi}]^{a(n+1)-a(n)}}{p}(x_n - [\overline{x}_n]).$$

On déduit de la remarque préliminaire l'inégalité

$$v^{[0,1]}(x_{n+1}) \geqslant (a(n+1)-a(n))v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 1 + v^{[0,1]}(x_n)$$

Par ailleurs, l'hypothèse $v_{\mathbf{E}}(\alpha) \geqslant -\ell v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$ se traduit par $v^{[0,1]}(x_0) \geqslant 0$; on en déduit, par une récurrence immédiate, que $v^{[0,1]}(x_n) \geqslant a(n)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - n$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que $a(n)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - n = a(n)\frac{p}{p-1} - n \geqslant 0$ et donc que $v_{\mathbf{E}}(\beta_n) \geqslant 0$.

Si $r < r_K$, soit $c_K(r) = c_K + \inf(0, \frac{p-1}{r} - p)$. Remarquons que, si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est ramifiée, on a $r_K < \frac{1}{v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})} = \frac{p-1}{p}$ et $c_K(r) = c_K$.

Proposition 8.10. — *Si $r < r_K$ et si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$, alors $a_i(x) \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$ quel que soit $i \in I$ et on a*

$$v^{(0,r]}(a_i(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - c_K(r) \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty} v^{(0,r]}(a_i(x)) = +\infty.$$

Démonstration. — Si $x = 0$, il n'y a rien à démontrer ; nous supposerons donc $x \neq 0$.

• Commençons par traiter le cas où $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée et $x = [\alpha]$, $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}_K$ est un représentant de Teichmüller. Soit $\ell \in \mathbf{Z}$ le plus petit entier tel que $-\ell v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \leqslant v_{\mathbf{E}}(\alpha)$. D'après le lemme 8.9, on peut écrire $[\alpha]$ sous la forme $[\alpha] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}}[\beta_n]$, où les β_n sont éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}_K^+$ (car fixes par $\mathscr{H}_K$ par unicité de l'écriture). On a donc $a_i([\alpha]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}} a_i([\beta_n])$, avec $a_i([\beta_n]) \in \mathbf{A}_K^+$ puisque $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée (cf. (ii) de la prop. 8.5). Maintenant, on a, en écrivant n sous la forme $n = pk + i$, avec $0 \leqslant i \leqslant p-1$ (et donc $a(n) = (p-1)k + i$),

$$v^{(0,r]}\Big(\frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}}\Big) = \frac{n}{r} - (\ell + a(n))\frac{p}{p-1} = pk\Big(\frac{1}{r} - 1\Big) + i\Big(\frac{1}{r} - \frac{p}{p-1}\Big).$$

Comme $r < 1$, la suite de terme général $pk\big(\frac{1}{r} - 1\big) + i\big(\frac{1}{r} - \frac{p}{p-1}\big)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et $0 \leqslant i \leqslant p-1$, et atteint son minimum $\inf(0, \frac{p-1}{r} - p)$ pour $k = 0$ et $i = p-1$ ou $k = i = 0$, ce qui montre que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}} a_i([\beta_n])$ converge dans $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et que sa somme $a_i([\alpha])$ vérifie

$$v^{(0,r]}(a_i([\alpha])) \geqslant -\ell v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + \inf(0, \frac{p-1}{r} - p) \geqslant v^{(0,r]}([\alpha]) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + \inf(0, \frac{p-1}{r} - p).$$

On en déduit le résultat dans le cas considéré.

• Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée, et si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K$, alors la série converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et on a $a_i(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k a_i([x_k])$, ce qui permet d'utiliser ce que l'on vient de démontrer et la convergence uniforme pour conclure.

• Dans le cas général, on a $a_i(x) = \sum_{j=1}^{e_K} a_i(T_{K/F'}(\pi_K^{j-1}x))f_j^*$ et $v^{(0,r]}(T_{K/F'}(\pi_K^{j-1}x)) \geqslant v^{(0,r]}(x)$, ce qui permet d'utiliser le corollaire 6.10 pour conclure.

Corollaire 8.11. — *Si $r > 0$ et si $p^{-n}r < r_K$, alors $\mathrm{R}_{K,n}(x) \in \mathbf{A}_{K,n}^{(0,r]}$, la suite de terme général $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ tend vers x dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ et on a $v^{(0,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - p^{-n}c_K(r)$ si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$.*

Démonstration. — Si $n \geqslant 0$, on a $\mathrm{R}_{K,n}(x) = \varphi^{-n}(\mathrm{R}_{K,0}(\varphi^n(x)))$. Comme $\varphi^n(x) \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-n}r]}$, comme $\mathrm{R}_{K,0} = a_0$, et comme $p^{-n}r < r_K$, la proposition 8.10 montre que l'on a $\mathrm{R}_{K,n}(x) \in \mathbf{A}_{K,n}^{(0,r]}$, et

$$\begin{aligned} v^{(0,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) &= p^{-n}v^{(0,p^{-n}r]}\big(a_0(\varphi^n(x))\big) \\ &\geqslant p^{-n}\big(v^{(0,p^{-n}r]}(\varphi^n(x)) - c_K(r)\big) \geqslant v^{(0,r]}(x) - p^{-n}c_K(r). \end{aligned}$$

Finalement, si $p^{-n_0}r < r_K$ et $n \geqslant n_0$, on a

$$x - \mathrm{R}_{K,n}(x) = \varphi^{-n_0}(\varphi^{n_0}(x) - \mathrm{R}_{K,n-n_0}(\varphi^{n_0}(x))) = \varphi^{-n_0}\Big(\sum_{i \in I - I_{n-n_0}} [\varepsilon^i] a_i(\varphi^{n_0}(x))\Big).$$

La convergence de $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ vers x est donc une conséquence de ce que, d'après la proposition 8.10, $\lim_{i\to\infty} v^{(0,p^{-n_0}r]}(a_i(\varphi^{n_0}(x))) = +\infty$.

8.5. Sur $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$

Proposition 8.12. — *Si $r > 0$ et si $p^{-n}r < r_K$, alors $\mathrm{R}_{K,n} : \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]} \to \mathbf{A}_{K,n}^{(0,r]}$ s'étend par $\mathbf{Q}_p$-linéarité et continuité en une application $\mathrm{R}_{K,n} : \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]} \to \mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]}$, la suite de terme général $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ tend vers x dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$, et on a $v^{[s,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{[s,r]}(x) - c_K(r)$ si $s \in]0,r[$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$.*

Démonstration. — Comme $v^{(0,r]}(p^k x) = v^{(0,r]}(x) + \frac{k}{r}$, on a $v^{(0,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - p^{-n}c_K(r)$ quels que soient r, n vérifiant $p^{-n}r < r_K$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$. En particulier, si $p^{-n}r < r_K$, alors quel que soit $s \in]0,r[$, on a $v^{(0,s]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{(0,s]} - p^{-n}c_K(r)$, et donc

$$\begin{aligned} v^{[s,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) &= \min(v^{(0,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)), v^{(0,s]}(\mathrm{R}_{K,n}(x))) \\ &\geqslant \min(v^{(0,r]}(x) - p^{-n}c_K(r), v^{(0,s]} - p^{-n}c_K(r)) = v^{[s,r]}(x) - p^{-n}c_K(r). \end{aligned}$$

Comme $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ pour la topologie définie par les $v^{[s,r]}$, $s \in]0,r[$, cela montre que $\mathrm{R}_{K,n}$ s'étend par continuité en une application $\mathrm{R}_{K,n} : \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]} \to \mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]}$ vérifiant l'inégalité $v^{[s,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{[s,r]}(x) - c_K(r)$ si $s \in]0,r[$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$.

Il reste à montrer que $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ tend vers x dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$, et il s'agit de montrer que, quels que soient $s \in]0,r[$ et $M \geqslant 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $v^{[s,r]}(x - \mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant M$ si $n \geqslant n_0$. Par densité, il existe $y \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$ tel que l'on ait $v^{[s,r]}(x - y) \geqslant M + c_K(r)$.

Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $z = p^k y \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$. D'après le corollaire 8.11, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $v^{(0,r]}(z - \mathrm{R}_{K,n}(z)) \geqslant M + \frac{r}{s}$ si $n \geqslant n_0$, et on a alors

$$v^{(0,r]}(y - \mathrm{R}_{K,n}(y)) = v^{(0,r]}(z - \mathrm{R}_{K,n}(z)) - \frac{k}{r} \geqslant M,$$
$$v^{(0,s]}(y - \mathrm{R}_{K,n}(y)) = v^{(0,s]}(z - \mathrm{R}_{K,n}(z)) - \frac{k}{s} \geqslant v^{(0,r]}(z - \mathrm{R}_{K,n}(z)) - \frac{k}{s} \geqslant M,$$

et donc $v^{[s,r]}(y - \mathrm{R}_{K,n}(y)) \geqslant M$ si $n \geqslant n_0$. Pour conclure, il suffit alors d'écrire $x - \mathrm{R}_{K,n}(x)$ sous la forme $(x - y) - \mathrm{R}_{K,n}(x - y) + (y - \mathrm{R}_{K,n}(y))$.

9. Action de Γ_K

9.1. Invariants

Proposition 9.1. — *Si $\gamma \in \Gamma_K$ est d'ordre infini, alors $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} = \widetilde{\mathbf{E}}_K^{\gamma=1} = k_{F'}^{\gamma=1}$ et $\mathbf{A}_K^{\gamma=1} = \widetilde{\mathbf{A}}_K^{\gamma=1} = \mathscr{O}_{F'}^{\gamma=1}$.*

Démonstration. — Soit $\kappa = k_{F'}^{\gamma=1}$. Si $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} \neq \kappa$, alors $\mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ contient un élément x vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x) > 0$. Il contient donc aussi le sous-corps $\kappa((x))$ de $\mathbf{E}_K$, ce qui implique que $\mathbf{E}_K$ est une extension finie de $\mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ et que, si $z \in \mathbf{E}_K$, l'ensemble des valeurs prises par $\gamma^k(z)$, $k \in \mathbf{Z}$, est fini (de cardinal $\leqslant [\mathbf{E}_K : \mathbf{E}_K^{\gamma=1}]$). Prendre $z = \varepsilon$ conduisant à une contradiction, c'est donc que $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} = \kappa$.

Maintenant, si $z \in \widetilde{\mathbf{E}}_K^{\gamma=1}$, alors $\varphi^n(\mathrm{R}_{K,n}(z)) \in \mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. D'après ce qui précède, ceci implique $\mathrm{R}_{K,n}(z) \in \kappa$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et $z = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{R}_{K,n}(z) \in \kappa$, et donc $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} = \widetilde{\mathbf{E}}_K^{\gamma=1} = \kappa$.

On en déduit les égalités $\mathbf{A}_K^{\gamma=1} = \widetilde{\mathbf{A}}_K^{\gamma=1} = \mathscr{O}_{F'}^{\gamma=1}$ en réduisant modulo p, puis modulo p^2 etc., ce qui permet de conclure.

9.2. Le Γ_K-module $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$.

— Soit $\delta_K = v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$.

Lemme 9.2. — *Si $\gamma \in \Gamma_K$ vérifie $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$, alors*

$$v_{\mathbf{E}}(\gamma(\overline{\pi}_K) - \overline{\pi}_K) = p^{n(\gamma)} v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - \delta_K.$$

Démonstration. — Soit $n = n(\gamma)$. Comme $n \geqslant n_0(K)$, l'extension K_{n+1}/K_n est cyclique de degré p (lemme 4.2), et on a $v_p(\mathfrak{d}_{K_{n+1}/K_n}) = (p-1)v_p(\gamma(\omega_{n+1}) - \omega_{n+1})$ quelle que soit l'uniformisante ω_{n+1} de K_{n+1}. On peut en particulier prendre un relèvement $\hat{\pi}_{K,n+1}$ de $\overline{\pi}_{K,n+1}$ pour ω_{n+1}, ce qui nous donne, utilisant la formule

$v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) = p^{-n}\delta_K$ de la proposition 4.12,

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{E}}(\gamma(\overline{\pi}_K) - \overline{\pi}_K) =& p^{n+1} v_p(\gamma(\hat{\pi}_{K,n+1}) - \hat{\pi}_{K,n+1}) \\ =& p^{n+1} \cdot \frac{1}{p-1} v_p(\mathfrak{d}_{K_{n+1}/K_n}) \\ =& p^{n+1} \cdot \frac{1}{p-1}\big(v_p(\mathfrak{d}_{K_{n+1}/F_{n+1}}) + v_p(\mathfrak{d}_{F_{n+1}/F_n}) - v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})\big) \\ =& p^{n+1} \cdot \frac{1}{p-1}\big(1 + (p^{-(n+1)} - p^{-n})\delta_K\big) = p^n \frac{p}{p-1} - \delta_K, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Lemme 9.3. — *Si $m \geqslant 1$, si $u \in \mathbf{Z}_p^*$ et si $r < p^{-m}$, alors $\frac{[\varepsilon]^{p^m u}-1}{[\overline{\pi}]^{p^m}}$ est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.*

Démonstration. — On a

$$\frac{[\varepsilon]^{p^m u} - 1}{[\overline{\pi}]^{p^m}} = \varphi^m\Big(\frac{(1+\pi)^u - 1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\Big),$$

et comme $\frac{(1+\pi)^u-1}{\pi}$ est une unité de $\mathbf{Z}_p[[\pi]]$ puisque $u \in \mathbf{Z}_p^*$, le lemme 6.2 permet de conclure.

Lemme 9.4. — *Si $\gamma \in \Gamma_K$ vérifie $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$, et si $r < \inf(r_K, p^{-n(\gamma)})$, alors*

$$v^{(0,r]}(\gamma(\pi_K) - \pi_K) = p^{n(\gamma)} v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - \delta_K.$$

Démonstration. — Soit Q le polynôme obtenu en appliquant γ aux coefficients de P_K. On peut alors écrire $Q - P_K$ sous la forme $(\gamma(\pi) - \pi)R$, où $R \in \mathbf{A}_F^+[X]$. Comme $\overline{P}_K$ est un polynôme d'Eisenstein, le coefficient constant de R est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_F^+$ (sa réduction modulo p est de valuation 0) et $R(\gamma(\pi_K))$ est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ si $r < r_K$.

D'autre part, on a $Q(\gamma(\pi_K)) = 0$, ce que l'on peut traduire sous la forme

$$(\gamma(\pi) - \pi)R(\gamma(\pi_K)) = -(\gamma(\pi_K) - \pi_K)\frac{P_K(\gamma(\pi_K)) - P_K(\pi_K)}{\gamma(\pi_K) - \pi_K}.$$

Soit $\beta = \frac{P_K(\gamma(\pi_K))-P_K(\pi_K)}{\gamma(\pi_K)-\pi_K}$; c'est un polynôme en π_K et $\gamma(\pi_K)$, à coefficients dans $\mathbf{A}_F^+$; on a donc $w_k(\beta) \geqslant -(2k-1)\delta_K$ d'après le lemme 6.4. Comme $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$ et $\delta_K < \frac{1}{p-1}p^{n_0(K)}$, le lemme 9.2 montre que $v_{\mathbf{E}}(\gamma(\overline{\pi}_K) - \overline{\pi}_K)) > \delta_K$; on en déduit l'égalité $w_0(\beta) = v_{\mathbf{E}}(\overline{\beta}) = v_{\mathbf{E}}(P'_K(\overline{\pi}_K)) = \delta_K$. Ceci implique (lemme 6.5) que $[P'_K(\overline{\pi}_K)]^{-1}\beta$ est, pour tout $r < r_K$, une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$, et donc que $\gamma(\pi_K) - \pi_K$ est, à multiplication près par une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$, égal à $[P'_K(\overline{\pi}_K)]^{-1}(\gamma(\pi) - \pi)$. Comme $\gamma(\pi) - \pi = [\varepsilon]([\varepsilon]^{p^{n(\gamma)}u} - 1)$, où $u = p^{-n(\gamma)}(\chi(\gamma) - 1) \in \mathbf{Z}_p^*$, le lemme 9.3 permet de conclure.

Corollaire 9.5. — *Si K est une extension finie de F, si $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$, si $r < \inf(r_K, p^{-n(\gamma)})$ et si $x \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$, alors*

$$v^{(0,r]}((1-\gamma)(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) + p^{n(\gamma)} v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - c_K.$$

Démonstration. — D'après la proposition 7.5, on peut écrire x sous la forme $f(\pi_K)$, avec $f(T) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n$ et $v^{(0,r]}(x) = \inf_{n\in\mathbf{Z}} \left(n v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K) - \frac{v_p(a_n)}{r}\right)$. On a donc

$$\gamma(x) - x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\pi_K)}{k!} (\gamma(\pi_K) - \pi_k)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\pi_K)\cdot \pi_K^k}{k!} \Big(\frac{\gamma(\pi_K)}{\pi_K} - 1\Big)^k.$$

Par ailleurs, $\frac{f^{(k)}(\pi_K)\,\pi_K^k}{k!} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \binom{n}{k} a_n \pi_K^n$ vérifie $v^{(0,r]}(\frac{f^{(k)}(\pi_K)\cdot\pi_K^k}{k!}) \geqslant v^{(0,r]}(f(\pi_K))$. On en déduit la minoration $v^{(0,r]}(\gamma(x)-x) \geqslant v^{(0,r]}(x) + v^{(0,r]}(\frac{\gamma(\pi_K)}{\pi_K} - 1)$ et le lemme 9.4 permet de conclure (en utilisant la majoration $\delta_K + v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K) \leqslant c_K = \delta + v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$).

9.3. Le Γ_K-module $\left(\mathbf{A}_K^{(0,r]}\right)^{\psi=0}$. — Les résultats qui suivent sont des raffinements de résultats de [**22, 7**].

Proposition 9.6. — *Si $\gamma \in \Gamma_K - \{1\}$ vérifie $\chi(\gamma) \in 1 + 2p\mathbf{Z}_p$ et si $r < \inf(p^{-1} r_K, p^{-n(\gamma)})$, alors $1-\gamma$ admet un inverse sur $(\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$ et il existe $c(r, K, n(\gamma))$ tel que l'on ait*

$$v^{(0,r]}((1-\gamma)^{-1}\cdot x) \geqslant v^{(0,r]}(x) - c(r, K, n(\gamma)),$$

si $x \in (\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$.

Démonstration. — Commençons par remarquer que, si $\gamma \in \Gamma_K$, si $k \in \mathbf{N}$ et si $(1-\gamma^k)$ est inversible, alors $(1-\gamma)$ est inversible d'inverse $(1+\gamma+\cdots+\gamma^{k-1})(1-\gamma^k)^{-1}$. D'autre part, $n(\gamma^{(p-1)p^n}) \geqslant n(\gamma) + n$. Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer l'inversibilité de $(1-\gamma)$ et l'existence de $c(r, K, n(\gamma))$ pour $n(\gamma)$ assez grand.

Écrivons $\chi(\gamma)$ sous la forme $1+p^m u$, avec $m = n(\gamma)$. Tout élément z de $\mathbf{A}_K^{\psi=0}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^{p-1} [\varepsilon]^i \varphi(z_i)$, où $z_i = a_{i/p}(\varphi^{-1}(z)) \in \mathbf{A}_K$. La proposition 8.10 montre que, si $z \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$, alors $\varphi(z_i) \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et $v^{(0,r]}(\varphi(z_i)) \geqslant v^{(0,r]}(z) - pc_K(r)$. Comme $\pi^{-p^m}(1-[\varepsilon]^{p^m u})$ est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ d'après le lemme 9.3, ceci nous permet de définir une bijection $f_\gamma : (\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0} \to (\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$ par la formule

$$f_\gamma\Big(\sum_{i=1}^{p-1} [\varepsilon]^i \varphi(z_i)\Big) = -\sum_{i=1}^{p-1} [\varepsilon]^i \frac{\varphi(z_i)}{1-[\varepsilon]^{p^m i u}},$$

et on a $v^{(0,r]}(f_\gamma(z)) \geqslant v^{(0,r]}(z) - pc_K(r) - p^m v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Un petit calcul utilisant l'identité $\gamma([\varepsilon]^i) = [\varepsilon]^i [\varepsilon]^{p^m i u}$ montre que l'on a

$$z - f_\gamma((1-\gamma)\cdot z) = \sum_{i=1}^{p-1} [\varepsilon]^i \frac{\varphi((1-\gamma)\cdot z_i)}{[\varepsilon]^{-p^m i u} - 1}.$$

Par ailleurs, comme $z_i \in \mathbf{A}^{(0,pr]}$ et $pr < r_K$, on a $v^{(0,pr]}((1-\gamma)(z_i)) \geqslant v^{(0,pr]}(z_i) + p^m v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - c_K$ d'après le corollaire 9.5, et donc

$$\begin{aligned} v^{(0,r]}(\varphi((1-\gamma)\cdot z_i)) = pv^{(0,pr]}((1-\gamma)\cdot z_i) &\geqslant v^{(0,r]}(\varphi(z_i)) + p^{m+1}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - pc_K \\ &\geqslant v^{(0,r]}(z) + p^{m+1}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 2pc_K(r). \end{aligned}$$

On en tire l'inégalité

$$v^{(0,r]}(z - f_\gamma((1-\gamma)\cdot z)) \geqslant v^{(0,r]}(z) + (p^{m+1} - p^m)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 2pc_K(r).$$

Tout ceci permet de montrer que si $(p^{m+1} - p^m)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 2pc_K(r) > 0$ et si $y \in (\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$, l'application $x \mapsto g_y(x) = x - f_\gamma((1-\gamma)\cdot x - y)$ est contractante sur $(\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$; elle y possède donc un unique point fixe z qui vérifie de plus, $v^{(0,r]}(z) \geqslant v^{(0,r]}(f_\gamma(y)) \geqslant v^{(0,r]}(y) - pc_K - p^m v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Ce point fixe est l'unique (car f_γ est bijective) solution de l'équation $(1-\gamma)\cdot z = y$ appartenant à $(\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$.

Remarque 9.7. — L'inégalité $(p^{m+1} - p^m)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 2pc_K(r) > 0$ est équivalente à $p^m > 2c_K(r)$; on a donc démontré en passant que, si $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$ et si $p^{n(\gamma)} > 2c_K(r)$, on peut prendre $c(r, K, n(\gamma)) = p^{n(\gamma)}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + pc_K(r)$.

9.4. Décomposition de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$. — Si $m \geqslant 1$, soit $\mathrm{R}^*_{K,m} = \mathrm{R}_{K,m} - \mathrm{R}_{K,m-1}$.

Lemme 9.8. — $\mathrm{R}^*_{K,m}(x) \in \varphi^{-m}(\mathbf{A}_K^{\psi=0})$ *si* $m \geqslant 1$ *et* $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K$.

Démonstration. — On a $\mathrm{R}^*_{K,m}(x) = \sum_{i \in I^*_m} a_i(x)[\varepsilon^i]$, où $I^*_m = \{i \in I,\ v_p(i) = -m\}$. On conclut en remarquant que, si $i \in I^*_m$ et j est le reste de la division de $p^m i$ par p, on a $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $\varphi^m(a_i(x)[\varepsilon^i]) \in [\varepsilon]^j \varphi(\mathbf{A}_K) \subset \mathbf{A}_K^{\psi=0}$.

Soit $X_{K,n}^{(0,r]}$ l'image de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ par $1 - \mathrm{R}_{K,n}$.

Proposition 9.9. — *Si* $r > 0$, *si* $p^{-n}r < \inf(r_K, p^{1-n(\gamma)})$, *et si* $\gamma \in \Gamma_K$ *vérifie* $n(\gamma) \leqslant n$, *alors* $\gamma - 1$ *est inversible sur* $X_{K,n}^{(0,r]}$, *et il existe* $c'(r, K, n(\gamma))$ *tel que*

$$v^{(0,r]}((\gamma-1)^{-1}(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - p^{-n}c'(r, K, n(\gamma)),$$

si $x \in X_{K,n}^{(0,r]}$. *De plus, si* $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$ *et* $p^{n(\gamma)} > 2c_K(r)$, *on peut prendre* $c'(r, K, n(\gamma)) = p^{n(\gamma)-1}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + 2c_K(r)$.

Démonstration. — Commençons par constater que $\gamma - 1$ est injectif sur $X_{K,n}^{(0,r]}$ d'après la proposition 9.1. Si $x \in X_{K,n}^{(0,r]}$, on a $\mathrm{R}_{K,n}(x) = 0$; on peut écrire x sous la forme $x = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathrm{R}^*_{K,i}(x)$, et on a $v^{(0,r]}(\mathrm{R}^*_{K,i}(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - p^{1-i}c_K(r)$ d'après le corollaire 8.11.

D'autre part, $\varphi^i(\mathrm{R}^*_{K,i}(x)) \in (\mathbf{A}^{(0,p^{-i}r]})^{\psi=0}$ d'après le lemme 9.8, et la proposition 9.6 montre qu'il existe $z_i \in (\mathbf{A}^{(0,p^{-i}r]})^{\psi=0}$ tel que l'on ait

$$\varphi^i(\mathrm{R}^*_{K,i}(x)) = (\gamma-1)z_i \quad \text{et} \quad v^{(0,p^{-i}r]}(z_i) \geqslant p^i v^{(0,r]}(\mathrm{R}^*_{K,i}(x)) - c(p^{-i}r, K, n(\gamma)).$$

On a alors $v^{(0,r]}(\varphi^{-i}(z_i)) \geqslant v^{(0,r]}(\mathrm{R}^*_{K,i}(x)) - p^{-i}c(p^{-i}r, K, n(\gamma))$. Comme, d'après la rem. 9.7, $p^{-i}c(p^{-i}r, K, n(\gamma))$ est majoré indépendamment de i (cf. rem. 9.7), et comme la suite de terme général $\mathrm{R}^*_{K,i}(x)$ tend vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$, il en est de même de la suite de terme général $\varphi^{-i}(z_i)$. L'élément $z = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \varphi^{-i}(z_i)$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ vérifie $(\gamma-1)z = x$ par construction et on a

$$v^{(0,r]}(z) \geqslant \inf_{i\geqslant n+1} v^{(0,r]}(\varphi^{-i}(z_i)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - \sup_{i\geqslant n+1} \bigl(p^{1-i}c_K(r) + p^{-i}c(p^{-i}r, K, n(\gamma))\bigr).$$

Ceci permet de conclure avec

$$c'(r, K, n(\gamma)) = \sup_{n\geqslant n(\gamma)} \sup_{i\geqslant n+1} p^{n-i}\bigl(pc_K(p^{-i}r) + c(p^{-i}r, K, n(\gamma))\bigr).$$

Le maximum est atteint pour $n = n(\gamma)$ et $i = n+1$ (du moins si $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$ et $p^{n(\gamma)} > 2c_K(r)$; d'où la formule pour $c'(r, K, n(\gamma))$ dans ce cas particulier).

9.5. Décomposition de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$. — Soit $X_{K,n}^{]0,r]}$ l'image de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ par $1 - \mathrm{R}_{K,n}$. On déduit de la proposition 9.9, par les mêmes arguments permettant de déduire la proposition 8.11 de la proposition 8.12, le résultat suivant :

Proposition 9.10. — *Si $r > 0$, si $p^{-n}r < r_K$, et si $\gamma \in \Gamma_K$ vérifie $n(\gamma) \leqslant n$, alors $\gamma - 1$ est inversible sur $X_{K,n}^{]0,r]}$, et on a $v^{[s,r]}((\gamma-1)^{-1}\cdot x) \geqslant v^{[s,r]}(x) - p^{-n}c'(r, K, n(\gamma))$ si $x \in X_{K,n}^{]0,r]}$ et $s \in]0, r[$.*

10. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine

10.1. Descente presque étale

Lemme 10.1. — *Soit $r > 0$ et soient $L \subset M$ deux extensions finies de F. Alors, quel que soit $\delta > 0$, il existe $\alpha \in \widetilde{\mathbf{A}}_M^{(0,r]}$ vérifiant $v^{(0,r]}(\alpha) \geqslant -\delta$ et $\sum_{\sigma\in\mathscr{H}_L/\mathscr{H}_M} \sigma(\alpha) = 1$.*

Démonstration. — Notons $\mathrm{T}_{M/L}$ l'opérateur $\sum_{\sigma\in\mathscr{H}_L/\mathscr{H}_M} \sigma$; cet opérateur coïncide avec $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{E}}_M/\widetilde{\mathbf{E}}_L}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}_M$. L'extension $\widetilde{\mathbf{E}}_M/\widetilde{\mathbf{E}}_L$ étant séparable, il existe $\beta \in \widetilde{\mathbf{E}}_M$ vérifiant $\mathrm{T}_{M/L}(\beta) = 1$. On a aussi $\mathrm{T}_{M/L}(\varphi^{-n}(\beta)) = 1$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et, comme $v_{\mathbf{E}}(\varphi^{-n}(\beta)) = p^{-n}v_{\mathbf{E}}(\beta)$, on peut supposer $v_{\mathbf{E}}(\beta) > \sup(-\frac{1}{r}, -\delta)$.

On a alors $\mathrm{T}_{M/L}([\beta]) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} p^k[x_k]$, avec $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant v_{\mathbf{E}}(\beta) > -\frac{k}{r}$, et donc $\mathrm{T}_{M/L}([\beta])$ est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}_L^{(0,r]}$. L'élément $\alpha = (\mathrm{T}_{M/L}([\beta]))^{-1}[\beta]$ vérifie, par construction, $\mathrm{T}_{M/L}(\alpha) = 1$, et on a $v^{(0,r]}(\alpha) = v^{(0,r]}([\beta]) = v_{\mathbf{E}}(\beta) \geqslant -\delta$, ce qui permet de conclure.

Proposition 10.2. — *Si K est une extension finie de F, alors $H^1(\mathscr{H}_K, \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}) = 0$.*

Démonstration. — Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu sur $\mathscr{H}_K$, à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $]0,r]$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Nous allons construire par récurrence sur $n \geqslant -1$ une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $v^{[s_j,r]}(c_\sigma - (1-\sigma)\cdot c_n) \geqslant n$ quels que soient $\sigma \in \mathscr{H}_K$ et $j \leqslant n$;

(ii) $v^{[s_j,r]}(c_n - c_{n-1}) \geqslant n-2$ si $j \leqslant n-1$;

ceci permettra de conclure car, la condition (ii) ci-dessus assure que la suite de terme général c_n converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ vers une limite $c \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, et la condition (i) nous donne $v^{[s_j,r]}(c_\sigma - (1-\sigma)\cdot c) = +\infty$ quels que soient $\sigma \in \mathscr{H}_K$ et $j \in \mathbf{N}$. On a donc $c_\sigma = (1-\sigma)\cdot c$, ce qui montre que le cocycle $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un cobord, ce que l'on cherchait à obtenir.

Revenons à la construction des c_n ; il n'y a rien à faire si $n = -1$. Supposons donc c_n construit ; le cocycle $\sigma \mapsto c_{n,\sigma} = c_\sigma - (1-\sigma)\cdot c_n$ vérifie donc la condition $v^{[s_j,r]}(c_{n,\sigma}) \geqslant n$ quels que soient $\sigma \in \mathscr{H}_K$ et $j \leqslant n$. Soit L une extension finie de K telle que $v^{[s_j,r]}(c_{n,\sigma}) \geqslant n+2$ si $j \leqslant n+1$ et $\sigma \in \mathscr{H}_L$ (l'existence d'une telle extension est assurée par la continuité du cocycle $\sigma \mapsto c_{n,\sigma}$). Soit $\alpha \in \widetilde{\mathbf{A}}_L^{(0,r]}$ vérifiant $v^{(0,r]}(\alpha) \geqslant -1$ et $\mathrm{T}_{L/K}(\alpha) = 1$ (l'existence d'un tel α est assurée par le lemme 10.1). Si $S \subset \mathscr{H}_K$ est un système de représentants de $\mathscr{H}_K/\mathscr{H}_L$, soit $c_S = \sum_{\tau\in S} \tau(\alpha)c_{n,\tau}$. Soit S' un autre système de représentants de $\mathscr{H}_K/\mathscr{H}_L$. Si $\sigma_1,\dots,\sigma_d$ sont les éléments de S, on peut, quitte à renuméroter les éléments $\sigma'_1,\dots,\sigma'_d$ de S', trouver $\tau_1,\dots,\tau_d \in \mathscr{H}_L$ tels que l'on ait $\sigma'_i = \sigma_i\tau_i$ si $1 \leqslant i \leqslant d$; on a alors

$$c_{S'} = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i\tau_i(\alpha)c_{n,\sigma_i\tau_i} = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(\alpha)c_{n,\sigma_i\tau_i} = \\ = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(\alpha)(\sigma_i(c_{n,\tau_i}) + c_{\sigma_i}) = c_S + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(\alpha c_{n,\tau_i}).$$

On en déduit, en utilisant le fait que $\tau_i \in \mathscr{H}_L$ et la définition de L, l'inégalité $v^{[s_j,r]}(c_S - c_{S'}) \geqslant n+1$ si $j \leqslant n+1$.

Maintenant, un petit calcul montre que $c_{n,\sigma} - (1-\sigma)c_S = c_{\sigma S} - c_S$, et comme σS est un système de représentants de $\mathscr{H}_K/\mathscr{H}_L$, on voit que $c_{n+1} = c_n + c_S$ répond à la question, quel que soit le choix de S.

Corollaire 10.3. — *Si $r > 0$, l'application d'inflation induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]})$ sur $H^1(\mathscr{G}_K, \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})$.*

Démonstration. — Le terme suivant dans la suite exacte d'inflation-restriction est nul d'après la proposition 10.2.

10.2. Décomplétion

Proposition 10.4. — *Si $n \geqslant n_0(K)$ et $p^{-n}r < r_K$, alors l'inclusion de $\mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, \mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]})$ sur $H^1(\Gamma_K, \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]})$.*

Démonstration. — On a $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]} = \mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]} \oplus X_{K,n}^{]0,r]}$, et il s'agit de prouver que $H^1(\Gamma_K, X_{K,n}^{]0,r]}) = 0$. Soit donc $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu sur Γ_K à valeurs dans $X_{K,n}^{]0,r]}$, et soit $\gamma \in \Gamma_K$ vérifiant $n(\gamma) \leqslant n$ (l'existence d'un tel γ est assuré par l'hypothèse $n \geqslant n_0(K)$ car Γ_K contient $1+p^n\mathbf{Z}_p$ d'après le lemme 4.2). Alors, d'après la proposition 9.9, il existe $c \in X_{K,n}^{]0,r]}$ tel que l'on ait $c_\gamma = (\gamma - 1)\cdot c$. Le cocycle $\sigma \mapsto c'_\sigma = c_\sigma - (\sigma - 1)\cdot c$ est alors trivial sur le sous-groupe Γ de Γ_K engendré topologiquement par Γ ; il provient donc par inflation d'un cocycle sur Γ_K/Γ à valeurs dans $(X_{K,n}^{]0,r]})^\Gamma$, et ce dernier module est nul puisque $\gamma - 1$ est inversible sur $X_{K,n}^{]0,r]}$. Ceci permet de conclure.

10.3. Cocycles se trivialisant dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — Les techniques de descente presque étale et de décomplétion ont été introduites par Tate [**28**] pour calculer la cohomologie galoisienne de C ; elles lui ont permis de démontrer :

(i) $H^1(\mathscr{H}_K, C) = 0$ (et donc $H^1(\mathscr{H}_K, C(k)) = 0$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$) ;

(ii) l'application $\mathrm{R}_{K,n} : \widehat{K}_\infty \to K_n$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, \widehat{K}_\infty(k))$ sur $H^1(\Gamma_K, K_n(k))$ quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$;

(iii) $H^1(\Gamma_K, K_n(k)) = 0$ si $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$ et l'application qui, à $c \in K$, associe le cocycle $\sigma \mapsto c \log \chi(\sigma)$, induit un isomorphisme de K sur $H^1(\Gamma_K, K_n)$.

Par dévissage, on en déduit :

(iv) $H^1(\mathscr{H}_K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) = 0$;

(v) $\theta : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K} \to \widehat{K}_\infty$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K})$ sur $H^1(\Gamma_K, \widehat{K}_\infty)$;

(vi) $\mathrm{R}_{K,n} \circ \theta : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K} \to K_n$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K})$ sur $H^1(\Gamma_K, K_n)$.

Proposition 10.5. — *Si $r > 0$ et si $n \geqslant n_0(K) + 1$ vérifie $p^n r > 1$, l'application $x \mapsto (\varphi^{-i}(x))_{i \geqslant n}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ dans $\prod_{i \geqslant n} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ induit la suite exacte*

$$H^1(\Gamma_K, \tfrac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,r]}) \longrightarrow H^1(\Gamma_K, \mathbf{B}_K^{]0,r]}) \longrightarrow \textstyle\prod_{i \geqslant n} H^1(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K}) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Si on utilise ce qui précède pour réécrire $\prod_{i \geqslant n} H^1(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K})$ sous la forme $\prod_{i \geqslant n} H^1(\Gamma_K, K_i)$, l'exactitude de la suite de la proposition s'obtient à partir de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tfrac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,r]} \longrightarrow \mathbf{B}_K^{]0,r]} \longrightarrow \textstyle\prod_{i\geqslant n} K_i \longrightarrow 0$$

du corollaire 7.12.

10.4. Cohomologie de $t\mathbf{B}_K^{]0,r]}$. — Le calcul de la cohomologie de $t\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ (ou plutôt de son image dans $H^1(\Gamma_K, \mathbf{B}_K^{]0,r]})$) est essentiellement dû à Berger [**3**, n° IV.2]. Nous le reproduisons ci-dessous pour la commodité du lecteur.

Soit $\Omega_K^{]0,r]}$ le module des différentielles continues de $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ sur F' ; c'est un $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module de rang 1 engendré par $d\pi_K$, muni naturellement d'une action semi-linéaire de Γ_K, $\gamma \in \Gamma_K$ agissant sur $a \cdot db$ par $\gamma(a \cdot db) = \gamma(a) \cdot d(\gamma(b))$. On dispose d'une application résidu $\mathrm{Res} : \Omega_K^{]0,r]} \to F'$ envoyant $(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \pi_K^k) d\pi_K$ sur $\frac{a_{-1}}{e_{K_\infty}}$; cette application ne dépend pas du choix de π_K, ce qui permet de montrer qu'elle commute à l'action de Γ_K ; elle ne dépend pas non plus du choix de K grâce au facteur de normalisation $\frac{1}{e_{K_\infty}}$.

Notons ∂ la dérivation $(1+\pi)\frac{d}{d\pi}$ de $\mathbf{A}_F^+ = \mathscr{O}_F[[\pi]]$. Cette dérivation s'étend (de manière unique) en une dérivation continue de $\mathbf{A}_F^{(0,r]}$ et $\mathbf{B}_F^{]0,r]}$ quels que soit $r > 0$. Par ailleurs, si K est une extension finie de F et $r < r_K$, on a $\mathbf{A}_K^{(0,r]} = \mathbf{A}_F^{(0,r]}[\pi_K]$ et $\mathbf{B}_K^{]0,r]} = \mathbf{B}_F^{]0,r]}[\pi_K]$ si $r < r_K$, et comme $P'_K(\pi_K)$ est inversible dans $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ si $r < r_K$ (cf. lemme 6.5), la dérivation ∂ s'étend de manière unique en une dérivation de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$.

Comme Γ_K agit continûment sur $\overline{\pi}_K$, il existe un sous-groupe ouvert Γ'_K de Γ_K tel que l'on ait $v_{\mathbf{E}}(\gamma(\overline{\pi}_K) - \overline{\pi}_K) > v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)$ si $\gamma \in \Gamma'_K$. On a alors $v^{(0,r]}(\gamma(\pi_K) - \pi_K) > v^{(0,r]}(\pi_K)$ quel que soit $r \in]0, r_K[$, ce qui permet de montrer que, si $\gamma \in \Gamma'_K$, si $x \in \mathbf{B}_K^{]0,r]}$ et si $r \in]0, r_K[$, alors $\frac{(\gamma-1)^n \cdot x}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci permet de définir l'opérateur $\log\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(\gamma-1)^n$ sur $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$; la formule $\log\gamma \cdot x = \lim_{n\to+\infty} p^{-n}(\gamma^{p^n} - 1) \cdot x$ montre que cet opérateur est une dérivation et un petit calcul montre que l'on a $\log\gamma = \log\chi(\gamma)\, t\partial$.

Si $\gamma \in \Gamma'_K$ vérifie $n(\gamma) \neq +\infty$, on définit l'opérateur $\square_\gamma$ par la formule

$$\square_\gamma = \frac{1}{\log\chi(\gamma)} \cdot \frac{\log\gamma}{\gamma - 1} = \frac{1}{\log\chi(\gamma)} + \frac{1}{\log\chi(\gamma)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\gamma-1)^n.$$

On a $(\gamma - 1) \cdot \square_\gamma = t\partial$, ce qui va nous permettre d'inverser $\gamma - 1$ sur les éléments divisibles par t.

Proposition 10.6. — *Si $r_K > r > s > 0$, et si $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un 1-cocycle continu sur Γ_K à valeurs dans $t\mathbf{B}_K^{]0,r]}$, alors il existe $a \in F$ unique et ne dépendant pas de s, tel que $\sigma \mapsto c_\sigma$ soit cohomologue dans $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ au cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot (a \log\pi)$.*

Démonstration. — Si les cocycles $\sigma \mapsto (\sigma-1)\cdot(a\log\pi)$ et $\sigma\mapsto(\sigma-1)\cdot(b\log\pi)$ sont cohomologues dans $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$, c'est que $(a-b)\log\pi\in\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ et donc que $N((a-b)\log\pi)=-\frac{p(a-b)}{p-1}=0$. On en déduit l'unicité d'un a vérifiant les conclusions de la proposition. De plus, comme $N(c_\sigma)=0$, on a $0=N((\sigma-1)\cdot(a\log\pi))=-\frac{p}{p-1}(\sigma(a)-a)$; on en déduit l'appartenance de a à F (sous réserve de son existence).

Il reste à prouver l'existence d'un a. En fait, nous allons prouver que, si $\gamma\in\Gamma_K-\{1\}$ est suffisamment proche de 1, alors $a=\frac{1}{\log\chi(\gamma)}\mathrm{Res}(\omega_\gamma)$ convient, où $\omega_\gamma=t^{-1}c_\gamma\frac{d\pi}{1+\pi}\in\Omega_K^{]0,r]}$. Si $\omega_\gamma=(\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k\pi_K^k)d\pi_K$, on a $\mathrm{Res}(\omega_\gamma)=\frac{a_{-1}}{e_{K_\infty}}$ et on peut aussi écrire ω_γ sous la forme

$$\omega_\gamma=dz+a\log\chi(\gamma)\frac{d\pi}{\pi},\quad\text{avec } z=a_{-1}\log\frac{\pi_K^{e_{K_\infty}}}{\pi}+\sum_{k\in\mathbf{Z}-\{-1\}}\frac{a_k}{k+1}\pi_K^{k+1}.$$

Comme $\pi^{-1}\pi_K^{e_{K_\infty}}$ est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ (cela découle du lemme 6.5), on a $\log\frac{\pi_K^{e_{K_\infty}}}{\pi}\in\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ d'après le lemme 5.14 ; par contre, $\sum_{k\in\mathbf{Z}-\{-1\}}\frac{a_k}{k+1}\pi_K^{k+1}$ n'appartient pas forcément à $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ à cause des $k+1$ en dénominateur, mais il appartient à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ quel que soit $s\in]0,r[$; on en déduit l'appartenance de z à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$.

Par ailleurs, $(\gamma-1)\cdot\log\pi$ appartient à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ quel que soit $s\in]0,r[$ (et même quel que soit $s>0$ car $\frac{\sigma(\pi)}{\pi}$ est une unité de $\mathbf{Z}_p[[\pi]]$) ; on en déduit, en revenant à la formule définissant $\square_\gamma$, l'appartenance de $(\square_\gamma-\frac{1}{\log\chi(\gamma)})\cdot\log\pi$ à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ et donc aussi celle de $y=\square_\gamma(z+\log\chi(\gamma)a\log\pi)-a\log\pi$ à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$. Maintenant, la formule $(\gamma-1)\cdot\square_\gamma=t\partial$ nous donne $(\gamma-1)\cdot(y+a\log\pi)=c_\gamma$; on en déduit le fait que le cocycle $\sigma\mapsto c'_\sigma=c_\sigma-(\sigma-1)\cdot(y+a\log\pi)$ est trivial sur le sous-groupe Γ de Γ_K engendré topologiquement par γ ; il provient donc par inflation d'un cocycle sur Γ_K/Γ à valeurs dans $(\mathbf{B}_K^{]0,s]}\oplus F'\log\pi)^\Gamma=(F')^\Gamma$ (cf. prop. 5.16). Comme $H^1(\Gamma_K/\Gamma,(F')^\Gamma)=0$ (conséquence facile du théorème de Hilbert 90), on peut, quitte à modifier c'_σ par un cobord à valeurs dans $(F')^\Gamma\subset\mathbf{B}_K^{]0,s]}$, se débrouiller pour que $c'_\sigma=0$ quel que soit $\sigma\in\Gamma_K$. Ceci permet de conclure.

10.5. Un résultat du type « $H^1_g=H^1_{\mathrm{st}}$ » pour $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$

Proposition 10.7. — *Soient $r\in]1,p[$ et $s\in]1,r[$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un cocycle continu $\sigma\mapsto c_\sigma$ sur $\mathscr{G}_K$ à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$:*

(i) *il existe $a\in F$ et $b\in\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,s]}$ tels que l'on ait $c_\sigma=(\sigma-1)\cdot(au+b)$, pour tout $\sigma\in\mathscr{G}_K$;*

(ii) *quel que soit $i\in\mathbf{N}$, il existe $c_i\in\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ tel que l'on ait $\varphi^{-i}(c_\sigma)=(\sigma-1)\cdot c_i$, pour tout $\sigma\in\mathscr{G}_K$.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) est évidente (on prend $c_i = \varphi^{-i}(au+b)$). La démonstration de la réciproque va utiliser la plupart des résultats qui précèdent. Soit $n \geqslant 1$ tel que $p^{-n}r < r_K$. Quitte à remplacer le cocycle $\sigma \mapsto c_\sigma$ par un cocycle cohomologue, on peut supposer que notre cocycle provient par inflation d'un cocycle sur Γ_K à valeurs dans $\mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]}$, d'après le corollaire 10.3 et la proposition 10.4. Le cocycle $\sigma \mapsto c'_\sigma = \varphi^n(c_\sigma)$ est alors à valeurs dans $\mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}r]}$ et, par hypothèse, le cocycle $\sigma \mapsto \varphi^{-i}(c'_\sigma)$ se trivialise dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K}$ quel que soit $i \geqslant n$. On peut donc, quitte à remplacer $\sigma \mapsto c'_\sigma$ par un cocycle cohomologue, supposer qu'il est à valeurs dans $\frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}r]}$, d'après la proposition 10.5.

Maintenant, comme $r < p$, on a $p^{-n}r < p^{1-n}$ et $\varphi^{n-1}(\pi)$ est une unité de $\mathbf{A}_K^{(0,p^{-n}r]}$ (cela suit du corollaire 6.3). On a donc $\frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}r]} = t\mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}r]}$ et, quitte à remplacer $\sigma \mapsto c'_\sigma$ par un cocycle cohomologue dans $\mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}s]}$, on peut supposer que notre cocycle est de la forme $\sigma \mapsto (\sigma-1)\cdot(a\log\pi)$, avec $a \in F$, d'après la proposition 10.6. Appliquant φ^{-n} au cocycle $\sigma \mapsto c'_\sigma$, on voit que, quitte à remplacer notre cocycle initial par un cocycle cohomologue dans $\varphi^{-n}(\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}s]}) = \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,s]}$, on peut supposer que l'on a $c_\sigma = (\sigma-1)\cdot(a\log\pi_n)$, ce qui permet de conclure puisque

$$\log\pi_n = \varphi^{-n}(\log\pi) \in \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}u + \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,s]}$$

d'après le corollaire 6.3 (on a $p^n > s$ par hypothèse).

Proposition 10.8. — *Soient $r \in]1,p[$ et $s \in]1,r[$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un cocycle continu $\sigma \mapsto c_\sigma$ sur $\mathscr{G}_K$ à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[u]$:*

(i) *il existe $b \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,s]}[u]$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma-1)\cdot b$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$;*

(ii) *quel que soient $k \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{N}$, il existe $c_{k,i} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$, l'on ait $N^k(\varphi^{-i}(c_\sigma)) = (\sigma-1)\cdot(c_{k,i})$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur le plus petit entier k tel que $N^{k+1}c_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$ (l'existence d'un tel k résultant de la compacité de $\mathscr{G}_K$). Le cas $k=0$ a été traité dans la proposition 10.7. Dans le cas général, si $c_\sigma = c_{k,\sigma}u^k + \cdots + c_{0,\sigma}$, on peut appliquer la proposition 10.7 au cocycle $\sigma \mapsto N^k(c_\sigma) = (-1)^k k! c_{k,\sigma}$. Il existe donc, si $r' \in]s,r[$, des éléments $a_{k,0} \in F$ et $b_{k,0} \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r']}$ tels que l'on ait $(-1)^k k! c_{k,\sigma} = (\sigma-1)\cdot(a_{k,0}u + b_{k_0})$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_K$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au cocycle $\sigma \mapsto c_\sigma - (\sigma-1)\cdot(a_{k,0}\frac{u^{k+1}}{k+1} + b_{k_0}u^k)$; ceci permet de conclure.

10.6. Un résultat du type « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » pour $\mathbf{U}_{h,a}$ et $\mathbf{U}'_{h,a}$. — Ce n° termine la démonstration de la proposition 0.4.

Lemme 10.9. — *Si $h \geqslant 1$ et $a \geqslant 1$, alors $\varphi^h - p^a : F \to F$ est bijectif.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\varphi^h - p^a : \mathscr{O}_F \to \mathscr{O}_F$ est bijectif, et comme $\mathscr{O}_F$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, il suffit de prouver le résultat modulo p, ce qui est évident car $\varphi^h - p^a$ coïncide avec $x \mapsto x^{p^h}$ et k_F est parfait.

Lemme 10.10. — *Soit $r > 0$.*

(i) *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ vérifie $\varphi^h(x) = p^a x$, alors $x \in \mathbf{U}_{h,a}$.*

(ii) *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[u]$ vérifie $\varphi^h(x) = p^a x$, alors $x \in \mathbf{U}'_{h,a}$.*

Démonstration. — Écrivons x sous la forme $\alpha+\beta$, avec $\alpha \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\beta = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$. On a $\varphi^h(\beta) - p^a\beta = p^a\alpha - \varphi^h(\alpha) \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{B}}^+$, et une récurrence immédiate montre que ceci implique $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant 0$ quel que soit $k \geqslant k_0$, et donc $\beta \in \widetilde{\mathbf{B}}^+$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, ce qui démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), il suffit de constater que, si $x = x_0 + x_1 u + \cdots + x_k u^k$ vérifie $\varphi^h(x) = p^a x$, avec $x_i \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ si $0 \leqslant i \leqslant k$, alors $\varphi^h(x_i) = p^{a-ih} x_i$, ce qui permet de se ramener au (i) pour conclure.

Proposition 10.11. — *Soient a et h des entiers $\geqslant 1$.*

(i) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $\mathbf{U}_{h,a}$ tel que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe $c_n \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ tel que $\varphi^{-n}(c_\sigma) = (\sigma - 1) \cdot c_n$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$. Alors, si $a \neq h$ (resp. si $a = h$) il existe $c \in \mathbf{U}_{h,a}$ (resp. $c \in E_h^{\mathscr{G}_K} u + \mathbf{U}_{h,a}$) tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$.*

(ii) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $\mathbf{U}'_{h,a}$ tel que, quel que soient $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$, il existe $c_{k,n} \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ tel que $N^k(\varphi^{-n}(c_\sigma)) = (\sigma - 1) \cdot c_{k,n}$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$. Alors il existe $c \in \mathbf{U}'_{h,a}$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$.*

Démonstration. — Pour démontrer le (i), choisissons $r \in]1, p[$ et considérons notre cocycle comme étant à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. La proposition 10.7 nous fournit alors $c_0 \in Fu + \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma-1)\cdot c_0$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$. Par ailleurs, comme c_σ est tué par $\varphi^h - p^a$, on a $\varphi^h(c_0) - p^a c_0 \in K \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]} = F$. D'après le lemme 10.9, on peut trouver $c_1 \in F$ tel que $\varphi^h(c_1) - p^a c_1 = \varphi^h(c_0) - p^a c_0$ et $c = c_0 - c_1$ répond à la question comme le montre le (i) du lemme 10.10.

Le (ii) se démontre de la même manière en considérant le cocycle comme étant à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[u]$ et en utilisant la proposition 10.8 au lieu de la proposition 10.7 et le (ii) du lemme 10.10 au lieu du (i) dudit lemme.

Références

[1] Y. ANDRÉ – Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.

[2] F. ANDREATTA & O. BRINON – Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif, ce volume.

[3] L. BERGER – Représentations p-adiques et équations différentielles, Thèse, Université Paris 6, 2001.

[4] ———, Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[5] L. BERGER & P. COLMEZ – Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, ce volume.

[6] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[7] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[8] G. CHRISTOL – About a Tsuzuki theorem, in *p-adic functional analysis (Ioannina, 2000)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 222, Dekker, 2001, p. 63–74.

[9] P. COLMEZ – Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[10] ———, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[11] ———, Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham, ce volume.

[12] P. COLMEZ & J.-M. FONTAINE – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[13] R. CREW – Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **31** (1998), p. 717–763.

[14] J.-M. FONTAINE – Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), p. 529–577.

[15] ———, Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques, in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer, 1983, p. 86–108.

[16] ———, Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[17] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Astérisque* **223** (1994), p. 59–111.

[18] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[19] ———, Exposé à Orsay, 1998.

[20] ———, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication Orsay, 2004.

[21] J.-M. FONTAINE & J.-P. WINTENBERGER – Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), p. A367–A370.

[22] L. HERR – Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), p. 563–600.

[23] O. HYODO – $H^1_g(K,V) = H^1_{\mathrm{st}}(K,V)$, in *Proceedings of a symposium on arithmetic geometry* (K. Kato, M. Kurihara & T. Saito, éds.), University of Tokyo, 1991.

[24] K. S. KEDLAYA – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 93–184.

[25] Z. MEBKHOUT – Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

[26] S. SEN – Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), p. 160–170.

[27] J-P. SERRE – *Corps locaux*, Hermann, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[28] J. T. TATE – p-divisible groups, in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, 1967, p. 158–183.

[29] N. TSUZUKI – Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve, *Amer. J. Math.* **120** (1998), p. 1165–1190.

[30] J.-P. WINTENBERGER – Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), p. 59–89.

PIERRE COLMEZ, École polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France
Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.polytechnique.fr

Astérisque

PIERRE COLMEZ

Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham

Astérisque, tome 319 (2008), p. 187-212

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__187_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 187–212

CONDUCTEUR D'ARTIN D'UNE REPRÉSENTATION DE DE RHAM

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous munissons l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ de Fontaine d'une filtration par « valuation de convergence ». Cette filtration est stable par l'action de $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et sa restriction à $\overline{K}$ coïncide avec la filtration induite par la filtration de $\mathscr{G}_K$ par les sous-groupes de ramification. Si V est une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, cette filtration induit une filtration croissante de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et on montre que, si V est potentiellement semi-stable, l'invariant numérique naturel associé à cette filtration coïncide avec le conducteur d'Artin de la représentation $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ du groupe de Weil-Deligne de K.

***Abstract* (Artin conductor of a de Rham representation).** — We endow Fontaine's ring $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ with a filtration defined by means of "valuation of convergence". This filtration is stable the action of $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ and its restriction to $\overline{K}$ coincides with the filtration induced by the filtration of $\mathscr{G}_K$ by ramification subgroups. If V is a de Rham representation, this filtration induces an increasing filtration on $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ and we show that the natural numerical invariant attached to this filtration coincides, if V is potentially semi-stable, with the Artin conductor of the representation $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ of the Weil-Deligne group of K.

Introduction

0.1. Notations. — Soit k_F un corps parfait de caractéristique p et soit $F = W(k_F)[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k_F. Ceci fait de F un corps complet pour la valuation discrète v_p normalisée par $v_p(p) = 1$, et dont le corps résiduel est k_F.

Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $F^{\mathrm{nr}} \subset \overline{F}$ l'extension maximale non ramifiée de F. La valuation v_p s'étend de manière unique à $\overline{F}$, et on note C le complété de $\overline{F}$ pour v_p. Si L est un sous-corps de C, on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers.

Si $K \subset \overline{F}$ est une extension finie de F, on note $K_0 = K \cap F^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non ramifiée de F contenue dans K, $e_K = [K : K_0]$ l'indice de ramification absolu de K, $v_K = e_K^{-1} v_p$ la valuation de $\overline{K} = \overline{F}$ normalisée par $v_K(K^*) = \mathbf{Z}$, et $\mathscr{G}_K$ le

© Astérisque 319, SMF 2008

groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{F}/K)$ de K. Ce groupe est muni de sa filtration par les sous-groupes $\mathscr{G}_K^s$, $s \geq -1$, *de ramification*, et $\mathscr{G}_K^0$ est le sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_K$ tandis que le sous-groupe d'inertie sauvage de $\mathscr{G}_K$ est la réunion des $\mathscr{G}_K^s$ pour $s > 0$. La filtration sur $\mathscr{G}_K$ induit une filtration croissante de $\overline{K}$ par des sous-corps $\overline{K}^{(r)}$, avec $\overline{K}^{(r)} = \cap_{s>r-1}\overline{K}^{\mathscr{G}_K^s}$. En particulier, $\overline{K}^{(r)}$ est l'extension maximale non ramifiée K^{nr} de K, si $r < 1$ et $\overline{K}^{(1)}$ est l'extension maximale modérément ramifiée de K.

0.2. La filtration de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par valuation de convergence. — Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau de Fontaine. C'est un anneau topologique muni d'une action continue de $\mathscr{G}_F$ et, algébriquement, c'est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C. Il est donc abstraitement isomorphe à $C[[T]]$ et $\overline{F}$ s'identifie à la clôture algébrique de F dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, mais il n'existe pas d'isomorphisme de $C[[T]]$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui soit continu ou qui commute avec l'action de $\mathscr{G}_F$. Malgré tout, on peut introduire une notion de rayon de convergence ou plutôt *valuation de convergence* d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui permet de munir $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ d'une filtration par des sous-anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$, pour $r \geq 0$, et cette filtration est stable sous l'action de $\mathscr{G}_K$. Le premier résultat concernant cette filtration est qu'elle permet de retrouver la filtration de $\overline{K} = \overline{F}$ induite par la filtration de $\mathscr{G}_K$ par les sous-groupes de ramification.

Théorème 0.1. — *Si $r \geq 0$, alors*

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)} \cap \overline{K} = \overline{K}^{(r)}.$$

Remarque 0.2. — Le lien entre ramification supérieure et valuation de convergence de fonctions analytiques a été mis en évidence par Deligne [**8**]. Il est à la base de la théorie d'Abbès et Saito [**1**] de la ramification supérieure dans le cas d'un corps résiduel non parfait. Le point de départ (cf. prop 2.3) de la démonstration du théorème 0.1 est le résultat de Deligne, mais passer par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour définir la valuation de convergence présente l'avantage esthétique d'être complètement intrinsèque.

0.3. Conducteurs d'Artin et de Swan des représentations de de Rham. — Si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, à poids [(1)] de Hodge-Tate ≤ 0, la filtration précédente sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ induit une filtration

(1) Cette condition assure que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Il est un peu délicat de définir une filtration par valuation de convergence sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}]$ tout entier, la multiplication par t pouvant diminuer la valuation de convergence. Il est probable que ce phénomène ne se produit pas pour les éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dont les conjugués sous $\mathscr{G}_F$ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$; c'est en tout cas le cas pour les périodes des représentations de de Rham comme le montre le cor. 5.13. En particulier, on en déduit les égalités $c_{\mathrm{Art},K}(V(-1)) = c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V(-1)) = c_{\mathrm{Sw},K}(V)$, ce qui permet d'étendre les définitions de $c_{\mathrm{Art},K}$ et $c_{\mathrm{Sw},K}$ au cas d'une représentation de de Rham quelconque.

sur le $K \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-module libre $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$ par des sous-$K \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-modules libres $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V)$, pour $r \geq 0$. Ceci nous permet d'attacher à V des invariants numériques $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ définis par :

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) = \sum_{r \geq 0} r \cdot \dim \big(\cap_{s>r} \mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) / \cup_{s<r} \mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) \big),$$

$$c_{\mathrm{Sw},K}(V) = \sum_{r \geq 1} (r-1) \cdot \dim \big(\cap_{s>r} \mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) / \cup_{s<r} \mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) \big).$$

Les invariants $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont appelés respectivement *conducteur d'Artin* et *conducteur de Swan* de V. Cette terminologie est justifiée par le résultat suivant.

Théorème 0.3. — *Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_K$ d'image finie, alors $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont respectivement les conducteurs d'Artin et de Swan de V.*

Ce résultat est une simple traduction du th. 0.1. Les deux résultats suivants sont plus profonds, mais sont des conséquences immédiates du fait que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable [(2)], du fait que le conducteur d'Artin (resp. de Swan) d'une représentation d'image finie est un entier d'après le théorème de Hasse-Arf, nul si et seulement si le groupe d'inertie (resp. d'inertie sauvage) agit trivialement, et du théorème 0.6 ci-dessous faisant le lien entre les invariants $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ et les conducteurs d'Artin et de Swan du module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$.

Théorème 0.4. — *Si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont des entiers ≥ 0.*

Théorème 0.5. — *Si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors*

(i) *V est cristalline si et seulement si $c_{\mathrm{Art},K}(V) = 0$;*

(ii) *V devient semi-stable sur une extension modérément ramifiée de K si et seulement si $c_{\mathrm{Sw},K}(V) = 0$.*

0.4. $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-modules et représentations p-adiques. — Un E-$(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module D est un $F^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-module libre de rang fini, muni des structure suivantes :

(i) une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$ agissant continûment pour la topologie discrète [(3)],

---

(2) Ce fait, conjecturé par Fontaine, est maintenant un théorème grâce aux travaux de Berger [**4**] ramenant cette conjecture à la conjecture de Crew pour les équations différentielles p-adiques, et ceux d'André [**3, 2**], Mebkhout [**15**] et Kedlaya [**14**] fournissant trois démonstrations indépendantes de la conjecture de Crew. On pourra consulter [**5**] pour une vue d'ensemble de ces travaux. Signalons que, depuis, deux démonstrations de la conjecture de Fontaine ne faisant pas intervenir la théorie des équations différentielles p-adiques ont vu le jour [**6, 13**].

(3) $\mathscr{G}_K$ agit donc à travers un quotient fini ; $\sigma \in \mathscr{G}_K$ agit par $\sigma \otimes 1$ sur $F^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$.

(ii) une action semi-linéaire injective [4] du Frobenius φ commutant à l'action de $\mathscr{G}_K$,

(iii) une action linéaire de N commutant à l'action de $\mathscr{G}_K$ et vérifiant [5] la relation de commutation $N\varphi = p\varphi N$.

Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_K$, le module

$$\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \cup_{L\subset\overline{F}}(\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L},$$

où L parcourt les extensions finies de K contenue dans $\overline{F}$, est un E-$(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module. De plus, si V est potentiellement semi-stable, l'application naturelle

$$\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) \to \overline{K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

est un isomorphisme.

A un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module [6] D, on sait associer son conducteur d'Artin $c_{\mathrm{Art},K}(D)$ et son conducteur de Swan $c_{\mathrm{Sw},K}(D)$ par les formules.

$$c_{\mathrm{Sw},K}(D) = \sum_{r\geq 0} r \cdot \dim(\cap_{s>r} D^{\mathscr{G}_K^s} / \cup_{s<r} D^{\mathscr{G}_K^s}),$$

$$c_{\mathrm{Art},K}(D) = c_{\mathrm{Sw},K}(D) + \dim D - \dim(D^{N=0})^{\mathscr{G}_K^0}.$$

Ces deux invariants sont en fait des entiers d'après le théorème de Hasse-Arf.

Notre résultat principal est alors le suivant :

Théorème 0.6. — *Si V est une E-représentation potentiellement semi-stable de $\mathscr{G}_K$, à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors*

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) = c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{Sw},K}(V) = c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)).$$

Remerciements.— Je remercie le rapporteur pour sa lecture attentive.

---

(4) Cette action est donc bijective. φ agit par $\varphi \otimes 1$ sur $F^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$.

(5) L'action de N est donc nilpotente.

(6) Si k_F est un corps fini, et donc si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on sait associer [**9**] à un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, une représentation $W(D)$ du groupe de Weil-Deligne WD_K de K, en tordant l'action de $g \in \mathrm{W}_K \subset \mathscr{G}_K$ par une puissance convenable de φ de manière à rendre linéaire l'action du sous-groupe de Weil W_K de K. Par ailleurs, si W est une représentation de WD_K, on définit (cf. [**7**]) les conducteurs d'Artin et de Swan de W par exactement les mêmes formules que celles qui nous ont servi à définir les conducteurs d'Artin et de Swan d'un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, ce qui montre que, si D est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, alors

$$c_{\mathrm{Sw},K}(W(D)) = c_{\mathrm{Sw},K}(D) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{Sw},K}(W(D)) = c_{\mathrm{Sw},K}(D).$$

La définition des conducteurs d'Artin et Swan d'un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module est donc la généralisation naturelle de la définition habituelle.

1. Conducteur d'Artin d'un élément de $\overline{K}$

1.1. Définition. — Nous renvoyons à [16] pour la définition des groupes de ramification. Si $x \in \overline{K}$, on note $c_{\mathrm{Art},K}(x)$ la borne inférieure de l'ensemble des $s \geq 0$ tels que $\mathscr{G}_K^{s-1}$ laisse fixe x. Le sous-corps $\overline{K}^{(r)}$ de $\overline{K}$ défini dans l'introduction est alors l'ensemble des $x \in \overline{K}$ vérifiant $c_{\mathrm{Art},K}(x) \leq r$. En particulier, $c_{\mathrm{Art},K}(x) = 0$ si et seulement si $K(x)$ est une extension non ramifiée de K, $c_{\mathrm{Art},K}(x) \geq 1$ si $K(x)$ est une extension ramifiée de K, et $c_{\mathrm{Art},K}(x) = 1$ si et seulement si $K(x)$ est une extension modérément ramifiée de K.

On dit que $\delta : \overline{K} \to \mathbf{R}_+$ est un *conducteur* sur $\overline{K}$ si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\delta(x) = 0$ si $x \in K^{\mathrm{nr}}$;

(ii) $\delta(x+y) \leq \sup(\delta(x), \delta(y))$ et $\delta(xy) \leq \sup(\delta(x), \delta(y))$ si $x, y \in \overline{K}$;

(iii) $\delta(g(x)) = \delta(x)$ si $x \in \overline{K}$ et $g \in \mathscr{G}_K$.

Il est immédiat que $c_{\mathrm{Art},K} : \overline{K} \to \mathbf{R}^+$ est un conducteur sur $\overline{K}$. Le lemme suivant montre que pour connaître un conducteur, il suffit de connaître sa valeur sur les uniformisantes, ce que nous utiliserons abondamment dans la suite.

Lemme 1.1. — *Si $\delta : \overline{K} \to \mathbf{R}_+$ est un conducteur, si $y \in \overline{K}$, si L est la plus petite extension galoisienne de K contenant y, et si π_L est une uniformisante de L, alors $\delta(y) = \delta(\pi_L)$.*

Démonstration. — Il résulte des propriétés (i) et (ii) que $\delta(z) \leq \sup(\delta(y_1), \ldots, \delta(y_n))$ si $y_1, \ldots, y_n \in \overline{K}$ et $z \in K(y_1, \ldots, y_n)$. On déduit de ceci, de la propriété (iii) et du fait que L est engendré par y et ses conjugués, que $\delta(z) \leq \delta(y)$ si $z \in L$. En particulier, $\delta(\pi_L) \leq \delta(y)$.

Par ailleurs L est inclus dans $K^{\mathrm{nr}}(\pi_L)$ et donc $\delta(z) \leq \delta(\pi_L)$ si $z \in L$. En particulier, $\delta(y) \leq \delta(\pi_L)$, ce qui permet de conclure. □

1.2. Conducteur d'Artin d'une uniformisante. — Soient L une extension finie galoisienne de K ; soient $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ et $G_0 \subset G$ le sous-groupe d'inertie. Soit π_L une uniformisante de L.

Proposition 1.2. — *On a*

$$c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) = \Big(\sum_{g \in G_0 - \{1\}} v_K(g(\pi_L) - \pi_L) \Big) + \Big(\sup_{g \in G_0 - \{1\}} v_K(g(\pi_L) - \pi_L) \Big).$$

Démonstration. — Si $g \in G_0$, soit $i(g)$ l'entier défini par $v_K(g(\pi_L) - \pi_L) = i(g) v_K(\pi_L)$. Si $t > 0$, soit $G_t = \{g \in G, i(g) \geq t+1\}$. Les G_t sont les sous-groupes

d'inertie de G (en numérotation inférieure). On a $G_t = \{1\}$ si t est assez grand et on note $t_0(L)$ la borne inférieure des $t > 0$ vérifiant $G_t = \{1\}$. On a aussi

$$(t_0(L)+1)v_K(\pi_L) = \sup_{g\in G_0-\{1\}} v_K(g(\pi_L)-\pi_L),$$

et comme $\frac{v_K(g(\pi_L)-\pi_L)}{v_K(\pi_L)} \in \mathbf{N}$ et le groupe G est fini, on a $t_0 = t_0(L) \in \mathbf{N}$.

Par définition de la numérotation supérieure, on a $G_t = G^{\varphi_{L/K}(t)}$, où $\varphi_{L/K}(t)$ est la fonction de Herbrand définie par

$$\varphi_{L/K}(t) = \int_0^t \frac{1}{[G_0 : G_u]}du = v_K(\pi_L)\int_0^t |G_u|\,du.$$

Par définition de t_0, on a $G_t = \{1\}$ si $t > t_0$ et $G_{t_0} \neq \{1\}$, et donc G^s agit trivialement sur π_L si $s > \varphi_{L/K}(t_0)$, alors que $G^{\varphi_{L/K}(t_0)}$ n'agit pas trivialement sur π_L. On en déduit la formule

$$c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) = 1 + \varphi_{L/K}(t_0(L)).$$

Soit $i(g,u)$ la fonction définie par $i(g,u) = 0$ si $u > i(g)-1$ et $i(g,u) = 1$ si $u \leq i(g)-1$, de telle sorte que $|G_u| = \sum_{g\in G} i(g,u)$. On a alors

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) = 1 + \varphi_{L/K}(t_0) &= 1 + v_K(\pi_L)\int_0^{t_0} |G_u|\,du = 1 + v_K(\pi_L)\int_0^{t_0}\sum_{g\in G_0} i(g,u)du \\ &= 1 + v_K(\pi_L)\Big(t_0 + \sum_{g\in G_0-\{1\}} (i(g)-1)\Big) \\ &= 1 - |G_0|v_K(\pi_L) + v_K(\pi_L)\Big(t_0+1+\sum_{g\in G_0-\{1\}} i(g)\Big), \end{aligned}$$

et comme $v_K(\pi_L) = \frac{1}{|G_0|}$, et $i(g)v_K(\pi_L) = v_K(g(\pi_L)-\pi_L)$ si $g \neq 1$, et $(t_0+1)v_K(\pi_L) = \sup_{g\in G_0-\{1\}} v_K(g(\pi_L)-\pi_L)$, cela permet de conclure. □

Corollaire 1.3. — *$c(L) = (v_K(\pi_L))^{-1}c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L)$ est un entier.*

2. Conducteur d'Artin et valuation de convergence de séries entières

2.1. Valuation de convergence raffinée d'une série entière. — Soit $\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cup(\mathbf{R}\times\{-,+\})\cup\{-\infty,+\infty\}$. Si $r \in \mathbf{R}$, on note simplement r^- [resp. r^+] l'élément $(r,-)$ [resp. $(r,+)$] de $\widetilde{\mathbf{R}}$. On munit $\widetilde{\mathbf{R}}$ de la relation d'ordre totale évidente définie par

(i) $-\infty \leq x$ et $x \leq +\infty$ quel que soit $x \in \widetilde{\mathbf{R}}$;
(ii) $r^- < r < r^+$ si $r \in \mathbf{R}$;
(iii) $r^+ < s^-$ si $r, s \in \mathbf{R}$ vérifient $r < s$.

Finalement, si $x \in \widetilde{\mathbf{R}}$, on définit $-x \in \widetilde{\mathbf{R}}$ de la manière habituelle si $x \in \mathbf{R}$ et par

$$-(-\infty) = +\infty \text{ et } -(+\infty) = -\infty; \quad -(r^-) = (-r)^+ \text{ et } -(r^+) = (-r)^- \text{ si } r \in \mathbf{R}.$$

Si $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{R}$, on note $\operatorname{linf} x_k \in \mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ la limite inférieure de la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et on définit la *limite inférieure raffinée* $\operatorname{linf}' x_k \in \widetilde{\mathbf{R}}$ de la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$, par la formule

$$\operatorname{linf}' x_k = \begin{cases} -\infty & \text{si } \operatorname{linf} x_k = -\infty, \\ r^- & \text{si } \operatorname{linf} x_k = r \text{ et } \operatorname{linf} k\cdot(x_k - r) = -\infty, \\ r & \text{si } \operatorname{linf} x_k = r \text{ et } \operatorname{linf} k\cdot(x_k - r) \in \mathbf{R}, \\ r^+ & \text{si } \operatorname{linf} x_k = r \text{ et } \lim k\cdot(x_k - r) = +\infty, \\ +\infty & \text{si } \lim x_k = +\infty, \end{cases}$$

Si $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k \in C[[T]]$, on définit la *valuation de convergence raffinée* $\operatorname{Val}_K(f) \in \widetilde{\mathbf{R}}$ par la formule

$$\operatorname{Val}_K(f) = -\Big(\operatorname{linf}' \frac{v_K(a_k)}{k}\Big).$$

On a alors

$$\operatorname{Val}_K(f) = \begin{cases} -\infty & \Leftrightarrow f \text{ est analytique sur } C \text{ tout entier}, \\ r^- & \Leftrightarrow f \text{ est analytique sur la boule fermée } v_K(T) \geq r \\ & \qquad \text{et ne converge pas si } v_K(T) < r, \\ r & \Leftrightarrow f \text{ est analytique bornée sur la boule } v_K(T) > r \\ & \qquad \text{et ne converge pas si } v_K(T) = r, \\ r^+ & \Leftrightarrow f \text{ est analytique non bornée sur la boule } v_K(T) > r, \\ +\infty & \Leftrightarrow f \text{ ne converge que pour } T = 0. \end{cases}$$

2.2. Le sous-anneau $C[[T]]^{(r)}$ de $C[[T]]$. — Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, on note $C[[T]]^{(r)}$ l'ensemble des $f \in C[[T]]$ vérifiant $\operatorname{Val}_K(f) \leq r$; c'est, d'après ce qui précède, un sous-anneau de $C[[T]]$ de fonctions analytiques bornées ou pas sur une boule ouverte ou fermée suivant les cas.

Si $r \in \mathbf{R}$, on définit la valuation $v_K^{(r)}$ sur $C[[T]]^{(r)}$ par

$$v_K^{(r)}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k\Big) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_K(a_k) + kr.$$

Ceci fait de $C[[T]]^{(r)}$ un anneau de Banach et $C[[T]]^{(r^-)}$ en est un sous-anneau complet.

Soit $r \in \mathbf{R}$. Si $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k \in C[[T]]^{(r^-)}$ est non nul, soit $d^{(r)}(f)$ le plus grand entier k tel que l'on ait $v_K^{(r)}(f) = v_K(a_k) + kr$. On dispose alors du résultat suivant :

Proposition 2.1. — (i) *Si $g \in C[[T]]^{(r^-)}$, alors il existe $y \in C[[T]]^{(r^-)}$ et $z \in C[T]$ de degré $< d^{(r)}(f)$ uniques, tels que l'on ait $g = yf + z$. De plus, $v_K^{(r)}(z) \geq v_K^{(r)}(g)$ et $v_K^{(r)}(y) \geq v_K^{(r)}(g) - v_K^{(r)}(f)$.*

(ii) *$C[[T]]^{(r^-)}$ est un anneau principal.*

Remarque 2.2. — (i) Le (ii) est une conséquence immédiate du (i) comme le montre la démonstration du cor. 5.10 par exemple.

(ii) Les anneaux $C[[T]]^{(r)}$ et $C[[T]]^{(r^+)}$ ne sont pas principaux mais presque ; ce sont des anneaux de Bézout (tout idéal engendré par un nombre fini d'éléments est principal, tout idéal fermé est principal).

2.3. Conducteur d'Artin d'uniformisantes et valuation de convergence. — Soit L une extension finie galoisienne de K, soit π_L une uniformisante de L, et soit $P \in K^{\mathrm{nr}}[X]$ le polynôme minimal de π_L sur K^{nr}. On a $P(\pi_L) = 0$ et $P'(\pi_L) \neq 0$, ce qui implique, d'après le théorème des fonctions implicites, que P induit un isomorphisme analytique d'un voisinage de π_L sur un voisinage de 0. On note $f \in \pi_L + UL[[U]]$ l'inverse de cet isomorphisme qui est donc une solution de l'équation $P(f) = U$.

Proposition 2.3. — *On a*

$$c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) = \mathrm{Val}_K(f).$$

Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 2.4. — *Soient L une extension finie de K et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ avec $v_K(\alpha_n) \leq \cdots \leq v_K(\alpha_1) < +\infty$, et soient $\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ et $Q(X) = X(X+\alpha_1)\cdots(X+\alpha_n)$. Alors $x \mapsto \beta^{-1}Q(x)$ est un automorphisme analytique de la boule $\{x,\ v_K(x) > v_K(\alpha_1)\}$ et son inverse F appartient à $T\mathscr{O}_L[[\alpha_1^{-1}T]]$, mais ne converge pas pour $v_K(T) = v_K(\alpha_1)$.*

Démonstration. — Considérons l'application $f \mapsto \psi(f) = T + f - (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1}Q(f)$. Soit $f \in T\mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$. Comme $f - \beta^{-1}Q(f) = f \cdot (1 - (1 + \frac{f}{\alpha_1}) \cdots (1 + \frac{f}{\alpha_n}))$, et comme $\frac{f}{\alpha_i} \in \mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$, on a $\psi(f) \in T\mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$. Par ailleurs, si f et g sont deux éléments de $TL[[T]]$ vérifiant $f - g \in T^kL[[T]]$, alors $\psi(f) - \psi(g) \in T^{k+1}L[[T]]$. On en déduit le fait que ψ est une application de $T\mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$ dans lui-même, contractante pour la topologie T-adique pour laquelle $T\mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$ est complet. Elle y admet donc un unique point fixe F, et ce point fixe vérifie $\beta^{-1}Q(F(T)) = T$; c'est donc l'inverse formel de $\beta^{-1}Q$ et comme F converge si $v_K(x) > v_K(\alpha_1)$, c'est l'inverse analytique de $\beta^{-1}Q$ sur la boule $\{x,\ v_K(x) > v_K(\alpha_1)\}$. Finalement, F ne converge pas pour $v_K(x) = v_K(\alpha_1)$ car sinon ce serait un inverse analytique de $\beta^{-1}Q$ sur la boule $\{x,\ v_K(x) \geq v_K(\alpha_1)\}$ et $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1}Q$ n'est pas injectif sur cette boule (puisque $P(0) = P(-\alpha_1) = 0$). □

Soient $t_0 = t_0(L)$ et $c = c(L)$. Le résultat suivant est une version renforcée de la prop. 2.3 car $c(L)v_K(\pi_L) = c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L)$ par définition de $c(L)$ (cf. cor. 1.3).

Corollaire 2.5. — *Si on écrit $f(U)$ sous la forme $\pi_L + \pi_L^{1+t_0} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot (\pi_L^{-c}U)^i$, les a_i sont éléments de $\mathscr{O}_L$ et a_i ne tend pas vers 0 quand i tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Soient $g_1, \dots, g_{e-1}$ les éléments de $G_0 - \{1\}$ ordonnés de telle sorte que, si $\alpha_i = \pi_L - g_i(\pi_L)$, on ait $v_K(\alpha_i) \geq v_K(\alpha_j)$ si $i \leq j$. En particulier, on a

$$v_K(\alpha_1) = (1+t_0)v_K(\pi_L) \quad \text{et} \quad v_K(\alpha_1) + \sum_{i=1}^{e-1} v_K(\alpha_i) = cv_K(\pi_L)$$

d'après la prop. 1.2 et la définition de $t_0(L)$ donnée au cours de la démonstration de cette proposition.

Soit $Q \in L[X]$ le polynôme défini par $Q(X) = P(X + \pi_L)$, et soit $\beta = \alpha_1 \dots \alpha_{e-1}$. On a $Q(X) = X \prod_{i=1}^{e-1}(X + \alpha_i)$ et, si $F(T) \in TL[[T]]$ est la solution formelle de l'equation $\beta^{-1}Q(F(T)) = T$, alors $f(U) = \pi_L + F(\beta^{-1}U)$. Il suffit donc d'utiliser le lemme 2.4 pour conclure. □

3. Valuation de convergence d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

3.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — Soit $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'ensemble [7] des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\mathscr{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x+y = s$, avec $s^{(n)} = \lim_{m \to +\infty}(x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $x \cdot y = t$, avec $t^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$. Alors $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est un anneau de caractéristique p, complet pour la valuation $v_{\mathbf{E}}$ définie par $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$, et qui contient une clôture algébrique $\overline{k}_F$ de k_F. Si $x \in \mathscr{O}_C$, on choisit un élément $\tilde{x} = (\tilde{x}^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ avec $\tilde{x}^{(0)} = x$.

Soit $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. Il contient l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\overline{k}_F$ et donc aussi l'anneau $\mathscr{O}_{F^{\mathrm{nr}}}$ de l'extension maximale non ramifiée F^{nr} de F. Si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$, on note $\overline{x} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ sa réduction modulo p, et si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, on note $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. Tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ peut alors s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n]$, où $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. L'application $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n] \mapsto \theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$ est un morphisme surjectif d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sur $\mathscr{O}_C$, et l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est un idéal principal dont $x \in \ker\theta$ est un générateur si et seulement si $v_{\mathbf{E}}(\overline{x}) = 1$; par exemple $\xi = [\tilde{p}] - p$ est un générateur de $\ker\theta$.

Soit $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ et prolongeons θ, par $\mathbf{Q}_p$-linéarité, en un morphisme surjectif de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ sur C. L'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ est encore principal, et on note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie $\ker\theta$-adique. Par construction, θ s'étend par continuité en un morphisme surjectif de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur C, et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C et d'idéal maximal $\ker\theta$.

(7) Nous renvoyons aux articles [**10**] ou [**12**] pour la démonstration des résultats de ce numéro ; dans ces articles (et bien d'autres), les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont notés respectivement R et $W(R)$.

Notons que $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ s'identifie naturellement à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. La topologie naturelle sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cong \varprojlim(\widetilde{\mathbf{B}}^+/(\ker\theta)^{n+1})$ est la topologie de la limite projective, chaque $\widetilde{\mathbf{B}}^+/(\ker\theta)^{n+1}$ étant un espace de Banach p-adique de boule unité $\widetilde{\mathbf{A}}^+/(\ker\theta)^{n+1}$. En particulier, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est complet comme limite projective d'espaces de Banach. On peut aussi décrire la topologie de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ comme suit. Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, soit $w_n(x)$ le plus grand élément w de $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ tel que $x \in p^w\widetilde{\mathbf{A}}^+ + (\ker\theta)^{n+1}$. Les w_n forment une famille de semi-valuations sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et la topologie naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est la topologie (de Fréchet) induite par cette famille de semi-valuations.

Le groupe $\mathscr{G}_F$ opère naturellement et continûment sur $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et on a $w_n(\sigma(x)) = w_n(x)$ si $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\sigma \in \mathscr{G}_F$.

Plus généralement, si $K \subset \overline{F}$ est une extension finie de F, et si π_K est une uniformisante de K, tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_K^n[x_n]$, où $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. L'application $x = \sum_{n=0}^{+\infty}\pi_K^n[x_n] \mapsto \theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\pi_K^n x_n^{(0)}$ est un morphisme surjectif d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ sur $\mathscr{O}_C$, et l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ est un idéal principal dont $x \in \ker\theta$ est un générateur si et seulement si $v_{\mathbf{E}}(\overline{x}) = 1/e_K$; par exemple $\xi_K = [\tilde{\pi}_K] - \pi_K$ est un générateur de $\ker\theta$. Notons (provisoirement) $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$ pour la topologie $\ker\theta$-adique. L'inclusion de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$ induit un morphisme naturel de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^+$, et ce morphisme étant un isomorphisme, nous identifierons dans la suite les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ sans plus de commentaire. En particulier, $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ et donc à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Ceci nous permet de définir, si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, $w_{K,n}(x)$ comme le plus grand élément w de $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ tel que $x \in \pi_K^w\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K] + (\ker\theta)^{n+1}$. L'action de $\mathscr{G}_K \subset \mathscr{G}_F$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ laisse $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ stable ; on a donc $w_{K,n}(\sigma(x)) = w_{K,n}(x)$ si $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\sigma \in \mathscr{G}_K$.

Proposition 3.1. — *Si ω est un générateur de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et si $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathbf{Z}\cup\{+\infty\}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$w_n \leq w_{K,n}(x)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$;*

(ii) *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ telle que l'on ait $x = \sum_{n=0}^{+\infty}\pi_K^{w_n}a_n\omega^n$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$* (avec la convention $\pi_K^{+\infty} = 0$).

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate. Prouvons la réciproque. Comme $w_n \leq w_{K,n}(x)$, il existe $b_n \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ tel que $x - p^{w_n}b_n$ soit divisible par ω^{n+1} dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Par ailleurs, la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant décroissante, $b_n - \pi_K^{w_{n-1}-w_n}b_{n-1}$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ et cet élément étant divisible par ω^n dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, le quotient a_n appartient à $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, et on a $p^{w_n}b_n = \sum_{i=0}^{n}\pi_K^{w_i}a_i\omega^i$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$. Ceci permet, en faisant tendre n vers $+\infty$, de conclure. □

Corollaire 3.2. — *Si $n \in \mathbf{N}$ et si $x, y \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, alors*

$$w_{K,n}(x+y) \geq \inf(w_{K,n}(x), w_{K,n}(y)) \quad \text{et} \quad w_{K,n}(xy) \geq \inf_{i+j=n}(w_{K,i}(x) + w_{K,j}(y)).$$

3.2. Valuation de convergence d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. — Si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, on définit la valuation de convergence absolue $c_{\mathrm{dR}}(x) \in \widetilde{\mathbf{R}}$ de x par la formule

$$c_{\mathrm{dR}}(x) = -\mathrm{linf}' \frac{w_n(x)}{n}.$$

Plus généralement, si K est une extension finie de F, on définit $c_{\mathrm{dR},K}(x)$ par la formule

$$c_{\mathrm{dR},K}(x) = -\mathrm{linf}' \frac{w_{K,n}(x)}{n}.$$

Remarque 3.3. — Si K est une extension non ramifiée de F, alors $c_{\mathrm{dR},K}(x) = c_{\mathrm{dR}}(x)$ quel que soit $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. Par contre, si K est une extension ramifiée de F, le lien entre $c_{\mathrm{dR},K}$ et c_{dR} est nettement plus compliqué comme on peut s'en rendre compte en utilisant, par exemple, le théorème 4.1.

Proposition 3.4. — (i) *Si $x \neq 0$, alors $c_{\mathrm{dR},K}(x) \geq 0$ et $c_{\mathrm{dR},K}(x) = 0$ si et seulement si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{+}[\pi_K]$.*

(ii) *$c_{\mathrm{dR},K}(\sigma(x)) = c_{\mathrm{dR},K}(x)$ si $\sigma \in \mathscr{G}_K$ et $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$.*

(iii) *$c_{\mathrm{dR},K}(xy) \geq \inf(c_{\mathrm{dR},K}(x), c_{\mathrm{dR},K}(y))$ et $c_{\mathrm{dR},K}(x+y) \geq \inf(c_{\mathrm{dR},K}(x), c_{\mathrm{dR},K}(y))$ si $x, y \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$*

Démonstration. — L'inégalité $c_{\mathrm{dR},K}(x) \geq 0$ est une conséquence de la décroissance de la suite $w_{K,n}(x)$; le reste de la proposition suit de la prop. 3.1, du cor. 3.2 et de l'invariance de $w_{K,n}$ sous l'action de $\mathscr{G}_K$.

Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, on note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$ l'ensemble des $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ vérifiant $c_{\mathrm{dR},K}(x) \geq r$. D'après la proposition 3.4, c'est un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ stable par $\mathscr{G}_K$.

3.3. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et $C[[T]]$. — Comme $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C, il est isomorphe abstraitement à $C[[T]]$. Il n'existe pas de tel isomorphisme qui soit « raisonnable », mais nous allons en utiliser une variante pour donner des formules pour la valuation de convergence d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ qui sont moins intrinsèques que la définition, mais se prêtent mieux aux calculs.

Lemme 3.5. — *L'ensemble des sections $\mathscr{O}_K$-linéaires continues $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^{+}[\pi_K]$ de θ est non vide.*

Démonstration. — Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{O}_C$ dont les images dans $\mathscr{O}_C/\pi_K\mathscr{O}_C$ forment une base de $\mathscr{O}_C/\pi_K\mathscr{O}_C$ sur k_K, alors $(e_i)_{i \in I}$ est une base de Banach de $\mathscr{O}_C$ sur $\mathscr{O}_K$: tout élément x de $\mathscr{O}_C$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{i \in I} a_i e_i$, où $(a_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{O}_K$ tendant vers 0 à

l'infini (i.e. suivant le filtre des complémentaires des parties finies). De plus, on a $\inf_{i\in I} v_K(a_i) = [v_K(x)]$. Si $s(e_i)$ est n'importe quel élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ vérifiant $\theta(s(e_i)) = e_i$, alors $x = \sum_{i\in I} a_i e_i \mapsto s(x) = \sum_{i\in I} a_i s(e_i)$ est une section $\mathscr{O}_K$-linéaire continue de θ.

Si $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ est une section $\mathscr{O}_K$-linéaire continue de θ, on étend s en une appplication K-linéaire de C dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$. □

Lemme 3.6. — *Si $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ est une section $\mathscr{O}_K$-linéaire continue de θ, si ω est un générateur de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, si $a \in C$, et si $k, n \in \mathbf{N}$, alors*

$$w_{K,n}(\omega^k s(a)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n < k, \\ [v_K(a)] & \text{si } n \geq k. \end{cases}$$

Démonstration. — Le cas $a = 0$ étant sans intérêt, supposons $a \neq 0$. On peut alors, en multipliant a par une puissance convenable de π_K, se ramener au cas $0 \leq v_K(a) < 1$. Par ailleurs, le résultat étant immédiat si $n < k$, il suffit de traiter le cas $n \geq k$. Comme $v_K(a) \geq 0$, on a $s(a) \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ par hypothèse et donc $w_{K,n}(\omega^k s(a)) \geq 0 = [v_K(a)]$ quels que soient k et n. Il reste à prouver que $w_{K,n}(\omega^k s(a))$ ne peut pas être ≥ 1. Dans le cas contraire, cela signifie qu'il existe $b \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ et $c \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ tels que l'on ait $\omega^k s(a) - \pi_K b = \omega^{n+1} c$, et comme $s(a)$ et b appartiennent à $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, on en déduit l'appartenance de c à $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ puis la divisibilité de b par ω^k dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ et, finalement, en divisant le tout par ω^k et en appliquant θ au résultat, l'inégalité $v_K(a) \geq 1$ qui est contraire à l'hypothèse. Ceci permet de conclure. □

Si $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ est une section $\mathscr{O}_K$ linéaire continue de θ et si ω est un générateur de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, on note $s_\omega : C[[T]] \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ l'application

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k \mapsto s_\omega(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(a_k)\omega^k.$$

Proposition 3.7. — (i) *s_ω induit un isomorphisme de K-espaces vectoriels topologiques de $C[[T]]$ sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$.*

(ii) *Si $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors $w_{K,n}(s_\omega(f)) = \inf_{k\leq n}[v_K(a_k)]$.*

Démonstration. — Pour montrer que s_ω est une bijection, il suffit de constater que l'application inverse $s_\omega^{-1} : \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \to C[[T]]$ est celle qui à x associe $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$, où les a_k sont définis par récurrence par l'algorithme suivant : on part de $x_0 = x$ et, supposant x_k construit, on pose $a_k = \theta(x_k)$ et $x_{k+1} = \omega^{-1}(x_k - s_\omega(a_k))$. On a alors $x = \left(\sum_{k=0}^{n} s_\omega(a_k)\omega^k\right) + \omega^{n+1} x_{n+1}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, ce qui, faisant tendre n vers $+\infty$, permet de conclure.

Maintenant, si $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$, on a

$$w_{K,n}(s_\omega(f)) \geq \inf_{k\in\mathbf{N}} w_{K,n}\big(\omega^k s_\omega(a_k)\big) = \inf_{k\leq n}[v_K(a_k)],$$

d'après le lemme 3.6. Réciproquement, si $m = \inf_{i\leq n}[v_K(a_i)]$ et si n_0 est le plus petit entier $k \leq n$ tel que $[v_K(a_k)] = m$, alors $w_{K,n_0}(\omega^k s_\omega(a_k)) \geq m+1$ si $k < n_0$ et $w_{K,n_0}(\omega^k s_\omega(a_k)) = m$ si $k = n_0$. Ceci implique que $w_{K,n_0}(s_\omega(f)) = m$ et donc $w_{K,n}(s_\omega(f)) \leq w_{K,n_0}(s_\omega(f)) \leq \inf_{k\leq n}[v_K(a_k)]$. On en déduit le (ii) et la bicontinuité de s_ω, ce qui termine la démonstration de la proposition. □

Corollaire 3.8. — *Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$ est l'image de $C[[T]]^{(r)}$ par $s_\omega : C[[T]] \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.*

Remarque 3.9. — L'application $s_\omega : C[[T]] \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ *n'est pas un morphisme d'anneaux.*

4. $\overline{K}$ comme sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

L'application $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to C$ induit un isomorphisme de la clôture algébrique de K dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $\overline{K}$, ce qui permet de considérer $\overline{K}$ comme un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Le but de ce § est de montrer que la filtration de $\overline{K}$ par la ramification supérieure coïncide avec celle induite par la filtration sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par valuation de convergence. Il s'agit donc de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1. — *Si $x \in \overline{K}$, alors*

$$c_{\mathrm{Art},K}(x) = c_{\mathrm{dR},K}(x).$$

Lemme 4.2. — $c_{\mathrm{dR},K} : \overline{K} \to \mathbf{R}$ *est un conducteur sur $\overline{K}$.*

Démonstration. — La seule propriété d'un conducteur n'apparaissant pas explicitement dans la proposition 3.4 est la nullité de $c_{\mathrm{dR},K}$ sur K^{nr}, mais cela suit du (i) de cette proposition et de ce que $\widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$ contient $F^{\mathrm{nr}}[\pi_K] = K^{\mathrm{nr}}$.

Comme $c_{\mathrm{Art},K}$ et $c_{\mathrm{dR},K}$ sont des conducteurs sur $\overline{K}$, il suffit, pour démontrer le théorème 4.1, d'en vérifier l'énoncé dans le cas des uniformisantes des extensions finies galoisiennes ramifiées de K, que l'on peut supposer être totalement ramifiées, quitte à remplacer K par une extension non ramifiée. □

4.1. L'anneau $K[X]_P$.— Soit donc $L \subset \overline{F}$ une extension galoisienne finie, totalement ramifiée, de degré e de K, soit π_L une uniformisante de L et soit $P \in K[X]$ le polynôme minimal de π_L. Le polynôme P est un polynôme d'Eisenstein ; on peut donc l'écrire sous la forme $P(X) = X^e - \pi_K(b_{e-1}X^{e-1} + \cdots + b_1 X + 1)$, où π_K est une uniformisante de K et $b_1, \ldots, b_{e-1}$ sont des éléments de $\mathcal{O}_K$. Soit $K[X]_P$ le complété de $K[X]$ pour la topologie P-adique. Tout élément de $K[X]_P$ peut s'écrire de manière

unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k P^k$, où $(Q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $K[X]^{(e-1)}$, ensemble des polynômes à coefficients dans K de degré $\leq e-1$. Une telle écriture est dite *minimale*.

Proposition 4.3. — *Soit $\Lambda \subset K[X]_P$ l'ensemble des $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k P^k$, avec $Q_k \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$, pour tout k. Alors Λ est un sous-anneau de $K[X]_P$, séparé et complet pour la topologie (π_K, P)-adique, et l'injection naturelle de $\mathscr{O}_K[X]$ dans $K[X]_P$ s'étend par continuité en un isomorphisme d'anneaux de $\mathscr{O}_K[[X]]$ sur Λ.*

Démonstration. — Si $A, B \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$, alors AB est de degré $< 2e$, et peut donc s'écrire sous la forme $AB = PQ + R$, avec $Q, R \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$, puisque P est unitaire, à coefficients dans $\mathscr{O}_K$. Ceci permet de montrer que le produit de deux éléments de Λ appartient à Λ. Maintenant, que Λ soit séparé et complet pour la topologie (π_K, P)-adique est immédiat ; le fait que l'injection de $\mathscr{O}_K[X]$ dans $K[X]_P$ s'étende par continuité à $\mathscr{O}_K[[X]]$ suit de l'appartenance de X^e à (π_K, P) ; la surjectivité de $\mathscr{O}_K[[X]] \to \Lambda$ vient de ce que $P \in (\pi_K, X)$, et l'injectivité est une conséquence du fait que tout quotient non trivial de $\mathscr{O}_K[[X]]$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_K$. □

4.2. Le plongement de $K[X]_P$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

Lemme 4.4. — *$\omega = P([\tilde{\pi}_L])$ est un générateur de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$.*

Démonstration. — On a $\theta(\omega) = P(\pi_L) = 0$ et donc $\omega \in \ker\theta$. Par ailleurs, le polynôme P étant un polynôme d'Eisenstein, l'image $\overline{\omega}$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ de ω modulo π_K est égale à $\tilde{\pi}_L^e$, où $e = \deg(P)$. On a donc $v_{\mathbf{E}}(\overline{\omega}) = e v_p(\pi_L) = v_p(\pi_K)$, ce qui permet de conclure. □

Si $Q(X) = c_{e-1}X^{e-1} + \cdots + c_0 \in K[X]^{(e-1)}$, on définit $v_K(Q)$ comme le minimum des $v_K(c_i)$, pour $0 \leq i \leq e-1$. On a aussi $v_K(Q) = [v_K(Q(\pi_L))]$.

Lemme 4.5. — *Si $F \in K[X]_P$ et si $F = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k P^k \in K[X]_P$ est l'écriture minimale de F, alors $F([\tilde{\pi}_L]) = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k([\tilde{\pi}_L])\omega^k$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et*

$$c_{\mathrm{dR},K}(F([\tilde{\pi}_L])) = -\mathrm{linf}\,\frac{v_K(Q_k)}{k}.$$

Démonstration. — Soit $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ une section $\mathscr{O}_K$-linéaire de θ vérifiant $s(\pi_L^i) = [\tilde{\pi}_L]^i$ si $0 \leq i \leq e-1$ (une telle section existe car les π_L^i forment une famille libre sur k_K dans $\mathscr{O}_C/\pi_K\mathscr{O}_C$). On a alors $F([\tilde{\pi}_L]) = s_\omega\big(\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k(\pi_L)T^k\big)$; le résultat s'en déduit en utilisant la proposition 3.7. □

Comme $K[X]_P$ est un anneau de valuation discrète complet d'égale caractéristique, son corps résiduel $K[X]_P/(P) \cong K[X]/(P) = L$ s'identifie à un sous-anneau [8] de $K[X]_P$.

Proposition 4.6. — *Si $x \in L$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_{x,k}P^k$ est l'écriture minimale de x dans $K[X]_P$, alors*

$$c_{\mathrm{dR}}(x) = -\mathrm{linf}\,\frac{v_K(Q_{x,k})}{k}.$$

Démonstration. — L'application qui à $F \mapsto F([\tilde{\pi}_L])$ induit un isomorphisme de $K[X]_P$ sur son image dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. De plus, comme $\theta(F([\tilde{\pi}_L])) = F(\pi_L)$, cet isomorphisme induit, en passant aux corps résiduels, l'identification de L avec le sous-corps $K(\pi_L)$ de C. Maintenant, si $x \in L$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_{x,k}([\tilde{\pi}_L])P([\tilde{\pi}_L])^k$ est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, algébrique sur K, et dont l'image par θ est égale à x ; comme θ induit l'identité sur $\overline{K}$, on a $x = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_{x,k}([\tilde{\pi}_L])P([\tilde{\pi}_L])^k$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et on conclut en utilisant le lemme 4.5. □

4.3. Calcul de $c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L)$. — Soit $\pi_L = X + \sum_{k=1}^{+\infty} Q_k P^k$ l'écriture minimale de π_L dans $K[X]_P$, et soit $c = c(L) = e \cdot c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L)$. Le (i) [resp. le (ii)] de la proposition suivante montre que l'on a $c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L) \leq c/e$ [resp. $c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L) > (c/e)^-$]. On en déduit l'égalité

$$c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L) = c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L)$$

que l'on cherchait à obtenir.

Proposition 4.7. — (i) *Si $k \geq 1$, il existe $C_k \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$ tel que $Q_k = \pi_K^{[\frac{-kc}{e}]} C_k$.*
(ii) *La suite C_k ne tend pas vers 0 dans $\mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$.*

Démonstration. — Le (i) demandant un peu de préparation, nous allons d'abord démontrer le (ii). Si on reprend les calculs et les notations de la démonstration du cor. 2.5, on voit que $v_K(P(x)) \geq \frac{c}{e}$ si $v_K(x-\pi_L) \geq \frac{t_0+1}{e}$. Ceci implique que, si C_k tend vers 0, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} \pi_K^{[\frac{-kc}{e}]} C_k P^k$ converge uniformément sur la boule $v_K(x-\pi_L) \geq \frac{t_0+1}{e}$ et y définit donc une fonction analytique F. Comme cette boule contient un conjugué $g(\pi_L)$ de π_L distinct de π_L, et comme $P(g(\pi_L)) = 0$, on obtient, en évaluant F en $g(\pi_L)$, l'identité $F(g(\pi_L)) = g(\pi_L)$. Comme par ailleurs, F est constante et $F(0) = \pi_L$, on obtient $g(\pi_L) = \pi_L$, ce qui conduit à une contradiction, et permet de conclure. □

Le point de départ de la démonstration du (i) de la proposition 4.7 est le résultat suivant qui est une simple réécriture du cor. 2.5.

[8] Si $D = \frac{1}{P'} \cdot \frac{d}{dX}$ est la dérivation K-linéaire continue de $K[X]_P$ normalisée par $DP = 1$, alors la réduction modulo P induit un isomorphisme du noyau de D sur L ; l'isomorphisme réciproque étant celui qui, à $y = Q(\pi_L)$, $Q \in K[X]^{(e-1)}$, associe $\sum_{k=0}^{+\infty} D^k Q \cdot \frac{(-P)^k}{k!}$.

Lemme 4.8. — *On peut écrire X dans $K[X]_P$ sous la forme*

$$X = \pi_L + \pi_L^{1+t_0} \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_L^{-ci} A_i(\pi_L) P^i,$$

où $A_i \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$ ne tend pas vers 0 quand i tend vers $+\infty$.

Lemme 4.9. — *Soient $c \geq 1$ et $t \geq 2$ des entiers et $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{O}_K[[X]]$. Si*

$$Y = X + X^t \sum_{i=1}^{+\infty} A_i(X)(X^{-c}T)^i,$$

où T est une variable, alors il existe une unique suite $(B_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{O}_K[[Y]]$ telle que $X = Y + Y^t \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(Y)(Y^{-c}T)^i$.

Démonstration. — Si Z est une variable, soit $S_Z = \mathscr{O}_K[[Z, Z^{-c}T]]$. L'anneau S_Z peut aussi se décrire comme l'anneau des séries de la forme $\sum_{i=0}^{+\infty} A_i(Z)(T^{-c}Z)^i$ avec $A_i \in \mathscr{O}_K[[Z]]$; il est complet pour la topologie Z-adique.

Maintenant, si $f \in Y + Y^t S_Y$, soit $\phi(f) = f + f^t \sum_{i=1}^{+\infty} A_i(f)(f^{-c}T)^i$. Comme $Y^{-1}f \in 1 + YS_Y$, on a $\phi(f) \in Y + Y^t S_Y$. Pour la même raison, $\psi(f) = Y - f^t \sum_{i=1}^{+\infty} A_i(f)(f^{-c}T)^i \in Y + Y^t S_Y$. D'autre part, si $f - g \in Y^n S_Y$, alors $\psi(f) - \psi(g) \in Y^{n+t-1} S_Y$, et comme $t - 1 \geq 1$, cela implique que ψ a un unique point fixe f dans $Y + Y^t S_Y$. Ce point fixe est l'unique solution dans $Y + Y^t S_Y$ de l'équation $\phi(f) = Y$, et on obtient les B_i en écrivant f sous la forme $f = Y + Y^t \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(Y)(Y^{-c}T)^i$. □

Corollaire 4.10. — *Il existe une suite $(B_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{O}_K[[X]]$ telle que l'on ait, dans $K[X]_P$, l'identité*

$$\pi_L = X + X^{1+t_0} \sum_{i=1}^{+\infty} X^{-ci} B_i P^i.$$

Passons à la démonstration du (i) de la proposition 4.7. On peut écrire $-ic$ sous la forme $e[\frac{-ic}{e}] + r_i$, avec $0 \leq r_i \leq e-1$, ce qui permet de mettre π_L sous la forme $X + \sum_{i=1}^{+\infty} X^{e[\frac{-ic}{e}]} B_i' P^i$, avec $B_i' = X^{r_i+t_0+1} B_i \in \mathscr{O}_K[[X]]$. Par ailleurs, partant de l'identité $X^e = \pi_K(1 + b_1 X + \cdots + b_{e-1}X^{e-1} + \pi_K^{-1}P)$, on peut écrire $X^{e[\frac{-ic}{e}]}$ sous la forme

$$X^{e[\frac{-ic}{e}]} = \pi_K^{[\frac{-ic}{e}]} \sum_{j=0}^{+\infty} E_{i,j} \cdot (\pi_K^{-1}P)^j,$$

où $(E_{i,j})_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_K[[X]]$. Finalement, on peut écrire $E_{i,j}B_i'$ sous la forme

$$E_{i,j}B_i' = \sum_{h=0}^{+\infty} R_{h,i,j} P^h,$$

où $(R_{h,i,j})_{h\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$. On a alors

$$C_k = \sum_{h+i+j=k} \pi_K^{[\frac{-ci}{e}]-j-[\frac{-ck}{e}]} R_{h,i,j} \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$$

car $\frac{c}{e} = \mu_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) \geq 1$, et donc $[\frac{-ci}{e}] - j - [\frac{-ck}{e}] \geq 0$ si $i+j \leq k$. Ceci permet de conclure.

5. $\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ et sa filtration par valuation de convergence

5.1. Les anneaux $\mathbf{B}^+_{\max}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. — Si $\alpha \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ est tel que son image $\overline{\alpha}$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha}) = 1$, le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{\alpha}{p}]$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ ne dépend pas de α. On note $\mathbf{A}_{\max}$ son complété pour la topologie p-adique et $\mathbf{B}^+_{\max} = \mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$. En particulier, on peut prendre pour α un générateur ω de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ et tout élément de $\mathbf{B}^+_{\max}$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\omega^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ tendant vers 0 pour la topologie p-adique. Cette série convergeant dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, cela nous fournit un morphisme de $\mathbf{B}^+_{\max}$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$.

Proposition 5.1. — *Le morphisme $\mathbf{B}^+_{\max} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ défini ci-dessus est injectif et identifie $\mathbf{B}^+_{\max}$ avec le sous-anneau $\mathbf{B}^{(1^-)}_{\mathrm{dR},F}$ de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$.*

Démonstration. — Si $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+$ est une section $\mathscr{O}_F$-linéaire continue de θ, on peut écrire tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=0}^{+\infty} s(a_k)\omega^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_C$, et donc tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{-k}s(a_k)\omega^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_C$ telle qu'il existe $k_0(x) \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $a_k \in p^{k-k_0(x)}\mathscr{O}_C$ si $k \geq k_0(x)$. On peut donc décrire $\mathbf{A}_{\max}$ comme l'ensemble des séries $\sum_{k=0}^{+\infty} p^{-k}s(a_k)\omega^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_C$ tendant vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Ceci permet, en utilisant la proposition 3.7, de conclure. □

Comme $v_{\mathbf{E}}(\varphi(\overline{\alpha})) \geq 1$ si $v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha}) = 1$, on a $\frac{\varphi(\alpha)}{p} \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ et φ s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\max}$ et $\mathbf{B}^+_{\max}$. Cette action de φ est injective mais pas surjective. Pour remédier à ce problème, on introduit le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{B}^+_{\max})$ de $\mathbf{B}^+_{\max}$ sur lequel φ est bijectif.

Proposition 5.2. — (i) *Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$ vérifie $0 \leq r < 1$, alors φ induit un isomorphisme de $\mathbf{B}^{(r)}_{\mathrm{dR},F}$ sur $\mathbf{B}^{(r/p)}_{\mathrm{dR},F}$ et on a $c_{\mathrm{dR}}(\varphi(x)) = p^{-1}c_{\mathrm{dR}}(x)$.*

(ii) $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \mathbf{B}^{(0^+)}_{\mathrm{dR},F}$.

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence du (i). En effet, si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire x sous la forme $\varphi^n(y_n)$ avec $y_n \in \mathbf{B}^+_{\max} = \mathbf{B}^{(1-)}_{\mathrm{dR},F}$, et

donc $c_{\mathrm{dR}}(x) = p^{-n} c_{\mathrm{dR}}(y) \leq p^{-n}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. On en déduit l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \subset \mathbf{B}^{(0^+)}_{\mathrm{dR},F}$. Réciproquement, si $x \in \mathbf{B}^{(0^+)}_{\mathrm{dR},F}$, alors $c_{\mathrm{dR}}(x) < p^{-n}$ et donc $x \in \varphi^n(\mathbf{B}^{(1^-)}_{\mathrm{dR},F})$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$; d'où l'inclusion $\mathbf{B}^{(0^+)}_{\mathrm{dR},F} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.

Le (i), quant à lui, est une conséquence immédiate des lemmes 5.3 et 5.4 ci-dessous. □

Lemme 5.3. — *Soit $r \in \mathbf{R}$ vérifiant $0 \leq r < 1$ et soit $x \in \mathbf{B}^+_{\max}$. Alors*
(i) $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r \Rightarrow c_{\mathrm{dR}}(\varphi(x)) \leq p^{-1} r$.
(ii) $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r^- \Rightarrow c_{\mathrm{dR}}(\varphi(x)) \leq p^{-1} r^-$.

Démonstration. — Soit ω un générateur de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. Il existe $v \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ tel que l'on ait $\varphi(\omega) = \omega^p + pv$. Soit $w_n = w_n(x)$. On peut, d'après la prop. 3.1, écrire x sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{w_n} \omega^n a_n$ avec $a_n \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$, et on a

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{w_n} (\omega^p + pv)^n \varphi(a_n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \omega^{pj} \Big(\sum_{n \geq j} \binom{n}{j} p^{n-j+w_n} v^{n-j} \varphi(a_n) \Big).$$

Soit $w'_j = \inf_{n \geq j}(n - j + w_n)$. La formule ci-dessus montre que $w_{pj}(\varphi(x)) \geq w'_j$. Écrivons w_n sous la forme $rn + \alpha(n)$.

Si $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r$, il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $\alpha(n) \geq C$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et donc $w_{pj}(\varphi(x)) \geq C - rj$ quel que soit $j \in \mathbf{N}$; on en déduit l'implication (i).

Si $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r^-$, alors $\alpha(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et comme $w_{pj}(\varphi(x)) \geq -rj + \inf_{n \geq j} \alpha(n)$, cela permet de démontrer l'implication (ii). □

Lemme 5.4. — *Soit $r \in \mathbf{R}$ vérifiant $0 \leq r < 1/p$ et soit $x \in \mathbf{B}^+_{\max}$. Alors*
(i) $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r \Rightarrow c_{\mathrm{dR}}(\varphi^{-1}(x)) \leq pr$.
(ii) $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r^- \Rightarrow c_{\mathrm{dR}}(\varphi^{-1}(x)) \leq pr^-$.

Démonstration. — Il existe $v_2 \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ tel que l'on ait $(\varphi^{-1}(\omega))^p = \omega + pv_2$. Soit $w_n = w_n(x)$. On peut alors écrire x sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{w_n} \omega^n a_n$, avec $a_n \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$, et on a

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p^{w_n} (\varphi^{-1}(\omega))^n \varphi^{-1}(a_n) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \omega^j \Big(\sum_{b=0}^{p-1} \sum_{m \geq j} \binom{m}{j} p^{m-j+w_{pm+b}} v_2^{m-j} \varphi^{-1}(\omega^b a_{pm+b}) \Big). \end{aligned}$$

Soit $w'_j = \inf_{0 \leq b \leq p-1, m \geq j}(m - j + w_{pm+b})$. La formule ci-dessus montre que $w_j(\varphi^{-1}(x)) \geq w'_j$. Écrivons w_n sous la forme $rn + \alpha(n)$.

Si $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r$, il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $\alpha(n) \geq C$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et donc $w_j(\varphi^{-1}(x)) \geq C - r(pj + p - 1)$, pour tout $j \in \mathbf{N}$. On en déduit le (i).

Si $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r^-$, alors $\alpha(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et comme $w_j(\varphi(x)) \geq -r(pj+p-1) + \inf_{0\leq b\leq p-1, m\geq j} \alpha(pm+b)$, cela permet de démontrer l'implication (ii). □

5.2. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ et $K\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$.— La série définissant $\log \frac{[\tilde{p}]}{p}$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et on note $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log \frac{[\tilde{p}]}{p}]$ de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Cet anneau est stable sous l'action de $\mathscr{G}_F$. Si $L \subset \overline{K}$ est une extension algébrique de K, on note $L\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ le sous-anneau de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ engendré par L et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$.

Si K est une extension finie de F, la série définissant $\log \frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K}$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et, si e est l'indice de ramification de K sur F, on a

$$\log \frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K} = \frac{1}{e}\Big(\log \frac{[\tilde{p}]}{p} + \log[\tilde{\pi}_K^{-e}\tilde{p}] + \log(p^{-1}\pi_K^e)\Big),$$

et comme $\log[\tilde{\pi}_K^{-e}\tilde{p}] \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\log(p^{-1}\pi_K^e) \in K$ puisque $v_{\mathbf{E}}(\tilde{\pi}_K^{-e}\tilde{p}) = v_p(p^{-1}\pi_K^e) = 0$, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 5.5. — *On a* $K\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} = (K\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})\big[\log \frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K}\big]$.

Proposition 5.6. — (i) *Les* $(\log \frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K})^j$, $j \in \mathbf{N}$, *forment une famille libre sur* $\mathbf{B}^{(1)}_{\mathrm{dR},K}$.

(ii) *Si* $\mathbf{Z}_{(p)} = \mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p$ *et* $I = \mathbf{Z}_{(p)} \cap [0,1[$, *les* π_K^i, $i \in I$, *forment une famille libre sur* $\mathbf{B}^{(1^-)}_{\mathrm{dR},K}$.

Démonstration. — Soit $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ une section $\mathscr{O}_K$-linéaire continue de θ et soit $\omega = [\tilde{\pi}_K] - \pi_K$. Soit $\tilde{s}_\omega : C[[X]] \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ l'application obtenue en composant l'application de $C[[X]]$ dans $C[[T]]$ envoyant X sur $\pi_K^{-1}T$, avec $s_\omega : C[[T]] \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Passer de T à X revient à décaler toutes les valuations de convergence de 1, et $\tilde{s}_\omega$ induit un isomorphisme de $C[[X]]^{(r)}$ sur $\mathbf{B}^{(r+1)}_{\mathrm{dR},K}$ quel que soit $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, $r \geq -1$. Notons que $\tilde{s}_\omega$ n'est pas un morphisme d'anneaux mais que l'on a quand-même $\tilde{s}_\omega(fg) = \tilde{s}_\omega(f)\tilde{s}_\omega(g)$ si f ou g est dans $K[[X]]$.

Passons à la démonstration du (i). On a $\log \frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K} = \log(1+\frac{\omega}{\pi_K})$ et donc, si a_j, $0 \leq j \leq d$ est une famille d'éléments de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ telle que $\sum_{j=0}^d a_j(\log \frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K})^j = 0$, on a $\sum_{j=0}^d \tilde{s}_\omega^{-1}(a_j)(\log(1+X))^j = 0$ dans $C[[X]]$. Par ailleurs, si $a_j \in \mathbf{B}^{(1)}_{\mathrm{dR},K}$, alors $\tilde{s}_\omega^{-1}(a_j) \in C[[X]]^{(0)}$ et on est ramené à démontrer que les $(\log(1+X))^j$, $j \in \mathbf{N}$, forment une famille libre sur $C[[X]]^{(0)}$. Or, si $\sum_{j=0}^d b_j\cdot(\log(1+X))^j = 0$ avec $b_j \in C[[X]]^{(0)}$ si $0 \leq j \leq d$, alors b_0 est divisible par $\log(1+X)$ dans $C[[X]]^{(0^+)}$, et un argument de polygones de Newton montre que cela implique $b_0 = 0$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire la nullité des b_j, ce qui permet de conclure.

Démontrons maintenant le (ii). Si $i \in I$, on a $\pi_K^i = [\tilde{\pi}_K^i](1+\frac{\omega}{\pi_K})^{-i}$ et donc, si $\sum_{i\in I} a_i\pi_K^i = 0$, alors $\sum_{i\in I} \tilde{s}_\omega^{-1}([\tilde{\pi}_K^i]a_i)\cdot(1+X)^{-i} = 0$ dans $C[[X]]$. Par ailleurs, si $a_i \in \mathbf{B}^{(1^-)}_{\mathrm{dR},K}$, alors $\tilde{s}_\omega^{-1}([\tilde{\pi}_K^i]a_i) \in C[[X]]^{(0^-)}$, et on est ramené à démontrer que

les $(1+X)^{-i}$, $i \in I$, forment une famille libre sur $C[[X]]^{(0^-)}$, ce qui se fait sans problème en regardant le comportement d'une combinaison linéaire au voisinage de $X=-1$. □

5.3. Le sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — Soit $r \in \mathbf{R}$. On utilise l'isomorphisme $s_\omega : C[[T]]^{(r)} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$ pour définir la valuation $v_K^{(r)}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$ par la formule $v_K^{(r)}(x) = v_K^{(r)}(s_\omega^{-1}(x))$.

Lemme 5.7. — *Si $a, b \in C$, alors*

$$v_K\big(\theta\big(\omega^{-1}(s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b))\big)\big) \geq v_K(a) + v_K(b) - 1.$$

Démonstration. — En multipliant a et b par des puissances convenables de π_K, on se ramène au cas $0 \leq v_K(a), v_K(b) < 1$ et $v_K(a) + v_K(b) > 1$, le résultat étant trivial si $v_K(a) + v_K(b) \leq 1$.

Soient $a_0, b_0 \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $\theta([a_0]) = a$ et $\theta([b_0]) = b$. On peut alors écrire $s_\omega(a)$, $s_\omega(b)$ et $s_\omega(ab)$ sous la forme

$$s_\omega(a) = [a_0] + a_1\omega, \quad s_\omega(b) = [b_0] + b_1\omega \quad \text{et} \quad s_\omega(ab) = \pi_K\big([\tilde{\pi}_K^{-1}a_0b_0] + c\omega\big),$$

avec $a_1, b_1, c \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$. On en tire la formule

$$s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b) = \omega(\pi_K c - [\tilde{\pi}_K^{-1}a_0b_0] - [a_0]b_1 - [b_0]a_1 - \omega a_1 b_1),$$

et la minoration

$$\begin{aligned} v_K\big(\theta\big(\omega^{-1}(s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b))\big)\big) &\geq \inf(1, v_{\mathbf{E}}(a_0), v_{\mathbf{E}}(b_0), v_{\mathbf{E}}(\tilde{\pi}_K^{-1}a_0b_0)) \\ &= \inf(1, v_K(a), v_K(b), v_K(a) + v_K(b) - 1), \end{aligned}$$

qui permet de conclure au vu des conditions mises sur a et b. □

Lemme 5.8. — *Si $r \geq 1$ et si $f, g \in C[[T]]^{(r)}$, alors*

$$v_K^{(r)}\big(s_\omega(fg) - s_\omega(f)s_\omega(g)\big) \geq v_K^{(r)}(f) + v_K^{(r)}(g) + r - 1.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver le resultat pour $f = aT^i$ et $g = bT^j$ auquel cas on est ramené à prouver l'inégalité

$$\begin{aligned} (i+j+1)r + v_K^{(r)}\big(\omega^{-1}\big(s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b)\big)\big) &= v_K^{(r)}\big(\omega^{i+j}\big(s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b)\big)\big) \\ \geq v_K^{(r)}(\omega^i s_\omega(a)) + v_K^{(r)}(\omega^j s_\omega(b)) + r - 1 &= v_p(a) + v_p(b) + (i+j+1)r - 1, \end{aligned}$$

qui est une conséquence directe du lemme 5.7. □

Proposition 5.9. — *Si $r \in \mathbf{R}$ est > 1, si $a \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$, et si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$, alors il existe $y \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ et $z \in C[T]$ de degré $< d^{(r)}(s_\omega^{-1}(a))$, uniques, tels que $x = ay + s_\omega(z)$.*

Démonstration. — Posons $x_0 = x$ et définissons par récurrence, en utilisant le (i) de la prop. 2.1, des éléments x_k, y_k de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ et $z_k \in C[T]$ de degré $< d^{(r)}(s_\omega^{-1}(a))$, en écrivant $s_\omega^{-1}(x_k)$ sous la forme $s_\omega^{-1}(x_k) = s_\omega^{-1}(a)s_\omega^{-1}(y_k) + z_k$ et en posant $x_{k+1} = x_k - ay_k - s_\omega(z_k)$. On a alors $v_K^{(r)}(z_k) \geq v_K^{(r)}(x_k)$ et

$$v_K^{(r)}(x_{k+1}) = v_K^{(r)}\big(s_\omega(s_\omega^{-1}(a)s_\omega^{-1}(y_k)) - ay_k\big) \geq v_K^{(r)}(s_\omega^{-1}(x_k)) + r - 1,$$

d'après le lemme 5.8. Comme $r > 1$, cela implique que les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ convergent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ et $C[T]$ respectivement, et les sommes y et z de ces séries vérifient $ay + s_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(x_k - x_{k+1}) = x$. Ceci permet de conclure. □

Corollaire 5.10. — *Si $r \in \mathbf{R}$ est > 1, alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ est un anneau principal.*

Démonstration. — Soit I un idéal non nul de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$. La proposition précédente montre que $s_\omega^{-1}(I) \cap C[T]$ est non réduit à 0, et que, si P est un élément non nul de $s_\omega^{-1}(I) \cap C[T]$ de degré minimal, alors $s_\omega(P)$ est un générateur de I, ce qui permet de conclure. □

Proposition 5.11. — *Soit $r \in \mathbf{R}$, $r > 1$, et soit*[9] $\overline{K}^{(r^-)} = \overline{K} \cap \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$. *Si $e_1, \ldots, e_d \in \overline{K}$ sont linéairement indépendants sur $\overline{K}^{(r^-)}$, alors ils le sont encore sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$.*

Démonstration. — Soit $a_1e_1 + \cdots + a_ke_k = 0$ une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ de longueur minimale. Soit L une extension finie de K contenant $e_1, \ldots, e_k$. Appliquant $\sigma \in \mathscr{G}_L$ à la relation $a_1e_1 + \cdots + a_ke_k = 0$, utilisant le fait que $\sigma(e_i) = e_i$ si $1 \leq i \leq k$ et la minimalité de notre relation, on en déduit les relations $a_1\sigma(a_i) = a_i\sigma(a_1)$ quels que soient $1 \leq i \leq k$ et $\sigma \in L$. Ceci implique que $\frac{a_i}{a_1} \in L$ quel que soit i. Comme par ailleurs $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ est un anneau principal, il est intégralement clos dans son corps des fractions et donc $\frac{a_i}{a_1} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)} \cap L \subset \overline{K}^{(r^-)}$. Ceci permet de conclure. □

5.4. L'anneau $\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$. — Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, on note $(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{(r)}$ l'anneau $(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+) \cap \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$.

Proposition 5.12. — *La filtration de $\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$ par valuation de convergence est donnée par*

$$(\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{(r^+)} = (\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{(r)} = \overline{K}^{(r)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$$
$$\text{et } (\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{(r^-)} = \overline{K}^{(r^-)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \quad \text{si } r \in \mathbf{R} \text{ et } r > 1,$$
$$(\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{(1^+)} = \overline{K}^{(1)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$$

---

[9] Comme $c_{\mathrm{dR},K}(x) \in \mathbf{R}$ si $x \in \overline{K}$, on voit que $\overline{K}^{(r^-)}$ est aussi la réunion des $\overline{K}^{(s)}$ pour $s < r$ bien que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ soit strictement plus gros que la réunion des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}$, $s < r$.

$$\begin{aligned} &et\ (\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(1)} = \overline{K}^{(1)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}},\\ &(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(r)} = K\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \quad si\ r\in\widetilde{\mathbf{R}}\ et\ 0^+\le r\le 1^-,\\ &(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(0)} = \widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]. \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $x\in\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$. On peut écrire x sous la forme $x=\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ avec $\alpha_i\in\overline{K}$ et $x_i\in\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$. Soit L une extension finie de K contenant les α_i et, si $r\in\mathbf{R}$, soit $L^{(r)}=L\cap\overline{K}^{(r)}$. Les $L^{(r)}$ forment une filtration croissante exhaustive de L et, L étant de dimension finie sur K, cette filtration ne comporte qu'un nombre fini de sauts $0=r_1,\dots,r_d$. Soit r le plus petit élément de $\{r_1,\dots,r_d\}$ tel que x appartienne à $L^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$. Soit $e_1=1,e_2,\dots,e_k$ une base de $L^{(r)}$ sur $L^{(r^-)}$. Comme $\overline{K}^{(r^-)}$ est une extension galoisienne de K, et $L^{(r^-)}=L^{(r)}\cap\overline{K}^{(r^-)}$, les e_i, $1\le i\le k$ forment encore une famille libre sur $\overline{K}^{(r^-)}$.

On peut alors écrire x sous la forme $x=\sum_{i=1}^k\beta_i e_i$ avec $\beta_i\in L^{(r^-)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ et les β_i, $i\ge 2$ non tous nuls. Maintenant, si $r>1$, alors, d'une part $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}\subset\mathbf{B}^{(r^-)}_{\mathrm{dR},K}$ et, d'autre part, d'après la proposition 5.11, les e_i forment encore une famille libre sur $\mathbf{B}^{(r^-)}_{\mathrm{dR},K}$; on a donc $x\notin\mathbf{B}^{(r^-)}_{\mathrm{dR},K}$. Comme $c_{\mathrm{dR},K}(x)\le r$ puisque $x\in L^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$, on en déduit l'égalité $c_{\mathrm{dR},K}(x)=r$. Ceci permet de démontrer les égalités $(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(r)}=\overline{K}^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ et $(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(r^-)}=\overline{K}^{(r^-)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$, puis l'égalité

$$(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(r^+)}=\cap_{s>r}(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(s)}=(\cap_{s>r}\overline{K}^{(s)})\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}=\overline{K}^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log},$$

cette dernière suite d'égalité étant encore valable si $r=1$. Les trois égalités restantes sont alors des traductions des propositions 5.6 et 5.2 et du (i) de la prop. 3.4. □

Corollaire 5.13. — *Si $x\in\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ vérifie $c_{\mathrm{dR},K}(x)>0^+$, et si $u\in\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ est non nul, alors $c_{\mathrm{dR},K}(ux)=c_{\mathrm{dR},K}(x)$.*

Remarque 5.14. — Une petite modification de la démonstration de la prop. 5.12 permet de montrer que l'application de $\overline{K}[u]\otimes_{F^{\mathrm{nr}}}\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, envoyant $\alpha u^k\otimes\beta$ sur $\alpha\beta\cdot(\log\frac{[\tilde p]}{p})^k$, est injective. En particulier, cela montre que

(i) $\log\frac{[\tilde p]}{p}$ est transcendant sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$,

(ii) $K\otimes_{K_0}\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}\to\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est injective.

Ces deux résultats (classiques [**11**]) sont à la base de la théorie des (φ,N)-modules filtrés. En particulier, la transcendance de $\log\frac{[\tilde p]}{p}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ permet d'étendre l'action de φ à $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ en posant $\varphi(\log\frac{[\tilde p]}{p})=p\log\frac{[\tilde p]}{p}$, et de munir $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ de la $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-dérivation N normalisée par $N(\log\frac{[\tilde p]}{p})=-1$. Les actions de φ et N ainsi définies commutent à celle de $\mathscr{G}_F$ et on a $N\varphi=p\varphi N$.

6. Représentations de de Rham

6.1. Le $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module attaché à une représentation de de Rham. — Dans tout ce §, V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, de dimension d, à poids de Hodge-Tate ≤ 0. Si L est une extension finie de K, soient [10]

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L}, \quad \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L}$$
$$\text{et} \quad \mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V) = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L}.$$

Alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ sont des $L \cap F^{\mathrm{nr}}$-espaces vectoriels de dimension $\leq d$ munis d'actions de φ et N, avec $N\varphi = p\varphi N$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)^{N=0}$. Si L est une extension galoisienne de K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ sont, de plus, munis d'une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$ agissant à travers $\mathrm{Gal}(L/K)$, qui commute à φ et N, et on retrouve $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},K}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},K}(V)$ en prenant les points fixes par $\mathscr{G}_K$. Comme on a supposé V de de Rham, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$ est un L-espace vectoriel de dimension d, qui est muni, si L est une extension galoisienne de K, d'une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$ agissant à travers $\mathrm{Gal}(L/K)$, et on retrouve $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}(V)$ en prenant les points fixes par $\mathscr{G}_K$. Finalement, l'application naturelle de $L \otimes_{L\cap F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$, induite par l'inclusion de $L \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, est injective.

Soit $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V) = \cup_L \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$, où L décrit l'ensemble des extensions finies de K contenue dans $\overline{K}$. C'est un F^{nr}-espace vectoriel qui est *a priori* de dimension $\leq d$, mais est en fait de dimension d car toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable (cf. note 2). Par ailleurs, $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$ est muni d'actions semi-linéaire de φ et linéaire de N, avec $N\varphi = p\varphi N$, et d'une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$, continue pour la topologie discrète sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$, et commutant à φ et N. En résumé, $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$ est *un* $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$*-module.* De plus, on a

$$\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V) \cong \overline{K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}(V),$$
$$F^{\mathrm{nr}} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{st},K}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)^{\mathscr{G}^0_K} \quad \text{et} \quad F^{\mathrm{nr}} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris},K}(V) = (\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)^{N=0})^{\mathscr{G}^0_K}.$$

6.2. Ramification et valuation de convergence. — On munit $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}(V)$ respectivement des filtrations de ramification et de convergence, en posant, si $r \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V) = \cap_{s>r}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V))^{\mathscr{G}^{s-1}_K} = \cup_{L\subset\overline{K}^{(r)}} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$$
$$\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) = \cap_{s>r}(\mathbf{B}^{(s)}_{\mathrm{dR},K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K} = (\mathbf{B}^{(r^+)}_{\mathrm{dR},K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}.$$

[10] On peut définir $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ en utilisant $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ au lieu de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ car, d'une part, les périodes des représentations p-adiques vivent dans des sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et donc appartiennent au sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$, et, d'autre part, on a supposé que les poids de Hodge-Tate de V sont ≤ 0, ce qui permet de remplacer $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ par $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$.

Théorème 6.1. — *Soit V une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0.*

(i) *Si $r \geq 1$, alors $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) = (\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V))^{\mathscr{G}_K}$.*

(ii) *Si $r < 1$, alors $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) = \mathbf{D}^{(0)}_{\mathrm{dR},K}(V) = K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.*

Démonstration. — Comme $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$ est de dimension finie, la filtration par les $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V)$ n'a qu'un nombre fini de sauts. Il existe donc une extension finie L de K, galoisienne et incluse dans $\overline{K}^{(r)}$, telle que l'on ait $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V) = F^{\mathrm{nr}} \otimes_{M_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},M}(V)$, pour toute extension finie galoisienne M de K, contenant L et incluse dans $\overline{K}^{(s)}$, si $s > r$ est assez petit.

Par ailleurs, on a $M \otimes_{M_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},M}(V) = M \otimes_K (M \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$ par descente étale. On en déduit, en passant à la limite inductive, que

$$\overline{K}^{(s)} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V) = \overline{K}^{(s)} \otimes_K (\overline{K}^{(s)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K},$$

si $s > r$ est assez petit. On a donc $(\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V))^{\mathscr{G}_K} = (\overline{K}^{(s)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$, pour tout $s > r$ assez petit.

Comme V est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate ≤ 0, on a $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}(V) = (\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$. Il résulte donc de la prop. 5.12 que $\mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) = (\overline{K}^{(s)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$, si $s > 1$. On en déduit le (i).

Le (ii) est, quant à lui, une conséquence de ce que $(\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(s)} = K \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, si $0 < s < 1$ (cf. prop. 5.12). □

Rappelons que ces filtrations permettent (cf. n° 0.3 et n° 0.4) de définir les conducteurs d'Artin et de Swan de V et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$. Le théorème ci-dessus permet de comparer ces invariants :

Corollaire 6.2. — *Si V est une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors*

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) = c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{Sw},K}(V) = c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)).$$

Démonstration. — Le groupe $\mathscr{G}_K$ agissant de manière discrète sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$, le théorème de Hilbert 90 nous donne, si $r \geq 1$, l'égalité

$$\dim_K (\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V))^{\mathscr{G}_K} = \dim_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V),$$

d'où l'on déduit que $\dim_K \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) = \dim_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst}}(V)$ grâce au (i) du théorème 6.1. On en déduit l'égalité des conducteurs de Swan. Pour démontrer celle des conducteurs d'Artin, constatons que

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) - c_{\mathrm{Sw},K}(V) = \dim V - \sum_{0 \leq r < 1} \dim_K \left(\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) / \cup_{s<r} \mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) \right),$$

et comme $\mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) = \mathbf{D}^{(0)}_{\mathrm{dR},K}(V) = K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, on obtient la formule

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) - c_{\mathrm{Sw},K}(V) = \dim V - \dim_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V).$$

Par ailleurs, on a par définition,

$$c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) - c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) = \dim_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) - \dim_{F^{\mathrm{nr}}}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)^{N=0})^{\mathscr{G}_K^0},$$

et comme $(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)^{N=0})^{\mathscr{G}_K^0} = F^{\mathrm{nr}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, on voit que

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) - c_{\mathrm{Sw},K}(V) = c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) - c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)).$$

Ceci permet de conclure. □

6.3. Application aux E-représentations. — Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Une E-représentation de $\mathscr{G}_K$ est un E-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action E-linéaire de $\mathscr{G}_K$. Comme E est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, on peut aussi voir une E-représentation V comme une $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension $[E : \mathbf{Q}_p] \dim_E V$.

Proposition 6.3. — *Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_K$ et si L est une extension finie de K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ sont des $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} (L \cap F^{\mathrm{nr}})$-modules libres.*

Démonstration. — $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} (L \cap F^{\mathrm{nr}})$ est un produit fini d'extensions finies E_i, $i \in I$, de $L \cap F^{\mathrm{nr}}$ et φ permute ces extensions, ce qui permet de montrer que la dimension de la E_i-composante de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ ne dépend pas du choix de i. On en déduit le résultat. □

En général, il est faux que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$ soit un $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} L$-module libre, mais c'est le cas si V est une représentation de de Rham. La proposition précédente permet alors d'étendre tous les résultats du n° 6.2 aux E-représentations et d'obtenir les énoncés mentionnés dans l'introduction.

Remarque 6.4. — Il faut tout de même faire attention au fait que, même si V est de de Rham, la filtration de Hodge sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$ (qui n'est utilisée nulle part dans ce texte) n'est pas, en général, constituée de $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} L$-modules libres. Le cas le plus simple où ce phénomène apparaît étant celui de la représentation V associé au module de Tate d'un groupe de Lubin-Tate associé à E, qui est une E-représentation de $\mathscr{G}_E$ de dimension 1, mais le Fil^0 de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$ est de dimension $[E : \mathbf{Q}_p] - 1$ sur L et donc ne peux pas être un $E \otimes L$ module libre.

Références

[1] A. ABBES & T. SAITO – Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Amer. J. Math.* **124** (2002), p. 879–920.

[2] Y. ANDRÉ – Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.

[3] ———, Représentations galoisiennes et opérateurs de Bessel p-adiques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **52** (2002), p. 779–808.

[4] L. BERGER – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[5] P. COLMEZ – Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[6] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ce volume.

[7] P. DELIGNE – Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, in *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, 1973, p. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[8] ———, Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique 0, in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, 1984, p. 119–157.

[9] J.-M. FONTAINE – Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, Astérisque, vol. 65, Soc. Math. France, 1979, p. 3–80.

[10] ———, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), p. 529–577.

[11] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Astérisque* **223** (1994), p. 59–111.

[12] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[13] ———, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication, 2004.

[14] K. S. KEDLAYA – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 93–184.

[15] Z. MEBKHOUT – Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

[16] J-P. SERRE – *Corps locaux*, Hermann, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

PIERRE COLMEZ, École polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France
Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr

Astérisque

PIERRE COLMEZ

Représentations triangulines de dimension 2

Astérisque, tome 319 (2008), p. 213-258

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__213_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 213–258

REPRÉSENTATIONS TRIANGULINES DE DIMENSION 2

par

Pierre Colmez

Résumé. — Dans cet article, nous définissons la notion de représentation trianguline de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et étudions en détails les représentations triangulines de dimension 2, qui sont l'analogue local des représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires surconvergentes de pente finie.

***Abstract* (2-dimensional trianguline representations).** — In this paper we define the notion of trianguline representation of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, and we study in detail the 2-dimensional trianguline representations which are the local analogue of Galois representations attached to subconvergent finite-slope modular forms.

Introduction

0.1. Notations. — Soit $p \neq 2$ un nombre premier [1]. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et $W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Weil (qui est dense dans $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\deg(g) \in \mathbf{Z}$ l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$ si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})$, alors $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \ker \chi = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$, ce qui permet de voir χ aussi comme un isomorphisme de $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$.

Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$. La notation est justifiée par le fait que $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ est l'ensemble des points L-rationnels d'une variété analytique $\widehat{\mathscr{T}}$. On note juste $x \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère induit par l'inclusion de $\mathbf{Q}_p$ dans L, et $|x|$ le caractère envoyant $x \in \mathbf{Q}_p^*$ sur $p^{-v_p(x)}$. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $w(\delta)$ son *poids*, défini par $w(\delta) = \frac{\log \delta(u)}{\log u}$, où $u \in \mathbf{Z}_p^*$ n'est pas une racine de l'unité.

[1] Le cas $p = 2$ demande de modifier certains des arguments de l'article. Il n'y a en principe aucune difficulté.

© Astérisque 319, SMF 2008

L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $W_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)}\delta(\chi(g)).$$

Si δ est *unitaire* (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$), alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $w(\delta)$ est alors le poids de Hodge-Tate généralisé de δ. Par exemple $x|x|$, qui est unitaire, correspond au caractère cyclotomique χ ; son poids est 1.

0.2. L'espace des paramêtres $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$. — On note (δ_1, δ_2) un élément générique de $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$, et on définit $\mathscr{S}$ comme la variété analytique obtenue en éclatant $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ le long des sous-variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$ et des variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. On a donc une projection de $\mathscr{S}$ sur $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à $\mathbf{P}^1$ dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathscr{S}(L)$ sous la forme $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$, où $\mathscr{L} = \infty \in \mathbf{P}^0(L)$ si la fibre au-dessus de (δ_1, δ_2) est réduite à un point, et $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note $\mathscr{S}_+$ le fermé de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0.$$

Si $s \in \mathscr{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s) \in \mathbf{Q}_+$ et $w(s) \in L$ définis par

$$u(s) = v_p(\delta_1(p)) = -v_p(\delta_2(p)) \quad \text{et} \quad w(s) = w(\delta_1) - w(\delta_2).$$

On partitionne $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, où

- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier $\geqslant 1$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} = \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} \neq \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) = w(s)$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) > w(s)$.

Remarque 0.1. — Les exposants "ng", "cris", "st", "ord" et "ncl" sont respectivement censés faire penser à "non géométrique", "cristalline", "semi-stable", "ordinaire" et "non classique". Cette terminologie vient de la classification des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires surconvergentes.

On partitionne aussi $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_0 \coprod \mathscr{S}_*$, où

- $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des s tels que $u(s) = 0$;
- $\mathscr{S}_*$ est l'ensemble des s tels que $u(s) > 0$.

Si truc $\in \{\mathrm{ng}, \mathrm{cris}, \mathrm{st}, \mathrm{ord}, \mathrm{ncl}\}$ et machin $\in \{+, 0, *\}$, on note $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}^{\mathrm{truc}}$ l'intersection de $\mathscr{S}^{\mathrm{truc}}$ et $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}$. En particulier, les ensembles $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ord}}$ et $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ncl}}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}} = \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$.

0.3. (φ,Γ)-modules. — Soit $\mathscr{R}$ l'anneau de Robba sur L, et soit $\mathscr{E}^\dagger$ le corps des éléments bornés de $\mathscr{R}$. Les anneaux $\mathscr{E}^\dagger \subset \mathscr{R}$ sont munis d'actions du Frobenius φ et de Γ commutant entre elles.

Un (φ,Γ)-*module* sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$ est un module libre de type fini muni d'actions semi-linéaires de φ et de Γ commutant entre elles, telles que $\varphi(D)$ engendre D (en tant que module sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$). Un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est *triangulable* si c'est une extension successive de (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$.

La classification des (φ,Γ)-modules triangulables de rang 2 se ramène, par définition, à celle des (φ,Γ)-modules de rang 1 et de leurs extensions, ce qui fait l'objet du théorème 0.2 ci-dessous.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathscr{R}(\delta)$ le (φ,Γ) module obtenu en multipliant l'action de φ sur $\mathscr{R}$ par $\delta(p)$ et celle de $\gamma \in \Gamma$ par $\delta(\chi(\gamma))$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 0.2. — (i) *Si D est un (φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, il existe un unique $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que $D \cong \mathscr{R}(\delta)$.*

(ii) *Si $\delta_1,\delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1)) = \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R},\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$ est un L-espace vectoriel de dimension 1 sauf si $\delta_1\delta_2^{-1}$ est de la forme x^{-i}, avec i entier $\geqslant 0$, ou de la forme $|x|x^i$, avec i entier $\geqslant 1$; dans ces deux cas, $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ est de dimension 2 et l'espace projectif associé est naturellement isomorphe à $\mathbf{P}^1(L)$.*

Soit $\widetilde{\mathscr{S}}(L)$ l'ensemble des $s = (\delta_1,\delta_2,h)$, où $\delta_1,\delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et $h \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R},\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$. Si $s \in \widetilde{\mathscr{S}}(L)$, on note $D(s)$ l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ définie par h. Si $\alpha \in L^*$ et si $s' = (\delta_1,\delta_2,\alpha h)$, les (φ,Γ)-modules $D(s)$ et $D(s')$ sont isomorphes, ce qui fait que l'espace des paramètres naturels pour décrire les (φ,Γ)-modules non irréductibles de rang 2 sur $\mathscr{R}$ est le champs analytique $\widetilde{\mathscr{S}}/\mathbf{G}_m$. La variété analytique $\mathscr{S}$ introduite ci-dessus correspond à l'ouvert « $h \neq 0$ » des (φ,Γ)-modules non scindés.

0.4. Représentations triangulines. — Rappelons que la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est équivalente [**14, 5**] à la catégorie des (φ,Γ)-modules *étales* sur $\mathscr{E}^\dagger$. Par ailleurs, Kedlaya a établi [**21**] l'existence d'une filtration par les pentes pour les φ-modules sur $\mathscr{R}$; cette filtration est l'analogue de la décomposition de Dieudonné-Manin. Une conséquence de ce théorème de Kedlaya est que la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est aussi équivalente à la catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ qui sont [(2)] de pente 0.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\mathbf{D}^\dagger(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ respectivement les (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ qui lui sont associés. On dit que V est

(2) Un φ-module D sur $\mathscr{R}$ est de pente 0, s'il contient un φ-module Δ étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ tel que l'on ait $D = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \Delta$; le module Δ est alors unique d'après le théorème de Kedlaya.

trianguline[3] si $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ est triangulable. La classification des représentations triangulines[4] de dimension 2 est donc équivalente à celle des (φ,Γ)-module triangulables de pente 0 ; elle repose sur le théorème 0.2 et le théorème de Kedlaya dont un certain nombre de conséquences immédiates sont résumées dans la remarque suivante.

Remarque 0.3. — (i) Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, la pente de $\mathscr{R}(\delta)$ définie par Kedlaya est $v_p(\delta(p))$. Un des points cruciaux pour ce qui suit est qu'une extension de (φ,Γ)-modules peut fort bien être de pente 0 sans que les deux morceaux le soient, mais alors les extensions sont dans le sens opposé à celui permis par le théorème de Kedlaya.

(ii) Le cas scindé n'est pas très passionnant : le module $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si les deux caractères δ_1,δ_2 sont unitaires, la représentation $V(s)$ qui lui correspond est alors la somme directe de δ_1 et δ_2 vus comme des caractères de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(iii) Dans le cas non scindé, si $D(s)$ est de pente 0, alors son déterminant est de pente 0 et $\mathscr{R}(\delta_1)$ est de pente $\geqslant 0$ La première de ces conditions se traduit par $v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0$ et la seconde par $v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0$. Une condition nécessaire pour que $D(s)$ soit de pente 0 si $s \in \mathscr{S}$ est donc que $s \in \mathscr{S}_+$. Cette condition n'est pas suffisante mais presque, comme le montre le (i) du théorème 0.5 ci-dessous.

Si $s \in \mathscr{S}_+$ est tel que $D(s)$ est de pente 0, on note $V(s)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui est associée. Cette représentation est trianguline par construction. Réciproquement, le théorème 0.2 et la discussion précédente montrent que, si V est trianguline, alors il existe $s \in \mathscr{S}_+$ tel que $D(s)$ soit de pente 0 et $V \cong V(s)$.

Remarque 0.4. — Le cas où $s = (\delta_1,\delta_2,\mathscr{L}) \in \mathscr{S}_0$ n'est pas spécialement passionnant car alors δ_1 et δ_2 sont unitaires et $V(s)$ est une extension de δ_2 par δ_1 dont la classe est déterminée par $\mathscr{L}$. En particulier, $V(s)$ n'est pas irréductible.

Théorème 0.5. — (i) *Si $s \in \mathscr{S}_*$, le module $D(s)$ est de pente 0, sauf si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$, auquel cas les pentes sont $u(s) - w(s)$ et $w(s) - u(s)$.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors $V(s)$ est irréductible. Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ord}}$, alors $V(s)$ (tordue par un caractère convenable) devient ordinaire sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ et n'est donc pas irréductible.*

(iii) *Si $s = (\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$ et $s' = (\delta_1',\delta_2',\mathscr{L}')$ sont deux éléments distincts de $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors $V(s) \cong V(s')$ si et seulement si $s,s' \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ et $\delta_1' = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2' = x^{-w(s)}\delta_1$.*

Remarque 0.6. — L'application $s = (\delta_1,\delta_2,\infty) \mapsto s' = (x^{w(s)}\delta_2, x^{-w(s)}\delta_1,\infty)$ est une involution de $\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$

---

[3] Le triangle est un instrument de musique dont le son (triangulin (?)) est presque cristallin...

[4] Dans cet article, nous ne nous intéressons qu'à la dimension 2. Bellaïche et Chenevier [1] ont commencé à regarder la situation en dimension supérieure.

Pour décrire les propriétés de $V(s)$, quand elle existe, il est plus agréable de supposer que la restriction de δ_1 à $\mathbf{Z}_p^*$ est triviale. On peut facilement en déduire ce qui se passe dans le cas général en tordant par un caractère de la manière suivante. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\delta^0 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ coïncide avec celle de δ et qui vérifie $\delta(p) = 1$; en particulier, δ^0 est unitaire ce qui permet de le voir comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, alors $s^0 = (\delta_1(\delta_1^0)^{-1}, \delta_2(\delta_1^0)^{-1}, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, et on a $V(s) = V(s^0)(\delta_1^0)$.

Remarque 0.7. — Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont $w(\delta_1)$ et $w(\delta_2)$; ceux de $V(s^0)$ sont 0 et $-w(s)$.

Théorème 0.8. — (i) *Soit $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*$ tel que la restriction de δ_1 à $\mathbf{Z}_p^*$ soit triviale.*

- *Si $s \in \mathscr{S}_* - \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}} = \mathscr{S}_{\mathrm{irr}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{ord}}$, le L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))^{\varphi=\delta_1(p)}$ est non nul.*
- *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$, alors $V(s)$ devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s))$ est, en tant que représentation de $W_{\mathbf{Q}_p}$, la somme des deux caractères associés à δ_1 et $x^{w(s)}\delta_2$, sauf si ces deux caractères sont égaux, auquel cas c'est l'extension non triviale de ces deux caractères.*
- *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$, alors $V(s)$ est semi-stable ; le module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est, en tant que représentation de $W_{\mathbf{Q}_p}$, la somme des deux caractères associés à δ_1 et $x^{w(s)}\delta_2$, et le paramètre de Fontaine-Mazur* [**25**] *de la filtration est $\mathscr{L}$.*

(ii) *Soit V une L-représentation irréductible de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et $w \in L$, et telle qu'il existe $\alpha \in L^*$ avec $v_p(\alpha) > 0$ et $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ \otimes_L V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha} \neq 0$. Alors il existe $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*$ tel que δ_1 soit trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$, $\delta_1(p) = \alpha$ et $w(s) = -w$, et tel que $V \cong V(s)$ (resp. $V \cong V(x^w\delta_1, x^{-w}\delta_2, \mathscr{L})$) si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ (resp. si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$). De plus,*

- *V devient cristalline sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ si et seulement si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$;*
- *V est semi-stable si et seulement si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$.*

Remarque 0.9. — (i) Il résulte de ce qui précède qu'une L-représentation cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline si et seulement si les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ appartiennent à L, et qu'une représentation semi-stable de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline.

(ii) D'après un théorème de Kisin [**22**], les représentations attachées aux formes modulaires surconvergentes de pente finie vérifient l'hypothèse selon laquelle il existe $\alpha \in L^*$ avec $v_p(\alpha) \geqslant 0$ et $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ \otimes_L V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha} \neq 0$. Ceci nous fournit un morphisme $x \mapsto s(x)$ de variétés analytiques de la courbe de Coleman-Mazur [**7**] dans $\mathscr{S}_+$, mais il se passe quelque chose d'un peu bizarre dans le cas où $s = s(x) = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$ (i.e. dans le cas où x correspond à une forme de poids entier $\geqslant 2$ qui n'est pas classique)

puisque la représentation $V(s)$ n'existe pas. La représentation V_x est alors $V(s')$, où $s' = (\delta_1 x^{-w(s)}, \delta_2 x^{w(s)}, \mathscr{L})$. Notons que $V(s')$ a un comportement très analogue à celui que devrait avoir $V(s)$ puisque ses poids de Hodge-Tate sont 0 et $-w(s)$, et la valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s'))$ est $\delta_1(p)$; sa particularité est que les poids de Hodge-Tate sont « dans l'autre sens » car $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s'))$ est inclus dans $\mathrm{Fil}^{w(s)}$.

0.5. Remerciements. — Les résultats de cet article ont été entrevus et annoncés lors de la conférence « L-functions and Galois representations » de Durham, organisée par D. Burns et J. Nekovář. L'atmosphère de cette conférence, où il a beaucoup été question de familles (de formes modulaires, de représentations galoisiennes...) a joué un grand rôle dans la cristallisation des résultats.

La réception, juste avant la conférence, des notes « Towards a p-adic Langlands programme » de L. Berger et C. Breuil, contenant une définition de la représentation $\Pi(s)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ correspondant [**12**] à $V(s)$ dans le cas cristallin, a joué un rôle évident, mais les travaux de M. Kisin et une question de G. Chenevier (dont la prop. 4.10 constitue la réponse) ont aussi eu une influence décisive en me mettant sur la piste de la représentation galoisienne $V(s)$. Ma première construction de $V(s)$ reposait sur la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie [**9, 11**] ; elle avait l'inconvénient de ne pas fournir directement le (φ, Γ)-module associé, et c'est l'exposé de L. Berger à la conférence de Durham qui m'a fait réaliser la puissance du théorème de Kedlaya pour ce genre de questions.

Je voudrais remercier tous les acteurs mentionnés ci-dessus pour l'influence qu'ils ont eue. Une partie non négligeable de cet article a été rédigée pendant un séjour à Padoue, et je voudrais en profiter pour remercier, de leur hospitalité, B. Chiarellotto et le département de mathématiques de l'université de Padoue.

1. (φ, Γ)-modules et représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$

1.1. (φ, Γ)-modules étales et représentations galoisiennes. — Si Λ est un anneau muni d'un action d'un Frobenius φ, un φ-module D sur Λ est, dans cet article [(5)], un Λ-module libre muni d'une action semi-linéaire de φ telle que, si $e_1, \ldots, e_d$ est une base de D sur Λ, alors il en est de même de $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_d)$.

Si $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, avec $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{N} - \{0\}$, et a et b premiers entre eux, on note $D_{[r]}$ le φ-module sur Λ, de rang b, possèdant une base $e_1, \ldots, e_b$ dans laquelle l'action de φ est donnée par

$$\varphi(e_1) = e_2, \ldots, \varphi(e_{b-1}) = e_b, \ \varphi(e_b) = p^a e_1.$$

(5) On peut relacher cette condition de liberté ; il faut alors imposer que l'application naturelle $\Lambda \otimes_{\varphi(\Lambda)} \varphi(D) \to D$ soit un isomorphisme.

Un φ-module D sur Λ est *élémentaire* s'il est isomorphe à $D_{[r]}$ pour un certain $r \in \mathbf{Q}$ (qui est alors unique).

Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ est un corps complet pour la valuation v_p de corps résiduel $\widetilde{\mathbf{E}}$ qui est algébriquement clos. Un φ-module D sur $\widetilde{\mathbf{B}}$ possède donc une décomposition de Dieudonné-Manin en somme directe de φ-modules élémentaires $D = \oplus_{i\in I} D_{[r_i]}$

Un φ-module D sur $\mathscr{E}^\dagger$ est *de pente* $r \in \mathbf{Q}$ si, dans la décomposition de Dieudonné-Manin de $\widetilde{\mathbf{B}} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}} D$, tous les r_i sont égaux à r. Un φ-module D sur $\mathscr{E}^\dagger$ est *étale* s'il est de pente 0.

Rappelons qu'un (φ, Γ)-*module étale sur* $\mathscr{E}^\dagger$ est un φ-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ muni en plus d'une action semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ.

***Proposition 1.1* ([14, 5]).** — *Les foncteurs* $\mathbf{V}^\dagger$ *et* $\mathbf{D}^\dagger$ *définis par*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^\dagger(D) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}} D)^{\varphi=1}$$

sont inverses l'un de l'autre et établissent une équivalence de catégories entre la catégorie des L*-représentations de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *et celle des* (φ, Γ)*-modules étales sur* $\mathscr{E}^\dagger$.

1.2. Le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya. — Le théorème de Kedlaya ci-dessous va jouer un rôle fondamental dans la suite pour la construction de (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$ et donc de représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

***Proposition 1.2* ([21]).** — *Si* D *est un* φ*-module sur* $\mathscr{R}$*, il existe une unique filtration*

$$0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_h = D$$

et, pour $1 \leqslant i \leqslant h$*, un unique sous-*$\mathscr{E}^\dagger$*-module* Δ_i *de* D_i/D_{i-1}*, non nul, stable par* φ *et isocline de pente* r_i *en tant que* φ*-module sur* $\mathscr{E}^\dagger$*, tels que*

- $r_1 < r_2 \cdots < r_h$;
- $D_i/D_{i-1} = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \Delta_i$ *si* $1 \leqslant i \leqslant h$.

***Définition 1.3*.** — (i) Les rationnels r_i, $1 \leqslant i \leqslant h$ apparaissant dans la proposition 1.2 sont *les pentes de* D.

(ii) D est *de pente* r si $h = 1$ et $r_1 = r$; ceci implique que D contient un unique sous-φ-module $\mathbf{\Delta}(D)$ sur $\mathscr{E}^\dagger$, isocline de pente r, tel que $D = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{\Delta}(D)$.

Rappelons qu'un (φ, Γ)-*module sur* $\mathscr{R}$ est un φ-module sur $\mathscr{R}$ muni en plus d'une action semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ.

***Proposition 1.4*.** — *Si* D *est un* (φ, Γ)*-module sur* $\mathscr{R}$ *de pente* 0*, alors* $\mathbf{\Delta}(D)$ *est stable par* Γ.

Démonstration. — Choisissons une base $e_1, \dots, e_d$ de $\Delta = \mathbf{\Delta}(D)$ sur $\mathscr{E}^\dagger$. C'est donc aussi une base D sur $\mathscr{R}$. Soit A la matrice de γ dans cette base, et, si $n \in \mathbf{N}$ soit B_n la matrice de φ^n. Comme Δ est de pente 0, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, les matrices B_n et B_n^{-1} soient à coefficients dans $p^{-N}\mathscr{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$. On tire de la relation $A = B_n \varphi^n(A)\gamma(B_n^{-1})$, le fait que les coefficients de A restent bornés quand on s'approche de $v_p(T) = 0$, et donc que A est à coefficients dans $\mathscr{E}^\dagger$. Ceci permet de conclure. □

Corollaire 1.5. — *Les foncteurs $\Delta \mapsto \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \Delta$ et $D \mapsto \mathbf{\Delta}(D)$ sont inverses l'un de l'autre et induisent une équivalence de catégories de la catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$ sur la sous-catégorie des (φ, Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ qui sont de pente 0.*

Remarque 1.6. — On peut reformuler le corollaire ci-dessus en disant que l'on ne perd pas d'information en tensorisant par $\mathscr{R}$, ce qui est quand même un peu surprenant car cette opération peut transformer un (φ, Γ)-module irréductible sur $\mathscr{E}^\dagger$ en un (φ, Γ)-module réductible sur $\mathscr{R}$, mais alors les morceaux ne sont pas de pente 0 et les extensions entre les morceaux sont dans le sens opposé à celui permis par le théorème de Kedlaya.

1.3. Application aux représentations galoisiennes

Proposition 1.7. — *Les foncteurs $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}$ et $\mathbf{V}$ définis par*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(D) = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D)^{\varphi=1}$$

sont inverses l'un de l'autre et induisent une équivalence de catégories de la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur celle des (φ, Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ qui sont de pente 0. De plus, on a

$$\mathbf{V}(D) = \mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D)).$$

Démonstration. — Compte tenu des prop. 1.1 et 1.2, il suffit de prouver la formule $\mathbf{V}(D) = \mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D))$. On a $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{\Delta}(D)$, et comme $\mathbf{\Delta}(D)$ est étale, on peut utiliser la proposition A.12 pour caractériser $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{\Delta}(D) \subset \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D$ comme l'ensemble des x tels que la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ soit bornée. On en déduit les égalités,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D)^{\varphi=1} &= (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{\Delta}(D))^{\varphi=1} = \big(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{\Delta}(D))\big)^{\varphi=1} \\ &= \big(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} (\mathbf{B}^\dagger \otimes_L \mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D)))\big)^{\varphi=1} = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \otimes_L \mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D)))^{\varphi=1} \\ &= \mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D)).\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. □

Pour terminer ce n°, rappelons que l'on peut retrouver [2] les modules $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ directement à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$, sans passer par les anneaux de Fontaine. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.8. — *Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \left(\mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{R}} \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)\right)^{\Gamma} = \left(\mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)\right)^{\Gamma}$$
$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \left(\mathscr{R}[1/t, \log T] \otimes_{\mathscr{R}} \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)\right)^{\Gamma} = \left(\mathscr{R}[1/t, \log T] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)\right)^{\Gamma}$$

2. Calculs de groupes de cohomologie

2.1. Le complexe associé à un (φ, Γ)-module. — Ce qui suit a été inspiré par le calcul de la cohomologie galoisienne d'une représentation galoisienne en termes de (φ, Γ)-modules (cf. [**20, 6**]). Pour des généralisations, cf. [**24, 26**].

Soit γ un générateur de Γ (si $p = 2$, il faut un peu modifier les arguments). Si D est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$, on note $C^\bullet(D)$ le complexe

$$0 \xrightarrow{d_0} D \xrightarrow{d_1} D \oplus D \xrightarrow{d_2} D \xrightarrow{d_3} 0\ ,$$

avec $d_1(x) = ((\gamma - 1)x, (\varphi - 1)x)$ et $d_2(x, y) = (\varphi - 1)x - (\gamma - 1)y$. Si $i \in \mathbf{N}$, on note $B^i(D)$ l'image de d_i et $Z^i(D)$ le noyau de d_{i+1}, ce qui permet de définir le i-ème groupe de cohomologie $H^i(D)$ de D comme le quotient de $Z^i(D)$ par $B^i(D)$. On a bien évidemment $H^i(D) = 0$ si $i \notin \{0, 1, 2\}$. Le groupe $H^1(D)$ s'identifie au groupe des extensions de $\mathscr{R}$ par D : si E est une telle extension et $e \in E$ est un relèvement de $1 \in \mathscr{R}$, alors $((\gamma - 1)e, (\varphi - 1)e)$ est un élément de $Z^1(C^\bullet(D))$ dont la classe dans $H^1(D)$ ne dépend pas du choix de e, ce qui nous fournit une application naturelle $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}, D) \to H^1(D)$ qui est un isomorphisme comme on le constate aisément.

Par ailleurs, si $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ est une suite exacte de (φ, Γ)-modules sur $\mathscr{R}$, la suite de complexes associés

$$0 \to C^\bullet(D_1) \to C^\bullet(D) \to C^\bullet(D_2) \to 0,$$

est exacte ; elle donne donc naissance à la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \to H^0(D_1) \to H^0(D) \to H^0(D_2) \to H^1(D_1) \to H^1(D) \to \cdots \to H^2(D_2) \to 0.$$

2.2. Le (φ, Γ)-module associé à un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ et sa cohomologie. — Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ le groupe des caractères continus (et donc localement analytiques) de $\mathbf{Q}_p^*$ dans L^*. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on peut écrire δ de manière unique sous la forme

$$\delta(x) = \alpha^{v_p(x)} \eta(x|x|), \quad \text{avec } \alpha = \delta(p) \in L^* \text{ et } \eta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathscr{O}_L^*.$$

Comme $\mathbf{Z}_p^* = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p) \times (1 + 2p\mathbf{Z}_p)$, où $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$ est le groupe (fini) des racines de l'unité contenues dans $\mathbf{Q}_p$, et comme $1 + 2p\mathbf{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, le caractère η est

déterminé par sa restriction η_0 à $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$ et sa valeur en $1+2p$ qui appartient à $1+\mathfrak{m}_L$ car $\eta(1+2p)^{p^n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ceci permet de voir $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ comme l'ensemble des points L-rationnels d'un groupe analytique rigide $\widehat{\mathscr{T}}$, isomorphe (non canoniquement) à $\mathbf{G}_m \times B(1,1^-) \times \boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, la quantité $\frac{\log \delta(u)}{\log u}$ ne dépend pas du choix de $u \in \mathbf{Z}_p^* - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$. On la note $w(\delta)$; c'est *le poids* ou *le poids de Hodge-Tate* de δ. Il est plus ou moins immédiat que

- $w(\delta) = 0$ si et seulement si δ est localement constant ;
- $w(\delta) \in \mathbf{Z}$ si et seulement si δ est localement algébrique.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathscr{R}(\delta)$ le (φ,Γ)-module obtenu en tordant les actions de φ et Γ sur $\mathscr{R}$ par δ. De manière explicite, si on note $x(\delta)$ l'élément de $\mathscr{R}(\delta)$ correspondant à $x \in \mathscr{R}$, on a

$$\varphi(x(\delta)) = (\delta(p)\varphi(x))(\delta) \quad \text{et} \quad \gamma(x(\delta)) = (\delta(\gamma)\gamma(x))(\delta),$$

où l'on a utilisé l'identification $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Q}_p^*$ pour voir δ comme un caractère de Γ (on a donc $\delta(g) = \delta(\chi(g))$ si $g \in \Gamma$). Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et si $i \in \mathbf{N}$, on note simplement $Z^i(\delta)$, $B^i(\delta)$ et $H^i(\delta)$, les groupes $Z^i(\mathscr{R}(\delta))$, $B^i(\mathscr{R}(\delta))$ et $H^i(\mathscr{R}(\delta))$.

Proposition 2.1. — (i) *Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^0(\delta) = 0$.*
(ii) *Si $i \in \mathbf{N}$, alors $H^0(x^{-i}) = L \cdot t^i$.*

Démonstration. — D'après le lemme A.1, on a $H^0(\delta) = 0$ si $\delta(p)$ n'est pas de la forme p^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, et $H^0(\delta) \subset L \cdot t^i$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$. Le résultat s'en déduit. □

Corollaire 2.2. — *Les (φ,Γ)-modules $\mathscr{R}(\delta)$ et $\mathscr{R}(\delta')$ ne sont isomorphes que si $\delta = \delta'$.*

Démonstration. — En tordant par δ^{-1}, on se ramène à prouver que $\mathscr{R}(\delta)$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{R}$ si $\delta \neq 1$, ce qui suit de ce que $\delta = 1$ est le seul élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que que $\mathscr{R}(\delta)$ soit engendré par $H^0(\delta)$. □

2.3. Calcul de $H^1(\delta)$ dans le cas $v_p(\delta(p)) < 0$. — Rappelons que $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ désigne l'espace des mesures sur $\mathbf{Z}_p^*$ à valeurs dans L.

Lemme 2.3. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$. Alors*
(i) *l'équation $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \lambda$ a une unique solution $b_{\delta,\lambda}$ dans $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$;*
(ii) *$b_{\delta,\lambda} \in \mathscr{E}^+$ si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1} \lambda = 0$.*

Démonstration. — Comme $\int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \lambda \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0} \subset (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, le (i) est un cas particulier du théorème [**5, 6**] selon lequel $\gamma - 1$ est inversible sur $D^{\psi=0}$ si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$.

Prouvons le (ii). L'application $\mu \mapsto \delta^{-1}\mu$ induit un isomorphisme de Γ-modules de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)(\delta)$, ce qui permet de se ramener au cas $\delta = 1$. En utilisant l'isomorphisme $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p^*$ qui induit un isomorphisme $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_L[[\Gamma]] \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ Γ-équivariant, on est ramené à prouver que $\mu \in (\gamma - 1)\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \mu = 0$. Comme $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \gamma(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \mu$, cela nous fournit une des implications, l'autre s'en déduit en remarquant que $(\gamma - 1)\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ est de corang 1 sur $\mathscr{O}_L$ dans $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ car γ est un générateur topologique de Γ. □

Lemme 2.4. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ vérifiant $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i \lambda = 0$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$. Alors l'équation $(\delta(p)\varphi - 1)a = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \lambda$ a une unique solution $a_{\delta,\lambda}$ dans $\mathscr{R}^+$ vérifiant $(\partial^i a_{\delta,\lambda})_{|T=0} = 0$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est une simple traduction du lemme A.1. □

Remarque 2.5. — Par construction, si $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ (et vérifie $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i \lambda = 0$ dans le cas $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$), alors $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in Z^1(\delta)$.

Proposition 2.6. — *Soit $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ un caractère continu vérifiant $v_p(\delta(p)) < 0$.*

(i) Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 1 sur L et l'image de $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda})$ en est une base si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\lambda \neq 0$.

(ii) Si $\delta = x^{-i}$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 2 sur L, et les images de $(t^i, 0)$ et $(0, t^i)$ en forment une base.

Démonstration. — Soit $(a, b) \in Z^1(\delta)$. Comme $v_p(\delta(p)) < 0$, d'après le cor. A.3, il existe $c_0 \in \mathscr{R}$ tel que $b_1 = b - (\delta(p)\varphi - 1)c_0 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$. Soit $a_1 = a - (\delta(\gamma)\gamma - 1)c_0$ de telle sorte que $(a_1, b_1) \in Z^1(\delta)$ a même image que (a, b) dans $H^1(\delta)$. Comme $(a_1, b_1) \in Z^1(\delta)$, et comme $b_1 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, on a $(\delta(p)\varphi - 1)a_1 = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$. D'après le lemme A.4, ceci implique $a_1 \in \mathscr{R}^+$ et donc $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1 \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$.

Soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ la mesure définie par $\int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \lambda = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1$. Si $\delta(p) = p^{-i}$, avec i entier $\geqslant 1$, la relation $(\delta(p)\varphi - 1)a_1 = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \lambda$ entraîne que

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i \lambda = \partial^i((\delta(p)\varphi - 1)a_1)_{|T=0} = (p^i\delta(p) - 1)(\partial^i a_1)_{|T=0} = 0.$$

Le lemme 2.3 implique donc que $b_1 = b_{\delta,\lambda}$ et le lemme 2.4 que $a_1 - a_{\delta,\lambda} \in Lt^i$. Maintenant, si $\delta(p) = p^{-i}$, mais $\delta \neq x^{-i}$, alors $(t^i, 0)$ est le bord de $((\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1)^{-1}t^i, 0)$; pour terminer la démonstration du (i), il suffit donc de vérifier que $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$ si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\lambda = 0$ (en effet, ceci prouve que $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\lambda$ induit un isomorphisme de $H^1(\delta)$ sur L).

Si $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$, il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que $(\delta(p)\varphi - 1)c = b_{\delta,\lambda}$. Comme $\psi(b_{\delta,\lambda}) = 0$, cela entraîne $c \in \mathscr{R}^+$ d'après le lemme A.4, et donc $b_{\delta,\lambda} \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$. D'après le lemme 2.3, ceci implique $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$.

Réciproquement, si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$, il résulte du lemme 2.3 que $b_{\delta,\lambda} \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$. De plus, si $\delta(p) = p^{-i}$, la nullité de

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\,\lambda = \partial^i((\delta(\gamma)\gamma - 1)b_{\delta,\lambda})_{|T=0} = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1)(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0}$$

entraîne celle de $(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0}$ puisque $\delta \neq x^{-i}$ et donc $\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1 \neq 1$. On en déduit, grâce au lemme A.1, l'existence et l'unicité de $c \in \mathscr{R}^+$ vérifiant $(\delta(p)\varphi - 1)c = b_{\delta,\lambda}$ (et $(\partial^i c)_{|T=0} = 0$ si $\delta(p) = p^{-i}$). On a alors

$$(\delta(p)\varphi - 1)((\delta(\gamma)\gamma - 1)c - a_{\delta,\lambda}) = 0,$$

ce qui, grâce au lemme A.1, entraîne que $(\delta(\gamma)\gamma - 1)c - a_{\delta,\lambda} = 0$ et donc que $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$. Ceci permet de conclure. □

(ii) Dans le cas $\delta = x^{-i}$, il faut modifier le raisonnement à deux endroits. Tout d'abord $(t^i, 0)$ n'est plus un bord, et ensuite la condition $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$ est automatique, mais $b_{\delta,\lambda} \in \mathscr{E}^+$ ne vérifie plus nécéssairement la propriété $(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0} = 0$, et donc l'existence de c dans $\mathscr{R}^+$ (et donc dans $\mathscr{R}$) vérifiant $(\delta(p)\varphi - 1)c = 0$ n'est pas automatique. Le résultat s'en déduit.

Remarque 2.7. — Dans le cas, $\delta = |x|$, on peut prendre $(\log \frac{\gamma(T)}{T}, \frac{1}{p}\log \frac{\varphi(T)}{T^p})$ comme générateur de $H^1(\delta)$, ce qui a l'avantage de rendre plus transparent le lien avec les représentations semi-stables.

2.4. L'opérateur $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$. — On déduit des formules

$$\partial \circ \varphi = p\,\varphi \circ \partial \quad \text{et} \quad \partial \circ \gamma = \chi(\gamma)\,\gamma \circ \partial,$$

le fait que ∂ induit un morphisme L-linéaire, commutant à l'action de φ et Γ, de $\mathscr{R}(x^{-1}\delta)$ dans $\mathscr{R}(\delta)$. Ce morphisme induit un morphisme de complexes de $C^\bullet(x^{-1}\delta)$ dans $C^\bullet(\delta)$, et donc aussi un morphisme, encore noté ∂, de $H^i(x^{-1}\delta)$ dans $H^i(\delta)$.

Proposition 2.8. — (i) *Si $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, alors ∂ induit un isomorphisme de $H^1(x^{-1}\delta)$ sur $H^1(\delta)$.*

(ii) *Si $\delta = x$, alors $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nul et $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension 1.*

(iii) *Si $\delta = x|x|$, alors $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nul et $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension 2.*

Démonstration. — Commençons par déterminer le noyau de ∂. Si $\delta = x$, alors $x^{-1}\delta = 1$ et $H^1(x^{-1}\delta)$ est le L-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $(1,0)$ et $(0,1)$ qui sont tués par ∂, ce qui fait que ∂ est identiquement nul sur $H^1(x^{-1}\delta)$.

Si $\delta = x|x|$, alors $x^{-1}\delta = |x|$ et $H^1(x^{-1}\delta)$ est le L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $(\log\frac{\gamma(T)}{T}, \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p})$ dont l'image par ∂ est le bord de $\frac{1+T}{T}$, ce qui fait que ∂ est identiquement nul sur $H^1(x^{-1}\delta)$.

Si $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, et si $(a,b) \in Z^1(x^{-1}\delta)$ est dans le noyau de ∂, alors il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que l'on ait $\partial a = (\delta(\gamma)\gamma - 1)c$ et $\partial b = (\delta(p)\varphi - 1)c$. Ceci implique en particulier que l'on a

$$(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)\mathrm{Res}(c) = (\delta(p) - 1)\mathrm{Res}(c) = 0,$$

et comme $\delta \neq x|x|$, l'une au moins des deux quantités $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)$ ou $(\delta(p) - 1)$ est non nulle, ce qui implique que $\mathrm{Res}(c)$ est nul, et qu'il existe $c' \in \mathscr{R}$ tel que $\partial c' = c$. Soient $a' = a - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)c'$ et $b' = b - (\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)c'$. Par construction, on a $\partial a' = \partial b' = 0$, et donc $a', b' \in L$. Par ailleurs, on a aussi $(\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)b'$, et comme $\delta \neq x$, l'une au moins des deux quantités $(\delta(p)p^{-1} - 1)$ et $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)$ est non nulle, ce qui fait que les couples (a', b') vérifiant la relation ci-dessus forment un L-espace vectoriel de dimension 1, et que l'on peut modifier c' en lui ajoutant un élément de L de telle sorte que $a' = b' = 0$. On en déduit l'injectivité de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ dans le cas $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$.

Passons à l'image de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$. Soit $(a,b) \in Z^1(\delta)$. On a donc $(\delta(p)\varphi - 1)a = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b$, ce qui nous donne la relation

$$(\delta(p) - 1)\mathrm{Res}(a) = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)\mathrm{Res}(b).$$

Si $(\delta(p) - 1) \neq 0$, on peut ajouter à (a,b) un bord de telle sorte que $\mathrm{Res}(b) = 0$, et la relation précédente entraîne alors que $\mathrm{Res}(a) = 0$. Si $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1) \neq 0$, on peut ajouter à (a,b) un bord de telle sorte que $\mathrm{Res}(a) = 0$, et la relation précédente entraîne alors que $\mathrm{Res}(b) = 0$. Autrement dit, si $\delta \neq x|x|$, quitte à ajouter un bord à (a,b), on peut s'arranger pour que $\mathrm{Res}(a) = \mathrm{Res}(b) = 0$. Il existe alors $a', b' \in \mathscr{R}$ tels que $a = \partial a'$ et $b = \partial b'$. Ceci implique que $(\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)b' \in L$, et, comme précédemment, si $\delta \neq x$, on peut ajouter à a' et b' des éléments de L de telle sorte que $(a', b') \in Z^1(x^{-1}\delta)$. On en déduit la surjectivité de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ dans le cas $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, ce qui termine la démonstration du (i).

Si maintenant $\delta = x$, la quantité $d(a,b) = (\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)b' \in L$ ne dépend pas du choix de (a', b') vérifiant $\partial a' = a$ et $\partial b' = b$, ce qui nous fournit une application naturelle de $H^1(\delta)$ dans L qui n'est pas identiquement nulle car, si $b = \varphi(\frac{1}{T}) - \frac{1}{T}$, et si $a \in T\mathscr{R}^+$ est l'unique solution de l'équation $(p\varphi - 1)a = (\varphi - 1)\big(\frac{\chi(\gamma)}{(1+T)^{\chi(\gamma)} - 1} - \frac{1}{T}\big) \in T\mathscr{R}^+$, on peut prendre $b' = \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$, et pour a' la primitive de $(1+T)^{-1}a$ sans terme constant. Alors $d(a,b)$ est le terme constant de

$-(\gamma-1)b' = -\frac{1}{p}(\varphi-p)\log\frac{\gamma(T)}{T}$, et donc $d(a,b) = \frac{p-1}{p}\log\chi(\gamma) \neq 0$. Ceci termine la démonstration du (ii).

Finalement, si $\delta = x|x|$, le raisonnement fait ci-dessus montre que ∂ est une surjection de $Z^1(x^{-1}\delta)$ sur l'ensemble des $(a,b) \in Z^1(\delta)$ vérifiant $\mathrm{Res}(a) = \mathrm{Res}(b) = 0$. Comme $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nulle, cela montre que $H^1(\delta)$ s'identifie à l'image de $Z^1(\delta)$ dans L^2 par $(a,b) \mapsto (\mathrm{Res}(a), \mathrm{Res}(b))$. Or $Z^1(\delta)$ contient les couples $(\frac{1}{T}, b)$, où $b \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ est l'unique solution de l'équation $(\chi(\gamma)\gamma - 1)b = (\varphi-1)\frac{1}{T}$, et $(a, \frac{1}{T}+\frac{1}{2})$, où $a \in T\mathscr{R}^+$ est l'unique solution de l'équation $(\varphi-1)a = (\chi(\gamma)\gamma - 1)(\frac{1}{T}+\frac{1}{2}) \in T\mathscr{O}_L[[T]]$. On en déduit le fait que l'image de $Z^1(\delta)$ dans L^2 par $(a,b) \mapsto (\mathrm{Res}(a), \mathrm{Res}(b))$ est L^2 tout entier, ce qui termine la démonstration du (iii) et donc de la proposition. □

2.5. Dimension de $H^1(\delta)$. — Les résultats des deux § précédents permettent de calculer la dimension de $H^1(\delta)$.

Théorème 2.9. — (i) *Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, ou de la forme $|x|x^i$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 1.

(ii) *Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 2 *engendré par les images de $(t^i, 0), (0, t^i) \in Z^1(\delta)$.*

(iii) *Si $\delta = |x|x^i$, avec $i \geqslant 1$ entier, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration. — • Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 2 d'après le (ii) de la prop. 2.6.

• Si $\delta = x^i$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ a même dimension que $H^1(x)$ comme le montre une récurrence immédiate utilisant le (i) de la prop. 2.8, et donc $H^1(\delta)$ est de dimension 1 d'après le (ii) de la proposition 2.8.

• Si $\delta = x^i|x|$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ a même dimension que $H^1(x|x|)$ d'après le (i) de la prop. 2.8, et donc $H^1(\delta)$ est de dimension 2 d'après le (iii) de la proposition 2.8.

• Dans tous les autres cas, $H^1(\delta)$ a même dimension, pour tout $k \in \mathbf{N}$, que $H^1(x^{-k}\delta)$ d'après le (i) de la prop. 2.8, et comme $v_p(p^{-k}\delta(p)) < 0$ si k est assez grand, le (i) de la prop. 2.6 montre que $H^1(\delta)$ est de dimension 1.

Ceci permet de conclure. □

Corollaire 2.10. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N} - \{1\}$, et vérifiant $v_p(\delta(p)) > 0$. Soit $a \in \mathscr{R}^+$ la solution de $(\delta(p)\varphi - 1)a = (1+T)$, et soit $b \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ la solution de $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b = (1+T)$. Alors $(a,b) \in Z^1(\delta)$ et l'image de (a,b) dans $H^1(\delta)$ est une base de $H^1(\delta)$.*

Démonstration. — L'existence (et l'unicité) de a et b suivent des lemmes A.1 et 2.3. L'appartenance de (a,b) à $Z^1(\delta)$ est une évidence, et la prop. A.5 montre que l'image de (a,b) dans $H^1(\delta)$ est non nulle. Comme $H^1(\delta)$ est de dimension 1, cela permet de conclure. □

Remarque 2.11. — (i) Si $v_p(\delta(p))=0$, l'équivalence de catégories entre (φ,Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ montre que $H^1(\delta)$ est aussi égal au groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta))$. Le théorème 2.9 permet donc de retrouver les résultats classiques selon lesquels, si δ est un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta))$ est de dimension 1 sur L, si $\delta\neq 1$ et $\delta\neq\chi$, et de dimension 2, si $\delta=1$ ou $\delta=\chi$.

(ii) Si $\delta=1$, l'extension de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de L par $L(\delta)$ correspondant à $(0,1)\in H^1(\delta)$ est celle donnée par $g(e_1)=e_1$ et $g(e_2)=e_2-(\deg g)e_1$, où deg : $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathbf{Z}_p$ est le caractère additif non ramifié envoyant un Frobenius sur 1 ; l'extension correspondant à $(1,0)$ est celle donnée par $g(e_1)=e_1$ et $g(e_2)=e_2+\frac{\log\chi(g)}{\log\chi(\gamma)}e_1$.

Définition 2.12. — Si $i\in\mathbf{N}$, on définit un isomorphisme $\mathscr{L}:\mathrm{Proj}(H^1(x^{-i}))\cong\mathbf{P}^1(L)$ en envoyant $h=a(0,1)+b(1,0)$ sur $\mathscr{L}(h)=\frac{a}{b\log\chi(\gamma)}$.

Remarque 2.13. — (i) Si $i=0$ et si $h\in H^1(x^{-i})$ est non nul, le (ii) de la remarque 2.11 montre que la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ définie par h ne dépend, à isomorphisme près, que de $\mathscr{L}(h)$, et que cette représentation est non ramifiée si et seulement si $\mathscr{L}=\infty$ (elle n'est même de Hodge-Tate que si $\mathscr{L}(h)=\infty$).

(ii) On dispose aussi (cf. def. 2.20) d'un isomorphisme naturel $\mathscr{L}:\mathrm{Proj}(H^1(x^i|x|))\cong\mathbf{P}^1(L)$, si i est un entier $\geqslant 1$. Ce dernier permet de retrouver (cf. prop. 4.18) l'invariant $\mathscr{L}$ attaché par Fontaine et Mazur [**25**] à une représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui justifie le nom que lui avons donné.

2.6. Calcul de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$. — Si $N\in\mathbf{N}$, soit ζ_{p^N} une racine primitive p^N-ième de l'unité, choisie de telle sorte que l'on ait $\zeta_{p^{N+1}}^p=\zeta_{p^N}$ quel que soit $N\in\mathbf{N}$. On note L_N la $\mathbf{Q}_p$-algèbre étale $L\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^N})$, que l'on munit de l'action L-linéaire évidente de Γ. Si $\Phi_N=\varphi^{N-1}(T^{-1}\varphi(T))$ est le p^N-ième polynôme cyclotomique, on a aussi $L_N=L[T]/\Phi_N$. On note L_∞ la réunion des L_N, $N\in\mathbf{N}$.

Si $\eta:\mathbf{Z}_p^*\to\mathscr{O}_L^*$ est d'ordre fini, on note $p^{N(\eta)}$ son conducteur (où $N(\eta)$ est défini par $N(\eta)=0$ si $\eta=1$ et $N(\eta)$ est le plus petit entier n tel que η soit trivial sur $1+p^n\mathbf{Z}_p$ si $\eta\neq 1$), on définit la somme de Gauss $G(\eta)$ associée à η par $G(\eta)=1$ si $\eta=1$ et, si $N(\eta)=N\geqslant 1$,

$$G(\eta)=\sum_{x\in(\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^*}\eta(x)\zeta_{p^N}^x\in L_N^*.$$

Proposition 2.14. — *Soit $k \geqslant 1$ un entier.*

(i) *Si $\eta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est d'ordre fini et $0 \leqslant i \leqslant k-1$, alors $G(\eta)t^i$ est vecteur propre pour l'action de Γ agissant par $\eta^{-1}\chi^i$.*

(ii) *Si $N \in \mathbf{N}$, alors $L_N[t]/t^k = \oplus_{N(\eta)\leqslant N} \oplus_{0\leqslant i\leqslant k-1} L \cdot G(\eta)t^i$.*

Démonstration. — Le (i) est un calcul immédiat (et classique). Le (ii) suit de l'indépendance linéaire des caractères et de ce que $|\{\eta,\ N(\eta) \leqslant N\}| = (p-1)p^{N-1} = \dim_L L_N$.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $w(\delta) = 0$, ce qui équivaut à ce que la restriction δ_0 de δ à $\mathbf{Z}_p^*$ soit d'ordre fini, on pose $G(\delta) = G(\delta_0)$ et $N(\delta) = N(\delta_0)$. Si i, k sont deux entiers vérifiant $0 \leqslant i \leqslant k-1$, on note $\pi_{\delta,i}$ la projection de $L_\infty[t]/t^k$ sur $L \cdot G(\delta)t^i$. □

Corollaire 2.15. — (i) *Si $w(\delta) \notin \{1, \dots, k\}$, alors*

$$(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1) : L_n[t]/t^k \to L_n[t]/t^k$$

est un isomorphisme quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

(ii) *Si $w(\delta) \in \{1, \dots, k\}$, et si $n \geqslant N(x^{-w(\delta)}\delta)$, alors le noyau de*

$$(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1) : L_n[t]/t^k \to L_n[t]/t^k$$

est $L \cdot t^{k-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta)$, et l'image est le noyau de $\pi_{x^{-w(\delta)}\delta, k-w(\delta)}$.

Si $r \leqslant \frac{1}{p-1}$, on note $n(r)$ le plus petit entier tel que $(p-1)p^{n-1}r \geqslant 1$.

Proposition 2.16. — (i) *Si $r \leqslant \frac{1}{p-1}$, alors $\mathscr{E}^{]0,r]}/t^k \cong \prod_{n\geqslant n(r)} \mathscr{E}^{]0,r]}/\Phi_n^k$.*

(ii) *Si $(p-1)p^{n-1}r \geqslant 1$, alors $T \mapsto \zeta_{p^n}e^{t/p^n} - 1$ induit un isomorphisme Γ-équivariant de $\mathscr{E}^{]0,r]}/\Phi_n^k$ sur $L_n[t]/t^k$.*

(iii) *$\varphi : \mathscr{E}^{]0,r]} \to \mathscr{E}^{]0,r/p]}$ se traduit, via les isomorphismes précédents, par $\varphi((x_n)_{n\geqslant n(r)}) = (y_n)_{n\geqslant n(r/p)}$, avec $y_n = x_{n-1}$ quel que soit $n \geqslant n(r/p) = n(r)+1$.*

Démonstration. — On a $t = \prod_{n\geqslant n(r)}(p^{-1}\Phi_n)$, à multiplication près par une unité de $\mathscr{E}^{]0,r]}$, ce qui permet d'utiliser le théorème des parties finies de Lazard pour démontrer le (i). Le reste est plus ou moins immédiat. □

Si $w(\delta) = 0$ et $k \geqslant 1$, on choisit $G(\delta, k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}/t^k = \prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = 0$ si $n < N$, et $x_n = \delta(p)^n G(\delta)$ si $n \geqslant N$.

Lemme 2.17. — *Si $w(\delta) = 0$, alors $(\delta(p)\varphi - 1)G(\delta,k)$ et $(\delta(\gamma)\gamma - 1)G(\delta,k)$ appartiennent à $t^k\mathscr{R}$.*

Démonstration. — C'est immédiat au vu de la construction de $G(\delta,k)$ et des prop. 2.14 et 2.16. □

Proposition 2.18. — (i) *Si* $w(\delta) \notin \{1,\dots,k\}$, *alors* $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) = 0$.

(ii) *Si* $w(\delta) \in \{1,\dots,k\}$, *alors* $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ *est un* L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par* $t^{-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta, w(\delta))$.

Démonstration. — Il n'y a rien à démontrer si $k = 0$; nous supposerons donc $k \geqslant 1$. L'application $z \mapsto t^k z$ induit un isomorphisme de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ sur $H^0((\mathscr{R}/t^k)(x^{-k}\delta))$, ce qui nous permet de travailler dans $\mathscr{R}/t^k$ plutôt que dans $t^{-k}\mathscr{R}/\mathscr{R}$.

Si $w(\delta) \notin \{1,\dots,k\}$, il résulte du cor. 2.15, que $(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1)$ est injectif sur $L_n[t]/t^k$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Il est donc aussi injectif sur $\mathscr{R}/t^k$, d'après la proposition 2.16, ce qui démontre le (i).

Si $w(\delta) \in \{1,\dots,k\}$, et si $c \in \mathscr{R}/t^k$ est tué par $(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1)$ et $(\delta(p)p^{-k}\varphi - 1)$, il résulte de la prop. 2.16 que, si on écrit c sous la forme $(c_n)_{n\gg 0}$, avec $c_n \in L_n[t]/t^k$, alors $c_n \in L \cdot G(x^{-w(\delta)}\delta)t^{k-w(\delta)}$ et $c_{n+1} = p^{-k}\delta(p)c_n$, quel que soit $n \gg 0$. Il existe donc $\lambda \in L$ tel que $c = \lambda t^{k-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta, w(\delta))$, ce qui permet de conclure. □

2.7. L'application $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$. — Si k est un entier $\geqslant 1$, la suite exacte $0 \to \mathscr{R}(\delta) \to t^{-k}\mathscr{R}(\delta) \to t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta) \to 0$ donne naissance à une suite exacte longue de cohomologie dont le début est

$$0 \to H^0(\mathscr{R}(\delta)) \to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)) \to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)).$$

On peut utiliser ceci pour analyser le L-espace vectoriel $H^1(x^k|x|)$ qui est de dimension 2 d'après le th. 2.9 : la suite

$$0 \to H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|)) \to H^1(x^k|x|) \to H^1(|x|) \to 0$$

est exacte car $H^0(|x|) = 0$ d'après la prop. 2.1 et donc $H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|))$, qui est de dimension 1 sur L d'après la prop. 2.18, s'injecte dans $H^1(x^k|x|)$, et le quotient, qui est de dimension 1, s'identifie à $H^1(|x|)$ puisque cet espace est lui-aussi de dimension 1 sur L, d'après le th. 2.9. Comme $H^1(|x|)$ est engendré par $(\log\frac{\gamma(T)}{T}, \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p})$, et comme $H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|))$ est engendré par $G(|x|,k)$, on en tire le résultat suivant, en choisissant $G'(|x|,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = \log(\zeta_{p^n}e^{t/p^n} - 1)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Proposition 2.19. — *Si* $k \geqslant 1$, *et si* $h \in H^1(x^k|x|)$, *alors il existe* $\lambda, \mu \in L$, *uniques, tels que* h *soit l'image de* $(a,b) \in Z^1(x^k|x|)$, *avec*

$$a = t^{-k}(\gamma - 1)\big(\lambda G(|x|,k) + \mu(\log T - G'(|x|,k))\big)$$
$$b = t^{-k}(p^{-1}\varphi - 1)\big(\lambda G(|x|,k) + \mu(\log T - G'(|x|,k))\big).$$

Définition 2.20. — Si $k \geqslant 1$, si $h \in H^1(x^k|x|)$ est non nul, et si λ, μ sont les éléments de L fournis par la proposition 2.19, on note $\mathscr{L}(h) \in \mathbf{P}^1(L)$ la quantité $-\frac{p-1}{p}\frac{\lambda}{\mu}$.

Remarque 2.21. — $\mathscr{L}(h) = \infty$ si et seulement si h se trivialise dans $t^{-k}\mathscr{R}$.

Si $k \in \mathbf{N}$, le (φ, Γ)-module $t^{-k}\mathscr{R}(\delta)$ s'identifie naturellement à $\mathscr{R}(x^{-k}\delta)$ et la suite exacte ci-dessus donne naissance à un morphisme naturel $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$.

Théorème 2.22. — (i) *Si $w(\delta) \notin \{1, \dots, k\}$, alors $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $w(\delta) \in \{1, \dots, k\}$ et $\delta \neq x^{w(\delta)}$, $|x|x^{w(\delta)}$, alors l'application de connexion induit un isomorphisme $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \cong H^1(\delta)$ et $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$ est identiquement nul.*

(iii) *Si $\delta = |x|x^{w(\delta)}$, avec $1 \leqslant w(\delta) \leqslant k$, alors $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$ est surjective et son noyau est la droite des $h \in H^1(\delta)$ vérifiant $\mathscr{L}(h) = \infty \in \mathbf{P}^1(L)$.*

(iv) *Si $\delta = x^{w(\delta)}$, avec $1 \leqslant w(\delta) \leqslant k$, alors $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$ est injective et son image est la droite d'invariant $\mathscr{L} = \infty$.*

Démonstration. — On part de la suite exacte

$$0 \to H^0(\delta) \to H^0(x^{-k}\delta) \to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta).$$

Si $w(\delta) \notin \{1, \dots, k\}$, alors $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) = 0$ d'après la proposition 2.18, et $H^1(\delta)$ et $H^1(x^{-k}\delta)$ sont de dimension 1 sur L d'après le théorème 2.9. On en déduit le (i).

Si $w(\delta) \in \{1, \dots, k\}$ et $\delta \neq x^{w(\delta)}$, alors $H^0(x^{-k}\delta) = 0$ d'après la proposition 2.1, et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ s'injecte dans $H^1(\delta)$. Si de plus $\delta \neq |x|x^{w(\delta)}$, alors $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ et $H^1(\delta)$ sont de dimension 1 sur L, d'après la prop. 2.18 et le th. 2.9, et donc l'application de connexion $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(\delta)$ est un isomorphisme et ι_k est nulle. On en déduit le (ii).

Comme le (iii) est contenu dans la prop. 2.19, qui est à la base de la définition de l'invariant $\mathscr{L}$, et dans la rem. 2.21, il ne reste plus que le cas $\delta = x^i$, avec $i \in \{1, \dots, k\}$, à traiter. Dans ce cas, on a $H^0(\delta) = 0$ d'après la proposition 2.1, et $H^0(x^{-k}\delta)$ et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ sont tous deux de dimension 1, d'après les prop. 2.1 et 2.18. On en déduit, en utilisant la suite exacte ci-dessus, que ι_k est injective. Comme $H^1(\delta)$ est de dimension 1, son image par ι_k est une droite de $H^1(x^{-k}\delta)$ qui est de dimension 2 ; elle est donc déterminée par la valeur de $\mathscr{L}(\iota_k(h))$, où $h \in H^1(\delta)$ est non nul. Soit $(a, b) \in Z^1(\delta)$ représentant h ; on a donc $(\chi(\gamma)^i\gamma - 1)b = (p^i\varphi - 1)a$, et $\iota_k(h)$ est représenté par $(t^k a, t^k b)$. On déduit de la relation $(\chi(\gamma)\gamma - 1)t^{i-1}b = (p\varphi - 1)t^{i-1}a$ la nullité de $\mathrm{Res}(t^{i-1}a)$. Ceci permet, en utilisant le lemme A.8, de montrer qu'il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que $(\gamma - 1)c = t^i a$. On a alors $t^k a = (\chi(\gamma)^{i-k}\gamma - 1)(t^{k-i}c)$, ce qui prouve que $(t^k a, t^k b)$ est cohomologue à un multiple de $(0, t^{k-i})$ et donc que $\mathscr{L}(\iota_k(h)) = \infty$. Ceci termine la démonstration du théorème 2.22. □

3. Construction de (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$

3.1. (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$

Proposition 3.1. — *Si D est un (φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, alors il existe $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ unique tel que D soit isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$.*

Démonstration. — L'unicité suit (cor. 2.2) de ce que $\mathscr{R}(\delta)$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{R}(\delta')$ si $\delta \neq \delta'$. Pour montrer l'existence, on se ramène au cas de pente 0, en tordant l'action de φ par un $\alpha \in L^*$ de valuation convenable. Le résultat se déduit alors, via l'équivalence de catégories entre L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$, de la description de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ fournie par la théorie locale du corps de classes. □

3.2. (φ,Γ)-modules triangulables

Lemme 3.2. — *Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *D possède un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$;*

(ii) *D possède un sous-(φ,Γ)-module saturé, de rang 1 sur $\mathscr{R}$.*

Démonstration. — Il n'y a bien évidemment que l'implication (i)⇒(ii) à prouver. Choisissons une base $e_1,\dots,e_d$ de D sur $\mathscr{R}$. Soit D_1 un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, et soit $f \in D_1$ une base de D_1. Écrivons f sous la forme $f = x_1e_1 + \cdots + x_de_d$. Comme $\varphi(f) = bf$ avec $b \in \mathscr{R}^*$ et $\gamma(f) = af$, avec $a \in \mathscr{R}^*$, et comme les matrices de $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_d)$ et $\gamma(e_1),\dots,\gamma(e_d)$, dans la base $e_1,\dots,e_d$, appartiennent à $\mathbf{GL}_d(\mathscr{R})$, on en déduit le fait que l'idéal de $\mathscr{R}$ engendré par $x_1,\dots,x_d$, est stable par γ et φ. Comme $\mathscr{R}$ est un anneau de Bézout, cet idéal est principal, et la stabilité par γ implique qu'on peut trouver un générateur λ de cet idéal de la forme $\lambda = \prod_{n\geqslant n_0}(\Phi_n^{i_n}/p)$, où $\Phi_n = \varphi^{n-1}(T^{-1}((1+T)^p-1))$ est le p^n-ième polynôme cyclotomique. La stabilité par φ implique alors que i_n est décroissante et donc stationnaire pour n assez grand. Si k est la limite de la suite i_n, on a alors $\lambda \sim t^k = T\prod_{n=1}^{+\infty}(\Phi_n/p)$, à multiplication près par une unité de $\mathscr{R}$. En d'autre termes, quitte à remplacer D_1 par $t^{-k}D_1$, on peut s'arranger pour que D_1 soit saturé. Ceci permet de conclure. □

Remarque 3.3. — On a démontré en passant que les sous-(φ,Γ)-modules d'un (φ,Γ)-module D de rang 1 sur $\mathscr{R}$ sont de la forme t^kD, avec $k \in \mathbf{N}$.

Définition 3.4. — Un (φ,Γ)-module D sur $\mathscr{R}$ est dit *triangulable* si c'est une extension successive de (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$, i.e. si D possède une filtration croissante par des sous-(φ,Γ)-modules D_i, pour $0 \leqslant i \leqslant d$, telle que l'on ait $D_0 = 0$, $D_d = D$ et D_i/D_{i-1} est libre de rang 1 si $1 \leqslant i \leqslant d$.

3.3. Le (φ,Γ)-module $D(s)$. — Soit $\widetilde{\mathscr{S}}(L)$ l'ensemble des $s=(\delta_1,\delta_2,h)$, où $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ et $h\in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$. Si $s\in\widetilde{\mathscr{S}}(L)$, on note $D(s)$ l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ définie par h. Le (φ,Γ)-module $D(s)$ ne dépend de h qu'à homothétie près et donc ne dépend que de l'image de s dans $\widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$.

D'après le théorème 2.9, la dimension de $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est 1 sauf si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$ ou si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. Dans ces deux derniers cas, $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est de dimension 2, et on dispose d'un isomorphisme naturel $\mathscr{L}:\mathrm{Proj}(H^1(\delta_1\delta_2^{-1}))\cong\mathbf{P}^1(L)$. Ceci nous permet de décrire le sous-ensemble de $\widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$ des $s=(\delta_1,\delta_2,h)$ avec $h\neq 0$ (correspondant aux (φ,Γ)-modules non scindés) comme l'ensemble des points L-rationnels de la variété analytique $\mathscr{S}$ obtenue en éclatant $\widehat{\mathscr{T}}\times\widehat{\mathscr{T}}$ le long des sous-variétés $\delta_1\delta_2^{-1}=x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$, et des variétés $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. On dispose d'une projection de $\mathscr{S}$ sur $\widehat{\mathscr{T}}\times\widehat{\mathscr{T}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à $\mathbf{P}^1$ dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathscr{S}(L)$ sous la forme $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$, où $\mathscr{L}=\infty$ si la fibre au-dessus de (δ_1,δ_2) est réduite à un point, et $\mathscr{L}\in\mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note $\mathscr{S}_+$ le fermé de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p))+v_p(\delta_2(p))=0\quad\text{et}\quad v_p(\delta_1(p))\geqslant 0.$$

Si $s\in\mathscr{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s)\in\mathbf{Q}_+$ et $w(s)\in L$ définis par

$$u(s)=v_p(\delta_1(p))=-v_p(\delta_2(p))\quad\text{et}\quad w(s)=w(\delta_1)-w(\delta_2).$$

On partitionne $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+=\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}\coprod\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}\coprod\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}\coprod\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}\coprod\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, où

- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier $\geqslant 1$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s)<w(s)$ et $\mathscr{L}=\infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s)<w(s)$ et $\mathscr{L}\neq\infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s)=w(s)$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s)>w(s)$.

On partitionne aussi $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+=\mathscr{S}_0\coprod\mathscr{S}_*$, où

- $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des s tels que $u(s)=0$;
- $\mathscr{S}_*$ est l'ensemble des s tels que $u(s)>0$.

Si $\mathrm{truc}\in\{\mathrm{ng},\mathrm{cris},\mathrm{st},\mathrm{ord},\mathrm{ncl}\}$ et $\mathrm{machin}\in\{+,0,*\}$, on note $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}^{\mathrm{truc}}$ l'intersection de $\mathscr{S}^{\mathrm{truc}}$ et $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}$. En particulier, les ensembles $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ord}}$ et $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ncl}}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}=\mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}}\coprod\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}\coprod\mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$.

Proposition 3.5. — *Si $s=(\delta_1,\delta_2,h)\in\widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$, alors $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si on est dans un des deux cas exclusifs suivants :*

- *$s\in\mathscr{S}_+-\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$;*
- *$h=0$ et δ_1,δ_2 sont unitaires.*

Démonstration. — Si $D(s)$ est de pente 0, alors le déterminant de $D(s)$ est de pente 0, ce qui signifie que $v_p(\delta_1(p)\delta_2(p)) = 0$. De plus, si cette condition est vérifiée, alors d'après le théorème de Kedlaya, $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si il n'a pas de sous-module de pente < 0. En particulier, si $D(s)$ est de pente 0, alors $v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0$ et donc $s \in \mathscr{S}_+$. De même, si $h = 0$, alors $\mathscr{R}(\delta_2)$ est un sous-(φ,Γ)-module de pente $v_p(\delta_2(p))$ de $D(s)$ et donc, si $h = 0$, alors $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si $v_p(\delta_1(p)) = v_p(\delta_2(p)) = 0$. Si $h \neq 0$, la discussion précédente montre que $D(s)$ ne peut être de pente 0 que si $s \in \mathscr{S}_+$.

Supposons donc que $s \in \mathscr{S}_+$, mais que $D(s)$ contient un sous-module D' de pente strictement négative. Comme $\mathscr{R}(\delta_1)$ est de pente $\geqslant 0$, tous ses sous-(φ,Γ)-modules sont de pente $\geqslant 0$, et l'image de D' dans $\mathscr{R}(\delta_2)$ est un sous-(φ,Γ)-module non nul de $\mathscr{R}(\delta_2)$; elle est donc (rem. 3.3) de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, avec $k \in \mathbf{N}$ (et $k \geqslant 1$ car $D(s)$ est supposé non scindé), ce qui fait (th. 2.22) que $h \in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ se trivialise dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$. La pente de D' est alors $k - u(s)$; sa stricte négativité équivaut à $u(s) > k$. On a donc $v_p(\delta_1(p)\delta_2^{-1}(p)) = 2u(s) > 2k \geqslant k+1$; en particulier, $\delta_1\delta_2^{-1}$ n'est pas de la forme x^i ou $x^i|x|$, avec $1 \leqslant i \leqslant k$, ce qui fait que $\iota_k : H^1(\delta_1\delta_2^{-1}) \to H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ est non injective si et seulement si $w(s) = i$, avec i entier, $1 \leqslant i \leqslant k$. Comme ι_k est alors identiquement nulle, l'existence de D' est équivalente à celle d'un entier $k \geqslant 1$ avec $1 \leqslant w(s) \leqslant k < u(s)$, c'est-à-dire à l'appartenance de s à $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Ceci permet de conclure. □

Remarque 3.6. — La même démonstration, en remplaçant « pente < 0 » par « pente $= 0$ » montre que, si $u(s) > 0$, alors $D(s)$ possède un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 et de pente 0 si et seulement si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ et ce sous-(φ,Γ)-module est isomorphe à $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, où $k = w(s)$.

Proposition 3.7. — *Soient $s, s' \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, avec $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ et $s' = (\delta_1', \delta_2', \mathscr{L}')$.*

(i) *Si $\delta_1 = \delta_1'$, alors $D(s) \cong D(s')$ si et seulement si $\delta_2 = \delta_2'$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$.*

(ii) *Si $\delta_1 \neq \delta_1'$, alors $D(s) \cong D(s')$ si et seulement si $s, s' \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ et $\delta_1' = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2' = x^{-w(s)}\delta_1$.*

De plus, on alors $w(\delta_1') = w(\delta_1)$, $w(\delta_2') = w(\delta_2)$, et $D(s) \cong D(s')$ contient un sous (φ,Γ)-module d'indice $t^{w(s)}$ isomorphe à $\mathscr{R}(\delta_1) \oplus \mathscr{R}(\delta_1')$.

Démonstration. — Le (i) est une évidence ; remarquons juste que la condition $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$ est automatique si $\delta_1\delta_2^{-1}$ n'est ni trivial ni de la forme $x^i|x|$ avec i entier $\geqslant 1$.

Passons au (ii), et soit $D = D(s) = D(s')$. Par construction, D contient des sous-(φ,Γ)-modules saturés D_1 et D_1' isomorphes respectivement à $\mathscr{R}(\delta_1)$ et $\mathscr{R}(\delta_1')$ qui sont distincts puisque $\delta_1 \neq \delta_1'$. Mais alors $D' = D_1 \oplus D_1'$ est d'indice fini dans D et est stable par φ et Γ ; il existe donc $k \in \mathbf{N}$ tel que D' soit d'indice t^k dans D, et on a $k \geqslant 1$ car D' est scindé alors que $D = D(s)$ ne l'est pas, par hypothèse.

L'image de D_1 dans $D/D'_1 = \mathscr{R}(\delta'_2)$ est d'indice t^k puisque $D_1 \oplus D'_1$ est d'indice t^k dans D. On en déduit l'identité $\delta_1 = x^k\delta'_2$. Symétriquement, on a $\delta'_1 = x^k\delta_2$. De plus, le fait que D' soit scindé se traduit par la nullité des images de h (élément de $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ relevant $\mathscr{L}$) dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ et h' (élément de $H^1(\delta'_1(\delta'_2)^{-1})$ relevant $\mathscr{L}'$) dans $H^1(x^{-k}\delta'_1(\delta'_2)^{-1})$. D'après le théorème 2.22, cela se traduit par

- $w(s) \in \{1,\dots,k\}$ et $\mathscr{L} = \infty$ si $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{w(s)}|x|$,
- $w(s') \in \{1,\dots,k\}$ et $\mathscr{L}' = \infty$ si $\delta'_1(\delta'_2)^{-1} = x^{w(s')}|x|$.

Des relations $\delta_1 = x^k\delta'_2$ et $\delta'_1 = x^k\delta_2$, on déduit les relations $w(\delta_1) = k + w(\delta'_2)$ et $w(\delta_2) = -k + w(\delta'_1)$, puis $w(s) + w(s') = 2k$. Comme $w(s) \leqslant k$ et $w(s') \leqslant k$ d'après ce qui précède, cela implique $w(s) = w(s') = k$. On en déduit le résultat, les relations $w(\delta'_1) = w(\delta_1)$ et $w(\delta'_2) = w(\delta_2)$ découlant immédiatement des formules précédentes. □

Remarque 3.8. — Si $u(s) > 0$, si $\delta = \delta_1\delta_2^{-1}$ n'est pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N} - \{1\}$, si $a \in \mathscr{R}^+$ est la solution de $(\delta(p)\varphi - 1)a = (1+T)$, et si $b \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ est la solution de $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b = (1+T)$, alors, d'après le cor. 2.10, le $\mathscr{R}$-module $D(s)$ admet une base f_1, f_2 dans laquelle les actions de φ et Γ sont données par

$$\gamma(f_1) = \delta_1(\gamma)f_1, \quad \gamma(f_2) = \delta_2(\gamma)(f_2 + af_1),$$
$$\varphi(f_1) = \delta_1(p)f_1, \quad \varphi(f_2) = \delta_2(p)(f_2 + bf_1).$$

3.4. Le module $D(s,k)$. — Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}^+$, et si k est un entier $\geqslant 1$, on note $D(s,k)$ le sous-(φ,Γ)-module $t^{-k}\mathscr{R}(\delta_1) + D(s)$ de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ et on pose $\delta = x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1}$. Ceci fait de $D(s,k)$ une extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(x^{-k}\delta_1)$ dont la classe n'est autre que $\iota_k(h) \in H^1(\delta)$ si $h \in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est un relèvement de $\mathscr{L}$. L'intérêt d'introduire $D(s,k)$ est que, si $k \gg 0$, alors $v_p(\delta(p)) < 0$, ce qui permet d'utiliser la prop. 2.6 pour obtenir une description « concrète » de $D(s,k)$ puis de $D(s)$.

Proposition 3.9. — *Soient $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+$ et k un entier $> 2u(s)$ tels que $w(s) \notin \{1,\dots,k\}$. Soit $\delta = x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1}$.*

(i) *Il existe λ, A, B et C, où*

- *λ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p^*$ vérifiant $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\lambda \neq 0$,*
- *$A \in \mathscr{R}^+$ vérifie $(\delta(p)\varphi - 1)A = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$,*
- *$B \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ vérifie $(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$,*
- *$C \in \mathscr{R}$ est tel que $A + (\delta(\gamma)\gamma - 1)C \equiv B + (\delta(p)\varphi - 1)C \equiv 0 \bmod t^k$.*

(ii) *Si λ, A, B et C vérifient les conditions du* (i)*, alors $D(s,k)$ possède une base g_1, g_2 dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par*

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \qquad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)(g_2 + Ag_1)$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \qquad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + Bg_1),$$

et telle que $D(s)$ admette $t^k g_1$ et $g_2 + Cg_1$ comme base sur $\mathscr{R}$.

Démonstration. — Soit $(a,b) \in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ dont l'image dans $\mathrm{Proj}(H^1(\delta_1\delta_2^{-1}))$ est non nulle, ce qui fait que $(t^k a, t^k b)$ représente la classe de $D(s,k)$ dans $H^1(\delta)$, et qu'il existe une base f_1, f_2 de $D(s)$ sur $\mathscr{R}$ dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par

$$\gamma(f_1) = \delta_1(\gamma)f_1, \qquad \gamma(f_2) = \delta_2(\gamma)(f_2 + af_1)$$
$$\varphi(f_1) = \delta_1(p)f_1, \qquad \varphi(f_2) = \delta_2(p)(f_2 + bf_1),$$

D'après la prop. 2.6, il existe alors une mesure λ sur $\mathbf{Z}_p^*$, $A \in \mathscr{R}^+$, et $B \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ tels que l'on ait

$$(\delta(p)\varphi - 1)A = (\delta(\gamma)\gamma - 1)B = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \lambda,$$

et il existe $C \in \mathscr{R}$ tel que

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)C = -A + t^k a \quad \text{et} \quad (\delta(p)\varphi - 1)C = -B + t^k b.$$

De plus, ι_k est injective, ce qui implique que l'image de (A,B) dans $H^1(\delta)$ est non nulle et, d'après la proposition 2.6, cela équivaut à $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\lambda \neq 0$. On en déduit le résultat, en posant $g_1 = t^{-k} f_1$ et $g_2 = f_2 - Ct^{-k} f_1$. □

Nous allons maintenant nous intéresser au cas $w(s) \in \{1, \dots, k\}$, laissé de côté dans la prop. 3.9. Rappelons que, si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $w(\delta) = 0$, et si k est un entier $\geqslant 1$, on a choisi $G(\delta,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = 0$ si $n < N(\delta)$ et $x_n = \delta(p)^n G(\delta)$ si $n \geqslant N(\delta)$. Si $\delta = 1$, on peut prendre $G(\delta,k) = 1$, mais nous aurons plutôt besoin de $G'(1,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = n$ si $n \geqslant 1$, de telle sorte que $(\gamma - 1)G'(1,k) \in t^k\mathscr{R}$ et $(\varphi - 1)G'(1,k) \in -1 + t^k\mathscr{R}$. Rappelons que l'on a aussi choisi $G'(|x|,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = \log(\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1)$ si $n \geqslant 1$.

Proposition 3.10. — (i) *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}} \cup \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, si $k \geqslant w(s)$, et si $\delta_1 \neq \delta_2 x^{w(s)}$, alors $D(s,k)$ contient une base g_1, g_2 dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par*

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \qquad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)g_2$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \qquad \varphi(g_2) = \delta_2(p)g_2,$$

et telle que $D(s)$ admette $t^k g_1$, $g_2 - t^{k-w(s)}G(x^{-w(s)}\delta_1\delta_2^{-1}, w(s))g_1$ comme base sur $\mathscr{R}$.

(ii) *Si* $s=(\delta_1,\delta_2,\infty)\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}\cup\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, *si* $k\geqslant w(s)$, *et si* $\delta_1=\delta_2 x^{w(s)}$, *alors* $D(s,k)$ *contient une base* g_1,g_2 *dans laquelle les actions de* Γ *et* φ *sont données par*

$$\gamma(g_1)=\chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1,\qquad \gamma(g_2)=\delta_2(\gamma)g_2$$
$$\varphi(g_1)=p^{-k}\delta_1(p)g_1,\qquad \varphi(g_2)=\delta_2(p)(g_2+t^{k-w(s)}g_1),$$

et telle que $D(s)$ *admette* t^kg_1, $g_2-t^{k-w(s)}G'(1,w(s))g_1$ *comme base sur* $\mathscr{R}$.

(iii) *Si* $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ *(et donc* $\delta_1=\delta_2|x|x^{w(s)}$*), et si* $k\geqslant w(s)$, *alors* $D(s,k)$ *contient une base* g_1,g_2 *dans laquelle les actions de* Γ *et* φ *sont données par*

$$\gamma(g_1)=\chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1,$$
$$\gamma(g_2)=\delta_2(\gamma)(g_2+t^{k-w(s)}(\gamma-1)(\log T-G'(|x|,w(s)))g_1)$$
$$\varphi(g_1)=p^{-k}\delta_1(p)g_1,$$
$$\varphi(g_2)=\delta_2(p)(g_2+t^{k-w(s)}(p^{-1}\varphi-1)(\log T-G'(|x|,w(s)))g_1)$$

et telle que $D(s)$ *admette* t^kg_1, $g_2-\frac{p}{p-1}\mathscr{L}\cdot t^{k-w(s)}G(|x|,w(s))g_1$ *comme base sur* $\mathscr{R}$.

Démonstration. — Dans tous les cas, posons $\delta=\delta_1\delta_2^{-1}$. Le (i) est alors une traduction du fait que l'application de connexion de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ dans $H^1(\delta)$ est un isomorphisme et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ est un L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $t^{k-w(s)}G(x^{-w(s)}\delta_1\delta_2^{-1},w(s))$. De même, le (iii) est une traduction de la définition de l'invariant $\mathscr{L}$ (cf. prop. 2.19 et (iii) du th. 2.22) ; le (ii) quant-à-lui est une traduction du fait que l'application ι_k envoie $H^1(\delta)$ dans la droite engendrée par $(t^{k-w(s)},0)$ de $H^1(x^{-k}\delta)$. □

3.5. Le (φ,Γ)-module $\Delta(s)$

Si $s\in\mathscr{S}_+-\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, on note $\Delta(s)$ le (φ,Γ)-module $\mathbf{\Delta}(D(s))$. C'est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ et notre but est d'en donner une description plus « concrète ». Nous nous restreindrons [6] au cas où il existe un entier $k>2u(s)$ tel que $w(s)\notin\{1,\dots,k\}$, et nous reprenons les notations de la proposition 3.9 ; en particulier, $B\in\mathscr{E}^\dagger$ et $C\in\mathscr{R}$.

Proposition 3.11. — *Si* $x=x_1g_1+x_2g_2\in D(s,k)$, *alors* $x\in\Delta(s)$ *si et seulement si* x *vérifie les deux conditions suivantes*

(i) $x_1-Cx_2\equiv 0\ mod\ t^k$;

(ii) x_1 *est d'ordre* $k-u(s)$ *et* x_2 *est d'ordre* $u(s)$.

Démonstration. — La condition (i) traduit juste l'appartenance de x à $D(s)$. Pour conclure, il suffit donc de démontrer que si $x\in D(s)$, alors $x\in\Delta(s)$ si et seulement si x vérifie (ii). Pour cela, on utilise la caractérisation de $\Delta(s)$ comme l'ensemble des

[6] On pourrait utiliser la proposition 3.10 pour obtenir des résultats du même type dans le cas $w(s)$ entier $\geqslant 1$, mais nous n'en aurons pas besoin.

$x \in D(s)$ tels que la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ soit bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ ou, ce qui revient au même, dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D(s,k)$.

En posant $\alpha_1 = p^k \delta_1(p)^{-1}$ et $\alpha_2 = \delta_2(p)^{-1}$, on obtient

$$\varphi(g_1) = \alpha_1^{-1} g_1 \quad \text{et} \quad \varphi(g_2) = \alpha_2^{-1}(g_2 + Bg_1).$$

on en tire, par récurrence sur n, les formules

$$\varphi^{-n}(g_1) = \alpha_1^n g_1 \quad \text{et} \quad \varphi^{-n}(g_2) = \alpha_2^n g_2 - (\alpha_2^{n-1}\alpha_1\varphi^{-1}(B) + \cdots + \alpha_1^n \varphi^{-n}(B))g_1.$$

Maintenant, si $x = x_1 g_1 + x_2 g_2$, et $\varphi^{-n}(x) = x_{1,n} g_1 + x_{2,n} g_2$, la formule ci-dessus nous fournit les identités

$$x_{1,n} = \alpha_1^n \varphi^{-n}(x_1) - \alpha_2^n \varphi^{-n}(x_2)\Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi^{-1}(B) + \cdots + \frac{\alpha_1^n}{\alpha_2^n}\varphi^{-n}(B)\Big) \quad \text{et} \quad x_{2,n} = \alpha_2^n \varphi^{-n}(x_2).$$

Par ailleurs, comme $v_p(\alpha_1) = k - u(s) \geqslant u(s) = v_p(\alpha_2)$, et comme $B \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$, la suite de terme général

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi^{-1}(B) + \cdots + \frac{\alpha_1^n}{\alpha_2^n}\varphi^{-n}(B)$$

est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$. Les conditions suivantes sont donc équivalentes :

- la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D(s,k)$;
- les suites de terme général $x_{1,n}$ et $x_{2,n}$ sont bornées dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$;
- les suites de terme général $\alpha_1^n \varphi^{-n}(x_1)$ et $\alpha_2^n \varphi^{-n}(x_2)$ sont bornées dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$.

Comme $v_p(\alpha_1) \geqslant 0$ et $v_p(\alpha_2) \geqslant 0$, la dernière condition est équivalente, d'après la proposition A.13, à la condition

- x_1 est d'ordre $v_p(\alpha_1) = k - u(s)$ et x_2 est d'ordre $v_p(\alpha_2) = u(s)$.

Ceci permet de conclure. □

4. Application aux représentations galoisiennes

4.1. Définition des représentations triangulines

Définition 4.1. — Une L-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est dite *trianguline* si $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ est triangulable.

Si $s = (\delta_1, \delta_2, h) \in \widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$ est de pente 0, on note $V(s)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond par l'équivalence de catégories de la prop. 1.7.

Remarque 4.2. — (i) Par construction, la représentation $V(s)$ est trianguline.

(ii) Réciproquement, il résulte de la définition et de la prop. 3.5, qu'une représentation trianguline de dimension 2, qui n'est pas somme directe de deux caractères, est isomorphe à $V(s)$ pour un certain $s \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Par ailleurs, on a $V(s) \cong V(s')$ si et seulement si $D(s) \cong D(s')$ d'après la prop. 1.7. Ceci permet d'utiliser la prop. 3.7 pour obtenir une classification complète des représentations triangulines de dimension 2.

(iii) Des exemples naturels de représentations triangulines de dimension 2 sont fournis par les représentations attachées aux formes modulaires surconvergentes. En effet, Kisin [**22**] a montré qu'elles satisfont la propriété (i) de la prop. 4.3 ci-dessous (avec $\eta = 1$).

Proposition 4.3. — *Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ et $\alpha \in L^*$ tels que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} \neq 0$;*

(ii) *V est trianguline.*

De plus, sous ces conditions, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contienne un sous-(φ,Γ)-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$, avec

$$\delta(x) = x^k \eta^{-1}(x|x|)\alpha^{v_p(x)}.$$

Démonstration. — Soit V une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 telle qu'il existe $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ et $\alpha \in L^*$ tels que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} \neq 0$. D'après la prop. 1.8, quitte à multiplier η par χ^{-k} et α par p^k pour $k \gg 0$, on peut supposer que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))^{\Gamma=1,\varphi=\alpha}$. Le L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))^{\Gamma=1,\varphi=\alpha}$ est alors non nul et toute L-droite qu'il contient est stable par φ et fixe par Γ. Choisissons une telle droite. Le sous-$\mathscr{R}$-module de $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))$ qu'elle engendre est alors stable par φ et Γ, et $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contient un sous-(φ,Γ)-module D_1 de rang 1 sur $\mathscr{R}$. Le lemme 3.2 montre que l'on peut supposer D_1 saturé. Mais alors $D_2 = D/D_1$ est aussi de rang 1 et donc D est une extension de deux (φ,Γ)-modules de rang 1 ; il est donc triangulable, ce qui démontre l'implication (i)⇒(ii).

Réciproquement, si V est trianguline, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contient un sous-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$. Il suffit alors de prendre $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ défini par $\eta(g) = \delta^{-1}(\chi(g))$ pour que $(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta)))^{\Gamma=1,\varphi=\delta(p)}$ soit non nul. Ceci permet de conclure. □

4.2. Poids de Hodge-Tate de $V(s)$. — Dans tout ce qui suit, $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, et notre but est d'étudier en détail la représentation $V(s)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On remarquera que, si η est un caractère unitaire de $\mathbf{Q}_p^*$ (que l'on voit aussi comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), alors

$$V(s) \otimes \eta = V(\eta\delta_1, \eta\delta_2, \mathscr{L}).$$

Le caractère $\delta_1\delta_2$ est unitaire et peut donc être vu comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 4.4. — (i) $\det V(s) = L(\delta_1\delta_2)$.

(ii) $V(s)^* = V(\delta_2^{-1}, \delta_1^{-1}, \mathscr{L})$.

Démonstration. — Le (i) suit de ce que $\det D(s) = \mathscr{R}(\delta_1\delta_2)$ et le (ii) de ce que $V(s)^* = V(s) \otimes (\det V(s))^{-1}$. □

Proposition 4.5. — *Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont $w(\delta_1)$ et $w(\delta_2)$.*

Démonstration. — Il existe une base f_1, f_2 de $D(s)$ dans laquelle l'action de $\gamma \in \Gamma$ est donnée par

$$\gamma(f_1) = \delta_1(\gamma) f_1 \quad \text{et} \quad \gamma(f_2) = \delta_2(\gamma) f_2 + A_\gamma f_1,$$

avec $A_\gamma \in \mathscr{R}$. Si $n \gg 0$, alors $\varphi^{-n}(f_1)$ et $\varphi^{-n}(f_2)$ convergent dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V(s)$ et $g_1 = \theta(\varphi^{-n}(f_1))$, $g_2 = \theta(\varphi^{-n}(f_2))$ forment une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen},n}$ sur L_n. On a alors

$$\gamma(g_1) = \delta_1(\gamma) g_1 \quad \text{et} \quad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma) g_2 + \theta(\varphi^{-n}(A_\gamma)) g_1,$$

ce qui fait que dans la base g_1, g_2, l'opérateur $\Theta_{\mathrm{Sen}} = \lim_{\gamma \to 1} \frac{\gamma - 1}{\chi(\gamma) - 1}$ de Sen est triangulaire supérieur avec $w(\delta_1), w(\delta_2)$ comme coefficients diagonaux. Ceci permet de conclure. □

Proposition 4.6. — (i) *Si $w(\delta_1) = w(\delta_2)$ et $\delta_1 \neq \delta_2$, alors Θ_{Sen} n'est pas semi-simple.*
(ii) *Si $\delta_1 = \delta_2$, alors Θ_{Sen} est semi-simple si et seulement si $\mathscr{L} = \infty$.*

Démonstration. — Quitte à tordre par un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on peut se ramener au cas $w(\delta_1) = w(\delta_2) = 0$, et même s'arranger pour que δ_1 soit trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si Θ_{Sen} est semi-simple, cela implique alors $\Theta_{\mathrm{Sen}} = 0$, et un théorème de Sen ([**27**] ; cf. aussi [**2**]) implique que l'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers un quotient fini. En particulier, $W_{\mathbf{Q}_p}$ agit unitairement sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s))$ qui contient le L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))^{\varphi = \delta_1(p)}$ qui est non nul, car il contient, d'après la prop. 1.8, le module $(D(s)^\Gamma)^{\varphi = \delta_1(p)}$ qui, lui-même, contient $L(\delta_1)$ puisque δ_1 est trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$. Ceci implique que $u(s) = v_p(\delta_1(p)) = 0$ et donc que $V(s)$ est une extension de $L(\delta_2)$ par $L(\delta_1)$. On peut donc trouver une base e_1, e_2 de $V(s) \otimes \delta_2^{-1}$ dans laquelle l'action de $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est donnée par

$$g(e_1) = \delta(g) e_1 \quad \text{et} \quad g(e_2) = e_2 + c(g) e_1,$$

où l'on a posé $\delta = \delta_1 \delta_2^{-1}$ et $g \mapsto c(g)$ est un 1-cocycle continu sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $L(\delta)$, et qui est trivial sur un sous-groupe H d'indice fini de $I_{\mathbf{Q}_p}$ contenu dans $\ker \delta_2$ (la restriction de δ_2 à $I_{\mathbf{Q}_p}$ est d'image finie car δ_2 est localement constant sur $\mathbf{Z}_p^*$).

Si $\delta \neq 1$, on peut trouver $f \in W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ avec $\deg(f) = 1$, tel que $\delta(f) \neq 1$. Choisissons un tel f et soit $c = \frac{c(f)}{\delta(f) - 1}$. Le cocycle $g \mapsto c'(g) = c(g) - (\delta(g) - 1)c$ est alors trivial sur le groupe engendré topologiquement par H et f, et comme H est d'indice fini dans $I_{\mathbf{Q}_p}$ et f engendre topologiquement $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/I_{\mathbf{Q}_p}$, cela montre que $g \mapsto c'(g)$, qui est cohomologue à $g \mapsto c(g)$, est trivial sur un sous-groupe d'indice fini de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme $V(s) \otimes \delta_2^{-1}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, cela implique que $V(s) \otimes \delta_2^{-1}$, et donc aussi $V(s)$, est somme de deux caractères, ce que l'on avait exclu. On en déduit le (i). Le (ii) quant à lui n'est que la définition de l'invariant $\mathscr{L}$ pour $h \in H^1(\delta)$ quand $\delta = 1$. □

4.3. Irréductibilité de $V(s)$

Proposition 4.7. — *Si $u(s) = 0$, alors $V(s)$ est une extension non triviale de $L(\delta_2)$ par $L(\delta_1)$; en particulier, $V(s)$ n'est pas irréductible.*

Démonstration. — C'est une simple conséquence de l'équivalence de catégories de la proposition 1.5 entre (φ,Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. □

Proposition 4.8. — (i) *$V(s)$ est irréductible si et seulement si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, alors $V(s)$ est une extension non triviale de $L(x^{-w(s)}\delta_1)$ par $L(x^{w(s)}\delta_2)$; c'est donc la tordue (par un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) d'une représentation quasi-ordinaire (i.e. devenant ordinaire sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$).*

Démonstration. — Le cas $u(s) = 0$ a été traité dans la proposition 4.7. Nous supposerons donc $s \in \mathscr{S}_*$ dans ce qui suit. Comme $V(s)$ est de dimension 2, elle n'est pas irréductible si et seulement si elle possède une sous-représentation de dimension 1. Via l'équivalence de catégories de la proposition 1.5 entre (φ,Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, cela équivaut à l'existence d'un sous-(φ,Γ)-module de $D(s)$, de rang 1 et de pente 0. Le résultat suit alors de la remarque 3.6. □

Lemme 4.9. — *$D(s)$ contient des (φ,Γ)-modules de rang 1 autres que les $t^k\mathscr{R}(\delta_1)$, pour $k \in \mathbf{N}$, si et seulement si $w(s)$ est un entier $\geqslant 1$, $\delta_1 \neq \delta_2 x^{w(s)}$ et $\mathscr{L} = \infty$. De plus, dans ce dernier cas, ces (φ,Γ)-modules sont de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, pour k entier $\geqslant w(s)$.*

Démonstration. — Soit $D_1 \subset D$ un (φ,Γ)-module de rang 1 qui n'est pas de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_1)$, pour $k \in \mathbf{N}$. Alors D_1 n'est pas colinéaire à $\mathscr{R}(\delta_1)$ et donc la projection de $D(s)$ sur $\mathscr{R}(\delta_2)$ induit un isomorphisme de D_1 sur un sous-(φ,Γ)-module de $\mathscr{R}(\delta_2)$. Un tel module est de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$ et $D(s)$ contient donc un sous-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta_1) \oplus t^k\mathscr{R}(\delta_2)$ qui est scindé, ce qui se traduit par la nullité de l'image par ι_k dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ de $h \in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ relevant $\mathscr{L}$. Le lemme est alors une conséquence directe du th. 2.22. □

Proposition 4.10. — *Si V est une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe deux caractères η_1, η_2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans $\mathscr{O}_L^*$, tels que $w(\eta_1) - w(\eta_2) \notin \mathbf{Z}$ et tels que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta_1)) \neq 0$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta_2)) \neq 0$;*

(ii) *V est somme de deux caractères et la différence de ses poids de Hodge-Tate n'est pas un entier.*

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate ; montrons la réciproque. Si η est un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la condition $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta)) \neq 0$ implique que l'un des poids de Hodge-Tate de V diffère de $-w(\eta)$ par un entier. La condition $w(\eta_1) - w(\eta_2) \notin \mathbf{Z}$

implique donc que la différence des poids de Hodge-Tate de V n'est pas un entier et donc que ni $V(\eta_1)$ ni $V(\eta_2)$ ne sont de Hodge-Tate, ni, a fortiori, cristallines. Ceci implique que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta_1))$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta_2))$ sont de dimension 1. D'après la proposition 4.3, $D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contient alors des sous-(φ,Γ)-modules saturés isomorphes à $\mathscr{R}(\theta_1)$ et $\mathscr{R}(\theta_2)$, avec

$$\theta_1(x) = x^{k_1}\eta_1^{-1}(x|x|)\alpha_1^{v_p(x)} \quad \text{et} \quad \theta_2(x) = x^{k_2}\eta_2^{-1}(x|x|)\alpha_2^{v_p(x)},$$

où $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, et α_1, α_2 sont les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta_1))$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta_2))$ respectivement. Ces deux modules ne sont pas inclus dans un même sous-(φ,Γ)-module de rang 1 de D car $w(\theta_1) - w(\theta_2) = k_1 - w(\eta_1) - k_2 + w(\eta_2)$ n'est pas un entier.

Maintenant, si V n'est pas somme de deux caractères, alors $D \cong D(s)$ pour un certain $s \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$; la différence des poids de Hodge-Tate de V est alors $\pm w(s)$ d'après la prop. 4.5 et donc $w(s) \notin \mathbf{Z}$, ce qui conduit à une contradiction puisque, d'après le lemme 4.9, si $D(s)$ contient des sous-(φ,Γ)-modules de rang 1 non colinéaires, alors $w(s)$ est un entier $\geqslant 1$. Ceci permet de conclure. □

4.4. Représentations potentiellement semi-stables et représentations de Weil-Deligne. — Si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, et si K_0 est l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, un L-$(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi, N)$-module, est un $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0$-module libre de rang fini muni

- d'une action L-linéaire et K_0-semi-linéaire de φ ;
- d'une action L-linéaire et K_0-semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ commutant à celle de φ ;
- d'un opérateur $L\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0$-linéaire nilpotent $N : D \to D$ commutant à $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ et vérifiant $N\varphi = p\varphi N$

Rappelons qu'une Λ-représentation D du groupe de Weil-Deligne de $\mathbf{Q}_p$ (appelée encore Λ-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module) est un Λ-module libre de rang fini muni

- d'un morphisme de groupes $\rho : W_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{GL}(D)$ dont le noyau contient un sous-groupe d'indice fini de $I_{\mathbf{Q}_p}$;
- d'un opérateur nilpotent $N : D \to D$ tel que $N\rho(g) = p^{-\deg g}\rho(g)N$ si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$.

Si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$ et D est un $(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi, N)$-module, on peut aussi voir D comme un $(L\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module en tordant l'action de $g \in W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ par $\varphi^{-\deg g}$, ce qui tue la semi-linéarité de l'action de g sur K_0.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui devient semi-stable sur K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$ est un L-$(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi, N)$-module. De plus, l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ munit $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ d'une filtration admissible par des sous

$L \otimes K$-modules libres [7]. En utilisant la recette décrite ci-dessus, cela permet de voir $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ comme un $(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible.

Remarque 4.11. — Dans le cas particulier où K est une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$, cas auquel nous allons être confronté dans cet article, une représentation qui devient semi-stable sur K devient aussi semi-stable sur $K \cap \mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ qui est totalement ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$. Dans ce qui précède, on a alors $K_0 = \mathbf{Q}_p$ et donc tout est déjà linéaire. De plus, l'action de $W_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ se factorise à travers $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Q}_p^*$, et on retrouve la structure de L-$(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi, N)$ en définissant l'action de φ comme étant celle de $p \in \mathbf{Q}_p^* \cong W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$.

J'ignore s'il y a une recette du même type dans le cas général.

Remarque 4.12. — On fera attention au fait que, si V est semi-stable et donc si $I_{\mathbf{Q}_p}$ agit trivialement sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, les valeurs propres d'un Frobenius de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. un élément de degré 1) sont *les inverses de celles de* φ.

4.5. Cristallinité de $V(s)$. — Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de $\mathbf{Z}$, et si $\alpha, \beta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ sont localement constants, on note $D_{a,b,\alpha,\beta}$ le $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré défini par $D_{a,b,\alpha,\beta} = L \cdot e_1 \oplus L \cdot e_2$, et

- $Ne_1 = Ne_2 = 0$;
- $\begin{cases} g(e_1) = \alpha(g)e_1 \text{ et } g(e_2) = \beta(g)e_2 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ g(e_1) = \alpha(g)e_1 \text{ et } g(e_2) = \alpha(g)(e_2 - (\deg g)e_1) & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases}$;
- $\mathrm{Fil}^i(L_\infty \otimes_L D_{a,b,\alpha,\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > -a, \\ L_\infty \cdot (G(\beta\alpha^{-1})e_1 + e_2) & \text{si } -b < i \leqslant -a \text{ et } \alpha \neq \beta, \\ L_\infty \cdot e_2 & \text{si } -b < i \leqslant -a \text{ et } \alpha = \beta, \\ D_{a,b,\alpha,\beta} & \text{si } i \leqslant -b. \end{cases}$

Ce module est admissible si et seulement si

$$-b \leqslant v_p(\alpha(p)), v_p(\beta(p)) \leqslant -a \quad \text{et} \quad v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p)) = -a - b.$$

On note $S^{\mathrm{cris}}(L)$ (resp. $S^{\mathrm{ord}}(L)$) l'ensemble des (a, b, α, β), où $a, b \in \mathbf{Z}$ vérifient $a \leqslant b$ et $\alpha, \beta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ sont localement constants, et vérifient $v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p)) = -a - b$ et $-b < v_p(\alpha(p)), v_p(\beta(p)) < -a$ (resp. $v_p(\alpha(p)) = -b$ et $v_p(\beta(p)) = -a$, ou $v_p(\alpha(p)) = -a$ et $v_p(\beta(p)) = -b$). Si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L) \cup S^{\mathrm{ord}}(L)$, on note $V_{a,b,\alpha,\beta}$ la L-représentation potentiellement cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont $D_{a,b,\alpha,\beta}$ est le $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}$. Cette représentation devient, par construction, cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$; elle est irréductible si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L)$ et réductible (quasi-ordinaire) si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{ord}}(L)$.

[7] On prendra garde au fait que cette filtration n'est, en général, pas libre sur $L \otimes K$, si on considère des L-représentations de $\mathscr{G}_F$, où F est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, au lieu de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 4.13. — *Si $(a,b,\alpha,\beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L) \cup S^{\mathrm{ord}}(L)$, la représentation $V_{a,b,\alpha,\beta}$ est trianguline. Plus précisément, on a*

$$V_{a,b,\alpha,\beta} \cong V(x^b\alpha, x^a\beta, \infty) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty).$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que, α et β jouant des rôles symétriques, il suffit de démontrer que $V(s) \cong V_{a,b,\alpha,\beta}$, si $s = (x^b\beta, x^a\alpha, \infty)$. Pour cela, il suffit de calculer le module $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ et de vérifier que ce module est isomorphe à $D_{a,b,\alpha,\beta}$ en tant que $W_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré.

Remarquons aussi que, si $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$V_{a,b,\alpha,\beta} \otimes (x|x|)^k \cong V_{a+k,b+k,|x|^k\alpha,|x|^k\beta}$$
$$\text{et} \quad V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty) \otimes (x|x|)^k \cong V(x^{b+k}|x|^k\beta, x^{a+k}|x|^k\alpha, \infty),$$

ce qui permet de se ramener au cas $a = 0$.

D'après les (i) et (ii) de la prop. 3.10, on peut trouver une base g_1, g_2 de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ dans laquelle l'action de γ est donnée par

$$\gamma(g_1) = \beta(\gamma)g_1 \quad \text{et} \quad \gamma(g_2) = \alpha(\gamma)g_2,$$

celle de φ par

$$\begin{cases} \varphi(g_1) = \beta(p)g_1,\ \varphi(g_2) = \alpha(p)g_2 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \varphi(g_1) = \beta(p)g_1,\ \varphi(g_2) = \beta(p)(g_2 + g_1) & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases}$$

et telle que $D(s)$ admette $t^b g_1$, $g_2 - Hg_1$ comme base sur $\mathscr{R}$, où l'on a posé $H = G(\beta\alpha^{-1}, b)$ (resp. $H = G'(1,b)$) si $\alpha \neq \beta$ (resp. si $\alpha = \beta$).

Dans tous les cas g_1, g_2 est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ car $\alpha\circ\chi$ et $\beta\circ\chi$ sont des caractères d'ordre fini de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et les formules ci-dessus montre que, si $\sigma \in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$, alors [8],

$$\begin{cases} \sigma(g_1) = \beta(\sigma)g_1,\ \sigma(g_2) = \alpha(\sigma)g_2 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \sigma(g_1) = \beta(\sigma)g_1,\ \sigma(g_2) = \beta(\sigma)(g_2 - \deg(\sigma)g_1) & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Dans tous les cas, les $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-modules $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s))$ et $D_{a,b,\alpha,\beta}$ sont isomorphes, et il n'y a plus qu'à identifier les filtrations [9]. Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont 0 et $b > 0$; la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(s)) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ est donc complètement déterminée par la donnée du Fil^0 qui est une droite. Un élément x de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ est dans le Fil^0

---

[8] On rappelle que $\delta(\sigma) = \delta(\chi(\sigma))\delta(p)^{-\deg(\sigma)}$, si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, vu comme caractère de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$.

[9] Cela peut se faire sans aucun calcul : ce que nous avons fait jusque-là prouve que $V(s)$ est cristalline ; la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s)) \cong D_{a,b,\alpha,\beta}$ est donc admissible, et il n'y a, à isomorphisme près, qu'une seule filtration admissible sur $D_{a,b,\alpha,\beta}$. Les calculs qui suivent sont juste là pour rassurer l'auteur sur la cohérence de la théorie.

si et seulement si $\iota_n(\varphi^n(x)) \in \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes D(s))$ pour tout $n \gg 0$. Par ailleurs, comme

$$\iota_n(H) \equiv \begin{cases} (\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n G(\beta\alpha^{-1}) & \mod t^b L_n[[t]] \text{ si } \alpha \neq \beta, \\ n & \mod t^b L_n[[t]] \text{ si } \alpha = \beta, \end{cases}$$

on a

$$\iota_n(g_2) \equiv \begin{cases} (\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n G(\beta\alpha^{-1})\iota_n(g_1) & \mod \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes D(s)) \text{ si } \alpha \neq \beta, \\ n\iota_n(g_1) & \mod \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes D(s)) \text{ si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Comme de plus, si $x_1, x_2 \in L_\infty$,

$$\varphi(x_1 g_1 + x_2 g_2) = \begin{cases} \alpha(p)^n((\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n x_1 g_1 + x_2 g_2) & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \beta(p)^n((x_1 + n x_2) g_1 + x_2 g_2) & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases}$$

on obtient la congruence suivante modulo $\mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes D(s))$:

$$\iota_n(\varphi^n(x_1 g_1 + x_2 g_2)) \equiv \begin{cases} \beta(p)^n(x_1 - G(\beta\alpha^{-1})x_2)\iota_n(g_1) & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \beta(p)^n x_1 \iota_n(g_1) & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

On en déduit le fait que $\mathrm{Fil}^0(L_\infty \otimes_L \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s)))$ est la droite des $x_1 g_1 + x_2 g_2$, où $x_1, x_2 \in L_\infty$ vérifient $x_1 - G(\beta\alpha^{-1})x_2 = 0$ (resp. $x_1 = 0$) si $\alpha \neq \beta$ (resp. si $\alpha = \beta$). Ceci permet de conclure. □

Proposition 4.14. — *Si D est un $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible de dimension 2 qui n'est pas somme de deux $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$-module admissibles de dimension 1, alors il existe $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L) \cup S^{\mathrm{ord}}(L)$ tel que $D \cong D_{a,b,\alpha,\beta}$ si et seulement si l'action de $W_{\mathbf{Q}_p}$ se triangule sur L* (et donc se factorise à travers $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$) *;*

Démonstration. — Il suffit de l'écrire. □

Remarque 4.15. — Il est immédiat que

• $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}(L)$ si et seulement si il existe $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L)$ vérifiant $b \geqslant a + 1$ et un caractère $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty) \otimes \delta$;

• $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}(L)$ si et seulement si il existe $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{ord}}(L)$ et un caractère $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty) \otimes \delta$;

Corollaire 4.16. — (i) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation irréductible devenant cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation devenant ordinaire sur extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.*

Remarque 4.17. — La réciproque du (ii) est vraie et ce qui empêche celle du (i) de l'être aussi (outre le cas d'une somme de deux caractères) est juste le fait que les valeurs propres de φ n'ont aucune raison, a priori, d'appartenir à L (mais elles appartiennent en tout cas à une extension quadratique de L).

4.6. Semi-stabilité de $V(s)$. — Si $a < b$ sont deux éléments de $\mathbf{Z}$, si $\alpha \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ est localement constant et si $\mathscr{L} \in L$, on note $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ le $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré défini par $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} = L \cdot e_1 \oplus L \cdot e_2$, et

- $Ne_1 = e_2$ et $Ne_2 = 0$;
- $g(e_1) = \alpha(g)e_1$ et $g(e_2) = p^{\deg g}\alpha(g)e_2$;
- $\mathrm{Fil}^i(L_\infty \otimes_L D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > -a, \\ L_\infty \cdot (e_1 - \mathscr{L}e_2) & \text{si } -b < i \leqslant -a, \\ D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} & \text{si } i \leqslant -b. \end{cases}$

Ce module est admissible si et seulement si $v_p(\alpha(p)) = (-a-b+1)/2$. On note $S^{\mathrm{st}}(L)$ l'ensemble des $(a,b,\alpha,\mathscr{L})$, où $a,b \in \mathbf{Z}$ vérifient $a < b$, où $\mathscr{L} \in L$, et où $\alpha \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $v_p(\alpha(p)) = (-a-b+1)/2$. Si $(a,b,\alpha,\mathscr{L}) \in S^{\mathrm{st}}(L)$, on note $V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ la L-représentation potentiellement semi-stable de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ est le $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}$. Cette représentation devient, par construction, semi-stable sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$; c'est la tordue d'une représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par un caractère d'ordre fini ; elle est irréductible si $b - a \geqslant 2$ et réductible (tordue d'une ordinaire par un caractère d'ordre fini) si $b = a + 1$.

Proposition 4.18. — *Si $(a,b,\alpha,\mathscr{L}) \in S^{\mathrm{st}}(L)$, la représentation $V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ est triangu-line. Plus précisément,*

$$V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} \cong V(x^b|x|\alpha, x^a\alpha, \mathscr{L}).$$

Démonstration. — Remarquons que, si $k \in \mathbf{Z}$ et si $\eta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ est unitaire localement constant, on a

$$V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} \otimes (x|x|)^k\eta \cong V_{a+k,b+k,|x|^k\alpha\eta,\mathscr{L}},$$
$$V(x^b\beta, x^a\alpha, \mathscr{L}) \otimes (x|x|)^k\eta \cong V(x^{b+k}|x|^k\beta\eta, x^{a+k}|x|\alpha\eta, \mathscr{L}),$$

ce qui permet de se ramener au cas $b = 0$ et $\alpha(x) = u^{v_p(x)}|x|^{-1}$. Soit donc $s = (|x|\alpha, x^a\alpha, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ est isomorphe à $D_{a,0,\alpha,\mathscr{L}}$ en tant que $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré.

Soit $k = w(s) = -a > 0$. D'après la prop. 3.10 (avec $\mu = 1$ et $\lambda = -\frac{p}{p-1}\mathscr{L}$) on peut trouver une base f_1, f_2 de $D(s)$ dans laquelle les actions de φ et γ sont données

par

$$\gamma(f_1) = f_1,$$
$$\gamma(f_2) = \chi(\gamma)^{-k}\left(f_2 + t^{-k}(\gamma-1)\left(-\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,k) + \log T - G'(|x|,k)\right)f_1\right),$$
$$\varphi(f_1) = uf_1,$$
$$\varphi(f_2) = pu\left(f_2 + t^{-k}(p^{-1}\varphi-1)\left(-\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,k) + \log T - G'(|x|,k)\right)f_1\right).$$

Le module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ est alors $L\cdot e_1 \oplus L\cdot e_2$, avec $e_1 = f_2 + (\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,k) - \log T + G'(|x|,k))f_1$ et $e_2 = \frac{p-1}{p}f_1$. Les actions de φ et N sont données par

$$\varphi(e_1) = pu\,e_1,\ \varphi(e_2) = u\,e_2,\ Ne_1 = e_2,\ Ne_2 = 0.$$

Le module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ est donc, en tant que $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module, isomorphe à $D_{a,0,\alpha,\mathscr{L}}$. Il ne reste plus qu'à identifier la filtration qui est complètement déterminée par la droite Fil^0.

Par construction, $\iota_n(\log T - G'(|x|,b)) \in t^k L_n[[t]]$ et $\iota_n(G(|x|,b)) \in p^{-n} + t^k L_n[[t]]$, pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit que $\iota_n(e_1) \equiv \frac{p}{p-1}\mathscr{L}p^{-n}\iota_n(f_1) \bmod \mathrm{Fil}^k(L_n((t))\otimes D(s))$.

Maintenant, $x \in \mathrm{Fil}^k\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ si et seulement si $\iota_n(\varphi^n(x)) \in \mathrm{Fil}^k(L_n((t))\otimes D(s))$ quel que soit n assez grand. Si $x_1, x_2 \in L$, on a, d'après ce qui précède,

$$\iota_n(\varphi^n(x_1e_1 + x_2e_2)) = u^n(p^n x_1\iota_n(e_1) + x_2\iota_n(e_2)) \equiv u^n(x_1\frac{p}{p-1}\mathscr{L} + x_2\frac{p}{p-1})\iota_n(g_1)$$

mod $\mathrm{Fil}^k(L_n((t))\otimes D(s))$, ce qui fait que $\mathrm{Fil}^k\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ est la droite d'équation $\mathscr{L}x_1 + x_2 = 0$. Ceci permet de conclure (vu que $k = -a$). □

Remarque 4.19. — Gardons les notations de la démonstration précédente. Soient

$$g_1 = t^{-k}\frac{p}{p-1}f_1 \quad\text{et}\quad g_2 = f_2 + t^{-k}\left(\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,k) + G'(|x|,k)\right)f_1.$$

On a alors

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}g_1, \qquad \gamma(g_2) = \chi(\gamma)^{-k}\left(g_2 + (\gamma-1)\frac{p-1}{p}\log T\, g_1\right)$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}ug_1, \qquad \varphi(g_2) = p^{1-k}u\left(g_2 + (p^{-1}\varphi-1)\frac{p-1}{p}\log T\, g_1\right),$$

et $D(s)$ est le sous-$\mathscr{R}$-module de $\mathscr{R}g_1 \oplus \mathscr{R}g_2$ engendré par $t^k g_1$ et $g_2 - \left(\mathscr{L}G(|x|,k) + \frac{p-1}{p}G'(|x|,k)\right)g_1$. Autrement dit, $D(s)$ est l'ensemble des $x_1g_1 + x_2g_2$ avec $x_1, x_2 \in \mathscr{R}$, et $x_1 + \left(\mathscr{L}G(|x|,k) + \frac{p-1}{p}G'(|x|,k)\right) \equiv 0 \bmod t^k$. De plus,

$$\mathscr{L}G(|x|,k) + \frac{p-1}{p}(G'(|x|,k) - \log T) - p^{-n}\mathscr{L} \quad\text{et}\quad \frac{p-1}{p}(\log T - \log_{\mathscr{L}} T) + p^{-n}\mathscr{L}$$

ont un zéro d'ordre k en $\eta - 1$, si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n} - \boldsymbol{\mu}_{p^{n-1}}$.

En posant $C = -\frac{p-1}{p}\log_{\mathscr{L}} T$, $B = (1-p^{-1}\varphi)C$, et $A = (1-\gamma)C$, en remarquant que $k = w(s) = 2u(s)+1$, et que $u = \delta_1(p)$, et $p^{1-k}u = \delta_2(p)$, cela permet de démontrer le résultat suivant.

Proposition 4.20. — *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$, il existe une base g_1, g_2 de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes D(s)$ dans laquelle l'action de φ et Γ est donnée par*

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \qquad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)(g_2 + \chi(\gamma)^{-k}A\,g_1)$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \qquad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + B\,g_1),$$

et $z_1 g_1 + z_2 g_2 \in \Delta(s)$, si et seulement si z_1 est d'ordre $\frac{w(s)+1}{2}$, z_2 est d'ordre $\frac{w(s)-1}{2}$, et $z_1 - Cz_2$ a un zéro d'ordre k en $\eta - 1$, si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n} - \boldsymbol{\mu}_{p^{n-1}}$, et $n \gg 0$.

Démonstration. — Tout suit de la discussion précédant la proposition, sauf le rabiot concernant l'ordre de z_1 et z_2, mais celui-ci se démontre exactement comme dans la prop. 3.11. On aurait aussi pu utiliser les résultats de [**2**] pour arriver au résultat. □

Proposition 4.21. — *Si D est un $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible de dimension 2 sur lequel $N \neq 0$, alors il existe $(a, b, \alpha, \mathscr{L}) \in S^{\mathrm{st}}(L)$ tel que $D \cong D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$.*

Démonstration. — Il suffit de l'écrire. □

Remarque 4.22. — Il est immédiat que $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}(L)$ si et seulement si il existe $(a, b, \alpha, \mathscr{L}) \in S^{\mathrm{st}}(L)$ et $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s) \cong V(x^b|x|\alpha, x^a\alpha, \mathscr{L}) \otimes \delta$.

Corollaire 4.23. — *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation semi-stable non cristalline. Réciproquement, si V est une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ tordue par un caractère d'une représentation semi-stable non cristalline, alors il existe $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}(L)$ tel que $V \cong V(s)$.*

5. Densité des triangulines et des cristallines

5.1. Étude locale de l'espace des triangulines

Lemme 5.1. — *Soit $\delta_0 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que $\delta_0(p) \notin p^{\mathbf{Z}}$; alors il existe un voisinage $\mathscr{X}$, pour la topologie p-adique, de δ_0 dans $\widehat{\mathscr{T}}(L)$, tel que les équations*

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = (1+T) \quad \text{et} \quad (\delta(p)\varphi - 1)A = (1+T)$$

aient des solutions dans $(\mathscr{E}^{(0,1]}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}})^{\psi=0}$ et $\mathscr{R}^+\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ respectivement.

Démonstration. — Pour l'équation $(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = (1+T)$, on remarque que l'on peut écrire, formellement,

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\delta_0(\gamma) - \delta(\gamma))^k \gamma^k}{((\delta_0(\gamma)\gamma - 1)^{k+1}}.$$

Maintenant, si on applique le second membre à $1+T$, la série converge dans $(\mathscr{E}^{(0,1]}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}})^{\psi=0}$, si $\delta(\gamma)-\delta_0(\gamma)$ est assez petit sur $\mathscr{X}$ (cela suit du fait que l'opérateur $(\delta_0(\gamma)\gamma-1)^{-1}$ est continu sur $(\mathscr{E}^{(0,1]})^{\psi=0}$ d'après [**6**]).

Pour l'équation $(\delta(p)\varphi-1)A=(1+T)$, on choisit $k>-v_p(\delta_0(p))$, et on écrit $1+T$ sous la forme $\sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{i!}+r_k(T)$. Alors l'équation a comme solution

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{i!(\delta(p)p^i-1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\delta(p)^n r_k((1+T)^{p^n}-1),$$

et la série converge car r_k a un zéro d'ordre k en 0 (cf. démonstration du lemme A.1). □

Soit $s_0=(\delta_{1,0},\delta_{2,0},\infty)\in\mathscr{S}_*$, tel que $\delta_0=\delta_{1,0}\delta_{2,0}^{-1}$ vérifie $\delta_0(p)\notin p^{\mathbf{Z}}$. D'après le lemme 5.1, il existe un voisinage $\mathscr{X}$ de s_0 (pour la topologie p-adique), dans $\mathscr{S}_*$, tel que les équations

$$(\delta(\gamma)\gamma-1)B=(1+T)\quad\text{et}\quad(\delta(p)\varphi-1)A=(1+T)$$

aient des solutions dans $(\mathscr{E}^{(0,1]}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}})^{\psi=0}$ et $\mathscr{R}^+\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ respectivement. Soit $D_{\mathscr{X}}$ le (φ,Γ)-module de base h_1,h_2 sur $\mathscr{R}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, avec actions de φ et Γ données par

$$\gamma(h_1)=\delta_1(\gamma)h_1,\quad\gamma(h_2)=\delta_2(\gamma)(h_2+Ah_1),$$
$$\varphi(h_1)=\delta_1(p)h_1,\quad\varphi(h_2)=\delta_2(p)(h_2+Bh_1).$$

Si $s\in\mathscr{X}$, alors $D_{\mathscr{X}}(s)$ est le (φ,Γ)-module $D(s)$ de la rem. 3.8. La représentation $V(s)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est donc $V(s)=(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}}D_{\mathscr{X}}(s))^{\varphi=1}$. Nous allons prouver que $V(s)$ varie analytiquement avec s. Si $\mathscr{X}'\subset\mathscr{X}$ est un voisinage de s_0, on pose

$$D_{\mathscr{X}'}=\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}}D_{\mathscr{X}}\quad\text{et}\quad V_{\mathscr{X}'}=\bigl(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\widehat{\otimes}_{\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}}D_{\mathscr{X}'}\bigr)^{\varphi=1}.$$

Alors $V_{\mathscr{X}'}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}$-module muni d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 5.2. — *Il existe un voisinage $\mathscr{X}'\subset\mathscr{X}$ de s_0 dans $\mathscr{S}_*$ tel que $V_{\mathscr{X}'}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}$-module libre de rang 2, et $V_{\mathscr{X}'}(s)=V(s)$, quel que soit $s\in\mathscr{X}'$.*

Démonstration. — Choisissons $k\in\mathbf{N}$, avec $k>2u(s_0)$, et posons $g_1=t^{-k}h_1$, $g_2=h_2$, $\alpha=x^{-k}\delta_1$, $\beta=\delta_2$, $A'=t^kA$, $B'=t^kB$. Alors l'action de φ et γ dans la base g_1,g_2 est donnée par

$$\gamma(g_1)=\alpha(\gamma)g_1,\quad\gamma(g_2)=\beta(\gamma)(g_2+A'g_1)$$
$$\varphi(g_1)=\alpha(p)g_1,\quad\varphi(g_2)=\beta(p)(g_2+B'g_1),$$

et $V_{\mathscr{X}}$ est l'ensemble des $x_1g_1+x_2g_2$, où $x_1,x_2\in\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ sont tels que $\varphi(x_1g_1+x_2g_2)=x_1g_1+x_2g_2$ et $x_1\equiv0\bmod t^k$. Le calcul de $V_{\mathscr{X}}$ va se faire en plusieurs étapes, en trouvant des bases dans lesquelles l'action de φ est de plus en plus sympathique.

• Étape 1 : on se débarrasse de B'. On écrit $B' \in \mathscr{R}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ sous la forme $B'_+ + B'_-$, avec $B'_+ \in \mathscr{R}^+\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ et $B'_- \in \mathscr{E}^\dagger\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Comme $k > 2u(s_0)$, on a $v_p(\alpha(p)\beta(p)^{-1}) < 0$, ce qui implique que la série $\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha(p)^{-1}\beta(p))^k\varphi^{-k}(B'_-)$ converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Si on note λ^- sa somme, on a $(\alpha(p)\beta(p)^{-1}\varphi - 1)\lambda_- = B'_-$. Par ailleurs, en adaptant la démonstration du lemme 5.1, on montre (en utilisant le fait que $\alpha(p)^{-1}\beta(p) \notin p^{\mathbf{Z}}$), que, quitte à diminuer $\mathscr{X}$, l'équation $((\alpha(p)\beta(p)^{-1}\varphi - 1)\lambda_+ = B'_+$ a une solution dans $\mathscr{R}^+\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Soit $\lambda = \lambda_- + \lambda_+ \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Si on pose $f_1 = g_1$ et $f_2 = g_2 - \lambda g_1$, l'action de φ devient $\varphi(g_1) = \alpha(p)g_1$ et $\varphi(g_2) = \beta(p)g_1$, et la congruence $x_1 \equiv 0 \bmod t^k$ devient $x_1 \equiv \lambda x_2 \bmod t^k$ pour $x_1f_1 + x_2f_2$.

• Étape 2 : on rend α et β constants. Soient $\alpha_0 = \alpha(s_0)(p)$ et $\beta_0 = \beta(s_0)(p)$. Comme $\alpha_0^{-1}\alpha(p)$ et $\beta_0^{-1}\beta$ sont des éléments de S^* valant 1 en s_0, on peut, quitte à diminuer $\mathscr{X}$, trouver des solutions dans $(W(\overline{\mathbf{F}}_p)\widehat{\otimes}S)^*$ aux équations $\varphi(u_1) = \alpha_0^{-1}\alpha(p)u_1$ et $\varphi(u_2) = \beta_0^{-1}\beta u_2$ (si on impose $u_1(s_0) = u_2(s_0) = 1$, ces solutions sont uniques). Si $e_1 = u_1^{-1}f_1$ et $e_2 = u_2^{-1}f_2$, on obtient alors la description suivante de V :

$$V = \{x_1e_1 + x_2e_2,\ x_1, x_2 \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\widehat{\otimes}S,\ \varphi(x_1) = \alpha_0^{-1}x_1,\ \varphi(x_2) = \beta_0^{-1}x_2,\ x_1 \equiv Cx_2 \bmod t^k\},$$

avec $C = \frac{u_1}{u_2}\lambda$.

• Étape 3 : on utilise la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie [**9, 11**]. Soit $h = [L : \mathbf{Q}_p]$. Si $a \in \mathscr{O}_L - \{0\}$, on note $\mathrm{U}_a = \{x \in L \otimes \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}},\ \varphi(x) = ax$. Alors U_a est l'ensemble des $\mathbf{C}_p$-points du L-Espace Vectoriel $\mathbb{U}_a$ qui est de dimension $(h\,v_p(a), 1)$. Par ailleurs, si $k \in \mathbf{N}$, on note B_k le L-espace vectoriel $L \otimes (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$. Alors B_k est l'ensemble des $\mathbf{C}_p$-points du L-Espace Vectoriel $\mathbb{B}_k$ qui est de dimension $(h\,k, 0)$. Comme $V(s_0)$ est de dimension 2, et comme $v_p(\alpha_0^{-1}) + v_p(\beta_0^{-1}) = k$, la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie permet de prouver la surjectivité de l'application

$$\Phi_0 : \mathrm{U}_{\alpha_0^{-1}} \oplus \mathrm{U}_{\beta_0^{-1}} \to \mathrm{B}_k,$$

définie par $\Phi_0(x_1, x_2) = x_1 - C(s_0)x_2$ [son image est l'ensemble des $\mathbf{C}_p$-points d'un L-Espace Vectoriel de dimension $(-h\,v_p(\alpha_0), 1) + (-h\,v_p(\beta_0), 1) - (0, 2) = (h\,k, 0)$]. Par le théorème de l'image ouverte, si W est un supplémentaire fermé de $V(s_0)$ dans $\mathrm{U}_{\alpha_0^{-1}} \oplus \mathrm{U}_{\beta_0^{-1}}$, alors Φ_0 a un inverse continu $\Phi_0^{-1} : \mathrm{B}_k \to W$. Soit $\Phi : (\mathrm{U}_{\alpha_0^{-1}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}) \oplus (\mathrm{U}_{\beta_0^{-1}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}) \to \mathrm{B}_k\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, définie par $\Phi(x_1, x_2) = x_1 - Cx_2$. On peut écrire Φ sous la forme $\Phi_0 + s\Psi$, et $V_{\mathscr{X}}$ est donc l'ensemble des $v = x_1e_1 + x_2e_2$ vérifiant $\Phi_0(v) = -s\Psi(v_s)$, ce que l'on peut réécrire sous la forme $v = v_0 - s\Phi_0^{-1}(\Psi(v))$, avec $v_0 \in V(s_0)$. Comme Φ_0 et Ψ sont linéaires continues, l'application $v \mapsto v_0 - s\Phi_0^{-1}(\Psi(v))$ est contractante si s est assez petit. Quitte à diminuer $\mathscr{X}$, on peut donc supposer que $v \mapsto v_0 - s\Phi_0^{-1}(\Psi(v))$ est contractante dans $\mathrm{U}_{\alpha_0^{-1}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}} \oplus \mathrm{U}_{\beta_0^{-1}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$; elle admet alors un unique point fixe v, et ce point fixe prend la valeur v_0 en s_0. On en déduit le résultat. □

Remarque 5.3. — (i) Comme tous les Espaces Vectoriels considérés dans la démonstration sont munis d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on aurait pu utiliser la théorie des presque $\mathbf{C}_p$-espaces vectoriels [**17**] dans l'étape 3, au lieu de celle des Espaces Vectoriels de dimension finie.

(ii) On aurait pu aussi utiliser une version « en famille » des théorèmes à la Dieudonné-Manin de Kedlaya. Il y a d'ailleurs une concordance assez frappante entre ce que permettent de démontrer ces théorèmes de Kedlaya et la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie.

(iii) Comme Kisin me l'a fait remarquer, la prop. 5.2 peut aussi se déduire (cf. [**23**]) des résultats de [**22**].

5.2. La fougère infinie. — On continue à supposer $p \neq 2$. Un *atome galoisien de dimension* 2 est une k_L-représentation $\overline{V}$ de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ absolument indécomposable (i.e. qui ne devient somme de deux caractères sur aucune extension finie de k_L), qui n'est pas la tordue d'une extension de ω par 1, où ω désigne le caractère cyclotomique modulo p. Si $p \geqslant 5$, toute L-représentation absolument irréductible de dimension 2 possède (quitte à faire une extension quadratique non ramifiée de L, si jamais $\overline{V}$ n'est pas absolument indécomposable) un réseau dont la réduction est un atome galoisien de dimension 2, mais si $p = 3$, il y a quelques contrexemples dûs au fait que $\omega = \omega^{-1}$.

Si $\overline{V}$ est un atome galoisien de dimension 2, et si $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ est une base de $\overline{V}$ sur k_L, on note $\mathscr{X}_{\overline{V}}$ l'espace des déformations encadrées de $\overline{V}$ (Si A est une $\mathscr{O}_L$-algèbre locale, un point de $\mathscr{X}_{\overline{V}}(A)$ est un triplet (V, e_1, e_2), où V est une A-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et e_1, e_2 forment une base de V sur A se réduisant en $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ modulo $\mathfrak{m}_A$. D'après Kisin, l'espace $\mathscr{X}_{\overline{V}}$ est une boule de dimension 9.

Un point s de $\mathscr{X}_{\overline{V}}(L) = \mathscr{X}_{\overline{V}}(\mathscr{O}_L)$ nous fournit en particulier une L-représentation $V(s)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On note $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{cris}}(L)$ l'ensemble des points s de $\mathscr{X}_{\overline{V}}(L)$ tels que V_s est cristalline. De même, on note $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{tr}}(L)$ l'ensemble des points s de $\mathscr{X}_{\overline{V}}(L)$ tels que V_s est trianguline.

Théorème 5.4. — *Si $\overline{V}$ est un atome galoisien, les ensembles $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{cris}}(L)$ et $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{tr}}(L)$ sont Zariski denses dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}$.*

Démonstration. — Soit $Z = \mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{cris}}(L) \cap \mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{tr}}(L)$ (une représentation cristalline V n'est trianguline que si les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ appartiennent à L, ce qui fait que Z est strictement inclus dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{cris}}(L)$). On va en fait prouver que Z est Zariski dense dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}$. La démonstration repose sur un argument très semblable à celui de la « fougère infinie » de Gouvêa-Mazur [**18**]. Le point clé est que les éléments de Z apparaissent deux fois dans l'espace $\mathscr{S}$, ce qui suggère que l'image de l'application

$\mathscr{S} \to \mathscr{X}_{\overline{V}}$ a beaucoup trop de points doubles pour ne pas être Zariski dense. Le lemme suivant fait partie du folklore.

Lemme 5.5. — (i) *Z n'est pas vide.*

(ii) *Z contient des points (V, e_1, e_2), avec V irréductible.*

Démonstration. — La prop. 5.2 permet de déduire le (ii) du (i) [10] à condition de prouver que l'on peut trouver un point $V(s)$ de Z, avec $s \in \mathscr{S}$ vérifiant $u(s) > 0$. Comme un élément de Z correspond à deux points de $\mathscr{S}$, et qu'il y a toujours un des deux points dans $\mathscr{S}_*$ (cf. (iii) du th. 0.6), il suffit en fait de prouver que Z est non vide. Ceci se fait cas par cas.

• Si $\overline{V}$ est irréductible, alors on peut la relever en une représentation cristalline, obtenue en tordant par un caractère une induite d'une puissance symétrique de la représentation attachée à un Lubin-Tate pour $\mathbf{Q}_{p^2}$.

• Si $\overline{V}$ n'est pas irréductible, on peut supposer, quitte à tordre par un caractère, que c'est une extension de k_L par $k_L(\delta)$.

– Si $\delta \notin \{1, \omega\}$, il y une seule telle extension, et on peut relever δ en un caractère de la forme $x^k\delta_0$, où $k > 0$ et δ_0 est constant sur $\mathbf{Z}_p^*$; l'extension de 1 par $x^k\delta_0$ est alors une représentation cristalline ordinaire (de poids de Hodge-Tate 0 et k) possédant un réseau dont la réduction est $\overline{V}$.

– Les extensions de 1 par ω sont classifiées par un invariant $\mathscr{L}$ qui est la réduction modulo p de l'invariant $\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur pour les extensions de 1 par le caractère cyclotomique. On peut alors utiliser la formule de Greenberg-Stevens [**19**], interprétant cet invariant comme une dérivée logarithmique de valeur propre de Frobenius (par rapport au poids de Hodge-Tate), pour prouver qu'il existe une représentation cristalline ordinaire de poids de Hodge-Tate 0 et $p = 1 + (p-1)$ se réduisant sur $\overline{V}$.

– De même, les extensions de 1 par 1 sont classifiées par un invariant $\mathscr{L}$, et il est assez facile de prouver que les extensions de 1 par $(|x|x)^{(p-1)(1+p\alpha)}(1+\beta)^{v_p(x)}$, avec $\alpha \in \{0, \dots, p-1\}$ et $\beta \in \mathfrak{m}_L$, fournissent toutes les extensions dont on a besoin en réduction modulo $\mathfrak{m}_L$.

Revenons à la démonstration du th. 5.4. Soit $x_0 = (V_0, e_{1,0}, e_{2,0}) \in Z$, avec V_0 irréductible. Il existe alors un voisinage $\mathscr{X}(x_0)$ de x_0 dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}$ pour la topologie p-adique, une $\mathscr{O}_{\mathscr{X}(x_0)}$-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 et une base e_1, e_2 de V sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}(x_0)}$, telles que $V(x_0) = V_0$, $e_1(x_0) = e_{1,0}$ et $e_2(x_0) = e_{2,0}$. Le choix de e_1, e_2 permet de trivialiser l'application $(V, e_1, e_2) \mapsto V$ dans un voisinage de x_0, ce qui permet, quitte à diminuer $\mathscr{X}(x_0)$, d'écrire $\mathscr{X}(x_0)$ sous la forme d'un produit

(10) Elle permet de montrer qu'il passe, par un point cristallin, une sous-variété de codimension 1 contenant des tas de points cristallins avec un des poids de Hodge-Tate tendant vers l'infini, alors qu'une des valeurs propres de Frobenius et l'autre poids de Hodge-Tate restent bornés ; chacun de ces points fournit une représentation irréductible.

$\mathscr{Y}(x_0) \times \mathscr{B}$, où $\mathscr{Y}(x_0)$ est un voisinage p-adique de V_0 dans l'espace des déformations de $\overline{V}$ (qui est lisse au voisinage de V_0, puisque V_0 est irréductible) et $\mathscr{B}$ est une boule de l'espace de dimension 4, l'application $\mathscr{Y}(x_0) \times \mathscr{B} \to \mathscr{X}(x_0)$ envoyant $(V(s), a, b, c, d)$ sur $(V(s), (1+pa)e_1(s) + pce_2(s), pbe_1(s) + (1+pd)e_2(s))$.

Comme $\mathscr{X}_{\overline{V}}$ est irréductible, $\mathscr{X}(x_0)$ est Zariski dense dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}$, et il nous suffit de prouver que $Z \cap \mathscr{X}(x_0)$ est Zariski dense dans $\mathscr{X}(x_0)$, ou encore, en utilisant la factorisation ci-dessus, que l'ensemble $Y \cap \mathscr{Y}(x_0)$ est Zariski dense dans $\mathscr{Y}(x_0)$, où Y désigne l'ensemble des L-représentations cristallines triangulines dont la réduction est $\overline{V}$.

Si $t \in \mathscr{S}_*$ est tel que $V(t) \in \mathscr{Y}(x_0)$, il existe, d'après la prop 5.2, un voisinage $\mathscr{S}(t)$ dans $\mathscr{S}_*$ tel que $V(s) \in \mathscr{Y}(x_0)$, quel que soit $s \in \mathscr{S}(t)$. De plus, toujours d'après la prop. 5.2, l'application $s \mapsto V(s)$ est analytique sur $\mathscr{S}(t)$, et comme elle est injective (puisque $V(s) \cong V(s')$ n'arrive que très rarement, et implique que s et s' sont loin dans $\mathscr{S}_*$), on en déduit le fait que l'adhérence de Zariski $\mathscr{Z}_t$ de l'image de $\mathscr{S}(t)$ dans $\mathscr{Y}(x_0)$ est de dimension 4 (au moins), et donc est de codimension 1 (au plus).

Maintenant, choisissons $s_0 = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_*$ tel que $V(s_0) \cong V_0$. Soit $f \in \mathscr{O}_{\mathscr{Y}(x_0)}$ identiquement nul sur $Y \cap \mathscr{Y}(x_0)$. En particulier, il existe $N \geqslant 0$ tel que f est nulle sur

$$W(n, k, y_1, y_2) = V(\delta_1 \exp((n+k)\log x + y_1 v_p(x)), \delta_2 \exp(k \log x + y_2 v_p(x)), \infty),$$

si $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$ sont divisibles par $(p-1)p^N$ et si $y_1, y_2 \in \mathscr{O}_L$ ont une valuation $\geqslant N$. Comme $(p-1)^N\mathbf{N} \times (p-1)p^N\mathbf{Z} \times (p^N\mathscr{O}_L)^2$ est Zariski dense dans $\mathscr{S}(s_0)$, on en déduit le fait que f est identiquement nul sur $\mathscr{Z}_{s_0}$. Par ailleurs, la représentation $W(n,0,0,0)$ est aussi isomorphe à $V(t_n)$, où t_n est l'élément $(\delta_2 x^{n+w(s_0)}, \delta_1 x^{-(n+w(s_0))}, \infty)$ de $\mathscr{S}$. Les arguments qui ont permis de montrer que f est nulle sur $\mathscr{Z}_{s_0}$, montrent de même que f est identiquement nulle sur $\mathscr{Z}_{t_n}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Si n est assez grand, $u(t_n) = n + w(s_0) + v_p(\delta_2(p))$ n'est pas égal à $u(s_0)$, ce qui fait que $t_n \notin \mathscr{S}(s_0)$, et donc que $\mathscr{Z}_{t_n}$ n'est pas inclus dans $\mathscr{Z}_{s_0}$. Par ailleurs, $\mathscr{Z}_{s_0} \cap \mathscr{Z}_{t_n}$ contient l'image de l'ensemble des $(\delta_1 \exp((n+z)\log x + y_1 v_p(x)), \delta_2 \exp(k \log z + y_2 v_p(x)), \infty)$, pour $y_1, y_2, z \in \mathscr{O}_L$ de valuation suffisamment grande. On en déduit que la réunion des $\mathscr{Z}_{s_0} \cap \mathscr{Z}_{t_n}$ est Zariski dense dans $\mathscr{Z}_{s_0}$. Soit alors r l'ordre du zéro de f sur $\mathscr{Z}_{s_0}$. Il résulte de ce qui précède que f a un zéro d'ordre au moins $r+1$ sur $\mathscr{Z}_{s_0} \cap \mathscr{Z}_{t_n}$, pour tout n. Comme la réunion des $\mathscr{Z}_{s_0} \cap \mathscr{Z}_{t_n}$ est Zariski dense dans $\mathscr{Z}_{s_0}$, cela implique que f a un zéro d'ordre $r+1$ sur $\mathscr{Z}_{s_0}$. On a donc $r = +\infty$, ce qui implique que f est identiquement nulle sur $\mathscr{Y}(x_0)$. Ceci permet de conclure. □

Remarque 5.6. — Si $p = 3$ et $\overline{V}$ est la tordue d'une extension de 1 par ω, la démonstration précédente prouve que l'ensemble Z des triangulines cristallines est Zariski dense dans toute composante irréductible du champs des déformations de $\overline{V}$ contenant un élément irréductible de Z.

Question 5.7. — (i) Le th. 5.4 s'étend-il en dimension supérieure ? La différence entre la dimension de l'espace des représentations de dimension n de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et celui des triangulines est $\frac{n(n-1)}{2}$ qui est > 1 si $n \geqslant 3$. La démonstration précédente ne s'étend donc pas sans modification, mais Chenevier [4] a obtenu des résultats allant dans le sens d'une réponse positive.

(ii) Est-ce que l'ensemble des représentations cristabélines (une représentation est cristabéline si elle devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$) à poids de Hodge-Tate 0 et 1 est Zariski dense dans l'espace de tous les représentations ?

A. Compléments à [12]

A.1. Compléments sur $\mathscr{R}$

Lemme A.1. — (i) *Si $\alpha \in L^*$ n'est pas de la forme p^{-i}, $i \in \mathbf{N}$, alors $\alpha\varphi - 1 : \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $\alpha = p^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors le noyau de $\alpha\varphi - 1 : \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ est la droite $L \cdot t^i$, et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ est dans l'image de $\alpha\varphi - 1$ si et seulement si $a_i = 0$.*

Démonstration. — Si $k > -v_p(\alpha)$, alors $-\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha\varphi)^n$ est un inverse continu de $\alpha\varphi - 1$ sur $T^k\mathscr{R}^+$. (Pour montrer que la somme définit bien une fonction analytique sur $v_p(T) > 0$, il suffit de constater que l'on a $v_p(\varphi^n(T)) = n + C$, si n est assez grand, et donc $v_p(F(\varphi(T))) \geqslant nk + C'$ si F est divisible par T^k.) Le résultat se déduit alors de ce que $\mathscr{R}^+ = \oplus_{i=0}^{k-1} L \cdot t^i \oplus T^k\mathscr{R}^+$ et de ce que $\varphi(t^i) = p^i t^i$. □

Lemme A.2. — *Si $b \in \mathscr{E}^\dagger$ et si $v_p(\alpha) < 0$, il existe $c \in \mathscr{E}^\dagger$ tel que $b' = b - (\alpha\varphi - 1)c$ appartienne à $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$.*

Démonstration. — Il suffit de résoudre l'équation $\alpha c - \psi(c) = \psi(b)$ dans $\mathscr{E}^\dagger$, or cette équation admet comme solution $c = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{-k}\psi^k(b)$, la convergence de la série dans $\mathscr{E}^\dagger$ étant une conséquence de la prop. [**12**, 1.15]. □

Corollaire A.3. — *Si $b \in \mathscr{R}$ et si $v_p(\alpha) < 0$, il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que $b' = b - (\alpha\varphi - 1)c$ appartienne à $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$.*

Démonstration. — D'après le lemme A.1, si $k > -v_p(\alpha)$, il existe $c_1 \in \mathscr{R}$ tel que $b - (\alpha\varphi - 1)c_1$ soit de la forme $\sum_{i<k} a_i T^i$ et donc appartienne à $\mathscr{E}^\dagger$, ce qui permet d'utiliser le lemme A.2 pour conclure. □

Lemme A.4. — *Si $v_p(\alpha) < 0$, et si $a \in \mathscr{R}$ vérifie $(\alpha\varphi - 1)a \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, alors $a \in \mathscr{R}^+$.*

Démonstration. — Si $x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k T^k$ est un élément de $\mathscr{R}$, on note x^+ et x^- les séries de Laurent définies par $x^+ = \sum_{k\geqslant 0} x_k T^k \in \mathscr{R}^+$ et $x^- = \sum_{k\leqslant -1} x_k T^k \in \mathscr{E}^\dagger$. D'après [**12**, lemme 1.8], on a $\psi(x)^- = \psi(x^-)$ et $\psi(x)^+ = \psi(x^+)$; on a aussi $\varphi(x)^- = \varphi(x^-)^-$.

Appliquant ce qui précède à $x = (\varphi(a) - a) \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, on en déduit les identités

$$0 = \psi((\varphi(a) - \alpha^{-1}a)^-) = \psi((\varphi(a^-) - \alpha^{-1}a)^-) = \\ = (\psi(\varphi(a^-) - \alpha^{-1}a^-))^- = a^- - \alpha^{-1}\psi(a^-),$$

et comme on a supposé $v_p(\alpha) < 0$, une récurrence immédiate montre que $a^- \in \mathfrak{m}_L^k \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, quel que soit $k \in \mathbf{N}$. On en déduit la nullité de a^-, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition A.5. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$. Si $v_p(\delta(p)) > 0$, l'équation*

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(p)^n \varphi^n(1+T)$$

n'a pas de solution dans $\mathscr{R}$.

Démonstration. — Soit $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(p)^n \varphi^n(1+T)$. Alors $A \in \mathscr{O}_L[[T]]$ vérifie $\psi(A) = \delta(p)A$. Soit $\Theta = (\delta(\gamma)\gamma - 1)$, et soit $B \in \mathscr{R}$ une solution de $\Theta(B) = A$. On a $\Theta(\psi(B) - \delta(p)B) = 0$. On en déduit que $\psi(B) - \delta(p)B = 0$ (sauf si δ est de la forme χ^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, auquel cas $\psi(B) - \delta(p)B = \alpha t^i$, mais en retranchant $(p^{-i} - \delta(p))^{-1}t^i$ à B, on fabrique une solution de $\Theta(B) = A$ vérifiant $\psi(B) - \delta(p)B = 0$).

Décomposons alors B sous la forme $B^+ + B^-$, avec $B^+ \in \mathscr{R}^+$ et $B^- \in \mathscr{E}^\dagger \cap T^{-1}L[[T^{-1}]]$. Comme $\psi(B)^+ = \psi(B^+)$ et $\psi(B)^- = \psi(B^-)$, on a $\psi(B^+) = \delta(p)B^+$ et $\psi(B^-) = \delta(p)B^-$. D'après [**12**, prop.1.13], cela implique que B^- converge sur tout le disque épointé $0 < v_p(T) < +\infty$, et que l'on a

$$\inf_{v_p(x)=r+1} v_p(B^-(x)) \geqslant \inf_{v_p(x)=r} v_p(B^-(x)) - 1 - v_p(\delta(p)), \quad \text{quel que soit } r \geqslant \frac{1}{p-1}.$$

On en déduit que B^- a un pôle d'ordre fini, puis, grâce au lemme 1.8 de [**12**], que $B^- = 0$. On en déduit l'existence d'une distribution μ sur $\mathbf{Z}_p$ dont B est la transformée d'Amice, et la relation que vérifie B implique que la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ de $\lambda = (\delta(\gamma)\gamma - 1)\mu$ est la masse de Dirac en 1. Ceci est absurde car on aurait

$$1 = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = \delta(\gamma) \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}(\chi(\gamma)x)\,\mu - \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}(x)\,\mu = 0.$$

Ceci permet de conclure. □

Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k \in \mathscr{R}$, on définit le résidu de la forme différentielle $\omega = f\,dT$ par la formule $\mathrm{res}(\omega) = a_{-1}$. On a alors $\mathrm{res}(\gamma(\omega)) = \mathrm{res}(\omega)$ et $\mathrm{res}(\varphi(\omega)) = p\,\mathrm{res}(\omega)$.

Soit $\partial : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ l'opérateur différentiel $\partial = \frac{d}{dt} = (1+T)\frac{d}{dT}$. On a

$$\partial \circ \varphi = p\,\varphi \circ \partial \quad \text{et} \quad \partial \circ \gamma = \chi(\gamma)\,\gamma \circ \partial.$$

Par ailleurs, comme $df = \partial f \frac{dT}{1+T}$; on en déduit la proposition suivante :

Proposition A.6. — (i) $\ker \partial = L$ *et* f *est dans l'image de* ∂ *si et seulement si* $\mathrm{res}(f\frac{dT}{1+T}) = 0$.

(ii) $\partial : \mathscr{R}[\log T] \to \mathscr{R}[\log T]$ *est surjective.*

On pose $\mathrm{Res}(f) = \mathrm{res}(f\frac{dT}{1+T})$. Comme $\log\frac{\gamma(T)}{T}$ et $\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$ appartiennent à $\mathscr{R}$ et donc ont une différentielle dont le résidu est nul, on en déduit les formules

$$\mathrm{Res}(\gamma(x)) = \chi(\gamma)^{-1}\mathrm{Res}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}(\varphi(x)) = \mathrm{Res}(x).$$

Lemme A.7. — *Si* $x \in (\mathscr{E}^\dagger)^*$, *alors* $\mathrm{Res}\frac{\partial x}{x} \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. — On peut écrire x de manière unique sous la forme $x = \alpha T^k x^+ x^-$, avec $\alpha \in L^*$, $k \in \mathbf{Z}$, $x^+ \in 1 + T\mathscr{O}_L[[T]]$ et $x^- \in (1 + \mathfrak{m}_L T^{-1}\mathscr{O}_L[[T^{-1}]]) \cap \mathscr{E}^\dagger$. On a alors $\mathrm{Res}\frac{\partial x^-}{x^-} = \mathrm{Res}\frac{\partial x^+}{x^+} = 0$ et $\mathrm{Res}\frac{\partial T^k}{T^k} = k$, ce qui permet de conclure. □

Lemme A.8. — *Si* $x \in \mathscr{R}$ *vérifie* $\mathrm{Res}(x) = 0$, *alors il existe* $c \in \mathscr{R}$ *tel que* $(\gamma - 1)c = tx$.

Démonstration. — Ce lemme peut se trouver dans [**2**] (ou plutôt dans la prépublication correspondante). Rappelons-en la démonstration. Soit $\nabla = \frac{\log\gamma}{\log\chi(\gamma)}$. Un petit calcul montre que $\nabla = t\partial$. Par ailleurs, on peut factoriser $\frac{\log(1+T)}{\log\chi(\gamma)}$ sous la forme $TF(T)$, et donc ∇ sous la forme $(\gamma - 1)F(\gamma - 1)$, ce qui prouve que pour trouver une solution de l'équation $(\gamma - 1)c = t^i y$, il suffit d'exhiber une solution de l'équation $\partial c = t^{i-1}y$. Le lemme est alors une conséquence du fait que $\partial c = x$ a une solution dans $\mathscr{R}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(x) = 0$. □

A.2. Anneaux de Fontaine. — On renvoie à [**11**] pour la définition des anneaux apparaissant ci-dessous.

Proposition A.9. — *Si* $r > 0$ *et si* $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t}, \log\pi]$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $Nx = 0$;

(ii) $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t}]$.

Démonstration. — C'est évident. □

Proposition A.10. — *Si* $r > 0$ *et si* $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t}]$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\varphi^{-n}(x) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ *quel que soit* $n \in \mathbf{N}$ *vérifiant* $\frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \leqslant r$;

(ii) $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate, et pour montrer l'implication (i)⇒(ii), il suffit de prouver que si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ est tel que $\varphi^{-n}(x)$ est divisible par t dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ pour tout n vérifiant $\frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \leqslant r$, alors x est divisible par t dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. Ceci a été démontré par Berger [**2**]. □

Lemme A.11. — *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $n_0 \in N$ tel que $\varphi^{-n}(x) \in \mathbf{A}_{\max}$ quel que soit $n \geqslant n_0$;*

(ii) $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate. Passons à la réciproque. Par hypothèse, si $n \geqslant n_0$, il existe $x_n \in \mathbf{A}_{\max}$ tel que $x = \varphi^n(x_n)$. Par ailleurs, si $y \in \mathbf{A}_{\max}$, il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, tendant p-adiquement vers 0, telle que l'on ait

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \Big(\frac{[\tilde{p}]}{p}\Big)^k \quad \text{et donc } \varphi^n(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{k(p^n-1)} \varphi^n(a_k) \Big(\frac{[\tilde{p}]}{p}\Big)^{kp^n} ;$$

on en déduit l'inclusion $\varphi^n(\mathbf{A}_{\max}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}^+ + p^{n-1}\mathbf{A}_{\max}$, et l'appartenance de x à $\cap_{n\geqslant n_0}(\widetilde{\mathbf{A}}^+ + p^{n-1}\mathbf{A}_{\max})$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \cap p^n\mathbf{A}_{\max} = (p,[\tilde{p}])^n\widetilde{\mathbf{A}}^+$, cela implique que $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est fermé dans $\mathbf{A}_{\max}$; on en déduit l'appartenance de x à $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition A.12. — *Si $r > 0$, et si $0 < s \leqslant r$, les conditions suivantes sont équivalentes pour $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$:*

(i) *la suite $(\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{[s,r]}$;*

(ii) $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate. Passons à la réciproque. On peut décomposer x sous la forme $x = y + z$ avec $z \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et, quitte à remplacer x par y, on peut supposer $r = +\infty$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, auquel cas le résultat suit du lemme A.11. □

Proposition A.13. — *Si $x \in \mathscr{R}$ et si $\alpha \in L^*$ vérifie $v_p(\alpha) \geqslant 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *x est d'ordre $v_p(\alpha)$;*

(ii) *la suite de terme général $\alpha^n\varphi^{-n}(x)$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$.*

Démonstration. — On peut écrire x sous la forme $x = x^+ + x^-$, avec $x^+ \in \mathscr{R}^+$ et $x^- \in \mathscr{E}^{\dagger}$. La suite $(\varphi^{-n}(x^-))_{n\in\mathbf{N}}$ est alors bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$; il en est donc, a fortiori, de même de la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x^-))_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$. On peut donc remplacer x par x^+ et se ramener à vérifier que $x \in \mathscr{R}^+$ est d'ordre $v_p(\alpha)$ si et seulement si la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.

Maintenant, on a $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{i\in\mathbf{N}}\varphi^i(\mathbf{B}^+_{\max})$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\varphi^i(\mathbf{B}^+_{\max})$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$, ou encore, si et seulement si, quel que soit $i \in \mathbf{N}$, la suite $(\varphi^{-i}(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{B}^+_{\max}$. Ceci permet de se ramener à prouver que $x \in \mathscr{R}^+$ est d'ordre $v_p(\alpha)$ si et seulement si

la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{B}^+_{\max}$. Pour la démonstration de ce dernier fait, voir par exemple [**8**, lemme VIII.3.3]. □

Références

[1] J. BELLAÏCHE & G. CHENEVIER – p-adic families of Galois representations and higher rank Selmer groups, *Astérisque* (à paraître).

[2] L. BERGER – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[3] ———, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, ce volume.

[4] G. CHENEVIER – Cours Peccot, avril 2008.

[5] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[6] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[7] R. COLEMAN & B. MAZUR – The eigencurve, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 1–113.

[8] P. COLMEZ – Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, *Ann. of Math. (2)* **148** (1998), p. 485–571.

[9] ———, Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[10] ———, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[11] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ce volume, 2008.

[12] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* (à paraître).

[13] P. COLMEZ & J.-M. FONTAINE – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[14] J.-M. FONTAINE – Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[15] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Astérisque* **223** (1994), p. 59–111.

[16] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[17] ———, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, *Astérisque* **295** (2004), p. 1–115.

[18] F. Q. GOUVÊA & B. MAZUR – On the density of modular representations, in *Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995)*, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., 1998, p. 127–142.

[19] R. GREENBERG & G. STEVENS – p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms, *Invent. Math.* **111** (1993), p. 407–447.

[20] L. HERR – Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), p. 563–600.

[21] K. S. KEDLAYA – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 93–184.

[22] M. KISIN – Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 373–454.

[23] ———, Deformations of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ representations, prépublication, 2008.

[24] R. LIU – Cohomology and duality for (ϕ, Γ)-modules over the Robba ring, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **3** (2008).

[25] B. MAZUR – On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 1–20.

[26] K. NAKAMURA – Classification of two dimensional trianguline representations of p-adic fields, prépublication, 2008.

[27] S. SEN – Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), p. 160–170.

[28] ———, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

PIERRE COLMEZ, École polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France
Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.polytechnique.fr

Astérisque

KIRAN S. KEDLAYA

Slope filtrations for relative Frobenius

Astérisque, tome 319 (2008), p. 259-301

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__259_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 259–301

SLOPE FILTRATIONS FOR RELATIVE FROBENIUS

by

Kiran S. Kedlaya

Abstract. — The slope filtration theorem gives a partial analogue of the eigenspace decomposition of a linear transformation, for a Frobenius-semilinear endomorphism of a finite free module over the Robba ring (the ring of germs of rigid analytic functions on an unspecified open annulus of outer radius 1) over a discretely valued field. In this paper, we give a third-generation proof of this theorem, which both introduces some new simplifications (particularly the use of faithfully flat descent, to recover the theorem from a classification theorem of Dieudonné-Manin type) and extends the result to allow an arbitrary action on coefficients (previously the action on coefficients had to itself be a lift of an absolute Frobenius). This extension is relevant to a study of (ϕ, Γ)-modules associated to families of p-adic Galois representations, as initiated by Berger and Colmez.

***Résumé* (Filtrations de pentes pour le Frobenius relatif).** — Le théorème de filtration par les pentes donne un analogue partiel de la décomposition en espaces propres d'une transformation linéaire, pour un endomorphisme semilinéaire (pour Frobenius) d'un module libre de type fini sur l'anneau de Robba (l'anneau des germes de fonctions analytiques rigides sur une couronne ouverte non précisée de rayon externe 1) sur un corps à valuation discrète. Dans cet article, nous donnons une preuve de troisième génération de ce théorème, qui introduit quelques simplifications nouvelles (en particulier, l'emploi de la descente fidèlement plate, pour obtenir le théorème à partir d'un théorème de classification de type Dieudonné-Manin). Nous étendons aussi le résultat pour permettre une action arbitraire sur les coefficients (auparavant, cette action devait être un relèvement d'un Frobenius absolu). Cette extension est utile pour l'étude des (ϕ, Γ)-modules associés à des familles de représentations galoisiennes p-adiques; Berger et Colmez ont commencé cette étude.

2000 Mathematics Subject Classification. — 11S80.
Key words and phrases. — Slope filtrations, Frobenius actions, Robba ring, p-adic differential equations.

The author was supported by NSF grant DMS-0400727, NSF CAREER grant DMS-0545904, and a Sloan Research Fellowship.

© Astérisque 319, SMF 2008

Introduction

This paper describes a third-generation proof of the slope filtration theorem for Frobenius modules over the Robba ring (Theorem 1.7.1 herein). This proof is more expedient than what one finds in our original paper [**21**] or its sequel [**22**]. In addition, we generalize the slope filtration theorem by allowing for ring endomorphisms which do not act as Frobenius lifts on scalars, only on the series variable. This is intended as a prelude to a theory of Frobenius modules in families; we will not develop such a theory here, but see the next section for reasons one might want to do so, from the realm of p-adic Hodge theory. (Note that [**22**] itself generalizes [**21**] in a different direction, replacing the power series rings by somewhat more general objects; we do not treat that generalization here.)

For an alternate perspective on this theorem and some related results in p-adic differential equations and p-adic Hodge theory, we also recommend Colmez's Bourbaki notes [**11**].

0.1. Context. — The slope filtration theorem [**21**, Theorem 6.10] (also exposed in [**22**]) gives a partial classification of Frobenius-semilinear transformations on finite free modules over the Robba ring (a certain ring of univariate formal Laurent series with p-adic coefficients). It is loosely analogous to the eigenspace decomposition of a linear transformation in ordinary linear algebra; it is also closely related to Manin's classification of rational Dieudonné modules.

The slope filtration theorem was originally introduced in the context of Berthelot's rigid cohomology, a p-adic Weil cohomology for varieties in characteristic p. There, one obtains a analogue of the ℓ-adic local monodromy theorem, originally conjectured by Crew [**14**]; this analogue can be used to establish various structural results such as finiteness of cohomology [**23**] and purity in the sense of Deligne [**24**].

The effect of the slope filtration theorem on p-adic Hodge theory has perhaps been even more acute: it enables one to study p-adic Galois representations via their associated (ϕ, Γ)-modules over the Robba ring. This point of view has been put forth chiefly by Berger with striking consequences: he has proved Fontaine's conjecture that de Rham representations are potentially semistable [**4**], and given an alternate proof of the Colmez-Fontaine theorem on admissibility of filtered (ϕ, N)-modules [**5**]. (A useful variant of the latter argument has been given by Kisin [**27**].) More recently Colmez [**13**] used this viewpoint to define a class of *trianguline representations* of a p-adic Galois group; these play an important role in the p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ [**12**]. The trianguline representations are also important in the theory of p-adic modular forms, as most local Galois representations attached to overconvergent p-adic modular forms (namely, those of noncritical slope) are trianguline. The p-adic local Langlands correspondence in turn has touched off a flurry of

activity, which this introduction is not the right place to summarize; we merely note the resolution of Serre's conjecture by Khare-Wintenberger [**25, 26**], and progress on the Fontaine-Mazur conjecture by Kisin [**28**] and Emerton (in preparation).

In both rigid cohomology and p-adic Hodge theory, one is led to study Frobenius modules in families, i.e., over the Robba ring with coefficients not in a p-adic field but in, say, an affinoid algebra. In either situation, the first step to studying Frobenius modules in families is to pass from a family to a generic point, which on rings amounts to replacing an integral affinoid algebra with a complete field containing it. In the rigid cohomology version of this argument, the resulting field is itself acted on by Frobenius, so the slope filtration theorem as presented in [**21, 22**] is immediately applicable; indeed, the key technique in [**23**] is to extend the application of the local monodromy theorem on the generic point to a large enough subspace of the base space. However, in the p-adic Hodge theory version, one might like to allow "Frobenius" to act in some fashion on the base of the family other than simply a lift of the p-power map; in fact, one natural situation is where the base is not moved at all.

One goal of this paper, and in fact the principal reason for its existence, is to generalize the slope filtration theorem to modules over the Robba ring with an action of a "relative Frobenius", which may do whatever one wishes to coefficients as long as it acts like a Frobenius lift on the series parameter. We hope this will lead to some study of p-adic Hodge theory in families; some of the corresponding analysis in equal characteristics has been initiated by Hartl [**17**], using an equal-characteristic analogue of the slope filtration theorem based on the work of Hartl and Pink [**18**]. In mixed characteristics, Hartl [**16**] has set up part of a corresponding theory, which addresses a conjecture of Rapoport and Zink [**40**] from their work on period spaces for p-divisible groups; results are presently quite fragmentary, but a good theory of (ϕ, Γ)-modules in families may help. Another potential application would be to analysis of the local geometry of the Coleman-Mazur eigencurve [**10**], which parametrizes the Galois representations attached to certain p-adic modular forms, or of higher-dimensional "eigenvarieties" associated to automorphic representations on groups besides GL_2. An initial step in this direction has already been taken by Bellaïche-Chenevier [**3**], who study deformations of trianguline representations; however, this involves only a zero-dimensional base, so they can already apply the usual slope filtration theory after a restriction of scalars. For other questions, e.g., properness, one would want to consider positive-dimensional bases like a punctured disc. In this direction, Berger and Colmez have introduced a theory of étale (ϕ, Γ)-modules associated to p-adic Galois representations in families [**6**], which relativizes some of the results of Cherbonnier-Colmez [**9**] and Berger [**5**] for a single p-adic Galois representation.

0.2. About the results. — For the sake of introduction, we give here a very brief description of what the original slope filtration theorem says, how the main result of this paper extends it, and what novelties in the argument are introduced in this paper. Start with a complete discretely valued field K of mixed characteristics $(0,p)$. Let $\mathscr{R}$ be the ring of formal Laurent series $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n u^n$ convergent on some annulus with outer radius 1 (but whose inner radius may depend on which series is being considered). Let $\phi_K : K \to K$ be an endomorphism lifting the absolute q-power Frobenius on the residue field of K, for some power q of p, and define a map $\phi : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ by the formula $\phi(\sum c_n u^n) = \sum \phi_K(c_n)\phi(u)^n$, where $\phi(u) - u^q$ has all coefficients of norm less than 1. Let M be a finite free $\mathscr{R}$-module equipped with a ϕ-semilinear map $F : M \to M$ which takes any basis of M to another basis of M (it is enough to check for a single basis). Then [**21**, Theorem 6.10] asserts that M admits an exhaustive filtration whose successive quotients are each pure of some slope (i.e., some power of F times some scalar acts on some basis via an invertible matrix over the subring of $\mathscr{R}$ of series with *integral* coefficients), and the slopes increase as you go up the filtration; moreover, those requirements uniquely characterize the filtration.

As noted earlier, the slope filtration should be thought of as analogous to what one might get from a linear transformation over K by grouping eigenspaces, interpreting the slope of an eigenspace as the valuation of its eigenvalue. One can in fact deduce an analogous such result for semilinear transformations over K, which also follows from the Dieudonné-Manin classification theorem. One might then expect that the slope filtration can be generalized so as to allow *any* isometric action on K, not just a Frobenius lift; that is what is established in this paper (Theorem 1.7.1).

As promised earlier in this introduction, one happy side effect of this generalization is the introduction of some technical simplifications. We give a development of the theory of slopes which does not depend on already having established the Dieudonné-Manin-style classification; this follows up on a suggestion made in [**22**]. We give a much simplified version of the descent argument that deduces the filtration theorem from the DM classification, based on the idea of replacing the Galois descent used previously with faithfully flat descent; this avoids the use of comparison between generic and special Newton polygons, and of some intricate approximation arguments. (In particular, there is no longer any need to deal with finite extensions of the Robba ring, which allows for some notational and expository simplifications.) That substitution creates some flexibility in what we may take as the "extended Robba ring" for the DM classification; here we use a ring made from generalized power series, some of whose properties are a bit more transparent than for the corresponding "big rings" in [**21**] and [**22**].

0.3. Structure of the paper. — The structure of this paper is a bit unusual, as we have attempted to make the paper more friendly to the novice reader by fronting some of the key assertions and pushing back more technical aspects. (This assertion applies both to the paper as a whole, and to Sections 2 and 3 individually.) The consequence is that the logical structure is a bit loopy: results are stated, and sometimes used, before having been proved. However, we hope that it is not too hard to see that there are indeed no vicious circles in the reasoning.

In Section 1, we introduce the Robba ring, the category of ϕ-modules, the notions of degree and slope, the subcategories of pure ϕ-modules of various slopes, and the statement of the filtration theorem.

In Section 2, we introduce an extended Robba ring (whose elements are modeled on Hahn-Mal'cev-Neumann generalized power series rather than ordinary power series), state a classification theorem for ϕ-modules over the extended Robba ring, then perform the calculations required to prove this theorem.

In Section 3, we deduce the slope filtration theorem from the classification theorem over the extended Robba ring. The key tool here is an invocation of faithfully flat descent for modules.

Acknowledgments. — Thanks to Laurent Berger for the original suggestion to consider relative Frobenius and for subsequent discussions, to Lucia di Vizio for providing the reference to Praagman's work, and to Peter Schneider for additional comments.

1. Statement of the filtration theorem

1.1. The Robba ring

Definition 1.1.1. — Let K be a field complete for a discrete valuation, with residue field k; let $\mathfrak{o}_K$ denote the valuation subring of K and let $\mathfrak{m}_K$ denote the maximal ideal of $\mathfrak{o}_K$. (We need not make any restriction on the characteristics of K, k.) Write $|\cdot|$ for some fixed norm corresponding to the valuation (the normalization does not matter). For $r > 0$, let $\mathscr{R}^r$ be the ring of rigid analytic functions on the annulus $e^{-r} \leq |t| < 1$ (these are just Laurent series in the variable t convergent on this region), and let $\mathscr{R}$ be the union of the $\mathscr{R}^r$. The ring $\mathscr{R}$ is called the *Robba ring* over K. It follows from the work of Lazard [**29**] that $\mathscr{R}$ is a *Bézout domain*, that is, an integral domain in which every finitely generated ideal is principal.

Remark 1.1.2. — Any Bézout domain R enjoys a number of nice properties generalizing properties of principal ideal domains, including the following. Some of these are actually properties of *Prüfer domains*, in which every finitely generated ideal is projective; these generalize Dedekind domains to the non-noetherian setting.

- Any finite locally free R-module is free [**21**, Proposition 2.5].
- Any torsion-free R-module is flat; this holds for any Prüfer domain [**8**, VII Proposition 4.2].
- Any finitely presented projective R-module is free [**14**, Proposition 4.8].
- If M is a finite free R-module and N is a submodule of M which is saturated, i.e., $N = M \cap (N \otimes_R \operatorname{Frac} R)$, then N and M/N are both free [**14**, Proposition 4.8], [**21**, Lemma 2.4].

Definition 1.1.3. — Let $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$ be the subring of $\mathscr{R}$ consisting of series with coefficients in $\mathfrak{o}_K$; this ring is a discrete valuation ring with residue field $k((t))$, which is not complete but is henselian [**21**, Lemma 3.9]. Let $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$ be the subring of $\mathscr{R}$ consisting of series with bounded coefficients; it is the fraction field of $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$.

Remark 1.1.4. — Note that for $x \in \mathscr{R}$, one has $x \in \mathscr{R}^{\mathrm{int}}$ if and only if there exists an integer n such that the function $t^n x$ is bounded by 1 on some annulus $e^{-r} \leq |t| < 1$.

Remark 1.1.5. — Lazard's work [**29**] includes a theory of Newton polygons for elements of $\mathscr{R}$, using which one can read off numerous structural properties. One key example is that the units in $\mathscr{R}$ are precisely the nonzero elements of $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$ [**21**, Corollary 3.23].

Remark 1.1.6. — One can also define the Robba ring even if the valuation on K is not discrete, but its properties are very different. For instance, $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$ is no longer the fraction field of $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$. This makes even the formulation of a slope theory over such K, let alone any proofs, somewhat more delicate than the approach we take here.

1.2. Frobenius lifts on the Robba ring

Definition 1.2.1. — Fix an integer $q > 1$. (To see why we forbid $q = 1$, see Remark 1.7.9.) A *relative (q-power) Frobenius lift* on the Robba ring is a homomorphism $\phi : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ of the form $\sum_i c_i t^i \mapsto \sum_i \phi_K(c_i) u^i$, where ϕ_K is an isometric field endomorphism of K and $u \in \mathscr{R}^{\mathrm{int}}$ is such that $u - t^q$ is in the maximal ideal of $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$. If k has characteristic $p > 0$ and q is a power of p, we define an *absolute (q-power) Frobenius lift* as a relative Frobenius lift in which ϕ_K is itself a q-power Frobenius lift.

Remark 1.2.2. — The treatments in [**21, 22**] only allow absolute Frobenius lifts, and the approaches do not carry over easily to the general case because of the use of Galois descent at some key moments. See the introduction for discussion of why one needs the relative case.

Definition 1.2.3. — For $r > 0$, let $|\cdot|_r$ denote the supremum norm on the circle $|t| = e^{-r}$, as applied to elements of $\mathscr{R}^r$; one easily verifies that

$$\left|\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i t^i\right|_r = \sup_i\{|c_i|e^{-ri}\}.$$

We extend the definition to vectors by taking the maximum over entries.

Remark 1.2.4. — Note that for f analytic on the entire open unit disc (i.e., represented by an ordinary power series rather than a Laurent series), we have $|f|_r \leq |f|_s$ whenever $0 < s \leq r$; in other words, the supremum of f over the entire disc $|t| \leq e^{-s}$ occurs on the circle $|t| = e^{-s}$. In fancier language, the circle $|t| = e^{-s}$ is the *Shilov boundary* of the disc $|t| \leq e^{-s}$, as in [**7**, Corollary 2.4.5].

Remark 1.2.5. — Let ϕ be a relative Frobenius lift; then for some $r_0 > 0$, we have $|\phi(t)/t^q - 1|_{r_0/q} < 1$. It follows that for $r \in (0, r_0)$ and $f \in \mathscr{R}^r$, $\phi(f) \in \mathscr{R}^{r/q}$ and $|f|_r = |\phi(f)|_{r/q}$. In geometric terms, ϕ induces a surjective map from the annulus $e^{-r/q} < |t| < 1$ to the annulus $e^{-r} < |t| < 1$. (Compare [**21**, Lemma 3.7].)

The following is both a typical example of how to make calculations on Robba rings and a crucial ingredient in what follows.

Proposition 1.2.6. — *Let ϕ be a relative Frobenius lift, and let A be an $n \times n$ matrix over $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$. Then the map $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - A\phi(\mathbf{v})$ on column vectors induces a bijection on $(\mathscr{R}/\mathscr{R}^{\mathrm{bd}})^n$.*

Proof. — The problem is unaffected if we replace $\mathbf{v}, A$ by $t^m\mathbf{v}, (t^m/\phi(t^m))A$, so by Remark 1.1.4, we may reduce to the case where the entries of A are bounded by 1 on some annulus with outer radius 1. Choose r_0 as in Remark 1.2.5. To check injectivity, we must argue that if $\mathbf{w} = \mathbf{v} - A\phi(\mathbf{v})$ is bounded, then so is $\mathbf{v}$. Choose $r \in (0, r_0)$ such that $A, \mathbf{w}, \phi(\mathbf{v})$ have entries which are defined on the annulus $e^{-r} \leq |t| < 1$, and the entries of A are bounded by 1 there. Choose $c > 0$ such that $|\mathbf{w}|_s \leq c$ for $0 < s \leq r$, and such that $|\phi(\mathbf{v})|_s \leq c$ for $r/q \leq s \leq r$. (The latter is possible because every analytic function on a closed annulus is bounded.) Then $|\mathbf{v}|_s = |\mathbf{w} + A\phi(\mathbf{v})|_s \leq c$ for $r/q \leq s \leq r$, so $|\phi(\mathbf{v})|_s \leq c$ for $r/q^2 \leq s \leq r/q$. Repeating the argument, we see that $|\mathbf{v}|_s \leq c$ for $0 < s \leq r$, proving the claim. (Compare [**22**, Lemma 3.3.3].)

To check surjectivity, take $\mathbf{w} \in \mathscr{R}^n$. Choose $r \in (0, r_0)$ such that $A, \mathbf{w}$ have entries which are defined on the annulus $e^{-r} \leq |t| < 1$, and the entries of A are bounded by 1 there. Define the sequence $\{\mathbf{w}_l\}_{l=0}^{\infty}$ as follows. Start with $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}$. Given $\mathbf{w}_l$, write $\mathbf{w}_l = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{w}_{l,i}t^i$, put $\mathbf{w}_l^+ = \sum_{i>0} \mathbf{w}_{l,i}t^i$ and $\mathbf{w}_l^- = \mathbf{w}_l - \mathbf{w}_l^+$, and put $\mathbf{w}_{l+1} = A\phi(\mathbf{w}_l^+)$. Since the entries of $t^{-1}\mathbf{w}_l^+$ are analytic on the entire open unit disc,

by Remark 1.2.4 we have

$$|\mathbf{w}_l^+|_r \leq e^{-r+r/q}|\mathbf{w}_l^+|_{r/q} \leq e^{-r+r/q}|\mathbf{w}_l|_{r/q};$$

consequently, $|\mathbf{w}_{l+1}|_{r/q} \leq e^{-r+r/q}|\mathbf{w}_l|_{r/q}$. Thus the sequence $\mathbf{w}_l^+$ converges to zero under $|\cdot|_{r/q}$, and hence also under $|\cdot|_s$ for $s \geq r/q$ by Remark 1.2.4. On the other hand, for $0 < s \leq r/q$, applying Remark 1.2.4 after substituting $t \mapsto t^{-1}$ gives

$$|\mathbf{w}_l^-|_s \leq |\mathbf{w}_l^-|_{r/q} \leq |\mathbf{w}_l|_{r/q}.$$

Now set $\mathbf{v} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{w}_l^+$; then $\mathbf{v}$ has entries analytic on the closed disc of radius $e^{-r/q}$, and $\mathbf{w} - \mathbf{v} + A\phi(\mathbf{v}) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{w}_l^-$ is bounded on $e^{-r/q} \leq |t| < 1$. Since $\phi(\mathbf{v})$ is analytic on the closed disc of radius e^{-r/q^2}, we can write $\mathbf{v} = \mathbf{w} + A\phi(\mathbf{v}) - \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{w}_l^-$ and thus extend $\mathbf{v}$ across the annulus $e^{-r/q} \leq |t| \leq e^{-r/q^2}$; by induction, $\mathbf{v}$ extends to the entire open unit disc. This proves the desired surjectivity. □

One can also prove the following, as in [**22**, Lemma 5.4.1].

Proposition 1.2.7. — *Let $\mathscr{E}$ denote the $\mathfrak{m}_K$-adic completion of $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$. Let ϕ be a relative Frobenius lift on $\mathscr{R}$, and let A be an $n \times n$ matrix over $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$. If $\mathbf{v} \in \mathscr{E}^n$ is a column vector such that $A\mathbf{v} = \phi(\mathbf{v})$, then $\mathbf{v} \in (\mathscr{R}^{\mathrm{bd}})^n$.*

Proof. — This will follow later from Proposition 2.5.8; we will not use it in the interim. □

Remark 1.2.8. — In the case where A is invertible, Proposition 1.2.7 was proved independently by Cherbonnier (unpublished, but see [**9**, Théorème III.1.1]) and Tsuzuki [**41**, Proposition 4.1.1]. Tsuzuki's underlying argument can be used even when A is not invertible; see [**41**, Proposition 2.2.2].

Remark 1.2.9. — It should be possible to carry everything in this paper over to the case where one only assumes $\phi(t) = \sum_i c_i t^i$ such that $c_q \in \mathfrak{o}_K^*$ and $c_i \in \mathfrak{m}_K$ for $i < q$. (For instance, in the theory of (ϕ, Γ)-modules, the composition of the usual ϕ with any nontrivial $\gamma \in \Gamma$ would have this property.) The proof of Proposition 1.2.6 extends to this setting, but the embedding of $\mathscr{R}$ into the extended Robba ring $\tilde{\mathscr{R}}$ of Section 2 must be modified, as accordingly must the projection construction of Section 3.

1.3. ϕ-modules

Definition 1.3.1. — Define a *ϕ-(ring/field)* to be a ring/field R equipped with an endomorphism ϕ; we say R is *inversive* if ϕ is bijective. Define a *(strict) ϕ-module* over a ϕ-ring R to be a finite free R-module M equipped with an isomorphism $\phi^* M \to M$, which we also think of as a semilinear ϕ-action on M; the semilinearity means that for $r \in R$ and $m \in M$, $\phi(rm) = \phi(r)\phi(m)$. Note that the category of ϕ-modules admits tensor products, symmetric and exterior powers, and duals.

Remark 1.3.2. — The definition of ϕ-module used here is somewhat more restrictive than one sees in other contexts, hence the optional modifier "strict". For instance, in some cases one allows modules which are projective but not free, or worse. In other cases, one allows the ϕ-action to take kernel and cokernel in some ϕ-stable Serre category of R-modules; we will do this ourselves shortly.

Remark 1.3.3. — It will be convenient for us to describe ϕ-modules in terms of bases and matrices. If M is a ϕ-module and $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ is a basis of M, we can completely describe the ϕ-action on M by specifying the invertible $n \times n$ matrix A which satisfies $\phi(\mathbf{e}_j) = \sum_i A_{ij}\mathbf{e}_i$. Note that the semilinearity skews conjugation: if $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ is another basis and the change of basis matrix U is defined by $\mathbf{e}'_j = \sum_i U_{ij}\mathbf{e}_i$, then the ϕ-action on the new basis is via the matrix $U^{-1}A\phi(U)$.

It is also useful to think of ϕ-modules as modules for a twisted polynomial ring.

Definition 1.3.4. — For R a ϕ-ring, define the *twisted polynomial ring* $R\{T\}$ to be the set of finite formal sums $\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ with $a_i \in R$, equipped with the noncommutative ring structure in which $Ta = \phi(a)T$ for $a \in R$. If R is a field, then all left ideals of $R\{T\}$ are principal, by the division algorithm [**36**, Theorem 6]. If R is inversive, one may similarly define a *twisted Laurent polynomial ring* $R\{T^{\pm}\}$.

Remark 1.3.5. — In general, a ϕ-module over R can be interpreted as a left $R\{T\}$-module which is finite free over R, but one must remember the condition that ϕ carries some basis to another basis. On the other hand, if R is inversive, then the data of a ϕ-module over R is equivalent to the data of a left $R\{T^{\pm}\}$-module which is finite free over R. If R is an inversive ϕ-field, then irreducible ϕ-modules over R all have the form $R\{T^{\pm}\}/R\{T^{\pm}\}P$ for some irreducible twisted polynomial P.

When talking about pure slopes, it will be helpful to switch from working with ϕ to working with a power of ϕ; the following definition facilitates this switch.

Definition 1.3.6. — View ϕ-modules as left modules for the twisted polynomial ring $R\{T\}$. For a a positive integer, define the *a-pushforward functor* $[a]_*$ from ϕ-modules to ϕ^a-modules to be the restriction along the inclusion $R\{T^a\} \to R\{T\}$. Define the *a-pullback functor* $[a]^*$ from ϕ^a-modules to ϕ-modules to be the extension of scalars functor

$$M \mapsto R\{T\} \otimes_{R\{T^a\}} M.$$

The following are easily verified (as in [**22**, §3.2]):

- The functors $[a]^*$ and $[a]_*$ form an adjoint pair.
- The functors $[a]_*$ and $[a]^*$ are exact and commute with duals; consequently, $[a]_*$ and $[a]^*$ also form an adjoint pair (i.e., in the other order).
- The functor $[a]_*$ commutes with tensor products over R (but $[a]^*$ does not).

- If M is a ϕ-module and N is a ϕ^a-module, then $M \otimes [a]^* N \cong [a]^*([a]_* M \otimes N)$.
- If M is a ϕ-module, then $\operatorname{rank}([a]_* M) = \operatorname{rank}(M)$.
- If N is a ϕ^a-module, then $\operatorname{rank}([a]^* N) = a \operatorname{rank}(N)$.
- If N is a ϕ^a-module, then $[a]_*[a]^* N \cong N \oplus \phi^*(N) \oplus \cdots \oplus (\phi^{a-1})^*(N)$.

Definition 1.3.7. — For M a ϕ-module, put

$$H^0(M) = \ker(\phi - 1 : M \to M), \qquad H^1(M) = \operatorname{coker}(\phi - 1 : M \to M).$$

One easily checks that in the category of ϕ-modules over R,

$$\operatorname{Hom}(M, N) \cong H^0(M^\vee \otimes N), \qquad \operatorname{Ext}(M, N) \cong H^1(M^\vee \otimes N).$$

Moreover, for N a ϕ^a-module, there are natural bijections

$$H^i(N) \cong H^i([a]^* N) \qquad (i = 0, 1).$$

Remark 1.3.8. — Beware that although the pullback/pushforward terminology was inspired by a related construction in [**18**], the two do not agree in that context.

1.4. Degrees, slopes, and stability. — For the rest of this section, we will put ourselves in the following situation. Note that Hypothesis 1.4.1 has a weak form and a strong form; we will assume only the weak form unless otherwise specified. (Thanks to Peter Schneider for suggesting this dichotomy.)

Hypothesis 1.4.1. — Let $R^{\mathrm{int}} \subseteq R^{\mathrm{bd}} \subseteq R$ be inclusions of Bézout domains such that $R^* \subset R^{\mathrm{bd}}$. Let ϕ be an endomorphism of R acting also on R^{bd} and R^{int}. Let $w : R^{\mathrm{bd}} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ be a ϕ-equivariant valuation such that $w(R^*) = \mathbb{Z}$ and $R^{\mathrm{int}} = \{r \in R^{\mathrm{bd}} : w(r) \geq 0\}$. Suppose in addition that for any $n \times n$ matrix A over R^{int}, the map $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - A\phi(\mathbf{v})$ on column vectors induces an injection (weak form) or bijection (strong form) on $(R/R^{\mathrm{bd}})^n$. Note that the analogous hypothesis for ϕ^a also holds, since one can identify the kernel and cokernel of $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - A\phi^a(\mathbf{v})$ on $(R/R^{\mathrm{bd}})^n$ with the kernel and cokernel of

$$(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{a-1}) \mapsto (\mathbf{v}_0 - A\phi(\mathbf{v}_{a-1}), \mathbf{v}_1 - \phi(\mathbf{v}_0), \dots, \mathbf{v}_{a-1} - \phi(\mathbf{v}_{a-2}))$$

on $(R/R^{\mathrm{bd}})^{na}$. (Compare the last remark in Definition 1.3.7.)

Example 1.4.2. — For our purposes, the principal example of strong Hypothesis 1.4.1 is as follows. We take $R, R^{\mathrm{bd}}, R^{\mathrm{int}} = \mathscr{R}, \mathscr{R}^{\mathrm{bd}}, \mathscr{R}^{\mathrm{int}}$ to be the Robba ring and variants over K; note that $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}} = \mathscr{R}^* \cup \{0\}$. We take ϕ to be a relative Frobenius lift, and w to be the valuation on $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$ for which $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$ is the valuation subring. The last condition in strong Hypothesis 1.4.1 holds by virtue of Proposition 1.2.6. We will construct a variation of this example, the extended Robba ring $\tilde{\mathscr{R}}$, in Section 2; using the axiomatic approach avoids some repetition.

Example 1.4.3. — Besides the Robba ring, additional examples of strong Hypothesis 1.4.1 are also possible. Here is one from the work of Hartl and Pink [**18**]: take $\mathbb{C}$ to be the completed algebraic closure of a local field of equal characteristic p, R to be the Laurent series over $\mathbb{C}$ convergent on the punctured open unit disc, R^{bd} to be the series which are meromorphic at zero, ϕ to be the map $\sum c_i t^i \mapsto \sum c_i^q t^i$ for q a power of p, and w to be the order of vanishing at 0. See Remark 1.7.6 and Question 1.7.7 for further discussion around this example.

Definition 1.4.4. — For M a ϕ-module over R of rank n, the top exterior power $\wedge^n M$ has rank 1 over R; let $\mathbf{v}$ be a generator, and write $\phi(\mathbf{v}) = r\mathbf{v}$ for some $r \in R^*$. Define the *degree* of M by setting $\deg(M) = w(r)$; note that this does not depend on the choice of the generator by virtue of the ϕ-equivariance of w. If M is nonzero, define the *slope* of M by setting $\mu(M) = \deg(M)/\operatorname{rank}(M)$.

Remark 1.4.5. — Keeping in mind that degree is analogous to the valuation of the determinant (of a linear transformation on a finite dimensional vector space over a valued field), the following formal properties are easily verified (as in [**22**, §3.4]).

- If $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ is exact, then $\deg(M) = \deg(M_1) + \deg(M_2)$; hence $\mu(M)$ is a weighted average of $\mu(M_1)$ and $\mu(M_2)$.
- We have $\mu(M_1 \otimes M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$.
- We have $\mu(\wedge^i M) = i\mu(M)$.
- We have $\deg(M^\vee) = -\deg(M)$ and $\mu(M^\vee) = -\mu(M)$.
- If M is a ϕ-module, then $\mu([a]_* M) = a\mu(M)$.
- If N is a ϕ^a-module, then $\mu([a]^* N) = a^{-1}\mu(N)$.

By analogy with the theory of vector bundles, we make the following definition.

Definition 1.4.6. — We say a ϕ-module M is *(module-)semistable* if for any nontrivial ϕ-submodule N, we have $\mu(N) \geq \mu(M)$. We say M is *(module-)stable* if for any proper nontrivial ϕ-submodule N, we have $\mu(N) > \mu(M)$. Note that both properties are preserved under *twisting* (tensoring with a rank 1 module).

Remark 1.4.7. — In [**22**], the terms "stable" and "semistable" were used without the "module" modifier; here we will usually retain the modifier in statements and drop it in proofs. The modifier is meant to emphasize the difference between this notion of semistability and the concept of a "semistable (ϕ, Γ)-module" in the sense of p-adic Hodge theory, meaning one which appears to come from a semistable Galois representation. In the end, over the Robba ring the term "module-semistable" will be shown to be synonymous with "pure", so the terminological overload will cease to be a problem.

Remark 1.4.8. — Those familiar with stability of vector bundles (or with [**18**]) will notice that our definitions differ from the usual convention by an overall minus sign. The sign convention here (which is also the one used in [**21, 22**]) seems to be more consistent with usage in the theory of crystalline cohomology.

Proposition 1.4.9. — *Any ϕ-module of rank 1 is module-stable.*

Proof. — This is a consequence of the assumptions built into weak Hypothesis 1.4.1. Namely, by twisting, it suffices to show that the trivial ϕ-module $M \cong R$ is stable. If N is a nonzero ϕ-submodule of M, we may write $N = Rx$ for some $x \in M$ such that $\lambda = \phi(x)/x \in R^*$, and by definition $\mu(N) = w(\lambda)$. If $\mu(N) \leq 0$, then $x - \lambda^{-1}\phi(x) = 0$ implies $x \in R^{\mathrm{bd}}$ by weak Hypothesis 1.4.1; hence $N = M$ and $\mu(N) = w(\phi(x)) - w(x) = 0$. In other words, $\mu(N) > 0$ unless $N = M$, as desired. □

Corollary 1.4.10. — *If $N \subseteq M$ is an inclusion of ϕ-modules of the same rank, then $\mu(N) \geq \mu(M)$, with equality if and only if $N = M$.*

Proof. — Put $n = \operatorname{rank} M$ and apply Proposition 1.4.9 to the inclusion $\wedge^n N \subseteq \wedge^n M$. □

Lemma 1.4.11. — *Let M be a ϕ-module over R. Then the slopes of nonzero ϕ-submodules of M are bounded below.*

Proof. — We proceed by induction on $\operatorname{rank}(M)$. By Corollary 1.4.10, the slopes of ϕ-submodules of M of full rank are bounded below by $\mu(M)$. If M has no nontrivial ϕ-submodules of lower rank, then there is nothing more to check. Otherwise, let N be a saturated ϕ-submodule of lower rank; then by hypothesis, the slopes of nonzero ϕ-submodules of both N and M/N are bounded below. If now P is any nonzero ϕ-submodule of M, then the sequence

$$0 \to N \cap P \to P \to P/(N \cap P) \to 0$$

is exact. If both factors are nonzero, we have $\mu(N \cap P) \geq \mu(N)$ and $\mu(P/(N \cap P)) \geq \mu(M/N)$, and $\mu(P)$ is a weighted average of $\mu(N \cap P)$ and $\mu(P/(N \cap P))$, so it is bounded below. If one factor vanishes, then $\mu(P)$ simply equals the slope of the other factor, so the same conclusion holds. □

Lemma 1.4.12. — *Let M be a nonzero ϕ-module over R. Then there is a largest ϕ-submodule of M of least slope, which is module-semistable.*

Proof. — The fact that there is a least slope s holds by Lemma 1.4.11 and the fact that the denominators of slopes are bounded above by the rank of M; clearly any ϕ-submodule of slope s must be semistable. If N_1 and N_2 are two such submodules, then the kernel of the surjection $N_1 \oplus N_2 \to N_1 + N_2$ must have slope at least s,

so $\mu(N_1 + N_2) \leq s$. On the other hand, $\mu(N_1 + N_2) \geq s$ because $N_1 + N_2 \subseteq M$, so $\mu(N_1 + N_2) = s$. Hence the ϕ-submodules of M of slope s are closed under sum, yielding the existence of a largest such submodule. □

Corollary 1.4.13. — *Let M be a ϕ-module over R. Then for any positive integer a, M is module-semistable if and only if $[a]_*M$ is module-semistable.*

Proof. — If $[a]_*M$ is semistable, evidently M is too. Conversely, if $[a]_*M$ is not semistable, then its largest ϕ^a-submodule of least slope is a ϕ^a-submodule M_1 of lower rank. By the uniqueness in Lemma 1.4.12, M_1 must in fact be preserved by ϕ, so M is not semistable either. □

Definition 1.4.14. — Let M be a ϕ-module over R. A *module-semistable filtration* of M is a filtration $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_l = M$ by saturated ϕ-submodules such that each quotient M_i/M_{i-1} is module-semistable. A *Harder-Narasimhan (HN) filtration* is a module-semistable filtration in which

$$\mu(M_1/M_0) < \cdots < \mu(M_l/M_{l-1}).$$

Proposition 1.4.15. — *Every ϕ-module over R admits a unique HN filtration, whose first step is the submodule defined in Lemma 1.4.12.*

Proof. — This is a formal consequence of Lemma 1.4.12; see [**22**, Proposition 4.2.5]. □

Definition 1.4.16. — Define the *slope multiset* of a module-semistable filtration of a ϕ-module of M as the multiset in which each slope of a successive quotient occurs with multiplicity equal to the rank of that quotient. These assemble into the lower boundary of a convex region in the xy-plane as follows: start at $(0, 0)$, then take each slope s in increasing order and append to the polygon a segment with slope s and width equal to the multiplicity of s. The result is called the *slope polygon* of the filtration; for the HN filtration, we call the result the *HN polygon.*

Proposition 1.4.17. — *The HN polygon lies on or above the slope polygon of any module-semistable filtration, with the same endpoint.*

Proof. — This is a formal consequence of the definition of an HN filtration: see [**22**, Proposition 3.5.4]. □

Proposition 1.4.18. — *Let M_1, M_2 be ϕ-modules over R such that each slope of the HN polygon of M_1 is less than each slope of the HN polygon of M_2. Then* $\mathrm{Hom}(M_1, M_2) = 0$.

Proof. — Choose $f \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$. Let N_1 be the first step in the HN filtration of M_1; then either $f(N_1) = 0$, or $\mu(f(N_1)) \leq \mu(N_1)$. The latter is impossible because $\mu(f(N_1))$ is no less than the least slope of M_2, whereas $\mu(N_1)$ is no greater than the greatest slope of M_1. Hence f factors through M_1/N_1; repeating, we obtain $f = 0$. □

1.5. Étale ϕ-modules

Definition 1.5.1. — A ϕ-module M over R or R^{bd} is said to be *étale* (or *unit-root*) if it can be obtained by base extension from a (strict) ϕ-module over R^{int}; that is, M must admit an R^{int}-lattice N such that ϕ induces an isomorphism $\phi^* N \to N$. We call such an N an *étale lattice* of M. Note that N is not in general unique; for instance, it may be rescaled. Note also that the dual of an étale ϕ-module is again étale.

Remark 1.5.2. — The term "unit-root" is standard in applications to crystalline cohomology, where it refers to the process of extracting the unit roots (roots of valuation 0) of a p-adic polynomial. By contrast, the term "étale" is standard in applications to p-adic Hodge theory.

One of the basic results about étale ϕ-modules is that in a certain sense, they do not lose information when base-changed from R^{bd} to R. This can be deduced from a slightly more general result, which we already used once (to justify that the Robba ring satisfies Hypothesis 1.4.1) and will use again shortly (in the proof of Theorem 1.6.10).

Definition 1.5.3. — Define an *isogeny ϕ-module* over R^{int} to be a finite free R^{int}-module M equipped with an injection $\phi^* M \to M$ whose cokernel is killed by some power of a uniformizer of R^{int}. Such an object becomes a strict ϕ-module upon tensoring with R^{bd} or R.

Proposition 1.5.4. — *Let M be an isogeny ϕ-module over R^{int}. Then the natural maps $H^i(M \otimes R^{\mathrm{bd}}) \to H^i(M \otimes R)$ for $i = 0$ (under weak Hypothesis 1.4.1) or $i = 0, 1$ (under strong Hypothesis 1.4.1) are bijective.*

Proof. — This is an immediate consequence of the final clause of Hypothesis 1.4.1. □

Proposition 1.5.5. — *The base change functor from étale ϕ-modules over R^{bd} to étale ϕ-modules over R is an equivalence of categories.*

Proof. — The essential surjectivity holds by definition, so we need only check full faithfulness. That is, for any étale ϕ-modules M_1, M_2 over R^{bd}, we must check that the natural map

$$H^0(M_1^\vee \otimes M_2) \to H^0(M_1^\vee \otimes M_2 \otimes R)$$

is a bijection; this follows from Proposition 1.5.4. □

Proposition 1.5.6. — *Let $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ be a short exact sequence of ϕ-modules over R. If any two of M_1, M_2, M are étale (except possibly M_1, M_2 in the case of weak Hypothesis 1.4.1), then so is the third.*

Proof. — First, suppose that M and M_2 are étale. By Proposition 1.5.5, the ϕ-modules M, M_2 and the morphism $M \to M_2$ all descend to R^{bd}. By Lemma 1.5.7 below, we can then produce an étale lattice in M_1 by taking the kernel of the map from an étale lattice of M to M_2.

Next, suppose that M and M_1 are étale. We then dualize to obtain a second exact sequence in which $M^\vee$ and $M_1^\vee$ are étale. By the previous paragraph, $M_2^\vee$ is then étale, as then is M_2.

Finally, suppose that M_1 and M_2 are étale and that strong Hypothesis 1.4.1 holds. By applying Proposition 1.5.4, M_1, M_2, and the exact sequence $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ all descend to R^{bd}; by rescaling appropriately, we can descend the sequence to R^{int}. We can then produce an étale lattice in M by lifting an étale lattice from M_2, then adding an étale lattice from M_1. □

Lemma 1.5.7. — *Let M be an étale ϕ-module over R^{bd}. Then any finitely generated ϕ-stable R^{int}-submodule of M is a ϕ-module over R^{int}.*

Proof. — Let M_0 be an étale lattice of M, and let N be a finitely generated ϕ-stable R^{int}-submodule of M; by rescaling, we may assume $N \subseteq M_0$. Then N is already an isogeny ϕ-module, and it suffices to check that $\deg(N) = 0$; we may do this after replacing M by $\wedge^{\mathrm{rank}(N)} M$, i.e., we may assume $\mathrm{rank}(N) = 1$. Let $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ be a basis of M_0, let $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i$ be a generator of N, and put $\phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n d_i \mathbf{e}_i$. Then $\deg(N) = \min_i\{w(d_i)\} - \min_i\{w(c_i)\}$, but this difference is zero because M_0 is an étale lattice. □

We can also show that étale ϕ-modules are module-semistable, but it will be convenient to do that more generally for pure ϕ-modules in the next subsection.

1.6. Pure ϕ-modules. —

Definition 1.6.1. — Let M be a ϕ-module over R^{bd} or R of slope $s = c/d$, where c, d are coprime integers with $d > 0$. We say M is *pure* (or *isoclinic*, or sometimes *isocline*) of slope s if for some ϕ-module N of rank 1 and degree $-c$, $([d]_* M) \otimes N$ is étale (the same then holds for any such N). It will follow from Lemma 1.6.3 below that it is equivalent to impose this condition for any one pair $c, d \in \mathbb{Z}$ with $s = c/d$ and $d > 0$. Note that:

- any ϕ-module of rank 1 is pure;
- a ϕ-module is pure of slope 0 if and only if it is étale;
- the dual of a pure ϕ-module of slope s is itself pure of slope $-s$.

Remark 1.6.2. — This definition is not that of [**22**, Definition 6.3.1], but it is equivalent to it by [**22**, Proposition 6.3.5]. It has the advantage that it can be stated without reference to any sort of Dieudonné-Manin classification; the downside is that one must expend a bit of effort to check some natural-looking properties, as we do below.

Lemma 1.6.3. — *Let M be a ϕ-module over R^{bd} or R, and let a be a positive integer. Then M is pure of some slope s if and only if $[a]_*M$ is pure of slope as.*

Proof. — We first check the case where $s = 0$. If M is étale, then clearly $[a]_*M$ is too. Conversely, if $[a]_*M$ is étale, then ϕ induces isomorphisms $(\phi^{i+1})^*[a]_*M \to (\phi^i)^*[a]_*M$ over R; by Proposition 1.5.5, these isomorphisms descend to R^{bd}. That is, we may reduce to working over R^{bd}. In this case, let N_0 be an étale lattice of $[a]_*M$. Let N be the R^{int}-span of $N_0, \phi(N_0), \dots, \phi^{a-1}(N_0)$; then N is an étale lattice of M. Hence M is étale.

In the general case, write $s = c/d$ in lowest terms, and put $b = \gcd(a, d)$; then in lowest terms, $as = (ac/b)/(d/b)$. Let N be a ϕ^d-module of rank 1 and degree $-c$; then $[a/b]_*N$ has rank 1 and degree $-ac/b$. The following are equivalent:

- M is pure of slope s;
- $([d]_*M) \otimes N$ is étale (definition);
- $[a/b]_*(([d]_*M) \otimes N) \cong ([ad/b]_*M) \otimes ([a/b]_*N) \cong ([d/b]_*([a]_*M)) \otimes ([a/b]_*N)$ is étale (by above);
- $[a]_*M$ is pure of slope as (definition).

This yields the claim. □

Corollary 1.6.4. — *If M_1, M_2 are pure ϕ-modules of slopes s_1, s_2, then $M_1 \otimes M_2$ is pure of slope $s_1 + s_2$.*

Proof. — By Lemma 1.6.3, we may reduce to the case where $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$. By twisting, we may then reduce to the case where $s_1 = s_2 = 0$. In this case the result follows from the fact that ϕ-modules over R^{int} admit tensor products. □

We can thus generalize Propositions 1.5.5 and 1.5.6 as follows.

Theorem 1.6.5. — *For any rational number s, the base change functor from pure ϕ-modules of slope s over R^{bd} to pure ϕ-modules of slope s over R is an equivalence of categories.*

Proof. — If M_1, M_2 are pure of slope s, then $M_1^\vee \otimes M_2$ is étale. Hence the proof of Proposition 1.5.5 goes through unchanged. □

Theorem 1.6.6. — *Let $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ be a short exact sequence of ϕ-modules over R. If any two of M_1, M_2, M are pure of slope s (except possibly M_1, M_2 in the case of weak Hypothesis 1.4.1), then so is the third.*

Proof. — By Lemma 1.6.3, we may apply $[a]_*$ to reduce to the case where $s \in \mathbb{Z}$; by twisting, we may force $s = 0$. The result now follows from Proposition 1.5.6. □

Remark 1.6.7. — In a short exact sequence $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ over R, the fact that M is pure of slope s does not by itself imply the same for M_1 and M_2, unless the sequence splits (see Corollary 1.6.11). For example, if M is pure of rank 2 and slope 0, it can happen that M_1 is pure of rank 1 and slope 1, while M_2 is pure of rank 1 and slope -1. This sort of example arises naturally from p-adic Hodge theory, as in the theory of trianguline representations introduced by Colmez [**13**].

Lemma 1.6.8. — *Let M be a pure ϕ-module over R of positive slope. Then $H^0(M) = 0$.*

Proof. — By replacing M with $[a]_*M$ for $a = \operatorname{rank}(M)$, we can reduce to the case where $\mu(M) \in \mathbb{Z}_{>0}$. By Theorem 1.6.5, there exists a pure ϕ-module M_0 over R^{bd} with $M \cong M_0 \otimes R$. By Proposition 1.5.4, we have $H^0(M_0) = H^0(M)$.

Choose a basis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ of M_0 such that the matrix A defined by $\phi(\mathbf{e}_j) = \sum_i A_{ij}\mathbf{e}_i$ has all entries of valuation at least $\mu(M)$. If $\mathbf{v} = \sum c_i \mathbf{e}_i \in H^0(M)$ is nonzero, then $c_i = \sum_j A_{ij}\phi(c_j)$ implies that $\min_i\{w(c_i)\} > \min_j\{w(c_j)\}$, contradiction. Hence $H^0(M) = 0$. □

Corollary 1.6.9. — *If M and N are pure ϕ-modules over R with $\mu(M) < \mu(N)$, then $\operatorname{Hom}(M, N) = 0$.*

Proof. — The conditions ensure that $M^\vee \otimes N$ is pure of positive slope; by Lemma 1.6.8, $\operatorname{Hom}(M, N) = H^0(M^\vee \otimes N) = 0$. □

Theorem 1.6.10. — *Let M be a pure ϕ-module over R of slope s.*

(a) *M is module-semistable.*
(b) *If N is a ϕ-submodule of M with $\mu(N) = s$, then N is saturated, and both N and M/N are pure of slope s.*

Proof. — For (a), let N be a ϕ-submodule of M; we wish to show that $\mu(N) \geq s$. By replacing M by $\wedge^{\operatorname{rank}(N)}M$, we may assume that $\operatorname{rank}(N) = 1$. By Lemma 1.6.3, we may assume further that $s \in \mathbb{Z}$. By twisting, we may assume further that N is trivial, so that $H^0(M) \neq 0$. To avoid contradicting Lemma 1.6.8, we must then have $s \leq 0 = \mu(N)$, yielding semistability.

For (b), by applying $[a]_*$ and twisting, we may again reduce to the case $s = 0$. Let M_0 be an étale lattice in M; by Lemma 1.5.7, the kernel of $M_0 \to M/N$ is a ϕ-module over R^{int}, so the image is as well. Let P be the R-span of this image; it is an étale ϕ-submodule of M/N of the same rank. Since $\mu(N) = \mu(M) = 0$, we also

have $\mu(M/N) = 0$, so $M/N = P$ by Corollary 1.4.10. Hence M/N is étale; the same logic applied after dualizing implies that $N^\vee$ is étale, as then is N. □

Corollary 1.6.11. — *If M_1, M_2 are ϕ-modules, then $M = M_1 \oplus M_2$ is pure of slope s if and only if both M_1 and M_2 are pure of slope s.*

Proof. — If M_1 and M_2 are pure of the same slope, then visibly so is M. Conversely, if M is pure of slope s, then M is semistable by Theorem 1.6.10(a), so the ϕ-submodules M_1 and M_2 each have slope at least s. Since $\mu(M)$ is a weighted average of $\mu(M_1)$ and $\mu(M_2)$, we must in fact have $\mu(M_1) = \mu(M_2) = s$; by Theorem 1.6.10(b), M_1 and M_2 are both pure of slope s. □

Corollary 1.6.12. — *Let M be a ϕ^a-module over R. Then M is pure of some slope s if and only if $[a]^*M$ is pure of slope s/a.*

Proof. — By Lemma 1.6.3, $[a]^*M$ is pure of slope s/a if and only if $[a]_*[a]^*M$ is pure of slope s. If M is pure of slope s, then so are $(\phi^i)^*M$ for $i = 0, \dots, a-1$; since

$$[a]_*[a]^*M \cong \oplus_{i=0}^{a-1}(\phi^i)^*M \tag{1.6.12.1}$$

by Definition 1.3.6, $[a]_*[a]^*M$ is pure of slope s.

Conversely, if $[a]_*[a]^*M$ is pure of slope s, then (1.6.12.1) shows that M is a direct summand of $[a]_*[a]^*M$, and hence is pure by Corollary 1.6.11. □

1.7. The slope filtration theorem. — So far all of our work has been formal modulo the assumption of an appropriate analogue of Proposition 1.2.6. We now restrict attention from general rings R as in strong Hypothesis 1.4.1 to the Robba ring $\mathscr{R}$ (as in Example 1.4.2), where one can make the description of ϕ-modules much more precise.

We have already described a natural filtration on ϕ-modules over $\mathscr{R}$, namely the Harder-Narasimhan filtration. The trouble is that the construction is so formal that one cannot deduce any useful properties about the resulting filtration or its associated slopes; for instance, it is not clear that module-semistability is preserved by tensor product. (The fact that the analogous statement is true for vector bundles on smooth varieties in characteristic 0 is highly nontrivial: it reduces to the case of tensoring two semistable vector bundles of slope 0 on curves [**33**], in which case it follows from an analytic classification of stable bundles due to Narasimhan-Seshadri [**34, 35**].) The slope filtration theorem, which is the main result of this paper, asserts that in fact the steps of the Harder-Narasimhan filtration are much more structured than one might have otherwise predicted.

Theorem 1.7.1 **(Slope filtration theorem).** — *Every module-semistable ϕ-module over the Robba ring $\mathscr{R}$ is pure. In particular, every ϕ-module M over $\mathscr{R}$ admits a unique*

filtration $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_l = M$ *by saturated* ϕ*-modules whose successive quotients are pure with* $\mu(M_1/M_0) < \cdots < \mu(M_l/M_{l-1})$.

This theorem is stated as a forward reference, as its proof will occupy most of the rest of the paper; here we give only a top-level summary.

Proof of Theorem 1.7.1. — The proof of Theorem 1.7.1 will be obtained by constructing (in Subsection 2.2) an extended Robba ring $\tilde{\mathscr{R}}$ which also satisfies strong Hypothesis 1.4.1, and then establishing the following facts.

- If M is a semistable ϕ-module over $\mathscr{R}$, then $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}$ is also semistable (Theorem 3.1.2).
- If $\tilde{M}$ is a semistable ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$, then $\tilde{M}$ is pure (Theorem 2.1.8).
- If M is a ϕ-module over $\mathscr{R}$ and $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}$ is pure, then M is pure (Theorem 3.1.3).

These together yield the claim. □

Remark 1.7.2. — Theorem 1.7.1 implies that the tensor product of module-semistable ϕ-modules is pure (by Corollary 1.6.4) and hence module-semistable (by Theorem 1.6.10). This formally implies that the slopes of ϕ-modules behave like valuations of eigenvalues, or like Deligne's weights in étale cohomology. That is, if M has slopes $c_1, \dots, c_m$ and M' has slopes $c'_1, \dots, c'_n$, both counted with multiplicity, then:

- the slopes of $M \oplus M'$ are $c_1, \dots, c_m, c'_1, \dots, c'_n$;
- the slopes of $M \otimes M'$ are $c_i c'_j$ for $i = 1, \dots, m$ and $j = 1, \dots, n$;
- the slopes of $\wedge^d M$ are $c_{i_1} + \cdots + c_{i_d}$ for $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq m$;
- the slopes of $[a]_* M$ are $ac_1, \dots, ac_m$;
- the slopes of $M(b)$ are $c_1 + b, \dots, c_m + b$;
- the slopes of $[a]^* M$ are $c_1/a, \dots, c_m/a$, each repeated a times.

In some sense, the slope filtration theorem is thus playing a role in this theory analogous to Deligne's analysis of determinantal weights in his second proof of the Weil conjectures [**15**].

Remark 1.7.3. — The uniqueness in Theorem 1.7.1 means that the slope filtration inherits any additional group action on the original ϕ-module. In particular, if M is a (ϕ, Γ)-module, then the steps of the slope filtration are (ϕ, Γ)-submodules of M. As shown by Berger [**5**, Théorème V.2.1], this leads to a proof of the Colmez-Fontaine theorem that (ϕ, N)-modules over a p-adic field which are *weakly admissible*, in the sense of satisfying a necessary numerical criterion, indeed arise from Galois representations via p-adic Hodge theory. (See also the variant of Berger's argument given by Kisin [**27**].)

Remark 1.7.4. — The étale (ϕ, Γ)-modules attached to Galois representations of a p-adic field were originally defined by Fontaine over the p-adic completion of $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$; the fact that they can be descended to $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$ is a theorem of Cherbonnier and Colmez [**9**, Corollaire III.5.2]. The fact that the descent is unique follows from the fact that the base change from étale ϕ-modules over $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$ to its completion is fully faithful, which in turn follows from Proposition 1.2.7.

Remark 1.7.5. — In the context of p-adic differential equations and rigid cohomology, Theorem 1.7.1 arises with M carrying the extra structure of a connection $\nabla : M \to M \otimes \Omega^1_{\mathscr{R}/K}$ compatible with the ϕ-action; that is, M is a *(ϕ, ∇)-module.* One can see that the steps of the slope filtration are (ϕ, ∇)-submodules by using Corollary 1.6.9 as follows. The map ∇ induces a homomorphism $M_1 \to (M/M_1) \otimes \Omega^1_{\mathscr{R}/K}$ of ϕ-modules. Since $\Omega^1_{\mathscr{R}/K}$ is a rank 1 ϕ-module of nonnegative slope (the slope is actually positive, but we don't need this here), each slope of $(M/M_1) \otimes \Omega^1_{\mathscr{R}/K}$ is strictly greater than $\mu(M_1)$. Repeated application of Corollary 1.6.9 yields the claim.

Given that the slope filtration is a filtration by (ϕ, ∇)-submodules, one may prove the local monodromy theorem for p-adic differential equations as in [**21**], by showing each successive quotient in the slope filtration becomes trivial as a ∇-module after tensoring with a suitable finite unramified extension of $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$. This reduces easily to the étale case, which is a theorem of Tsuzuki [**42**, Theorem 4.2.6]. Beware, however, that this last step only applies for ϕ_K absolute; in particular, this approach cannot be used to prove [**6**, Proposition 6.2.1].

Remark 1.7.6. — By [**18**, Theorem 11.1], the conclusion of Theorem 1.7.1 also holds in the situation of Example 1.4.3; indeed, what one obtains is an analogue of the classification of ϕ-modules over the extended Robba ring $\tilde{\mathscr{R}}$ to be introduced in Section 2. That result is not covered by this paper, though (as [**18**] already points out) there are very strong parallels between the ensuing calculations. However, Theorem 1.7.1 itself does address a related situation: if we take $K = k((z))$ with k of characteristic $p > 0$, and ϕ_K to be a power of the absolute Frobenius, then $\mathscr{R}$ consists of Laurent series in t over z which converge for $|z|^c < |t| < 1$ for some $c > 0$. Since the valuation on k is trivial, it is equivalent to require convergence when $0 < |z| < |t|^{1/c}$; that is, we are considering series in z over $k((t))$ convergent on some punctured disc around the origin. In this case (assuming q is a power of p), Theorem 1.7.1 is a result of Hartl [**17**, Theorem 1.7.7].

It would be interesting to know about the following q-analogue of Remark 1.7.6; it may be related to the formal classification of linear difference operators [**38**], in much the same way that the construction of the canonical lattice of an irregular

meromorphic connection [**31**] reduces to the formal classification of linear differential operators [**30**].

Question 1.7.7. — *Let K be a complete field, either archimedean or nonarchimedean. Take R to be the ring of germs of analytic functions over K on punctured discs around the origin, R^{bd} to be the germs meromorphic at zero, w to be the order of vanishing at zero, and ϕ to be the map $\sum c_i t^i \mapsto \sum c_i q^i t^i$ for some $q \in K^*$ with $|q| < 1$. Does the analogue of Theorem 1.7.1 hold in this setting?*

Remark 1.7.8. — The conclusion of Theorem 1.7.1 also holds for ϕ-modules over K itself; this is a straightforward consequence of Proposition 2.4.5. In addition, if ϕ is bijective on K, then it is easy to check that $H^1(M) = 0$ for M pure of nonzero slope, so the slope filtration splits uniquely. This gives a semilinear analogue of the eigenspace decomposition of a vector space equipped with a linear transformation. If k is algebraically closed of characteristic $p > 0$ and ϕ is an absolute Frobenius lift, this recovers the Dieudonné-Manin classification of rational Dieudonné modules [**32**].

Remark 1.7.9. — The conclusion of Theorem 1.7.1 does not hold for ϕ equal to the identity map on $\mathscr{R}$. In fact, the conclusion is equivalent to the condition that the characteristic polynomial of ϕ have all coefficients in $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$, whereas the definition of a ϕ-module only forces the determinant to belong to $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$.

2. Classification over an extended Robba ring

In this section and the next, we give a proof of Theorem 1.7.1. Although somewhat simplified in some technical aspects, the argument follows the same arc as in [**21**] and [**22**], with two basic stages. In the first stage, performed in this section, we show that ϕ-modules over a suitable overring of $\mathscr{R}$ admit a very simple classification (analogous to the Dieudonné-Manin classification alluded to in Remark 1.7.8), and in particular admit a slope filtration. In the second stage, we show that the slope filtration descends back to $\mathscr{R}$.

On a first reading, we recommend reading only Subsection 2.1 for an overview, then returning later for the technical details in the rest of the section.

2.1. Overview

Hypothesis 2.1.1. — Throughout this section, assume that ϕ is a relative Frobenius lift on $\mathscr{R}$ such that ϕ_K is an *automorphism* of K. Also assume that any étale ϕ-module over K is trivial; this is equivalent to asking that any ϕ-module over the residue field k be trivial. It also implies that H^1 vanishes for any étale ϕ-module over K or any ϕ-module over k. Using Definition 1.3.7, we deduce the same conclusions with ϕ replaced by ϕ^a for any positive integer a.

Remark 2.1.2. — In the absolute Frobenius case, Hypothesis 2.1.1 can be satisfied by taking k to be algebraically closed. In general, one must work a bit harder; see Proposition 3.2.4.

We will define (Definition 2.2.4) an *extended Robba ring* $\tilde{\mathscr{R}}$ which has the following properties:

- $\tilde{\mathscr{R}}$ is a Bézout domain containing $\mathscr{R}$, and admits an automorphism ϕ extending the given Frobenius lift on $\mathscr{R}$ (see Remark 2.2.5 and Proposition 2.2.6).
- The units in $\tilde{\mathscr{R}}$ are the nonzero elements of a subfield $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{bd}}$, which is the fraction field of a discrete valuation ring $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$ for which $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}} \cap \mathscr{R} = \mathscr{R}^{\mathrm{int}}$ (see Remark 2.2.5).
- The strong form of Hypothesis 1.4.1 holds for $R = \tilde{\mathscr{R}}$ (see Proposition 2.2.8).

The classification of ϕ-modules over $\tilde{\mathscr{R}}$ rests on a sequence of structural results, which we state in roughly increasing order of difficulty; their proofs occupy the remainder of this section.

Proposition 2.1.3. — *Let M, N be pure ϕ-modules over $\tilde{\mathscr{R}}$ obtained by base change from K, with $\mu(M) > \mu(N)$. Then* $\mathrm{Hom}(M, N) \neq 0$.

Proof. — See Subsection 2.2. □

Notation 2.1.4. — Choose a uniformizer π of K, and let $\tilde{\mathscr{R}}(1)$ be the ϕ-module of rank 1 and degree 1 on which ϕ acts on some generator via multiplication by π. We use $\tilde{\mathscr{R}}(1)$ as a twisting sheaf, writing $M(n) = M \otimes \tilde{\mathscr{R}}(1)^{\otimes n}$.

Proposition 2.1.5. — *Let M be a nonzero ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$. Then for all sufficiently large integers n, $H^0(M(-n)) \neq 0$ and $H^1(M(-n)) = 0$.*

Proof. — See Subsection 2.3. □

Proposition 2.1.6. — *For any rational number s, the base change functor from pure ϕ-modules of slope s over K to pure ϕ-modules of slope s over $\tilde{\mathscr{R}}$ is an equivalence of categories.*

Proof. — See Subsection 2.5. □

Proposition 2.1.7. — *Let n be a positive integer, let N' be a pure ϕ^n-module over $\tilde{\mathscr{R}}$ of rank 1 and degree 1, let P be a pure ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$ of rank 1 and degree -1, and suppose*

$$0 \to [n]^* N' \to M \to P \to 0$$

is a short exact sequence of ϕ-modules. Then $H^0(M) \neq 0$.

Proof. — See Subsection 2.6. □

These assemble to give the following classification theorem.

Theorem 2.1.8. — *Any module-semistable ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$ is pure. Consequently, the successive quotients of the HN filtration of a ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$ are all pure.*

Remark 2.1.9. — Before proving Theorem 2.1.8, we make an observation which figures prominently in the argument. If one knows Theorem 2.1.8 for ϕ-modules of rank $\leq n$, it follows from Propositions 2.1.3 and 2.1.6 (and the assumption that étale ϕ-modules over K are trivial, as built into Hypothesis 2.1.1) that for M a pure ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$ and N an *arbitrary* ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$ with $\mathrm{rank}(N) \leq n$ and $\mu(M) \geq \mu(N)$, we have $\mathrm{Hom}(M, N) \neq 0$; in particular, if $\mathrm{rank}(M) = 1$, we would have an injection of M into N. This is because the first step of the HN filtration of N always has slope $\leq \mu(N)$.

Proof of Theorem 2.1.8. — We proceed by induction on rank, the case of rank 1 being evident. Assume that $n \geq 1$ and that for every positive integer a, every semistable ϕ^a-module of rank $\leq n$ is pure. Suppose that M is a semistable ϕ^a-module of rank $n+1$ over $\tilde{\mathscr{R}}$; we wish to show that M is pure. We may reduce to the case where $\mu(M) \in \mathbb{Z}$ by applying $[d]_*$ and invoking Corollary 1.4.13 (to see that semistability is preserved) and Lemma 1.6.3 (to see that purity is reflected); we may then twist to ensure $\mu(M) = 0$. For ease of notation, we will assume hereafter that M is a ϕ-module (at the expense of replacing ϕ by a power, which does not disturb Hypothesis 2.1.1).

Put $M' = [n]_* M$; then M' is semistable by Corollary 1.4.13 again. By Proposition 2.1.5, there exists a nonnegative integer c such that M' admits a pure ϕ^n-submodule N' of rank 1 and slope c; choose c as small as possible. Suppose that $c \geq 2$; since $\mu(M'/N') < 0 \leq c - 2$, we may apply Remark 2.1.9 to produce a ϕ^n-submodule of M'/N' isomorphic to $\tilde{\mathscr{R}}(c-2)$. Let Q' be the inverse image of that submodule in M'; applying Proposition 2.1.7 (in the case $n = 1$) to the exact sequence

$$0 \to N'(1-c) \to Q'(1-c) \to \tilde{\mathscr{R}}(-1) \to 0,$$

we see that $H^0(Q'(1-c)) \neq 0$ and hence $H^0(M'(1-c)) \neq 0$, contradicting the minimality of c.

Suppose that $c = 1$. Put $N = [n]^* N'$; then N is pure of slope $1/n$ by Corollary 1.6.12. The adjunction between $[n]^*$ and $[n]_*$ converts the inclusion $N' \hookrightarrow M'$ into a nonzero map $f : N \to M$. Since N is semistable by Theorem 1.6.10, $\mu(f(N)) \leq 1/n$; moreover, the denominator of $\mu(f(N))$ is at most $\mathrm{rank}(f(N)) \leq n$. Consequently, either $\mu(f(N)) \leq 0$, in which case Remark 2.1.9 implies that $H^0(f(N)) \neq 0$; or $\mu(f(N)) = 1/n$, in which case f must be injective and we have an exact sequence

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

with P pure of rank 1 and slope -1, to which we apply Proposition 2.1.7 to deduce that $H^0(M) \neq 0$. In either case, we contradict the minimality of c.

We deduce that $c = 0$, i.e., M' admits a nontrivial étale ϕ-submodule N'; the quotient M'/N' is also semistable, hence pure by the induction hypothesis. By Theorem 1.6.6, M' is pure, as then is M by Lemma 1.6.3. This completes the proof. □

Remark 2.1.10. — In the proof of Theorem 2.1.8, the passage from M to M' is made in order to simplify the statement of Proposition 2.1.7. One can do some extra work to prove a version of Proposition 2.1.7 in which $[n]^*N'$ is replaced by any pure ϕ-module of rank n and degree 1; however, the internal improvement is immaterial in the end, as even this stronger form of Proposition 2.1.7 is itself an immediate consequence of Theorem 2.1.8.

2.2. The extended Robba ring. — We now go back and construct the extended Robba ring $\tilde{\mathscr{R}}$.

Definition 2.2.1. — Let R be a ring and let G be a totally ordered abelian group. The ring of *Hahn series* (or *Mal'cev-Neumann series*, or *generalized power series*) over R with value group G is the set of functions $f : G \to R$ with well-ordered support, with pointwise addition and multiplication given by convolution; it is a standard calculation [**37**, Chapter 13] to verify that these operations give a well-defined ring, which is a field if R is. We typically represent elements of this ring as formal series $\sum_{g \in G} r_g u^g$ in some dummy variable u with powers indexed by $g \in G$, and the ring is correspondingly denoted $R((u^G))$. For $G \subseteq \mathbb{R}$, we view $R((u^G))$ as being equipped with the u-adic valuation v sending $\sum_g r_g u^g$ to the smallest g for which $r_g \neq 0$ (i.e., the least element of the support).

Lemma 2.2.2. — *Let $\phi : R((u^{\mathbb{Q}})) \to R((u^{\mathbb{Q}}))$ be an automorphism of the form $\sum_i a_i u^i \mapsto \sum_i \phi_R(a_i) u^{qi}$, with ϕ_R an automorphism of R. Then the map $1 - \phi$ is bijective on the set of series with zero constant term.*

Proof. — If $x \in R((u^{\mathbb{Q}}))$ and $v(x) < 0$, then $v(x - \phi(x)) = qv(x)$, whereas if $v(x) > 0$, then $v(x - \phi(x)) = v(x)$. This proves injectivity.

Given $x \in R((u^{\mathbb{Q}}))$, write $x = \sum_i x_i u^i$, and put

$$y_+ = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i>0} \phi_R^j(x_i) u^{iq^j}$$

$$y_- = \sum_{i<0} \left(\sum_{j=0}^{\infty} -\phi_R^{-j-1}(x_{iq^{j+1}}) \right) u^i.$$

Since both sums give well-defined elements of $R((u^{\mathbb{Q}}))$ (in the definition of y_-, the sum over j is finite for each i), we may put $y = y_+ + y_-$, which has zero constant term and satisfies $y - \phi(y) = x - x_0$. This proves surjectivity. □

Corollary 2.2.3. — *With k as in Hypothesis 2.1.1, for any $c \in k^*$, the map $1 - c\phi$ on $k((u^{\mathbb{Q}}))$ is surjective.*

Proof. — By Hypothesis 2.1.1, there exists $a \in k^*$ such that $\phi(a) = ca$, so we can always write

$$(1 - c\phi)(x) = a^{-1}(ax - \phi(ax)).$$

It thus suffices to check the case $c = 1$; this follows from Lemma 2.2.2 and the fact that $1 - \phi$ is surjective on k, which again is a consequence of Hypothesis 2.1.1. □

Corresponding to the extension from power series to generalized power series, we define an enlargement of the Robba ring. We first construct the ring, then the embedding of the original Robba ring into it.

Definition 2.2.4. — For $r > 0$, let $\tilde{\mathscr{R}}^r$ be the set of formal sums $\sum_{i \in \mathbb{Q}} a_i u^i$ with $a_i \in K$, satisfying the following conditions.

- For each $c > 0$, the set of $i \in \mathbb{Q}$ such that $|a_i| \geq c$ is well-ordered.
- We have $|a_i| e^{-ri} \to 0$ as $i \to -\infty$.
- For all $s > 0$, we have $|a_i| e^{-si} \to 0$ as $i \to +\infty$.

Then $\tilde{\mathscr{R}}^r$ can be shown to form a ring. We call the union $\tilde{\mathscr{R}} = \tilde{\mathscr{R}}_K = \cup_r \tilde{\mathscr{R}}^r$ the *extended Robba ring* over K. Let $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{bd}}$ and $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$ be the subrings of $\tilde{\mathscr{R}}$ consisting of series with bounded and integral coefficients, respectively. We equip $\tilde{\mathscr{R}}^r$ with the norm

$$\left| \sum_i a_i u^i \right|_r = \sup_i \{ |a_i| e^{-ri} \}$$

and $\tilde{\mathscr{R}}$ with the automorphism

$$\phi \left(\sum_i a_i u^i \right) = \sum_i \phi_K(a_i) u^{qi}.$$

Remark 2.2.5. — The ring $\tilde{\mathscr{R}}$ can be viewed as an example of an "analytic ring" in the sense of [**22**, §2.4], by taking ϕ_K to be an absolute Frobenius lift on K. Thus the results of [**22**, Chapter 2] apply to show that $\tilde{\mathscr{R}}$ shares many of the nice properties of $\mathscr{R}$, as follows.

- The ring $\tilde{\mathscr{R}}$ is a Bézout domain [**22**, Theorem 2.9.6].
- The ring $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$ is a henselian discrete valuation ring, and its fraction field is $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{bd}}$ [**22**, Lemma 2.1.12].
- The units of $\tilde{\mathscr{R}}$ are the nonzero elements of $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{bd}}$ [**22**, Lemma 2.4.7].

Proposition 2.2.6. — *There exists a ϕ-equivariant embedding $\psi : \mathscr{R} \hookrightarrow \tilde{\mathscr{R}}$ such that for any r_0 as in Remark 1.2.5 and any $r \in (0, r_0)$, $\mathscr{R}^r$ maps to $\tilde{\mathscr{R}}^r$ preserving $|\cdot|_r$.*

Proof. — We inductively construct homomorphisms $\psi_l : \mathscr{R} \to \tilde{\mathscr{R}}$, each of the form $\psi_l(\sum c_i t^i) = \sum c_i u_l^i$ for some $u_l \in \tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$ with $|u_l|_r = |t|_r$ for $r \in (0, r_0)$, satisfying

$$\psi_l(\phi(x)) \equiv \phi(\psi_l(x)) \pmod{\pi^l} \qquad (x \in \mathscr{R}^{\mathrm{int}}),$$

starting with $u_1 = u$. Given ψ_l, we may repeatedly invoke Corollary 2.2.3 (if $q \neq 0$ in k) or the fact that ϕ is surjective on $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$ (if $q = 0$ in k) to construct $\Delta \in \tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$ with

$$\phi(\pi^l \Delta/u) - q(\pi^l \Delta/u) = (\psi_l(\phi(t)) - \phi(u_l))/u^q. \tag{2.2.6.1}$$

For any $r \in (0, r_0)$,

$$|\psi_l(\phi(t))|_{r/q}, |\phi(u_l)|_{r/q} \leq |t^q|_r = |u^q|_r$$

and so the right side of (2.2.6.1) has (r/q)-norm at most 1. From this plus either the proof of Lemma 2.2.2 (if $q \neq 0$ in k) or direct inspection (if $q = 0$ in k), we deduce that $|\pi^l \Delta/u|_r \leq 1$. We may thus set $u_{l+1} = u_l + \pi^l \Delta$ to construct ψ_{l+1}; this has the desired effect because

$$\psi_{l+1}(\phi(t)) \equiv \psi_l(\phi(t)) + q\pi^l \Delta u^{q-1} \pmod{\pi^{l+1}}.$$

The property $|u_l|_r = |t|_r$ implies that each ψ_l carries $\mathscr{R}^r$ to $\tilde{\mathscr{R}}^r$ preserving $|\cdot|_r$. By continuity, we obtain a map ψ with the same property, as desired. □

Lemma 2.2.7. — *The fixed elements of $\tilde{\mathscr{R}}$ under ϕ all belong to K.*

Proof. — For $x = \sum_i a_i u^i \in \tilde{\mathscr{R}}$, we have $\phi(x) = \sum_i \phi_K(a_i) u^{qi}$. If $\phi(x) = x$ and $a_i \neq 0$ for some $i \neq 0$, then $|a_{iq^n}| = |a_i|$ for all $n \in \mathbb{Z}$; but this contradicts the fact that for any $c > 0$, the set of $i \in \mathbb{Q}$ with $|a_i| \geq c$ is well-ordered. Hence $a_i = 0$ for all $i \neq 0$, proving the claim. □

We now notice that strong Hypothesis 1.4.1 holds for $\tilde{\mathscr{R}}$.

Proposition 2.2.8. — *Let A be an $n \times n$ matrix over $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$. Then the map $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - A\phi(\mathbf{v})$ on column vectors induces a bijection on $(\tilde{\mathscr{R}}/\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{bd}})^n$.*

Proof. — The proof proceeds as in Proposition 1.2.6, using the definition of $|\cdot|_r$ given in Definition 2.2.4. □

Remark 2.2.9. — As a reminder, here are some key properties of $\tilde{\mathscr{R}}$ which we will use going forward.

- Given a relative Frobenius lift ϕ on $\mathscr{R}$, we can define an action of ϕ on $\tilde{\mathscr{R}}$ and an equivariant embedding $\psi : \mathscr{R} \hookrightarrow \tilde{\mathscr{R}}$ which preserves $|\cdot|_r$ for $r \in (0, r_0)$ (Proposition 2.2.6).
- The map ϕ is bijective on $\tilde{\mathscr{R}}$.
- The map $1 - \phi$ is bijective on $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}/\mathfrak{o}_K$ (easy consequence of Lemma 2.2.2).
- There is a natural direct limit topology, restricting to the direct limit of Fréchet topologies on $\mathscr{R}$, under which $\tilde{\mathscr{R}}$ is complete.

In [21] and [22], the role of our $\tilde{\mathscr{R}}$ is played by the ring $\Gamma^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{an,con}}$, which is constructed to be minimal for the above properties; that ring coincides with the ring denoted $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{an}}$ (as in [4, §II]) or more commonly $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ (as in [11]). We opt here for the ring $\tilde{\mathscr{R}}$ instead in hopes that the construction using generalized power series makes the analogy to $\mathscr{R}$ a bit more apparent.

To conclude this section, we prove Proposition 2.1.3: if M, N are pure ϕ-modules over $\tilde{\mathscr{R}}$ obtained by base change from K, with $\mu(M) > \mu(N)$, then $\mathrm{Hom}(M, N) \neq 0$.

Proof of Proposition 2.1.3. — It is equivalent to show that if M is pure with $\mu(M) < 0$, obtained by base change from K, then $H^0(M) \neq 0$. Write $M = M_0 \otimes_K \tilde{\mathscr{R}}$ for M_0 a pure ϕ-module over K. Take any nonzero $\mathbf{w} \in M_0$ and any $i > 0$; the sum

$$\mathbf{v} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi^n(u^i \mathbf{w})$$

will converge to a nonzero element of $H^0(M)$. (Compare [22, Proposition 3.3.4(c2)].) □

2.3. Construction of fixed vectors. — We next treat Proposition 2.1.5: if M is a nonzero ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$, then for all sufficiently large integers n, $H^0(M(-n)) \neq 0$ and $H^1(M(-n)) = 0$. (Also compare [18, Theorem 4.1].)

Proof of Proposition 2.1.5. — We follow [22, Proposition 4.2.2]. View M as a space of column vectors with the action of ϕ given by multiplication by the matrix A times the componentwise action. Choose $r > 0$ so that A and A^{-1} have entries in $\tilde{\mathscr{R}}^{q^r}$.

For $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ to be specified below, define the "splitting functions" f_d^+, f_d^- as follows: given $x = \sum a_i u^i$, put

$$f_d^+(x) = \sum_{i \geq d} a_i u^i, \qquad f_d^-(x) = \sum_{i < d} a_i u^i,$$

then extend to vectors componentwise. For $\mathbf{w}$ a vector, we write $\mathbf{w}^{\pm}$ for $f_d^{\pm}(\mathbf{w})$.

Define the map $g : M \to M$ by

$$g(\mathbf{w}) = \pi^{-n} A \phi(\mathbf{w}^+) + \phi^{-1}(\pi^n A^{-1} \mathbf{w}^-)$$

and note that

$$|g(\mathbf{w})|_r \leq \max\{|\pi|^{-n}|A|_r e^{-rd(q-1)}, |\pi|^n |A^{-1}|_{q^r} e^{-rd(q^{-1}-1)}\} |\mathbf{w}|_r. \tag{2.3.0.1}$$

If we can choose d such that the two quantities in the maximum in (2.3.0.1) are both strictly less than 1, then g will be contractive towards zero. This happens if

$$d \in \left(\frac{n(-\log|\pi|) + \log|A|_r}{r(q-1)}, \frac{qn(-\log|\pi|) - q\log|A^{-1}|_{q^r}}{r(q-1)} \right); \tag{2.3.0.2}$$

for n sufficiently large the interval is nonempty. (Note that consistently with Proposition 2.1.3, if M is étale over K we can take any $n > 0$.)

Fix n, d satisfying (2.3.0.2). Given $\mathbf{w}$ with entries in $\tilde{\mathscr{R}}^r$, we define the sequence $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}, \mathbf{w}_{l+1} = g(\mathbf{w}_l)$, then set

$$\mathbf{v} = \sum_{l=0}^{\infty} (\mathbf{w}_l^+ - \phi^{-1}(\pi^n A^{-1} \mathbf{w}_l^-)), \tag{2.3.0.3}$$

so that $|\mathbf{v}|_r \leq |\mathbf{w}|_r$ and $\mathbf{v} - \pi^{-n} A \phi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. We only know *a priori* that the sum defining $\mathbf{v}$ converges under $|\cdot|_r$, but using the equation $\mathbf{v} = \pi^{-n} A \phi(\mathbf{v}) + \mathbf{w}$, we may deduce that the sum converges under $|\cdot|_{r/q}$, $|\cdot|_{r/q^2}$, and so on. Hence $\mathbf{v}$ has entries in $\tilde{\mathscr{R}}^r$, yielding $H^1(M(-n)) = 0$.

To deduce $H^0(M(-n)) \neq 0$, we modify the previous construction slightly. Put $\mathbf{w} = (u^d, 0, \dots, 0)$ and construct $\mathbf{v}$ as in (2.3.0.3). Then put $\mathbf{w}_0' = \mathbf{w}$, $\mathbf{w}_1' = \phi^{-1}(\pi^n A^{-1} \mathbf{w}_0')$, and $\mathbf{w}_{l+1}' = g(\mathbf{w}_l')$ for $l \geq 1$. (That is, at the first step, transfer the boundary term u^d from the plus part to the minus part.) If we now define

$$\mathbf{v}' = -\phi^{-1}(\pi^n A^{-1} \mathbf{w}_0') + \sum_{l=1}^{\infty} ((\mathbf{w}_l')^+ - \phi^{-1}(\pi^n A^{-1} (\mathbf{w}_l')^-)),$$

we obtain $\mathbf{v}' - \pi^{-n} A \phi(\mathbf{v}') = \mathbf{w}$ as before. However, $|\mathbf{v}|_r = |u^d|_r$ whereas $|\mathbf{v}'|_r < |u^d|_r$, so $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ is a nonzero element of $H^0(M(-n))$, as desired. □

2.4. Twisted polynomials and their Newton polygons. — Before continuing, we need to analogize, to the realm of twisted polynomials over $k((u^{\mathbb{Q}}))$, some facts about polynomials over valued fields and their Newton polygons. With a bit of care, we can obtain at the same time some results over K which we will need later (see Proposition 3.2.4).

Notation 2.4.1. — Throughout this subsection only, fix a real number $s \geq 1$, and let F be a field equipped with an automorphism $\phi = \phi_F$ and a valuation v_F with the properties that F is complete under v_F and $v_F(\phi_F(x)) = s v_F(x)$ for all $x \in F$. Let $\mathfrak{o}_F$ and $\mathfrak{m}_F$ denote the valuation subring of F and the maximal ideal of $\mathfrak{o}_F$, respectively.

Definition 2.4.2. — For $i \in \mathbb{Z}$, write $[i] = \sum_{j=0}^{i-1} s^j$, so that $[0] = 0$, $[1] = 1$, and $[i+j] = [i] + s^i[j]$. For $r \in \mathbb{R}$ and $P(T) \in F\{T^{\pm}\}$, write $P(T) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i$, and write

$$v_r(P) = \min_i \{v_F(a_i) + r[i]\}.$$

Define the *homogeneous Newton polygon* of P as the lower convex hull of the set

$$\{(-[i], v_F(a_i)) : i \in \mathbb{Z}\};$$

we refer to the slopes of this polygon as the *(Newton) slopes of* P.

Lemma 2.4.3. — *For $P(T) \in F\{T\}$ and $Q(T) \in F\{T^{-1}\}$ such that $v_r(Q) \geq 0$, we have $v_r(PQ) \geq v_r(P) + v_r(Q)$.*

Proof. — Write $P(T) = \sum_{i \geq 0} a_i T^i$ and $Q(T) = \sum_{j \leq 0} b_j T^j$. We have

$$(PQ)(T) = \sum_k \sum_{i+j=k} a_i \phi^i(b_j) T^k,$$

and

$$v_F(a_i \phi^i(b_j)) + [i+j]r = v_F(a_i) + [i]r + s^i(v_F(b_j) + [j]r). \tag{2.4.3.1}$$

The right side of (2.4.3.1) is at least $v_r(P) + s^i v_r(Q)$. Since $i \geq 0$ and $s \geq 1$, if $v_r(Q) \geq 0$, then the right side of (2.4.3.1) is at least $v_r(P) + v_r(Q)$. This yields the claim. □

Proposition 2.4.4. — *Let $r_0 \in \mathbb{R}$ be a real number, and suppose that $P(T) \in F\{T\}$ and $Q(T) \in F\{T^{-1}\}$ are such that P has constant term 1 and all slopes $\leq r_0$, and Q has constant term 1 and all slopes $\geq r_0$. Then the slopes of PQ are obtained by taking the union (with multiplicities) of the sets of slopes of P and Q.*

Proof. — The conditions on the slopes of P and Q imply that

$$r \geq r_0 \implies v_r(P) = 0, v_r(Q) \leq 0$$
$$r \leq r_0 \implies v_r(P) \leq 0, v_r(Q) = 0.$$

It thus suffices to check that

$$v_r(PQ) = \begin{cases} v_r(Q) & r > r_0 \\ 0 & r = r_0 \\ v_r(P) & r < r_0. \end{cases}$$

Retain notation as in Lemma 2.4.3. If $r \geq r_0$, take the smallest j that minimizes $v_F(b_j) + [j]r$; then (2.4.3.1) equals $v_r(Q)$ for $i = 0$ but not for any other pair i, j with the same sum. If $r \leq r_0$, take the largest i that minimizes $v_F(a_i) + [i]r$; then (2.4.3.1) equals $v_r(P)$ for $j = 0$ but not for any other pair i, j with the same sum. This yields the desired result. □

Proposition 2.4.5. — *Let $r \in \mathbb{R}$ be a real number, and suppose that $R \in F\{T^{\pm}\}$ satisfies $v_r(R - 1) > 0$. Then there exist $c \in F$, $P(T) \in F\{T\}$, $Q(T) \in F\{T^{-1}\}$ such that $v_F(c - 1) > 0$, P has constant term 1 and all slopes $< r$, Q has constant term 1 and all slopes $> r$, and $cPQ = R$.*

Proof. — Put $c_0 = P_0 = Q_0 = 1$. Given c_i, P_i, Q_i, write $R - c_i P_i Q_i = \sum_j r_j T^j$, and put

$$c_{i+1} = c_i + r_0$$
$$P_{i+1} = P_i + \sum_{j>0} r_j T^j$$
$$Q_{i+1} = Q_i + \sum_{j<0} r_j T^j.$$

Suppose that $\min\{v(c-1), v_r(P_i - 1), v_r(Q_i - 1)\} \geq v_r(R-1)$. By Lemma 2.4.3, $v_r(R - c_i P_i Q_i) \geq v_r(R-1)$, and

$$v_r(R - c_{i+1} P_{i+1} Q_{i+1}) \geq v_r(R - c_i P_i Q_i) + v_r(R-1).$$

It follows that c_i, P_i, Q_i converge to limits c, P, Q with the desired properties. □

Corollary 2.4.6. — *If $R(T) \in F\{T^{\pm}\}$ is irreducible, then it has only one slope.*

2.5. Classification of pure ϕ-modules. — We next classify the ϕ-modules over $k((u^{\mathbb{Q}}))$, then classify the pure ϕ-modules over $\tilde{\mathscr{R}}$ (Proposition 2.1.6).

Notation 2.5.1. — Throughout this subsection only, write $F = k((u^{\mathbb{Q}}))$; note that this is consistent with Notation 2.4.1 if we put $s = q$, take v_F to be the u-adic valuation, and take ϕ_F of the form $\sum c_i u^i \mapsto \sum \phi_k(c_i) u^{qi}$ for some automorphism ϕ_k of k.

Lemma 2.5.2. — *Let $P(T) \in F\{T\}$ be a twisted polynomial over F with all Newton slopes equal to 0. Then there exists $x \in \mathfrak{o}_F^*$ such that $P(\phi)(x) = 0$.*

Proof. — We may assume that P has constant term 1. Since ϕ-modules over k are trivial (by Hypothesis 2.1.1), we can find $z \in \mathfrak{o}_F^*$ with $P(\phi)(z) \in \mathfrak{m}_F$. Since $(P-1)(\phi)$ is contractive towards 0 on $\mathfrak{m}_F$, we can find $y \in \mathfrak{m}_F$ such that $P(\phi)(y) = P(\phi)(z)$. Put $x = z - y$; then $P(\phi)(x) = 0$. □

Lemma 2.5.3. — *Let $P(T) \in F\{T\}$ be a monic twisted polynomial over F with all Newton slopes equal to 0. Then $P(T)$ factors as a product $\prod_j (T - a_j)$ for some $a_j \in \mathfrak{o}_F^*$.*

Proof. — By Lemma 2.5.2, there exists $x \in \mathfrak{o}_F^*$ such that $P(\phi)(x) = 0$. By the division algorithm for twisted polynomials, $P(T)$ is right divisible by $T - a$ for $a = \phi(x)/x$; the claim then follows by induction. □

Lemma 2.5.4. — *Every irreducible ϕ-module over F is trivial.*

Proof. — Let V be an irreducible ϕ-module over F; we can then write V as $F\{T^{\pm}\}/F\{T^{\pm}\}P$ for some monic irreducible twisted polynomial $P(T)$. By Corollary 2.4.6, P has only one slope, which we can force to be 0 by rescaling. By Lemma 2.5.3, P must equal $T - a$ for some $a \in \mathfrak{o}_F^*$. But the equation $\phi(x) = ax$ has a solution $x \in \mathfrak{o}_F^*$ by Lemma 2.5.2, yielding the triviality of V. □

Proposition 2.5.5. — *Every ϕ-module over $F = k((u^{\mathbb{Q}}))$ is trivial.*

Proof. — Any ϕ-module over F can be written as a successive extension of irreducibles, which are all trivial by Lemma 2.5.4. By Corollary 2.2.3, the extensions between trivial ϕ-modules all split, yielding the claim. □

Definition 2.5.6. — For $P(T) = \sum_i a_i T^i \in F\{T^{\pm}\}$ nonzero and $z \in F$, define the *inhomogeneous Newton polygon* of the pair (P, z) as the lower convex hull of the set

$$\{(-q^i, v_F(a_i)) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0, v_F(z))\};$$

note that any slope of this polygon not involving the point $(0, v_F(z))$ is equal to $q - 1$ times a slope of the homogeneous Newton polygon.

Proposition 2.5.7. — *Given $P(T) \in F\{T^{\pm}\}$ nonzero and $z \in F$, for each $r \in \mathbb{R}$ occurring as a slope of the inhomogeneous Newton polygon of (P, z), there exists $x \in F$ with $v_F(x) = r$ such that $P(\phi)(x) = z$.*

Proof. — By applying Proposition 2.4.5, we may reduce to the case where P has a single homogeneous Newton slope; by twisting, we may force that slope to be 0. By Lemma 2.5.3, we may reduce to the case $P(T) = T - a$ for $a \in \mathfrak{o}_F^*$. By Lemma 2.5.2, we may assume that $a = 1$; in this case, the claim follows from Corollary 2.2.3. □

Before proving Proposition 2.1.6, we need one more calculation, which includes Proposition 1.2.7 (see also Remark 1.2.8).

Proposition 2.5.8. — *Let $\tilde{\mathscr{E}}$ denote the $\mathfrak{m}_K$-adic completion of $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{bd}}$. Let A be an $n \times n$ matrix over $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$. If $\mathbf{v} \in \tilde{\mathscr{E}}^n$ is a column vector such that $A\mathbf{v} = \phi(\mathbf{v})$, then $\mathbf{v} \in (\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{bd}})^n$.*

Proof. — By rescaling by a factor of u (as in the proof of Proposition 1.2.6), we may reduce to the case where the entries of A are bounded by 1 under $|\cdot|_r$; we may also assume $\mathbf{v}$ has entries in the completion of $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$. Write $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in \mathbb{Q}} c_{ij} u^i \mathbf{e}_j$, where $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ are the standard basis vectors; it suffices to show that $|c_{ij} u^i|_r \leq 1$ for all i, j, as then $\mathbf{v}$ will have entries in $\tilde{\mathscr{R}}^s$ for any $s \in (0, r)$.

Suppose the contrary; note that $|c_{ij}| \leq 1$ for all i, j by our normalization of $\mathbf{v}$, so any pair i, j with $|c_{ij} u^i|_r > 1$ must have $i < 0$, and hence

$$|\phi^{-1}(c_{ij} u^i)|_r = |c_{ij} u^{i/q}|_r < |c_{ij} u^i|_r. \tag{2.5.8.1}$$

Let h be the maximum of $|c_{ij}|$ over all pairs i,j with $|c_{ij}u^i|_r > 1$. Then there is a pair (i_0,j_0) with $|c_{i_0,j_0}| = h$ which maximizes $|c_{i_0,j_0}u^{i_0}|_r$. However, if we expand $A\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \sum_{i\in\mathbb{Q}} d_{ij}u^i\mathbf{e}_j$, then for each pair i,j with $|d_{ij}| = h$, we have $|\phi^{-1}(d_{ij}u^i)|_r < |c_{i_0,j_0}u^{i_0}|_r$ by (2.5.8.1). This contradicts the equality $\mathbf{v} = \phi^{-1}(A\mathbf{v})$, proving the claim. □

We now prove Proposition 2.1.6: the categories of pure ϕ-modules over K and over $\tilde{\mathscr{R}}$ of a given slope s are equivalent.

Proof of Proposition 2.1.6. — We first check full faithfulness. By Lemma 1.6.3 and twisting, it suffices to check this for $s = 0$; that is, we must check that given an étale ϕ-module M_0 over K, we must have $H^0(M_0) \cong H^0(M_0 \otimes_K \tilde{\mathscr{R}})$. By Hypothesis 2.1.1, we may assume that M_0 is trivial; then Lemma 2.2.7 yields the claim.

We next check essential surjectivity; we may proceed as in the proof of Theorem 1.6.5 to reduce to the case $s = 0$. Let M be an étale ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$, and choose an étale lattice M_0 of M. By repeated application of Proposition 2.5.5, after tensoring with the $\mathfrak{m}_K$-adic completion of $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$, we can find a basis of M_0 fixed by ϕ. By Proposition 2.5.8, this basis is in fact contained in M_0 itself, yielding the claim. □

2.6. The local calculation. — We now perform the explicit calculation that proves Proposition 2.1.7, thus completing the proof of Theorem 2.1.8. To avoid notational overload, we elide a few routine calculations that can be found in [**21**]. (Also compare [**18**, §9,10].)

Definition 2.6.1. — Let $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{tr}}$ (for "truncated") denote the set of elements of $\tilde{\mathscr{R}}$ whose support is bounded below. This forms a subring of $\tilde{\mathscr{R}}$ carrying a u-adic valuation v. Note that a unit in $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{tr}}$ is precisely an element $x = \sum_i a_i u^i$ for which the support of x has a least element j, and for which $|a_i| \leq |a_j|$ for all $i \in \mathbb{Q}$; in particular, such elements belong to $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{bd}}$, so we can apply the valuation w to them.

Lemma 2.6.2. — *Let P be a ϕ-module over K of rank 1 and degree $n > 0$, and fix a generator $\mathbf{v}$ of P.*

(a) *For any $x \in \tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{tr}}$ with support in $[0,+\infty)$, the class of $x\mathbf{v}$ in $H^1(P \otimes \tilde{\mathscr{R}})$ vanishes.*
(b) *Each class in $H^1(P \otimes \tilde{\mathscr{R}})$ has a representative of the form $\sum_{j=0}^{n-1} u_j\mathbf{v}$, where for each j, either $u_j = 0$, or $u_j \in (\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{tr}})^*$, $w(u_j) = j$, and $v(u_j) < 0$.*

Proof. — For (a), we first use Hypothesis 2.1.1 to eliminate constant terms, then note that if x has no constant term, the sum $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i(x\mathbf{v})$ converges and its limit $\mathbf{w}$ satisfies $\mathbf{w} - \phi(\mathbf{w}) = x\mathbf{v}$. We deduce (b) from (a) plus a direct calculation; see also [**21**, Lemmas 4.13 and 4.14] or [**22**, Lemma 4.3.2]. □

We now prove Proposition 2.1.7: if N' is a pure ϕ^n-module over $\tilde{\mathscr{R}}$ of rank 1 and degree 1, P is a pure ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}$ of rank 1 and degree -1, and

$$0 \to [n]^* N' \to M \to P \to 0 \tag{2.6.2.1}$$

is a short exact sequence of ϕ-modules, then $H^0(M) \neq 0$.

Proof of Proposition 2.1.7. — The snake lemma gives an exact sequence

$$H^0(M) \to H^0(P) \to H^1([n]^* N'),$$

where the second map is pairing with the class $\alpha \in H^1(P^\vee \otimes [n]^* N')$ corresponding to the extension (2.6.2.1); it suffices to show that this second map has nonzero kernel.

Note that $P^\vee \otimes [n]^* N' \cong [n]^*([n]_* P^\vee \otimes N')$ as in Definition 1.3.6, so we may view α as an element of $H^1([n]^*([n]_* P^\vee \otimes N')) \cong H^1([n]_* P^\vee \otimes N')$. Similarly, we may view the pairing with α as the composition of the map $H^0(P) \to H^0([n]_* P)$ with the map $H^0([n]_* P) \to H^1(N')$ given by pairing with the class in $H^1([n]_* P^\vee \otimes N')$. If the class vanishes, there is nothing to check, so we may assume that it does not vanish.

By Proposition 2.1.6, P and N' are obtained by base change from certain ϕ- and ϕ^n-modules P_0 and N_0', respectively, over K; choose generators $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ of P_0 and N_0', and define $\lambda, \mu \in K^*$ by $\phi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ and $\phi^n(\mathbf{w}) = \mu \mathbf{w}$. Put $Q_0 = [n]_* P_0^\vee \otimes N_0'$ and $Q = [n]_* P^\vee \otimes N' \cong Q_0 \otimes_K \tilde{\mathscr{R}}$; let $\mathbf{x}$ be the generator $\mathbf{v}^\vee \otimes \mathbf{w}$ of Q_0 (where $\mathbf{v}^\vee$ is the generator of $P^\vee$ dual to $\mathbf{v}$). By Lemma 2.6.2, we can then represent the class $\alpha \in H^1(Q)$ by a nonzero element of Q of the form $\sum_{j=0}^n u_j \mathbf{x}$, where each u_j is either zero or a unit in $\tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{tr}}$ with $w(u_j) = j$ and $v(u_j) < 0$.

We now follow [**21**, Lemma 4.12]. For $j \in \{0, \dots, n\}$ such that $u_j \neq 0$, $l \in \mathbb{Z}$, and $m \in (0, +\infty)$, define

$$e(j, l, m) = (v(u_j) + mq^{-l}) q^{-n(j+l)}.$$

For fixed j and m, $e(j, l, m)$ approaches 0 from below as $l \to +\infty$, and tends to $+\infty$ as $l \to -\infty$. Hence the minimum $h(m) = \min_{j,l}\{e(j, l, m)\}$ is well-defined; we observe that h is a continuous, piecewise linear, and increasing map from $(0, +\infty)$ to $(-\infty, 0)$, and that $h(qm) = q^{-n} h(m)$ because $e(j, l+1, qm) = q^{-n} e(j, l, m)$. Another interpretation is that the lower convex hull of the set H of points

$$(-q^{-nj-(n+1)l}, q^{-nj-nl} v(u_j)) \qquad (j = 0, \dots, n; \quad l \in \mathbb{Z})$$

has all slopes positive, and all segments finite.

Pick $r \in (0, +\infty)$ at which h changes slope; that is, r is a slope of the lower convex hull of H. Let S denote the set of ordered pairs (j, l) for which $e(j, l, r) < q^{-n} h(r)$; this set is finite. Let T be the set of ordered pairs (j, l) for which $e(j, l, r) < 0$; this set (which contains S) is infinite, but the values of l for pairs $(j, l) \in T$ are bounded below. For each pair (j, l), put $s(j, l) = \lfloor \log_{q^n}(h(r)/e(j, l, r)) \rfloor$. Then the following properties hold.

(a) For $(j,l) \in T$, $s(j,l) \geq 0$.
(b) For $(j,l) \in T$, $e(j,l,r)q^{ns(j,l)} \in [h(r), q^{-n}h(r))$.
(c) We have $(j,l) \in S$ if and only if $(j,l) \in T$ and $s(j,l) = 0$.
(d) For any $c > 0$, there are only finitely many pairs $(j,l) \in T$ with $s(j,l) \leq c$.

Define the twisted powers $\lambda^{\{m\}}$ and $\mu^{\{m\}}$ of λ and μ by the two-way recurrences

$$\lambda^{\{0\}} = 1, \qquad \lambda^{\{m+1\}} = \phi(\lambda^{\{m\}})\lambda$$
$$\mu^{\{0\}} = 1, \qquad \mu^{\{m+1\}} = \phi^n(\mu^{\{m\}})\mu.$$

For $c \in \mathbb{R}$, let U_c be the set of $z \in \tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{tr}} \cap \tilde{\mathscr{R}}^{\mathrm{int}}$ with $v(z) \geq c$. Then the function

$$R(z) = \sum_{(j,l)\in T} \mu^{\{-j-l+s(j,l)\}}\phi^{-nj-nl+ns(j,l)}(u_j\lambda^{\{-l\}}\phi^{-l}(z))$$

carries U_r into $U_{h(r)}$ by a direct calculation. Modulo π, we have

$$R(z) \equiv \sum_{(j,l)\in S} \mu^{\{-j-l\}}\phi^{-nj-nl}(u_j\lambda^{\{-l\}}\phi^{-l}(z)); \tag{2.6.2.2}$$

note that the values $-nj-(n+1)l$ are distinct for all $(j,l) \in S$, since j only runs over $\{0,\dots,n\}$. Write the reduction modulo π of the right side of (2.6.2.2) as $Q(\phi)(z)$ for some twisted Laurent polynomial $Q(T) \in F\{T^{\pm}\}$ with $F = k((u^{\mathbb{Q}}))$. By Proposition 2.5.7 applied repeatedly, we can construct a nonzero $z \in U_r$ such that $R(z) = 0$.

One now calculates using Lemma 2.6.2(a) (see [**21**, Lemma 4.12] for the full calculation) that the element

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi^{-l}(z\mathbf{v}) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda^{\{-l\}}\phi^{-l}(z)\mathbf{v} \in H^0(P)$$

pairs to zero with the class of α. This yields the desired result. □

3. Descending the slope filtration

As noted at the beginning of the previous section, the proof of the slope filtration theorem (Theorem 1.7.1) consists of two stages, the first of which (classifying ϕ-modules over the overring $\tilde{\mathscr{R}}$ of $\mathscr{R}$) has been accomplished in the previous section. In this section, we explain how to descend the resulting slope filtration from $\tilde{\mathscr{R}}$ back to $\mathscr{R}$.

As was done in the previous section, we recommend on a first reading to read only the overview (Subsection 3.1), then return later for the technical details.

3.1. Overview

Definition 3.1.1. — We now revert to allowing K to be an arbitrary field as in Definition 1.1.1. Choose a complete extension L of K with the same value group, admitting an extension ϕ to an automorphism, such that every étale ϕ-module over L is trivial. More precisely, form such an L by first taking the completed direct limit of $K \xrightarrow{\phi} K \xrightarrow{\phi} \cdots$ and then applying Proposition 3.2.4 below. Under these conditions, we can embed $\mathscr{R}_K$ into $\mathscr{R}_L$, and then embed $\mathscr{R}_L$ into $\tilde{\mathscr{R}}_L$ as in Proposition 2.2.6.

Recall that we are trying to prove Theorem 1.7.1, which states that every module-semistable ϕ-module over $\mathscr{R}$ is pure. As noted earlier, this result follows from Theorem 2.1.8 (which asserts that module-semistable ϕ-modules over $\tilde{\mathscr{R}}_L$ are pure) plus the following assertions.

Theorem 3.1.2. — *Let M be a module-semistable ϕ-module over $\mathscr{R}$. Then $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L$ is module-semistable.*

Theorem 3.1.3. — *Let M be a ϕ-module over $\mathscr{R}$ such that $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L$ is pure. Then M is pure.*

The proofs of Theorems 3.1.2 and 3.1.3 amount to faithfully flat descent: Theorem 3.1.2 relies on the fact that the first step of the HN filtration of $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L$ descends to $\mathscr{R}$, while Theorem 3.1.3 depends on the fact that the pure ϕ-module over $\tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}}$ obtained by descending $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L$ itself descends to $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$. The rest of this section will be occupied with setting up the descent formalism, then making the calculations that allow the use of faithfully flat descent.

3.2. Splitting étale ϕ-modules. — We now construct the field L demanded by Definition 3.1.1.

Definition 3.2.1. — Suppose that ϕ_K is bijective. By an *admissible extension* of K, we will mean a field L containing K, complete for a nonarchimedean absolute value extending the one on K with the same value group, and equipped with an isometric field automorphism ϕ_L extending ϕ_K.

Lemma 3.2.2. — *For any $z \in K^*$, there exists an admissible extension L of K such that the equation $\phi(x) - x = z$ has a solution $x \in L$.*

Proof. — Let L be the completion of the rational function field $K(x)$ for the Gauss norm with $|x| = |z|$. Extend ϕ_K to an automorphism ϕ_L of L by setting $\phi_L(x) = x + z$. □

Lemma 3.2.3. — *Let $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$ be a twisted polynomial over $\mathfrak{o}_K$ with $|a_0| = 1$. Then there exists an admissible extension L of K such that the equation $P(\phi)(x) = 0$ has a solution $x \in \mathfrak{o}_L^*$.*

Proof. — Let L be the completion of the rational function field $K(y_0, \dots, y_{n-1})$ under the Gauss norm normalized with $|y_0| = \cdots = |y_{n-1}| = 1$. Extend ϕ_K to an automorphism ϕ_L of L by setting $\phi_L(y_i) = y_{i+1}$ for $i = 0, \dots, n-2$ and $\phi_L(y_{n-1}) = -a_{n-1}y_{n-1} - \cdots - a_0 y_0$, then take $x = y_0$. □

Proposition 3.2.4. — *There exists a complete extension L of K with the same value group, equipped with an extension of ϕ_K, such that any étale ϕ-module over L is trivial.*

Proof. — It suffices to construct L trivializing a single irreducible étale ϕ-module M over K, as we can construct the desired field by transfinitely iterating this construction and completing at all limit stages.

Since M is irreducible, we must have $M \cong K\{T^{\pm}\}/K\{T^{\pm}\}P(T)$ for some irreducible monic twisted polynomial $P(T)$. If we write $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$, then $|a_0| = 1$ because $\deg(M) = 0$. By Corollary 2.4.6 (in the case $s = 1$), P can only have one Newton slope, which must be 0; hence $P(T)$ has coefficients in $\mathfrak{o}_K$. We can then apply Lemma 3.2.3 to construct L over which the equation $P(\phi)(x) = 0$ has a solution $x \in \mathfrak{o}_L^*$; that solution gives rise to a nontrivial ϕ-submodule of M.

Repeating the construction, we obtain a field over which M becomes a successive extension of trivial étale ϕ-modules of rank 1. By repeated use of Lemma 3.2.2, we can split this filtration by passing to a suitably large L. This yields the claim. □

Remark 3.2.5. — Note that the field L constructed above is not a Picard-Vessiot extension of K in the sense of the Galois theory of difference fields; this Galois theory is a bit complicated because it cannot be carried out within the category of fields, as examples like the difference equation $\phi(x) = -x$ show. See [**39**, Chapter 1] for more discussion of this point, and a development of difference Galois theory in a restricted setting; see also [**2**] for a more general development. (Thanks to Michael Singer for pointing out this reference.)

3.3. The use of faithfully flat descent. — In this subsection, we set up faithfully flat descent and illustrate how we will use it to prove Theorems 3.1.2 and 3.1.3.

Definition 3.3.1. — Let $R \to S$ be a faithfully flat morphism of rings equipped with compatible endomorphisms ϕ. Let M be a ϕ-module over R, put $M_S = M \otimes_R S$, and let N_S be a ϕ-submodule of M_S. We say that N_S *descends to* R if there exists a ϕ-submodule N of M such that the image of $N \otimes_R S$ in M_S coincides with N_S. We say a filtration descends to R if each term does so.

Proposition 3.3.2. — *Let $R \to S$ be a faithfully flat morphism of domains equipped with compatible endomorphisms ϕ. Put $S_2 = S \otimes_R S$ and define $i_1, i_2 : S \to S_2$ by $i_1(s) = s \otimes 1$ and $i_2(s) = 1 \otimes s$. Let M be a ϕ-module over R, put $M_S = M \otimes_R S$, and let N_S be a ϕ-submodule of M_S. Then N_S descends to R if and only if $N \otimes_{i_1} S_2 = N \otimes_{i_2} S_2$ within $M \otimes_R S_2$; moreover, if this occurs, then there is a* unique *ϕ-submodule N of M such that $N_S = N \otimes_R S$ within M_S.*

Proof. — The equality $N \otimes_{i_1} S_2 = N \otimes_{i_2} S_2$ implies that the effective descent datum obtained from M induces a descent datum on N (the cocycle condition can be checked on M). We may thus apply faithfully flat descent for modules [**1**, Exposé VIII, Corollaire 1.3] to conclude. □

We use faithfully flat descent as follows.

Definition 3.3.3. — Define

$$\mathscr{S} = \tilde{\mathscr{R}}_L \otimes_{\mathscr{R}} \tilde{\mathscr{R}}_L$$
$$\mathscr{S}^{\mathrm{bd}} = \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}} \otimes_{\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}} \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}}$$
$$\mathscr{S}^{\mathrm{int}} = \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{int}} \otimes_{\mathscr{R}^{\mathrm{int}}} \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{int}}.$$

We will show later that $\mathscr{R} \to \tilde{\mathscr{R}}_L$, $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}} \to \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}}$ are faithfully flat and that $\mathscr{S}^{\mathrm{bd}} \to \mathscr{S}$ is injective (Remark 3.5.3).

The following weak analogue of Proposition 1.2.6 will be proved in Subsection 3.5.

Proposition 3.3.4. — *Let A be an $n \times n$ matrix over $\mathscr{S}^{\mathrm{int}}$, and let $\mathbf{v}$ be a column vector over $\mathscr{S}$ such that $\mathbf{v} = A\phi(\mathbf{v})$. Then $\mathbf{v}$ has entries in $\mathscr{S}^{\mathrm{bd}}$.*

We now demonstrate how Proposition 3.3.4 can be used to establish the theorems asserted at the start of this section.

Proof of Theorem 3.1.2. — Suppose that $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L$ is not semistable. Let $0 = M_{L,0} \subset M_{L,1} \subset \cdots \subset M_{L,l} = M_L$ denote the HN filtration of $M_L = M \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L$. We will show that $M_{L,1} \otimes_{i_2} S_2 \subseteq M_{L,j} \otimes_{i_1} S_2$ for $j = l, l-1, \ldots, 1$ by descending induction; the base case $j = l$ is trivial.

Given that $M_{L,1} \otimes_{i_2} S_2 \subset M_{L,j} \otimes_{i_1} S_2$ for some $j > 1$, we get a homomorphism

$$M_{L,1} \otimes_{i_2} S_2 \to (M_{L,j}/M_{L,j-1}) \otimes_{i_1} S_2.$$

Since $M_{L,1}$ and $M_{L,j}/M_{L,j-1}$ are pure and $\mu(M_{L,1}) < \mu(M_{L,j}/M_{L,j-1})$, this homomorphism is forced to vanish: otherwise, by Proposition 3.3.4 the morphism would be defined over $\mathscr{S}^{\mathrm{bd}}$, but in that case it would have to preserve slopes because $\mathscr{S}^{\mathrm{bd}}$ carries an $\mathfrak{m}_K$-adic valuation. Hence $M_{L,1} \otimes_{i_2} S_2 \subseteq M_{L,j-1} \otimes_{i_1} S_2$, completing the induction.

The induction shows that $M_{L,1}$ satisfies the condition for faithfully flat descent (Proposition 3.3.2), so it descends to $\mathscr{R}$. Hence M cannot be semistable either. □

Proof of Theorem 3.1.3. — By applying $[a]_*$ (invoking Lemma 1.6.3) and twisting, we may reduce to the case $\mu(M) = 0$, so $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L$ is étale. Choose a basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ of an étale lattice of $M \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L$, so that the matrix A defined by $\phi(\mathbf{v}_j) = \sum_i A_{ij}\mathbf{v}_i$ is invertible over $\tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{int}}$.

There exists an invertible change-of-basis matrix U over $\mathscr{S}$ such that

$$\mathbf{v}_j \otimes_{i_1} 1 = \sum_i U_{ij}(\mathbf{v}_i \otimes_{i_2} 1).$$

Upon applying ϕ to both sides, we deduce that $U(A \otimes_{i_1} 1) = (A \otimes_{i_2} 1)\phi(U)$. By Proposition 3.3.4, U has entries in $\mathscr{S}^{\mathrm{bd}}$, as does its inverse by the same argument with M replaced by $M^\vee$. Hence by Proposition 3.3.2, M descends to $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$; let N be the resulting ϕ-module over $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$.

Choose any basis of N and let P be the $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$-span of the images of the basis elements under powers of ϕ. By computing in terms of $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, we see that P is bounded, hence is a ϕ-stable $\mathscr{R}^{\mathrm{int}}$-lattice in M. By Lemma 1.5.7, $P \otimes \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{int}}$ is a ϕ-module, as then must be P. Thus M is étale, as desired. □

It now remains to prove the faithful flatness results and to make the calculation to check Proposition 3.3.4; these occupy the remainder of the chapter.

3.4. Interlude: tensoring over Bézout domains. — In order to use faithfully flat descent for our purposes, it will help to gather a few facts about tensoring over Bézout domains.

Proposition 3.4.1. — *Let $R \hookrightarrow S$ be an inclusion of domains with R Bézout. Then S is faithfully flat over R if and only if $S^* \cap R = R^*$.*

Proof. — Recall that S is flat (resp. faithful) over R if and only if for each finitely generated proper ideal I of R, the multiplication map $I \otimes S \to S$ is injective (resp. not surjective). Since R is Bézout, I admits a single generator $r \notin R^*$, and $I \otimes S = rR \otimes S \cong rS$, so the map $I \otimes S \to S$ is injective, and it is surjective if and only if $r \in S^*$. This yields the claim. □

Lemma 3.4.2. — *Let M, N be modules over a Bézout domain R. Given a presentation $\sum_{i=1}^n y_i \otimes z_i$ of $x \in M \otimes_R N$ and elements $u_1, \dots, u_n \in R$ generating the unit ideal, there exists another presentation $\sum_{j=1}^n y'_j \otimes z'_j$ of x with $y'_1 = \sum_{i=1}^n u_i y_i$.*

Proof. — By [**21**, Lemma 2.3], we can construct an invertible matrix U over R with $U_{i1} = u_i$ for $i = 1, \dots, n$. Then

$$\sum_i y_i \otimes z_i = \sum_{i,j,l} U_{ij}(U^{-1})_{jl} y_i \otimes z_l$$
$$= \sum_j \left(\sum_i U_{ij} y_i \right) \otimes \left(\sum_l (U^{-1})_{jl} z_l \right),$$

so we may take $y'_j = \sum_{i=1}^n U_{ij} y_i$ and $z'_j = \sum_{l=1}^n (U^{-1})_{jl} z_l$. □

Corollary 3.4.3. — *Let M, N be modules over a Bézout domain R. If $\sum_{i=1}^n y_i \otimes z_i$ is a presentation of some $x \in M \otimes_R N$ with n minimal, then $y_1, \dots, y_n$ are linearly independent over R.*

Proof. — If on the contrary $y_1, \dots, y_n$ are linearly dependent over R, then we can find $u_1, \dots, u_n \in R$ such that $u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n = 0$. By the Bézout property, $u_1, \dots, u_n$ generate a principal ideal, so we can divide through by a generator to reduce to the case where $u_1, \dots, u_n$ generate the unit ideal. Applying Lemma 3.4.2 now yields a contradiction to the minimality of n. □

3.5. Projections. — The key to the descent argument is the construction of a certain projection from $\tilde{\mathscr{R}}_L$ back to $\mathscr{R}$, sectioning the inclusion going the other way that was constructed by Proposition 2.2.6. We now construct this projection, then use it to resolve all the outstanding statements needed to complete the proof of Theorem 1.7.1.

Definition 3.5.1. — Let ℓ be the residue field of L, fix a basis $\overline{B}$ of ℓ over k containing 1, lift $\overline{B}$ to a subset B of $\mathfrak{o}_L$ containing 1, and fix a uniformizer π of K. Then as in [**20**, Proposition 4.1], one sees that every element $x \in \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{int}} / \mathfrak{m}_K^n \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{int}}$ can be written uniquely as a formal sum

$$\sum_{\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} \sum_{b \in B} x_{\alpha,b} u^\alpha b \qquad (x_{\alpha,b} \in \mathscr{R}^{\mathrm{int}} / \mathfrak{m}_K^n \mathscr{R}^{\mathrm{int}})$$

in which:

- for each $\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$, there are only finitely many b for which $x_{\alpha,b} \neq 0$;
- if we write S_c for the set of $\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ for which the t-adic valuation of any $x_{\alpha,b}$ (which is well-defined because $x_{\alpha,b}$ is truncated modulo π^n) is less than c, then S_c is well-ordered for all c and empty for sufficiently small c.

Given x thusly presented, write $f(x) = x_{0,1}$; then again as in [**20**, Proposition 4.1], one checks that for r_0 as in Remark 1.2.5 and $r \in (0, r_0)$, f induces a continuous map $\tilde{\mathscr{R}}_L^r \to \mathscr{R}^r$ with the property that for $x \in \tilde{\mathscr{R}}_L^r$,

$$|x|_r = \sup_{\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}, a \in L^*} \{ |a|^{-1} e^{-\alpha r} |f(a u^{-\alpha} x)|_r \}. \tag{3.5.1.1}$$

(Compare also [**19**, Proposition 8.1] and [**22**, Lemma 2.2.19].)

Proposition 3.5.2. — *The multiplication map $\tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}} \otimes_{\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}} \mathscr{R} \to \tilde{\mathscr{R}}_L$ is injective.*

Proof. — Suppose the contrary; choose $x \neq 0$ in the kernel of the multiplication map, and choose a presentation $x = \sum_{i=1}^n y_i \otimes z_i$ with n minimal. Then $z_1, \dots, z_n$ are linearly independent over $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$ by Corollary 3.4.3. On the other hand, as a corollary of (3.5.1.1), we may choose $\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ and $a \in L^*$ such that $f(au^{-\alpha} y_1) \neq 0$; we then obtain the nontrivial dependence relation $0 = \sum_{i=1}^n f(au^{-\alpha} y_i) z_i$, contradiction. □

Remark 3.5.3. — We now have a number of faithfully flat inclusions. For one, $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}} \to \mathscr{R}$ is faithfully flat by Proposition 3.4.1 and the fact that $\mathscr{R}^* = (\mathscr{R}^{\mathrm{bd}})^*$ (Remark 1.1.5). For another, $\mathscr{R} \to \tilde{\mathscr{R}}_L$ is faithfully flat by Proposition 3.4.1 and the fact that $\tilde{\mathscr{R}}_L^* = (\tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}})^*$ (Remark 2.2.5); similarly, $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}} \to \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}}$ is faithfully flat. Putting these together and using Proposition 3.5.2 yields injections

$$\tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}} \otimes_{\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}} \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}} \hookrightarrow \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}} \otimes_{\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}} \tilde{\mathscr{R}}_L \cong (\tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}} \otimes_{\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}} \mathscr{R}) \otimes_{\mathscr{R}} \tilde{\mathscr{R}}_L \hookrightarrow \tilde{\mathscr{R}}_L \otimes_{\mathscr{R}} \tilde{\mathscr{R}}_L;$$

that is, $\mathscr{S}^{\mathrm{bd}} \to \mathscr{S}$ is injective.

In order to calculate on $\mathscr{S}$, we use the following two-variable analogue of (3.5.1.1).

Lemma 3.5.4. — *For $x \in \mathscr{S}$, we have $x \in \mathscr{S}^{\mathrm{bd}}$ if and only if for some $r > 0$, the quantities*

$$|ab|^{-1} e^{-\alpha s - \beta s} |(f \otimes f)((au^{-\alpha} \otimes bu^{-\beta})x)|_s \tag{3.5.4.1}$$

are bounded over all $s \in (0, r]$, all $a, b \in L^*$, and all $\alpha, \beta \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Proof. — If $x \in \mathscr{S}^{\mathrm{bd}}$, then we can bound the quantity (3.5.4.1) by bounding each term in a presentation of x. Conversely, suppose the quantity (3.5.4.1) is bounded. Choose a presentation $x = \sum_{i=1}^n y_i \otimes z_i$ with $y_i, z_i \in \tilde{\mathscr{R}}_L$ and n minimal. We proceed by induction on n; we may assume $x \neq 0$. Then $y_1 \neq 0$, so we can choose a, α with $f(au^{-\alpha} y_1) \neq 0$.

By (3.5.1.1), $\sum_{i=1}^n f(au^{-\alpha} y_i) z_i \in \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}}$; in particular, the ideal generated by the $f(au^{-\alpha} y_i)$ in $\mathscr{R}$ extends to the unit ideal in $\tilde{\mathscr{R}}_L$. Since the ideal in $\mathscr{R}$ is finitely generated, it is principal, and since $\tilde{\mathscr{R}}_L^* = (\tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}})^*$, the generator in $\mathscr{R}$ must already be a unit. That is, the $f(au^{-\alpha} y_i)$ generate the unit ideal in $\mathscr{R}$; by Lemma 3.4.2, we can choose another presentation $x = \sum_{i=1}^n y_i' \otimes z_i'$ with $z_1' = \sum_{i=1}^n f(au^{-\alpha} y_i) z_i \in \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}}$. We must have $z_1' \neq 0$ to avoid contradicting the minimality of n.

Pick b, β so that $f(bu^{-\beta} z_1')$ is nonzero and hence is a unit in $\mathscr{R}$ (since it must lie in $\mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$). Put $c_i = f(bu^{-\beta} z_i') / f(bu^{-\beta} z_1')$ for $i = 2, \dots, n$, then set

$$y_i'' = \begin{cases} y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n' & i = 1 \\ y_i' & i > 1, \end{cases} \qquad z_i'' = \begin{cases} z_i' & i = 1 \\ z_i' - c_i z_1' & i > 1, \end{cases}$$

so that $x = \sum_{i=1}^n y_i'' \otimes z_i''$. Then $f(bu^{-\beta} z_i'') = 0$ for $i = 2, \dots, n$, so $y_1'' f(bu^{-\beta} z_1'') = \sum_{i=1}^n y_i'' f(bu^{-\beta} z_i'') \in \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}}$ by (3.5.1.1). Since already $f(bu^{-\beta} z_1'') \in \mathscr{R}^{\mathrm{bd}}$, we have $y_1'' \in \tilde{\mathscr{R}}_L^{\mathrm{bd}}$. Applying the induction hypothesis to $x - y_1'' \otimes z_1'' = \sum_{i=2}^n y_i'' \otimes z_i''$ yields the claim. □

Proof of Proposition 3.3.4. — For each entry $\mathbf{v}_i$ of $\mathbf{v}$, choose a presentation $\sum_j y_{ij} \otimes z_{ij}$ with $y_{ij}, z_{ij} \in \tilde{\mathscr{R}}_L$. As in the proof of Proposition 1.2.6, after possibly rescaling by a power of u, we may choose $r \in (0, r_0)$ such that each term in a presentation of A has entries in $\tilde{\mathscr{R}}_L^r$ and is bounded by 1 on the annulus $e^{-r} \leq |u| < 1$; we may also ensure that $y_{ij}, z_{ij} \in \tilde{\mathscr{R}}_L^r$ for all i, j. Choose $c > 0$ such that for $s \in [r/q, r]$ and all i, j, $|y_{ij}|_s \leq c$ and $|z_{ij}|_s \leq c$ (possible because we are picking s in a closed interval); then for all nonnegative integers m, we have $|\phi^m(y_{ij})|_{s/q^m} \leq c$ and $|\phi^m(z_{ij})|_{s/q^m} \leq c$. From the equation

$$\mathbf{v} = A\phi(A) \cdots \phi^{m-1}(A) \phi^m(\mathbf{v}),$$

we deduce that for all $\alpha, \beta \in [0, 1)$ and all $a, b \in L^*$,

$$|ab|^{-1} e^{-\alpha s - \beta s} |(f \otimes f)((au^{-\alpha} \otimes bu^{-\beta})\mathbf{v})|_s \leq c$$

for all $s \in [r/q^{m+1}, r/q^m]$; by varying m, we get the same conclusion for all $s \in (0, r]$. By Lemma 3.5.4, $\mathbf{v}$ has entries in $\mathscr{S}^{\mathrm{bd}}$, as desired. □

References

[1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)* – Documents Mathématiques, vol. 3, Société Mathématique de France, 2003.

[2] Y. ANDRÉ – "Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **5** (2001), p. 685–739.

[3] J. BELLAÏCHE & G. CHENEVIER – "p-adic families of Galois representations and higher rank Selmer groups", preprint arXiv:math.NT/0602340, 2007.

[4] L. BERGER – "Représentations p-adiques et équations différentielles", *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[5] ———, "Équations différentielles p-adiques et (ϕ, N)-modules filtrés", preprint arXiv:math.NT/0406601, 2004.

[6] L. BERGER & P. COLMEZ – "Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique", in this volume.

[7] V. G. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, 1990.

[8] H. CARTAN & S. EILENBERG – *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

[9] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – "Représentations p-adiques surconvergentes", *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[10] R. COLEMAN & B. MAZUR – "The eigencurve", in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 1–113.

[11] P. COLMEZ – "Les conjectures de monodromie p-adiques", *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[12] ———, "La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$", preprint `http://www.math.jussieu.fr/~colmez/`, 2007.

[13] ———, "Répresentations triangulines de dimension 2", in this volume.

[14] R. CREW – "Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **31** (1998), p. 717–763.

[15] P. DELIGNE – "La conjecture de Weil. II", *Publ. Math. I.H.É.S.* **52** (1980), p. 137–252.

[16] U. HARTL – "On a conjecture of Rapoport and Zink", preprint arXiv:math.NT/0605254, 2006.

[17] ———, "Period spaces for Hodge structures in equal characteristic", preprint arXiv:math.NT/0511686, 2006.

[18] U. HARTL & R. PINK – "Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc", *Compos. Math.* **140** (2004), p. 689–716.

[19] A. J. DE JONG – "Homomorphisms of Barsotti-Tate groups and crystals in positive characteristic", *Invent. Math.* **134** (1998), p. 301–333.

[20] K. S. KEDLAYA – "Full faithfulness for overconvergent F-isocrystals", in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter, 2004, p. 819–835.

[21] ———, "A p-adic local monodromy theorem", *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 93–184.

[22] ———, "Slope filtrations revisited", *Doc. Math.* **10** (2005), p. 447–525.

[23] ———, "Finiteness of rigid cohomology with coefficients", *Duke Math. J.* **134** (2006), p. 15–97.

[24] ———, "Fourier transforms and p-adic 'Weil II'", *Compos. Math.* **142** (2006), p. 1426–1450.

[25] C. KHARE & J.-P. WINTENBERGER – "Serre's modularity conjecture I", preprint `http://www.math.utah.edu/~shekhar`, 2006.

[26] ———, "Serre's modularity conjecture II", preprint `http://www.math.utah.edu/~shekhar`, 2006.

[27] M. KISIN – "Crystalline representations and F-crystals", in *Algebraic geometry and number theory*, Progr. Math., vol. 253, Birkhäuser, 2006, p. 459–496.

[28] ———, "The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2", preprint `http://math.uchicago.edu/~kisin`, 2006.

[29] M. LAZARD – "Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet", *Publ. Math. I.H.É.S.* **14** (1962), p. 47–75.

[30] A. H. M. LEVELT – "Jordan decomposition for a class of singular differential operators", *Ark. Mat.* **13** (1975), p. 1–27.

[31] B. MALGRANGE – "Connexions méromorphes. II. Le réseau canonique", *Invent. Math.* **124** (1996), p. 367–387.

[32] J. I. MANIN – "Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic", *Uspehi Mat. Nauk* **18** (1963), p. 3–90.

[33] V. B. MEHTA & A. RAMANATHAN – "Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves", *Math. Ann.* **258** (1981/82), p. 213–224.

[34] M. S. NARASIMHAN & C. S. SESHADRI – "Stable bundles and unitary bundles on a compact Riemann surface", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **52** (1964), p. 207–211.

[35] ———, "Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface", *Ann. of Math. (2)* **82** (1965), p. 540–567.

[36] O. ORE – "Theory of non-commutative polynomials", *Ann. of Math. (2)* **34** (1933), p. 480–508.

[37] D. S. PASSMAN – *The algebraic structure of group rings*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., 1985, Reprint of the 1977 original.

[38] C. PRAAGMAN – "The formal classification of linear difference operators", *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **45** (1983), p. 249–261.

[39] M. VAN DER PUT & M. F. SINGER – *Galois theory of difference equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1666, Springer, 1997, errata at `http://www4.ncsu.edu/~singer/papers/errata.ps`.

[40] M. RAPOPORT & T. ZINK – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 141, Princeton University Press, 1996.

[41] N. TSUZUKI – "The overconvergence of morphisms of étale ϕ-∇-spaces on a local field", *Compositio Math.* **103** (1996), p. 227–239.

[42] ———, "Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve", *Amer. J. Math.* **120** (1998), p. 1165–1190.

KIRAN S. KEDLAYA, Department of Mathematics, Room 2-165, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA • *E-mail :* `kedlaya@mit.edu`
Url : `http://math.mit.edu/~kedlaya`

Astérisque

LAURENT BERGER
PIERRE COLMEZ

Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique

Astérisque, tome 319 (2008), p. 303-337
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__303_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 303–337

FAMILLES DE REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM ET MONODROMIE p-ADIQUE

par

Laurent Berger & Pierre Colmez

Résumé. — On donne une formalisation de la méthode de Sen pour les représentations p-adiques. Comme application de ces techniques, on montre que (1) toute représentation p-adique est surconvergente (2) si on se donne un espace $\mathscr{X} = \mathrm{Spm}(S)$ qui paramétrise des représentations p-adiques V_x, alors l'ensemble des x tels que V_x est de de Rham (ou semi-stable, ou cristalline) à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a, b]$ fixé est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$ et (3) les modules de Fontaine $\mathrm{D}_*(V)$ associés varient analytiquement.

***Abstract* (Families of de Rham representations and p-adic monodromy).** — We give a formalization of Sen's method for p-adic representations. As an application of these techniques, we show that (1) every p-adic representation is overconvergent (2) given a space $\mathscr{X} = \mathrm{Spm}(S)$ which parameterizes some p-adic representations V_x, the set of x's such that V_x is de Rham (or semistable, or crystalline) with Hodge-Tate weights in a fixed interval $[a, b]$ is an S-analytic subspace of $\mathscr{X}$ and (3) the associated Fontaine modules $\mathrm{D}_*(V)$ vary analytically.

1. Introduction

L'objet de cet article est d'étudier les familles de représentations p-adiques en utilisant la méthode de Sen. Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et soit S une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach dont on note $\mathscr{X}$ le spectre maximal ; pour pouvoir appliquer la théorie de Hodge p-adique usuelle aux points de $\mathscr{X}$, on suppose que pour tout $x \in \mathscr{X}$, le corps $S/\mathfrak{m}_x$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

Une famille de représentations de $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ est un S-module libre V de rang fini muni d'une action S-linéaire et continue de G_K. La méthode de Sen consiste en une formalisation des calculs de Sen (qui portaient à l'origine sur la cohomologie

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 12H25, 14F30.
Mots clefs. — familles de représentations p-adiques, (φ, Γ)-modules, théorie de Hodge p-adique.

© Astérisque 319, SMF 2008

galoisienne de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C}_p)$). En appliquant cette méthode aux anneaux d'éléments surconvergents, on retrouve le théorème principal de [8] : si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K, alors V est surconvergente.

La même méthode appliquée à une famille de représentations fournit une famille de (φ,Γ)-modules surconvergents. De fait, on a le résultat suivant (théorème 4.2.9).

Théorème A. — *Si V est une S-représentation de G_K, alors il existe un $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}^\dagger_K$-module $\mathrm{D}^\dagger(V)$ localement libre de rang d et stable par φ et Γ_K tel que si $x\in\mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x\otimes_S \mathrm{D}^\dagger(V)\to \mathrm{D}^\dagger(V_x)$ est un isomorphisme pour tout $x\in\mathscr{X}$.*

Les liens entre (φ,Γ)-modules et théorie de Hodge p-adique permettent alors de montrer le théorème suivant (théorèmes 5.3.1 et 5.3.2).

Théorème B. — *Si V est une S-représentation de G_K, et si $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, alors l'ensemble $\mathscr{X}^{[a,b]}_{\mathrm{dR}}$ des $x\in\mathscr{X}$ tels que V_x est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$.*

Si l'on suppose que le radical de Jacobson de S est nul et que $\mathscr{X}=\mathscr{X}^{[a,b]}_{\mathrm{dR}}$, alors :

1. *le $S\otimes K$-module $\mathrm{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)$ est localement libre de rang d ;*
2. *on a $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})\otimes_{S\otimes K}\mathrm{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)=(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})\otimes_S V$;*
3. *si $x\in\mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x\otimes_S\mathrm{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)\to\mathrm{D}^K_{\mathrm{dR}}(V_x)$ est un isomorphisme.*

En chemin, on obtient d'ailleurs des résultats analogues avec « Hodge-Tate » à la place de « de Rham », cf. théorèmes 5.1.3 et 5.1.4.

Une application « en famille » du théorème de monodromie p-adique nous permet alors d'obtenir le résultat suivant (théorème 6.3.2 et corollaire 6.3.3).

Théorème C. — *Soient S une algèbre affinoïde réduite, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ et V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x\in\mathscr{X}$. Il existe alors une extension finie L de K telle que le $S\otimes L_0$-module $\mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V)$ est localement libre de rang d et vérifie $(S\otimes L)\otimes_{S\otimes L_0}\mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V)=\mathrm{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)$;*

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1. *si $x\in\mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x\otimes_S\mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V)\to\mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V_x)$ est un isomorphisme ;*
2. *si τ est un type du groupe d'inertie $I(L/K)$, alors l'ensemble $\mathscr{X}(\tau)$ des x tels que le type de V_x est τ, est une réunion de composantes Zariski connexes de $\mathscr{X}$;*
3. *si $\mathscr{X}^{[a,b]}_{\mathrm{cris}}$ ou $\mathscr{X}^{[a,b]}_{\mathrm{st}}$ dénote l'ensemble des $x\in\mathscr{X}$ où V_x est cristalline ou semi-stable, alors $\mathscr{X}^{[a,b]}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathscr{X}^{[a,b]}_{\mathrm{st}}$ sont des sous-espaces S-analytiques ;*
4. *si $\mathscr{X}=\mathscr{X}^{[a,b]}_{\mathrm{st}}$, alors $\mathrm{D}^K_{\mathrm{st}}(V)$ est un $S\otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x\otimes_S\mathrm{D}^K_{\mathrm{st}}(V)\to\mathrm{D}^K_{\mathrm{st}}(V_x)$ est un isomorphisme ;*
5. *si $\mathscr{X}=\mathscr{X}^{[a,b]}_{\mathrm{cris}}$, alors $\mathrm{D}^K_{\mathrm{cris}}(V)$ est un $S\otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x\otimes_S\mathrm{D}^K_{\mathrm{cris}}(V)\to\mathrm{D}^K_{\mathrm{cris}}(V_x)$ est un isomorphisme.*

Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnons une démonstration d'un théorème non publié de Wintenberger sur la continuité des poids de Hodge-Tate quand une représentation varie. En fait, si $P_{\mathrm{Sen},V}$ dénote le polynôme caractéristique de l'opérateur de Sen d'une représentation V de G_K, nous montrons le résultat suivant (théorème 7.1.1).

Théorème D. — *Il existe une constante $c(d,K)$ telle que si V_1 et V_2 sont deux représentations de dimension d de G_K qui sont congrues modulo p^k, alors les polynômes P_{Sen,V_1} et P_{Sen,V_2} sont congrus modulo $p^{k-c(d,K)}$.*

Notons pour terminer que des résultats en relation avec les théorèmes A, B et C ont été obtenus par Andreatta et Brinon (qui ont étendu la méthode de Sen dans [**2**]), Dee [**12**], Kisin (qui a démontré l'algébricité de $\mathscr{X}(\tau)$ du (2) du théorème C dans [**21**]) et Liu [**22**].

Remerciements : Nous remercions les personnes suivantes pour des discussions utiles sur des points reliés à cet article : Gaëtan Chenevier, Brian Conrad, Philippe Gille et Kiran Kedlaya. Nous remercions par ailleurs Kiran Kedlaya, Ruochuan Liu et Fucheng Tan pour leurs remarques et leurs suggestions.

2. Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons quelques définitions et résultats qui servent dans la suite de l'article.

2.1. Algèbres de coefficients et produits tensoriels complétés

Dans tout cet article, S est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach. On note $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux maximaux de S. On pense aux éléments de $\mathscr{X}$ comme à des points et on écrit $\mathfrak{m}_x$ pour désigner l'idéal maximal de S correspondant au point x. Si $f \in S$, alors on note $f(x)$ l'image de f dans $E_x = S/\mathfrak{m}_x$.

On dit qu'une partie P de $\mathscr{X}$ est un *sous-espace S-analytique* s'il existe un idéal I de S tel que $P = \{x \in \mathscr{X} \text{ tels que } I \subset \mathfrak{m}_x\}$ ou, ce qui revient au même, s'il existe une famille $\{f_\alpha\}_\alpha$ d'éléments de S tels que $P = \{x \in \mathscr{X} \text{ tels que } f_\alpha(x) = 0 \text{ pour tout } \alpha\}$.

Plutôt que de travailler avec des normes, on préfère travailler avec des « valuations » sur S, qui pour $f, g \in S$ ne satisfont alors pas $\mathrm{val}_S(fg) = \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$ mais $\mathrm{val}_S(fg) \geqslant \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$, ce qui fait que val_S vérifie :

1. $\mathrm{val}_S(f) = +\infty \Leftrightarrow f = 0$;
2. $\mathrm{val}_S(fg) \geqslant \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$;
3. $\mathrm{val}_S(f+g) \geqslant \inf(\mathrm{val}_S(f), \mathrm{val}_S(g))$;

Dans la suite de cet article, on dit que S est une *algèbre de coefficients* si S vérifie les trois conditions ci-dessous :

1. S contient $\mathbf{Q}_p$ et la restriction de val_S de S à $\mathbf{Q}_p$ est la valuation p-adique val_p ;
2. pour tout $x \in \mathscr{X}$, E_x est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$;

3. le radical de Jacobson $\mathrm{rad}(S)$ est nul (en particulier S est réduite) ;

Notons que les algèbres affinoïdes réduites sont des exemples d'algèbres de coefficients. On note $\mathscr{O}_S$ l'anneau des entiers de S pour val_S.

Si S est une algèbre de coefficients et si $\mathscr{Y}$ est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$, défini par un idéal I, alors $\mathscr{Y}$ est l'espace associé à l'algèbre de coefficients $S/\sqrt{I}$.

Lemme 2.1.1. — *Soit S une algèbre de coefficients.*

1. *Si $f \in S$ est tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathscr{X}$, alors f est une unité de S ;*
2. *si M est un S-module plat, et si $y \in M$ est tel que $y(x) \in M/\mathfrak{m}_x M$ est nul pour tout $x \in \mathscr{X}$, alors $y = 0$.*

Démonstration. — Le (1) résulte du fait que f n'est dans aucun idéal maximal, et que c'est donc une unité. Le (2) résulte du fait que l'application $S \to \prod S/\mathfrak{m}_x$ est injective puisque l'on a supposé que $\mathrm{rad}(S) = 0$, et qu'alors l'application $M \to \prod M/\mathfrak{m}_x M$ reste injective si M est plat. □

Si $x \in \mathscr{X}$, alors le corps E_x est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et est donc muni de la valuation p-adique val_p. Si $f \in S$, on définit alors la valuation spectrale par $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}(f) = \inf_{x \in \mathscr{X}} \mathrm{val}_p(f(x))$. Rappelons le résultat suivant (cf. [**6**, §6.2.4])

Proposition 2.1.2. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite, alors les normes déduites de val_S et $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}$ sont équivalentes.*

Nous avons besoin dans le chapitre 6 du résultat suivant, qui nous assure que la frontière de Shilov du spectre (de Berkovich) de S existe et est finie. Une *semi-valuation multiplicative* est une application $\mathrm{val} : S \to \mathbf{R}$ qui vérifie $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$ et $\mathrm{val}(x+y) \geqslant \inf(\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y))$ mais pas $\mathrm{val}(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$.

Proposition 2.1.3. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite, alors il existe $m \geqslant 1$ et m semi-valuations multiplicatives $\mathrm{val}_1, \ldots, \mathrm{val}_m$ sur S telles que pour tout $f \in S$, on ait $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}(f) = \min(\mathrm{val}_1(f), \ldots, \mathrm{val}_m(f))$.*

Démonstration. — C'est le corollaire 2.4.5 de [**5**], la frontière de Shilov étant définie après la proposition 2.4.4. □

Corollaire 2.1.4. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite munie de la valuation spectrale, alors il existe $m \geqslant 1$ et m corps $E_1, \ldots, E_m$ complets pour des valuations discrètes tels que l'on ait un plongement isométrique $S \to \oplus_{i=1}^m E_i$.*

Enfin, si E et F sont deux espaces de Banach, on dénote par $E\widehat{\otimes}F$ leur produit tensoriel complété au-dessus de $\mathbf{Q}_p$. Si E et F sont deux $\mathbf{Z}_p$-modules topologiques complets, on dénote alors par $E\widehat{\otimes}F$ leur produit tensoriel complété au-dessus de $\mathbf{Z}_p$ (cf. [**6**, §2.1.7]).

2.2. Descente étale

Soit B une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach munie d'une action continue d'un groupe fini G. On note $B^\natural$ l'anneau B sur lequel G agit trivialement. On suppose que :

1. le B^G-module B est libre de rang fini et fidèlement plat ;
2. on a $B^\natural \otimes_{B^G} B \simeq \oplus_{g\in G} B^\natural \cdot e_g$ (où $e_g^2 = e_g$, $e_g e_h = 0$ si $g \neq h$ et $g(e_h) = e_{gh}$).

Proposition 2.2.1. — *Si S est une algèbre de Banach (sur laquelle G agit trivialement), et si M est un $S\widehat{\otimes}B$-module localement libre de type fini muni d'une action semi-linéaire de G, alors :*

1. *M^G est un $S\widehat{\otimes}B^G$-module localement libre de type fini ;*
2. *l'application $(S\widehat{\otimes}B) \otimes_{S\widehat{\otimes}B^G} M^G \to M$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit $\pi_G = (\sharp G)^{-1} \sum_{g\in G} g \in B[G]$. Si N est un $B[G]$- module (quelconque), alors on a une décomposition $N = \pi_G N \oplus \ker \pi_G$ et $N^G = \pi_G N$. En particulier, on a $M = M^G \oplus \ker \pi_G$ ce qui fait que M^G est un $S\widehat{\otimes}B^G$-module localement libre de type fini, étant un facteur direct du $S\widehat{\otimes}B^G$-module localement libre de type fini M. Ceci montre le (1).

Montrons à présent le (2). Comme on a un isomorphisme $(S\widehat{\otimes}B) \otimes_{S\widehat{\otimes}B^G} M^G = B \otimes_{B^G} M^G$, il suffit de montrer que $B \otimes_{B^G} M^G \to M$ est un isomorphisme. Comme par ailleurs on suppose que le B^G- module $B^\natural$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que l'application :

$$B^\natural \otimes_{B^G} (B \otimes_{B^G} M^G) \to B^\natural \otimes_{B^G} M$$

est un isomorphisme. On a $B^\natural \otimes_{B^G} (B \otimes_{B^G} M^G) \simeq B \otimes_{B^G} (B^\natural \otimes_{B^G} M)^G$ et $B^\natural \otimes_{B^G} M$ est un $B^\natural \otimes_{B^G} B$-module qui se décompose donc en $\oplus_{g\in G} N \cdot e_g$ où $N \cdot e_g = (B^\natural \cdot e_g) \cdot (B^\natural \otimes_{B^G} M)$ puisque $B^\natural \otimes_{B^G} B \simeq \oplus_{g\in G} B^\natural \cdot e_g$. L'application de $N \cdot e_1$ dans $B^\natural \otimes_{B^G} M$ qui à $n \cdot e_1$ associe $(g(n) \cdot e_g)_{g\in G}$ induit un isomorphisme de $N \cdot e_1$ dans $(B^\natural \otimes_{B^G} M)^G$. On a alors :

$$\begin{aligned} B \otimes_{B^G} N \cdot e_1 &= (B \otimes_{B^G} B^\natural) \otimes_{B^\natural} N \cdot e_1 \\ &= (\oplus_{g\in G} B^\natural \cdot e_g) \otimes_{B^\natural} N \cdot e_1 \\ &= \oplus_{g\in G} N \cdot e_g \\ &= B^\natural \otimes_{B^G} M, \end{aligned}$$

et donc l'application $B^\natural \otimes_{B^G} (B \otimes_{B^G} M^G) \to B^\natural \otimes_{B^G} M$ est bien un isomorphisme. □

Remarque 2.2.2. — La proposition 2.2.1 ci-dessus s'applique notamment si B est une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$ et si G est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(B/\mathbf{Q}_p)$ ce qui fait que B/B^G est galoisienne de groupe de Galois G. La condition (1) du début du paragraphe est évidente et la condition (2) est un résultat classique. Pour un deuxième exemple, voir le lemme 4.2.5.

2.3. Représentations p-adiques et anneaux de Fontaine

Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ et S une algèbre de Banach. Une *famille de représentations p-adiques* est un S-module V libre de rang fini d, muni d'une action linéaire et continue du groupe G_K. Rappelons que $\mathscr{O}_S$ désigne l'anneau des entiers de S pour la valuation val_S ; on suppose qu'il existe un $\mathscr{O}_S$-module T libre de rang d tel que $V = S \otimes_{\mathscr{O}_S} T$. Si $S = E$ est un corps, alors cette condition est automatique, comme le montre le lemme ci-dessous.

Lemme 2.3.1. — *Si V est une E-représentation de dimension d, alors il existe un $\mathscr{O}_E$-module T libre de rang d et stable par G_K tel que $V = E \otimes_{\mathscr{O}_E} T$.*

Démonstration. — Si on choisit une base de V, la représentation correspond à une application continue $\rho : G_K \to \mathrm{GL}_d(E)$. Il existe donc $s \geqslant 0$ tel que l'image de G_K est incluse dans $\mathrm{M}_d(p^{-s}\mathscr{O}_E)$. Si T_0 dénote le $\mathscr{O}_E$-module engendré par la base choisie, on voit que si $g \in G_K$, alors $g(T_0) \subset p^{-s}T_0$ et donc que si l'on pose $T = \sum_{g \in G_K} g(T_0)$, alors $T_0 \subset T \subset p^{-s}T_0$ et que T est donc libre de rang d et stable par G_K. □

Soit B un anneau de périodes p-adiques ; ces anneaux sont généralement des espaces LF ce qui permet de construire $S\widehat{\otimes}B$. Supposons que B est G_K-régulier (cf. [**16**, §1.4]), et que le corps B^{G_K} est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si V est une S-représentation de G_K, alors on pose :

$$D_B(V) = ((S\widehat{\otimes}B) \otimes_S V)^{G_K},$$

et on dit que V est *B-admissible* si :

1. le $S \otimes B^{G_K}$-module $D_B(V)$ est projectif de type fini ;
2. l'application $(S\widehat{\otimes}B) \otimes_{S \otimes B^{G_K}} D_B(V) \to (S\widehat{\otimes}B) \otimes_S V$ est un isomorphisme.

Si c'est le cas, alors les deux conditions ci-dessus impliquent que $D_B(V)$ est projectif de rang d. Si $S = E$ est un corps, $D_B(V)$ est alors libre de rang d et en particulier, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors on retrouve la définition habituelle de l'admissibilité (cf. [**16**, §1.5]).

3. La méthode de Sen

Dans ce chapitre, nous expliquons la méthode de Sen, qui permet de simplifier le calcul de certains ensembles de cohomologie galoisienne.

3.1. Les conditions de Tate-Sen

Dans tout ce chapitre, G_0 est un groupe profini muni d'un caractère continu $\chi : G_0 \to \mathbf{Z}_p^\times$ dont l'image est ouverte, et on pose $H_0 = \ker \chi$. Si $g \in G_0$, on note $n(g)$ l'entier défini par $n(g) = \mathrm{val}_p(\chi(g) - 1)$. Si G est un sous-groupe ouvert de G_0 et si $H = G \cap H_0$, alors on note G_H le normalisateur de H dans G_0. Comme $G \subset G_H$, le groupe G_H est ouvert dans G_0 et $\chi(G_H)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$. On note $\widetilde{\Gamma}_H = G_H/H$ et C_H le centre de $\widetilde{\Gamma}_H$.

Lemme 3.1.1. — *Le groupe C_H est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{\Gamma}_H$.*

Démonstration. — Le noyau de la restriction de $\chi^{2(p-1)}$ à $\widetilde{\Gamma}_H$ est un groupe fini A et le groupe $\widetilde{\Gamma}_H$ se dévisse sous la forme $1 \to A \to \widetilde{\Gamma}_H \to B \to 1$, où B est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$ sans torsion (c'est à cela que sert l'exposant $2(p-1)$) et donc isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Le groupe $\widetilde{\Gamma}_H$ est donc produit semi-direct de $\mathbf{Z}_p$ et d'un groupe fini, et un élément g de $\mathbf{Z}_p \subset \widetilde{\Gamma}_H$ est dans le centre de $\widetilde{\Gamma}_H$ si et seulement si son image dans $\mathrm{Aut}(A)$ (g agissant par conjugaison sur A) est triviale. Comme le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ est fini, l'intersection de C_H avec $\mathbf{Z}_p \subset \widetilde{\Gamma}_H$ est d'indice fini dans $\mathbf{Z}_p$ donc aussi dans $\widetilde{\Gamma}_H$. Ceci permet de conclure. □

On appelle $n_1(H)$ le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $\chi(C_H)$ contienne $1 + p^n\mathbf{Z}_p$. Le lemme précédent montre que $n_1(H) \neq +\infty$.

Soit S une algèbre de Banach et soit $\widetilde{\Lambda}$ une $\mathscr{O}_S$-algèbre munie d'une application $\mathrm{val}_\Lambda : \widetilde{\Lambda} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les conditions :

1. $\mathrm{val}_\Lambda(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\mathrm{val}_\Lambda(xy) \geqslant \mathrm{val}_\Lambda(x) + \mathrm{val}_\Lambda(y)$;
3. $\mathrm{val}_\Lambda(x+y) \geqslant \inf(\mathrm{val}_\Lambda(x), \mathrm{val}_\Lambda(y))$;
4. $\mathrm{val}_\Lambda(p) > 0$ et $\mathrm{val}_\Lambda(px) = \mathrm{val}_\Lambda(p) + \mathrm{val}_\Lambda(x)$ si $x \in \widetilde{\Lambda}$.

Notons que la condition (4) inclut le cas où p est nul dans Λ. La condition (3) permet d'utiliser val_Λ pour munir $\widetilde{\Lambda}$ d'une topologie et la condition (1) montre que cette topologie est séparée. On suppose de plus que $\widetilde{\Lambda}$ est complet pour cette topologie.

Si d est un entier $\geqslant 1$ et si $U \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$, on note $\mathrm{val}_\Lambda(U)$ le minimum des $\mathrm{val}_\Lambda(u_{i,j})$, où $(u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ sont les coefficients de U. Le résultat suivant (immédiat) sera utilisé de manière intensive dans ce qui suit.

Lemme 3.1.2. — *Si d est un entier $\geqslant 1$ et si $U \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifie $\mathrm{val}_\Lambda(U-1) > 0$, alors $U \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ et son inverse est égal à $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-U)^n$.*

On suppose maintenant que $\widetilde{\Lambda}$ est muni d'une action $\mathscr{O}_S$-linéaire continue de G_0 telle que l'on ait $\mathrm{val}_\Lambda(g(x)) = \mathrm{val}_\Lambda(x)$ si $g \in G_0$ et $x \in \widetilde{\Lambda}$. Si d est un entier $\geqslant 1$, le groupe G_0 opère continûment sur $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ et on s'intéresse aux ensembles pointés de cohomologie continue $H^1(G_0, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}))$. La méthode de Sen (cf. [**25**] et [**10**, §3.3]) permet, sous certaines *conditions de Tate-Sen*, de réduire beaucoup la complexité apparente de ces ensembles.

Définition 3.1.3. — Les *conditions de Tate-Sen* sont les trois conditions suivantes :

(TS1) Il existe $c_1 > 0$ tel que, quels que soient les sous-groupes ouverts $H_1 \subset H_2$ de H_0, il existe $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(\alpha) > -c_1$ et $\sum_{\tau \in H_2/H_1} \tau(\alpha) = 1$.

(TS2) Il existe $c_2 > 0$ et, pour tout sous-groupe ouvert H de H_0, un entier $n(H) \in \mathbf{N}$, une suite croissante $(\Lambda_{H,n})_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-$\mathscr{O}_S$-algèbres fermées de $\widetilde{\Lambda}^H$ et, pour $n \geqslant n(H)$, une application $\mathscr{O}_S$-linéaire $R_{H,n} : \widetilde{\Lambda}^H \to \Lambda_{H,n}$ vérifiant :

1. si $H_1 \subset H_2$, alors $\Lambda_{H_2,n} \subset \Lambda_{H_1,n}$ et la restriction de $R_{H_1,n}$ à $\widetilde{\Lambda}^{H_2}$ coïncide avec $R_{H_2,n}$;
2. $R_{H,n}$ est $\Lambda_{H,n}$-linéaire et $R_{H,n}(x) = x$ si $x \in \Lambda_{H,n}$;
3. $g(\Lambda_{H,n}) = \Lambda_{gHg^{-1},n}$ et $g(R_{H,n}(x)) = R_{gHg^{-1},n}(gx)$ si $g \in G_0$; en particulier, $R_{H,n}$ commute à l'action de $\widetilde{\Gamma}_H$;
4. si $n \geqslant n(H)$ et si $x \in \widetilde{\Lambda}^H$, alors $\mathrm{val}_\Lambda(R_{H,n}(x)) \geqslant \mathrm{val}_\Lambda(x) - c_2$;
5. si $x \in \widetilde{\Lambda}^H$, alors $\lim_{n\to+\infty} R_{H,n}(x) = x$.

(TS3) Il existe $c_3 > 0$ et, pour tout sous-groupe ouvert G de G_0 un entier $n(G) \geqslant n_1(H)$, où $H = G \cap H_0$, tel que, si $n \geqslant n(G)$, si $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_H$ vérifie $n(\gamma) \leqslant n$, alors $\gamma - 1$ est inversible sur $X_{H,n} = (1 - R_{H,n})(\widetilde{\Lambda}^H)$ et on a $\mathrm{val}_\Lambda((\gamma-1)^{-1}(x)) \geqslant \mathrm{val}_\Lambda(x) - c_3$ si $x \in X_{H,n}$.

Remarquons que les applications $R_{H,n}$ sont des projections et nous fournissent une décomposition $\widetilde{\Lambda}^H = \Lambda_{H,n} \oplus X_{H,n}$.

Proposition 3.1.4. — *Si $\widetilde{\Lambda}$ est une $\mathbf{Z}_p$-algèbre qui vérifie les conditions de Tate-Sen, et si S est une algèbre de Banach, alors $\mathscr{O}_S \widehat{\otimes} \widetilde{\Lambda}$ vérifie les conditions de Tate-Sen* (avec les mêmes constantes c_1, c_2 et c_3).

Démonstration. — C'est immédiat, en étendant les applications $R_{H,n}$ par $\mathscr{O}_S$-linéarité. □

3.2. Dévissages en cohomologie continue

Lemme 3.2.1. — *Si H est un sous-groupe ouvert de H_0, si $a > c_1$ et $k \in \mathbf{N}$ et si $\tau \mapsto U_\tau$ est un 1-cocycle continu de H dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $U_\tau - 1 \in p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(U_\tau - 1) \geqslant a$ quel que soit $\tau \in H$, alors il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $M - 1 \in p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M - 1) \geqslant a - c_1$ telle que le cocycle $\tau \mapsto M^{-1} U_\tau \tau(M)$ vérifie $\mathrm{val}_\Lambda(M^{-1} U_\tau \tau(M) - 1) \geqslant a + 1$.*

Démonstration. — Soit H_1 un sous-groupe ouvert de H tel que $\mathrm{val}_\Lambda(U_\tau - 1) \geqslant a + 1 + c_1$ si $\tau \in H_1$, et soit $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ vérifiant $\sum_{\tau \in H/H_1} \tau(\alpha) = 1$ et $\mathrm{val}_\Lambda(\alpha) \geqslant -c_1$. Si Q est un système de représentants de H/H_1, posons :

$$M_Q = \sum_{\sigma \in Q} \sigma(\alpha) U_\sigma.$$

Les hypothèses mises sur α entraînent que $M_Q - 1 \in p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M_Q - 1) \geqslant a - c_1$; en particulier, $\mathrm{val}_\Lambda(M_Q - 1) > 0$ et M_Q est inversible par le lemme 3.1.2. D'autre part, si Q' est un autre système de représentants de H/H_1, la relation de cocycle et le choix de H_1 font que $\mathrm{val}_\Lambda(M_Q - M_{Q'}) \geqslant a + 1$. Finalement la relation de cocycle permet d'obtenir la relation

$$U_\tau \tau(M_Q) = \sum_{\sigma \in Q} \tau\sigma(\alpha) U_\tau \tau(U_\sigma) = \sum_{\sigma \in Q} \tau\sigma(\alpha) U_{\tau\sigma} = M_{\tau Q},$$

d'où l'on tire $M_Q^{-1}U_\tau\tau(M_Q) = 1 + M_Q^{-1}(M_{\tau Q} - M_Q)$ qui permet de montrer que M_Q répond à la question (quel que soit le choix de Q). □

Corollaire 3.2.2. — *Si H est un sous-groupe ouvert de H_0, si $a > c_1$ et si $\tau \to U_\tau$ est un 1-cocycle continu de H dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $U_\tau - 1 \in p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(U_\tau - 1) \geqslant a$ quel que soit $\tau \in H$, alors il existe $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $M - 1 \in p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M-1) \geqslant a - c_1$ tel que le cocycle $\tau \mapsto M^{-1}U_\tau\tau(M)$ soit trivial.*

Démonstration. — Une récurrence utilisant le lemme précédent permet de construire une suite de matrices $(M_m)_{m\in\mathbf{N}}$ telle que $M_m - 1 \in p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M_m - 1) \geqslant a - c_1 + m$ et que le cocycle $\tau \mapsto U_{n,\tau} = (\prod_{m=0}^n M_m)^{-1} U_\tau \tau(\prod_{m=0}^n M_m)$ vérifie $\mathrm{val}_\Lambda(U_{n,\tau} - 1) \geqslant a + n + 1$ quel que soit $\tau \in H$. Le produit infini $\prod_{m=0}^{+\infty} M_m$ converge alors vers une matrice M qui répond à la question. □

Lemme 3.2.3. — *Soit $\delta > 0$, soient $a, b \in \mathbf{R}$ vérifiant $a \geqslant c_2 + c_3 + \delta$ et $b \geqslant \sup(a + c_2, 2c_2 + 2c_3 + \delta)$ et soient H un sous-groupe ouvert de H_0, $n \geqslant n(H)$, $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_H$ vérifiant $n(\gamma) \leqslant n$ et $U = 1 + p^k U_1 + p^k U_2$, avec :*

$$U_1 \in \mathrm{M}_d(\Lambda_{H,n}), \quad \mathrm{val}_\Lambda(U_1) \geqslant a - \mathrm{val}_\Lambda(p^k)$$
$$U_2 \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H), \quad \mathrm{val}_\Lambda(U_2) \geqslant b - \mathrm{val}_\Lambda(p^k).$$

Alors il existe $M \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M - 1) \geqslant b - c_2 - c_3$ telle que $M^{-1}U\gamma(M) = 1 + p^k V_1 + p^k V_2$, avec :

$$V_1 \in \mathrm{M}_d(\Lambda_{H,n}), \quad \mathrm{val}_\Lambda(V_1) \geqslant a - \mathrm{val}_\Lambda(p^k)$$
$$V_2 \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H), \quad \mathrm{val}_\Lambda(V_2) \geqslant b - \mathrm{val}_\Lambda(p^k) + \delta.$$

Démonstration. — D'après les conditions (TS2) et (TS3), on peut écrire U_2 sous la forme $U_2 = R_{H,n}(U_2) + (1-\gamma)(V)$, avec $\mathrm{val}_\Lambda(R_{H,n}(p^k U_2)) \geqslant b - c_2 \geqslant a$ et $\mathrm{val}_\Lambda(p^k V) \geqslant b - c_2 - c_3$. Un calcul brutal, utilisant les inégalités vérifiées par a et b et les identités $R_{H,n}(p^k U_2) = p^k R_{H,n}(U_2)$ et

$$(1 + p^k V)^{-1} U\gamma(1 + p^k V) = (1 - p^k V + p^{2k} V^2 - \cdots)(1 + p^k U_1 + p^k U_2)(1 + p^k \gamma(V))$$

montre que :

$$\mathrm{val}_\Lambda\left((1 + p^k V)^{-1} U\gamma(1 + p^k V) - (1 + p^k U_1 + p^k R_{H,n}(U_2))\right) \geqslant b + \delta,$$

et donc que $M = 1 + p^k V$ convient. □

Corollaire 3.2.4. — *Soient $\delta > 0$ et $b \geqslant 2c_2 + 2c_3 + \delta$. Si $U \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ vérifie $\mathrm{val}_\Lambda(U - 1) \geqslant b$, alors il existe $M \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$, avec $\mathrm{val}_\Lambda(M - 1) \geqslant b - c_2 - c_3$ telle que :*

$$M^{-1} U\gamma(M) \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\Lambda_{H,n}).$$

Démonstration. — Le lemme précédent permet de construire par récurrence une suite de matrices M_j pour $j \geqslant 0$ telle que $M_j \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$, $\mathrm{val}_\Lambda(M_j - 1) \geqslant b - c_2 - c_3$ et

telle que si l'on pose $U_j = (M_0 \cdots M_j)^{-1} U \gamma(M_0 \cdots M_j)$, alors $U_j = 1 + p^k U_{j,1} + p^k U_{j,2}$, avec :

$$U_{j,1} \in \mathrm{M}_d(\Lambda_{H,n}), \quad \mathrm{val}_\Lambda(U_{j,1}) \geqslant b - \mathrm{val}_\Lambda(p^k) - c_2,$$
$$U_{j,2} \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H), \quad \mathrm{val}_\Lambda(U_{j,2}) \geqslant b - \mathrm{val}_\Lambda(p^k) + j\delta.$$

Le produit infini $\prod_{j=0}^{+\infty} M_j$ converge donc vers une matrice qui répond à la question. □

Lemme 3.2.5. — *Soient H un sous-groupe ouvert de H_0, $n \geqslant n(H)$, $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_H$ vérifiant $n(\gamma) \leqslant n$ et $B \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$. S'il existe $V_1, V_2 \in \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n})$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(V_1 - 1) > c_3$ et $\mathrm{val}_\Lambda(V_2 - 1) > c_3$ tels que $\gamma(B) = V_1 B V_2$, alors $B \in \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n})$.*

Démonstration. — Si $C = B - R_{H,n}(B)$, alors $\gamma(C) = V_1 C V_2$ puisque $R_{H,n}$ est $\Lambda_{H,n}$-linéaire et commute à l'action de γ. On a :

$$\gamma(C) - C = V_1 C V_2 - C = (V_1 - 1) C V_2 + V_1 C (V_2 - 1) - (V_1 - 1) C (V_2 - 1),$$

et donc $\mathrm{val}_\Lambda(\gamma(C) - C) \geqslant \mathrm{val}_\Lambda(C) + \inf(\mathrm{val}_\Lambda(V_1 - 1), \mathrm{val}_\Lambda(V_2 - 1)) > \mathrm{val}_\Lambda(C) + c_3$. La condition (TS3) implique $\mathrm{val}_\Lambda(C) = +\infty$ et donc $C = 0$, ce qui permet de conclure. □

Proposition 3.2.6. — *Soit $\widetilde{\Lambda}$ vérifiant les conditions de Tate-Sen (TS1), (TS2) et (TS3) et soit $\sigma \mapsto U_\sigma$ un cocycle continu sur G_0 à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$. Si G est un sous-groupe ouvert distingué de G_0 tel que $U_\sigma - 1 \in p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(U_\sigma - 1) > c_1 + 2c_2 + 2c_3$ quel que soit $\sigma \in G$ et si $H = G \cap H_0$, alors il existe $M \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M - 1) > c_2 + c_3$ tel que le cocycle $\sigma \mapsto V_\sigma = M^{-1} U_\sigma \sigma(M)$ soit trivial sur H et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)})$.*

Démonstration. — Le corollaire 3.2.2 nous fournit une matrice $M_1 \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M_1 - 1) > 2c_2 + 2c_3$ telle que le cocycle $\tau \mapsto U'_\tau = M_1^{-1} U_\tau \tau(M_1)$ soit trivial sur H et donc provienne par inflation d'un cocycle sur $\widetilde{\Gamma}_H$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ (notons que G est distingué dans G_0 et donc que $G_H = G_0$).

Soit $\gamma \in C_H$ vérifiant $n(\gamma) = n(G)$; en particulier, γ est dans l'image de G et $U'_\gamma - 1 \in p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$, avec $\mathrm{val}_\Lambda(U'_\gamma - 1) > 2c_2 + 2c_3$. Le corollaire 3.2.4 nous fournit une matrice $M_2 \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M_2 - 1) > c_2 + c_3$ telle que $M_2^{-1} U'_\gamma \gamma(M_2) \in \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)})$. Soit $M = M_1 M_2$. On a $M \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M - 1) > c_2 + c_3$, et le cocycle $\tau \mapsto V_\tau = M^{-1} U_\tau \tau(M)$ est trivial sur H, à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ et vérifie $V_\gamma \in \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(V_\gamma - 1) > c_2 + c_3 > c_3$.

Si $\tau \in G_0$, on a $\tau\gamma = \gamma\tau$ dans G_0/H et la relation de cocycle nous fournit la relation :

$$V_\tau \tau(V_\gamma) = V_{\tau\gamma} = V_{\gamma\tau} = V_\gamma \gamma(V_\tau).$$

On peut alors appliquer le lemme 3.2.5 à $B = V_\tau$, $V_1 = V_\gamma^{-1}$ et $V_2 = \tau(V_\gamma)$ pour en déduire le fait que V_τ est à coefficients dans $\Lambda_{H,n(G)}$. Ceci permet de conclure. □

3.3. Application aux S-représentations

Soit S une algèbre de Banach et $\widetilde{\Lambda}$ vérifiant les conditions de Tate-Sen. Une *$\mathscr{O}_S$-représentation* de G_0 est un $\mathscr{O}_S$-module libre de rang fini muni d'une action continue $\mathscr{O}_S$-linéaire de G_0 ; la *dimension* d'une telle représentation est le rang du $\mathscr{O}_S$-module sous-jacent.

On note $\widetilde{\Lambda}^+$ (resp. $\Lambda^+_{H,n}$, si $H \subset H_0$ est ouvert et $n \in \mathbf{N}$), l'anneau des entiers de $\widetilde{\Lambda}$ (resp. $\Lambda_{H,n}$) pour la valuation val_Λ (i.e. l'ensemble des x vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(x) \geqslant 0$).

Proposition 3.3.1. — *Soient T une $\mathscr{O}_S$ représentation de dimension d de G_0, $V = S \otimes_{\mathscr{O}_S} T$ et k un entier tel que $\mathrm{val}_\Lambda(p^k) > c_1 + 2c_2 + 2c_3$. Soit G un sous-groupe distingué de G_0 agissant trivialement sur T/p^kT, soit $H = G \cap H_0$ et soit $n \geqslant n(G)$. Alors $\widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\mathscr{O}_S} T$ contient un unique sous-$\Lambda^+_{H,n}$- module $D^+_{H,n}(T)$ libre de rang d vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$D^+_{H,n}(T)$ est fixe par H et stable par G_0 ;*
2. *l'application naturelle $\widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\Lambda^+_{H,n}} D^+_{H,n}(T) \to \widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\mathscr{O}_S} T$ est un isomorphisme ;*
3. *$D^+_{H,n}(T)$ possède une base sur $\Lambda^+_{H,n}$ qui est c_3-fixe par G/H (i.e. si $\gamma \in G/H$, alors la matrice W de γ dans cette base vérifie $\mathrm{val}_\Lambda(W-1) > c_3$).*

Démonstration. — Soit $v_1, \dots, v_d$ une base de T sur $\mathscr{O}_S$ et soit $U_\sigma = (u^\sigma_{i,j})$ la matrice des vecteurs $\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_d)$ dans la base $v_1, \dots, v_d$ (i.e. $\sigma(v_j) = \sum_{i=1}^d u^\sigma_{i,j} v_i$). Alors $\sigma \mapsto U_\sigma$ est un morphisme continu de groupes de G_0 dans $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_S)$ que l'on peut aussi voir comme un 1-cocycle continu sur G_0 à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_S) \subset \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^+)$. Par hypothèse, on a $U_\sigma \in 1 + p^k \mathrm{M}_d(\mathscr{O}_S)$ si $\sigma \in G$ et la proposition 3.2.6 nous fournit une matrice $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M-1) > c_2 + c_3$ (et donc $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^+)$), telle que le cocycle $\sigma \mapsto V_\sigma = M^{-1} U_\sigma \sigma(M)$ soit trivial sur H et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)}) \cap \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^+) = \mathrm{GL}_d(\Lambda^+_{H,n(G)})$. Si $M = (m_{i,j})$, et si $e_k = \sum_{j=1}^d m_{j,k} v_j$, on a

$$\sigma(e_k) = \sum_{j=1}^d \sigma(m_{j,k}) \sigma(v_j) = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d u^\sigma_{i,j} \sigma(m_{j,k}) \right) v_i = e_k,$$

si $\sigma \in H$, ce qui fait que $e_1, \dots, e_d$ est une base de $\widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\mathscr{O}_S} T$ sur $\widetilde{\Lambda}^+$ fixe par H.

De plus, si $\gamma \in G/H$, la matrice W de γ dans la base $e_1, \dots, e_d$ est de la forme $M^{-1} U_\sigma \sigma(M)$, où $\sigma \in G$ est un relèvement de γ, et vérifie donc $\mathrm{val}_\Lambda(W-1) > c_2 + c_3 > c_3$. On en déduit le fait que le sous-$\Lambda^+_{H,n}$-module engendré par $e_1, \dots, e_d$ vérifie les propriétés voulues, d'où l'existence d'un tel module.

Pour démontrer l'unicité, fixons $\gamma \in C_H$ vérifiant $n(\gamma) = n$. Soient $e_1, \dots, e_d$ et $e'_1, \dots, e'_d$ deux bases de $\widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\mathscr{O}_S} T$ sur $\widetilde{\Lambda}^+$, fixes par H, telles que les matrices W et W' de γ dans ces bases appartiennent à $\mathrm{GL}_d(\Lambda^+_{H,n})$, avec $n \geqslant n(G)$ et vérifient $\mathrm{val}_\Lambda(W-1) > c_3$ et $\mathrm{val}_\Lambda(W'-1) > c_3$. Soit $B \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^+)$ la matrice des e'_j dans la base $e_1, \dots, e_d$. Alors B est invariante par H et on a $W' = B^{-1} W \gamma(B)$. D'après la proposition 3.2.5, ceci implique B est à coefficients dans $\Lambda_{H,n}$ (et donc dans $\Lambda^+_{H,n}$), ce

qui permet de montrer que les $\Lambda^+_{H,n}$-modules engendrés par $e_1, \dots, e_d$ d'une part et $e'_1, \dots, e'_d$ d'autre part, sont égaux. Ceci termine la démonstration de la proposition. □

Remarque 3.3.2. — Conservons les hypothèses de la proposition 3.3.1 ci-dessus. Si l'on pose $D_{H,n}(T) = \Lambda_{H,n} \otimes_{\Lambda^+_{H,n}} D^+_{H,n}(T)$, alors $D_{H,n}(T)$ est un $\Lambda_{H,n}$-module libre de rang d et est l'unique sous-$\Lambda_{H,n}$-module de $\widetilde{\Lambda}$ vérifiant les propriétés :

1. $D_{H,n}(T)$ est fixe par H et stable par G_0 ;
2. l'application naturelle $\widetilde{\Lambda} \otimes_{\Lambda_{H,n}} D_{H,n}(T) \to \widetilde{\Lambda} \otimes_{\mathscr{O}_S} T$ est un isomorphisme ;
3. $D_{H,n}(T)$ possède une base sur $\Lambda_{H,n}$ qui est c_3-fixe par G/H.

La démonstration est exactement la même que celle de la proposition 3.3.1.

4. Deux applications de la méthode de Sen

Dans ce chapitre, nous donnons deux applications de la méthode de Sen vue au chapitre précédent ; la première est la théorie de Sen habituelle, la deuxième est la construction de (φ, Γ)-modules.

4.1. Le corps $\mathbf{C}_p$ et l'opérateur de Sen

Le premier exemple non trivial d'anneau vérifiant les conditions de Tate-Sen est le corps $\mathbf{C}_p$ muni de la valuation val_p et de l'action de G_K. Cet exemple est dû à Tate (cf. [**28**]). Nous donnons dans ce paragraphe l'application de la proposition 3.3.1 à la construction de l'opérateur de Sen (voir [**25, 26, 27**]).

Si L est une extension finie de K, alors on note $L_n = L(\mu_{p^n})$ pour $n \geqslant 1$ ainsi que $H_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L_\infty)$ et $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$. On a alors $\mathbf{C}_p^{H_L} = \widehat{L}_\infty$, le complété de L_∞ pour val_p. Par ailleurs, si $n \in \mathbf{N}$ et si $x \in L_\infty$, alors $[L_{n+k} : L_n]^{-1}\mathrm{Tr}_{L_{n+k}/L_n}(x)$ ne dépend pas du choix de l'entier k tel que $x \in L_{n+k}$. L'application de L_∞ dans L_n ainsi définie se prolonge par continuité uniforme en une application $R_{L,n} : \widehat{L}_\infty \to L_n$.

Proposition 4.1.1. — *L'anneau $\widetilde{\Lambda} = \mathbf{C}_p$ vérifie les conditions (TS1), (TS2) et (TS3), avec $\widetilde{\Lambda}^{H_L} = \widehat{L}_\infty$, $\Lambda_{H_L,n} = L_n$, $R_{H_L,n} = R_{L,n}$ et $\mathrm{val}_\Lambda = \mathrm{val}_p$, les constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 1/(p-1)$ pouvant être choisies arbitrairement.*

Dans toute la suite de l'article, on se fixe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 1/(p-1)$ telles que l'on ait $c_1 + 2c_2 + 2c_3 < \mathrm{val}_p(12p)$, et on note $n(L) = n(G_L)$.

Proposition 4.1.2. — *Soient S une algèbre de Banach, T une $\mathscr{O}_S$-représentation de dimension d de G_K et $V = S \otimes_{\mathscr{O}_S} T$. Soit L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$ et soit $n \geqslant n(L)$. Alors $(S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p) \otimes_S V$ contient un unique sous-$(S \otimes L_n)$-module libre $\mathrm{D}^{L_n}_{\mathrm{Sen}}(V)$ de rang d vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\mathrm{D}^{L_n}_{\mathrm{Sen}}(V)$ est fixe par H_L et stable par G_K ;*

2. $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ *possède une base sur* $S \otimes L_n$ *qui est* c_3*-fixe par* Γ_L ;
3. *l'application naturelle* $(S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p) \otimes_{S\otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) \to (S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p) \otimes_S V$ *est un isomorphisme.*

On a alors $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)$.

Démonstration. — Cela suit de la méthode de Sen (plus précisément de la proposition 3.3.1 et de la remarque 3.3.2 qui la suit) et du fait que $\mathbf{C}_p$ vérifie les conditions de Tate-Sen. Le dernier point résulte de la proposition appliquée à $S/\mathfrak{m}_x$ et du fait que l'image de $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ dans $(E_x \otimes \mathbf{C}_p) \otimes_{E_x} V_x$ vérifie les conditions (1), (2) et (3). □

Si $\gamma \in \Gamma_L$ vérifie $n(\gamma) \geqslant n$, alors γ agit trivialement sur L_n et linéairement sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$. Si de plus M_γ désigne la matrice de γ dans une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ de telle manière que l'on ait $\mathrm{val}_p(M_\gamma - 1) > 0$, on peut définir le logarithme $\log\gamma$ de γ par la série $-\sum_{m=1}^{+\infty}(1-\gamma)^m/m$. On a $\log(\gamma^k) = k\log\gamma$, et Γ_L étant un groupe de Lie p-adique de dimension 1, l'opérateur $(\log_p \chi(\gamma))^{-1}\log\gamma$ ne dépend pas du choix de γ. On le note Θ_{Sen}. Comme on peut prendre γ dans le centre de $\widetilde{\Gamma}_L$, l'opérateur Θ_{Sen} commute à l'action de $\widetilde{\Gamma}_L$; en particulier, son polynôme caractéristique et son polynôme minimal sont à coefficients dans $S \otimes K$. L'opérateur Θ_{Sen} est l'opérateur de Sen et si $x \in \mathscr{X}$, les valeurs propres de $\Theta_{\mathrm{Sen}}(x)$ sont appelées les *poids de Hodge-Tate généralisés* de V_x. On retrouve ainsi les constructions de Sen (voir [**25**] pour le cas $S = \mathbf{Q}_p$ et [**26, 27**] pour les familles).

Remarque 4.1.3. — En prenant $n = n(L)$ et $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n(L)$, et en utilisant le fait que la matrice M_γ de γ dans une base c_3-fixe de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ vérifie $\mathrm{val}_p(M_\gamma - 1) > c_3 > 1/(p-1)$, on voit que les valeurs propres de $\log M_\gamma$ sont de valuation $> c_3$ et donc que les poids de Hodge-Tate généralisés de V sont de valuation p-adique $> 1/(p-1) - n(L)$.

4.2. Les anneaux surconvergents et les (φ,Γ)-modules

Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$, la valuation $\mathrm{val}_{\mathrm{E}}$ et les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s}$ sont définis et étudiés dans [**11**]. Nous rappelons ici quelques unes de leur propriétés qui nous serviront dans ce chapitre. Rappelons que pour $r > 0$, l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est défini par :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} = \left\{ x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}, \quad \lim_{k\to+\infty}\left(\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k) + \frac{k}{r}\right) = +\infty \right\}$$

et que si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ alors on pose $\mathrm{val}^{(0,r]}(x) = \inf_{k\geqslant 0}(\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k) + k/r)$. L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s}$ est défini par $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s} =$

$$\left\{ x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}, \mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k) + \frac{psk}{p-1} \geqslant 0 \ \forall k, \quad \lim_{k\to+\infty}\left(\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k) + \frac{psk}{p-1}\right) = +\infty \right\},$$

ce qui fait que si l'on pose $s(r) = (p-1)/pr$, alors l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ pour la valuation $\mathrm{val}^{(0,r]}$ s'identifie à $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s(r)}$ et que l'on a $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s(r)}[1/[\overline{\pi}]]$. On renvoie à [**11**] pour la définition des autres anneaux que l'on utilise dans ce paragraphe (notamment tous les anneaux sans tilde) ainsi que la construction des applications $R_{L,n} : \widetilde{\mathbf{A}}_L^{(0,r]} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]})^{H_L} \to \varphi^{-n}(\mathbf{A}_L^{(0,p^{-n}r]})$.

Proposition 4.2.1. — *L'anneau $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,1]}$ vérifie les conditions (TS1), (TS2) et (TS3) avec $\widetilde{\Lambda}^{H_L} = \widetilde{\mathbf{A}}_L^{(0,1]}$, $\Lambda_{H_L,n} = \varphi^{-n}(\mathbf{A}_L^{(0,p^{-n}]})$, $R_{H_L,n} = R_{L,n}$ et $\mathrm{val}_\Lambda = \mathrm{val}^{(0,1]}$, les constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 1/(p-1)$ pouvant être choisies arbitrairement.*

Démonstration. — Ceci est démontré dans [**11**] : la condition (TS1) résulte du lemme 10.1, la condition (TS2) résulte du corollaire 8.11 et la condition (TS3) résulte de la proposition 9.9. □

Lemme 4.2.2. — *Si $M \in 1 + p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_K)$ est tel qu'il existe $U, V \in 1 + p\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_K)$ tels que l'on ait $U\gamma(M) = MV$, alors $M \in 1 + p\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_K)$.*

Démonstration. — Soit $R_{K,0}$ l'application de [**11**, §8.3] et $N = M - R_{K,0}(M)$. Il s'agit de vérifier que l'on a $N = 0$. Supposons le contraire et soient $k \in \mathbf{N}$ le plus grand entier tel que $N \in p^k\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_K)$ et $\overline{N}$ l'image de $p^{-k}N$ dans $\mathrm{M}_d(\mathbf{E}_K)$. Comme $R_{K,0}$ commute à γ et est $\mathbf{A}_K$ linéaire, on a $U\gamma(N) = NV$, et donc aussi $U\gamma(p^{-k}N) = (p^{-k}N)V$, ce qui nous donne en réduisant modulo p : $\gamma(\overline{N}) = \overline{N}$. D'autre part, comme $R_{K,0}(N) = 0$, on a $R_{K,0}(\overline{N}) = 0$; on en déduit (cf. [**11**, §9]) la nullité de $\overline{N}$ puis celle de N, ce qui permet de conclure. □

Dans le reste de cet article, on fixe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 1/(p-1)$ telles que $c_1 + 2c_2 + 2c_3 < \mathrm{val}_p(12p)$. Si T est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K, si $s > 0$, et si L est une extension galoisienne finie de K, alors on pose $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T) = (\mathbf{A}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_L}$; c'est un $\mathbf{A}_L^{\dagger,s}$-module muni d'une action de $\widetilde{\Gamma}_L$. Pour $n \geqslant 0$, on pose par ailleurs $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,s}(T) = \varphi^{-n}(\mathrm{D}_L^{\dagger,p^n s}(T))$, qui est alors un $\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,s} = \varphi^{-n}(\mathbf{A}_L^{\dagger,p^n s})$-module.

Proposition 4.2.3. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et T une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K. Si L est une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$ et si $n \geqslant n(L)$, alors $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T) = \varphi^{-n}((\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_L})$ est l'unique sous-$\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}$-module libre de rang d de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$ est fixe par H_L et stable par G_K ;*
2. *l'application naturelle de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p} \otimes_{\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}} \mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est un isomorphisme ;*
3. *le $\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}$-module $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$ a une base telle que si $\gamma \in \Gamma_L$, la matrice W_γ de γ dans cette base vérifie $\mathrm{val}^{(0,1]}(W_\gamma - 1) > c_3$.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{val}_p(12p) > c_1 + 2c_2 + 2c_3$, l'unicité d'un module vérifiant les conditions ci-dessus suit immédiatement des propositions 4.2.1 (les anneaux surconvergents vérifient les conditions de Tate-Sen) et 3.3.1 (l'application de la méthode de Sen). Il reste à vérifier que le module fourni par la proposition 3.3.1 coïncide bien avec $(\varphi^{-n}(\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_L}$. La démonstration de la proposition 3.3.1 donne la construction de ce module : si l'on note U_τ la matrice de $\tau \in G_K$ dans une base de T, alors la proposition 3.2.6 nous fournit une matrice $M \in 1 + 12p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p})$ avec $\mathrm{val}^{[0,1]}(M-1) > c_2 + c_3$ telle que le cocycle $\tau \mapsto M^{-1}U_\tau\tau(M)$ soit trivial sur H_L et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p})$. Le cocycle $\tau \mapsto C_\tau = \varphi^n(M^{-1}U_\tau\tau(M)) = \varphi^n(M)^{-1}U_\tau\varphi^n(\tau(M))$ est alors trivial sur H_L et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_L^{\dagger,p^{n-1}(p-1)})$.

D'autre part, la théorie des (φ,Γ)-modules de [**14**] nous fournit une matrice $P \in 1 + 12p\mathrm{M}_d(\mathbf{A})$ telle que le cocycle $\tau \mapsto D_\tau = P^{-1}U_\tau\tau(P)$ soit trivial sur H_L et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_L)$.

Eliminant U_τ entre C_τ et D_τ, et posant $N = \varphi^n(M)^{-1}P$, on obtient la relation $ND_\tau = C_\tau\tau(N)$. En particulier, comme $C_\tau = D_\tau = 1$ si $\tau \in H_L$, on a $N \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_L)$. D'autre part, comme $U_\tau - 1$ est divisible par $12p$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_L$ si $\tau \in G_L$ et comme il en est de même de M et P, les matrices N et, si $\tau \in G_L$, C_τ et D_τ appartiennent à $1 + 12p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_L)$. Comme par ailleurs C_τ et D_τ sont à coefficients dans $\mathbf{A}_L$, le lemme 4.2.2 implique que N est à coefficients dans $\mathbf{A}_L$ puis que M est à coefficients dans $\varphi^{-n}(\mathbf{A})$.

On en déduit le fait que la base $e_1,\dots,e_d$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ que l'on déduit de M comme dans la démonstration de la proposition 3.3.1 est constituée d'éléments de $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$. D'autre part, M est dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p})$ et à coefficients dans l'anneau $\varphi^{-n}(\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)})$, ce qui implique que $e_1,\dots,e_d$ est une base de $\varphi^{-n}(\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ sur $\varphi^{-n}(\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)})$. On en déduit le fait que $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$ est le sous-$\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}$-module engendré par $e_1,\dots,e_d$. Ceci permet de conclure. □

Corollaire 4.2.4. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et T une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K. Si L est une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$ et si $s \geqslant (p-1)p^{n(L)-1}$, alors le $\mathbf{A}_L^{\dagger,s}$-module $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$ est libre de rang d et l'application naturelle de $\mathbf{A}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{A}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$ dans $\mathbf{A}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le fait que $\mathrm{D}_L^{\dagger,(p-1)p^{n(L)-1}}(T) = \varphi^{n(L)}(\mathrm{D}_{L,n(L)}^{\dagger,(p-1)/p}(T))$ et la proposition 4.2.3 montrent que si $s = (p-1)p^{n(L)-1}$, alors $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$ est libre de rang d et l'application naturelle de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{A}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est un isomorphisme. Si l'on écrit une base de T selon une base de $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$, on obtient donc une matrice de $\mathrm{M}_d(\mathbf{A}^{\dagger,s}) \cap \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s}) = \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}^{\dagger,s})$. Ceci montre le corollaire pour $s = (p-1)p^{n(L)-1}$. Si $s \geqslant (p-1)p^{n(L)-1}$, alors il suffit d'étendre les scalaires. □

Nous descendons maintenant de L à K. Rappelons que $\mathbf{B}_K^{\dagger,s} = \mathbf{A}_K^{\dagger,s}[1/p]$.

Lemme 4.2.5. — *Si L est une extension galoisienne finie de K, alors :*

1. *il existe $s(L/K)$ tel que si $s \geqslant s(L/K)$, alors il existe $\alpha \in \mathbf{B}_L^{\dagger,s}$ qui engendre une base normale de $\mathbf{B}_L^{\dagger,s}$ sur $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$ et tel que le discriminant du polynôme minimal de α est inversible dans $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$;*
2. *si $s \geqslant s(L/K)$ et $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, alors $(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^{\natural} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathbf{B}_L^{\dagger,s} \simeq \oplus_{g\in G}(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^{\natural} e_g$.*

Démonstration. — Si $\alpha \in \mathbf{B}_L^{\dagger}$ engendre une base normale de $\mathbf{B}_L^{\dagger}$ sur $\mathbf{B}_K^{\dagger}$ alors le discriminant du polynôme minimal de α est inversible dans $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$ pour s assez grand ce qui montre le premier point.

Soit $s \geqslant s(L/K)$ et $f(X) = \prod(X - \alpha_i) \in \mathbf{B}_K^{\dagger,s}[X]$ le polynôme minimal d'un tel α. On a $\mathbf{B}_L^{\dagger,s} = \mathbf{B}_K^{\dagger,s}[X]/f(X)$ et donc :

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^{\natural} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathbf{B}_L^{\dagger,s} &\simeq (\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^{\natural} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^{\dagger,s}[X]/f(X)\\ &\simeq (\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^{\natural}[X]/f(X)\\ &\simeq \oplus_i (\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^{\natural}[X]/(X-\alpha_i)\\ &\simeq \oplus_{g\in G}(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^{\natural} e_g.\end{aligned}$$

En effet, l'hypothèse selon laquelle le discriminant de $f(X)$ est inversible garantit que les idéaux $(X - \alpha_i)$ sont deux-à-deux étrangers et que l'on peut appliquer [**7**, chap. II, §1, n° 2, prop. 6] (le théorème des restes). □

Proposition 4.2.6. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et T une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K. Soit L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$ et soit $n \geqslant n(L)$ et soit $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$. Si $s \geqslant \max((p-1)p^{n(L)-1}, s(L/K))$, alors :*

1. *le $\mathbf{A}_K^{\dagger,s}$-module $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ et le $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$-module $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ sont libres de rang d ;*
2. *l'application naturelle de $\mathbf{B}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ dans $\mathbf{B}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le fait que $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ est libre de rang d et que l'application de $\mathbf{B}_L^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ dans $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ est un isomorphisme résulte du lemme 4.2.5 ci-dessus et de la proposition 2.2.1 (la descente étale). Comme on sait par le corollaire 4.2.4 que l'application de $\mathbf{B}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{B}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ dans $\mathbf{B}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme, cela montre le (2) et le deuxième point du (1) (notons que $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ est nécessairement libre car $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$ est un anneau principal).

Pour montrer que le $\mathbf{A}_K^{\dagger,s}$-module $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ est libre, on choisit $n \gg 0$ et on regarde $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)/Q_n$ où $Q_n = ((1+X)^{p^n}-1)/((1+X)^{p^{n-1}}-1)$: c'est un K_n-espace vectoriel de dimension d (cf. le lemme 4.9 de [**3**]) et l'image de $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ dans $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)/Q_n$ en est un $\mathscr{O}_{K_n}$-réseau. Si l'on choisit d éléments de $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ dont les images engendrent ce réseau, alors on vérifie qu'ils engendrent $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ en utilisant le fait que $\mathbf{A}_K^{\dagger,s}$ est complet pour

la topologie Q_n-adique et que le noyau de l'application $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T) \to \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)/Q_n$ est $Q_n\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$. □

Pour mémoire, notons le corollaire suivant (le théorème principal de [8]) :

Corollaire 4.2.7. — *Si $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$, alors $\mathrm{D}^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ est un sous-$\mathbf{B}_K^\dagger$-espace vectoriel de dimension d de $\mathrm{D}(V)$ stable par Γ_K et φ. De plus, on a :*

$$\mathrm{D}(V) = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V) = \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

En particulier, le foncteur $V \mapsto \mathrm{D}^\dagger(V)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de G_K vers la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_K^\dagger$.

Soient maintenant S une algèbre de Banach, K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, V une S-représentation de G_K, T un $\mathscr{O}_S$-réseau de V stable par G_K, et L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$. On pose $s(V) = \max((p-1)p^{n(L)-1}, s(L/K))$ et on s'arrange (quitte à augmenter un peu $s(V)$) pour qu'il existe un entier $n(V)$ tel que $p^{n(V)-1}(p-1) = s(V)$.

Proposition 4.2.8. — *Si V est une S-représentation de G_K de dimension d et si $n \geqslant n(L)$, alors $(\mathscr{O}_S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p}) \otimes_{\mathscr{O}_S} T$ possède un unique sous-$\mathscr{O}_S\widehat{\otimes}\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}$-module $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$, libre de rang d, fixe par H_L, stable par G_K, possédant une base presque invariante par Γ_L et tel que :*

$$(\mathscr{O}_S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p}) \otimes_{\mathscr{O}_S\widehat{\otimes}\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}} \mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T) \simeq (\mathscr{O}_S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p}) \otimes_{\mathscr{O}_S} T.$$

Démonstration. — C'est encore une application immédiate de la proposition 3.3.1, en utilisant les propositions 4.2.1 et 3.1.4. □

Si V est une S-représentation de G_K de dimension d et si $s \geqslant s(V)$, alors on pose :

$$\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s} \otimes_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s(V)}} \varphi^{n(V)}(\mathrm{D}_{L,n(V)}^{\dagger,(p-1)/p}(V)))^{H_K},$$

où $n(V)$ est l'entier défini plus haut.

Théorème 4.2.9. — *Si V est une S-représentation de G_K de dimension d et si $s \geqslant s(V)$, alors :*

1. *$\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ est un $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$-module localement libre de rang d ;*
2. *l'application $(S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s}) \otimes_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V) \to (S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s}) \otimes_S V$ est un isomorphisme ;*
3. *si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V) \to \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V_x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — La proposition 4.2.8 ci-dessus implique que $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ est un $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s}$-module libre de rang d et que l'application $(S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s}) \otimes_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V) \to (S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s}) \otimes_S V$ est un isomorphisme. Les points (1) et (2) résultent alors de la proposition 2.2.1.

Enfin le (3) pour $K = L$ et $s = p^{n(V)-1}(p-1)$ résulte de l'unicité dans la proposition 4.2.8 et le cas général en résulte en étendant les scalaires et en prenant ensuite les invariants par H_K. □

Remarque 4.2.10. — Le foncteur $V \mapsto \mathrm{D}^\dagger(V)$ n'est plus une équivalence de catégories de la catégorie des représentations p-adiques vers la catégorie des (φ, Γ)-modules étales en général (contrairement au cas où S est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$). Si par exemple S contient un élément y transcendant et de valuation nulle, alors le (φ, Γ)-module étale D de dimension 1 ayant une base e telle que $\varphi(e) = ye$ et $\gamma(e) = e$ pour $\gamma \in \Gamma$ ne provient pas d'une famille de représentations p-adiques (exemple dû à Gaëtan Chenevier).

4.3. Le module $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$

Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ le corps de périodes p-adiques construit par Fontaine (voir par exemple [**15**]). Rappelons que l'on a une application injective de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,(p-1)/p}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui à $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ associe la somme de la série dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Si $n \geqslant 0$, on compose cette injection avec $\varphi^{-n} : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,(p-1)p^{n-1}} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,(p-1)/p}$ pour obtenir une application toujours injective $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,(p-1)p^{n-1}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et si $n \geqslant n(L)$, alors l'image de $\mathbf{B}_L^{\dagger,(p-1)p^{n-1}}$ par ι_n est incluse dans $L_n[\![t]\!]$.

On définit $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ comme la limite projective des $S\widehat{\otimes}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^k)$ et $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ comme la limite inductive des $S\widehat{\otimes}t^{-i}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. On définit $S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]$ comme la limite projective des $S\widehat{\otimes}(L_n[\![t]\!]/t^k)$. Si V est une S-représentation de G_K et si $s \geqslant s(V)$ et $n \geqslant \max(n(L), n(s))$, ceci nous permet de poser :

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) = (S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!])\otimes^{\iota_n}_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s}}\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V) = (S\widehat{\otimes}L_n(\!(t)\!))\otimes^{\iota_n}_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s}}\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V).$$

Le $S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ est alors libre de rang d. Si $S = \mathbf{Q}_p$, alors c'est un $L_n[\![t]\!]$-réseau du $L_n(\!(t)\!)$-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ qui est de dimension d.

Le lemme suivant est une conséquence directe du (2) du théorème 4.2.9.

Lemme 4.3.1. — *On a* $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]} \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_S V$.

Pour terminer, mentionnons que l'on retrouve $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ à partir de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ (l'énoncé et la démonstration du (2) de cette proposition, que nous n'utilisons pas par la suite, dépendent du paragraphe 5.1 ci-dessous).

Proposition 4.3.2. — *Si V est une S-représentation de G_K et $s \geqslant s(V)$ et $n \geqslant n(s)$, alors l'image de $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ par $\theta \circ \varphi^{-n}$ dans $(S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p) \otimes_S V$ coïncide avec $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$. En particulier :*

1. *on a $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t = \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$;*
2. *(si $S = \mathbf{Q}_p$) la représentation V est de Hodge-Tate à poids dans $[a,b]$ si et seulement si $\left(\prod_{i\in[a,b]}(\gamma - \chi(\gamma)^i)\right) \cdot \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset t \cdot \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$.*

On peut d'ailleurs construire $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ en appliquant la méthode de Sen à $\widetilde{\Lambda} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, c'est ce qui est fait dans [**17**].

5. Représentations de de Rham

Dans ce chapitre, nous appliquons les constructions des chapitres précédents aux familles de représentations de de Rham ; en particulier, nous montrons le théorème B de l'introduction.

5.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ et les représentations de Hodge-Tate

On note $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ l'anneau $\mathbf{C}_p[t,t^{-1}]$ muni de l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ prolongeant celle sur $\mathbf{C}_p$ par la formule $g(t) = \chi(g)t$, ce qui fait de t un analogue (naïf) p-adique de $2i\pi$.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, une $\mathbf{Q}_p$-représentation V de G_K de dimension d est dite *de Hodge-Tate* (cf. [**16**, §3]) s'il existe $a_1,\dots,a_d \in \mathbf{Z}$ et une base $f_1,\dots,f_d$ de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sur $\mathbf{C}_p$ sur laquelle G_K agit par $g(f_i) = \chi(g)^{a_i} f_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$. Si tel est le cas, les entiers $a_1,\dots,a_d$ sont appelés les *poids de Hodge-Tate* de V.

De manière équivalente, V est de Hodge-Tate si et seulement si le K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{K}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension d. La graduation de $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ étant stable par G_K, elle induit une graduation de $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{K}(V)$, et les poids de Hodge-Tate de V sont les opposés des degrés apparaissant dans la graduation de $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{K}(V)$.

Si L est une extension finie de K, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L}(V) = L \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{K}(V)$ et donc V est de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate $a_1,\dots,a_d$ en tant que représentation de G_K si et seulement si c'est le cas en tant que représentation de G_L.

Plus généralement, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, une E-représentation V de dimension d est dite de Hodge-Tate si elle est de Hodge-Tate en tant que $\mathbf{Q}_p$-représentation (de dimension $d[E:\mathbf{Q}_p]$), les poids de Hodge-Tate de V étant définis comme étant ceux de V vue comme $\mathbf{Q}_p$-représentation (il y en a donc $d[E:\mathbf{Q}_p]$). De manière équivalente, V est de Hodge-Tate si le $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} K$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{K}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = ((E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_E V)^{G_K}$ est libre de rang d. Notons que les gradués ne sont pas nécessairement de rang constant.

Proposition 5.1.1. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K. Soit L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$, soit $n \geqslant n(L)$ et soit $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n$. Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *la représentation V est de Hodge-Tate et ses poids de Hodge-Tate sont $a_1,\dots,a_d$;*
2. *l'élément γ agit de manière semi-simple sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ et ses valeurs propres sont $\chi(\gamma)^{a_1},\dots,\chi(\gamma)^{a_d}$.*

Démonstration. — Si V est de Hodge-Tate de poids de Hodge-Tate $a_1,\dots,a_d$, alors $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ possède une base $f_1,\dots,f_d$ sur $\mathbf{C}_p$ telle que l'on ait $g(f_i) = \chi(g)^{a_i} f_i$ si $g \in G_K$ et $1 \leqslant i \leqslant d$. Le L_n-espace vectoriel engendré par $f_1,\dots,f_d$ est alors fixe

par H_L (et même par H_K), stable par G_K et possède une base presque invariante par Γ_L, à savoir la base $f_1, \dots, f_d$. Par la proposition 4.1.2, on a donc $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) = L_n f_1 \oplus \cdots \oplus L_n f_d$ et comme $\gamma(f_i) = \chi(\gamma)^{a_i} f_i$, cela implique que γ est semi-simple et que ses valeurs propres sont $\chi(\gamma)^{a_1}, \dots, \chi(\gamma)^{a_d}$, ce qui démontre que (1) implique (2).

Réciproquement, si γ est semi-simple et ses valeurs propres sont $\chi(\gamma)^{a_1}, \dots, \chi(\gamma)^{a_d}$, et si $f_1, \dots, f_d$ est une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ sur L_n constituée de vecteurs propres (f_i étant vecteur propre pour la valeur propre $\chi(\gamma)^{a_i}$), alors $f_1, \dots, f_d$ est une base de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sur laquelle G_{L_n} agit par $g(f_i) = \chi(g)^{a_i} f_i$. La restriction de V à G_{L_n} est donc une représentation de Hodge-Tate de poids de Hodge-Tate $a_1, \dots, a_d$ et comme on l'a rappelé au début de ce paragraphe, cela implique (1). □

Corollaire 5.1.2. — *La représentation $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est de Hodge-Tate si et seulement si Θ_{Sen} est diagonalisable à valeurs propres entières; de plus, ces valeurs propres comptées avec leurs multiplicités sont les poids de Hodge-Tate de V.*

Démonstration. — Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(T)$ sur L_n qui est c_3-fixe par Γ_L. La matrice de U_γ dans cette base vérifie $\mathrm{val}_p(U_\gamma - 1) > 1/(p-1)$ (cf. la remarque 4.1.3), ce qui implique qu'une valeur propre α de U_γ vérifie $\mathrm{val}_p(\alpha - 1) > 1/(p-1)$. En particulier, si α est de la forme $y\chi(\gamma)^a$, avec $a \in \mathbf{Z}$ et y racine de l'unité, alors $y = 1$. Comme les poids de Hodge-Tate généralisés sont les $(\log_p \chi(\gamma))^{-1} \log_p \alpha$, où α décrit les valeurs propres de U_γ, cela permet de conclure. □

Théorème 5.1.3. — *Soient S une algèbre de Banach, $\mathscr{X}$ son spectre maximal, et V une S-représentation de dimension d de G_K. Si $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, alors l'ensemble $\mathscr{X}_{\mathrm{HT}}^{[a,b]}$ des $x \in \mathscr{X}$ tels que V_x soit de Hodge-Tate, à poids de Hodge-Tate appartenant à $[a,b]$, est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$.*

Démonstration. — Soient T un sous-$\mathscr{O}_S$-réseau de V stable par G_K, L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$, $n \geqslant n(L)$ et $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n$. Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ sur $S \otimes L_n$, soit U la matrice de γ dans cette base et soit I l'idéal de $S \otimes L_n$ engendré par les coordonnées de $\prod_{i=a}^{b}(U - \chi(\gamma)^i)$. Alors $\mathscr{X}_{\mathrm{HT}}^{[a,b]}$ est le sous-espace de $\mathscr{X}$ défini par l'idéal I d'après les propositions 4.1.2 et 5.1.1. □

Théorème 5.1.4. — *Si S est une algèbre de coefficients, si V est une S-representation de G_K et $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ tel que pour tout $x \in \mathscr{X}$, la représentation V_x est de Hodge-Tate, à poids de Hodge-Tate appartenant à $[a,b]$, alors :*

1. *le $S \otimes K$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) = ((S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_S V)^{G_K}$ est localement libre de rang d;*
2. *l'application $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_{S\otimes K} \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) \to (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_S V$ est un isomorphisme;*
3. *l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V_x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soient T un sous-$\mathscr{O}_S$-réseau de V stable par G_K, L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$, $n \geqslant n(L)$ et $\gamma \in \Gamma_L$

vérifiant $n(\gamma) = n$. La proposition 4.1.2 montre que $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ est un $S \otimes L_n$-module localement libre de rang d. Si $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$, posons :

$$y_j = \left(\prod_{\substack{i=a \\ i \neq j}}^{b} \frac{\gamma - \chi(\gamma)^i}{\chi(\gamma)^j - \chi(\gamma)^i} \right) y.$$

L'hypothèse selon laquelle pour tout $x \in \mathscr{X}$, V_x est à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ implique que pour tout $x \in \mathscr{X}$, l'application $y \mapsto y_j$ sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)$ est la projection sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)^{\Gamma_n = \chi^j}$ parallèlement à la somme directe des autres espaces propres. On a donc $y_j(x) \in \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)^{\Gamma_n = \chi^j}$ et $y(x) = \sum_{j=a}^{b} y_j(x)$, et le lemme 2.1.1 montre qu'on a alors $y_j \in \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n = \chi^j}$ et $y = \sum_{j=a}^{b} y_j$ ce qui fait que $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) = \oplus_{j=a}^{b} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n = \chi^j}$. Ceci montre que $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n = \chi^j}$ est un $S \otimes L_n$-module localement libre de type fini. Comme $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V) = \oplus_j \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n = \chi^j} t^{-j}$, on en déduit que $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V)$ est localement libre de type fini. La décomposition $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V) = \oplus_j \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n = \chi^j} t^{-j}$ et le (3) de la proposition 4.1.2 impliquent que l'application $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_{S \otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V) \to (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_S V$ est un isomorphisme, et en particulier que $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V)$ est localement libre de rang d ce qui montre le (1) et le (2) pour L_n. On redescend à K en utilisant la proposition 2.2.1. Le (3) suit du fait que $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V) = \oplus_j \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n = \chi^j} t^{-j}$ et du fait que par la proposition 4.1.2, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)_x = \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)$. □

5.2. Le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et les représentations de de Rham

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, une $\mathbf{Q}_p$-représentation V de dimension d est dite *de de Rham* (cf. [**13**]) si le K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension d. Si L est une extension finie de K, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V) = L \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)$ et donc V est de de Rham en tant que représentation de G_K si et seulement si c'est le cas en tant que représentation de G_L.

Plus généralement, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, une E-représentation V de dimension d est dite de de Rham si elle est de de Rham en tant que $\mathbf{Q}_p$-représentation (de dimension $d[E : \mathbf{Q}_p]$). De manière équivalente, V est de de Rham si le $K \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = ((E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_E V)^{G_K}$ est libre de rang d.

Il est utile de savoir caractériser les représentations de de Rham en terme du (φ, Γ)-module qui leur est associé.

Proposition 5.2.1. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, V une $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension d de G_K, T un réseau de V stable par G_K, L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$, n un entier $\geqslant n(L)$ et $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n$.*

Si $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ tel que V est de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *la représentation V est de de Rham ;*
2. *la restriction de V à G_{L_n} est de de Rham ;*
3. *le $L_n((t))$-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ contient un sous-$L_n[\![t]\!]$-réseau N vérifiant $(\gamma-1)\mathrm{N} \subset t\mathrm{N}$ et $t^{-a}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset \mathrm{N} \subset t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$;*
4. *on a $\prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset t^{b-a+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$.*

Démonstration. — L'équivalence entre (1) et (2) a été rappelée au début de ce paragraphe. Remarquons par ailleurs que le lemme 4.3.1 montre que $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)^{\gamma=1}$ et donc que si V est de de Rham, alors (3) est vrai avec $\mathrm{N} = L_n[\![t]\!] \otimes_{L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$. Si (3) est vrai, alors :

$$\begin{aligned}\prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) &\subset \prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot t^a\mathrm{N}\\ &\subset t^{2b-a+1}\mathrm{N}\\ &\subset t^{b-a+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V),\end{aligned}$$

ce qui montre (4). Le reste de la démonstration est consacré à remonter les implications.

Montrons tout d'abord que (3) implique (2) ; pour cela, considérons les opérateurs :

$$\alpha_k = \prod_{i=1}^{k}\frac{\gamma-\chi(\gamma)^i}{1-\chi(\gamma)^i}.$$

Si $k \geqslant 1$, alors α_k induit l'identité sur $\mathrm{N}/t\mathrm{N}$. Par ailleurs, $\alpha_k - \alpha_{k+1} = \frac{1-\gamma}{1-\chi(\gamma)^{k+1}}\alpha_k$ et une récurrence immédiate montre que $(1-\gamma)\alpha_k(x) \in t^{k+1}\mathrm{N}$ et $\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x) \in t^{k+1}\mathrm{N}$ si $x \in \mathrm{N}$. La suite de terme général $\alpha_k(x)$ converge donc dans $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ et la limite est invariante par γ, ce qui nous fournit une application L_n-linéaire ι_{dR} : $\mathrm{N}/t\mathrm{N} \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$ qui est injective car α_k induit l'identité sur $\mathrm{N}/t\mathrm{N}$ quel que soit $k \geqslant 1$, et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$ est donc de dimension $\leqslant d$ sur L_n. On en déduit le fait que V est de de Rham en tant que représentation de G_{L_n}, que ι_{dR} est un isomorphisme et que N est le sous-$L_n[\![t]\!]$-module de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ engendré par $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$, ce qui termine la démonstration du fait que (3) implique (2).

Pour montrer que (4) implique (3), considérons le sous-$L_n[\![t]\!]$-module N de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ engendré par les $t^{-k}\prod_{i\in[a,2b-a]-\{k\}}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot x$, avec $k \in [a,b]$ et $x \in \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$. Par construction, on a $\mathrm{N} \subset t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$. Comme les polynômes $\prod_{i\in[a,b]-\{k\}}(X-\chi(\gamma)^i)$, pour $k \in [a,b]$, sont premiers entre eux dans leur ensemble, le L_n-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ (cf. proposition 4.3.2) est engendré (comme L_n-espace vectoriel) par les images des $\prod_{i\in[a,b]-\{k\}}(\gamma-\chi(\gamma)^i)$ agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$. Comme par ailleurs on a supposé que V est de Hodge-Tate à poids dans $[a,b]$, $\prod_{i\in[b+1,2b-a]}(\gamma-\chi(\gamma)^i)$ est un isomorphisme de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ et donc $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ est engendré par les images des $\prod_{i\in[a,2b-a]-\{k\}}(\gamma-\chi(\gamma)^i)$ agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$. Ceci implique que $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ est engendré (comme $L_n[\![t]\!]$-module) par les images des $\prod_{i\in[a,2b-a]-\{k\}}(\gamma-$

$\chi(\gamma)^i$) agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ et donc que N contient $t^{-a}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$. Finalement, si $x \in \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ et $k \in [a,b]$, on a :

$$(\gamma-1)(t^{-k}\cdot\prod_{\substack{i=a\\ i\neq k}}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot x) = \chi(\gamma)^{-k}t^{-k}\prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot x$$
$$\in t^{b-a-k+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V),$$

et $t^{b-a-k+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset t^{-a+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset t\mathbf{N}$. □

La démonstration ci-dessus montre en particulier que si V est de de Rham, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) = L_n[\![t]\!] \otimes_{L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$ et donc $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V) = L_n(\!(t)\!) \otimes_{L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$.

5.3. Les périodes d'une famille de représentations de de Rham

Si V est une S-représentation de G_K et si M est une extension finie de K, on pose $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^M(V) = ((S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V)^{G_M}$.

Théorème 5.3.1. — *Soient S une algèbre de Banach, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, et V une S-représentation de dimension d de G_K. Si $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, alors l'ensemble $\mathscr{X}_{\mathrm{dR}}^{[a,b]}$ des $x \in \mathscr{X}$ tels que V_x soit de de Rham, à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$, est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$.*

Démonstration. — Comme une représentation de de Rham est a fortiori de Hodge-Tate, on peut, quitte à remplacer $\mathscr{X}$ par $\mathscr{X}_{\mathrm{HT}}^{[a,b]}$, supposer que V_x est de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$ (ceci grâce au théorème 5.1.3).

Soit T un $\mathscr{O}_S$-réseau de V stable par G_K et soient L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agit trivialement sur $T/12pT$, $s \geqslant s(V)$, $n \geqslant \max(n(L), n(s))$, et $e_1, \ldots, e_d$ une base de $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ sur $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}$. Alors $e_1, \ldots, e_d$ est aussi une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ sur $S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]$ et, si $x \in \mathscr{X}$, alors $e_1(x), \ldots, e_d(x)$ est une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V_x)$ sur $E_x \otimes L_n[\![t]\!]$. Ceci permet d'écrire un élément y de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ sous la forme $\sum_{i=1}^d(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(y)t^j)e_i$, où les $a_{i,j}$ sont des éléments de $S \otimes L_n$. Soit $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n$ et soit $\lambda : \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ l'opérateur $\lambda = \prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma - \chi(\gamma)^i)$. D'après le (4) de la proposition 5.2.1, si $x \in \mathscr{X}$, alors V_x est de de Rham si et seulement si $\lambda(t^k e_\ell(x)) \in t^{b-a+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V_x)$ quels que soient $1 \leqslant \ell \leqslant d$ et $0 \leqslant k \leqslant b-a$. Il résulte de ce qui précède que V_x est de de Rham si et seulement si $a_{i,j}(\lambda(t^k e_\ell))(x) = 0$ quel que soient $1 \leqslant i, \ell \leqslant d$ et $0 \leqslant j, k \leqslant b-a+1$ et donc que $\mathscr{X}_{\mathrm{dR}}^{[a,b]}$ est le sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$ défini par l'idéal de S engendré par les coordonnées (selon une base de L_n sur $\mathbf{Q}_p$) des $a_{i,j}(\lambda(t^k e_\ell))$, pour $1 \leqslant i, \ell \leqslant d$ et $0 \leqslant j, k \leqslant b-a+1$. □

Théorème 5.3.2. — *Soient S une algèbre de coefficients, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ et V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$. Alors :*

1. *le $S \otimes K$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)$ est localement libre de rang d ;*
2. *on a $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{S\otimes K} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V$;*

3. *si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V_x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Pour $k \geqslant 0$, considérons l'opérateur :

$$\beta_k = \prod_{\substack{i=a-b \\ i\neq 0}}^{b-a+k} \frac{\gamma - \chi(\gamma)^i}{1-\chi(\gamma)^i} : t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \to t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V).$$

On voit que $(1-\gamma)\beta_k$ envoie $t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ dans $t^{1-a+k}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ et donc que $\beta_{k+1}-\beta_k$ envoie aussi $t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ dans $t^{1-a+k}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ ce qui fait que si $y \in t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$, alors quand $k \to \infty$, la suite des $\beta_k(y)$ converge. On en déduit une application $\beta : t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \to t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ qui vérifie $(1-\gamma)\beta = 0$ et qui est l'identité sur $(t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V))^{\gamma=1}$. Les calculs de la proposition 5.2.1 montrent que si $x \in \mathscr{X}$, alors β n'est autre que la projection $t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V_x) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V_x)$. Soit M l'image de β. Remarquons que l'on a une injection $M \to t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t^{1-a}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ qui fait que l'on peut écrire le $S\otimes L_n$-module libre de rang fini $W = t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t^{1-a}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ sous la forme $W = M \oplus \ker\beta$. Ceci montre que M est projectif de type fini. Le lemme 4.3.1 montre par ailleurs que l'on a $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$. Si $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$, il existe donc $b(y) \geqslant b$ tel que $y \in t^{-b(y)}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$, mais l'image $\overline{y}$ de y dans le $S\otimes L_n$-module libre $t^{-b(y)}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ vérifie $\overline{y}(x) = 0$ pour tout x par la proposition 5.2.1 et donc $\overline{y} = 0$ par le lemme 2.1.1. On en déduit que $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) = (t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V))^{\gamma=1}$ et donc finalement que $M = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$. On en déduit en particulier que l'application $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V_x)$ est surjective.

On a alors une application $(S\widehat{\otimes}L_n(\!(t)\!)) \otimes_{S\otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ et nous allons montrer qu'elle est surjective. Si $y \in t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$, soit $z_0 = y - \sum_{j=0}^{b} t^{-j}\beta(t^j y)$ et pour $i \geqslant 0$, soit $z_{i+1} = (z_i - \beta(z_i))/t$. Posons $w = \sum_{j=0}^{b} t^{-j}\beta(t^j y) + \sum_{i\geqslant 1} t^i \beta(z_i)$. Un petit calcul montre que $w(x)$ est l'écriture de $y(x)$ selon la décomposition :

$$t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V_x) \subset L_n(\!(t)\!) \otimes_{L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V_x),$$

et donc que $y(x) = w(x)$ pour tout x ce qui fait que par le lemme 2.1.1, on a $y = w$ et donc :

$$t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset (S\widehat{\otimes}L_n(\!(t)\!)) \otimes_{S\otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V),$$

ce qui fait que l'application que l'on voulait est bien surjective. Le lemme 4.3.1 montre alors que l'on a un isomorphisme $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{S\otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V$. En particulier, $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$ est de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V_x)$ est un isomorphisme. Ceci montre les points (1), (2) et (3) avec L_n à la place de K. Pour passer de L_n à K, il suffit d'utiliser la proposition 2.2.1. □

On dit qu'une représentation qui vérifie les hypothèses du théorème 5.3.2 est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$.

Remarque 5.3.3. — L'hypothèse que $\mathrm{rad}(S) = 0$ n'est pas superflue dans les théorèmes 5.1.4 et 5.3.2. Si $S = \mathbf{Q}_p[Y]/Y^2$ et V est le caractère $g \mapsto 1 + \log_p \chi(g)Y$, alors V_x est

de de Rham en tout point de $\mathscr{X}$ (le seul point étant donné par $Y = 0$, où V est triviale) mais $\Theta_{\mathrm{Sen}} = Y$ sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ ce qui fait que $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) = Y \cdot V$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = Y \cdot V$.

6. Représentations semi-stables et monodromie p-adique

Dans ce chapitre, nous démontrons une version en famille du théorème de monodromie p-adique et comme application, nous démontrons le théorème C de l'introduction. La démonstration est fortement inspirée de celle qui est donnée dans [**3**].

6.1. Construction de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$

Dans tout ce chapitre, on suppose que S est une algèbre de coefficients. On se donne un corps E (contenant $\mathbf{Q}_p$) complet pour une valuation discrète, à corps résiduel k_E parfait (ce qui fait que E est une extension finie de $W(k_E)[1/p]$), et une application continue $S \to E$. Si V est une S-représentation de G_K, alors cette application permet de considérer la E-représentation $V_E = E \otimes_S V$. On suppose dans tout ce chapitre que V est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire qu'elle vérifie les hypothèses du théorème 5.3.2.

Soit $\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$ l'anneau construit dans [**3**, §2.6], c'est le complété de $\mathbf{B}^{\dagger,s}_K$ pour sa topologie de Fréchet. Si F est une extension finie de E, soit $\mathscr{R}^{\dagger,s}_F$ l'anneau des fonctions $f(X)$ à coefficients dans F et vérifiant la condition de convergence habituelle (celle de [**3**, proposition 2.31]). Il existe alors un nombre fini d'extensions finies E_i de E telles que l'on a une décomposition d'anneaux $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} \simeq \oplus_i \mathscr{R}^{\dagger,s}_{E_i}$. Rappelons (cf. [**18**, §2] par exemple) que $\mathscr{R}^{\dagger,s}_F$ est un anneau de Bezout : en particulier les modules localement libres de type fini sont libres et un $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$-module est donc localement libre de type fini si et seulement si chacun des facteurs est libre de rang fini. Rappelons par ailleurs que $\mathscr{R}^{\dagger,s}_F$ est aussi une algèbre de Fréchet-Stein (cf. [**24**, §3]), ce qui fait qu'un sous-module fermé d'un module libre de rang fini est lui-même libre de rang fini. On en déduit la même propriété pour $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$.

Si V est une S-représentation de G_K, alors on pose :

$$\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}) \otimes_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_K} \mathrm{D}^{\dagger,s}_K(V),$$

ce qui fait (par le théorème 4.2.9) que $\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V)$ est un $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$-module localement libre de rang d. On pose par ailleurs :

$$\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E) = (E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}) \otimes_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_K} \mathrm{D}^{\dagger,s}_K(V).$$

Enfin, si $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ est proche de 1, alors $\log\gamma/\log_p \chi(\gamma)$ est bien défini et ne dépend pas de γ et on le note ∇.

Proposition 6.1.1. — *Soit V une S-représentation de G_K qui est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a, b]$. Si $N_s(V_E) = \{y \in t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ tels que $\iota_n(y) \in (E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$ pour tout $n \geqslant n(s)\}$, alors :*

1. *le $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$-module $N_s(V_E)$ est libre de rang d et stable par G_K ;*

2. *pour tout $n \geqslant n(s)$, on a :*

$$(E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes^{\iota_n}_{E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}} N_s(V_E) = (E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Si l'on pose $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) = (E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}) \otimes_{E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}} N_s(V_E)$, alors :

3. *le $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est libre de rang d, stable par G_K et ne dépend pas du choix de s ;*
4. *on a $\varphi^*(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)) = \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ et $\nabla(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \subset t \cdot \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$.*

Afin de montrer cette proposition, nous avons besoin du lemme ci-dessous.

Lemme 6.1.2. — *Si V est comme ci-dessus, alors :*

$$t^{-a}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V) \subset (S\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V) \subset t^{-b}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V).$$

Démonstration. — On a $(S\widehat{\otimes}K_n(\!(t)\!)) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V) = (S\widehat{\otimes}K_n(\!(t)\!)) \otimes_{S\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]} \mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$ et on peut donc écrire un élément de $\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$ dans $(S\widehat{\otimes}K_n(\!(t)\!)) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$ ou bien un élément de $\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $(S\widehat{\otimes}K_n(\!(t)\!)) \otimes_{S\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]} \mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$. L'analogue du lemme pour des $\mathbf{Q}_p$-représentations étant vrai, on en déduit le lemme en évaluant les coefficients des écritures des éléments de $\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$ et de $\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$. □

Démonstration de la proposition 6.1.1. — Les applications $\iota_n : E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} \to E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]$ sont continues ce qui fait que $N_s(V_E)$ est un sous-module fermé de $t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)$, et il est donc (au vu des rappels que l'on a faits plus haut) localement libre de type fini. Le lemme 6.1.2 montre que $t^{-a}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E) \subset N_s(V_E) \subset t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ ce qui fait que $N_s(V_E)$ est libre de rang d. Le fait qu'il est stable sous l'action de G_K suit du fait que les ι_n commutent à cette action. Ceci montre le (1).

Montrons à présent le (2). On note $\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V_E) = (E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]} \mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$. Par le lemme 6.1.2, on a une inclusion :

$$(E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V) \subset t^{-b}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V_E).$$

Soit $w \geqslant \max(0,-a)$; si $y \in (E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$, alors il existe $y_0 \in t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ tel que :

$$\iota_n(y_0) - y \in t^w((E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)).$$

Si $t_{n,w}$ désigne la fonction construite dans [**4**, lemme I.2.1], alors :

$$\iota_m(y_0 t_{n,w}) \in t^w((E\widehat{\otimes}K_m[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_m} \mathrm{D}^{K_m}_{\mathrm{dR}}(V))$$

pour tout $m \neq n$ et :

$$\iota_n(y_0 t_{n,w}) - y \in t^w((E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)),$$

ce qui fait que $y_0 t_{n,w} \in N_s(V_E)$. On en déduit que pour tout $w \gg 0$, l'application de $N_s(V_E)$ dans $(E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]/t^w) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$ est surjective. Ceci montre le (2).

On déduit du (1) et du (2) que $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est un $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d et stable par G_K. Par ailleurs, si $y \in N_s(V_E)$, alors $\iota_n \circ \nabla(y) \in t \cdot \iota_n(N_s(V_E))$ pour tout n d'où $\nabla(N_s(V_E)) \subset t \cdot N_s(V_E)$ et donc $\nabla(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \subset t \cdot \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$. Enfin si M et N sont deux $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-modules libres de rang d inclus dans $t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ tels que $\nabla(M) \subset tM$ et $\nabla(N) \subset tN$, alors $M = N$ (appliquer le corollaire 5.17 de [**3**] à chacune des composantes de M et N selon la décomposition de $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ en produit d'anneaux de Robba). On en déduit le (3).

Pour terminer la démonstration du (4), remarquons que $\varphi(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ car $\varphi(N_s(V_E)) \subset N_{ps}(V_E)$ et que $\nabla(\varphi^*\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \subset t \cdot \varphi^*\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ ce qui permet de conclure par unicité que $\varphi^*\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) = \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$. □

On pose $\partial = t^{-1}\nabla$ ce qui fait que $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est stable par l'opérateur différentiel ∂.

Remarque 6.1.3. — La construction de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ implique que l'on a $t^{-a}\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V_E) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) \subset t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ et donc en particulier que $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)[1/t] = \mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V_E)[1/t]$.

6.2. Monodromie p-adique

Soit K_0' l'extension maximale non ramifiée de K_0 contenue dans K_∞ ce qui fait que $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ s'identifie à un anneau de séries formelles à coefficients dans K_0'. Quitte à remplacer E par une extension finie, on peut supposer que $K_0' \subset E$. Dans ce cas, $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \simeq \mathscr{R}_E^f$ où $f = [K_0' : \mathbf{Q}_p]$ et l'application φ^f stabilise chaque facteur. On en déduit pour le $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ construit au paragraphe précédent une décomposition correspondante $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) \simeq \oplus_{i=0}^{f-1}\mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ où chaque facteur est stable par G_K (et donc par ∂) et où $\varphi^*(\mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \simeq \mathrm{N}^{(i+1)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ en prenant les indices modulo f, ce qui fait que $(\varphi^f)^*(\mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \simeq \mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$. Chaque $\mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est donc une équation différentielle p-adique munie d'une structure de Frobenius.

Proposition 6.2.1. — *Il existe une extension finie $\mathscr{R}_F/\mathscr{R}_E$ correspondant à une extension finie de $k_E(\!(X)\!)$ via le corps de normes telle que $\mathscr{R}_F \otimes_{\mathscr{R}_E} \mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est unipotente pour tout i.*

Démonstration. — C'est le théorème de monodromie p-adique (voir le théorème 0.1.1 de [**1**] ou bien le corollaire de 5.0-23 de [**23**]). Remarquons qu'on ne peut pas appliquer le théorème 1.1 de [**18**] car celui-ci impose au Frobenius d'être absolu, ni appliquer la variante du théorème de filtration démontrée dans [**19**] car celle-ci n'implique pas de manière évidente le théorème de monodromie p-adique. □

La plupart des extensions $\mathscr{R}_F/\mathscr{R}_E$ ne sont pas une composante d'une extension de la forme $F\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L$ où F est une extension finie de E et L est une extension finie de K, mais dans la proposition 6.2.1 ci-dessus, c'est en fait le cas.

Proposition 6.2.2. — *Il existe une extension finie F de E et une extension finie L de K telles que $(F\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L) \otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est unipotente.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{R}_F$ l'extension finie de $\mathscr{R}_E$ fournie par la proposition 6.2.1 ; quitte à étendre les scalaires et à élargir F, on peut supposer d'une part que $\mathscr{R}_F^{\partial=0} = F$ et d'autre part que si l'on pose $\mathrm{Sol}_F(V_E) = (\mathscr{R}_F[\log(X)] \otimes_{\mathscr{R}_E} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{\partial=0}$, alors :

$$\mathrm{Sol}_F(V_E) = (\mathscr{R}_F[\log(X)] \otimes_{\mathscr{R}_E} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{G_F}.$$

Le F-espace vectoriel $\mathrm{Sol}_F(V_E)$ est muni d'une action E-linéaire de $\mathrm{Gal}(F/E)$ et un résultat classique (un cas particulier de la proposition 2.2.1) nous dit que $\mathrm{Sol}_F(V_E) = F \otimes_E \mathrm{Sol}_F(V_E)^{\mathrm{Gal}(F/E)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sol}_F(V_E)^{\mathrm{Gal}(F/E)} &= (\mathscr{R}_F[\log(X)] \otimes_{\mathscr{R}_E} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{G_E} \\ &\subset (\mathscr{R}_F[\log(X)] \otimes_{\mathscr{R}_E} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}} \\ &= \mathscr{R}_F^{G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}}[\log(X)] \otimes_{\mathscr{R}_E} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E),\end{aligned}$$

puisque $G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}$ agit trivialement sur $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$.

L'anneau $\mathscr{R}_F^{G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}}$ correspond, via le corps de normes, à la plus grande extension de $k_E((X))$ incluse d'une part dans $k_E((X)) \cdot \overline{\mathbf{F}}_p((X))^{\mathrm{sep}}$ et d'autre part dans l'extension finie de $k_E((X))$ fournie par la proposition 6.2.1, et il existe donc une extension finie L de K telle que $\mathscr{R}_F^{G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}} \subset F\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L$. □

Le groupe de Galois G_F agit sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\overline{\mathbf{Q}}_p^{G_F}$ est un corps de valuation discrète ce qui fait que l'image de l'application $G_F \to G_{\mathbf{Q}_p}$ contient le sous-groupe d'inertie d'une extension finie de K et quitte à élargir le corps L fourni par la proposition précédente, on peut donc supposer que l'image de G_F contient I_L.

Corollaire 6.2.3. — *Il existe une extension finie L de K telle que :*

$$(E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)] \otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{I_L}$$

est un $E \otimes L_0'$-module libre de rang d et on a alors :

$$\begin{aligned}E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)] \otimes_{E\otimes L_0'} (E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)] \otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{I_L} \\ = E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)] \otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E).\end{aligned}$$

On fixe cette extension L dans la suite de ce paragraphe.

Soit $[\widetilde{p}]$ l'élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ dont on utilise un logarithme pour plonger $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Rappelons (cf. [**3**, §2.4] par exemple) que $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[1/t, \log(X)] = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[1/t, \log[\widetilde{p}]]$.

Proposition 6.2.4. — *Le $E\widehat{\otimes}\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-module $((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L}$ est libre de rang d et l'inclusion :*

$$((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L} \subset ((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La démonstration suit de près celle de la proposition 3.4 de [**3**], à laquelle nous renvoyons pour plus de détails. Posons :

$$D(V) = ((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L}$$
$$D_r(V) = ((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L}.$$

On a $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[1/t, \log[\widetilde{p}]])^{I_L} = \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ et :

$$E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)] \otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) \subset (E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E$$

ce qui fait que $D(V)$ est un $E\widehat{\otimes}\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-module localement libre de rangs locaux $\geqslant d$. Si $n \geqslant n(r)$, alors l'application $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}[1/t, \log[\widetilde{p}]] \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est injective par la proposition 2.25 de [**3**] et envoie $D_r(V)$ dans $((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_E V_E)^{I_L}$ qui est un $E\widehat{\otimes}\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-module libre de rang d, ce qui fait que $D_r(V)$ est localement libre de rangs locaux $\leqslant d$. Comme $D(V) = \cup_{r>0} D_r(V)$, on en déduit que $D(V)$ est libre de rang d.

Passons maintenant à la deuxième assertion. Le Frobenius E-linéaire φ commute à Galois et définit un isomorphisme de $D(V)$ dans lui-même. Le résultat suit alors, après qu'on a choisi une base de V et une base de $D(V)$, de l'analogue E-linéaire de la proposition 3.2 de régularisation par le Frobenius de [**3**] (qui se démontre exactement de la même manière qu'en $\mathbf{Q}_p$-linéaire). Le dernier isomorphisme est alors évident. □

Corollaire 6.2.5. — *Le $E\widehat{\otimes}\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-module $((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{st}}) \otimes_E V_E)^{I_L}$ est libre de rang d et l'application :*

$$L \otimes_{L_0} ((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{st}}) \otimes_E V_E)^{I_L} \to ((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_E V_E)^{I_L}$$

est un isomorphisme.

6.3. Application aux familles de représentations de de Rham

Soit $\mathbf{B}^{+,h}_{\mathrm{st}} = \oplus_{i=0}^{h} \mathbf{B}^{+}_{\max} \log([\widetilde{p}])^i$ ce qui fait que $\mathbf{B}^{+,h}_{\mathrm{st}}$ est le noyau de N^{h+1} sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ (ici N est l'opérateur de monodromie sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$).

Lemme 6.3.1. — *Soit S une algèbre de coefficients et $x : S \to E$ un plongement isométrique dans une algèbre de Banach. Si $a \in S\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ est tel que $x(a) \in E\widehat{\otimes}(L \otimes_{L_0} \mathbf{B}^{+,h}_{\mathrm{st}})$, alors $a \in S\widehat{\otimes}(L \otimes_{L_0} \mathbf{B}^{+,h}_{\mathrm{st}})$.*

Démonstration. — Rappelons que par [**9**, §8.4], il existe un homéomorphisme d'espaces de Fréchet $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{C}_p[\![X]\!]$ tel que $L \otimes_{L_0} \mathbf{B}^{+}_{\max}$ s'identifie à $\mathbf{C}_p\{X\}$ et $L \otimes_{L_0} \mathbf{B}^{+,h}_{\mathrm{st}}$ à $\oplus_{i=0}^{h} \mathbf{C}_p\{X\} \log(1+X)^i$. On se ramène donc à montrer que si $a \in S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p[\![X]\!]$ est tel que $x(a) \in E\widehat{\otimes}(\oplus_{i=0}^{h} \mathbf{C}_p\{X\} \log(1+X)^i)$, alors $a \in S\widehat{\otimes}(\oplus_{i=0}^{h} \mathbf{C}_p\{X\} \log(1+X)^i)$.

Etant donné que l'application $S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p \to E\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p$ est un plongement isométrique et que $S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p[\![X]\!] = (S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p)[\![X]\!]$ et $S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p\{X\} = (S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p)\{X\}$, on se ramène à montrer que si A est un espace de Banach et B un sous-espace fermé de A, et si $g(X) \in \oplus_{i=0}^{h} A\{X\} \log(1+X)^i$ vérifie $g(X) \in B[\![X]\!]$, alors $g(X) \in \oplus_{i=0}^{h} B\{X\} \log(1+X)^i$.

Pour cela, considérons l'application $A\{X\} \to \prod_{n\geqslant 0} A \otimes \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$ qui à $f(X)$ associe $(f(\zeta_{p^n}-1))_{n\geqslant 0}$. Le théorème de préparation de Weierstrass montre que cette

application est une isométrie sur son image, et donc qu'il existe des formules universelles permettant de reconstruire les coefficients f_j de $f(X) = \sum_{j \geqslant 0} f_j X^j$ à partir de $(f(\zeta_{p^n} - 1))_{n \geqslant 0}$. En particulier, si $f(\zeta_{p^n} - 1) \in B \otimes \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$ pour tout $n \geqslant 0$, alors $f(X) \in B\{X\}$. Si $g(X) = f^{(0)}(X) + f^{(1)}(X)\log(1+X) + \cdots + f^{(h)}(X)\log(1+X)^h \in B[\![X]\!]$, alors $g(X) \in A[\![X]\!]_{\mathrm{hol}}$ (les séries qui convergent sur le disque unité ouvert), et $g(\zeta_{p^n} - 1) = f^{(0)}(\zeta_{p^n} - 1)$ pour tout $n \geqslant 0$ ce qui fait que si $g(X) \in B[\![X]\!]$, alors $f^{(0)}(X) \in B[\![X]\!]$ aussi et donc à $B\{X\}$. En considérant $(g(X) - f^{(0)}(X))/\log(1+X)$, on montre par récurrence que chaque $f^{(i)}(X) \in B\{X\}$. □

Théorème 6.3.2. — *Soient S une algèbre affinoïde réduite, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ et V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$. Il existe alors une extension finie L de K telle que le $S \otimes L_0$-module $\mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V)$ est localement libre de rang d et vérifie $(S \otimes L) \otimes_{S \otimes L_0} \mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V) = \mathrm{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)$.*

Si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V) \to \mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V_x)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Par la proposition 2.1.2, on peut supposer que S est muni de la valuation spectrale. Par le corollaire 2.1.4, il existe $m \geqslant 1$ et m corps $E_1, \ldots, E_m$ complets pour des valuations discrètes tels que l'on ait un plongement isométrique $S \to \oplus_{i=1}^m E_i$. Quitte à agrandir chacun des E_i, on peut supposer qu'ils sont à corps résiduels parfaits.

Par le corollaire 6.2.5, il existe alors une extension finie L de K telle que pour chaque i on a un isomorphisme :

$$L \otimes_{L_0} ((E_i \widehat{\otimes} \mathbf{B}_{\mathrm{st}}) \otimes_{E_i} V_{E_i})^{I_L} \to ((E_i \widehat{\otimes} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{E_i} V_{E_i})^{I_L}.$$

Comme une algèbre affinoïde est de Jacobson, alors son radical de Jacobson est nul si elle est réduite et on peut appliquer le théorème 5.3.2 qui nous dit que $\mathrm{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)$ est un $S \otimes L$-module localement libre de rang d. On a une application injective $\mathrm{D}^L_{\mathrm{dR}}(V) \to ((E \widehat{\otimes} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V)^{I_L}$ avec $E = \oplus_{i=1}^m E_i$ et si $y \in \mathrm{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)$, on peut écrire $y = \sum_{j=1}^d y_j \otimes v_j$ avec $y_j \in S \widehat{\otimes} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. L'isomorphisme ci-dessus implique que l'image de y_j dans $E \widehat{\otimes} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est en fait dans $E \widehat{\otimes} (L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}})$. Le lemme 6.3.1 nous dit alors que $y_j \in S \widehat{\otimes} (L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}})$ et donc que :

$$\mathrm{D}^L_{\mathrm{dR}}(V) = (S \widehat{\otimes} (L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}}) \otimes_S V)^{G_L} = L \otimes_{L_0} \mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V).$$

On en déduit que $\mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V)$ est localement libre de rang d.

Montrons maintenant le deuxième point. Comme l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}^L_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{D}^L_{\mathrm{dR}}(V_x)$ est un isomorphisme, l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V) \to \mathrm{D}^L_{\mathrm{st}}(V_x)$ est injective et c'est un isomorphisme pour des raisons de dimension : le terme de gauche est de rang d sur $S/\mathfrak{m}_x$ alors que le terme de droite est de rang $\leqslant d$. □

Corollaire 6.3.3. — *Soient S une algèbre affinoïde réduite, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$ et soit L l'extension finie de K fournie par le théorème 6.3.2. On a alors :*

1. *si τ est un type du groupe d'inertie $I(L/K)$, alors l'ensemble $\mathscr{X}(\tau)$ des x tels que le type de V_x est τ, est une réunion de composantes Zariski connexes de $\mathscr{X}$;*
2. *si $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ ou $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ dénote l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ où V_x est cristalline ou semi-stable, alors $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ et $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ sont des sous-espaces S-analytiques de $\mathscr{X}$;*
3. *si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V)$ est un $S \otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V_x)$ est un isomorphisme ;*
4. *si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V)$ est un $S \otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V_x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Pour montrer le (1), constatons que V_x est de type τ si et seulement si $\mathrm{Tr}(g \mid \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x)) = \mathrm{Tr}(\tau(g))$ pour tout $g \in I(L/K)$ ce qui définit un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$. Comme on a $\mathscr{X} = \coprod_\tau \mathscr{X}(\tau)$ et qu'il n'y a qu'un nombre fini de τ possibles, $\mathscr{X}(\tau)$ est aussi ouvert. Ceci montre le (1).

En appliquant le (1) au type trivial, on trouve que $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ est un sous-espace S-analytique et $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ est le sous-espace de $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ défini par l'équation $N \mid_{\mathrm{D_{st}}(V_x)} = 0$ et est donc lui aussi un sous-espace S-analytique. Ceci montre le (2).

Montrons à présent le (3). Pour tout $x \in \mathscr{X}$, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x) = L_0 \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V_x)$; en particulier, si $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x)$ et $g \in I(L/K)$, alors pour tout $x \in \mathscr{X}$ on a $(gy - y)(x) = 0$ ce qui fait que $gy = y$ par le lemme 2.1.1. On en déduit que $I(L/K)$ agit trivialement sur $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V)$ et on peut alors appliquer la proposition 2.2.1 qui nous donne que $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V) = (S \otimes L_0) \otimes_{S \otimes K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V)$, et que $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V)$ est un $S \otimes K_0$-module localement libre de rang d.

Enfin le (4) résulte directement du (3) puisque $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)^{N=0}$. □

Remarque 6.3.4. — Le théorème 6.3.2 et son corollaire 6.3.3 sont toujours valables si l'on suppose seulement que S est une algèbre de coefficients dont le radical de Jacobson est nul et telle que la frontière de Shilov du spectre de Berkovich de S est finie.

7. Un théorème de Wintenberger

Dans ce dernier chapitre, nous utilisons les résultats du paragraphe 4.1 pour montrer le théorème D de l'introduction.

7.1. Continuité des périodes de Sen

Dans tout ce chapitre, on suppose toujours que K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K, soit $\Theta_V = \Theta_{\mathrm{Sen},V}$ l'endomorphisme de Sen associé à V (cf. §4.1) et $P_{\mathrm{Sen},V}(X) \in K[X]$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de Sen. On dit que deux représentations V_1 et V_2 sont congrues modulo p^k si elles admettent deux $\mathbf{Z}_p$-réseaux T_1 et T_2 tels que $T_1/p^k \simeq T_2/p^k$. L'objet de ce chapitre est de montrer le résultat suivant :

Théorème 7.1.1. — *Il existe une constante $c(d,K)$ telle que si V_1 et V_2 sont deux représentations de dimension d de G_K qui sont congrues modulo p^k, alors les polynômes P_{Sen,V_1} et P_{Sen,V_2} sont congrus modulo $p^{k-c(d,K)}$.*

Un corollaire immédiat (en utilisant la théorie des polygones de Newton) de ce théorème est le résultat suivant, dû à Wintenberger (cf. [**29**]) :

Corollaire 7.1.2. — *Il existe une constante $c(d,K)$ telle que si V_1 et V_2 sont deux représentations de Hodge-Tate de dimension d de G_K, qui sont congrues modulo p^k, alors leurs poids de Hodge-Tate sont congrus modulo $p^{\lfloor k/d \rfloor - c(d,K)}$.*

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème 7.1.1 ci-dessus. Comme $K/\mathbf{Q}_p$ est finie, il existe une extension finie L de K telle que si T est n'importe quelle $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K de dimension d, alors la restriction de T à G_L est triviale modulo $12p$ (ceci suit du fait que K n'a qu'un nombre fini d'extensions d'un degré donné). Quitte à remplacer L par une extension finie convenable, on peut de plus supposer que $L = L_{n(L)}$.

On peut en particulier appliquer la proposition 4.1.2 pour montrer qu'il existe une base $e_1, \dots, e_d$ de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ telle que le $\mathscr{O}_L$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(T)$ engendré par les e_i est fixe par H_L, stable par G_K, et tel que si $\gamma \in \Gamma_L$, alors $\mathrm{val}_p(\mathrm{Mat}(\gamma) - \mathrm{Id}) > c_3$.

Rappelons que pour tout $\gamma \in \Gamma_L \setminus \{1\}$, l'opérateur $\Theta_V : \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ défini par $\Theta_V = \log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$ ne dépend pas du choix de γ et que son polynôme caractéristique appartient à $K[X]$.

Plaçons-nous dans la situation du théorème 7.1.1 ci-dessus et choisissons t_i^1 et t_i^2 deux bases de T_1 et T_2 dans lesquelles les matrices $G_1(g)$ et $G_2(g)$ de l'action de tout $g \in G_K$ sont congruentes modulo p^k. Soient M_1 et M_2 les matrices selon les bases t_i^1 et t_i^2 des bases e_i^1 et e_i^2 dont on a rappelé la construction ci-dessus. On a en particulier : $h(M_i)G_i(h) = M_i$ pour tout $h \in H_L$ et il existe $N_i(g) \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_L)$ telles que $g(M_i)G_i(g) = N_i(g)M_i$ si $g \in G_K$ avec $\mathrm{val}_p(N_i(g) - \mathrm{Id}) > c_3$ si $\overline{g} \in \Gamma_L$.

Lemme 7.1.3. — *Il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_L)$ telle que $MM_1 = M_2 \mod p^{k-2}$.*

En d'autres termes les matrices M_1 et M_2 sont congrues quitte à faire un changement de base.

Démonstration. — Posons $B = M_1 M_2^{-1} \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$. Le fait que si $h \in H_L$, alors $G_1(h) = G_2(h) \mod p^k$ et que $G_i(h) = h(M_i^{-1})M_i$ implique que $h(B) = B \mod p^k$. On sait que l'application $\mathscr{O}_{L_\infty}/p^k \to (\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}/p^k)^{H_L}$ est presque surjective, en ce sens que son conoyau est tué par toute puissance de p. Il existe donc une matrice $B_0 \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_{L_\infty})$ telle que $B = B_0 + p^{k-1}B_1$. On a d'autre part :

$$\begin{aligned} g(B) &= g(M_1 M_2^{-1}) \\ &= N_1(g)M_1 G_1(g^{-1})G_2(g)M_2^{-1}N_2(g^{-1}) \\ &= N_1(g)BN_2(g^{-1}) \mod p^k \end{aligned}$$

ce qui fait que $g(B_0) = N_1(g)B_0N_2(g^{-1}) + p^{k-1}B_2$ avec $B_2 \in \mathrm{M}_d(\mathscr{O}_{L_\infty})$. Comme on a supposé que $L = L_{n(L)}$, on dispose d'une application $R_L : L_\infty \to L$ qui satisfait (TS2) et en particulier $R_L(\mathscr{O}_{L_\infty}) \subset p^{-c_2}\mathscr{O}_L$, ce qui fait que si $C = B_0 - R_L(B_0)$, alors $g(C) = N_1(g)CN_2(g^{-1}) + p^{k-1-c_2}R_L(B_2)$.

Supposons maintenant que $\overline{g} \in \Gamma_L$. On a alors $v_p(g(C) - C) \geqslant \inf(v_p(C) + c_3, k - 1 - c_2)$ ce qui fait que si $v(C) < k - 1 - c_2 - c_3$, on a $v_p(g(C) - C) > v_p(C) + c_3$ en contradiction avec (TS3). Ceci montre que $v(C) \geqslant k - 1 - c_2 - c_3$ et donc que si l'on pose $M = B_0 - C$ alors $M \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_L)$ et $M - B \in p^{k-2}\mathrm{M}_d(\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$ ce qui montre le lemme. □

On suppose à présent qu'on a fait le changement de base nécessaire et que $M_1 = M_2 \mod p^{k-2}$. En particulier, si $\overline{g} \in \Gamma_L^p$ et comme $c_3 \geqslant 1/(p-1) > 1/p$, on a $N_1(g) = N_2(g) = \mathrm{Id} \mod p$ et $N_1(g) = N_2(g) \mod p^{k-2}$.

Lemme 7.1.4. — *Si N_1 et N_2 sont deux matrices telles que $N_1 = N_2 = \mathrm{Id} \mod p$ et $N_1 = N_2 \mod p^{k-2}$ et si $m \geqslant 0$, alors $N_1^{p^m} = N_2^{p^m} \mod p^{k+m-2}$.*

Démonstration. — Une récurrence facile montre qu'il suffit de démontrer le lemme pour $m = 1$, c'est-à-dire que $N_1^p = N_2^p \mod p^{k-1}$. Si l'on écrit $N_2 = N_1 + p^{k-2}R$, on voit que

$$N_2^p - N_1^p = p^{k-2}\sum_{i=0}^{p-1} N_1^i R N_1^{p-1-i} \mod p^{2(k-2)}$$

et si $N_1 = \mathrm{Id} \mod p$, alors on voit que $\sum_{i=0}^{p-1} N_1^i R N_1^{p-1-i}$ est divisible par p ce qui implique que $N_1^p = N_2^p \mod p^{k-1}$. □

Démonstration du théorème 7.1.1. — Si $\overline{g} \in \Gamma_L^p$ alors d'une part g agit linéairement sur le $\mathscr{O}_L$-module engendré par les e_i et d'autre part sa matrice relève du lemme ci-dessus. La formule $\Theta_V = \log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$ montre que Θ_V est la limite quand $m \to \infty$ de $(g^{p^m} - 1)/p^m \log_p(\chi(g))$. Le lemme précédent implique alors que d'une part les matrices de Θ_{V_1} et de Θ_{V_2} sont à coefficients dans $p^{-2-v_p(\log_p(\chi(g)))}\mathscr{O}_L$ et d'autre part que $\Theta_{V_1} - \Theta_{V_2}$ est à coefficients dans $p^{k-2-v_p(\log_p(\chi(g)))}\mathscr{O}_L$. Comme la valuation p-adique de $\log_p(\chi(g))$ pour un générateur g de Γ_L^p ne dépend que de L qui ne dépend que de d et K, il existe donc une constante $c(d, K)$ qui ne dépend que de d et de K telle que les coefficients des polynômes caractéristiques de Θ_{V_1} et de Θ_{V_2} sont égaux modulo $p^{k-c(d,K)}$. □

Références

[1] Y. ANDRÉ – Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.

[2] F. ANDREATTA & O. BRINON – Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif, ce volume.

[3] L. BERGER – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[4] ———, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, ce volume.

[5] V. G. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, 1990.

[6] S. BOSCH, U. GÜNTZER & R. REMMERT – *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer, 1984.

[7] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Fascicule XXVII. Algèbre commutative*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1290, Hermann, Paris, 1961.

[8] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[9] P. COLMEZ – Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[10] ———, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[11] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ce volume.

[12] J. DEE – Φ-Γ modules for families of Galois representations, *J. Algebra* **235** (2001), p. 636–664.

[13] J.-M. FONTAINE – Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), p. 529–577.

[14] ———, Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[15] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Astérisque* **223** (1994), p. 59–111.

[16] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[17] ———, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, *Astérisque* **295** (2004), p. 1–115.

[18] K. KEDLAYA – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 93–184.

[19] ———, Slope filtrations for relative Frobenius, ce volume.

[20] M. KISIN – Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 373–454.

[21] ———, Potentially semi-stable deformation rings, à paraître dans *JAMS*.

[22] T. LIU – Torsion p-adic Galois representations and a conjecture of Fontaine, à paraître dans *Annales de l'E.N.S.*

[23] Z. MEBKHOUT – Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

[24] P. SCHNEIDER & J. TEITELBAUM – Algebras of p-adic distributions and admissible representations, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

[25] S. SEN – Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

[26] ———, The analytic variation of p-adic Hodge structure, *Ann. of Math. (2)* **127** (1988), p. 647–661.

[27] ———, An infinite-dimensional Hodge-Tate theory, *Bull. Soc. Math. France* **121** (1993), p. 13–34.

[28] J. T. TATE – p-divisible groups, in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, 1967, p. 158–183.

[29] J.-P. WINTENBERGER – Lettre à Kevin Buzzard, 26 avril 2000.

LAURENT BERGER, Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon
E-mail : laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr • *Url :* www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/
PIERRE COLMEZ, CMLS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex
E-mail : pierre.colmez@math.polytechnique.fr • *Url :* www.math.jussieu.fr/~colmez/

Astérisque

FABRIZIO ANDREATTA
ADRIAN IOVITA

Global applications of relative (φ, Γ)-Modules I

Astérisque, tome 319 (2008), p. 339-420
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__339_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 339–419

GLOBAL APPLICATIONS OF RELATIVE (φ,Γ)-MODULES I

by

Fabrizio Andreatta & Adrian Iovita

Abstract. — In this paper, given a smooth proper scheme X over a p-adic DVR and a p-power torsion étale local system $\mathbb{L}$ on it, we study a family of sheaves associated to the cohomology of local, relative (φ,Γ)-modules of $\mathbb{L}$ and their cohomology. As applications we derive descriptions of the étale cohomology groups on the geometric generic fiber of X with values in $\mathbb{L}$, as well as of their classical (φ,Γ)-modules, in terms of cohomology of the above mentioned sheaves.

***Résumé* (Applications globales des (φ,Γ)-modules relatifs I).** — Étant donné un schéma propre et lisse X défini sur un anneau de valuation discrète et un système local $\mathbb{L}$, étale, de torsion sur X on étudie une famille de faisceaux associés à la cohomologie des (φ,Γ)-modules locaux relatifs de $\mathbb{L}$ et leur cohomologie. Comme application on déduit une description des groupes de cohomologie étales sur la fibre générique géométrique de X à valeurs dans $\mathbb{L}$, et de leurs (φ,Γ)-modules classiques en termes de la cohomologie des faisceaux mentionnés plus haut.

1. Introduction

Let p be a prime integer, K a finite extension of $\mathbf{Q}_p$ and V its ring of integers. In [**15**], J.-M. Fontaine introduced the notion of (φ,Γ)-modules designed to classify p-adic representations of the absolute Galois group G_V of K in terms of semi-linear data. More precisely, if T is a p-adic representation of G_V, i.e. T is a finitely generated $\mathbf{Z}_p$-module (respectively a $\mathbf{Q}_p$-vector space of finite dimension) with a continuous action of G_V, one associates to it a (φ,Γ)-module, denoted $\mathrm{D}_V(T)$. This is a finitely generated module over a local ring of dimension two $\mathbf{A}_V$ (respectively a finitely generated free module over $\mathbf{B}_V := \mathbf{A}_V \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$) endowed with a semi-linear Frobenius endomorphism φ and a commuting, continuous, semi-linear action of the group $\Gamma_V := \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$ such that $(\mathrm{D}_V(T),\varphi)$ is étale. This construction makes

2000 Mathematics Subject Classification. — 11G99, 14F20, 14F30.
Key words and phrases. — (φ,Γ)-modules, étale cohomology, Fontaine sheaves, Grothendieck topologies, comparison isomorphisms.

© Astérisque 319, SMF 2008

the group whose representations we wish to study simpler with the drawback of making the coefficients more complicated. It could be seen as a weak arithmetic analogue of the Riemann-Hilbert correspondence between representations of the fundamental group of a complex manifold and vector bundles with integrable connections. The main point of this construction is that one may recover T with its G_V-action directly from $\mathrm{D}_V(T)$ and, therefore, all the invariants which can be constructed from T can be described, more or less explicitly, in terms of $\mathrm{D}_V(T)$. For example

$(*)$ one can express in terms of $\mathrm{D}_V(T)$ the Galois cohomology groups $\mathrm{H}^i(K,T) = \mathrm{H}^i(\mathrm{G}_V,T)$ of T.

More precisely, let us choose a topological generator γ of Γ_V and consider the complex

$$\mathscr{C}^\bullet(T) : \mathrm{D}_V(T) \xrightarrow{d_0} \mathrm{D}_V(T) \oplus \mathrm{D}_V(T) \xrightarrow{d_1} \mathrm{D}_V(T)$$

where $d_0(x) = \big((1-\varphi)(x), (1-\gamma)(x)\big)$ and $d_1(a,b) = (1-\gamma)(a) - (1-\varphi)(b)$. It is proven in [**18**] that for each $i \geq 0$ there is a natural, functorial isomorphism

$$\mathrm{H}^i(\mathscr{C}^\bullet(T)) \cong \mathrm{H}^i(\mathrm{G}_V,T).$$

Moreover, for $i=1$ this isomorphism was made explicit in [**9**]: let (x,y) be a 1-cocycle for the complex $\mathscr{C}^\bullet(T)$ and choose $b \in \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ such that $(\varphi - 1)(b) = x$. Define the map $C_{(x,y)} \colon \mathrm{G}_V \longrightarrow \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ by

$$C_{(x,y)}(\sigma) = (\sigma' - 1)/(\gamma - 1)y - (\sigma - 1)b,$$

where σ' is the image of σ in Γ_V. One can prove that the image of $C_{(x,y)}$ is in fact contained in T, that $C_{(x,y)}$ is a 1-cocycle whose cohomology class $[C_{(x,y)}] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_V,T)$ only depends on the cohomology class $[(x,y)] \in \mathrm{H}^1(\mathscr{C}^\bullet(T))$. Moreover, the isomorphism $\mathrm{H}^1(\mathscr{C}^\bullet(T)) \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_V,T)$ above is then defined by $[(x,y)] \mapsto [C_{(x,y)}]$.

As a consequence of $(*)$ we have explicit descriptions of the exponential map of Perrin-Riou (or more precisely its "inverse" (see [**15**], [**7**], [**9**]) and an explicit relationship with the "other world" of Fontaine's modules: $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(T), \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(T), \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ (see [**9**], [**5**]).

Despite being a very useful tool, in fact the only one which allows the general classification of integral and torsion p-adic representations of G_V, the (φ,Γ)-modules have an unpleasant limitation. Namely, $\mathrm{D}_V(T)$ could not so far be directly related to geometry when T is the G_V-representation on a p-adic étale cohomology group (over $\overline{K}$) of some smooth proper algebraic variety defined over K. Here is a relevant passage from the Introduction to [**15**]: "Il est clair que ces constructions sont des cas particuliers de constructions beaucoup plus générales. On doit pouvoir remplacer les corps que l'on considère ici par des corps des fonctions de plusieurs variables ou certaines de leurs complétions. En particulier (i) la loi de réciprocité explicite énoncée au no. 2.4 doit se généraliser et éclairer d'un jour nouveau les travaux de Kato sur ce sujet; (ii) ces constructions doivent se faisceautiser et peut être donner une approche nouvelle des théorèmes de comparaison entre les cohomologies p-adiques."

The first part of the program sketched above, i.e. the construction of relative (φ,Γ)-modules was successfully carried out in [**1**]. The main purpose of the present article is to continue Fontaine's program. In particular various relative analogues, local and global, of $(*)$ are proven.

Let us first point out that in the relative situation, over a "small"-V-algebra R (see §2) there are several variants of (φ,Γ)-module functors, denoted $\mathfrak{D}_R(-)$ (arithmetic), $\mathrm{D}_R(-)$ (geometric), $\widetilde{\mathfrak{D}}_R(-)$ (tilde-arithmetic), $\widetilde{\mathrm{D}}_R(-)$ (tilde-geometric) and their overconvergent counterparts $\mathfrak{D}^\dagger_R(-)$, $\mathrm{D}^\dagger_R(-)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger_R(-)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger_R(-)$. For simplicity of exposition let us explain our results in terms of $\mathfrak{D}_R(-)$ and $\widetilde{\mathfrak{D}}_R(-)$.

I) *Local results.* This is carried on in §3 together with the appendices §A and §B. Let R be a "small" V-algebra. Fix an algebraic closure Ω of the fraction field of R and let η be the associated geometric generic point of $\mathrm{Spec}(R)$. Denote by $\overline{R}$ the union of all normal finite extensions of R contained in Ω, which are étale R-algebras after inverting p. Let M be a finitely generated $\mathbf{Z}_p$-module with continuous action of $\mathscr{G}_R := \pi_1^{\mathrm{alg}}\big(\mathrm{Spm}(R_K,\eta)\big)$ and let $\mathrm{D} := \widetilde{\mathfrak{D}}_R(M)$. Then D is a finitely generated $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$-module endowed with commuting actions of a semi-linear Frobenius φ and a linear action of the group Γ_R (see §2.) As in the classical case, Γ_R is a much smaller group that $\mathscr{G}_R$. It is the semidirect product of Γ_V and of a group isomorphic to $\mathbf{Z}_p^d$ where d is the relative dimension of R over V.

Let $\mathscr{C}^\bullet(\Gamma_R,\mathrm{D})$ be the standard complex of continuous cochains computing the continuous Γ_R-cohomology of D and denote $\mathscr{T}^\bullet_R(\mathrm{D})$ the mapping cone complex of the morphism $(\varphi-1)\colon \mathscr{C}^\bullet(\Gamma_R,\mathrm{D}) \longrightarrow \mathscr{C}^\bullet(\Gamma_R,\mathrm{D})$. Then, Theorem 3.2 states that we have natural isomorphisms, functorial in R and M,

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\mathscr{G}_R,M) \cong \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet_R(\mathrm{D})\big) \quad \text{for all } i\geq 0.$$

The maps are defined in §3 in an explicit way, following Colmez's description in the classical case. The input of Fontaine's construction of the classical (φ,Γ)-modules was to replace modules over perfect, non-noetherian rings with modules over smaller rings: "C'est d'ailleurs [...] que j'ai compris l'intérêt qu'il avait à ne pas remplacer $k(\!(\pi)\!)$ par sa clôture radicielle" Indeed, "[...]ceci permet d'introduire des techniques différentielles". Motivated by the same needs, in view of applications to comparison isomorphisms, we show in appendix §A that one can replace the module $\widetilde{\mathfrak{D}}_R(M)$ over the ring $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$, which is not noetherian, with the smaller (φ,Γ_R)-module $\mathfrak{D}_R(M) \subset \widetilde{\mathfrak{D}}_R(M)$ over the noetherian, regular domain $\mathbf{A}_R$ of dimension $d+1$. We show that the natural map

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\Gamma_R,\mathfrak{D}_R(M)) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\Gamma_R,\widetilde{\mathfrak{D}}_R(M)) \quad \text{for all } i\geq 0$$

is an isomorphism. The proof follows and slightly generalizes the Tate-Sen method in [**2**]. In particular, one has a natural isomorphism

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\mathscr{G}_R,M) \cong \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet_R(\mathfrak{D}_R(M))\big) \quad \text{for all } i\geq 0,$$

where $\mathscr{T}_R^\bullet\big(\mathfrak{D}_R(M)\big)$ is the mapping cone complex of the map

$$(\varphi - 1)\colon \mathscr{C}^\bullet(\Gamma_R, \mathfrak{D}_R(M)) \to \mathscr{C}^\bullet(\Gamma_R, \mathfrak{D}_R(M)).$$

II) *Global results.* This is carried on in §4, §5, §6. The setting for §4 and §5 is the following. Let X be a smooth, proper, geometrically irreducible scheme of finite type over V and let $\mathbb{L}$ denote a locally constant étale sheaf of $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$-modules (for some $s \geq 1$) on the generic fiber X_K of X. Let $\mathscr{X}$ denote the formal completion of X along its special fiber and let X_K^{rig} be the rigid analytic space attached to X_K. Fix a geometric generic point $\eta = \mathrm{Spm}(\mathbb{C}_{\mathscr{X}})$ and set $\mathbf{L}$ the fiber of $\mathbb{L}$ at η.

To each $\mathscr{U} \to \mathscr{X}$ étale such that $\mathscr{U}$ is affine, $\mathscr{U} = \mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$, with $R_{\mathscr{U}}$ a small V-algebra and a choice of local parameters $(T_1, T_2, \ldots, T_d)$ of $R_{\mathscr{U}}$ (as in §2) we attach the relative (φ, Γ)-module $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L}) := \widetilde{\mathfrak{D}}_{R_{\mathscr{U}}}(\mathbf{L})$. However, the association $\mathscr{U} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L})$ is not functorial because of the dependence of $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L})$ on the choice of the local parameters. In other words the relative (φ, Γ)-module construction does not sheafify.

Nevertheless due to I) above, the association $\mathscr{U} \longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet_{R_{\mathscr{U}}}(\widetilde{\mathfrak{D}}_{R_{\mathscr{U}}}(\mathbf{L}))\big)$ is functorial for every $i \geq 0$ and we denote by $\mathscr{H}^i(\mathbf{L})$ the sheaf on the pointed étale site $\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}}$ associated to it. In §4 we prove Theorem 4.1: there is a spectral sequence

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^q(\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}}, \mathscr{H}^p(\mathbf{L})) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X_{K,\mathrm{et}}, \mathbb{L}).$$

We view this result as a global analogue of $(*)$: the étale cohomology of $\mathbb{L}$ is calculated in terms of local relative (φ, Γ)-modules attached to $\mathbf{L}$.

The proof of Theorem 4.1 follows a roundabout path which was forced on us by lack of enough knowledge on étale cohomology of rigid analytic spaces. More precisely, for an algebraic, possibly infinite, extension M of K contained in $\overline{K}$, Faltings defines in [**14**] a Grothendieck topology $\mathfrak{X}_M$ on X (see also §4). The local system $\mathbb{L}$ may be thought of as a sheaf on $\mathfrak{X}_M$ and it follows from [**14**], see 4.4, that there is a natural isomorphism:

$$(**) \qquad \mathrm{H}^i\big(\mathfrak{X}_M, \mathbb{L}\big) \cong \mathrm{H}^i\big(X_{M,\mathrm{et}}, \mathbb{L}\big),$$

for all $i \geq 0$. The main tool for proving $(**)$ is the result: every point $x \in X_K$ has a neighborhood W which is $K(\pi, 1)$. Such a result, although believed to be true, is yet unproved in the rigid analytic setting. Therefore the proof of Theorem 4.1 goes as follows. Let $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}$ be the locally constant étale sheaf on X_K^{rig} associated to $\mathbb{L}$. We define the analogue Grothendieck topology $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ on $\mathscr{X}$, prove that there is a spectral sequence with $E_2^{p,q} = \mathrm{H}^q\big(\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}}, \mathscr{H}^p(\mathbf{L}^{\mathrm{rig}})\big)$ abutting to $\mathrm{H}^{p+q}(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}})$, then compare $\mathrm{H}^i(\mathfrak{X}_M, \mathbb{L})$ to $\mathrm{H}^i(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}})$ and in the end use Faltings' result $(**)$.

In §5 we introduce a certain family of continuous sheaves which we call *Fontaine sheaves* and which we denote by $\overline{\mathscr{O}}_-$, $\mathscr{R}(\overline{\mathscr{O}}_-)$, $A^+_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathscr{O}}_-)$. There are algebraic and analytic variants of these: the first are sheaves on $\mathfrak{X}_M$ and the second on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$. We would like to remark that the local sections of the Fontaine sheaves are very complicated and they are **not** relative Fontaine rings. Continuous cohomology of continuous

sheaves on $\mathfrak{X}_M$ and $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ respectively is developed in §5. As an application a geometric interpretation of $\widetilde{\mathfrak{D}}_V(W_i)$, where $W_i = \mathrm{H}^i\big(X_{\overline{K}_{\mathrm{et}}},\mathbb{L}\big)$, for $\mathbb{L}$ an étale local system of $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$-modules on X_K as above is given. More precisely, it is proven in §5 that there is a natural isomorphism of classical (φ,Γ)-modules:

$$\mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty},\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes A^+_{\mathrm{inf}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty}}\big)\right)\cong\widetilde{\mathrm{D}}_V\left(\mathrm{H}^i\big(X_{\overline{K},\mathrm{et}},\mathbb{L}\big)\right).$$

Finally, in §6 we relax our global assumptions. Now $\mathscr{X}$ denotes a formal scheme topologically of finite type over V, smooth and geometrically irreducible, not necessarily algebrizable, and X_K^{rig} denotes its rigid analytic generic fiber.

In §6 we set up the basic theory for comparison isomorphisms between the different p-adic cohomology theories in this analytic setting. Our main result is that, if $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}$ is a p-power torsion local system on X_K^{rig} and $\mathscr{A}^{\mathrm{Font}}$ is one of the analytic Fontaine sheaves on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ listed above, then the cohomology groups $\mathrm{H}^i(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes\mathscr{A}^{\mathrm{Font}})$ can be calculated as follows. Let us first recall that we fixed a geometric generic point $\eta=\mathrm{Spm}(\mathbb{C}_{\mathscr{X}})$, where $\mathbb{C}_{\mathscr{X}}$ is a complete, algebraically closed field which can be chosen as in 4.4. For each étale morphism $\mathscr{U}\longrightarrow\mathscr{X}$ such that $\mathscr{U}$ is affine, $\mathscr{U}=\mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ with $R_{\mathscr{U}}$ a small V-algebra, let $\overline{R}_{\mathscr{U}}$ denote the union of all normal $R_{\mathscr{U}}$-algebras contained in $\mathbb{C}_{\mathscr{X}}$ which are finite and étale over $R_{\mathscr{U}}$ after inverting p. Write $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}_M,\eta)$ for the Galois group of $R_{\mathscr{U}}\otimes_V M\subset\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K$. Let $\mathscr{A}^{\mathrm{Font}}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes K)$ denote the Fontaine ring constructed starting with the pair $(R_{\mathscr{U}},\overline{R}_{\mathscr{U}})$ as in [**15**] and denote by $\mathbf{L}$, as before, the fiber of $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}$ at η. One can show that the association $\mathscr{U}\longrightarrow\mathrm{H}^i(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}_M,\eta),\mathbf{L}\otimes\mathscr{A}^{\mathrm{Font}}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes K))$ is functorial and denote $\mathscr{H}^i_M(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes\mathscr{A}^{\mathrm{Font}})$ the sheaf on $\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}}$ associated to it.

Notice that, due to the generalized Tate-Sen method of §A, if $\mathscr{A}^{\mathrm{Font}}=A^+_{\mathrm{inf}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_K}\big)$, the inflation defines an isomorphism:

$$\mathrm{H}^i\big(\Gamma_{R_{\mathscr{U}}},\mathfrak{D}_{R_{\mathscr{U}}}(\mathbf{L})\big)\cong\mathrm{H}^i\big(\Gamma_{R_{\mathscr{U}}},\widetilde{\mathfrak{D}}_{R_{\mathscr{U}}}(\mathbf{L})\big)\cong\mathrm{H}^i\big(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U},\eta),\mathbf{L}\otimes A^+_{\mathrm{inf}}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes K)\big).$$

Hence, the sheaf $\mathscr{H}^i_M\left(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes A^+_{\mathrm{inf}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_K}\big)\right)$ is defined locally in terms of Γ-cohomology of relative (φ,Γ)-modules.

It is proved (Theorem 6.1) that there exists a spectral sequence

$$(***)\qquad E_2^{p,q}=\mathrm{H}^q(\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}},\mathscr{H}^p_M(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes\mathscr{A}^{\mathrm{Font}}))\Longrightarrow\mathrm{H}^{p+q}(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes\mathscr{A}^{\mathrm{Font}}).$$

At this point we would like to remark that our results in §6 are distinct from those of Faltings in [**12**], [**13**], [**14**]. Namely let us consider the following diagram of categories and functors:

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}^\bullet_M)^{\mathbf{N}} & \xrightarrow{\widehat{v}^{\mathbf{N}}_{\mathscr{X},M,*}} & \mathbf{Sh}(\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}})^{\mathbf{N}}\\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta\\ \mathbf{Sh}(\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}},-)} & \mathbf{AbGr}\end{array}$$

where if $\mathscr{C}$ is a Grothedieck topology then we denote by $\mathbf{Sh}(\mathscr{C})$ the category of sheaves of abelian groups on $\mathscr{C}$ and by $\mathbf{Sh}(\mathscr{C})^{\mathbf{N}}$ the category of continuous sheaves on $\mathscr{C}$ (see §5). We also denote $\alpha = \varprojlim \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}$ and $\beta = \varprojlim \mathrm{H}^0(\mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}, -)$.

We analyze the spectral sequence attached to the composition of functors: $H^0(\mathscr{N}^{\bullet}_{\mathrm{et}}, -) \circ \alpha$ while it appears, although very little detail is given, that Faltings considers the composition of the other two functors in the above diagram (in the algebraic setting). We believe that our point of view is appropriate for the applications to relative (φ, Γ)-modules that we have in mind.

The analysis in §6 and the spectral sequence $(***)$ have already been used in order to construct a p-adic, overconvergent, finite slope Eicher-Shimura isomorphism and to give a new, cohomological construction of p-adic families of finite slope modular forms in [**19**].

In a sequel paper ("Global applications of relative (φ, Γ)-modules, II") we plan to first extend the constructions and results in §6 of the present paper to formal schemes over V with semi-stable special fiber and use them in order to prove comparison isomorphisms between the different p-adic cohomology theories involving Fontaine sheaves in such analytic settings. We believe that we would be able to carry on this project for spaces like: the p-adic symmetric domains, their étale covers (in the cases where good formal models exist), the p-adic period domains of Rapoport-Zink, etc.

Acknowledgements. — We thank A. Abbes, V. Berkovich and W. Niziol for interesting discussions pertaining to the subject of this paper. We thank O. Brinon and J. Pottharst for several useful remarks. Part of the work on this article was done when the first autor visited the Department of Mathematics and Statistics of Concordia University and the second author visited the IHÉS and il Dipartimento di matematica pura ed applicata of the University of Padova. Both of us would like to express our gratitude to these institutions for their hospitality.

I. LOCAL THEORY

2. Preliminaries

2.1. The basic rings. — Let V be a complete discrete valuation ring, with perfect residue field k of characteristic p and with fraction field $K = \mathrm{Frac}(V)$ of characteristic 0. Let $\mathbf{v}$ be the valuation on V normalized so that $\mathbf{v}(p) = 1$. Let $K \subset \overline{K}$ be an algebraic closure of K with Galois group $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) =: \mathrm{G}_V$ and denote by $\overline{V}$ the normalization of V in $\overline{K}$. Define the tower

$$K_0 := K \subset K_1 = K(\zeta_p) \subset \cdots \subset K_n = K(\zeta_{p^n}) \subset \cdots$$

where ζ_{p^n} is a primitive p^n-th root of unity and $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$ for every $n \in \mathbf{N}$. Let V_n be the normalization of V in K_n and define $K_\infty := \cup_n K_n$. Write $\Gamma_V := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ and $\mathrm{H}_V := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ so that $\Gamma_V = \mathrm{G}_V/\mathrm{H}_V$.

We also fix a field extension $K_\infty \subset M \subset \overline{K}$ so that $K \subset M$ is Galois with group $\mathrm{Gal}(M/K)$. We let W be the normalization of V in M. The two important cases are $M = K_\infty$ with $W = V_\infty$ and $M = \overline{K}$ with $W = \overline{V}$.

Let R be a V-algebra such that $k \subset R \otimes_V k$ is geometrically integral. Let $R^0 = V\left\{T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\right\}$ be p-adic completion of the polynomial algebra $V\left[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\right]$. Assume that R is obtained from R^0 iterating finitely many times the following operations:

ét) the p-adic completion of an étale extension;
loc) the p-adic completion of the localization with respect to a multiplicative system;
comp) the completion with respect to an ideal containing p.

Define

$$R_n := R \underset{V}{\otimes} V_n\left[T_1^{\frac{1}{p^n}}, T_1^{\frac{-1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}, T_d^{\frac{-1}{p^n}}\right], \qquad R_\infty := \cup_n R_n.$$

Let $\overline{R}$ be the direct limit of a maximal chain of normal R_∞-algebras, which are domains and, after inverting p, are finite and étale extensions of $R_\infty\left[\frac{1}{p}\right]$.

Let $m \in \mathbf{N}$ and let S be a R_m-algebra such that S is finite as R_m-module and $R_m \subset S$ is étale after inverting p. Define S_n as the normalization of $S \otimes_{R_m} R_n$ in $S \otimes_{R_m} R_n\left[p^{-1}\right]$ for every $n \geq m$. Let $S_\infty := \cup_{n \geq m} S_n$.

Write S'_n for the normalization of S_n in $S_n \otimes_{V_n} M$ and S'_∞ for the normalization of S_∞ in $S_\infty \otimes_{V_\infty} M$. We put $S' := S'_m$. Note that $R' = R \otimes_V W$ and $R'_\infty = R_\infty \otimes_{V_\infty} W$.

Proposition 2.1. — *There exist constants $0 < \varepsilon < 1$ and $N = N(S) \in \mathbf{N}$, depending on S, and there exists an element p^ε of V_N of valuation ε such that $S_{n+1}^p + p^\varepsilon S_{n+1} \subset S_n + p^\varepsilon S_{n+1}$ (as subrings of S_{n+1}) and ${S'_{n+1}}^p + p^\varepsilon S'_{n+1} \subset S'_n + p^\varepsilon S'_{n+1}$ (as subrings of S'_{n+1}) for every $n \geq N$.*

Proof. — The claim concerning S_{n+1} follows from [**1**, Cor. 3.7]. It follows from [**1**, Prop. 3.6] that there exists a decreasing sequence of rational numbers $\{\delta_n(S)\}$ such that $p^{\delta_n(S)}$ annihilates the trace map $\mathrm{Tr}\colon S'_n \to \mathrm{Hom}_{R'_n}(S'_n, R'_n)$. This implies that $p^{\delta_n(S)} S'_{n+1} \subset S'_n \otimes_{R'_n} R'_{n+1}$; see loc. cit. This, and the fact that the proposition holds for R' by direct check, allows to conclude; see the proof of [**1**, Cor. 3.7] for details. □

Definition 2.2. — For every R-subalgebra $S \subset \overline{R}$ as in 2.1 such that S'_∞ is an integral domain, viewed as a subring of $\overline{R}$, define

$$\mathscr{G}_S := \mathrm{Gal}\left(\overline{R}\left[\frac{1}{p}\right]/S\left[\frac{1}{p}\right]\right), \quad \Gamma_S := \mathrm{Gal}\left(S_\infty\left[\frac{1}{p}\right]/S\left[\frac{1}{p}\right]\right)$$

and

$$\mathscr{H}_S := \mathrm{Ker}\left(\mathscr{G}_S \to \Gamma_S\right).$$

Analogously, let

$$\mathrm{G}_S := \mathrm{Gal}\left(\overline{R}\left[\frac{1}{p}\right]/S'\left[\frac{1}{p}\right]\right), \quad \Gamma'_S := \mathrm{Gal}\left(S'_\infty\left[\frac{1}{p}\right]/S'\left[\frac{1}{p}\right]\right)$$

and

$$\mathrm{H}_S := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{G}_S \to \Gamma'_S\right) = \mathrm{Gal}\left(S'_\infty\left[\frac{1}{p}\right]/S'\left[\frac{1}{p}\right]\right).$$

Since S'_∞ is an integral domain, the map $\mathscr{H}_S/H_S \to \mathrm{Gal}(M/K_\infty)$ is an isomorphism. Furthermore, Γ_S is isomorphic to the semidirect product of Γ_V and of Γ'_S. The latter is a finite index subgroup of $\Gamma'_R \cong \mathbf{Z}_p^d$. We let $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ be topological generators of Γ'_R.

2.2. RAE. — Following Faltings [**12**, Def. 2.1] we say that an extension $R_\infty \subset S_\infty$ is almost étale if it is finite and étale after inverting p and if, for every $n \in \mathbf{N}$, the element $p^{\frac{1}{p^n}} \mathfrak{e}_\infty$ is in the image of $S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty$. Here $\mathfrak{e}_\infty \in S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty[p^{-1}]$ is the canonical idempotent splitting the multiplication map $S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty[p^{-1}] \to S_\infty[p^{-1}]$.

We say that such extension satisfies (RAE), *for refined almost étaleness*, if the following holds. For every $n \geq m$ let $\mathfrak{e}_n$ be the diagonal idempotent associated to the étale extension $R_n[p^{-1}] \subset S_n[p^{-1}]$. There exists $\ell \in \mathbf{N}$, independent of m, such that there exists an element $p^{\frac{\ell}{p^n}}$ of V_n of valuation $\frac{\ell}{p^n}$ and $p^{\frac{\ell}{p^n}} \mathfrak{e}_n$ lies in the image of $S_n \otimes_{R_n} S_n$.

We assume that (RAE) holds for every extension $R_\infty \subset S_\infty$ arising as in 2.1. If this holds, we say that R or equivalently $\mathrm{Spf}(R)$ is *small*.

Remark 2.3. — It is proven in [**1**, Prop. 5.10 & Thm. 5.11] that (RAE) holds if R is of Krull dimension ≤ 2 or if the composite of the extensions $V[T_1^{\pm 1}, \cdots, T_d^{\pm 1}] \to R^0 \to R$ is flat and has geometrically regular fibers. For example, this holds if R is obtained by taking the completion with respect to an ideal containing p of the localization of an étale extension of $V[T_1^{\pm 1}, \cdots, T_d^{\pm 1}]$; see [**1**, Prop. 5.12].

2.3. The rings $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$, $\mathbf{E}_S$, $\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$ and $\mathbf{E}'_S$. — Let S be as in 2.1. Define

$$\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty} := \lim_{\leftarrow}(S_\infty/p^\varepsilon S_\infty), \qquad \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S'_\infty} := \lim_{\leftarrow}(S'_\infty/p^\varepsilon S'_\infty)$$

where the inverse limit is taken with respect to Frobenius. Using 2.1 define the *generalized ring of norms*,

$$\mathbf{E}^+_S \subset \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}, \qquad \mathbf{E}'^+_S \subset \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S'_\infty}$$

as the subring consisting of elements $(a_0,\dots,a_n,\dots)$ in $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ (resp. in $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S'_\infty}$) such that a_n is in $S_n/p^\varepsilon S_n$ (resp. $S'_n/p^\varepsilon S'_n$) for every $n \geq N(S)$.

By construction $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$, $\mathbf{E}^+_S$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S'_\infty}$ and $\mathbf{E}'^+_S$) are endowed with a Frobenius homomorphism φ and a continuous action of Γ_S (resp. Γ'_S). Denote by ϵ the element $(1,\zeta_p,\dots,\zeta_{p^n},\dots) \in \mathbf{E}^+_V$ and by $\overline{\pi} := \epsilon - 1$. Put $\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty} := \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S'_\infty}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$, $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} := \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$, $\mathbf{E}'_S := \mathbf{E}'^+_S\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ and $\mathbf{E}_S := \mathbf{E}^+_S\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$.

By abuse of notation for $\alpha \in \mathbf{Q}$, we write $\pi_0{}^\alpha$ for $a = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{V_\infty}$, if it exists, such that $\mathbf{v}(a_i) = \frac{\alpha}{p^i}$ for $i \gg 0$. For example, $\overline{\pi} = \pi_0^{\frac{p}{p-1}}$; see [**2**, Prop. 4.2(d)]. For every $i = 1,\dots,d$, let $x_i := (T_i, T_i^{\frac{1}{p}}, T_i^{\frac{1}{p^2}}, \cdots) \in \mathbf{E}^+_{R^0}$. The following hold:

1. there exists $N(S) \in \mathbf{N}$ such that the map $\mathbf{E}^+_S/\pi_0^{p^n\varepsilon}\mathbf{E}^+_S \to S_n/p^\varepsilon S_n$ and the map $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}/\pi_0^{p^n\varepsilon}\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty} \to S_\infty/p^\varepsilon S_\infty$, sending $(a_0,\dots,a_n,\dots) \mapsto a_n$, are isomorphisms for every $n \geq N(S)$ (see [**1**, Thm. 5.1]);
2. $\mathbf{E}^+_S$ is a normal ring, it is finite as $\mathbf{E}^+_R$-module and it is an étale extension of $\mathbf{E}^+_R$, after inverting $\overline{\pi}$, of degree equal to the generic degree of $R_m \subset S$ (see [**1**, Thm. 4.9 & Thm. 5.3]);
3. $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ is normal and coincides with the $\overline{\pi}$-adic completion of the perfect closure of $\mathbf{E}^+_S$ (see [**1**, Cor. 5.4]);
4. there exists $\ell \in \mathbf{N}$ and maps $\overline{\pi}^\ell\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty} \to \mathbf{E}^+_S \otimes_{\mathbf{E}^+_R} \widetilde{\mathbf{E}}^+_{R_\infty} \to \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ which are isomorphisms after inverting $\overline{\pi}$. In particular, $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}\left[\overline{\pi}^{-1}\right] = \widetilde{\mathbf{E}}^+_{R_\infty} \otimes_{\mathbf{E}^+_R} \mathbf{E}^+_S\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ (see [**1**, Lem. 4.15]);
5. consider the ring

$$\lim_{\infty\leftarrow n} \widehat{S_\infty} := \left\{\left(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, \dots\right) | x^{(m)} \in \widehat{S_\infty},\ \left(x^{(m+1)}\right)^p = x^{(m)}\right\},$$

where $\widehat{S_\infty}$ is the p-adic completion of S_∞, the transition maps are defined by raising to the p-th power, the multiplicative structure is induced by the one on $\widehat{S_\infty}$ and the additive structure is defined by

$$(\dots, x^{(m)}, \dots) + (\dots, y^{(m)}, \dots) = \left(\dots, \lim_{n\to\infty}(x^{(m+n)} + y^{(m+n)})^{p^n}, \dots\right).$$

The natural map $\lim_{\infty\leftarrow n}\widehat{S_\infty} \to \widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ is a bijection (see [**1**, Lem. 4.10]).

It follows from (1), see [**1**, Cor. 4.7], that

$$\mathbf{E}^+_V \cong k_\infty[\![\pi_K]\!] \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E}^+_{R^0} \cong \mathbf{E}^+_V\left\{x_1,\dots,x_d,\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_d}\right\},$$

where k_∞ is the residue field of V_∞ and $\pi_K = (\dots, \tau_n, \tau_{n+1}, \dots)$, with $\tau_i \in V_i$ for $i \gg 0$, is a system of uniformizers satisfying $\tau_{i+1}^p \equiv \tau_i \bmod p^\varepsilon$. The convergence in $x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}$ is relative to the $\overline{\pi}$-adic topology on $\mathbf{E}_V^+$. Eventually $\mathbf{E}_R^+$ is obtained from $\mathbf{E}_{R^0}^+$ iterating the operations

ét) the $\overline{\pi}$-adic completion of an étale extension;
loc) the $\overline{\pi}$-adic completion of the localization with respect to a multiplicative system;
comp) the completion with respect to an ideal containing a power of $\overline{\pi}$.

In particular, $\{\pi_K, x_1, \dots, x_d\}$ is an absolute p-basis of $\mathbf{E}_R^+$.

Lemma 2.4. — *Let S be as in 2.1. The following hold:*

1. *the maps $\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}^+ / \pi_0^{p^n \varepsilon} \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}^+ \to S'_\infty / p^\varepsilon S'_\infty$ and $\mathbf{E}_S'^+ / \pi_0^{p^n \varepsilon} \mathbf{E}_S'^+ \to S'_n / p^\varepsilon S'_n$, given by $(a_0, \dots, a_n, \dots) \mapsto a_n$, are isomorphisms for $n \geq N(S)$. In particular, $\widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^+$ coincides with the $\overline{\pi}$-adic completion of $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}_{V_\infty}^+} \widetilde{\mathbf{E}}_W^+$ and $\mathbf{E}_R'^+$ coincides with the $\overline{\pi}$-adic completion of $\mathbf{E}_R^+ \otimes_{\mathbf{E}_V^+} \widetilde{\mathbf{E}}_W^+$;*
2. *the extensions $\mathbf{E}_R^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$, $\mathbf{E}_R^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^+$ and $\mathbf{E}_R^+ \to \mathbf{E}_R'^+$ are faithfully flat. For every finitely generated $\mathbf{E}_R^+$-module M, the base change of M via any of the above extensions is $\overline{\pi}$-adically complete and separated;*
3. *we have maps $\overline{\pi}^\ell \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}^+ \to \mathbf{E}_S^+ \otimes_{\mathbf{E}_R^+} \widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}^+$ and $\overline{\pi}^\ell \mathbf{E}_S'^+ \to \mathbf{E}_S^+ \otimes_{\mathbf{E}_R^+} \mathbf{E}_R'^+ \to \mathbf{E}_S'^+$. They are isomorphisms after inverting $\overline{\pi}$.*

Proof. — Statements (1) and (3) follow from 2.2 arguing as in the proofs of [**1**, Thm. 5.1] and [**1**, Lem. 4.15] respectively.

(2) By 2.3 we have $\mathbf{E}_R^+ / \pi_0^{\varepsilon p^n} \mathbf{E}_R^+ \cong R_n / p^\varepsilon R_n$ and $\widetilde{\mathbf{E}}_W^+ / \pi_0^{\varepsilon p^n} \widetilde{\mathbf{E}}_W^+ \cong W / p^\varepsilon W$. One deduces form (1) that $\mathbf{E}_R'^+ / \pi_0^{\varepsilon p^n} \mathbf{E}_R'^+ \cong \left(R_n / p^\varepsilon R_n\right) \otimes_{V_n} W$ and that $\widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^+ / \pi_0^{\varepsilon p^n} \widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^+ \cong \left(R_\infty / p^\varepsilon R_\infty\right) \otimes_{V_\infty} W$. By construction $R_\infty \otimes_{V_\infty} W$ is a free $R_n \otimes_{V_n} W$-module with basis $\{T_1^{\frac{\alpha_1}{p^m}} \cdots T_d^{\frac{\alpha_d}{p^m}}\}$ for $m \geq n$ and $0 \leq \alpha_i < p^{m-n}$. Hence, $\mathbf{E}_{R'}'^+$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^+$) is the $\overline{\pi}$-adic completion $\mathbf{E}_R^+ \otimes_{\mathbf{E}_V^+} \widetilde{\mathbf{E}}_W^+$ (resp. of $\cup_n \left(\mathbf{E}_R^+ \otimes_{\mathbf{E}_V^+} \widetilde{\mathbf{E}}_W^+\right)[x_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]$). The $\mathbf{E}_V^+$-algebra $\widetilde{\mathbf{E}}_W^+$ is the $\overline{\pi}$-adic completion of finite, normal and generically separable extensions of the DVR $\mathbf{E}_V^+$. Those are free as $\mathbf{E}_V^+$-module. We may then apply [**1**, Lem. 8.7] to conclude. □

Given an R_∞-algebra S_∞, finite and étale over $R_\infty\left[\frac{1}{p}\right]$, there exists $m \in \mathbf{N}$ and there exists a R_m-algebra S, finite and étale over $R_m\left[\frac{1}{p}\right]$ such that S_∞, defined as in 2.1, is the normalization of $S \otimes_{R_n} R_\infty$.

Theorem 2.5. — *The functor $S_\infty \to \mathbf{E}_S^+$ defines an equivalence of categories from the category R_∞-**AED** of R_∞-algebras which are normal domains, finite and étale over R_∞ after inverting p to the category $\mathbf{E}_R^+$-**AED** of $\mathbf{E}_R^+$-algebras, which are normal domains, finite and étale after inverting $\overline{\pi}$. In particular, this realizes $\mathscr{H}_R$ as the Galois group of $\mathbf{E}_R$.*

Proof. — See [**1**, Thm. 6.3]. □

Let $\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+}$ be $\cup_{S_\infty}\mathbf{E}_S^{+}$ where the union is taken over all R_∞-subalgebras $S_\infty \subset \overline{R}$ such that $S_\infty\left[p^{-1}\right]$ is finite étale over $R_\infty\left[p^{-1}\right]$. Similarly, define $\mathbf{E}_{\overline{R}}^{\prime+}$ to be the union $\cup_{S_\infty}\mathbf{E}_S^{\prime+}$. Let $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+} = \lim\left(\overline{R}/p^{\varepsilon}\overline{R}\right)$, where the inverse limit is taken with respect to Frobenius. It coincides with the $\overline{\pi}$-adic completion of $\cup_{S_\infty}\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^{+}$. Denote $\mathbf{E}_{\overline{R}} := \mathbf{E}_{\overline{R}}^{+}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$, $\mathbf{E}_{\overline{R}}^{\prime} := \mathbf{E}_{\overline{R}}^{\prime+}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ and $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}} := \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$.

Proposition 2.6. — *Let S be as in 2.2. Then,*

(a) $\widehat{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S} = \widehat{S_\infty}$ *and* $\widehat{\overline{R}}^{\mathrm{H}_S} = \widehat{S'_\infty}$ *(here $\widehat{\ }$ denotes the p-adic completion);*

(b) *we have*

$$\left(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+}\right)^{\mathscr{H}_S} = \mathbf{E}_S^{+}, \qquad \mathbf{E}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S} = \mathbf{E}_S, \qquad \left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}\right)^{\mathscr{H}_S} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^{+}, \qquad \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$$

and

$$\left(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{\prime}\right)^{\mathrm{H}_S} = \mathbf{E}_S^{\prime}, \qquad \left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}\right)^{\mathrm{H}_S} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}^{+}, \qquad \left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_S} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty};$$

(c) *the maps*

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty} \underset{\mathbf{E}_R}{\otimes} \mathbf{E}_S \longrightarrow \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}, \quad \mathbf{E}_R^{\prime} \underset{\mathbf{E}_R}{\otimes} \mathbf{E}_S \longrightarrow \mathbf{E}_S^{\prime}, \quad \widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty} \underset{\mathbf{E}_R}{\otimes} \mathbf{E}_S \longrightarrow \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$$

are isomorphisms. In particular, the maps $\mathbf{E}_S \otimes_{\mathbf{E}_V} \widetilde{\mathbf{E}}_W \to \mathbf{E}_S^{\prime}$ *and* $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}_{V_\infty}} \widetilde{\mathbf{E}}_W \to \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$ *are injective with dense image.*

Proof. — (a) The fact that $\widehat{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S} = \widehat{S_\infty}$ is proven in [**1**, Lem. 6.13]. The second equality follows arguing as in loc. cit.

(b) The equalities in the first displayed formula hold due to [**1**, Prop. 6.14]. Those in the second displayed formula follow arguing as in loc. cit. In fact, $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}^{+}$) can be written as in 2.3(5) as the limit $\lim\limits_{\infty\leftarrow n}\widehat{\overline{R}}$ (resp. $\lim\limits_{\infty\leftarrow n}\widehat{S'_\infty}$). The last two equalities in the second displayed formula follow then from (a). The fact that the inclusion $\mathbf{E}_S^{\prime} \subset \left(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{\prime}\right)^{\mathrm{H}_S}$ is an equality can be checked after base change via $\mathbf{E}_R^{\prime+} \to \widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^{+}$ since the latter is faithfully flat by 2.4(2). But $\mathbf{E}_S^{\prime} \otimes_{\mathbf{E}_R^{\prime+}} \widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^{+} \cong \mathbf{E}_{S'_\infty}$ by 2.4(3) and $\left(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{\prime+}\right)^{\mathrm{H}_S} \otimes_{\mathbf{E}_R^{\prime+}} \widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty}^{+} \subset \left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}\right)^{\mathrm{H}_S} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}^{+}$.

(c) The first equality follows from 2.3(4). The others follow from 2.4(3). In the case $S = R$ the last statement follows from 2.4(1). The general case follows from this, the equalities just proven and the fact that $\mathbf{E}_R \subset \mathbf{E}_S$ is finite étale by 2.5. □

2.4. The rings $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty}$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}^{\dagger}_S$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S'_\infty}$, $\mathbf{A}'_S$ and $\mathbf{A}'^{\dagger}_S$

Definition 2.7. — Define $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} := \mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big)$. It is endowed with the following topology, called the *weak topology*: Consider on $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ the topology having $\{\overline{\pi}^n\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{R}}\}_n$ as fundamental system of neighborhoods of 0. On the truncated Witt vectors $\mathbf{W}_m\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big)$ we consider the product topology via the isomorphism $\mathbf{W}_m\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big) \cong \big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big)^m$ given by the phantom components. Eventually, the weak topology is defined as the projective limit topology $\mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big) = \lim\limits_{\infty \leftarrow m} \mathbf{W}_m\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big)$.

Alternatively, let $\pi := [\varepsilon] - 1$ where $[\varepsilon]$ is the Teichmüller lift of ε. Put $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\overline{R}} := \mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big)^+$. For every n and $h \in \mathbf{N}$ define $U_{n,h} := p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} + \pi^h\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\overline{R}}$. The weak topology on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ has $\{U_{n,h}\}_{n,h\in\mathbf{N}}$ as fundamental system of neighborhoods.

Define $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}\colon \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}} \to \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ by $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z) = \infty$ if $z = 0$ and $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z) = \frac{p}{p-1}\max\{n \in \mathbf{Q} | \overline{\pi}^{-n}z \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{R}}\}$. For $z = \sum_k [z_k]p^k \in \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and $N \in \mathbf{N}$ we put

$$\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(z) := \inf\{\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k) | 0 \leq k \leq N\}.$$

For every $N \in \mathbf{N}$ we have

(i) $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(x) = +\infty \Leftrightarrow x \in p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\overline{R}}$;
(ii) $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(xy) \geq \mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(x) + \mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(y)$;
(iii) $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(x+y) \geq \min(\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(x), \mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(y))$ with equality if $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(x) \neq \mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(y)$;
(iv) $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = \frac{p}{p-1}$ and $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}x) = \mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + \mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(x)$;
(v) $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}\big(\varphi(x)\big) = p\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(x)$;
(vi) $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}\big(\gamma(x)\big) = \mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}(x)$ for every $\gamma \in \mathscr{G}_R$.

The second claim in (iii) and property (v) follow since $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{R}}$ is by construction the $\overline{\pi}$-adic completion of $\cup_{S_\infty}\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ and each $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}$ is normal by 2.3(3). Note that the topology on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ induced from the weak topology on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ coincides with the $\mathbf{v}^{\leq N}_{\mathbf{E}}$ topology.

For every S as in 2.2 define

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} := \mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}\big), \qquad \widetilde{\mathbf{A}}^+_{S_\infty} := \mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}\big),$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} := \mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}\big) \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\mathbf{A}}^+_{S'_\infty} := \mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S'_\infty}\big).$$

They are subrings of $\mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big)$ closed for the weak topology.

Overconvergent coefficients. — For $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ define $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\overline{R}}$ as the subring of elements $z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p^k[z_k]$ of $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ such that

$$\lim_{k\to\infty} rv_{\mathbf{E}}(z_k) + k = +\infty;$$

see [2, Prop. 4.2]. Write $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}} = \bigcup_{r\in\mathbf{Q}_{>0}} \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\overline{R}}$. For $z = \sum_{k\in\mathbf{Z}} p^k[z_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\overline{R}}$, put

$$w_r(z) = \begin{cases} \infty & \text{if } z = 0; \\ \inf\limits_{k\in\mathbf{Z}} (rv_{\mathbf{E}}(z_k) + k) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Thanks to [2, Prop. 4.2] one knows that the map $w_r\colon \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\overline{R}} \to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ satisfies

(i) $w_r(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $w_r(xy) \geq w_r(x) + w_r(y)$;
(iii) $w_r(x+y) \geq \min(w_r(x), w_r(y))$;
(iv) $w_r(p) = 1$ and $w_r(px) = w_r(p) + w_r(x)$.

For every S_∞ define $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{S_\infty} := \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty} := \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$. Similarly, define $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{S'_\infty} := \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S'_\infty} := \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$. By [2, Prop. 4.2] they are w_r-adically complete and separated subrings of $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$.

2.4.1. *Noetherian coefficients.* — Let S be as in §2.1. In [1, Appendix II] a ring $\mathbf{A}_S \subset \mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}\big)$ has been constructed, functorially in S, with the following properties:

(i) it is complete and separated for the weak topology. In particular, it is p-adically complete and separated.
(ii) $\mathbf{A}_S \cap \big(p\mathbf{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\big)\big) = p\mathbf{A}_S$;
(iii) $\mathbf{A}_S/p\mathbf{A}_S \cong \mathbf{E}_S$. In particular, it is noetherian and regular.
(iv) it is endowed with continuous commuting actions of Γ_S and of an operator φ lifting those defined on $\mathbf{E}_S$;
(v) $\mathbf{A}_R$ contains the Teichmüller lifts of $\epsilon, x_1, \ldots, x_d$;
(vi) $\mathbf{A}_S$ is the unique finite and étale $\mathbf{A}_R$-algebra lifting the finite and étale extension $\mathbf{E}_R \subset \mathbf{E}_S$.

One also requires the existence of a subring $\mathbf{A}^+_S$ lifting $\mathbf{E}^+_S$, with suitable properties, so that $\mathbf{A}_S$ is unique. We refer to [2, Prop. 4.42] for details. Define $\mathbf{A}^{(0,r]}_S := \mathbf{A}_S \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\overline{R}}$ and $\mathbf{A}^{\dagger}_S := \mathbf{A}_S \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$. Define $\mathbf{A}'_S$ to be the closure of the image of $\mathbf{A}_S \otimes_{\mathbf{A}_V} \widetilde{\mathbf{A}}_W$ in $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ for the weak topology. Put $\mathbf{A}'^{\dagger}_S := \mathbf{A}'_S \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$.

Eventually, let $\mathbf{A}_{\overline{R}}$ (resp. $\mathbf{A}'_{\overline{R}}$) be the completion for the p-adic topology of $\cup_{S_\infty}\mathbf{A}_S$ (resp. $\cup_{S_\infty}\mathbf{A}'_S$), where the union is taken over all normal R_∞-subalgebras $S_\infty \subset \overline{R}$ such that $S_\infty\left[p^{-1}\right]$ is finite étale over $R_\infty\left[p^{-1}\right]$. Write $\mathbf{A}^{\dagger}_{\overline{R}} := \mathbf{A}_{\overline{R}} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$ (resp. $\mathbf{A}'^{\dagger}_{\overline{R}} := \mathbf{A}'_{\overline{R}} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$).

Proposition 2.8. — *The extensions $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{R_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty}$ and $\mathbf{A}^{\dagger}_R \subset \mathbf{A}^{\dagger}_S$ are finite and étale. Their reduction modulo p coincide with $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ and $\mathbf{E}_R \subset \mathbf{E}_S$ respectively.*

Proof. — It is clear that $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty}$ coincides with $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ modulo p since it contains $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{S_\infty}$ and $p\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty} = p\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty}$. The fact that $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{R_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty}$ is finite and étale is proven in [2, Prop. 4.7]. See [2, Prop. 4.28] for the statements regarding $\mathbf{A}^{\dagger}_R \subset \mathbf{A}^{\dagger}_S$. □

Lemma 2.9. — *The following hold:*

(a) $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S}$, $\mathbf{A}'_S = \left(\mathbf{A}'_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S}$, *and* $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\mathrm{H}_S}$. *The same equalities hold considering overconvergent coefficients i. e.,* $\mathbf{A}_S^{(0,r]} = \left(\mathbf{A}_{\overline{R}}^{(0,r]}\right)^{\mathscr{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^{(0,r]} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,r]}\right)^{\mathscr{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^{(0,r]} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,r]}\right)^{\mathrm{H}_S}$ *and* $\mathbf{A}_S^\dagger = \left(\mathbf{A}_{\overline{R}}^\dagger\right)^{\mathscr{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^\dagger = \left(\mathbf{A}_{\overline{R}}^\dagger\right)^{\mathscr{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^\dagger\right)^{\mathrm{H}_S}$.

(b) *The natural maps* $\widetilde{\mathbf{A}}_{R_\infty} \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, $\mathbf{A}'_R \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S \to \mathbf{A}'_S$ *and* $\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty} \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ *are isomorphisms. Similarly, considering overconvergent coefficients, the maps* $\widetilde{\mathbf{A}}_{R_\infty}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathbf{A}_S^\dagger \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^\dagger$, $\mathbf{A}_R'^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathbf{A}_S^\dagger \to \mathbf{A}_S'^\dagger$ *and* $\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathbf{A}_S^\dagger \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger$ *are isomorphisms.*

(c) *We have* $\mathbf{A}_S^\dagger/p\mathbf{A}_S^\dagger = \mathbf{A}_S/p\mathbf{A}_S = \mathbf{E}_S$, $\mathbf{A}_S'^\dagger/p\mathbf{A}_S'^\dagger = \mathbf{A}'_S/p\mathbf{A}'_S = \mathbf{E}'_S$ *and* $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger/p\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger = \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}/p\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$.

(d) *The maps* $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}} \widetilde{\mathbf{A}}_W \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ *and* $\mathbf{A}_S \otimes_{\mathbf{A}_V} \widetilde{\mathbf{A}}_W \to \mathbf{A}'_S$ *are injective and have dense image for the weak topology. The image of* $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^{(0,r]} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}^{(0,r]}} \widetilde{\mathbf{A}}_W^{(0,r]} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^{(0,r]}$ *is dense for the* w_r*-adic topology for every* $r \in \mathbf{Q}_{>0}$.

Proof. — (a) & (b) We have inclusions $\mathbf{A}_S \subset \mathbf{A}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S}$, $\mathbf{A}'_S \subset \left(\mathbf{A}'_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\mathrm{H}_S}$ and maps $\widetilde{\mathbf{A}}_{R_\infty} \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, $\mathbf{A}'_R \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S \to \mathbf{A}'_S$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty} \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$. The extension $\mathbf{A}_R \to \mathbf{A}_S$ is finite and étale and, hence, $\mathbf{A}_S$ is projective as $\mathbf{A}_R$-module. Since $\widetilde{\mathbf{A}}_{R_\infty}$, $\mathbf{A}'_R$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty}$ are p-adically complete and separated and p is a not a zero divisor in these rings, $\widetilde{\mathbf{A}}_{R_\infty} \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}'_R \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty} \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S$ are p-adically complete and separated and p is a non-zero divisor. The same holds for $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\mathrm{H}_S}$, $\mathbf{A}'_S$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$. To check that all the inclusions and all the maps above are isomorphisms it then suffices to show it modulo p. This follows from 2.6 if we prove that $\mathbf{A}'_S/p\mathbf{A}'_S = \mathbf{E}'_S$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}/p\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$. Once this is established the other statements in (a) and the first part of (b) follow.

(c) Since by construction $\mathbf{A}_S'^\dagger \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = p\mathbf{A}_S'^\dagger$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = p\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger$, $\mathbf{A}_S^\dagger \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = p\mathbf{A}_S^\dagger$ and $\mathbf{A}'_S \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = p\mathbf{A}'_S$, $\mathbf{A}'_{S_\infty} \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = p\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$, $\mathbf{A}_S \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = p\mathbf{A}_S$ the maps $\mathbf{A}_S^\dagger/p\mathbf{A}_S^\dagger \to \mathbf{A}_S/p\mathbf{A}_S \to \mathbf{E}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S} = \mathbf{E}_S$, $\mathbf{A}_S'^\dagger/p\mathbf{A}_S'^\dagger \to \mathbf{A}'_S/p\mathbf{A}'_S \to \left(\mathbf{E}'_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_S} = \mathbf{E}'_S$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger/p\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}/p\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} \to \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{\mathscr{H}_S} = \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$ are injective. It follows from [**2**, §4.3(e) & Lem. 4.15] that there exists $\mathbf{A}_S^+ \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\} \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^{(0,r]}$, for suitable $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ and $r \in \mathbf{Q}_{>0}$, so that $\mathbf{A}_S^+/\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\mathbf{A}_S^+ \cong \mathbf{E}_S^+$ and $\mathbf{A}_S^+$ is complete for the weak topology. Here, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$ denotes the completion of $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^+\left[\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right]$ with respect to the weak topology. In particular, since π-adic convergence in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$ implies convergence for the weak topology, $\mathbf{A}_S^+$ is π-adically complete. Note that $\mathbf{A}_S^+ \otimes_{\mathbf{A}_V^+} \widetilde{\mathbf{A}}_W^+$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}^+} \widetilde{\mathbf{A}}_W^+$

map to the π-adic completion of the image of $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{S_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^+_{V_\infty}}\widetilde{\mathbf{A}}^+_W\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$ in $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\overline{R}}\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$ and that the latter is contained in $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{S'_\infty}$. We conclude that $\mathbf{A}^\dagger_S/p\mathbf{A}^\dagger_S$, $\mathbf{A}'^\dagger_S/p\mathbf{A}'^\dagger_S$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}/p\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}$ contain the $\overline{\pi}$-adic completion of the image of $\mathbf{E}^+_S$, $\mathbf{E}^+_S\otimes_{\mathbf{E}^+_V}\widetilde{\mathbf{E}}^+_W$ and $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{S_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}^+_{V_\infty}}\widetilde{\mathbf{E}}^+_W$ respectively. Claim (c) follows then from 2.6.

(b) The fact that $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{R_\infty}\otimes_{\mathbf{A}^\dagger_R}\mathbf{A}^\dagger_S\cong\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S_\infty}$ follows from 2.8. Since $\mathbf{A}^\dagger_R\subset\mathbf{A}^\dagger_S$ is finite and étale by 2.8 there is a unique idempotent $e_{S/R}$ of $\mathbf{A}^\dagger_S\otimes_{\mathbf{A}^\dagger_R}\mathbf{A}^\dagger_S$ such that for every $x\in\mathbf{A}^\dagger_S\otimes_{\mathbf{A}^\dagger_R}\mathbf{A}^\dagger_S$ we have $m(x)=\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}^\dagger_S/\mathbf{A}^\dagger_R}(xe_{S/R})$. Here, m is the multiplication map. Write $e_{S/R}=\sum_{i=1}^u a_i\otimes b_i$ with a_i and $b_i\in\mathbf{A}^{(0,s]}_S$ for some $s\in\mathbf{Q}_{>0}$. Then, $e_{S/R}$ is an idempotent of $\mathbf{A}'^\dagger_S\otimes_{\mathbf{A}'^\dagger_R}\mathbf{A}'^\dagger_S$ and of $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}}\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}$. By the first part of (b) the extensions $\mathbf{A}'_R\subset\mathbf{A}'_S$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty}\subset\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ are finite and étale and $m(x)=\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}'_S/\mathbf{A}'_R}(xe_{S/R})$ and $m(x)=\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}/\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty}}(xe_{S/R})$. We then get that for every $x\in\mathbf{A}'^\dagger_S$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}$) we have $x=m(x\otimes 1)=\sum_{i=1}^u\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}'_S/\mathbf{A}'_R}(xa_i)b_i$ (resp. $x=m(x\otimes1)=\sum_{i=1}^u\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}/\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty}}(xa_i)b_i$). Since $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}'_S/\mathbf{A}'_R}$ and $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}/\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty}}$ send overconvergent elements to overconvergent elements, we conclude that the maps in the second part of (b) are surjective.

Since the extension $\mathbf{A}^\dagger_R\subset\mathbf{A}^\dagger_S$ is finite and étale, $\mathbf{A}^\dagger_S$ is projective as $\mathbf{A}^\dagger_R$-module. In particular, p is not a zero divisor in $\mathbf{A}'^\dagger_R\otimes_{\mathbf{A}^\dagger_R}\mathbf{A}^\dagger_S$ and in $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{R'_\infty}\otimes_{\mathbf{A}^\dagger_R}\mathbf{A}^\dagger_S$ and those rings are p-adically separated. Thus, to prove that the maps in the second part of (b) are injective, and hence are isomorphisms, it suffices to prove that they are injective modulo p. This follows from (c).

(d) Since the extensions $\mathbf{A}_V\subset\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}\subset\widetilde{\mathbf{A}}_W$ are extensions of DVR's, they are flat. Since p is not a zero divisor in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$ and $\mathbf{A}_S$, it is not a zero divisor in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}}\widetilde{\mathbf{A}}_W$ and $\mathbf{A}_S\otimes_{\mathbf{A}_V}\widetilde{\mathbf{A}}_W$. Thus, to check the injectivity in (d) we may reduce modulo p. The density can be checked modulo p^n for every $n\in\mathbf{N}$ and, using induction, it suffices in fact to prove it for $n=1$. Then, the first claim of (d) follows from 2.8 and 2.6(c).

We prove the second claim of (d). Suppose that $r=a/b$ with a and $b\in\mathbf{N}$ and let $A_{S_\infty,(a,b)}$ (resp. $A_{S'_\infty,(a,b)}$) denote the p-adic completion of $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{S_\infty}\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ (resp. of $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{S'_\infty}\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$), where $[\overline{\pi}]$ is the Teichmüller lift of $\overline{\pi}$. Arguing as in the proof of [**2**, Lem. 4.15] one has

$$A_{S'_\infty,(a,b)}\subseteq\left\{x\in\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{S'_\infty}|w_r(x)\geq 0\right\}\subseteq A_{S'_\infty,(a,b)}\left[\frac{1}{[\overline{\pi}]}\right].$$

Since $w_r([\overline{\pi}])>0$, we conclude that $A_{S'_\infty,(a,b)}\left[\frac{1}{[\overline{\pi}]}\right]$ is dense in $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{S'_\infty}$ for the w_r-adic topology. Since the $[\overline{\pi}]$-adic completion of $A_{S_\infty,(a,b)}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^+_{V_\infty}}\widetilde{\mathbf{A}}^+_W$ is contained in the

w_r-adic closure of $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{S'_\infty} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{V'_\infty}} \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{W}$ and its image in $A_{S'_\infty,(a,b)}$ contains $\overline{\pi}^{\ell} A_{S'_\infty,(a,b)}$ by 2.4, the conclusion follows. □

Corollary 2.10. — *The extensions* $\widetilde{\mathbf{A}}_{R'_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{R'_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S'_\infty}$, $\mathbf{A}'_R \subset \mathbf{A}'_S$ *and* $\mathbf{A}'^{\dagger}_R \subset \mathbf{A}'^{\dagger}_S$ *are finite and étale. Their reduction modulo p coincide with* $\widetilde{\mathbf{E}}_{R'_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$ *and* $\mathbf{E}'_R \subset \mathbf{E}'_S$ *respectively.*

2.5. (φ,Γ)-modules and Galois representations. — Let S be as in 2.2. Let $\mathrm{Rep}(\mathscr{G}_S)$ be the abelian tensor category of finitely generated $\mathbf{Z}_p$-modules endowed with a continuous linear action of $\mathscr{G}_S$.

Let $\mathbf{A}$ be one of the rings $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty}$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}^{\dagger}_S$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S'_\infty}$, $\mathbf{A}'_S$ and $\mathbf{A}'^{\dagger}_S$ and let Γ be respectively Γ_S or Γ'_S. Let $(\varphi,\Gamma) - \mathrm{Mod}_{\mathbf{A}}$ (resp. $(\varphi,\Gamma) - \mathrm{Mod}^{\mathrm{et}}_{\mathbf{A}}$) be the tensor category of finitely generated $\mathbf{A}$-modules D endowed with

(i) a semi-linear action of Γ;
(ii) a semi-linear homomorphism φ commuting with Γ (resp. so that $\varphi \otimes 1 : D \otimes^{\varphi}_{\mathbf{A}} \mathbf{A} \to D$ is an isomorphism of $\mathbf{A}$-modules).

Note that if $\mathbf{A} = \mathbf{A}_S$, then $\mathbf{A}_S$ is noetherian and $(\varphi,\Gamma_S) - \mathrm{Mod}_{\mathbf{A}_S}$ (resp. $(\varphi,\Gamma_S) - \mathrm{Mod}^{\mathrm{et}}_{\mathbf{A}_S}$) is an abelian category.

For any object M in $\mathrm{Rep}(\mathscr{G}_S)$, define

$$\mathfrak{D}(M) := \left(\mathbf{A}_{\overline{R}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} M\right)^{\mathscr{H}_S}, \qquad \mathrm{D}(M) := \left(\mathbf{A}'_{\overline{R}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} M\right)^{\mathrm{H}_S}$$

$$\widetilde{\mathfrak{D}}(M) := \left(\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} M\right)^{\mathscr{H}_S}, \qquad \widetilde{\mathrm{D}}(M) := \left(\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} M\right)^{\mathrm{H}_S}.$$

Note that $\mathfrak{D}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$) is an $\mathbf{A}_S$-module (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$-module) endowed with a semi-linear action of Γ_S. Analogously, $\mathrm{D}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$) is a $\mathbf{A}'_S$-module (resp. a $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$-module) endowed with a semi-linear action of Γ'_S. Analogously, define

$$\mathfrak{D}^{\dagger}(M) := \left(\mathbf{A}^{\dagger}_{\overline{R}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} M\right)^{\mathscr{H}_S}, \qquad \mathrm{D}^{\dagger}(M) := \left(\mathbf{A}'^{\dagger}_{\overline{R}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} M\right)^{\mathrm{H}_S}$$

$$\widetilde{\mathfrak{D}}^{\dagger}(M) := \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} M\right)^{\mathscr{H}_S}, \qquad \widetilde{\mathrm{D}}^{\dagger}(M) := \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} M\right)^{\mathrm{H}_S}.$$

Then, $\mathfrak{D}^{\dagger}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{D}}^{\dagger}(M)$) is an $\mathbf{A}^{\dagger}_S$-module (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S_\infty}$-module) endowed with a semi-linear action of Γ_S. Analogously, $\mathrm{D}^{\dagger}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}^{\dagger}(M)$) is a $\mathbf{A}'^{\dagger}_S$-module (resp. a $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{S'_\infty}$-module) endowed with a semi-linear action of Γ'_S.

The homomorphism φ on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$ defines a semi-linear action of φ on all these modules commuting with the action of Γ_S (resp. of Γ'_S).

Theorem 2.11. — *The functor* $\mathfrak{D}$ *defines an equivalence of abelian tensor categories from the category* $\mathrm{Rep}(\mathscr{G}_S)$ *to the category* $(\varphi,\Gamma_S) - \mathrm{Mod}^{\mathrm{et}}_{\mathbf{A}_S}$. *Let* M *be a finitely*

generated $\mathbf{Z}_p$-module endowed with a continuous action of $\mathscr{G}_S$. The inverse is defined associating to an étale (φ,Γ_S)-module D the $\mathscr{G}_R$-module $\mathscr{V}(D) := \left(\mathbf{A}_{\overline{R}} \otimes_{\mathbf{A}_S} D\right)^{\varphi=1}$.

Proof. — See [1, Thm. 7.11]. □

Lemma 2.12. — *Let M be a finitely generated $\mathbf{Z}_p$-module endowed with a continuous action of $\mathscr{G}_S$. Then,*

(i) *$\mathfrak{D}(M)$ (resp. $\mathrm{D}(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$) is an étale (φ,Γ_S)-module over $\mathbf{A}_S$ (resp. $\mathbf{A}'_S$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$);*

(i′) *$\mathfrak{D}^\dagger(M)$ (resp. $\mathrm{D}^\dagger(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M)$, $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M)$) is an étale (φ,Γ_S)-module over $\mathbf{A}_S^\dagger$ (resp. $\mathbf{A}_S'^\dagger$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}$);*

(ii) *we have*

$$\mathfrak{D}(M) = \lim_{\infty\leftarrow n} \mathfrak{D}(M/p^nM),$$
$$\mathrm{D}(M) = \lim_{\infty\leftarrow n} \mathrm{D}(M/p^nM),$$
$$\widetilde{\mathfrak{D}}(M) = \lim_{\infty\leftarrow n} \widetilde{\mathfrak{D}}(M/p^nM),$$
$$\widetilde{\mathrm{D}}(M) = \lim_{\infty\leftarrow n} \widetilde{\mathrm{D}}(M/p^nM),$$

where the limits are inverse limits with respect to $n \in \mathbf{N}$. More precisely, $\mathfrak{D}(M)/p^n\mathfrak{D}(M) \cong \mathfrak{D}(M/p^nM)$, $\mathrm{D}(M)/p^n\mathrm{D}(M) \cong \mathrm{D}(M/p^nM)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)/p^n\widetilde{\mathfrak{D}}(M) \cong \widetilde{\mathfrak{D}}(M/p^nM)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}(M)/p^n\widetilde{\mathrm{D}}(M) \cong \widetilde{\mathrm{D}}(M/p^nM)$ for every $n \in \mathbf{N}$.

(ii′) *if M is torsion, then $\mathfrak{D}^\dagger(M) = \mathfrak{D}(M)$, $\mathrm{D}^\dagger(M) = \mathrm{D}(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M) = \widetilde{\mathfrak{D}}(M)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M) = \widetilde{\mathrm{D}}(M)$;*

(iii) *the natural maps*

$$\mathfrak{D}(M) \underset{\mathbf{A}_S}{\otimes} \mathbf{A}'_S \longrightarrow \mathrm{D}(M), \qquad \mathfrak{D}(M) \underset{\mathbf{A}_S}{\otimes} \mathbf{A}_{\overline{R}} \longrightarrow M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \mathbf{A}_{\overline{R}}$$

and

$$\mathfrak{D}(M) \underset{\mathbf{A}_S}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{D}}(M), \qquad \mathfrak{D}(M) \underset{\mathbf{A}_S}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{D}}(M)$$

are isomorphisms;

(iii′) *the natural maps*

$$\mathfrak{D}^\dagger(M) \underset{\mathbf{A}_S^\dagger}{\otimes} \mathbf{A}_S'^\dagger \longrightarrow \mathrm{D}^\dagger(M), \qquad \mathfrak{D}^\dagger(M) \underset{\mathbf{A}_S^\dagger}{\otimes} \mathbf{A}^\dagger_{\overline{R}} \longrightarrow M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \mathbf{A}^\dagger_{\overline{R}}$$

and

$$\mathfrak{D}^\dagger(M) \underset{\mathbf{A}_S^\dagger}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S_\infty} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M), \qquad \mathfrak{D}^\dagger(M) \underset{\mathbf{A}_S^\dagger}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M)$$

are isomorphisms;

(iv) *the natural maps*

$$\mathfrak{D}^\dagger(M) \underset{\mathbf{A}_S^\dagger}{\otimes} \mathbf{A}_S \longrightarrow \mathfrak{D}(M), \qquad \mathrm{D}^\dagger(M) \underset{\mathbf{A}_S'^\dagger}{\otimes} \mathbf{A}'_S \longrightarrow \mathrm{D}(M)$$

and

$$\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M) \underset{\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S_\infty}}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{D}}(M), \qquad \widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M) \underset{\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{D}}(M)$$

are isomorphisms.

Proof. — We refer the reader to [**1**, Thm. 7.11] and [**2**, Thm 4.35] for the proofs that $\mathfrak{D}(M)$ and $\mathfrak{D}^\dagger(M)$ are étale (φ,Γ_S)-modules and that $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}^\dagger(M)\otimes_{\mathbf{A}^\dagger_S}\mathbf{A}_S$, that $\mathfrak{D}(M)\otimes_{\mathbf{A}_S}\mathbf{A}_{\overline{R}} \cong M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}$ and $\mathfrak{D}^\dagger(M)\otimes_{\mathbf{A}^\dagger_S}\mathbf{A}^\dagger_{\overline{R}} \cong M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}^\dagger_{\overline{R}}$. Claims (i), (i′) and (iv) follow from this and the displayed isomorphisms. We prove the other statements.

Due to 2.8, 2.9 and 2.10 to prove (ii′), (iii) and (iii′) one may pass to an extension $S_\infty \subset T_\infty$ in $\overline{R}$ finite, étale and Galois after inverting p. For example, $\left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathscr{H}_T} = \left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathscr{H}_S}\otimes_{\mathbf{A}_S}\mathbf{A}_T$ and $\left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_T} = \left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_S}\otimes_{\mathbf{A}'_S}\mathbf{A}'_T$ by étale descent. Hence, if $\left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathscr{H}_T}\otimes_{\mathbf{A}_T}\mathbf{A}'_T \to \left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_T}$ is an isomorphism, taking the $\mathscr{H}_S$-invariants, we get the claimed isomorphism $\left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathscr{H}_S}\otimes_{\mathbf{A}_S}\mathbf{A}'_S \to \left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_S}$.

Suppose first that there exists $N\in\mathbf{N}$ such that $p^N M = 0$. Then, there exists an extension $S_\infty \subset T_\infty$ such that $\mathscr{H}_T \subset \mathscr{H}_S$ acts trivially on M. Replacing S_∞ with T_∞, we may then assume that $\mathscr{H}_S$ acts trivially on M. By 2.9 we have $\mathbf{A}^\dagger_S/p^N\mathbf{A}^\dagger_S = \mathbf{A}_S/p^N\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}'^\dagger_S/p^N\mathbf{A}'^\dagger_S = \mathbf{A}'_S/p^N\mathbf{A}'_S$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S_\infty}/p^N\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S_\infty} = \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}/p^N\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$ and eventually $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}/p^N\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty} = \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}/p^N\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$. Furthermore, we have in this case $\mathfrak{D}(M) = M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_S$, $\mathrm{D}(M) = M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}'_S$, $\widetilde{\mathfrak{D}}(M) = M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, $\widetilde{\mathrm{D}}(M) = M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ and similarly for the overconvergent (φ,Γ_S)-modules. Then, the claims follow from 2.9.

Assume next that M is free of rank n. It follows from [**2**, Thm. 4.35] that there exists an extension $R_\infty \subset T_\infty$ in $\overline{R}$ finite, étale and Galois after inverting p such that $\mathfrak{D}^\dagger(M)\otimes_{\mathbf{A}^\dagger_S}\mathbf{A}^\dagger_T$ is a free $\mathbf{A}^\dagger_T$-module of rank n. As we have seen above we may and will replace S_∞ with T_∞ so that $\mathfrak{D}^\dagger(M)$ (resp. $\mathfrak{D}(M)$) is a free $\mathbf{A}^\dagger_S$-module (resp. $\mathbf{A}_S$-module). Fix a basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ of $\mathfrak{D}^\dagger(M)$. It is also a $\mathbf{A}_R$-basis of $\mathfrak{D}(M)$. Hence, it is a basis over $\mathbf{A}^\dagger_{\overline{R}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{\overline{R}}$, $\mathbf{A}_{\overline{R}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$) of $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}^\dagger_{\overline{R}}$ (resp. $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{\overline{R}}$, $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}$, $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$). Since $\mathscr{H}_S$ and H_S act trivially on $\{e_1,\dots,e_s\}$, we get claims (iii) and (iii′). For example, $\widetilde{\mathfrak{D}}(M) = \left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\right)^{\mathscr{H}_S} = \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}e_1\oplus\cdots\oplus\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}e_n = \mathfrak{D}(M)\otimes_{\mathbf{A}_S}\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$.

We are left to prove (ii). We may assume that M is torsion free, since the claim for the torsion part is trivial. Note that $\mathfrak{D}(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$, $\mathrm{D}(M)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$ are submodules of invariants of free modules over p-adically complete and separated rings. For example, $\mathfrak{D}(M) = \left(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}\right)^{\mathscr{H}_S} \subset M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{A}_{\overline{R}}$. Hence, they are themselves p-adically complete and separated. It suffices to show that for every $n\in\mathbf{N}$ the map from their quotient modulo p^n to $\mathfrak{D}\left(M/p^nM\right)$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{D}}\left(M/p^nM\right)$, $\mathrm{D}\left(M/p^nM\right)$, $\widetilde{\mathrm{D}}\left(M/p^nM\right)$) is

an isomorphism. Due to (iii) it suffices to show it for $\mathfrak{D}(M)$ and in this case it follows from the fact that $\mathfrak{D}$ is an exact functor by 2.11. □

2.6. The weak topology on the (φ,Γ)-modules. — Suppose that $M \cong \mathbf{Z}_p^n \times \prod_{i=1}^m \mathbf{Z}/p^{s_i}\mathbf{Z}$ as a $\mathbf{Z}_p$-module. Then, $M \otimes \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ is isomorphic to $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^n \times \prod_{i=1}^m \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^{s_i}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ as $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$-module and, in particular, the product topology defines a topology on $M \otimes \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$. It is independent of the choice of the presentation of M as $\mathbf{Z}_p$-module and the action of $\mathscr{G}_S$ is continuous for such topology. Note that $\mathfrak{D}(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$, $\mathrm{D}(M)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$, $\mathfrak{D}^\dagger(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M)$, $\mathrm{D}^\dagger(M)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M)$ are by construction submodules of $M \otimes \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$. They are then endowed with the topology induced from the one just defined on $M \otimes \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$. We call it the *weak topology.*

We state the following theorem relating the cohomology (continuous for the weak topology) of the various (φ,Γ)-modules introduced above.

Theorem 2.13. — *The natural maps*

$$\mathrm{H}^n\big(\Gamma_S,\mathfrak{D}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(\Gamma_S,\widetilde{\mathfrak{D}}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathscr{G}_S, M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\right),$$

$$\mathrm{H}^n\big(\Gamma'_S,\mathrm{D}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(\Gamma'_S,\widetilde{\mathrm{D}}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathrm{G}_S, M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\right),$$

$$\mathrm{H}^n\big(\Gamma_S,\mathfrak{D}^\dagger(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(\Gamma_S,\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathscr{G}_S, M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{\overline{R}}\right)$$

and

$$\mathrm{H}^n\big(\Gamma'_S,\mathrm{D}^\dagger(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(\Gamma'_S,\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathrm{G}_S, M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{\overline{R}}\right)$$

are all isomorphisms.

Proof. — See A.14. □

3. Galois cohomology and (φ,Γ)-modules

In this section we show how, given a finitely generated $\mathbf{Z}_p$-module M with continuous action of $\mathscr{G}_S$, one can compute the cohomology groups $\mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, M)$ and $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}_S, M)$ in terms of the associated (φ,Γ_S)-modules $\mathfrak{D}(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$, $\mathfrak{D}^\dagger(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M)$, $\mathrm{D}(M)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$, $\mathrm{D}^\dagger(M)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M)$. We start with the following crucial:

Definition 3.1. — Let D be a continuous (φ,Γ_S)-module over $\mathbf{A}_S$ or $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$ or $\mathbf{A}_S^\dagger$ or $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^\dagger$ (resp. over $\mathbf{A}'_S$ or $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ or $\mathbf{A}'^\dagger_S$ or $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{S'_\infty}$). Define $\mathscr{C}^\bullet(\Gamma_S,\mathrm{D})$ (resp. $\mathscr{C}^\bullet(\Gamma'_S,\mathrm{D})$) to be the complex of continuous cochains with values in D.

Let $\mathscr{T}^\bullet(\mathrm{D})$ (resp. $\mathscr{T}'^\bullet(\mathrm{D})$) be the mapping cone associated to $\varphi-1\colon \mathscr{C}^\bullet(\Gamma_S,\mathrm{D}) \to \mathscr{C}^\bullet(\Gamma_S,\mathrm{D})$ (resp. to $\varphi-1\colon \mathscr{C}^\bullet(\Gamma'_S,\mathrm{D}) \to \mathscr{C}^\bullet(\Gamma'_S,\mathrm{D})$).

Theorem 3.2. — *There are isomorphisms of δ-functors from the category of* $\mathrm{Rep}(\mathscr{G}_S)$ *to the category of abelian groups:*

$$\rho_i\colon \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\mathfrak{D}(\_))\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(\mathscr{G}_S,\_), \qquad \rho_i'\colon \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}'^\bullet(\mathrm{D}(\_))\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(\mathrm{G}_S,\_),$$
$$\widetilde{\rho}_i\colon \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\widetilde{\mathfrak{D}}(\_))\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(\mathscr{G}_S,\_), \qquad \widetilde{\rho}_i'\colon \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}'^\bullet(\widetilde{\mathrm{D}}(\_))\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(\mathrm{G}_S,\_),$$
$$\rho_i^\dagger\colon \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\mathfrak{D}^\dagger(\_))\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(\mathscr{G}_S,\_), \qquad \rho_i'^\dagger\colon \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}'^\bullet(\mathrm{D}^\dagger(\_))\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(\mathrm{G}_S,\_),$$
$$\widetilde{\rho}_i^\dagger\colon \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(\_))\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(\mathscr{G}_S,\_), \qquad \widetilde{\rho}_i'^\dagger\colon \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}'^\bullet(\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(\_))\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(\mathrm{G}_S,\_).$$

The isomorphisms ρ_i', $\widetilde{\rho}_i'$, $\rho_i'^\dagger$ and $\widetilde{\rho}_i'^\dagger$ are $\mathrm{Gal}(M/K)$-equivariant.

Furthermore, all the maps in the square

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\mathfrak{D}^\dagger(\_))\big) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(\_))\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\mathfrak{D}(\_))\big) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\widetilde{\mathfrak{D}}(\_))\big) \end{array}$$

induced by the natural inclusions of (φ,Γ_S)-modules $\mathfrak{D}^\dagger(W)\subset\mathfrak{D}(W)\subset\widetilde{\mathfrak{D}}(W)$ and $\mathfrak{D}^\dagger(W)\subset\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(W)\subset\widetilde{\mathfrak{D}}(W)$, for $W\in\mathrm{Rep}(\mathscr{G}_S)$, are isomorphisms and they are compatible with the maps $\rho_i^\dagger$, $\widetilde{\rho}_i^\dagger$, ρ_i and $\widetilde{\rho}_i$. Similarly, all the maps in the square

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}'^\bullet(\mathrm{D}^\dagger(\_))\big) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}'^\bullet(\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(\_))\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}'^\bullet(\mathrm{D}(\_))\big) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}'^\bullet(\widetilde{\mathrm{D}}(\_))\big) \end{array}$$

are isomorphisms and are compatible with the maps $\rho_i'^\dagger$, $\widetilde{\rho}_i'^\dagger$, ρ_i' and $\widetilde{\rho}_i'$

Proof. — First of all we exhibit in 3.1 the maps ρ_i and ρ_i' (with or without $\widetilde{\ }$ or $\dagger$) so that they are compatible with the displayed squares and they are compatible with the residual action of G_V (if one exists). We then prove that they are isomorphisms in 3.3. Eventually, we show that they are isomorphisms of δ-functors in 3.4. □

3.1. The maps. — Let W be a $\mathbf{Z}_p$-representation of $\mathscr{G}_S$. Let $D(W)$ and A be (1) $\mathfrak{D}(W)$ and $\mathbf{A}$, (2) $\widetilde{\mathfrak{D}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}$, (3) $\mathfrak{D}^\dagger(W)$ and $\mathbf{A}^\dagger$ or (4) $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(W)$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$. Since in each case $D(W)\otimes_{A_S}A_{\overline{R}}\cong W\otimes_{\mathbf{Z}_p}A_{\overline{R}}$ by 2.12 and since the sequence (22) admits a right continuous splitting, we have exact sequences of $\mathscr{G}_S$-modules

$$0\longrightarrow W\longrightarrow D(W)\underset{A_S}{\otimes}A_{\overline{R}}\xrightarrow{\varphi-1}D(W)\underset{A_S}{\otimes}A_{\overline{R}}\longrightarrow 0 \tag{1}$$

Similarly, let $D'(W)$ and A' be (1) $\mathrm{D}(W)$ and $\mathbf{A}'$, (2) $\widetilde{\mathrm{D}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}$, (3) $\mathrm{D}^\dagger(W)$ and $\mathbf{A}'^\dagger$ or (4) $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(W)$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$. In each case $D'(W)\otimes_{A'_S}A'_{\overline{R}}\cong W\otimes_{\mathbf{Z}_p}A'_{\overline{R}}$ by 2.12. Thanks to B.1 we get exact sequences of $\mathscr{G}_S$-modules

$$0\longrightarrow W\longrightarrow D'(W)\underset{A'_S}{\otimes}A'_{\overline{R}}\xrightarrow{\varphi-1}D'(W)\underset{A'_S}{\otimes}A'_{\overline{R}}\longrightarrow 0 \tag{2}$$

The maps in both exact sequences are continuous for the weak topology by 2.12 and admit a right splitting as $\mathbf{Z}_p$-modules by B.1.

Let (α,β) be an n-cochain of $\mathscr{T}^\bullet(D(W))$ i. e., in $\mathscr{C}^{n-1}(\Gamma_S,D(W))\times\mathscr{C}^n(\Gamma_S,D(W))$. Define

$$c^n_{\alpha,\beta} := \beta + (-1)^n d\big(\sigma(\alpha)\big) \in \mathscr{C}^n(\mathscr{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A_{\overline{R}}),$$

where d is the differential operator on $\mathscr{C}^n(\Gamma_S,D(W))$ and σ is the left inverse of $\varphi-1$ defined in B.1 (for each of the four possibilities for A).

Recall that the derivation on $\mathscr{T}^\bullet(D(W))$ is given by $d\big((\alpha,\beta)\big) = \big((-1)^n(\varphi-1)(\beta)+d\alpha, d\beta\big)$. Thus, (α,β) is an n-cocycle if and only if it satisfies $(-1)^n(\varphi-1)\beta+d\alpha=0$ and $d\beta=0$. In this case, $dc^n_{\alpha,\beta}=0$ and $(\varphi-1)c^n_{\alpha,\beta} = (\varphi-1)\beta+(-1)^n d(\varphi-1)\sigma(\alpha) = (\varphi-1)\beta+(-1)^n d\alpha = 0$. Thus, $c^n_{\alpha,\beta}$ is an n-cocycle in $\mathscr{C}^n(\mathscr{G}_S,W)$ by (1).

Choose a different continuous left inverse σ' of $\varphi-1$. Then, $(\varphi-1)(\sigma'-\sigma)=0$ so that $\big(\sigma'-\sigma\big)(\alpha)$ lies in $\mathscr{C}^{n-1}(\mathscr{G}_S,W)$. Thus, $\beta+(-1)^n d\big(\sigma'(\alpha)\big)-\beta-(-1)^n d\big(\sigma(\alpha)\big) = (-1)^n d(\sigma'-\sigma)(\alpha)$. In particular, $c^n_{\alpha,\beta}$ depends on the choice of σ up to a continuous coboundary with values in W.

Let $(\alpha,\beta) = ((-1)^{n-1}(\varphi-1)b+da, db) \in \mathscr{C}^{n-1}(\Gamma_S,D(W))\times\mathscr{C}^n(\Gamma_S,D(W))$ be an n-coboundary in $\mathscr{T}^\bullet(D(W))$. Then, $c^n_{\alpha,\beta} = db + (-1)^{2n-1}d(\sigma\circ(\varphi-1))(b) + (-1)^n d(\sigma(d(a)))$. Note that $\big(1-(\sigma\circ(\varphi-1)\big)b$ and $\sigma\big(d(a)\big)-d\big(\sigma(a)\big)$ are annihilated by $\varphi-1$. Hence, $c^n_{\alpha,\beta}$ is the image via the differential of $(1-(\sigma\circ(\varphi-1))(b) + (-1)^n\big(\sigma\big(d(a)\big)-d\big(\sigma(a)\big)\big)$ which lies in $\mathscr{C}^{n-1}(\mathscr{G}_S,W)$. In particular, it is a continuous coboundary.

We thus get a map

$$r_i^W : \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(D(W))\big) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathscr{G}_S,W).$$

By construction it is functorial in W. In case (1) we get the map ρ_i, in case (2) we get $\widetilde{\rho}_i$, in case (3) we get the map $\rho_i^\dagger$ and in case (4) we get $\widetilde{\rho}_i^\dagger$. By construction they are compatible with the first commutative displayed square appearing in 3.2.

Analogously, using (2), one gets the claimed map $r_i'^W$. In case (1) we get the map ρ_i', in case (2) we get $\widetilde{\rho}_i'$, in case (3) we get the map $\rho_i'^\dagger$ and in case (4) we get $\widetilde{\rho}_i'^\dagger$. They are compatible with the second commutative displayed square appearing in 3.2. Furthermore, we also have actions of G_V and we claim that $r_i'^W$ is G_V-equivariant.

Indeed, let (α,β) be an n-cocycle in $\mathscr{C}^{n-1}(\Gamma'_S,D'(W))\times\mathscr{C}^n(\Gamma'_S,D'(W))$. Let $g\in\mathrm{G}_V$. Then, $g\big((\alpha,\beta)\big) = \big(g(\alpha),g(\beta)\big)$ and $c^n_{g((\alpha,\beta))} = g(\beta)+(-1)^n d\big(\sigma(g(\alpha))\big)$. On the other hand, $g\big(c^n_{\alpha,\beta}\big) = g(\beta)+(-1)^n g\big(d(\sigma(a))\big)$. Note that $g\circ d = d\circ g$ and $(\varphi-1)(\sigma\circ g - g\circ\sigma) = 0$ since φ is Γ_V-equivariant. Thus, $c^n_{g((\alpha,\beta))} - g\big(c^n_{\alpha,\beta}\big) = (-1)^n d\big((\sigma\circ g - g\circ\sigma)(\alpha)\big)$ is a coboundary in $\mathscr{C}^n(\mathscr{G}_S,W)$.

Proposition 3.3. — *The maps ρ_i, $\widetilde{\rho}_i$, $\rho_i^\dagger$, $\widetilde{\rho}_i^\dagger$, ρ_i', $\widetilde{\rho}_i'$, $\rho_i'^\dagger$ and $\widetilde{\rho}_i'^\dagger$ are isomorphisms.*

Proof. — We use the notation of 3.1. Since $\mathscr{T}^\bullet(D)$ and $\mathscr{T}'^\bullet(D')$ are mapping cones, we get exact sequences

(3)
$$\mathrm{H}^{n-1}(\Gamma_S, D(W)) \xrightarrow{\hat{\delta}_n} \mathrm{H}^n(\mathscr{T}^\bullet(D(W))) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\Gamma_S, D(W)) \xrightarrow{(-1)^n(\varphi-1)} \mathrm{H}^n(\Gamma_S, D(W))$$

and

(4)
$$\mathrm{H}^{n-1}(\Gamma'_S, D'(W)) \xrightarrow{\hat{\delta}'_n} \mathrm{H}^n(\mathscr{T}'^\bullet(D'(W))) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\Gamma'_S, D'(W)) \xrightarrow{(-1)^n(\varphi-1)} \mathrm{H}^n(\Gamma'_S, D'(W)).$$

They are compatible with respect to the natural inclusions $\mathfrak{D}^\dagger(W) \subset \mathfrak{D}(W) \subset \widetilde{\mathfrak{D}}(W)$ and $\mathfrak{D}^\dagger(W) \subset \widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(W) \subset \widetilde{\mathfrak{D}}(W)$ (resp. $\mathrm{D}^\dagger(W) \subset \mathrm{D}(W) \subset \widetilde{\mathrm{D}}(W)$ and $\mathrm{D}^\dagger(W) \subset \widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(W) \subset \widetilde{\mathrm{D}}(W)$). Thanks to A.14 we deduce that the horizontal arrows in the two displayed squares of 3.2 are isomorphisms. We are then left to prove that $\widetilde{\rho}_i$, $\widetilde{\rho}_i^\dagger$, $\widetilde{\rho}'_i$ and $\widetilde{\rho}_i'^\dagger$ are isomorphisms.

From the exactness of (1) and (2) and the existence of a continuous right splitting we get the exact sequences

(5)
$$\mathrm{H}^{n-1}(\mathscr{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A_{\overline{R}}) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, W) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A_{\overline{R}}) \xrightarrow{\varphi-1} \mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A_{\overline{R}})$$

and

(6)
$$\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A'_{\overline{R}}) \xrightarrow{\delta'_n} \mathrm{H}^n(\mathrm{G}_S, W) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathrm{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A'_{\overline{R}}) \xrightarrow{\varphi-1} \mathrm{H}^n(\mathrm{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A'_{\overline{R}})$$

Thanks to A.14 the inflation maps

$$\mathrm{Inf}_n \colon \mathrm{H}^n(\Gamma_S, D(W)) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, D(W) \underset{A_S}{\otimes} A_{\overline{R}}) = \mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A_{\overline{R}})$$

and

$$\mathrm{Inf}'_n \colon \mathrm{H}^n(\Gamma'_S, D'(W)) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathrm{G}_S, D'(W) \underset{A'_S}{\otimes} A'_{\overline{R}}) = \mathrm{H}^n(\mathrm{G}_S, W \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} A'_{\overline{R}})$$

in cases (2) and (4) of 3.1 are isomorphisms. Take a cocycle τ in $\mathscr{C}^{n-1}(\Gamma_S, D(W))$. One constructs $\delta_n\big(\mathrm{Inf}_{n-1}(\tau)\big)$ as $d\big(\sigma\big(\mathrm{Inf}_{n-1}(\tau)\big)\big)$. On the other hand, $\hat{\delta}_n(\tau) = (\tau, 0)$ in $\mathscr{C}^{n-1}(\Gamma_S, D(W)) \times \mathscr{C}^n(\Gamma_S, D(W))$ and $c^n_{\tau,0} = (-1)^n d\big(\sigma(\tau)\big)$. Thus, $\delta_n \circ (-1)^{n-1}\mathrm{Inf}_{n-1} = \rho_n^W \circ (-1)\hat{\delta}_n$. If (α, β) is an n-cocycle in $\mathscr{T}^\bullet(D(W))$, its image in $\mathrm{H}^n(\Gamma_S, D(W))$ is the class of β. The image of $c^n_{\alpha,\beta}$ in $\mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, W \otimes_{\mathbf{Z}_p} A_{\overline{R}})$ is the class of $\beta + (-1)^n d\big(\sigma(\alpha)\big)$ i. e., of β. We conclude that the exact sequences (3) and (5) are compatible via r_n^W and the inflation maps Inf_n and Inf_{n-1} i. e., the following diagram commutes (the rows continue on the left and on the right):

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}^{n-1}(\Gamma_S, D(W)) & \xrightarrow{-\hat{\delta}_n} & \mathrm{H}^n(\mathscr{T}^\bullet(D(W))) & \longrightarrow & \mathrm{H}^n(\Gamma_S, D(W)) & \xrightarrow{(-1)^n(\varphi-1)} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle (-1)^{n-1}\mathrm{Inf}_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle r_n^W} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Inf}_n} & & \\
\mathrm{H}^{n-1}(\mathscr{G}_S, W \otimes_{\mathbf{Z}_p} A_{\overline{R}}) & \xrightarrow{\delta_n} & \mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, W) & \longrightarrow & \mathrm{H}^n(\mathscr{G}_S, W \otimes_{\mathbf{Z}_p} A_{\overline{R}}) & \xrightarrow{\varphi-1} & \cdots
\end{array}$$

An analogous argument implies that the exact sequences (4) and (6) are compatible via $r_n^{'W}$ and the inflation maps Inf'_n and Inf'_{n-1}. The proposition follows. □

Proposition 3.4. — *The functors ρ_i, $\widetilde{\rho}_i$, $\rho_i^\dagger$, $\widetilde{\rho}_i^\dagger$, ρ'_i, $\widetilde{\rho}'_i$, $\rho_i'^\dagger$ and $\widetilde{\rho}_i'^\dagger$ are isomorphisms of δ-functors.*

Proof. — We use the notation of 3.1. We prove the proposition for r_i. The proof for r'_i is similar. Let $0 \to W_1 \to W_2 \to W_3 \to 0$ be an exact sequence of $\mathscr{G}_S$-representations. We need to prove that one has a connecting homomorphism $\delta\colon \mathrm{H}^n\big(\mathscr{T}^\bullet(D(W_3))\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}\big(\mathscr{T}^\bullet(D(W_1))\big)$, making $\mathrm{H}^n\big(\mathscr{T}^\bullet(D(\_))\big)$ into a δ-functor, and that the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^n\big(\mathscr{T}^\bullet(D(W_3))\big) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^{n+1}\big(\mathscr{T}^\bullet(D(W_1))\big) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle r_i^{W_3}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle r_i^{W_1}} \\ \mathrm{H}^i(\mathscr{G}_S, W_3) & \xrightarrow{\delta'} & \mathrm{H}^{i+1}(\mathscr{G}_S, W_1), \end{array}$$

where δ' is the connecting homomorphisms, commutes.

We start defining δ. Let (α,β) be an n-cocycle in $\mathscr{T}^n(D(W_3)) = \mathscr{C}^{n-1}(\Gamma_S, D(W_3)) \times \mathscr{C}^n(\Gamma_S, D(W_3))$. Due to A.5.2 there exist $a \in \mathscr{C}^{n-1}(\Gamma_S, D(W_2))$ and $b \in \mathscr{C}^n(\Gamma_S, D(W_2))$ lifting α and β respectively. Then, $d(a,b) = \big((-1)^n(\varphi-1)b + da, db\big)$ is an element of $\mathscr{C}^n(\Gamma_S, D(W_1)) \times \mathscr{C}^{n+1}(\Gamma_S, D(W_1))$ and it is a $n+1$-cocycle of $\mathscr{T}^\bullet(D(W_1))$. Its cohomology class is, by definition, $\delta\big((\alpha,\beta)\big)$. Note that

$$c^{n+1}_{d(a,b)} = db + (-1)^{2n+1} d\big(\sigma\circ(\varphi-1)(b)\big) + (-1)^{n+1} d\big(\sigma(da)\big).$$

On the other hand, $c^n_{(\alpha,\beta)} = \beta + (-1)^n d\big(\sigma(\alpha)\big)$. Consider $c^n_{(a,b)} = b + (-1)^n d\big(\sigma(a)\big)$ in $\mathscr{C}^n(\mathscr{G}_S, W_2 \otimes_{\mathbf{Z}_p} A_{\overline{R}})$. Then, $\gamma := c^n_{(a,b)} - \sigma\big((\varphi-1)\big(c^n_{(a,b)}\big)\big)$ lies in $\mathscr{C}^n(\mathscr{G}_S, W_2)$. Furthermore, it lifts $c^n_{(\alpha,\beta)}$ since $\sigma\big((\varphi-1)c^n_{(\alpha,\beta)}\big) = 0$ because (α,β) is a cocycle. Then, the class of $\delta'\big(c^n_{(\alpha,\beta)}\big)$ is $d\gamma$. To compute it we may take the differential in $\mathscr{C}^n(\mathscr{G}_S, W_2 \otimes_{\mathbf{Z}_p} A_{\overline{R}})$ i. e.,

$$dc^n_{(a,b)} - d\sigma\big((\varphi-1)\big(c^n_{(a,b)}\big)\big) = db - d\big(\sigma\circ(\varphi-1)(b)\big) + (-1)^{n+1} d\big(\sigma(da)\big).$$

Here, we used that $d\sigma\big((\varphi-1)\big(d(\sigma(a))\big)\big) = d\big(\sigma(da)\big)$. The conclusion follows. □

II. GLOBAL THEORY

4. Étale cohomology and relative (φ,Γ)-modules

As in the Introduction, let X denote a smooth, geometrically irreducible and proper scheme over $\mathrm{Spec}(V)$. Fix a field extension $K \subset M \subset \overline{K}$. In this section we review a Grothendieck topology on X, introduced by Faltings in [**14**] and denoted $\mathfrak{X}_M$, and its relation to étale cohomology; see 5.11. We also define the analogue Grothendieck topology, $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ on the formal completion $\mathscr{X}$ of X along its special fiber. In this section we study p-power torsion sheaves for these Grothendieck topologies and compare their cohomology theories. The main result of this section is the following. Let $\mathbb{L}$ be an étale local system of $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-modules on X_K, for some $n \geq 1$ and let $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}$ be the corresponding étale local system on the rigid space X_K^{rig} attached to X_K. For every pointed étale open $(\mathscr{U}, s)$ of $\mathscr{X}$ (see 4.4) such that $\mathscr{U} = \mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ is affine and $R_{\mathscr{U}}$ is a small V-algebra (see 2.2), let $\mathbf{L}$ be the fiber of $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}$ at the geometric generic point of $\mathscr{U}_K^{\mathrm{rig}}$ defined by s (see 4.5). As the notation suggests it is independent of $\mathscr{U}$ and s. Let $\mathfrak{D}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L})$, $\mathrm{D}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L})$, $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L})$, $\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L})$ denote the respective (φ,Γ)-modules over $R_{\mathscr{U}}$. For each $i \geq 0$ the associations $(\mathscr{U}, s) \longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\mathfrak{D}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L}))\big)$, $(\mathscr{U}, s) \longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\mathrm{D}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L}))\big)$, $(\mathscr{U}, s) \longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L}))\big)$, $\mathscr{U} \longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\mathscr{T}^\bullet(\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathscr{U}}(\mathbf{L}))\big)$ are functorial and we denote by $\mathscr{H}^{i,\mathrm{ar}}(\mathbb{L})$, $\mathscr{H}^{i,\mathrm{ge}}(\mathbb{L})$, $\mathscr{H}^{i,\mathrm{t,ar}}(\mathbb{L})$ and $\mathscr{H}^{i,\mathrm{t,ge}}(\mathbb{L})$ respectively the associated sheaves on the pointed étale site $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^\bullet$. We have

Theorem 4.1. — *There are spectral sequences*

$$\text{i)}\quad E_2^{p,q} = \mathrm{H}^q\Big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^\bullet, \mathscr{H}^{p,*,\mathrm{ge}}(\mathbb{L})\Big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}\Big(X_{\overline{K},\mathrm{et}}, \mathbb{L}\Big).$$

$$\text{ii)}\quad E_2^{p,q} = \mathrm{H}^q\Big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^\bullet, \mathscr{H}^{p,*,\mathrm{ar}}(\mathbb{L})\Big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}\Big(X_{K,\mathrm{et}}, \mathbb{L}\Big).$$

where $*$ stands for nothing or t. *Moreover, the spectral sequence i) is compatible with the residual G_V-action on all of its terms.*

The proof of theorem 4.1 will take the rest of this section. In particular, see 4.5.

4.1. Some Grothendieck topologies and associated sheaves. — Following [**14**, §3, p. 214] we define the following site:

Let X be a scheme flat over V. We denote by $X_{M,\mathrm{et}}$ the small étale site of X_M and by $\mathbf{Sh}(X_{M,\mathrm{et}})$ the category of sheaves of abelian groups on $X_{M,\mathrm{et}}$.

The site $\mathfrak{X}_M$. — The objects consist of pairs $\big(U, W\big)$ where

(i) $U \to X$ is étale;

(ii) $W \to U \otimes_V M$ is a finite étale cover.

The maps are compatible maps of pairs and the coverings of a pair (U, W) are families $\{(U_\alpha, W_\alpha)\}_\alpha$ over (U, W) such that $\amalg_\alpha U_\alpha \to U$ and $\amalg_\alpha W_\alpha \to W$ are surjective. It is easily checked that we get a Grothendieck topology in the sense of [**3**, I.0.1].

It is noetherian if X is noetherian; see [**3**, II.5.1]. Note that one has a final object, namely (X, X_M). Let $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)$ be the category of sheaves of abelian groups in $\mathfrak{X}_M$.

Let $\mathscr{X}$ be a formal scheme, flat over $\mathrm{Spf}(V)$ and with ideal of definition generated by p. Denote by $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$ the small étale site on $\mathscr{X}$ and by $\mathbf{Sh}(\mathscr{X}_{\mathrm{et}})$ the category of sheaves of abelian groups on $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$.

The sites $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$ and $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$. — Let $\mathscr{U} \to \mathscr{X}$ be an étale map of formal schemes. Define $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$ to be the category whose objects are pairs $\big(\mathscr{W}, L\big)$ where

(i) L is a finite extension of K contained in M;
(ii) $\mathscr{W} \to \mathscr{U}^{\mathrm{rig}} \otimes_K L$ is a finite étale cover of L-rigid analytic spaces; here $\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}$ denotes the K-rigid analytic space associated to $\mathscr{U}$.

Define $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}}\big((\mathscr{W}', L'), (\mathscr{W}, L)\big)$ to be empty if $L \not\subset L'$ and to be the set of morphisms $g\colon \mathscr{W}' \to \mathscr{W} \otimes_L L'$ of L'-rigid analytic spaces if $L \subset L'$. The coverings of a pair $(\mathscr{W}, L)$ in $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$ are families of pairs $\{(\mathscr{W}_\alpha, L_\alpha)\}_\alpha$ over $(\mathscr{W}, L)$ such that $\amalg_\alpha \mathscr{W}_\alpha \to \mathscr{W}$ is surjective. Define the fiber product of two pairs $(\mathscr{W}', L')$ and $(\mathscr{W}'', L'')$ over a pair $(\mathscr{W}, L)$ to be $(\mathscr{W}' \times_{\mathscr{W}} \mathscr{W}'', L''')$ with L''' equal to the composite of L' and L''. It is the fiber product in the category $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$

Let $\mathscr{U}_2 \to \mathscr{U}_1$ be a map of formal schemes over $\mathscr{X}$. Assume that they are étale over $\mathscr{X}$. We then have a morphism of Grothendieck topologies $\rho_{\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2}\colon \mathscr{U}_1^{M,\mathrm{fet}} \to \mathscr{U}_2^{M,\mathrm{fet}}$ given on objects by $(\mathscr{W}, L) \mapsto \big(\mathscr{W} \times_{\mathscr{U}_1^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}_2^{\mathrm{rig}}, L\big)$. It is clear how to define such a map for morphisms and that it sends covering families to covering families.

Let $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$ be the system of morphisms in $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$ of pairs $(\mathscr{W}', L') \to (\mathscr{W}, L)$ such that $g\colon \mathscr{W}' \to \mathscr{W} \otimes_L L'$ is an isomorphism. Then,

Lemma 4.2. — *The following hold:*

i) *the composite of two composable elements of $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$ is in $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$;*
ii) *given a map $\mathscr{U}_2 \to \mathscr{U}_1$ of formal schemes étale over $\mathscr{X}$, we have $\rho_{\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2}\big(\mathscr{S}_{\mathscr{U}_1}\big) \subset \mathscr{S}_{\mathscr{U}_2}$;*
iii) *the base change of an element of $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$ via a morphism in $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$ is again an element of $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$;*
iv) *if $f\colon (\mathscr{W}_1, L_1) \to (\mathscr{W}, L)$ and $g\colon (\mathscr{W}_2, L_2) \to (\mathscr{W}, L)$ are morphisms lying in $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$ and if $h\colon (\mathscr{W}_1, L_1) \to (\mathscr{W}_2, L_2)$ is a morphism in $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$ such that $f = g \circ h$, then h is in $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$.*

Proof. — Left to the reader. □

Thanks to 4.2 the category $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$ localized with respect to $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$ exists and we denote it by $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$. Note that the fiber product of two pairs over a given one exists in $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ and it coincides with the fiber product in $\mathscr{U}^{M,\mathrm{fet}}$. The coverings of a pair $(\mathscr{W}, L)$ in $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ are families of pairs $\{(\mathscr{W}_\alpha, L_\alpha)\}_\alpha$ over $(\mathscr{W}, L)$ such that $\amalg_\alpha \mathscr{W}_\alpha \to \mathscr{W}$ is surjective. By 4.2 the category $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ and the given families of covering define a Grothendieck topology. It is a noetherian topology if the topological space $\mathscr{X}$

is noetherian. By abuse of notation we will simply write $\mathscr{W}$ for an object $(\mathscr{W}, L)$ of $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$.

We recall that, given pairs $(\mathscr{W}_1, L_1)$ and $(\mathscr{W}_2, L_2)$ in $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$, one defines the set of homomorphisms

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}}\big((\mathscr{W}_1, L_1), (\mathscr{W}_2, L_2)\big) := \varinjlim_{(\mathscr{W}', L') \to (\mathscr{W}_1, L_1)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}}\big((\mathscr{W}', L'), (\mathscr{W}_2, L_2)\big),$$

where the direct limit is taken over all morphisms $(\mathscr{W}', L') \to (\mathscr{W}_1, L_1)$ in $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$. Equivalently, due to 4.2, it is the set of classes of morphisms $(\mathscr{W}_1, L_1) \leftarrow (\mathscr{W}', L') \to (\mathscr{W}_2, L_2)$, where $(\mathscr{W}', L') \to (\mathscr{W}_1, L_1)$ is in $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$, and two such diagrams $(\mathscr{W}_1, L_1) \leftarrow (\mathscr{W}', L') \to (\mathscr{W}_2, L_2)$ and $(\mathscr{W}_1, L_1) \leftarrow (\mathscr{W}'', L'') \to (\mathscr{W}_2, L_2)$ are equivalent if and only if there is a third one $(\mathscr{W}_1, L_1) \leftarrow (\mathscr{W}''', L''') \to (\mathscr{W}_2, L_2)$ mapping to the two. If $(\mathscr{W}_1, L_1) \leftarrow (\mathscr{W}', L') \to (\mathscr{W}_2, L_2)$ and $(\mathscr{W}_2, L_2) \leftarrow (\mathscr{W}'', L'') \to (\mathscr{W}_3, L_3)$ are two homomorphisms, the composite $(\mathscr{W}_1, L_1) \leftarrow (\mathscr{W}''', L''') \to (\mathscr{W}_3, L_3)$ is defined by taking $(\mathscr{W}''', L''')$ to be the fiber product of $(\mathscr{W}', L')$ and $(\mathscr{W}'', L'')$ over $(\mathscr{W}_2, L_2)$.

Let $\mathscr{U}_2 \to \mathscr{U}_1$ be a map of formal schemes étale over $\mathscr{X}$. Due to 4.2, the map $\rho_{\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2} : \mathscr{U}_1^{M,\mathrm{fet}} \to \mathscr{U}_2^{M,\mathrm{fet}}$ extends to the localized categories and defines a morphism of Grothendieck topologies $\mathscr{U}_{2,M,\mathrm{fet}} \to \mathscr{U}_{1,M,\mathrm{fet}}$ which, by abuse of notation, we write $\mathscr{W} \mapsto \mathscr{W} \times_{\mathscr{U}_1^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}_2^{\mathrm{rig}}$.

The site $\widehat{\mathfrak{X}}_M$. — Define $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ to be the category of pairs $(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ where $\mathscr{U} \to \mathscr{X}$ is an étale map of formal schemes and $\mathscr{W}$ is an object of $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$. A morphism of pairs $(\mathscr{U}', \mathscr{W}') \to (\mathscr{U}, \mathscr{W})$ is defined to be a morphism $\mathscr{U}' \to \mathscr{U}$ as schemes over $\mathscr{X}$ and a map $\mathscr{W}' \to \mathscr{W} \times_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}'^{\mathrm{rig}}$ in $\mathscr{U}'_{M,\mathrm{fet}}$. A family $\{(\mathscr{U}_\alpha, \mathscr{W}_{\alpha,\beta}, L_{\alpha,\beta})\}_\alpha \to (\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$ is a covering if $\{\mathscr{U}_\alpha\}_\alpha$ is an étale covering of $\mathscr{U}$ and, for every α, $\big(\mathscr{W}_{\alpha,\beta}, L_{\alpha,\beta}\big)_\beta$ is a covering of $\mathscr{W} \times_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}_\alpha^{\mathrm{rig}}$ in $\mathscr{U}_{\alpha,M,\mathrm{fet}}$.

Remark that the fiber product $(\mathscr{U}''', \mathscr{W}''')$ of two pairs $(\mathscr{U}', \mathscr{W}')$ and $(\mathscr{U}'', \mathscr{W}'')$ over a pair $(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ exists putting $\mathscr{U}''' := \mathscr{U}' \times_{\mathscr{U}} \mathscr{U}''$ and $\mathscr{W}'''$ to be the fiber product in $\mathscr{U}'''_{M,\mathrm{fet}}$ of $\mathscr{W}' \times_{\mathscr{U}'^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}'''^{\mathrm{rig}}$ and $\mathscr{W}'' \times_{\mathscr{U}''^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}'''^{\mathrm{rig}}$ over $\mathscr{W} \times_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}'''^{\mathrm{rig}}$. The pair $(\mathscr{X}, (\mathscr{X}^{\mathrm{rig}}, K))$ is a final object in $\widehat{\mathfrak{X}}_M$. We let $\mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M\big)$ be the category of sheaves of abelian groups on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$.

We remark that in all the categories $\mathbf{Sh}(\_)$ introduced above AB3* and AB5 hold and the representable objects provide families of generators. In particular, one has enough injectives; see [**3**, Thm. II.1.6 & § II.1.8].

4.2. Morphisms of Grothendieck topologies. — One has natural functors:

(I) $u_{X,M} : \mathfrak{X}_M \longrightarrow (X \otimes_V M)_{\mathrm{et}}$ with $u_{X,M}(U, W) := W$;
(II.a) $v_{X,M} : X_{\mathrm{et}} \longrightarrow \mathfrak{X}_M$ given by $v_{X,M}(U) := \big(U, U \otimes_V M\big)$;
(II.b) $\widehat{v}_{\mathscr{X},M} : \mathscr{X}_{\mathrm{et}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{X}}_M$ given by $\widehat{v}_{\mathscr{X},M}(\mathscr{U}) := (\mathscr{U}, (\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}, K))$.

Assume that $\mathscr{X}$ is the formal scheme associated to X i. e., that it is the formal completion of X along its special fiber. We then have:

(III) $\mu_{X,M}\colon \mathfrak{X}_M \longrightarrow \widehat{\mathfrak{X}}_M$ given by $\mu_{X,M}(U,W) := (\mathscr{U},(\mathscr{W},L))$ where $\mathscr{U}$ is the formal scheme associated to U and if the cover $W \to U \otimes_V M$ is defined over a finite extension $K \subset L$, contained in M, then $\mathscr{W} \to \mathscr{U}_L^{\mathrm{rig}}$ is the pull-back via $\mathscr{U}_L^{\mathrm{rig}} \to U_L^{\mathrm{rig}}$ of the associated finite and étale cover of rigid analytic spaces $W^{\mathrm{rig}} \to U_L^{\mathrm{rig}}$;

(IV) $\nu_X\colon X_{\mathrm{et}} \to \mathscr{X}_{\mathrm{et}}$ given by $\nu_X(U) = \mathscr{U}$ where $\mathscr{U}$ is the formal scheme associated to U.

Let $K \subset M_1 \subset M_2 \subset \overline{K}$ be field extensions. Define

(V.a) $\beta_{M_1,M_2}\colon \mathfrak{X}_{M_1} \to \mathfrak{X}_{M_2}$ by $\beta_{M_1,M_2}(U,W) = \big(U, W \otimes_{M_1} M_2\big)$.

(V.b) $\widehat{\beta}_{M_1,M_2}\colon \widehat{\mathfrak{X}}_{M_1} \to \widehat{\mathfrak{X}}_{M_2}$ by $\widehat{\beta}_{M_1,M_2}(\mathscr{U},\mathscr{W}) = \big(\mathscr{U},\mathscr{W}\big)$.

Due to the definition of $\widehat{\mathfrak{X}}_M$, the functors $\mu_{X,M}$ and $\widehat{\beta}_{M_1,M_2}$ are well defined. More precisely, given (U,W), the image $\mu_{X,M}(U,W)$ does not depend on the subfield $L \subset M$ to which W descends. Analogously, given $\mathscr{U} \in \mathscr{X}_{\mathrm{et}}$, then $\widehat{\beta}_{M_1,M_2}$ sends the multiplicative system $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$, used to define $\widehat{\mathfrak{X}}_{M_1}$, to the multiplicative system $\mathscr{S}_{\mathscr{U}}$ used to define $\widehat{\mathfrak{X}}_{M_2}$.

It is clear that the above functors send covering families to covering families and commute with fiber products. In particular, they are morphisms of topologies, see [**3**, Def. II.4.5]. Given any such functor g, we let g_* and g^* be the induced morphisms of the associated category of sheaves for the given topologies; see [**3**, p. 41-42]. Note that the functors above preserve final objects and commute with finite fibred products. Therefore, the induced functor g^* on the categories of sheaves is exact by [**3**, Thm. II.4.14].

We work out an example. If $\mathscr{F}$ is a sheaf on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$, then $\mu_{X,M,*}(\mathscr{F})$ is the sheaf on $\mathfrak{X}_M$ defined by $(U,W) \mapsto \mathscr{F}\big(\mu_{X,M}(U,W)\big)$. If $\mathscr{F}$ is a sheaf on $\mathfrak{X}_M$, then $\mu_{X,M}^*(\mathscr{F})$ is the sheaf associated to the separated presheaf defined by $(\mathscr{U},\mathscr{W}) \mapsto \lim_{(U',W')} \mathscr{F}(U',W')$ where the limit is the direct limit taken over all pairs (U',W') in $\mathfrak{X}_M$ and all maps $(\mathscr{U},\mathscr{W}) \to \mu_{X,M}\big(U',W'\big)$ in $\widehat{\mathfrak{X}}_M$.

Notation. — If $\mathscr{F}$ is a sheaf on X_{et} or is in $\mathbf{Sh}(X_{\mathrm{et}})^{\mathbf{N}}$ (see section 5 for the definition), we write $\mathscr{F}^{\mathrm{form}}$ for $\nu_X^*(\mathscr{F})$, respectively for $\nu_X^{*,\mathbf{N}}(\mathscr{F})$.

If $\mathbb{L}$ is a locally constant sheaf on $X_{M,\mathrm{et}}$, by abuse of notation we denote $\mathbb{L}$ its push forward $u_{X,M,*}(\mathbb{L}) \in \mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)$. It is a locally constant sheaf on $\mathfrak{X}_M$.

If $\mathscr{F}$ is a sheaf on $\mathfrak{X}_M$ or is in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)^{\mathbf{N}}$, we denote by $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ the pull-back $\mu_{X,M}^*(\mathscr{F})$. Note that if $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)$ is locally constant, then $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ is also a locally constant sheaf on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$.

4.3. Stalks [**14**, p. 214]. — Let K_x be a finite field extension of K contained in $\overline{K}$ and denote by V_x its valuation ring.

Fix a map $x\colon \mathrm{Spec}(V_x) \to X$ of V-schemes and denote by $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(\overline{V}) \to X$ the composite of x with the natural map $\mathrm{Spec}(\overline{V}) \to \mathrm{Spec}(V_x)$. Let $\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{sh}}$ be the the direct limit $\lim_i R_i$ taken over all pairs $\{(R_i,f_i)\}_i$ where $\mathrm{Spec}(R_i)$ is étale over X and $f_i\colon R_i \to \overline{V}$ defines a point over $\bar{x}$. Let $\mathscr{F}$ be a sheaf in $\mathbf{Sh}\big(X_{\mathrm{et}}\big)$. The stalk $\mathscr{F}_x$ of $\mathscr{F}$ at x is defined as $\mathscr{F}_x = \mathscr{F}\big(\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{sh}}\big)$ by which we mean the direct limit $\lim_i \mathscr{F}\big(\mathrm{Spec}(R_i)\big)$.

Define $\overline{\mathscr{O}}_{X,x,M}$ as the direct limit $\lim_{i,j} R'_{i,j}$ over the pairs $\{(R'_{i,j}, R'_{i,j} \to \overline{V})\}_{i,j}$ where (1) $R'_{i,j}$ is an integral R_i-algebra and is normal as a ring, (2) $R'_{i,j} \otimes_V K$ is a finite and étale extension of $R_i \otimes_V M$, (3) the composite $R_i \otimes_V M \to R'_{i,j} \otimes_V K \to \overline{K}$ is $r \otimes \ell \mapsto f_i(r) \cdot \ell$. If $\mathscr{F}$ is a sheaf in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)$, we then write $\mathscr{F}_x$ or equivalently $\mathscr{F}(\overline{\mathscr{O}}_{X,x,M} \otimes_V K)$ for the direct limit $\lim_{i,j} \mathscr{F}(\mathrm{Spec}(R_i), \mathrm{Spec}(R'_{i,j} \otimes_V K))$. We call it the stalk of $\mathscr{F}$ at x.

Let $G_{x,M}$ be the Galois group of $\overline{\mathscr{O}}_{X,x,M} \otimes_V K$ over $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x} \otimes_V M$. Then, $\mathscr{F}_x$ is endowed with an action of $G_{x,M}$.

Let $V \subset V_{\hat{x}}$ be a finite extension of DVRs. Let $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_{\hat{x}}) \to \mathscr{X}$ be a map of V-formal schemes and let $\widehat{\bar{x}}\colon \mathrm{Spf}(\widehat{\overline{V}}) \to \mathscr{X}$ be the composite of $\hat{x}$ with $\mathrm{Spf}(\widehat{\overline{V}}) \to \mathrm{Spf}(V_x)$. Define $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ be the direct limit $\lim_i S_i$ over all pairs $\{(S_i, g_i)\}_{i \in I}$ such that S_i is p-adically complete and separated V-algebra, $\mathrm{Spf}(S_i) \to \mathscr{X}$ is an étale map of formal schemes and $g_i\colon S_i \to \widehat{\overline{V}}$ defines a formal point over $\widehat{\bar{x}}$. If $\mathscr{F}$ is a sheaf in $\mathbf{Sh}(\mathscr{X}_{\mathrm{et}})$, the stalk $\mathscr{F}_{\hat{x}}$ of $\mathscr{F}$ at $\hat{x}$ is defined to be the direct limit $\mathscr{F}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}) := \lim_{i \in I} \mathscr{F}(\mathrm{Spf}(S_i))$.

Write $\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ for the direct limit $\lim_{i,j} S'_{i,j}$ over all triples $\{(S'_{i,j}, S'_{i,j} \to \widehat{\overline{V}}, L_{i,j})\}_{i,j}$ where (1) $L_{i,j}$ is a finite extension of K contained in M, (2) $S'_{i,j}$ is an integral extension of S_i and is normal as a ring, (3) $S'_{i,j} \otimes_V K$ is a finite and étale $S_i \otimes_V L_{i,j}$-algebra, (4) the composite $S_i \otimes_V L_{i,j} \to S'_{i,j} \otimes_V K \to \widehat{\overline{K}}$ is $a \otimes \ell \mapsto g_i(a) \cdot \ell$. Given a sheaf $\mathscr{F}$ in $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_M)$, denote by $\mathscr{F}_{\hat{x}}$, or equivalently $\mathscr{F}(\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M} \otimes_V K)$, the direct limit $\lim_{i,j} \mathscr{F}(\mathrm{Spf}(S_i), (\mathrm{Spm}(S'_{i,j} \otimes_V K), L_{i,j}))$. We call it the stalk of $\mathscr{F}$ at $\hat{x}$.

Denote by $G_{\hat{x},M}$ the Galois group of $\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M} \otimes_V K$ over $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}} \cdot M$. Then, $\mathscr{F}_{\hat{x}}$ is endowed with an action of $G_{\hat{x},M}$.

Lemma 4.3. — *Let $k(x)$ (resp. $\overline{k}$) be the residue field of V_x (resp. $\overline{V}$) and denote by $x_k\colon \mathrm{Spec}(k(x)) \to X_k$ (resp. $\bar{x}_k\colon \mathrm{Spec}(\overline{k}) \to X_k$) the points induced by x or $\hat{x}$ (resp. $\bar{x}$ or $\widehat{\bar{x}}$) on the special fiber X_k of X or of $\mathscr{X}$. Then,*

i. *$\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$ coincides with the strict henselization of $\mathscr{O}_{X,x_k}$ and $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ coincides with the strict formal henselization of $\mathscr{O}_{\mathscr{X},x_k}$.*

Assume that $\mathscr{X}$ is the formal scheme associated to X and that $\hat{x}$ is the map of formal schemes defined by x. Then,

ii. *$(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}, (p))$ and $(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}, (p))$ are noetherian henselian pairs and the natural map $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x} \to \mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ is an isomorphism after taking p-adic completions;*

iii. *the base change functor from the category of finite extensions of $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$, étale after inverting p, to the category of finite extensions of $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$, étale after inverting p, is an equivalence of categories;*

iv. *the maps $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}/p\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x} \to \mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}/p\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ and $\overline{\mathscr{O}}_{X,x,M}/p\overline{\mathscr{O}}_{X,x,M} \to \overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ are isomorphisms.*

v. *Frobenius on $\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ is surjective with kernel $p^{\frac{1}{p}}\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$.*

Proof. — (i) The strict henselization of $\mathscr{O}_{X,x_k}$ is defined as the direct limit $\lim_j T_j$ over all pairs $\{(T_j,t_j)\}_j$ where $\mathrm{Spec}(T_j)$ is étale over X and $t_j\colon T_j\to\overline{k}$ is a point over $\bar{x}_k$. In particular, we get a map $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}=\lim_i R_i\to\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x_k}=\lim_j T_j$ by associating to a pair $\big(R_i,f_i\colon R_i\to\overline{V}\big)$ the pair $\big(R_i,R_i\to\overline{V}\to\overline{k}\big)$. To conclude that such a map is an isomorphism it suffices to show that for any pair (T_j,t_j) there is a unique map of V-algebras $T_j\to\overline{V}$ lifting t_j and inducing the point $\bar{x}$. The base change of T_j via $\bar{x}$ defines an étale $\overline{V}$-algebra A_j and t_j induces a map of $\overline{V}$-algebras $A_j\to\overline{k}$. By étaleness of A_j the latter lifts uniquely to a map of $\overline{V}$-algebras $A_i\to\widehat{\overline{V}}$ which, since T_j is of finite type over V, factors via $\overline{V}$.

The strict formal henselization of $\mathscr{O}_{\mathscr{X},X_k}$ is defined as the direct limit $\lim_j Q_j$ over all pairs $\{Q_j,q_j\}_j$ where Q_j is a p-adically complete and separated V-algebra, $\mathrm{Spf}(Q_j)\to\mathscr{X}$ is an étale map of formal schemes and $q_j\colon Q_j\to\overline{k}$ is a point over $\bar{x}_k$. The proof that $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ is the strict formal henselization of $\mathscr{O}_{\mathscr{X},X_k}$ is similar to the first part of the proof and left to the reader.

(ii) It follows from (i) that $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$ (resp. $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$) is a local ring with residue field $\overline{k}$ and maximal ideal $\mathfrak{m}_x$ (resp. $\mathfrak{m}_{\hat{x}}$) generated by the maximal ideal of $\mathscr{O}_{X,x_k}$. In particular, the graded rings $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_x}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$ and $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_{\hat{x}}}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ are noetherian so that $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$ and $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ are noetherian.

We claim that $(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}},\mathfrak{m}_{\hat{x}})$ is a henselian pair; see [**11**, §0.1]. This amounts to prove that any étale map $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}\to B$, such that $\overline{k}=\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}/\mathfrak{m}_{\hat{x}}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}\to B/\mathfrak{m}_xB$ is an isomorphism, admits a section. Note that there exist i and an étale extension $S_i\to A$ such that B is obtained by base change of A via $S_i\to\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$. Via $a\colon A/\mathfrak{m}_xA\to B/\mathfrak{m}_xB\cong\overline{k}$ the pair $(\widehat{A},a)$, where $\widehat{A}$ is the p-adic completion of A, appears in the inductive system used to define the strict formal henselization of $\mathscr{O}_{\mathscr{X},x_k}$ so that, thanks to (i), we get a natural map $A\to\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ and, hence base-changing, a map of $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$-algebras $B\to\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$. Analogously, one proves that $(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x},\mathfrak{m}_x)$ is a henselian pair.

Note that p is contained in $\mathfrak{m}_x$, so that $\big(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x},(p)\big)$ and $\big(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}},(p)\big)$ are henselian pairs. Let $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X\otimes\mathbf{F}_p,x_k}$ be the strict henselization of the local ring of $X\otimes_V V/pV$ at x_k. By construction we have natural injective maps $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}/p\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}\to\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}/p\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}\to\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X\otimes\mathbf{F}_p,x_k}$. We claim that such maps are isomorphisms. It suffices to show that the composite is surjective. Using (i) this is equivalent to prove that the map from the strict henselization of $\mathscr{O}_{X,x_k}$ to the strict henselization of $\mathscr{O}_{X\otimes\mathbf{F}_p,x_k}$ is surjective. This amounts to show that given an étale map $f\colon\mathrm{Spec}(R)\to\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X\otimes\mathbf{F}_p,x_k})$, there exists an étale map $g\colon\mathrm{Spec}(S)\to\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x_k})$ reducing to f modulo p. By the Jacobian criterion of étaleness we have $R=\mathscr{O}_{X\otimes\mathbf{F}_p,x_k}[T_1,\dots,T_d]/(h_1,\dots,h_d)$ with $\det\left(\partial h_i/\partial T_j\right)_{i,j=1}^d$ invertible in R. Then, $S:=\mathscr{O}_{X,x_k}[T_1,\dots,T_d]/(q_1,\dots,q_d)\left[\det\left(\partial q_i/\partial T_j\right)^{-1}\right]$, with q_i lifting h_i, is an étale $\mathscr{O}_{X,x_k}$-algebra and lifts R as wanted. Since p is not a zero divisor in $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$ and in $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$, we conclude that the graded rings $\mathrm{gr}_p\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$ and in $\mathrm{gr}_p\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ are isomorphic, concluding the proof of (ii).

(iii) Let $\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}}$ (resp. $\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},x}}$) be the p-adic completion of $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$ (resp. $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$). Thanks to [**11**, Thm. 5] one knows that the category of finite extensions of $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$, étale after inverting p (resp. the category of finite extensions of $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$, étale after inverting p), is equivalent to the category of finite extensions of $\widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}} = \widehat{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},x}}$, étale after inverting p. The claim follows from (ii).

(iv) The first claim follows from (ii). The second follows from the first and (iii).

(v) Note that $p^{\alpha} \in \overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ for every $\alpha \in \mathbf{Q}_{>0}$. It follows from [**14**, §3, Lemma 5] that Frobenius is surjective on $\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}/p^{\alpha}\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ for every $0 < \alpha < 1$. Let $a \in \overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$. Write $a = b^p + p^{\frac{1}{p}}c$ with b and $c \in \overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$. Write $c = d^p + p^{1-\frac{1}{p}}e$ with $e \in \overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$. Then, $a \equiv (b + p^{\frac{1}{p^2}}d)^p$ modulo $p\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$.

Let $a \in \overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ be such that $a^p \in p\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$. Then, $\frac{a^p}{p} = \left(\frac{a}{p^{\frac{1}{p}}}\right)^p$ lies in $\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$. Since the latter is a normal ring, this implies that $\frac{a}{p^{\frac{1}{p}}} \in \overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ as claimed. □

Proposition 4.4. — *The notation is as above (in (2), (3) & (5) below we also assume that $\mathscr{X}$ is the formal scheme associated to X and that $\hat{x}$ is the map of formal schemes associated to x: $\mathrm{Spec}(V_x) \to X$).*

1) *Suppose that X (resp. $\mathscr{X}$) is locally (topologically) of finite type over V and that every closed point of X maps to the closed point of* $\mathrm{Spec}(V)$. *Then, a sequence of sheaves $\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ on X_{et} (resp. $\mathfrak{X}_M$, resp. $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$, resp. $\widehat{\mathfrak{X}}_M$) is exact if and only if for every point x of X (resp. $\hat{x}$ of $\mathscr{X}$) as above the induced sequence of stalks $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$ (resp. $\mathscr{F}_{\hat{x}} \to \mathscr{G}_{\hat{x}} \to \mathscr{H}_{\hat{x}}$) is exact;*
2) *let $\mathscr{F}$ be in $\mathbf{Sh}(X_{\mathrm{et}})$. Then, $\nu_X^*(\mathscr{F})_{\hat{x}} \cong \mathscr{F}_x$;*
3) *if $\mathscr{F}$ is in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)$, then, $\mu_{X,M}^*(\mathscr{F})_{\hat{x}} \cong \mathscr{F}_x$;*
4) *fix field extensions $K \subset M_1 \subset M_2 \subset \overline{K}$. Then, $\beta^*_{M_1,M_2}$ (resp. $\widehat{\beta}^*_{M_1,M_2}$) of a flasque sheaf is flasque. Furthermore, if $\mathscr{F}$ is in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_{M_1})$ (resp. $\mathscr{F}$ is in $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M_1})$), then one has natural identifications:*
   a) $\beta^*_{M_1,M_2}(\mathscr{F})_x = \mathscr{F}_x$ *(resp. $\widehat{\beta}^*_{M_1,M_2}(\mathscr{F})_{\hat{x}} = \mathscr{F}_{\hat{x}}$);*
   b) *if $M_1 \subset M_2$ is Galois with group G, then* $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{M_1}, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^0\left(\mathfrak{X}_{M_2}, \beta^*_{M_1,M_2}(\mathscr{F})\right)^G$ *(resp.* $\mathrm{H}^0(\widehat{\mathfrak{X}}_{M_1}, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^0\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{M_2}, \widehat{\beta}^*_{M_1,M_2}(\mathscr{F})\right)^G$*).*

   Assume that K_x is contained in M. Then,
5) *we have a natural isomorphisms $G_{\hat{x},M} \cong G_{x,M}$ and, if $\mathscr{F}$ is in $\mathfrak{X}_M$, the isomorphism $\mu_{X,M}^*(\mathscr{F})_{\hat{x}} \cong \mathscr{F}_x$ is compatible with the actions of $G_{\hat{x},M}$ and $G_{x,M}$*
6) *let $\mathscr{F}$ be a sheaf in $\mathfrak{X}_M$. Then, $\left(\mathrm{R}^q v_{X,M,*}(\mathscr{F})\right)_x \cong \mathrm{H}^q\left(G_{x,M}, \mathscr{F}_x\right)$;*
7) *let $\mathscr{F}$ be a sheaf in $\widehat{\mathfrak{X}}_M$. Then, $\left(\mathrm{R}^q \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F})\right)_{\hat{x}} \cong \mathrm{H}^q\left(G_{\hat{x},M}, \mathscr{F}_{\hat{x}}\right)$.*

Proof. — (1) In each case it suffices to prove that a sheaf is trivial if and only if all its stalks are.

We give a proof for a sheaf on $\mathfrak{X}_M$ and leave the other cases to the reader. Let $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)$ such that for every point x of X, defined over a finite extension of K, we

have $\mathscr{F}_x = 0$. Let $(U,W) \in \mathfrak{X}_M$ and let $\alpha \in \mathscr{F}(U,W)$. Then, for every $x\colon \mathrm{Spec}(V_x) \to U$ and every point $y\colon \mathrm{Spec}(K_y) \to W$ over $x \otimes_V K$, which exists since $W \to U_M$ is finite, there exist $(U_x, W_y) \in \mathfrak{X}_M$ and a map $(U_x, W_y) \to (U,W)$ such that (1) $x \otimes_V \overline{V}$ factors via U_x, (2) $y \otimes_K \overline{K}$ factors via W_y and (3) the image of α in $\mathscr{F}(U_x, W_y)$ is 0.

Due to the assumption, the set of points x (resp. y) as above are dense in U (resp. W) so that there exist points x_i and y_i such that $\amalg_i (U_{x_i}, W_{y_i}) \to (U,W)$ is a covering of (U,W) in $\mathfrak{X}_M$. Since $\mathscr{F}$ is a sheaf, the homomorphism $\mathscr{F}(U,W) \to \prod_i \mathscr{F}(U_{x_i}, W_{y_i})$ is injective. Hence, $\alpha = 0$ to start with.

(2) Since any sheaf is the direct limit of representable sheaves and direct limits commute with ν_X^* and with taking stalks, we may assume that $\mathscr{F}$ is represented by an étale X-scheme $Y \to X$. In particular, $\nu_X^*(\mathscr{F})$ is represented by the formal scheme $\mathscr{Y}$ associated to Y. Let Y_x (resp. $\mathscr{Y}_{\hat{x}}$) be the pull back of Y (resp. $\mathscr{Y}$) to $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ (resp. $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\hat{x}})$). We then have the following diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{F}_x & & \nu_X^*(\mathscr{F})_{\hat{x}} & & \\ \| & & \| & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}\left(\mathscr{O}_{Y_x}, \mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{sh}}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X},\hat{x}}}\left(\mathscr{O}_{\mathscr{Y}_{\hat{x}}}, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\hat{x}}^{\mathrm{sh}}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k\left(\mathscr{O}_{Y_x} \otimes_V k, \overline{k}\right). \end{array}$$

By 4.3(i) these maps are bijective as claimed.

(4) If $\mathscr{F}$ is in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_{M_1})$, then $\beta_{M_1,M_2}^*(\mathscr{F})$ is the sheaf in $\mathfrak{X}_{M_2}$ associated to the presheaf $\beta_{M_1,M_2}^{-1}(\mathscr{F})$ defined by $(U,W) \mapsto \lim \mathscr{F}(U',W')$ where the limit is taken over all the pairs (U',W') in $\mathfrak{X}_{M_1}$ and all the maps $(U,W) \to (U', W' \otimes_{M_1} M_2)$. This is equivalent to take the direct limit over all pairs (U,W') in $\mathfrak{X}_{M_1}$ and over all maps $(U,W) \to (U,W')$ as U_{M_1}-schemes. If $M_1 \subset M_2$ is finite, there exists an initial pair, namely (U,W) itself, viewed in $\mathfrak{X}_{M_1}$ via the finite and étale map $W \to U \otimes_V M_2 \to U \otimes_V M_1$, so that $\beta_{M_1,M_2}^{-1}(\mathscr{F})(U,W) = \mathscr{F}(U,W)$. In general, there exists a finite extension $M_1 \subset L$ contained in M_2 and a pair (U, W_L) in $\mathfrak{X}_L$ such that $W = W_L \otimes_L M_2$. Since any morphism of pairs in $\mathfrak{X}_{M_2}$ descends to a finite extension of M_1, we conclude that $\beta_{M_1,M_2}^{-1}(\mathscr{F})(U,W) = \mathscr{F}(U, W_L \otimes_L M_2)$, defined as the direct limit $\lim_{L'} \mathscr{F}(U, W_L \otimes_L L')$ taken over all finite extensions $L \subset L'$ contained in M_2, considering $(U, W_L \otimes_L L')$ in $\mathfrak{X}_{M_1}$ via the finite and étale map $W_L \otimes_L L' \to U \otimes_V L \to U \otimes_V K$. In any case, we conclude that $\beta_{M_1,M_2}^{-1}(\mathscr{F})$ is already a sheaf i. e., $\beta_{M_1,M_2}^{-1}(\mathscr{F}) = \beta_{M_1,M_2}^*(\mathscr{F})$. Furthermore, β_{M_1,M_2}^* preserves flasque objects and satisfies (a).

For (b), recall that $\mathfrak{X}_{M_1}$ and $\mathfrak{X}_{M_2}$ have final objects so that global sections can be computed using the final objects. Since $X_{M_2} \to X_{M_1}$ is a limit of finite and étale covers with Galois group G and $\mathscr{F}$ is a sheaf on $\mathfrak{X}_{M_1}$, one has $\mathscr{F}(X, X_{M_1}) = \mathscr{F}(X, X_{M_2})^G$. Then, $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{M_1}, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X, X_{M_1}) = \mathscr{F}(X, X_{M_2})^G = \mathrm{H}^0\left(\mathfrak{X}_{M_2}, \beta_{M_1,M_2}^*(\mathscr{F})\right)^G$ and (b) follows.

A similar argument works for $\widehat{\beta}_{M_1,M_2}^*$. Details are left to the reader.

(3) & (5) The first claim in (5) follows from 4.3(iii). To get the second claim and (3), one argues as in (2) reducing to the case of a sheaf represented by a pair (U, W), so that $\mu^*_{X,M}(U, W) = (\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$, and using 4.3(iii).

(6) Consider the functor $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M) \to (G_{x,M}\text{-Modules})$, associating to a sheaf $\mathscr{F}$ its stalk $\mathscr{F}_x$. It is an exact functor. Recall that $\mathscr{F}_x = \lim_{i,j} \mathscr{F}\big(\mathrm{Spec}(R_i), \mathrm{Spec}(R'_{i,j} \otimes_V K)\big)$. Thus, the continuous Galois cohomology $\mathrm{H}^*\big(G_{x,M}, \mathscr{F}_x\big)$ is the direct limit over i and j of the Chěch cohomology of $\mathscr{F}$ relative to the covering $\big(\mathrm{Spec}(R_i), \mathrm{Spec}(R'_{i,j} \otimes_V K)\big)$. In particular, if $\mathscr{F}$ is injective, it is flasque and $\mathrm{H}^q\big(G_{x,M}, \mathscr{F}_x\big) = 0$ for $q \geq 1$.

Both $\big\{(\mathrm{R}^q v_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F}))_x\big\}_q$ and $\big\{\mathrm{H}^q\big(G_{x,M}, \mathscr{F}_x\big)\big\}_q$ are δ-functors from $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)$ to the category of abelian groups. Also $(\mathrm{R}^q v_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F}))_x$ is zero for $q \geq 1$ and $\mathscr{F}$ injective. For $q = 0$ we have

$$\big(\mathrm{R}^0 v_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F})\big)_x = \lim_i \mathscr{F}\big(\mathrm{Spec}(R_i), \mathrm{Spec}(R_i \underset{V}{\otimes} K)\big) = \mathscr{F}\big(\overline{\mathscr{O}}_{X,x,M} \underset{V}{\otimes} K\big)^{G_{x,M}}.$$

This proves the claim.

(7) The proof is similar to the proof of (6) and left to the reader. □

Lemma 4.5. — *Assume that $\mathscr{X}$ is the formal scheme associated to X, that X is locally of finite type over V and that every closed point of X maps to the closed point of* $\mathrm{Spec}(V)$. *We then have the following equivalences of δ-functors :*

i. $\mathrm{R}^q\big(\nu_X^* \circ v_{X,M,*}\big) = \nu_X^* \circ \mathrm{R}^q v_{X,M,*}$ *and* $\mathrm{R}^q\big(\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*} \circ \mu^*_{X,M}\big) = \big(\mathrm{R}^q \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\big) \circ \mu^*_{X,M}$;

ii. $\nu_X^* \circ \mathrm{R}^q v_{X,M,*} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{R}^q \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\big) \circ \mu^*_{X,M}$.

Proof. — (i) Since ν_X^* and $\mu^*_{X,M}$ are exact and $v_{X,M,*}$ and $\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}$ are left exact, the derived functors of $\nu_X^* \circ v_{X,M,*}$ and $\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*} \circ \mu^*_{X,M}$ exist. By 4.4 we have

$$\nu_X^* \left(\mathrm{R}^q v_{X,M,*}(\mathscr{F})\right)_{\hat{x}} \cong \left(\mathrm{R}^q v_{X,M,*}\left(u_{X,M,*}(\mathscr{F})\right)\right)_x \cong \mathrm{H}^q\left(G_{x,M}, \mathscr{F}_x\right)$$

and

$$\mathrm{R}^q \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\left(\mu^*_{X,M}(\mathscr{F})\right)_{\hat{x}} \cong \mathrm{H}^q\left(G_{\hat{x},M}, \mu^*_{X,M}(\mathscr{F})_x\right).$$

This implies that if $\mathscr{F}$ is injective, $\nu_X^*\left(\mathrm{R}^q v_{X,M,*}(\mathscr{F})\right) = 0$ and $\mathrm{R}^q \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\left(\mu^*_{X,M}(\mathscr{F})\right) = 0$ for $q \geq 1$. Hence, $\mathrm{R}^q\big(\nu_X^* \circ v_{X,M,*}\big) = \nu_X^* \circ \mathrm{R}^p v_{X,M,*}$ (resp. $\mathrm{R}^q\big(\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*} \circ \mu^*_{X,M}\big) = \mathrm{R}^q \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*} \circ \mu^*_{X,M}$). Indeed, they are both δ-functors since ν_X^* (resp. $\mu^*_{X,M}$) is exact, they are both erasable and they coincide for $q = 0$.

(ii) We construct a map $\gamma_{\mathscr{F}} \colon \nu_X^*\left(v_{X,M,*}(\mathscr{F})\right) \longrightarrow \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\left(\mu^*_{X,M}(\mathscr{F})\right)$ functorial in $\mathscr{F}$. The sheaf $\nu_X^*\left(v_{X,M,*}(\mathscr{F})\right)$ is the sheafification of the presheaf $\mathscr{F}_1$ which associates to an object $\mathscr{U}$ in $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$ the direct limit $\lim \mathscr{F}(U, U_K)$ taken over all $U \in X_{\mathrm{et}}$ and all maps from $\mathscr{U}$ to the formal scheme associated to U. On the other hand, the *presheaf* $\mathscr{F}_2 := \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\left(\mu^*_{X,M}(\mathscr{F})\right)$ ($\mu^*_{X,M}(\mathscr{F})$ is taken as presheaf) associates to $\mathscr{U} \in \mathscr{X}_{\mathrm{et}}$ the direct limit $\lim \mathscr{F}(U, W)$ over all (U, W) in $\mathfrak{X}_M$ and all maps from $\mathscr{U}$ to the formal scheme associated to U and from $\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}$ to the rigid analytic space defined by $W^{\mathrm{rig}} \times_{U^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}^{\mathrm{rig}}$. We thus get a morphism at the level of presheaves $\mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$. Passing to the associated sheaves we get the claimed map.

The map $\gamma_{\mathscr{F}}$ induces $\mathrm{R}^q\gamma_{\mathscr{F}}\colon \mathrm{R}^q\big(\nu_X^*\circ v_{X,M,*}\big)(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{R}^q\big(\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\circ\mu_{X,M}^*\big)(\mathscr{F})$. Using (i), we get a natural transformation of δ-functors as claimed in (ii). We are left to prove that it is an isomorphism. This can be checked on stalks and, as explained in the proof of (i), it amounts to prove that for any sheaf $\mathscr{F}$ one has $\mathrm{H}^q\left(G_{x,M},\mathscr{F}_x\right)\cong \mathrm{H}^q\left(G_{\hat{x},M},\mu_{X,M}^*(\mathscr{F})_{\hat{x}}\right)$. The conclusion follows since $\mu_{X,M}^*(\mathscr{F})_{\hat{x}}\cong\mathscr{F}_x$ and $G_{x,M}\cong G_{\hat{x},M}$ thanks to 4.4. □

For later purposes we introduce the following variants of the topologies introduced above:

4.4. Pointed étale sites. — Les $\mathscr{X}$ be a p-adic formal scheme, formally smooth over $\mathrm{Spf}(V)$ and with $\mathscr{X}\otimes_V k$ geometrically irreducible. Let $\mathbb{K}$ be a separable closure of the field of fractions of $\mathscr{X}\otimes_V k$. Let $\mathbf{W}_{\mathbb{K}}$ be a Cohen ring for $\mathbb{K}$ i. e., a complete DVR such that $\mathbf{W}_{\mathbb{K}}/p\mathbf{W}_{\mathbb{K}}\cong\mathbb{K}$. Let $\mathbb{C}_{\mathscr{X}}$ be the p-adic completion of an algebraic closure of the fraction field of $\mathbf{W}_{\mathbb{K}}$ containing $\overline{K}$.

The site $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$. — Denote by $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$ the following Grothendieck topology. As a category it consists of pairs $(\mathscr{U},s)$ where $\mathscr{U}\to\mathscr{X}$ is an étale morphism of formal schemes and s is a morphism $\mathrm{Spf}\big(\mathbf{W}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathbf{W}(k)}V\big)\to\mathscr{U}$ of V-formal schemes inducing a geometric generic point of $\mathscr{U}_k$. A map of pairs $(\mathscr{U},s)\to(\mathscr{U}',s')$ is a map of $\mathscr{X}$-schemes $\mathscr{U}\to\mathscr{U}'$ such that the composite with s is s'. A covering $\amalg_{i\in I}(\mathscr{U}_i,s_i)\to(\mathscr{U},s)$ is defined to a map of pairs $(\mathscr{U}_i,s_i)\to(\mathscr{U},s)$ for every i such that $\amalg_i\mathscr{U}_i\to\mathscr{U}$ is an étale covering.

Fix $\hat{x}\colon\mathrm{Spf}(V_x)\to\mathscr{X}$ as in 4.3 and *choose* a homomorphism $\eta_{\hat{x}}\colon\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}\to\mathbf{W}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathbf{W}(k)}V$ inducing the geometric generic point $\mathbb{K}$ on $\mathscr{X}\otimes_V k$. Given a sheaf $\mathscr{F}$ on $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$ define $\mathscr{F}_{\hat{x}}$ to be $\mathscr{F}\big(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}\big)$ as in 4.3 i. e., if $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ is the direct limit $\lim_i S_i$ as in loc. cit. and if $s_i\colon\mathrm{Spf}(\mathbf{W}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathbf{W}(k)}V)\to\mathrm{Spf}(S_i)$ is defined composing with $\eta_{\hat{x}}$, then $\mathscr{F}\big(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}\big):=\lim_{i\in I}\mathscr{F}\big((\mathrm{Spf}(S_i),s_i)\big)$. One then proves that a sequence of sheaves on $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$ is exact if and only if the associated sequence of stalks is exact for every $\hat{x}\colon\mathrm{Spf}(V_x)\to\mathscr{X}$.

The site $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$. — Define $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ to be the following Grothendieck topology. Its objects are the pairs $\big((\mathscr{U},s),\mathscr{W},L\big)$ where $(\mathscr{U},\mathscr{W},L)$ is an object of $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ and $(\mathscr{U},s)$ is an object of $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$. A morphism $\big((\mathscr{U},s),\mathscr{W},L\big)\to\big((\mathscr{U}',s'),\mathscr{W}',L'\big)$ in $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ is a morphism $(\mathscr{U},\mathscr{W},L)\to(\mathscr{U}',\mathscr{W}',L')$ in $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ such that the induced map $\mathscr{U}\to\mathscr{U}'$ arises from a map $(\mathscr{U},s)\to(\mathscr{U}',s')$ in $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$. A covering $\amalg_{i\in I}\big((\mathscr{U}_i,s_i),\mathscr{W}_i,L_i\big)\to\big((\mathscr{U}',s'),\mathscr{W}',L'\big)$ is the datum of morphisms $\big((\mathscr{U}_i,s_i),\mathscr{W}_i,L_i\big)\to\big((\mathscr{U}',s'),\mathscr{W}',L'\big)$ for every $i\in I$ such that $\amalg_i(\mathscr{U}_i,\mathscr{W}_i,L_i)\to(\mathscr{U}'\mathscr{W}',L')$ is a covering in $\widehat{\mathfrak{X}}_M$.

Fix $\hat{x}\colon\mathrm{Spf}(V_x)\to\mathscr{X}$ as in 4.3. Choose a map $\eta_{\hat{x}}\colon\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}}\to\mathbf{W}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathbf{W}(k)}V$ inducing the geometric generic point $\mathbb{K}$ on $\mathscr{X}\otimes_V k$. Given a sheaf $\mathscr{F}$ on $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ put $\mathscr{F}_{\hat{x}}:=\mathscr{F}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}\otimes_V K\big)$ where, using the notation of 4.3, we write $\mathscr{F}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}\otimes_V K\big):=\lim_{i,j}\mathscr{F}\big((\mathrm{Spf}(S_i),s_i),\mathrm{Spm}(S'_{i,j}\otimes_V K),L_{i,j}\big)$. Then, a sequence of sheaves on $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ is

exact if and only if the associated sequence of stalks is exact for every $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_x) \to \mathscr{X}$.

We have functors

(i) $a\colon \mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet} \to \mathscr{X}_{\mathrm{et}}$ given by $a(\mathscr{U}, s) = \mathscr{U}$;

(ii) $b\colon \widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet} \to \widehat{\mathfrak{X}}_M$ given by $b\big((\mathscr{U}, s), \mathscr{W}, L\big) = (\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$;

(iii) $\widehat{v}_{\mathscr{X},M}\colon \mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet} \to \widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ given by $\widehat{v}_{\mathscr{X},M}(\mathscr{U}, s) = \big((\mathscr{U}, s), \mathscr{U}^{\mathrm{rig}}, K\big)$.

As in 4.4(7) one proves that for every point $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_x) \to \mathscr{X}$,

$$\big(\mathrm{R}^i \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F})\big)_{\hat{x}} \cong \mathrm{H}^i\left(G_{\hat{x},M}, \mathscr{F}_{\hat{x}}\right), \qquad G_{\hat{x},M} := \mathrm{Gal}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M} \underset{V}{\otimes} K / \mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathscr{X},\hat{x}} \cdot M\big).$$

Then:

Lemma 4.6. — *Assume that X is smooth and geometrically irreducible over V and let $\mathscr{X}$ be the associated p-adic formal scheme. Then: The categories $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$ and $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ admit final objects. Furthermore, a (resp. b, resp. $\widehat{v}_{\mathscr{X},M}$) send final object to final object and a (resp. b) are surjective.*

Proof. — Since $\mathscr{X}$ is formally smooth over $\mathrm{Spf}(V)$, for every étale map $\mathscr{U} \to \mathscr{X}$ also $\mathscr{U}$ is formally smooth over V. Thus, if $\mathscr{U}$ irreducible and if we fix a geometric generic point $\overline{s}_{\mathscr{U}}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{K}) \to \mathscr{U}_k$, there exists a map $s_{\mathscr{U}}\colon \mathrm{Spf}\left(\mathbf{W}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbf{W}(k)} V\right) \to \mathscr{X}$ lifting $\overline{s}_{\mathscr{U}}$. This proves that a, and hence b, are surjective.

We claim that $(\mathscr{X}, s_{\mathscr{X}})$ is a final object in $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$. This implies that $\big((\mathscr{X}, s_{\mathscr{X}}), \mathscr{X}^{\mathrm{rig}}, K\big)$ is a final object in $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ and that a, b and $\widehat{v}_{\mathscr{X},M}$ preserve final objects. To prove the claim it suffices to show that given two maps s, $s'\colon \mathrm{Spf}\left(\mathbf{W}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbf{W}(k)} V\right) \to \mathscr{X}$ as V-formal schemes, inducing the generic point of $\mathscr{X}_k$, there exists an automorphism ρ of $\mathbf{W}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbf{W}(k)} V$ (as V-algebra) such that $s' = s \circ \rho$. Let R be the p-adic completion of the localization of $\mathscr{X}$ at its generic point. It is a DVR. Write Z for $\mathbf{W}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbf{W}(k)} V$. Then s and s' induce maps f and $f'\colon R \to Z$ such that, considering f or f', the maximal ideal of Z is generated by the maximal ideal of R and the residue field of Z is a separable closure of the residue field of R. By uniqueness of étale extensions, there exists an automorphism h of Z, as V-algebra, such that $g = h \circ f$. □

Corollary 4.7. — *Let $\mathscr{F}$ be a sheaf on $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$ (resp. $\widehat{\mathfrak{X}}_M$). We have a natural isomorphism of δ-functors $\mathrm{H}^i\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}, a_*(\mathscr{F})\big) \cong \mathrm{H}^i(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}, \mathscr{F})$ (resp. $\mathrm{H}^i\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}, b_*(\mathscr{F})\big) \cong \mathrm{H}^i(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \mathscr{F})$).*

Proof. — We have functors

$$a_*\colon \mathbf{Sh}\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}\big) \longrightarrow \mathbf{Sh}\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}\big), \qquad b_*\colon \mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M\big) \longrightarrow \mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}\big),$$

which send flasque objects to flasque objects. Since a and b are surjective by 4.6, a_* and b_* are also exact. Since $\mathrm{H}^0\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}, a_*(\mathscr{F})\big) \cong \mathrm{H}^0(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}, \mathscr{F})$ and $\mathrm{H}^0\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}, b_*(\mathscr{F})\big) \cong \mathrm{H}^0(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \mathscr{F})$, the lemma follows. □

This allows to work with pointed sites, which are better suited for Galois cohomology computations. Indeed, let $(\mathscr{U}, s) \in \mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$ with $\mathscr{U}$ connected

and let $\overline{\eta}_s\colon \mathrm{Spm}(\mathbb{C}_{\mathscr{X}}) \to \mathscr{U}_K^{\mathrm{rig}}$ be the composite of s_K^{rig} and the morphism $\mathbf{W}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbf{W}(k)} K \to \mathbb{C}_{\mathscr{X}}$ chosen in 4.4. It induces a map $R_{\mathscr{U}} \subset \mathbb{C}_{\mathscr{X}}$. Let $R_{\mathscr{U}} \subset \overline{R}_{\mathscr{U}}$ be the union of all finite and normal $R_{\mathscr{U}}$-subalgebras of $\mathbb{C}_{\mathscr{X}}$, which are étale after inverting p. Define $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}_M^{\mathrm{rig}}, \overline{\eta}_s)$, or simply $\pi_1(\mathscr{U}_M)$, to be $\mathrm{Gal}\left(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K / R_{\mathscr{U}} \otimes_V M\right)$ and let $\mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)$ be the category of abelian groups, with the discrete topology, endowed with a continuous action of $\pi_1(\mathscr{U}_M)$.

Lemma 4.8. — *The category $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ is equivalent, as Grothendieck topology, to the category of finite sets with continuous action of $\pi_1(\mathscr{U}_M) := \mathrm{Gal}\left(\overline{R}_{\mathscr{U}}\left[\frac{1}{p}\right] / R_{\mathscr{U}} \otimes_V M\right)$. In particular,*

1) *the functor*

$$\mathbf{Sh}\,(\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big), \qquad \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \underset{V}{\otimes} K),$$

with $\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K) := \lim_{(\mathscr{U},\mathscr{W})} \mathscr{F}(\mathscr{U},\mathscr{W})$ where the direct limit is over all elements of $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$, defines an equivalence of categories;

2) *for $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}\,(\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}})$ we have $\mathrm{H}^i\big(\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}, \mathscr{F}\big) = \mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M), \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K)\big)$, where the latter is the derived functor of $\mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big) \ni A \mapsto A^{\pi_1(\mathscr{U}_M)}$ (the Galois invariants of A).*

Proof. — The first claim follows noting that $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ is the category of finite and étale covers of $R_{\mathscr{U}} \otimes_V M$. By Grothendieck's reformulation of Galois theory the latter is equivalent to the category of finite sets with continuous action of $\pi_1(\mathscr{U}_M)$.

An inverse of the functor given in (1) is given as follows. Let $G \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)$. Let $(\mathscr{U}, \amalg_i(\mathscr{W}_i, L_i)) \in \widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$ with $\mathscr{W}_i = \mathrm{Spm}(S_i)$ and $S_i \otimes_{L_i} M$ a domain and fix an embedding $f_i\colon S_i \otimes_{L_i} M \to \overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K$. Let $H_i := \mathrm{Gal}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K / S_i \otimes_L M) \subset \pi_1(\mathscr{U}_M)$ which is independent of f_i. Then, define $\mathscr{G}\big(\mathscr{U}, \amalg_i(\mathscr{W}_i, L_i)\big) = \prod_i G^{H_i}$. One verifies that $\mathscr{G}$ is a sheaf and that the two functors are the inverse one of the other.

For claims (2) we note that the cohomology groups appearing are universal δ-functors coinciding for $i = 0$. □

We next show that the sites introduced above are very useful in order to compute étale cohomology:

Proposition 4.9. — *(Faltings) Assume that X is locally of finite type over V and that every closed point of X maps to the closed point of $\mathrm{Spec}(V)$. Let $\mathbb{L}$ be a finite locally constant étale sheaf on X_M annihilated by p^s. For every i the map $\mathrm{H}^i\,(\mathfrak{X}_M, \mathbb{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^i\,(X_{M,\mathrm{et}}, \mathbb{L})$, induced by pull-back along $u_{X,M}$, is an isomorphism.*

Proof. — [**14**, Rmk. p. 242] Put $G_M := \mathrm{Gal}(\overline{K}/M)$. We have a spectral sequence

$$\mathrm{H}^p\big(G_M, \mathrm{H}^q(X_{\overline{K},\mathrm{et}}, \mathbb{L})\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}\big(X_{M,\mathrm{et}}, \mathbb{L}\big)$$

and, thanks to 4.4(4.b), a spectral sequence

$$\mathrm{H}^p\big(G_M, \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}_{\overline{K}}, \mathbb{L})\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}\big(\mathfrak{X}_M, \mathbb{L}\big).$$

Hence, it suffices to prove the proposition for $M = \overline{K}$. Let $z_{X,\overline{K}}\colon X_{\mathrm{et}} \to X_{\overline{K},\mathrm{et}}$ be the map $U \to U \otimes_V \overline{K}$. We can factor it via the maps $v_{X,\overline{K}}\colon X_{\mathrm{et}} \to \mathfrak{X}_{\overline{K}}$ and $u_{X,\overline{K}}\colon \mathfrak{X}_{\overline{K}} \to X_{\overline{K},\mathrm{et}}$. This induces a spectral sequence $\mathrm{R}^p v_{X,\overline{K},*} \circ \mathrm{R}^q u_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L}) \Longrightarrow \mathrm{R}^{p+q} z_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})$ which provides with a map $\mathrm{R}^p v_{X,\overline{K},*}\big(u_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})\big) \to \mathrm{R}^p z_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})$. As usual we write $\mathbb{L}$ for $u_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})$. Furthermore, since $\mathbb{L}$ is a finite locally constant étale sheaf on X_K, for every point $x\colon \mathrm{Spec}(V_x) \to X$ the stalk $\big(u_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})\big)_x$ is isomorphic to $\mathbb{L}_{x_K}$. One knows from [**12**, Cor. II.2.2] that $\mathrm{Spec}\left(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x} \otimes_V \overline{K}\right)$ is $K(\pi,1)$. This implies that the stalk $\big(\mathrm{R}^q z_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})\big)_x$ is $\mathrm{H}^q\big(G_{x,\overline{K}}, \mathbb{L}_x\big)$. By 4.4 also the stalk $\big(\mathrm{R}^q v_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})\big)_x$ coincides with $\mathrm{H}^q\big(G_{x,\overline{K}}, \mathbb{L}_x\big)$. Hence, $\mathrm{R}^q u_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L}) \cong \mathrm{R}^q z_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})$. Using the spectral sequences

$$\mathrm{H}^p\big(X_{\mathrm{et}}, \mathrm{R}^q z_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}\left(X_{\overline{K},\mathrm{et}}, \mathbb{L}\right)$$

and

$$\mathrm{H}^p\big(X_{\mathrm{et}}, \mathrm{R}^q v_{X,\overline{K},*}(\mathbb{L})\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}\left(\mathfrak{X}_{\overline{K}}, \mathbb{L}\right)$$

the proposition follows. □

4.5. Comparison between algebraic cohomology and formal cohomology

Assume that X is locally of finite type over V and that every closed point of X maps to the closed point of $\mathrm{Spec}(V)$. Let $\mathscr{X}$ be the associated formal scheme. Since ν_X^* is an exact functor, given an injective resolution $I^\bullet$ of $\mathscr{F}$, then $0 \to \nu_X^*(\mathscr{F}) \to \nu_X^*(I^\bullet)$ is exact so that given an injective resolution $J^\bullet$ of $\mathscr{F}^{\mathrm{form}} = \nu_X^*(\mathscr{F})$ we can extend the identity map on $\mathscr{F}$ to a morphism of complexes $\nu_X^*(I^\bullet) \to J^\bullet$. Since ν_X sends the final object X of X_{et} to the final object $\mathscr{X}$ of $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$, one has a natural map $I^\bullet(X) \to \nu_X^*(I^\bullet)(\mathscr{X})$. Then,

Definition 4.10. — One has natural maps of δ-functors

$$\rho^q_{X,\mathscr{X}}(\mathscr{F})\colon \mathrm{H}^q\big(X_{\mathrm{et}}, \mathscr{F}\big) \to \mathrm{H}^q\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}, \mathscr{F}^{\mathrm{form}}\big),$$
$$\rho^q_{\mathfrak{X}_M,\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{F})\colon \mathrm{H}^q\big(\mathfrak{X}_M, \mathscr{F}\big) \to \mathrm{H}^q\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}\big)$$

Note that one has spectral sequences

$$\mathrm{H}^q\big(X_{\mathrm{et}}, \mathrm{R}^p v_{X,M,*}(\mathscr{F})\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathfrak{X}_M, \mathscr{F}) \tag{7}$$

and

$$\mathrm{H}^q\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}, \nu_X^*\mathrm{R}^p v_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F})\big) = \mathrm{H}^q\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}, \mathrm{R}^p \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\big(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}\big)\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}\big) \tag{8}$$

where the equality on the left hand side is due to 4.5.

Proposition 4.11. — *The following hold:*

a. *If $\mathscr{F}$ in $\mathbf{Sh}(X_{\mathrm{et}})$ is torsion, the map $\rho^q_{X,\mathscr{X}}(\mathscr{F})$ is an isomorphism;*
b. *the spectral sequences (7) and (8) are compatible via $\rho^q_{X,\mathscr{X}}$ and $\rho^{p+q}_{\mathfrak{X}_M,\widehat{\mathfrak{X}}_M}$;*
c. *if $\mathscr{F}$ is a torsion sheaf on $\mathfrak{X}_M$, the map $\rho^q_{\mathfrak{X}_M,\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{F})$ is an isomorphism.*

Proof. — (a) Let $X_k := X \otimes_V k$ and denote by $\iota\colon X_{\mathrm{et}} \to X_{k,\mathrm{et}}$ and $\widehat{\iota}\colon \mathscr{X}_{\mathrm{et}} \to X_{k,\mathrm{et}}$ the functors induced by the closed immersions $X_k \subset X$ and $X_k \subset \mathscr{X}$ respectively. In fact, $\widehat{\iota}$ is an equivalence, since the étale sites of $\mathscr{X}$ and of X_k coincide, and $\widehat{\iota} \circ \nu_X = \iota$. For any sheaf $\mathscr{F}$ on X_{et} denote $\mathscr{F}_k := \iota^*(\mathscr{F})$ or, equivalently, $\widehat{\iota}^*\big(\mathscr{F}^{\mathrm{form}}\big)$. We then have $\mathrm{H}^q\big(X_{\mathrm{et}}, \mathscr{F}\big) \to \mathrm{H}^q\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}, \mathscr{F}^{\mathrm{form}}\big) \cong \mathrm{H}^q\big(X_{k,\mathrm{et}}, \mathscr{F}_k\big)$ where the first map is $\rho_{X,\mathscr{X}}(\mathscr{F})^q$. The composite is defined by restriction and is an isomorphism if $\mathscr{F}$ is a torsion sheaf due to [**16**, Cor. 1] and the fact that X is proper over V. The conclusion follows.

(b) Left to the reader.

(c) The left hand side of the spectral sequences (7) and (8) are isomorphic by (a) since $\mathrm{R}^p v_{X,M,*}$ sends a torsion sheaf to a torsion sheaf. The conclusion follows from (b). □

Corollary 4.12. — *Let $\mathbb{L}$ be a locally constant sheaf on $\mathfrak{X}_M$ annihilated by p^s. Then, the two sides of the Leray spectral sequences*

$$\mathrm{H}^j\Big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}, \mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\big(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\big)\Big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right)$$

and

$$\mathrm{H}^j\Big(X_{\mathrm{et}}, \mathrm{R}^i v_{X,M,*}\big(\mathbb{L}\big)\Big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}\left(\mathfrak{X}_M, \mathbb{L}\right),$$

obtained from the morphisms of topoi $\widehat{v}_{\mathscr{X},M}\colon \widehat{\mathfrak{X}}_M \to \mathscr{X}_{\mathrm{et}}$ and $v_{X,M}\colon \mathfrak{X}_M \to X_{\mathrm{et}}$, are naturally isomorphic.

Proof. — The statements follow from 4.11. □

Proof of Theorem 4.1. — Let $\mathbb{L}$ be an étale local system of $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-modules on X_K, for some $n \geq 1$ and let $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}$ be the corresponding étale local system on the rigid space X_K^{rig} attached to X_K. Let $(\mathscr{U}, s) \in \mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$ with $\mathscr{U} = \mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ small affine; see 2.2. Put $\mathbf{L}_{\mathscr{U}} := \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\big(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K\big)$; the notation is as in 4.8. It has a continuous action of the algebraic fundamental group $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}_K^{\mathrm{rig}}, \overline{\eta}_s)$. Since $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}$ is finite and locally constant there exists $(\mathscr{U}, \mathscr{W}) \in \mathscr{U}_{\overline{K},\mathrm{fet}}$ such that $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ is trivial and then $\mathbf{L}_{\mathscr{U}} := \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}(\mathscr{U}, \mathscr{W})$. As a $\mathbf{Z}$-module it is independent of $\mathscr{U}$ and $\mathscr{W}$ and we simply write $\mathbf{L}$ by abuse of notation. It follows from 3.2 that $\mathscr{H}^{i,*,\mathrm{ge}}_{\overline{K}}(\mathbb{L})$ is the sheaf on $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$ associated to the following functor $(\mathscr{U}, s) \longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}_{\overline{K}}^{\mathrm{rig}}, \overline{\eta}_s), \mathbf{L}\big)$. Analogously, $\mathscr{H}^{i,*,\mathrm{ar}}_{\overline{K}}(\mathbb{L})$ is the sheaf on $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$ associated to the following functor $(\mathscr{U}, s) \longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}_K^{\mathrm{rig}}, \overline{\eta}_s), \mathbf{L}\big)$.

We come to the proofs of (i) and (ii) of 4.1. Since they are very similar we prove only (i). Consider a point $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_{\hat{x}}) \to \mathscr{X}$ of $\mathscr{X}$ and let $\widehat{\hat{x}}\colon \mathrm{Spf}(\widehat{\overline{V}}) \to \mathscr{X}$ be the composite of $\hat{x}$ with $\mathrm{Spf}(\widehat{\overline{V}}) \to \mathrm{Spf}(V_{\hat{x}})$. Then, $\mathrm{G}_{\hat{x},\overline{K}}$ is the direct limit of the fundamental groups $\pi_1^{\mathrm{alg}}\big(\mathscr{U}_{\alpha,\overline{K}}^{\mathrm{rig}}, \overline{\eta}_{s_\alpha}\big)$ over a set $(\mathscr{U}_\alpha, s_\alpha)$ of affine small neighborhoods of $\widehat{\hat{x}}$, which is cofinal among such étale neighborhoods and is totally ordered with respect to morphisms in $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet}$. As remarked above one has a canonical identification

$\left(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right)_{\hat{x}} \cong \mathbf{L}$ (as groups). We conclude that the stalk of $\mathscr{H}^{i,*,\mathrm{ge}}_{\overline{K}}(\mathbb{L})$ at $\hat{x}$ can be described as follows:

$$\left(\mathscr{H}^{i,*,\mathrm{ge}}_{\overline{K}}(\mathbb{L})\right)_{\hat{x}} \cong \mathrm{H}^i\left(\mathrm{G}_{\hat{x},\overline{K}}, \mathbf{L}\right).$$

On the other hand for every $(\mathscr{U}, s) \in \mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}$ with $\mathscr{U} = \mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ small, the map of Grothendieck topologies $\iota\colon \mathscr{U}_{\overline{K},\mathrm{fet}} \to \widehat{\mathfrak{X}}^{\bullet}_{\overline{K}}$ (see 4.1) induces a spectral sequence

$$\mathrm{H}^i\left(\mathscr{U}_{\overline{K},\mathrm{fet}}, \mathrm{R}^j\iota_*(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}})\right) \Longrightarrow \mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},\overline{K},*}(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}})(\mathscr{U}, s).$$

The category of sheaves on $\mathscr{U}_{\overline{K},\mathrm{fet}}$ is equivalent to the category of discrete groups with continuous action of $\pi_1^{\mathrm{alg}}\left(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}_{\overline{K}}, \overline{\eta}_s\right)$ by 4.8. Via this equivalence $\iota_*(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}) = \mathbf{L}$ as representation of $\pi_1^{\mathrm{alg}}\left(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}_{\overline{K}}, \overline{\eta}_s\right)$. Furthermore, $\mathrm{H}^i\left(\mathscr{U}_{\overline{K},\mathrm{fet}}, \iota_*(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}})\right) \cong \mathrm{H}^i\left(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}_{\overline{K}}, \overline{\eta}_s), \mathbf{L}\right)$ by loc. cit. We then obtain a natural, functorial map

$$\alpha^i_{\mathscr{U}}\colon \mathrm{H}^i(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}_{\overline{K}}, \overline{\eta}_s), \mathbf{L}) \longrightarrow \mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},\overline{K},*}(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}})(\mathscr{U}, s),$$

which induces a morphism of sheaves on $\mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}$

$$\alpha^i\colon \mathscr{H}^{i,*,\mathrm{ge}}_{\overline{K}}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},\overline{K},*}(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}).$$

For every point $\hat{x}$ of $\mathscr{X}$ the map $\alpha^i_{\hat{x}}$ induced by α^i on stalks is the canonical morphism

$$\alpha^i_{\hat{x}}\colon \left(\mathscr{H}^{i,*,\mathrm{ge}}_{\overline{K}}(\mathbb{L})\right)_{\hat{x}} \cong \mathrm{H}^i(\mathrm{G}_{\hat{x},\overline{K}}, \left(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right)_{\hat{x}}) \longrightarrow \left(\mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},\overline{K},*}(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}})\right)_{\hat{x}},$$

which by proposition 4.4(7) is an isomorphism. Therefore, α^i induces an isomorphism $\mathscr{H}^{i,*,\mathrm{ge}}_{\overline{K}}(\mathbb{L}) \cong \mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},\overline{K},*}(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}})$ of sheaves on $\mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}$. Thus, the Leray spectral sequence takes the form

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^q\left(\mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}, \mathscr{H}^{p,*,\mathrm{ge}}_{\overline{K}}(\mathbb{L})\right) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\widehat{\mathfrak{X}}^{\bullet}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}).$$

It follows from 4.7 that $\mathrm{H}^{p+q}(\widehat{\mathfrak{X}}^{\bullet}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}) \cong \mathrm{H}^{p+q}(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}})$. Furthermore, by 4.12 we have $\mathrm{H}^{p+q}(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}) \cong \mathrm{H}^{p+q}(\mathfrak{X}_{\overline{K}}, \mathbb{L})$ and, thanks to 4.4, we know that $\mathrm{H}^{p+q}(\mathfrak{X}_{\overline{K}}, \mathbb{L}) \cong \mathrm{H}^{p+q}\left(X_{\overline{K},\mathrm{et}}, \mathbb{L}\right)$. All these isomorphisms are equivariant for the residual action of G_V. This proves the claim. □

5. A geometric interpretation of classical (φ, Γ)-modules

Let the notations be as in the previous section and fix as before M an algebraic extension of K contained in $\overline{K}$. In this section we work with continuous sheaves on all our topologies (see §4). We define families of continuous sheaves denoted $\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}$, $\mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\right)$, $A^+_{\mathrm{inf}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\right)$ and call them *algebraic Fontaine sheaves* on $\mathfrak{X}_M$ (respectively $\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}$, $\mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)$, $A^+_{\mathrm{inf}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)$ called *analytic Fontaine sheaves* on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$) and study their properties. In this section we compare the cohomology on $\mathfrak{X}_M$ of an étale local system $\mathbb{L}$ of $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$-modules on X_K tensored by one of the algebraic Fontaine sheaves with the cohomology on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ of its analytic analogue. As a consequence we derive the following result.

Let us fix $M = K_\infty = K(\mu_{p^\infty})$ and consider the sheaf $\mathscr{F}_\infty := \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes A^+_{\mathrm{inf}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty}}\big)$ on $\widehat{\mathfrak{X}}_{K\infty}$.

Theorem 5.1. — *Let $\mathbb{L}$ be an étale local system $\mathbb{L}$ of $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$-modules on X_K. We have natural isomorphisms of classical (φ,Γ_V)-modules*

$$\mathrm{H}^i(\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty},\mathscr{F}_\infty) \cong \widetilde{\mathfrak{D}}_V\Big(\mathrm{H}^i\big(X_{\overline{K},\mathrm{et}},\mathbb{L}\big)\Big),$$

for all $i \geq 0$.

The proof of theorem 5.1 will take the rest of this section.

5.1. Categories of inverse systems. — We review some of the results of [**20**] which will be needed in the sequel. Let $\mathscr{A}$ be an abelian category. Denote by $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ the category of inverse systems indexed by the set of natural numbers. Objects are inverse systems $\{A_n\}_n := \cdots \to A_{n+1} \to A_n \ldots A_2 \to A_1$, where the A_i's are objects of $\mathscr{A}$ and the arrows denote morphisms in $\mathscr{A}$. The morphisms in $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ are commutative diagrams

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_1,
\end{array}$$

where the vertical arrows are morphisms in $\mathscr{A}$. Then, $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ is an abelian category with kernels and cokernels taken componentwise and if $\mathscr{A}$ has enough injectives, then $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ also has enough injectives; see [**20**, Prop. 1.1]. Furthermore, there is a fully faithful and exact functor $\mathscr{A} \to \mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ sending an object A of $\mathscr{A}$ to the inverse system $\{A\}_n := \cdots \to A \to A \cdots \to A$ with transition maps given by the identity and a morphism $f\colon A \to B$ of $\mathscr{A}$ to the map of inverse systems $\{A\}_n \to \{B\}_n$ defined by f on each component. By [**20**, Prop. 1.1] such map preserves injective objects.

Let $h\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ be a left exact functor of abelian categories. It induces a left exact functor $h^{\mathbf{N}}\colon \mathscr{A}^{\mathbf{N}} \to \mathscr{B}^{\mathbf{N}}$ which, by abuse of notation and if no confusion is possible, we denote again by h. If $\mathscr{A}$ has enough injectives, then also $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ does and the injective objects of $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ are of the form (I_n, d_n) where $I_n \in \mathscr{A}$ is injective and d_n is a split surjection; see [**20**, Prop. 1.1]. One can derive the functor $h^{\mathbf{N}}$. It is proven in [**20**, Prop. 1.2] that $\mathrm{R}^i\big(h^{\mathbf{N}}\big) = \big(\mathrm{R}^i h\big)^{\mathbf{N}}$.

If inverse limits over $\mathbf{N}$ exist in $\mathscr{B}$, define the left exact functor $\varprojlim h\colon \mathscr{A}^{\mathbf{N}} \to \mathscr{B}$ as the composite of $h^{\mathbf{N}}$ and the inverse limit functor $\varprojlim\colon \mathscr{B}^{\mathbf{N}} \to \mathscr{B}$. Assume that $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ have enough injectives. For every $A = \{A_n\}_n \in \mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ one then has a spectral sequence

$$\varprojlim{}^{(p)} \mathrm{R}^q h(A_n) \Longrightarrow \mathrm{R}^{p+q}\big(\varprojlim h(A)\big),$$

where $\varprojlim^{(p)}$ is the p-th derived functor of $\varprojlim$ in $\mathscr{B}$. If in $\mathscr{B}$ infinite products exist and are exact functors, then $\varprojlim^{(p)} = 0$ for $p \geq 2$ and the above spectral sequence

reduces to the simpler exact sequence

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^{(1)} \mathrm{R}^{i-1}h(A_n) \longrightarrow \mathrm{R}^i\big(\varprojlim h\big)(A) \to \varprojlim \mathrm{R}^i h(A_n) \longrightarrow 0; \tag{9}$$

see [**20**, Prop. 1.6]. In particular, if A is injective, then $\varprojlim^{(p)} \mathrm{R}^q h(A_n) = 0$ for $q \geq 1$ and for $q = 0$ and $p \geq 1$ by the structure of the injective objects in $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$. In a particular, injective objects of $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ are acyclic for $\mathrm{R}^{p+q}\varprojlim h$.

Note that via the map $\mathscr{A} \to \mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ given above, if $A \in \mathscr{A}$ then $\mathrm{R}^i h^{\mathbf{N}}\big(\{A\}_n\big) = \{\mathrm{R}^i h(A)\}_n$ and $\mathrm{R}^i \varprojlim h\,(\{A\}_n) = \mathrm{R}^i h(A)$.

5.2. Example. — [**20**, §2] Let G be a profinite group. Let $\mathscr{A}$ be the category of discrete modules with continuous action of G and let $\mathscr{B}$ be the category of abelian groups. For every j let $\mathrm{H}^j\big(G, \_\big)\colon \mathscr{A}^{\mathbf{N}} \to \mathscr{B}$ be the j-th derived functor of $\varprojlim \mathrm{H}^0(G, \_)$ on $\mathscr{A}^{\mathbf{N}}$. By loc. cit. for every inverse system $T = \{T_n\}_n \in \mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ we have an exact sequence

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^{(1)} \mathrm{H}^{j-1}\big(G, T_n\big) \longrightarrow \mathrm{H}^j\big(G, T\big) \longrightarrow \varprojlim \mathrm{H}^j\big(G, T_n\big) \longrightarrow 0. \tag{10}$$

Moreover given $\{(N_n, d_n)\}_n \in \mathscr{B}^{\mathbf{N}}$, one computes $\varprojlim^{(1)} N_n$ as the cokernel of the map

$$\prod_n (\mathrm{Id} - d_n)\colon \prod_n N_n \longrightarrow \prod_n N_n. \tag{11}$$

For later use we remark the following. Assume that each N_n is a module over a ring C and that $d_n\colon N_{n+1} \to N_n$ is a homomorphism of C-modules. Suppose that for every n there exists an element $c_n \in C$ annihilating the cokernel of d_n. One then proves by induction on $m \in \mathbf{N}$ that the cokernel of $\prod_n(\mathrm{Id} - d_n)\colon \prod_{n \leq m} N_n \to \prod_{n \leq m} N_n$ is annihilated by $c_1 \cdots c_m$. In particular, if C is a complete local domain and $c_n = c^{\frac{1}{p^n}} \in C$ for every n for some c in the maximal ideal of C so that the product $\prod_m c_m$ converges to $c^{\frac{p}{p-1}}$ in C, then $c^{\frac{p}{p-1}}$ annihilates $\varprojlim^{(1)} N_n$.

For every $\{(T_n, d_n)\} \in \mathscr{A}^{\mathbf{N}}$ one defines $\mathrm{H}^j_{\mathrm{cont}}\Big(G, \varprojlim_{\infty \leftarrow n} T_n\Big)$ as the continuous cohomology defined by continuous cochains modulo continuous coboundaries with values in $\varprojlim_{\infty \leftarrow n} T_n$ endowed with the inverse limit topology considering on each T_n the discrete topology. As explained in [**20**, Pf. of Thm. 2.2] there exists a canonical complex $D^\bullet(G, T_n)$ whose G-invariants define the continuous cochains $C^\bullet(G, T_n)$ of G with values in T_n and such that each $D^i(G, T_n)$ is G-acyclic. This resolution is functorial so that we get a resolution

$$(T_n, d_n) \subset (D^1(G, T_n), d_n^1) \to (D^2(G, T_n), d_n^2) \to \cdots.$$

The continuous cohomology $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\big(G, \varprojlim_{\infty \leftarrow n} T_n\big)$ is obtained by applying $\varprojlim_{\infty \leftarrow n} \mathrm{H}^0(G, \_)$ to this resolution and taking homology. Due to (10), since $D^i(G, T_n)$ is G-acyclic, we

have

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\big(G,\varprojlim(D^j(G,T_n),d^j_n)\big)=\begin{cases}0 & \text{if } i\geq 2\\ \varprojlim^{(1)} C^j(G,T_n) & \text{for } i=1\\ \varprojlim_{\infty\leftarrow n} C^j(G,T_n) & \text{if } i=0\end{cases} \tag{12}$$

In particular, if the system $\{T_n\}_n$ is Mittag-Leffler, then $(D^j(G,T_n),d^j_n)$ is acyclic for every j and we obtain

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\big(G,\varprojlim_{\infty\leftarrow n} T_n\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(G,T).$$

Next, assume as before that there exists a complete local domain C such that T_n is a C-module and d_n is a homomorphism of C-modules. Suppose also that there is c in the maximal ideal of C such that $c^{\frac{1}{p^n}}\in C$ and $c^{\frac{1}{p^n}}$ annihilates the cokernel of d_n. Then, $c^{\frac{1}{p^n}}$ annihilates also the cokernel of $C^i(G,T_{n+1})\to C^i(G,T_n)$ so that $c^{\frac{p}{p-1}}$ annihilates $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cont}}\big(G,(D^j(G,T_n),d^1_n)\big)$. This implies that if we invert $c^{\frac{p}{p-1}}$ we have an isomorphism

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\big(G,\varprojlim_{\infty\leftarrow n} T_n\big)\big[c^{-\frac{p}{p-1}}\big]\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i(G,T)\big[c^{-\frac{p}{p-1}}\big]. \tag{13}$$

5.3. Fontaine sheaves on $\mathfrak{X}_M$ and $\widehat{\mathfrak{X}}_M$. — We now come to the definition of a family of sheaves on $\mathfrak{X}_M$ and $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ which will play a crucial role in the sequel. See 5.11.

Definition 5.2. — [**14**, p. 219-221] The notation is as in 4.1. Let $\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}$ be the sheaf of rings on $\mathfrak{X}_M$ defined requiring that for every object (U,W) in $\mathfrak{X}_M$ the ring $\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}(U,W)$ consists of the normalization of $\Gamma\big(U,\mathscr{O}_U\big)$ in $\Gamma\big(W,\mathscr{O}_W\big)$.

Denote by $\mathscr{R}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)$ the sheaf of rings in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)^{\mathbf{N}}$ given by the inverse system $\big\{\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big\}$, where the transition maps are given by Frobenius.

For every $s\in\mathbf{N}$ define the sheaf of rings $A^+_{\mathrm{inf},\mathrm{s}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)$ in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)^{\mathbf{N}}$ as the inverse system $\big\{\mathbf{W}_s\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)\big\}$. Here, $\mathbf{W}_s\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)$ is the sheaf $\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)^s$ with ring operations defined by Witt polynomials and the transition maps in the inverse system are defined by Frobenius. Define $A^+_{\mathrm{inf}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)$ to be the inverse system of sheaves $\big\{\mathbf{W}_n\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)\big\}_n$ where the transition maps are defined as the composite of the projection $\mathbf{W}_{n+1}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)\to\mathbf{W}_n\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)$ and Frobenius on $\mathbf{W}_n\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)$.

Similarly, $\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}$ is the sheaf of rings on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ associating to an object $(\mathscr{U},\mathscr{W},L)$ in $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ the ring $\overline{\mathscr{O}}(\mathscr{U},\mathscr{W})$ defined as the normalization of $\Gamma\big(\mathscr{U},\mathscr{O}_{\mathscr{U}}\big)$ in $\Gamma\big(\mathscr{W},\mathscr{O}_{\mathscr{W}}\big)\otimes_L M$.

Let $\mathscr{R}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)$ be the sheaf of rings in $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_M)^{\mathbf{N}}$ given by $\big\{\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\big\}$, where the inverse system is taken using Frobenius as transition map.

For $s\in\mathbf{N}$ define the sheaf of rings $A^+_{\mathrm{inf},\mathrm{s}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)$ in $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_M)^{\mathbf{N}}$ as the inverse system $\big\{\mathbf{W}_s\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\big\}$ with transition maps given by Frobenius. Eventually,

let $A^+_{\mathrm{inf}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)$ in $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_M)^{\mathbf{N}}$ be the sheaf $\left\{\mathbf{W}_n\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)\right\}$ where the transition maps are defined as the composite

$$\mathbf{W}_{n+1}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right) \longrightarrow \mathbf{W}_n\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right) \longrightarrow \mathbf{W}_n\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right);$$

here, the first map is the natural projection and the second is Frobenius.

We denote by φ the Frobenius operator acting on the sheaves, or inverse systems of sheaves, introduced above. One can define analogous sheaves for the pointed sites $\mathfrak{X}^\bullet_M$ and $\widehat{\mathfrak{X}}^\bullet_M$; we leave the details to the reader.

Remark 5.3. — Note that if $X = V$ and $M = \overline{K}$, one has $\mathrm{H}^0_{\mathrm{cont}}\left((V,\overline{K}),\mathscr{R}(\overline{\mathscr{O}}_{\overline{K}})\right) = \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}$, $\mathrm{H}^0_{\mathrm{cont}}\left((V,\overline{K}),A^+_{\mathrm{inf},\mathrm{s}}(\overline{\mathscr{O}}_{\overline{K}})\right) = \mathbf{W}_s\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}\right)$ and $\mathrm{H}^0_{\mathrm{cont}}\left((V,\overline{K}),A^+_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathscr{O}}_{\overline{K}})\right) = \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\overline{V}}$.

For later use, we recall that we denote by π the element $[\varepsilon] - 1$ of $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\overline{V}}$ where ε is the element $(1,\zeta_p,\zeta_{p^2},\cdots) \in \mathbf{E}^+_V$ and $[\varepsilon]$ is its Teichmüller lift.

Notation. — If $\mathscr{F}$ is in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)^{\mathbf{N}}$ (resp. $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_M)^{\mathbf{N}}$) write $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\mathfrak{X}_M,\mathscr{F})$ (respectively $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathscr{F})$) for the i-th derived functor of $\varprojlim \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_M,\_\,)$ (resp. $\varprojlim \mathrm{H}^0(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\_\,)$) applied to $\mathscr{F}$. Note that if $\mathscr{F} = \{\mathscr{G}\}_n$ with $\mathscr{G} \in \mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)$ (resp. in $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_M)$), then $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\mathfrak{X}_M,\mathscr{F}) = \mathrm{H}^i(\mathfrak{X}_M,\mathscr{G})$ (resp. $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathscr{F}) = \mathrm{H}^i(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathscr{G})$).

One proves as in 4.7 that if $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(\mathscr{X}_{\mathrm{et}})^{\mathbf{N}}$ (resp. $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_M)^{\mathbf{N}}$), we have a natural isomorphism of δ-functors $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\mathscr{X}^\bullet_{\mathrm{et}},a^{\mathbf{N}}_*(\mathscr{F})\right) \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\mathscr{X}_{\mathrm{et}},\mathscr{F})$ (resp. $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}^\bullet_M,b^{\mathbf{N}}_*(\mathscr{F})\right) \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathscr{F})$).

From now on we assume that X is locally of finite type over V and that every closed point of X maps to the closed point of $\mathrm{Spec}(V)$. We let $\mathscr{X}$ be the formal scheme associated to X.

Lemma 5.4. — *One has* $A^+_{\mathrm{inf},*}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\right)^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} A^+_{\mathrm{inf},*}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)$ *where* $* = s \in \mathbf{N}$ *or* $* = \varnothing$.

Proof. — Consider a pair (U,W) in $\mathfrak{X}_M$, with W defined over some finite extension $K \subset L$ contained in M. Recall from section 4 that $\mu_{X,M}(U,W) := (\mathscr{U},\mathscr{W},L)$. We have a natural map $\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}(U,W) \to \mu_{X,M,*}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)(U,W)$ i. e., a map from the normalization of $\Gamma(U,\mathscr{O}_U)$ in $\Gamma(W,\mathscr{O}_W)\otimes_L M$ to the normalization of $\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{O}_{\mathscr{U}})$ in $\Gamma(\mathscr{W},\mathscr{O}_{\mathscr{W}})\otimes_L M$. This induces a natural morphism $\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M} \to \mu_{X,M,*}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)$ and, hence, a morphism $\mu^*_{X,M}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\right) \longrightarrow \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}$, coming from adjunction of $\mu_{X,M,*}$ and $\mu^*_{X,M}$. We then get a homomorphism

$$\mu^{*,\mathbf{N}}_{X,M}\left(A^+_{\mathrm{inf},*}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\right)\right) \to A^+_{\mathrm{inf},*}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right).$$

We claim that these maps are isomorphisms. It suffices to prove it componentwise and by devissage it is enough to show that $\mu^*_{X,M}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\right) \longrightarrow \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}$ is an isomorphism. Due to 4.4(3) this amounts to prove that, for every point x of X as in 4.3, the natural map $\overline{\mathscr{O}}_{X,x,M}/p\overline{\mathscr{O}}_{X,x,M} \to \overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ is an isomorphism. This follows from 4.3(iv). □

Lemma 5.5. — *We have the following equivalences of* δ*-functors :*

i. $\mathrm{R}^q\big(\nu_X^{*,\mathbf{N}}\circ v_{X,M,*}^{\mathbf{N}}\big)=\nu_X^{*,\mathbf{N}}\circ\mathrm{R}^p v_{X,M,*}^{\mathbf{N}}$ *and* $\mathrm{R}^q\big(\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}^{\mathbf{N}}\circ\mu_{\mathscr{X},M}^{*,\mathbf{N}}\big)=\big(\mathrm{R}^q\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}^{\mathbf{N}}\big)\circ\mu_{X,M}^{*,\mathbf{N}}$;

ii. $\nu_X^{*,\mathbf{N}}\circ\mathrm{R}^q v_{X,M,*}^{\mathbf{N}}\xrightarrow{\sim}\big(\mathrm{R}^q\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}^{\mathbf{N}}\big)\circ\mu_{X,M}^{*,\mathbf{N}}$.

Proof. — The result follows for lemma 4.5 and 5.1. □

5.4. Comparison between algebraic and formal cohomology of continuous sheaves. — Since $\nu_X^{*,\mathbf{N}}$ is an exact functor, as in section 4.5, given an injective resolution $I^\bullet$ of a continuous sheaf $\mathscr{F}$, then $0\to\nu_X^{*,\mathbf{N}}(\mathscr{F})\to\nu_X^{*,\mathbf{N}}(I^\bullet)$ is exact so that given an injective resolution $J^\bullet$ of $\mathscr{F}^{\mathrm{form}}=\nu_X^{*,\mathbf{N}}(\mathscr{F})$ we can extend the identity map on $\mathscr{F}$ to a morphism of complexes $\nu_X^{*,\mathbf{N}}(I^\bullet)\to J^\bullet$. Since ν_X sends the final object X of X_{et} to the final object $\mathscr{X}$ of $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$, one has a natural map $I^\bullet(X)\to\nu_X^{*,\mathbf{N}}(I^\bullet)(\mathscr{X})$. Then,

Definition 5.6. — One has natural maps of δ-functors

$$\rho_{X,\mathscr{X}}^{\mathrm{cont},q}(\mathscr{F})\colon\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}\big(X_{\mathrm{et}},\mathscr{F}\big)\to\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}},\mathscr{F}^{\mathrm{form}}\big),$$

and

$$\rho_{\mathfrak{X}_M,\widehat{\mathfrak{X}}_M}^{\mathrm{cont},q}(\mathscr{F})\colon\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}\big(\mathfrak{X}_M,\mathscr{F}\big)\to\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}\big).$$

Note that one has spectral sequences

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}\big(X_{\mathrm{et}},\mathrm{R}^p v_{X,M,*}^{\mathbf{N}}(\mathscr{F})\big)\Longrightarrow\mathrm{H}^{p+q}_{\mathrm{cont}}(\mathfrak{X}_M,\mathscr{F}),\tag{14}$$

and

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}},\nu_X^*\mathrm{R}^p v_{\mathscr{X},M,*}^{\mathbf{N}}(\mathscr{F})\big)=\mathrm{H}^q_{\mathrm{cont}}\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}},\mathrm{R}^p\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}^{\mathbf{N}}\big(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}\big)\big)\Longrightarrow\mathrm{H}^{p+q}_{\mathrm{cont}}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}\big),\tag{15}$$

where the equality on the left hand side is due to 5.5.

Proposition 5.7. — *The following hold:*

a. *If $\mathscr{F}$ is a torsion sheaf on $\mathbf{Sh}(X_{\mathrm{et}})^{\mathbf{N}}$, then $\rho_{X,\mathscr{X}}^{\mathrm{cont},q}(\mathscr{F})$ is an isomorphism;*

b. *the spectral sequences (14) and (15) are compatible via $\rho_{X,\mathscr{X}}^{\mathrm{cont},q}$ and $\rho_{\mathfrak{X}_M,\widehat{\mathfrak{X}}_M}^{\mathrm{cont},p+q}$;*

c. *if $\mathscr{F}$ is a torsion sheaf in $\mathbf{Sh}(\mathfrak{X}_M)^{\mathbf{N}}$, the map $\rho_{\mathfrak{X}_M,\widehat{\mathfrak{X}}_M}^{\mathrm{cont},q}(\mathscr{F})$ is an isomorphism.*

Proof. — (a) follows from 4.11 (a) and the exact sequence (9) noting that the inverse limit of a torsion inverse system of sheaves is itself torsion; (b) is left to the reader; (c) is proven similarly to 4.11 (c). □

Corollary 5.8. — *Let $\mathbb{L}$ be a locally constant sheaf on $\mathfrak{X}_M$ annihilated by p^s. Then, the two sides of the Leray spectral sequences*

$$\mathrm{H}^j_{\mathrm{cont}}\Big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}},\mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}^{\mathbf{N}}\Big(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\Big)\Big)\Longrightarrow\mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{cont}}\Big(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\Big)$$

and

$$\mathrm{H}^j_{\mathrm{cont}}\Big(X_{\mathrm{et}},\mathrm{R}^i v_{X,M,*}^{\mathbf{N}}\Big(\mathbb{L}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)\Big)\Big)\Longrightarrow\mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{cont}}\Big(\mathfrak{X}_M,\mathbb{L}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\big(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\big)\Big)$$

are isomorphic.

Proof. — The statements follow from 5.7 and 5.4. □

Proposition 5.9. — (Faltings) *Let $\mathbb{L}$ be a finite locally constant étale sheaf on $X_{\overline{K}}$ annihilated by p^s. For every i the kernel and the cokernel of the induced map of $\mathbf{W}_s(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}})$-modules*

$$\mathrm{H}^i\left(\mathfrak{X}_{\overline{K}}, \mathbb{L}\right) \otimes \mathbf{W}_s\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\mathfrak{X}_{\overline{K}}, \mathbb{L} \otimes A^+_{\mathrm{inf},s}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_{\overline{K}}}\right)\right)$$

are annihilated by the Teichmüller lift of any element in the maximal ideal of $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}$.

Proof. — By devissage one reduces to the case $s = 1$. The statement follows then from [**14**, §3, Thm. 3.8]. □

Proposition 5.10. — *We have a commutative square*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \mathbf{W}_s\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes A^+_{\mathrm{inf},s}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right) \\
\| & & \downarrow \\
\varprojlim \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \mathbf{W}_s\left(\overline{V}/p\overline{V}\right) & \longrightarrow & \varprojlim \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathbf{W}_s\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right),
\end{array}$$

where the inverse limits are taken with respect to Frobenius. The kernel and the cokernel of any two maps in the square are annihilated by the Teichmüller lift of any element in the maximal ideal of $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}$. Furthermore, each map

$$\mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \mathbf{W}_s\left(\overline{V}/p\overline{V}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathbf{W}_s\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right), \tag{16}$$

appearing in the inverse limits in the displayed square, has kernel and cokernel annihilated by the Teichmüller lift of any element in the maximal ideal of $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}$.

Proof. — We first of all construct the maps in the square. The top horizontal map is defined by the natural map $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \to \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes A^+_{\mathrm{inf},s}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)$. Similarly, the lower horizontal arrow is induced by the map $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \to \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathbf{W}_s\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)$. Note that $\mathrm{H}^0_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, (\mathscr{F}_n)_n\right)$ is the composite of the functors $\varprojlim_{\infty \leftarrow n} \mathrm{H}^0\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathscr{F}_n\right)_n$. This gives a spectral sequence in which the derived functors $\varprojlim^{(i)}$ of $\varprojlim$ on the category of abelian groups appear. Since $\varprojlim^{(i)} = 0$ for $i \geq 2$, see [**20**, §1], we get an exact sequence

$$\begin{aligned}
0 \to \varprojlim{}^{(1)} \mathrm{H}^{i-1}_{\mathbf{N}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathbf{W}_s\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right)\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right) \longrightarrow \\
\longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes A^+_{\mathrm{inf},s}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right) \longrightarrow \\
\longrightarrow \varprojlim \mathrm{H}^i_{\mathbf{N}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathbf{W}_s\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\mathbf{W}_s\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

This provides the right vertical map in the square. Clearly the square commutes. The fact that the top horizontal arrow has kernel and cokernel annihilated by the Teichmüller lift of any element in the maximal ideal of $\widetilde{\mathbf{E}}_V^+$ follows by 5.8 and 5.9. The equality on the left hand side follows since $\mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right)$ is a finite group being isomorphic to $\mathrm{H}^i\left(X_{\overline{K},\mathrm{et}}, \mathbb{L}\right)$ by 4.12 and 4.4.

To conclude the proof, it suffices to show that the kernel and cokernel of (16) are annihilated by the Teichmüller lift of any element in the maximal ideal of $\widetilde{\mathbf{E}}_V^+$. We may reduce to the case $s = 1$ i. e., to prove that the map

$$f_j \colon \mathrm{H}^j\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \widetilde{\mathbf{E}}_V^+ \longrightarrow \mathrm{H}^j_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right)$$

has kernel and cokernel annihilated by any any element in the maximal ideal of $\widetilde{\mathbf{E}}_V^+$. For any integer $m \geq 1$ let $\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)^{\geq m}$ be the inverse system $\left\{\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right\}$ where the transition maps are the identity in degree $\geq m$ and are Frobenius in degree $< m$. Let $\beta_m \colon \mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)^{\geq m}$ be the map of inverse systems whose n-th component is $\varphi^{n-m} \colon \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}} \to \overline{\mathscr{O}}_{\overline{K}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\overline{K}}$ for $n > m$ and is the identity for $n < m$. We claim that β_m is surjective. It suffices to check it componentwise and, for each component, to check surjectivity of $\varphi^n \colon \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}} \to \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}$ on stalks. This follows from 4.3(v). Consider $\pi_0^{p^m}\mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)$ with $\pi_0 := (p, p^{\frac{1}{p}}, p^{\frac{1}{p^2}}, \cdots)$. Then, $\pi_0^{p^m}\mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)$ is the inverse system $\{p^{\frac{1}{p^{n-m}}}\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\}_n$ with transition map given by Frobenius. We claim that $\mathrm{Ker}(\beta_n) = \pi_0^{p^m}\mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)$. This also can be checked componentwise, for each component it can be checked on stalks and it follows from 4.3(v). Note that

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)^{\geq m}\right) \cong \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right).$$

Indeed, by [**20**, Prop. 1.1] an injective resolution of $(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}})^{\geq m}$ is given by an injective resolution of each component of this inverse system which is constant in degree $n \geq m$. Take the long exact sequence of the groups $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, -\right)$ associated to the short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right) \xrightarrow{1 \otimes \pi_0^{p^m}} \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right) \xrightarrow{1 \otimes \beta_m} \left(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)^{\geq m} \longrightarrow 0.$$

We get the exact sequence

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right) \xrightarrow{\pi_0^{p^m}} \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right) \longrightarrow$$
$$\mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right) \xrightarrow{\delta_i} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right)$$
$$\xrightarrow{\pi_0^{p^m}} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathscr{R}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right)$$

which we will compare with the exact sequence

$$\mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}} \xrightarrow{\pi_0^{p^m}} \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}} \longrightarrow \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes (\overline{V}/p\overline{V}) \xrightarrow{0}$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}} \xrightarrow{\pi_0^{p^m}} \mathrm{H}^{i+1}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}$$

via the map $g_i\colon \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \overline{V}/p\overline{V} \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)$, defined by (16), and via f_j for $j = i$ or $j = i+1$.

Set $\delta_{-1} = 0$ and let us denote for the rest of the proof $\mathscr{F} := \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}$, $\mathscr{G} := \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathscr{R}(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}})$ and $\mathbf{E} := \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}$. Fix $m \geq 1$ and $i \geq 0$ and consider the (not necessarily commutative) diagram

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \overline{V}/p\overline{V} & \xrightarrow{0} & \mathrm{H}^{i+1}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \mathbf{E} & \xrightarrow{\pi_0^{p^m}} & \mathrm{H}^{i+1}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \mathbf{E} \\
\downarrow{\scriptstyle g_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i+1}} \\
\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathscr{F}\right) & \xrightarrow{\delta_i} & \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathscr{G}\right) & \xrightarrow{\pi_0^{p^m}} & \mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathscr{G}\right).
\end{array}$$

Let us remark that the right square of the diagram is commutative and that the rows are exact. We claim that the image of δ_i is annihilated by every element of the maximal ideal of $\mathbf{E}$, i.e. that δ_i is "almost zero". For every $\epsilon \in \mathbf{Q}$ with $\epsilon > 0$ let us denote by π_0^ϵ any element r of $\mathbf{E}$ such that $v_{\mathbf{E}}(r) = \epsilon$. Let us fix any such ϵ and let $x \in \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathscr{F}\right)$. Denote by $y = \delta_i(x) \in \mathrm{Ker}(\pi_0^{p^m})$. As the cokernel of f_{i+1} is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{E}$, $\pi_0^{\epsilon/2} y = f_{i+1}(t)$ for some $t \in \mathrm{H}^{i+1}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right) \otimes \mathbf{E}$ and therefore $0 = \pi_0^{p^m}(\pi_0^{\epsilon/2} y) = \pi_0^{p^m} f_{i+1}(t) = f_{i+1}(\pi_0^{p^m} t)$. As the kernel of f_{i+1} is also annihilated by every element of the maximal ideal of $\mathbf{E}$ we have $0 = \pi_0^{\epsilon/2}(\pi_0^{p^m} t) = \pi_0^{p^m}(\pi_0^{\epsilon/2} t)$ and because multiplication by $\pi_0^{p^m}$ is injective on the top row of the diagram, we deduce $\pi_0^{\epsilon/2} t = 0$. Thus $\pi_0^\epsilon \delta_i(x) = \pi_0^{\epsilon/2}(f_{i+1}(t)) = f_{i+1}(\pi_0^{\epsilon/2} t) = 0$, which proves the claim.

Now we consider the diagram.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right)\otimes\mathbf{E} & \xrightarrow{\pi_0^{p^m}} & \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right)\otimes\mathbf{E} & \longrightarrow & \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\right)\otimes\overline{V}/p\overline{V} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle g_i} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathscr{G}\right)/M_{i-1} & \xrightarrow{\pi_0^{p^m}} & \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathscr{G}\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathscr{F}\right) & \xrightarrow{\delta_i} & M_i
\end{array}$$

where for every $i\geq 0$ we denoted by M_i the image of δ_i in $\mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathscr{G}\right)$ and $\overline{f}_i$ is the composition of f_i with the natural projection. It is clear that the diagram is commutaive and the rows are exact. Moreover, the snake lemma and the fact that $\delta_i\circ g_i=0$ give the following exact sequence of $\mathbf{E}$-modules.

$$\mathrm{Ker}(f_i)\to\mathrm{Ker}(g_i)\to\mathrm{Coker}(\overline{f}_i)\to\mathrm{Coker}(f_i)\to\mathrm{Coker}(g_i)\to M_i.$$

As $\mathrm{Coker}(\overline{f}_i)$ is a quotient of $\mathrm{Coker}(f_i)$, we deduce that the modules $\mathrm{Ker}(f_i)$, $\mathrm{Coker}(\overline{f}_i)$, $\mathrm{Coker}(f_i)$ and M_i are annihilated by every element of the maximal ideal of $\mathbf{E}$, and therefore the same holds for $\mathrm{Ker}(g_i)$ and $\mathrm{Coker}(g_i)$. This finishes the proof of Proposition 5.10. □

Theorem 5.11. — *Let $\mathbb{L}$ be a locally constant étale sheaf on X_M annihilated by p^s. We have a first quadrant spectral sequence:*

$$\mathrm{H}^j\left(\mathscr{X}_{\mathrm{et}},\mathrm{R}^i\widehat{v}^{\mathrm{cont}}_{\mathscr{X},M,*}\left(\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)\right)\right)\Longrightarrow\mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{cont}}\left(\mathfrak{X}_M,\mathbb{L}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_M}\right)\right).$$

If $M=\overline{K}$, there is a map of $\mathbf{W}_s\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}\right)$-modules

$$\mathrm{H}^n\left(X_{\overline{K},\mathrm{et}},\mathbb{L}\right)\otimes\mathbf{W}_s\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}\right)\longrightarrow\mathrm{H}^n_{\mathrm{cont}}\left(\mathfrak{X}_{\overline{K}},\mathbb{L}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X}_{\overline{K}}}\right)\right),$$

which is an isomorphism after inverting π.

Proof. — The first spectral sequence abuts to $\mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)\right)$. The first statement follows then from 5.8. The second one is the content of 5.9. □

5.5. Proof of theorem 5.1. — The groups $\mathrm{H}^n_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty},\mathscr{F}_\infty\right)\left[\pi^{-1}\right]$ are modules for the ring $\mathbf{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{V}}\right)^{H_V}=\mathbf{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{V_\infty}\right)$ and have residual action of Γ_V and φ. By 4.4 the functor $\beta^{*,\mathbf{N}}_{K_\infty,\overline{K}}\colon\mathbf{Sh}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty}\right)^{\mathbf{N}}\to\mathbf{Sh}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}\right)^{\mathbf{N}}$ is exact, sends flasque objects to flasque objects and $\mathrm{H}^0_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty},\mathscr{F}\right)$ is equal to $\varprojlim\mathrm{H}^0\left(H_V,\mathrm{H}^0_{\mathbf{N}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\beta^{*,\mathbf{N}}_{K_\infty,\overline{K}}(\mathscr{F})\right)\right)$ for every $\mathscr{F}$ in $\mathbf{Sh}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty}\right)^{\mathbf{N}}$. Here, $\mathrm{H}^0_{\mathbf{N}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},-\right)$ is the functor from $\mathbf{Sh}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}\right)^{\mathbf{N}}$ to the category of inverse systems of H_V-modules mapping $\{\mathscr{G}_n\}_n\mapsto\{\mathrm{H}^0\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathscr{G}_n\right)\}_n$. We then get a spectral sequence

$$\mathrm{H}^j\left(H_V,\mathrm{H}^i_{\mathbf{N}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}},\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right)\right)\Longrightarrow\mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{cont}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{K_\infty},\mathscr{F}_\infty\right).\tag{17}$$

Here, $\mathrm{H}^j\left(H_V,-\right)$ stands for the j-th derived functor of $\varprojlim\mathrm{H}^0(H_V,-)$ on the category of inverse systems of H_V-modules.

Put $M := \mathrm{H}^i_{\mathbf{N}}\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes A^+_{\mathrm{inf,s}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right)$. Then, M is the inverse system $\{M_n\}_n$ with $M_n := \mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}, \mathbb{L}^{\mathrm{rig}} \otimes \mathbf{W}_s\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_{\overline{K}}}\right)\right)$ and transition maps $d_n\colon M_{n+1} \to M_n$ given by Frobenius. By 5.10 each d_n has cokernel annihilated the Teichmüller lift of any element in the maximal ideal of $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}$. Let $C^\bullet(H_V, M_n)$ be the complex of continuous cochains with values in M_n. For every $i \in \mathbf{N}$ the transition maps in $\{C^i(H_V, M_n)\}_n$ are given by Frobenius and their cokernels are also annihilated the Teichmüller lift of any element in the maximal ideal of $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{V}}$. We deduce from (13) and the following discussion that we have a canonical isomorphism

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(H_V, \varprojlim_{n} M_n\right)\left[\pi^{-1}\right] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(H_V, M)\left[\pi^{-1}\right],$$

where $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\left(H_V, \varprojlim_{n} M_n\right)$ is continuous cohomology. Eventually, we conclude from 5.11 that

$$\mathrm{H}^j(H_V, M)\left[\pi^{-1}\right] \cong \mathrm{H}^j\left(H_V, \mathrm{H}^i(X_{\overline{K},\mathrm{et}}, \mathbb{L}) \otimes \mathbf{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{V}}\right)\right).$$

By A.5 the latter is zero for $j \geq 1$ and is equal to the invariants under H_V for $j = 0$. In particular, the spectral sequence (17) degenerates if we invert π. Since $\mathbb{L}$ is defined on X_K the isomorphism one gets is compatible with respect to the residual action of Γ_V and the action of Frobenius. The H_V-invariants of $\mathrm{H}^n\left(X_{\overline{K},\mathrm{et}}, \mathbb{L}\right) \otimes \mathbf{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{V}}\right)$ coincide by definition with $\widetilde{\mathfrak{D}}_V\left(\mathrm{H}^n(X_{\overline{K},\mathrm{et}}, \mathbb{L})\right)$.

6. The cohomology of Fontaine sheaves

In this section $\mathscr{X}$ denotes a formal scheme topologically of finite type, smooth and geometrically irreducible over V and let X^{rig}_K be its generic fiber. Let X^{rig}_K be the Grothendieck topology defined by étale and quasi-compact maps. We refer to [**21**, §3.1 & 3.2] for generalities about étale morphisms of rigid analytic spaces. We study the cohomology on $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ of continuous sheaves satisfying certain assumptions (see 6.10). For example, it follows from 6.16 that these sheaves $\mathscr{F}$ can be taken to be of the following form:

1) If $\mathbb{L}$ is a p-power torsion étale local system on X^{rig}_K we set $\mathscr{F} := \mathbb{L} \otimes A^+_{\mathrm{inf}}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\right)$.
2) If $\mathbb{L}$ is an étale sheaf on X^{rig}_K such that $\mathbb{L} = \varprojlim \mathbb{L}_n$, with each $\mathbb{L}_n$ a locally constant $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-module and we set $\mathscr{F} := \mathbb{L}\hat{\otimes}\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}$.

Then the cohomology groups $\mathrm{H}^i\left(\widehat{\mathfrak{X}}_M, \mathscr{F}\right)\left[\pi^{-1}\right]$ can be calculated as follows (here π is $\left[\epsilon\right] - 1 \in A^+_{\mathrm{inf}}(\overline{V})$ if $\mathscr{F}$ is of the first type and π is p if $\mathscr{F}$ is of the second).

Let us fix a geometric generic point $\eta = \mathrm{Spm}(\mathbf{C}_{\mathscr{X}})$ as in §5 and for each small formal scheme $\mathscr{U} = \mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ (see 6.9) with a map $\mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{X}$ which is étale, define $\overline{R}_{\mathscr{U}}$ to be the union of all finite, normal $R_{\mathscr{U}}$-algebras contained in $\mathbf{C}_{\mathscr{X}}$, which are étale after inverting p. Denote by $\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes K)$ the inductive limit of the sections $\mathscr{F}(\mathscr{U}, \mathscr{W})$, where $\mathscr{W}$ runs over all objects of $\mathscr{U}^{\mathrm{fet}}_K$. Then $\mathscr{F}(\overline{R} \otimes_V K)$ is a continuous

representation of $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}_K,\eta)$. Moreover (see 6.20) $\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)[p^{-1}]\cong\widehat{\overline{R}}_{\mathscr{U}}[p^{-1}]$ and $A_{\mathrm{inf}}^+(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M})(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)[\pi^{-1}]$ is isomorphic to the relative Fontaine ring A_{inf}^+ (in which π was inverted) constructed using the pair $(R_{\mathscr{U}},\overline{R}_{\mathscr{U}})$. For any such $\mathscr{U}=\mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$, the association $\mathscr{U}\longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathscr{U}_K,\eta),\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)\big)[\pi^{-1}]$ is functorial and we denote by $\mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M}(\mathscr{F})$ the sheaf on $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$ associated to it. Then the main result of this section is:

Theorem 6.1. — *Assume that the above assumption holds. Then, there exists a spectral sequence*

$$E_2^{p,q}=\mathrm{H}^q\big(\mathscr{X}_{\mathrm{et}}^{\bullet},\mathscr{H}^p_{\mathrm{Gal}_M}(\mathscr{F})\big)\Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\widehat{\mathfrak{X}}_M,\mathscr{F}).$$

As mentioned in the Introduction, theorem 6.1 is the main technical tool needed to prove comparison isomorphisms relating different p-adic cohomology theories on X_K^{rig}. The proof of theorem 6.1 will take the rest of the section.

6.1. Remarks on various Grothendieck topologies. — Denote by $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ the Zariski topology on $\mathscr{X}$.

The site $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$. — Let the underlying category of $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$ be the full subcategory of the category of $\widehat{\mathfrak{X}}_M$ defined in 4.1 whose objects are pairs $(\mathscr{U},\mathscr{W})$ with $(\mathscr{U},\mathscr{W})\in\widehat{\mathfrak{X}}_M$ and $\mathscr{U}\to\mathscr{X}$ is a Zariski open formal subscheme. We define a family of maps in $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$ to be a covering family if it is a covering family when considered in $\widehat{\mathfrak{X}}_M$. We let

$$\iota\colon \widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}\longrightarrow\widehat{\mathfrak{X}}_M$$

be the natural functor. We also denote by

$$\widehat{v}_{\mathscr{X},M}\colon \mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}\longrightarrow\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$$

the map of Grothendieck topologies given by $\widehat{v}_{\mathscr{X},M}(\mathscr{U}):=(\mathscr{U},(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}},K))$. Since ι sends covering families to covering families, it is clear that $\iota_*\colon \mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M\big)\to\mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}\big)$ and $\iota_*^{\mathbf{N}}\colon \mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_M\big)^{\mathbf{N}}\to\mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}\big)^{\mathbf{N}}$ send flasque objects to flasque objects.

Stalks. — Let $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_{\hat{x}})\to\mathscr{X}$ be a closed immersion of formal schemes with $V\subset V_{\hat{x}}(\subset\overline{K})$ a finite extension of discrete valuation rings. Let $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\hat{x}}$ be the local ring of $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ at $\hat{x}$. Define $\overline{\mathscr{O}}^{\mathrm{Zar}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}$ to be the limit $\lim_{i,j}S_{i,j}$ over all quadruples $(R_i,S_{i,j},S_{i,j}\to\widehat{\overline{V}},L_{i,j})$ where (1) $\mathrm{Spf}(R_i)\subset\mathscr{X}$ is a Zariski open neighborhood of $\hat{x}$, (2) $L_{i,j}$ is a finite extension of K contained in M, (3) $R_i\subset S_{i,j}$ is an integral extension with $S_{i,j}$ normal, (4) $S_{i,j}\otimes_V K$ is a finite and étale $R_i\otimes_V L_{i,j}$-algebra, (5) the composite $R_i\otimes_V L_{i,j}\to S_{i,j}\otimes_V K\to\widehat{\overline{K}}$ is $a\otimes\ell\mapsto\hat{x}^*(a)\cdot\ell$. If $\mathscr{F}$ is a sheaf on $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$, define the stalk of $\mathscr{F}$ at $\hat{x}$ to be

$$\mathscr{F}_{\hat{x}}=\mathscr{F}(\overline{\mathscr{O}}^{\mathrm{Zar}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}):=\lim_{i,j}\mathscr{F}\big(\mathrm{Spf}(R_i),(\mathrm{Spm}(S_{i,j}\underset{V}{\otimes}K),L_{i,j})\big).$$

A sequence of sheaves on $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$ is exact if and only if the induced sequence of stalks is exact for every closed immersion $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_{\hat{x}}) \to \mathscr{X}$ as above. As in 4.4 one proves that $(\mathrm{R}^q\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F}))_{\hat{x}} \cong \mathrm{H}^q\big(G_{\hat{x},M}, \mathscr{F}_{\hat{x}}\big)$ where $G_{\hat{x},M} := \mathrm{Gal}\big(\overline{\mathscr{O}}^{\mathrm{Zar}}_{\mathscr{X},\hat{x},M}/\mathscr{O}_{\mathscr{X},\hat{x}} \otimes_V K\big)$.

6.1.1. *The site $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$.* — Let $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ be a Zariski open formal subscheme or an object of $\mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}$. Let $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ be the Grothendieck topology $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ introduced in 4.1. It is a full subcategory of $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$ (resp. $\widehat{\mathfrak{X}}_M$). If $\mathscr{U}' \to \mathscr{U}$ is a morphism in $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ (resp. $\mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}$), we have a map of Grothendieck topologies

$$\rho_{\mathscr{U},\mathscr{U}'}\colon \mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}} \longrightarrow \mathscr{U}'_{M,\mathrm{fet}}$$

letting $\rho_{\mathscr{U},\mathscr{U}'}\big(\mathscr{U},\mathscr{W}\big)$ be the pair $(\mathscr{U}',\mathscr{W}')$ where $\mathscr{W}' := \mathscr{W} \times_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}} \mathscr{U}'^{\mathrm{rig}}$; see 4.1.

Assume that $\mathscr{U} = \mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ is affine. By 4.6 we have an inclusion $R_{\mathscr{U}} \subset \mathbb{C}_{\mathscr{X}}$ (this way we work with $\mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}$ instead of $\mathscr{X}_{\mathrm{et}}$). Let $R_{\mathscr{U}} \subset \overline{R}_{\mathscr{U}}$ be the union of all finite and normal $R_{\mathscr{U}}$-subalgebras of $\mathbb{C}_{\mathscr{X}}$, which are étale after inverting p. If $\mathscr{U} = \amalg_i \mathscr{U}_i$, with $\mathscr{U}_i$ of the type above for every i, define $\overline{R}_{\mathscr{U}} := \prod_i \overline{R}_{\mathscr{U}_i}$.

Define $\pi_1(\mathscr{U}_M)$ to be $\mathrm{Gal}\big(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K/R_{\mathscr{U}} \otimes_V M\big)$ and let $\mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)$ be the category of abelian groups, with the discrete topology, endowed with a continuous action of $\pi_1(\mathscr{U}_M)$. We have proved in 4.8 that the functor $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K)$ defines an equivalence of categories from the category $\mathbf{Sh}\,(\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}})$ to the category $\mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)$. Taking continuous sheaves we get:

Lemma 6.2. — 1) *The functor*

$$\mathbf{Sh}\,(\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}})^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)^{\mathbf{N}}, \qquad \{\mathscr{F}_n\} \to \{\mathscr{F}_n(\overline{R}_{\mathscr{U}} \underset{V}{\otimes} K)\}$$

is an equivalence of categories;

2) *for every $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}\,(\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}})^{\mathbf{N}}$ we have*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\big(\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}, \mathscr{F}\big) = \mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M), \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \underset{V}{\otimes} K)\big),$$

where the latter is the i-th derived functor of $\mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)^{\mathbf{N}} \to \mathrm{AbGr}$ *given by* $\{A_n\} \mapsto \lim\limits_{\infty \leftarrow n} A_n^{\pi_1(\mathscr{U}_M)}$.

Definition 6.3. — Let $\mathscr{F}$ be in $\mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}\big)$ (or in $\mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}^{\bullet}_M\big)$, or in $\mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}\big)^{\mathbf{N}}$, or in $\mathbf{Sh}\big(\widehat{\mathfrak{X}}^{\bullet}_M\big)^{\mathbf{N}}$). We define $\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K)$ as the image of $\mathscr{F}$ in $\mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)$ (or in $\mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)^{\mathbf{N}}$) of $\mathscr{F}$ via the pull-back maps $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}) \to \mathbf{Sh}(\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}) \cong \mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)$ (respectively via the pull-back $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}^{\bullet}_M) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{disc}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M)\big)$, etc.).

Convention 6.4. — From now on we simply write $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}$ for $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$ or $\widehat{\mathfrak{X}}^{\bullet}_M$ and $\mathscr{X}_*$ for $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ or, respectively, $\mathscr{X}^{\bullet}_{\mathrm{et}}$.

6.2. The sheaf $\mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M}(\mathscr{F})$. — Let $\mathscr{F}\in\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*})$. Let $\mathscr{U}'\to\mathscr{U}$ be a map in $\mathscr{X}_*$ with $\mathscr{U}'$ and $\mathscr{U}$ affine. We then get an induced map

$$\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M),\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\underset{V}{\otimes}K)\big)\longrightarrow\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}'_M),\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}'}\underset{V}{\otimes}K)\big).$$

In particular, $\mathscr{U}\to\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M),\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)\big)$ is a contravariant functor on the category of affine objects of $\mathscr{X}_*$.

Definition 6.5. — Define $\mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M}(\mathscr{F})$ to be the sheaf on $\mathscr{X}_*$ associated to the contravariant functor given by $\mathscr{U}\to\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M),\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)\big)$ for $\mathscr{U}$ affine.

6.2.1. *The standard resolution.* — Let $\mathscr{G}$ be a presheaf on $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}$. For $i\in\mathbf{N}$ and for $\mathscr{U}=\mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ an affine object of $\mathscr{X}_*$, define

$$E^i(\mathscr{G})_{\mathscr{U}}:=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}\left(\mathbf{Z}\left[\pi_1(\mathscr{U}_M)^{i+1}\right],\mathscr{G}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\underset{V}{\otimes}K)\right).$$

It is endowed with an action of $\pi_1(\mathscr{U}_M)$ defined as follows. For every $\gamma,g_0,\dots,g_i\in\pi_1(\mathscr{U}_M)$ and every $f\in E^i(\mathscr{G})_{\mathscr{U}}$ put $\gamma\cdot f(g_0,\dots,g_i)=\gamma^{-1}\big(f(\gamma g_0,\dots,\gamma g_i)\big)$. Denote by $C^i(\mathscr{G})_{\mathscr{U}}\subset E^i(\mathscr{G})_{\mathscr{U}}$ the subgroup of invariants for the action of $\pi_1(\mathscr{U}_M)$. Consider the map

$$\begin{aligned}d_i\colon\mathbf{Z}\left[\pi_1(\mathscr{U}_M)^{i+1}\right]&\to\mathbf{Z}\left[\pi_1(\mathscr{U}_M)^{i}\right],\\(g_0,\dots,g_i)&\mapsto\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(g_0,\dots,g_{j-1},g_{j+1},\dots,g_i)\end{aligned}$$

for $i\geq 1$ and given by $g_0\mapsto 1$ for $i=0$. We then get an exact sequence of $\pi_1(\mathscr{U}_M)$-modules

$$\cdots\longrightarrow\mathbf{Z}\left[\pi_1(\mathscr{U}_M)^2\right]\longrightarrow\mathbf{Z}\left[\pi_1(\mathscr{U}_M)^1\right]\longrightarrow\mathbf{Z}\longrightarrow 0.$$

Taking $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}\big(\_,\mathscr{G}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)\big)$ we get an exact sequence of $\pi_1(\mathscr{U}_M)$-modules

$$0\longrightarrow\mathscr{G}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\underset{V}{\otimes}K)\longrightarrow E^0(\mathscr{G})_{\mathscr{U}}\longrightarrow E^1(\mathscr{G})_{\mathscr{U}}\longrightarrow\cdots\tag{18}$$

which provides a resolution of $\mathscr{G}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)$ by acyclic $\pi_1(\mathscr{U}_M)$-modules. Using 4.8 we define the sheaf $\mathscr{W}\mapsto E^i(\mathscr{G})(\mathscr{U},\mathscr{W})$ on the category $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ associated to $E^i(\mathscr{G})_{\mathscr{U}}$. Furthermore, $(\mathscr{U},\mathscr{W})\mapsto E^i(\mathscr{G})(\mathscr{U},\mathscr{W})$ is a contravariant functor defined on the subcategory of $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}$ of pairs $(\mathscr{U},\mathscr{W})$ with $\mathscr{U}$ affine.

Definition 6.6. — Let $\mathscr{F}\in\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*})$. For every $i\in\mathbf{N}$ define $\mathfrak{E}^i(\mathscr{F})$ to be the sheaf on $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}$ associated to the contravariant functor $(\mathscr{U},\mathscr{W})\to E^i(\mathscr{F})(\mathscr{U},\mathscr{W})$ for $\mathscr{U}$ affine. Define $\mathscr{C}^i(\mathscr{F})$ to be the sheaf on $\mathscr{X}_*$ associated to the contravariant functor associating to an affine $\mathscr{U}$ the continuous i-th cochains of $\pi_1(\mathscr{U}_M)$ with values in $\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)$ i. e., $\mathscr{C}^i(\mathscr{F})(\mathscr{U})=E^i(\mathscr{F})^{\pi_1(\mathscr{U}_M)}_{\mathscr{U}}$.

Proposition 6.7. — *The following hold:*

i) *the differentials d_i of* 6.2.1 *define an exact sequence of sheaves on* $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}$

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathfrak{E}^0(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathfrak{E}^1(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathfrak{E}^2(\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots;$$

ii) *for every $j \geq 1$ and every i one has* $\mathrm{R}^j\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\mathfrak{E}^i(\mathscr{F}) = 0$;
iii) *for every i one has* $\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\mathfrak{E}^i(\mathscr{F}) = \mathscr{C}^i(\mathscr{F})$.

Proof. — (i) let $(\mathscr{U}, (\mathscr{W}, L)) \in \widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}$ with $\mathscr{U}$ affine. Suppose that $\mathscr{W} = \mathrm{Spm}(S)$ with $S \otimes_L M$ an integral domain. Write $\mathrm{Gal}_M(\mathscr{W}) := \mathrm{Gal}\big(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K/S \otimes_L M\big)$. Then, $E^i(\mathscr{F})(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ is $E^i(\mathscr{F})_{\mathscr{U}}^{\mathrm{Gal}_M(\mathscr{W})}$. In particular, using (18), it follows that the kernel of $E^0(\mathscr{F})(\mathscr{U}, \mathscr{W}) \to E^1(\mathscr{F})(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ is $\mathscr{F}\big(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K\big)^{\mathrm{Gal}_M(\mathscr{W})}$. This coincides with $\mathscr{F}(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ since $\mathscr{F}$ is a sheaf thanks to 6.2. In particular, the kernel of $\mathfrak{E}^0(\mathscr{F}) \to \mathfrak{E}^1(\mathscr{F})$ is $\mathscr{F}$. To check the exactness of the sequence in (i) it is enough to pass to the stalks. Given $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_{\hat{x}}) \to \mathscr{X}$ as in 6.1 or 4.4, the stalk $\mathfrak{E}^i(\mathscr{F})_{\hat{x}}$ is the direct limit $\lim E^i(\mathscr{F})(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ over all $(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ with $\mathscr{U}$ an affine neighborhood of $\hat{x}$ and $\mathscr{W} = \mathrm{Spm}(S)$ with $S \otimes_L M \subset \overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K$. Hence, $\mathfrak{E}^i(\mathscr{F})_{\hat{x}} = \lim \mathfrak{E}^i(\mathscr{F})_{\mathscr{U}}$ where the limit is now taken over all affine open neighborhoods $\mathscr{U}$ of $\hat{x}$. Since for any such (18) is exact, we conclude that the stalk at $\hat{x}$ of the sequence in (i) is exact as well.

(ii) The claim can be checked on stalks. As explained in 6.1 or 4.4, given $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_{\hat{x}}) \to \mathscr{X}$ as before, one has $\big(\mathrm{R}^q\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathfrak{E}^i(\mathscr{F}))\big)_{\hat{x}} \cong \mathrm{H}^q\big(G_{\hat{x},M}, \mathfrak{E}^i(\mathscr{F})_{\hat{x}}\big)$. But $\mathfrak{E}^i(\mathscr{F})_{\hat{x}}$ coincides with the direct limit $\lim \mathfrak{E}^i(\mathscr{F})_{\mathscr{U}}$ taken over all affine neighborhoods $\mathscr{U}$ of $\hat{x}$. Hence,

$$\mathfrak{E}^i(\mathscr{F})_{\hat{x}} = \lim_{\hat{x} \in \mathscr{U}} \mathfrak{E}^i(\mathscr{F})_{\mathscr{U}} = \lim_{\hat{x} \in \mathscr{U}} \mathrm{Hom}\left(\mathbf{Z}\left[\pi_1(\mathscr{U}_M)^{i+1}\right], \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \underset{V}{\otimes} K)\right) =$$

$$= \mathrm{Hom}\left(\lim_{\rightarrow} \mathbf{Z}\left[\pi_1(\mathscr{U}_M)^{i+1}\right], \lim_{\rightarrow} \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \underset{V}{\otimes} K)\right) = \mathrm{Hom}\left(\mathbf{Z}\left[\left(G_{\hat{x}}\right)^{i+1}\right], \mathscr{F}_{\hat{x}}\right),$$

where $G_{\hat{x}}$ is $G_{\hat{x},M}^{\mathrm{Zar}}$ or $G_{\hat{x},M}$ depending whether $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}$ is $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,\mathrm{Zar}}$ or $\widehat{\mathfrak{X}}_M^{\bullet}$. In particular, $\big(\mathrm{R}^q\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathfrak{E}^i(\mathscr{F}))\big)_{\hat{x}} = 0$ if $q \geq 1$. Claim (ii) follows.

(iii) For every affine open $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ there exists a map from the group of i-th cochains $C^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M), \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K)\big) = \big(E^i_{\mathscr{U}}\big)^{\pi_1(\mathscr{U}_M)}$ to $\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\mathfrak{E}^i(\mathscr{F})(\mathscr{U})$. This provides a natural map $\mathscr{C}^i(\mathscr{F}) \to \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\mathfrak{E}^i(\mathscr{F})$. On the other hand, it follows from the discussion above that $\big(\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathfrak{E}^i(\mathscr{F}))\big)_{\hat{x}}$ is equal to the group of i-th cochains $C^i\big(G_{\hat{x},M}^{\mathrm{Zar}}, \mathscr{F}_{\hat{x}}\big)$ i. e., the stalk of $\mathscr{C}^i(\mathscr{F})$. The claim follows. □

Corollary 6.8. — *If $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*})$, then $\mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F}) \cong \mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M}(\mathscr{F})$ functorially in $\mathscr{F}$.*

6.3. The sheaf $\mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M,\mathrm{cont}}$. — We wish to prove an analogue of 6.8 in the case of a continuous sheaf $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_n\}_n \in \mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*})^{\mathbf{N}}$. We need some assumptions.

Definition 6.9. — Consider a small object $\mathscr{U}$ of $\mathscr{X}_*$. Define $R_{\mathscr{U},M,\infty}$ to be the normalization of $R_{\mathscr{U},\infty}$ in the subring of $\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K$ generated by M and $R_{\mathscr{U},\infty}$, where $R_{\mathscr{U},\infty}$

is defined as in 2.1. Denote by $\Gamma_{\mathscr{U},M}$ the group $\mathrm{Gal}\big(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K/R_{\mathscr{U}}\otimes_V M\big)$. Let $\mathscr{H}_{\mathscr{U},M}$ be the kernel of the map $\pi_1(\mathscr{U}_M)\to\Gamma_{\mathscr{U},M}$. Let us remark that the definitions of $R_{\mathscr{U},\infty}, R_{\mathscr{U},M,\infty}, \mathscr{H}_{\mathscr{U},M}, \Gamma_{\mathscr{U},M}$ depend on a choice of local parameters of $R_{\mathscr{U}}$ and so are not canonical.

6.3.1. *The site* $\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}(\infty)$. — Let $\mathscr{U}$ be a small object of $\mathscr{X}_*$. For every map $\mathscr{U}'\to\mathscr{U}$ with $\mathscr{U}':=\mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}'})$ affine and $R_{\mathscr{U}'}\otimes_V K$ an integral domain, we let $\mathscr{H}_{\mathscr{U}',M}$ be the kernel of $\pi_1(\mathscr{U}'_M)\to\Gamma_{\mathscr{U},M}$. Note that such a map is surjective.

Let $\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}(\infty)$ be the following full subcategory of $\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}$. Let $(\mathscr{U}',\mathscr{W}')\in\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}$ and assume that $\mathscr{U}':=\amalg_i\mathscr{U}'_i$ with $\mathscr{U}'_i$ connected. Then, $\mathscr{W}'$ lies in $\mathscr{U}'_{M,\mathrm{fet}}$ which, via the equivalence of 6.2, is equivalent to the category of finite sets with continuous action of $\pi_1(\mathscr{U}'_M)=\prod_i\pi_1(\mathscr{U}'_{i,M})$. We then say that $(\mathscr{U}',\mathscr{W}')$ lies in $\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}(\infty)$ if and only if $\mathscr{W}'$ lies in the subcategory of finite sets with continuous action of $\prod_i\Gamma_{\mathscr{U}}$ (viewed as a quotient of $\pi_1(\mathscr{U}'_M)$). We then have natural maps of Grothendieck topologies $\mathscr{U}_*\xrightarrow{\alpha}\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}(\infty)\xrightarrow{\beta}\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}$ giving rise to maps on the category of sheaves

$$\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*})\xrightarrow{\beta_*}\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}(\infty))\xrightarrow{\alpha_*}\mathbf{Sh}(\mathscr{U}_*)$$

whose composite is $\widehat{v}_{\mathscr{U},M,*}$. As in 6.1 or 4.4 one has a notion of stalks in $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{U}}_{M,*}(\infty))$. For $\hat{x}\colon\mathrm{Spf}(V_{\hat{x}})\to\mathscr{X}$ a point as in 4.3, let $H_{\hat{x},M}$ be the kernel of the map $G_{\hat{x},M}\to\Gamma_{\mathscr{U},M}$. If $\mathscr{F}\in\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{U}}_M)$ and $\mathscr{F}_{\hat{x}}$ is its stalk, one proves as in 4.4 that

$$\mathrm{R}^q\beta_*(\mathscr{F})_{\hat{x}}\cong\mathrm{H}^q\big(H_{\hat{x},M},\mathscr{F}_{\hat{x}}\big).$$

Caveat: The site $\widehat{\mathfrak{U}}_M(\infty)$ depends on the choice of an extension $R_{\mathscr{U}}\subset R_{\mathscr{U},\infty}$. In particular, if $\{\mathscr{U}_i\}_i$ is a covering of $\mathscr{X}$ by small objects, the sites $\widehat{\mathfrak{U}}_{i,M}(\infty)$ do not necessarily glue so that the site $\widehat{\mathfrak{X}}_M(\infty)$ is not defined in general.

Assumption 6.10. — We suppose that

i) $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is a sheaf of $A^+_{\mathrm{inf}}(V_\infty)$-modules (resp. of $\{V_\infty/p^nV_\infty\}_n$-modules) on $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}$;

ii) $\mathscr{X}$ admits
   a) a covering $\mathscr{S}:=\{\mathscr{W}_i\}_i$ in $\mathscr{X}_*$ by small objects $\mathscr{W}_i:=\mathrm{Spf}\big(R_{\mathscr{W}_i}\big)$,
   b) a choice $R_{\mathscr{W}_i}\subset R_{\mathscr{W}_i,\infty}$ as in 2.1,
   c) for every i a basis $\mathscr{T}_i:=\{\mathscr{U}_{i,j}\}_j$ of $\mathscr{W}_i$ by small objects such that, putting $R_{\mathscr{U}_{i,j},\infty}$ to be the normalization of $R_{\mathscr{U}_{i,j}}\otimes_{R_{\mathscr{W}_i}}R_{\mathscr{W}_i,\infty}$, condition (RAE) holds for $R_{\mathscr{U}_{i,j},\infty}$.

Furthermore, for every i, j and $n\in\mathbf{N}$, putting $\mathscr{U}:=\mathscr{U}_{i,j}$, the following hold:

iii) the cokernel of $\mathscr{F}_{n+1}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)\to\mathscr{F}_n(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)$ is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(\overline{V}/p\overline{V}\big)$ (resp. $\overline{V}$);

iv) for every $q\geq 1$ the group $\mathrm{H}^q\big(\mathscr{H}_{\mathscr{U},M},\mathscr{F}_n\big(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K\big)\big)$ is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(\overline{V}/p\overline{V}\big)$ (resp. $\overline{V}$);

v) the cokernel of the transition maps $\mathscr{F}_{n+1}(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)\to\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)$ is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞);

vi) for every covering $\mathscr{Z} \to \mathscr{U}$ by small objects in $\mathscr{X}_*$ and every $q \geq 1$ the Chech cohomology group $\mathrm{H}^q\big(\mathscr{Z} \to \mathscr{U}, \mathscr{F}_n(R_{\mathscr{Z},\infty} \otimes_V K)\big)$ is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞).

We write π for the element $[\epsilon] - 1$ in $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{V_\infty}$ if $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is a sheaf of $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{V_\infty}$-modules. Instead, we put $\pi = p$ if $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is a sheaf of $\{V_\infty/p^nV_\infty\}_n$-modules. It follows from (iii) and 5.2 that we have an isomorphism

$$\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M), \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \underset{V}{\otimes} K)\big)\big[\pi^{-1}\big] \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}\big(\pi_1(\mathscr{U}_M), \lim_{\infty\leftarrow n} \mathscr{F}_n(\overline{R}_{\mathscr{U}} \underset{V}{\otimes} K)\big)\big[\pi^{-1}\big].$$

If $\mathscr{U}' \to \mathscr{U}$ is a map in $\mathscr{X}_*$ with $\mathscr{U}'$ and $\mathscr{U}$ small objects in $\mathscr{T}_i$, we then get an induced map

$$\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M), \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \underset{V}{\otimes} K)\big)\big[\pi^{-1}\big] \longrightarrow \mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}'_M), \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}'} \underset{V}{\otimes} K)\big)\big[\pi^{-1}\big].$$

As in 6.5, we define

Definition 6.11. — Assume that $\mathscr{F}$ satisfies the assumption above. Let $\mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M,\mathrm{cont}}(\mathscr{F})$ be the sheaf on $\mathscr{X}_*$ associated to the contravariant functor sending an object $\mathscr{U}$ of $\mathscr{X}_*$, with $\mathscr{U} \in \cup_i \mathscr{T}_i$, to $\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_M), \mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K)\big)\big[\pi^{-1}\big]$.

We want to prove the following:

Theorem 6.12. — *Let $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*})^{\mathbf{N}}$ be such that the conditions of 6.10 are fulfilled. Then, $\mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F})\big[\pi^{-1}\big] \cong \mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M,\mathrm{cont}}(\mathscr{F})$. The isomorphism is functorial in $\mathscr{F}$.*

Proof. — It suffices to prove that for every small object $\mathscr{W}_i \in \mathscr{S}$, we have an isomorphism $\mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F})\big[\pi^{-1}\big]|_{\mathscr{W}_i} \cong \mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M}(\mathscr{F})|_{\mathscr{W}_i}$ functorially in $\mathscr{W}_i$ and $\mathscr{F}$. We construct the isomorphism and leave it to the reader to check the functoriality in $\mathscr{W}_i$ and $\mathscr{F}$. □

We may and will, *till the end of this section*, assume that $\mathscr{X} = \mathscr{W}_i$ *is small.* We put $\mathscr{T} := \mathscr{T}_i$ and we write Γ for $\Gamma_{\mathscr{W}_i,M}$. Consider the maps on the category of sheaves

$$\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*})^{\mathbf{N}} \xrightarrow{\beta_*^{\mathbf{N}}} \mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}(\infty))^{\mathbf{N}} \xrightarrow{\lim_{\leftarrow}\alpha_*} \mathbf{Sh}(\mathscr{X}_*),$$

introduced in 6.3.1. The composite is $\lim_{\leftarrow} \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}$. Since α_* and β_* are left exact and β_* sends injective to injective, we have a spectral sequence

$$\mathrm{R}^p \lim_{\leftarrow} \alpha_*\big(\mathrm{R}^q\beta_*^{\mathbf{N}}(\mathscr{F})\big) \Longrightarrow \mathrm{R}^{p+q}\big(\lim_{\leftarrow} \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\big)(\mathscr{F}). \tag{19}$$

Lemma 6.13. — *For every $q \geq 1$ the group $\mathrm{R}^q\beta_*(\mathscr{F})$ is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞).*

Proof. — Since $\mathrm{R}^q\beta_*^{\mathbf{N}} = \big(\mathrm{R}^q\beta_*\big)^{\mathbf{N}}$ as remarked in 5.1, it suffices to prove that for every $n \in \mathbf{N}$ and every $q \geq 1$ the sheaf $\mathrm{R}^q\beta_*(\mathscr{F}_n)$ is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞). It suffices to prove the vanishing on stalks. But for $\hat{x}\colon \mathrm{Spf}(V_{\hat{x}}) \to \mathscr{X}$ a point as in 4.3, we have $\mathrm{R}^q\beta_*(\mathscr{F}_n)_{\hat{x}} \cong \mathrm{H}^q\big(H_{\hat{x},M}, \mathscr{F}_{\hat{x}}\big)$ as explained in 6.3.1. The latter coincides with the

direct limit $\lim \mathrm{H}^q\left(\mathscr{H}_{\mathscr{U},M},\mathscr{F}_n\left(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K\right)\right)$ taken over the small objects belonging to a basis of $\mathscr{X}_*$ containing $\hat{x}$. The claim then follows from 6.10(i) & (iv). □

Using 6.13 and (19) we conclude that

$$\mathrm{R}^p \varprojlim \alpha_*\left(\beta_*^{\mathbf{N}}(\mathscr{F})\right)\left[\pi^{-1}\right] \cong \mathrm{R}^p\left(\varprojlim \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}\right)(\mathscr{F})\left[\pi^{-1}\right].$$

We are left to compute $\mathrm{R}^p \varprojlim \alpha_*$. For this we use the analogue of 6.2.1 on $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}(\infty)$.

Given $\mathscr{U}$ in $\mathscr{T}$, write $R_{\mathscr{U},M,\infty}$ as the union $\cup_n R_{\mathscr{U},M,n}$ of finite $R_{\mathscr{U}}$-algebras such that $R_{\mathscr{U}}\otimes_V K \subset \mathrm{R}_{\mathscr{U},M,n}\otimes_V K$ is finite and étale. Then, for every covering $\mathscr{U}'\to\mathscr{U}$ with $\mathscr{U}'\in\mathscr{T}$, we have $R_{\mathscr{U}',M,\infty}\otimes_V K \cong \cup_n R_{\mathscr{U}'}\otimes_{R_{\mathscr{U}}} R_{\mathscr{U},M,n}\otimes_V K$ by construction. Let $\mathscr{U}''\to\mathscr{U}'\times_{\mathscr{U}}\mathscr{U}'$ be a covering with $\mathscr{U}''$ in $\mathscr{T}$. Then, we also have $R_{\mathscr{U}'',M,\infty}\otimes_V K \cong \cup_n R_{\mathscr{U}''}\otimes_{R_{\mathscr{U}}} R_{\mathscr{U},M,n}\otimes_V K$. Since $\mathscr{F}_n$ is a sheaf, we conclude that the sequence

$$0\longrightarrow \mathscr{F}_n\left(R_{\mathscr{U},M,\infty}\underset{V}{\otimes}K\right)\longrightarrow \mathscr{F}_n\left(R_{\mathscr{U}',M,\infty}\underset{V}{\otimes}K\right)\longrightarrow \mathscr{F}_n\left(R_{\mathscr{U}'',M,\infty}\underset{V}{\otimes}K\right)$$

is exact i. e., $\mathscr{U}\to\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)$ satisfies the sheaf property with respect to coverings $\mathscr{U}'\to\mathscr{U}$ with $\mathscr{U}'$ and $\mathscr{U}$ small and lying in $\mathscr{T}$. Then, the following makes sense:

Definition 6.14. — For every small object $\mathscr{U}\to\mathscr{X}$ lying in $\mathscr{T}$ and every i, $n\in\mathbf{N}$ define $E^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)_{\mathscr{U}}$ to be $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}\left(\mathbf{Z}\left[\Gamma^{i+1}\right],\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)\right)$. Define $\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)$ to be the sheaf on $\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}(\infty)$ characterized by the property that, for every small object $\mathscr{U}\in\mathscr{T}$, its restriction to $\mathscr{U}_{M,\mathrm{fet}}$ (see 4.1) is $E^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)_{\mathscr{U}}$ as representation of $\Gamma_{\mathscr{U}}$. Let $\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}) := \left\{\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\right\}_n$.

Let $C^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)_{\mathscr{U}}\subset E^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)_{\mathscr{U}}$ be the subgroup of invariants for the action of Γ i. e., the group of i-th cochains of Γ with values in $\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)$. Denote by $\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)$ the unique sheaf on $\mathscr{X}_*$ whose value for every small object $\mathscr{U}$ is $C^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)_{\mathscr{U}}$. Eventually, let $\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}) := \left\{\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\right\}_n$.

Proposition 6.15. — *Assume that $\mathscr{F}$ satisfies 6.10. Then:*

i) *we have an exact sequence in* $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}(\infty))^{\mathbf{N}}$

$$0\longrightarrow \beta_*^{\mathbf{N}}(\mathscr{F})\longrightarrow \mathfrak{E}^0(\Gamma,\mathscr{F})\longrightarrow \mathfrak{E}^1(\Gamma,\mathscr{F})\longrightarrow\cdots$$

ii) $\mathrm{R}^q\varprojlim \alpha_*\left(\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F})\right)\left[\pi^{-1}\right]=0$ *for every $q\geq 1$ and every i;*

iii) $\varprojlim \alpha_*\left(\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F})\right)\left[\pi^{-1}\right]$ *is the sheaf associated to the contravariant functor sending a small object $\mathscr{U}$ to* $\varinjlim_{\infty\leftarrow n}\mathscr{C}^i\left(\Gamma,\mathscr{F}_n\left(R_{\mathscr{U},M,\infty}\underset{V}{\otimes}K\right)\right)\left[\pi^{-1}\right]$.

In particular, $\mathrm{R}^q\varprojlim \alpha_*\left(\beta_*^{\mathbf{N}}(\mathscr{F})\right)\left[\pi^{-1}\right]$ *is the q-th cohomology of the complex*

$$\varinjlim_{\infty\leftarrow n}\mathscr{C}^0(\Gamma,\mathscr{F}_n)\left[\pi^{-1}\right]\longrightarrow \varinjlim_{\infty\leftarrow n}\mathscr{C}^1(\Gamma,\mathscr{F}_n)\left[\pi^{-1}\right]\longrightarrow \varinjlim_{\infty\leftarrow n}\mathscr{C}^2(\Gamma,\mathscr{F}_n)\left[\pi^{-1}\right]\longrightarrow\cdots$$

proving 6.12.

Proof. — Claim (i) can be checked componentwise and then it follows as in the proof of 6.7(i).

(ii)–(iii) We use the spectral sequence

$$\lim{}^{(p)}\big(\mathrm{R}^q\alpha_*(\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n))\big) \Longrightarrow \mathrm{R}^{p+q}\varprojlim \alpha_*(\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}))$$

given in 5.1. Since each $\mathscr{F}_n$ is a sheaf we have $\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K) = E^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)_{\mathscr{U}}$. Hence, $\mathrm{H}^q\big(\Gamma,\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)\big)$ is 0 for every $q\geq 1$ and it coincides with the cochains $\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K) = C^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)_{\mathscr{U}}$ for $q=0$.

Arguing as in 6.7(ii) we conclude that $\mathrm{R}^q\alpha_*\big(\beta_*(\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n))\big)=0$ for $q\geq 1$. We are left to compute $\lim^{(p)}\alpha_*\big(\mathfrak{E}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big) = \lim^{(p)}\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)$.

Due to 6.10(vi), for every small object $\mathscr{U}\in\mathscr{T}$ and every n the Chech cohomology group $\mathrm{H}^q\left(\mathscr{Z}\to\mathscr{U},\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{Z},\infty}\otimes_V K)\right)$, relative to every covering $\mathscr{Z}\to\mathscr{U}$ by small objects lying in $\mathscr{T}$, is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞). But we have

(20)

$$\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n(R_{\_,\infty}\otimes K)) = \varinjlim_{m\to\infty}\mathscr{C}^i(\Gamma/p^m\Gamma,\mathscr{F}_n(R_{\_,\infty}\otimes K)) = \varinjlim_{m\to\infty}\Big(\prod_{\Gamma/p^m\Gamma}\mathscr{F}_n(R_{\_,\infty}\otimes K)\Big).$$

As both inductive limit and finite products are exact functors we deduce that the Chech cohomology group $\mathrm{H}^q\left(\mathscr{Z}\to\mathscr{U},\mathscr{C}^i\big(\Gamma,\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{Z},\infty}\otimes_V K)\big)\right)$ relative to every covering $\mathscr{Z}\to\mathscr{U}$ with $\mathscr{Z}$ and $\mathscr{U}\in\mathscr{T}$ is annihilated by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞). Hence, the restriction of $\mathscr{C}^i\big(\Gamma,\mathscr{F}_n(R_{\_,\infty}\otimes_V K)\big)$ to $\mathscr{U}$ is flasque, see [**3**, II.4.2], up to multiplication by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞). In particular, $\mathrm{H}^q\big(\mathscr{U},\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big)$ is almost zero for every $q\geq 1$; see [**3**, II.4.4]. Due to 6.10(v) the projective system $\{\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)\}_n$ is almost Mittag-Lefler and using once again (20) we also have that the projective system $\big\{\mathscr{C}^i\big(\Gamma,\mathscr{F}_n\big)\big\}_n$ is almost Mittag-Leffler. Hence, $\lim^{(1)}\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)$ is almost zero.

By [**20**, Lemma 3.12] the sheaf $\lim^{(q)}\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)$ is the sheaf associated to the presheaf $\mathscr{U}\mapsto\mathrm{H}^q\big(\mathscr{U},\big(\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big)_n\big)$. We have, for each $q\geq 1$, exact sequences

$$0\to\lim{}^{(1)}\mathrm{H}^{q-1}\big(\mathscr{U},\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big)\longrightarrow\mathrm{H}^q\big(\mathscr{U},\big(\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big)_n\big)\longrightarrow\varprojlim_{\infty\leftarrow n}\mathrm{H}^q\big(\mathscr{U},\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big)\to 0.$$

For $q\geq 2$, using the fact proved above that $\mathrm{H}^s\big(\mathscr{U},\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big)$ is almost zero for $s\geq 1$, we deduce that $\mathrm{H}^q\big(\mathscr{U},\big(\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big)_n\big)$ is almost zero. We conclude that $\lim^{(q)}\mathscr{C}^i(\Gamma,\mathscr{F}_n)$ is annihilated by every element of the maximal ideal $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞) for $q\geq 2$.

Thus,

$$R^p\varprojlim\alpha_*\big(\mathfrak{E}^j(\Gamma,\mathscr{F})\big)\big[\pi^{-1}\big]=0$$

for $p\geq 1$ and all $j\geq 0$, and

$$\varprojlim\alpha_*\mathfrak{E}^\bullet(\Gamma,\mathscr{F})\big[\pi^{-1}\big]\cong\varprojlim_{\infty\leftarrow n}\mathscr{C}^\bullet(\Gamma,\mathscr{F}_n)\big[\pi^{-1}\big].$$

The conclusion follows. □

Theorem 6.16. — *Let $\mathscr{X}$ be formally smooth, topologically of finite type and geometrically irreducible over V. Let $\mathbb{L}=(\mathbb{L}_n)_n$ be a projective system of sheaves such that $\mathbb{L}_n\cong\mathbb{L}_{n+1}/p^n\mathbb{L}_{n+1}$ for every n. Let $\mathscr{F}\in\mathbf{Sh}(\mathscr{X}_*)^{\mathbf{N}}$ be a sheaf of one of the following types:*

A) *$\mathscr{F}$ is $\mathbb{L}^{\mathrm{rig}}\otimes A_{\mathrm{inf}}^+\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big):=\big(\mathbb{L}_n\otimes\mathbf{W}_n\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\big)_n$;*

B) *$\mathscr{F}:=\big(\mathbb{L}_n\otimes\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p^n\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\big)_n$ where $\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p^{n+1}\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\to\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p^n\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}$ is the natural projection for each $n\in\mathbf{N}$.*

Then, the assumptions in 6.10 hold.

Remark 6.17. — Assumption (ii) of 6.10 holds. Indeed, $\mathscr{X}$ is formally smooth and topologically of finite type over V. In particular, it is Zariski locally the p-adic completion of a smooth scheme over $\mathrm{Spec}(V)$. Thus, $\mathscr{X}$ admits a basis by affine subschemes satisfying (RAE) due to 2.3.

In case (A), assume further that $\mathbb{L}$ is a p-power torsion i. e., annihilated by p^s for some s. Then, one can compute the sheaf $\mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M,\mathrm{cont}}(\mathscr{F})$ introduced in 6.11 via relative (φ,Γ)-modules. Indeed, assume that $\mathscr{U}=\mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ is small and that (RAE) holds for $R_{\mathscr{U},\infty}$.

For $M=K$ we have $\pi_1(\mathscr{U}_M)=\mathscr{G}_{R_{\mathscr{U}}}$ and by A.14 the inflation

$$\mathrm{H}^i\big(\Gamma_{R_{\mathscr{U}}},\mathfrak{D}(\mathbf{L})\big)\longrightarrow\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_K),\mathbf{L}\underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}_{\mathscr{U}}}\big)\cong\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_K),\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\underset{V}{\otimes}K)\big)\big[\pi^{-1}\big]$$

is an isomorphism.

Analogously, for $M=\overline{K}$ we have $\pi_1(\mathscr{U}_M)=\mathrm{G}_{R_{\mathscr{U}}}$ so that

$$\mathrm{H}^i\big(\Gamma'_{R_{\mathscr{U}}},\mathrm{D}_{\overline{K}}(\mathbf{L})\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_{\overline{K}}),\mathbf{L}\underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}_{\mathscr{U}}}\big)\cong\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_{\overline{K}}),\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\underset{V}{\otimes}K)\big)\big[\pi^{-1}\big].$$

Here, $\mathrm{D}_{\overline{K}}(\mathbf{L})$ is the (φ,Γ'_R)-module associated to $\mathbf{L}$ and the field $\overline{K}$ as in §2.

For $M=K_\infty$, the group $\pi_1(\mathscr{U}_M)$ is the subgroup of $\mathscr{G}_{R_{\mathscr{U}}}$ generated by $\mathrm{G}_{R_{\mathscr{U}}}$ and H_V. In this case

$$\mathrm{H}^i\big(\Gamma'_{R_{\mathscr{U}}},\mathrm{D}_{K_\infty}(\mathbf{L})\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_{K_\infty}),\mathbf{L}\underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}_{\mathscr{U}}}\big)\cong\mathrm{H}^i\big(\pi_1(\mathscr{U}_{K_\infty}),\mathscr{F}(\overline{R}_{\mathscr{U}}\underset{V}{\otimes}K)\big)\big[\pi^{-1}\big]$$

where $\mathrm{D}_{K_\infty}(\mathbf{L})$ is the (φ,Γ'_R)-module defined in §2 using the field K_∞.

6.4. Proof of Theorem 6.16. — We start with some preliminary results.

Lemma 6.18. — *Let R be as in 2.1. Let $S_\infty\subset T_\infty$ be integral extensions of R_∞ such that $S_\infty\otimes_V K=T_\infty\otimes_V K$ and $R_\infty\subset S_\infty$ is almost étale (see 2.2). Then, the cokernel of $S_\infty\subset T_\infty$ is annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞.*

Proof. — Let $\mathfrak{e}_\infty$ be the canonical idempotent of the étale extension $R_\infty\big[p^{-1}\big]\subset S_\infty\big[p^{-1}\big]=T_\infty\big[p^{-1}\big]$. Since $R_\infty\subset S_\infty$ is almost étale, for every $\alpha\in\mathbf{Z}\big[p^{-1}\big]_{>0}$ we may write $p^\alpha\mathfrak{e}_\infty$ as a finite sum $\sum_i a_i\otimes b_i$ with a_i and b_i in S_∞. Let $m\colon S_\infty\big[p^{-1}\big]\otimes_{R_\infty}S_\infty\big[p^{-1}\big]\to S_\infty\big[p^{-1}\big]$ be the multiplication map and let $\mathrm{Tr}\colon S_\infty\big[p^{-1}\big]\to R_\infty\big[p^{-1}\big]$ be the trace map. Then, $\mathfrak{e}_\infty$ is characterized by the

property that $m(x\otimes y) = (\mathrm{Tr}\otimes \mathrm{Id})\big((x\otimes y)\cdot \mathfrak{e}_\infty\big)$. In particular, for every $x \in T_\infty$ we have $p^\alpha x = m\big(p^\alpha x \otimes 1\big) = \sum_i \mathrm{Tr}(a_i x) b_i$. But $\mathrm{Tr}(a_i x) \in R_\infty$ since x and a_i are integral over R_∞ and R_∞ is integrally closed. Hence, $p^\alpha x = \sum_i \mathrm{Tr}(a_i x) b_i$ lies in S_∞ as claimed. □

Lemma 6.19. — *Let $\mathscr{U} = \mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ be an affine small object of $\mathscr{X}_*$ and let $\mathscr{U}' \to \mathscr{U}$ be a covering with $\mathscr{U}'$ affine. Then, $R_{\mathscr{U}',M,\infty} \cong R_{\mathscr{U},M,\infty} \otimes_{R_{\mathscr{U}}} R_{\mathscr{U}'}$.*

Proof. — Write the composite of M and K_∞ (in $\overline{K}$) as the union $\cup_n M_n$ where $M_0 = K \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$ and $K \subset M_n$ is a finite extension for every n. Let W_n be the ring of integers of M_n and let $\mathbf{F}_n$ be its residue filed. Let $T_1, \ldots, T_d \in R_{\mathscr{U}}$ be parameters as in 2.1. Since $R_{\mathscr{U}} \otimes_V k$ is a smooth k-algebra, then $R_{\mathscr{U}}\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big] \otimes_V \mathbf{F}_n$ is a smooth k-algebra. Hence, $R_{\mathscr{U}} \otimes_V W_n\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big]$ is a regular ring modulo the maximal ideal of W_n and, hence, it is a regular ring itself. In particular, it is normal. This implies that $R_{\mathscr{U},M,\infty} \cong \cup_n R_{\mathscr{U}} \otimes_V W_n\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big]$.

Since $\mathscr{U}' \to \mathscr{U}$ is formally étale, then $R_{\mathscr{U}'} \otimes_V k$ is a smooth k-algebra. Reasoning as above we conclude that $R_{\mathscr{U}',M,\infty} \cong \cup_n R_{\mathscr{U}'} \otimes_V W_n\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big]$. The lemma follows. □

Let $\mathscr{U} = \mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}})$ be an affine small object of $\mathscr{X}_*$. Let A be the union of some collection of almost étale, integral $R_{\mathscr{U},M,\infty}$-subalgebras of $\overline{R}_{\mathscr{U}}$. Write

$$\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\big(A \underset{V}{\otimes} K\big) := \lim\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)(\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$$

where the direct limit is taken over all $(\mathscr{U}, (\mathscr{W}, L)) \in \widehat{\mathfrak{X}}_M$ with $\mathscr{W} = \mathrm{Spm}(S_{\mathscr{W}})$ such that $S_{\mathscr{W}} \otimes_L M \subset A \otimes_V K$.

Proposition 6.20. — *Assume that $R_{\mathscr{U}}$ is small over V. Then, the natural map*

$$A/pA \longrightarrow \big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\big(A \underset{V}{\otimes} K\big)$$

has kernel and cokernel annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞.

Proof. — The presheaf $\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}$ is separated i. e., if $(\mathscr{U}', \mathscr{W}', L') \to (\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$ is a covering map, the natural map

$$\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}, \mathscr{W}, L) \longrightarrow \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}', \mathscr{W}', L')/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}', \mathscr{W}', L')$$

is injective. This implies that we have an injective map

$$A/pA = \overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big(A \underset{V}{\otimes} K\big)/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big(A \underset{V}{\otimes} K\big) \hookrightarrow \big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)\big(A \underset{V}{\otimes} K\big).$$

We also get that the sheaf associated to the presheaf associating to a triple $(\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$ the ring $\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$ is defined by taking $\big(\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)(\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$ to be the direct limit, over all coverings $(\mathscr{U}', \mathscr{W}', L')$ of $(\mathscr{U}, \mathscr{W}, L)$ with $\mathscr{U}'$ affine, of the elements b in the group $\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}', \mathscr{W}', L')/p\overline{\mathscr{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}', \mathscr{W}', L')$ such that the image

of b in $\overline{\mathcal{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}'',\mathscr{W}'',L'')/p\overline{\mathcal{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}(\mathscr{U}'',\mathscr{W}'',L'')$ is 0 where $(\mathscr{U}'',\mathscr{W}'',L'')$ is the fiber product of $(\mathscr{U}',\mathscr{W}',L')$ with itself over $(\mathscr{U},\mathscr{W},L)$. Hence,

$$\big(\overline{\mathcal{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}/p\overline{\mathcal{O}}_{\widehat{\mathfrak{X}}_M}\big)(A\underset{V}{\otimes}K)=\lim_{S,T}\mathrm{Ker}_{S,T}$$

where the notation is as follows. The direct limit is taken over all normal $R_{\mathscr{U},M,\infty}$-subalgebras S of A, finite and étale after inverting p over $R_{\mathscr{U},M,\infty}$, all covers $\mathscr{U}'\to\mathscr{U}$ and all normal extensions $R_{\mathscr{U}',M,\infty}\otimes_{R_{\mathscr{U}}}S\to T$, finite, étale and Galois after inverting p. Eventually, we put $\mathscr{U}'':=\mathrm{Spf}(R_{\mathscr{U}''})$ to be the fiber product of $\mathscr{U}'$ with itself over $\mathscr{U}$ i. e., $R_{\mathscr{U}''}:=\widehat{R_{\mathscr{U}'}\otimes_{R_{\mathscr{U}}}R_{\mathscr{U}'}}$. We let

$$\mathrm{Ker}_{S,T}:=\mathrm{Ker}\Big(\ T/pT\rightrightarrows\widetilde{T}_S/p\widetilde{T}_S\ \Big),$$

where $\widetilde{T}_S$ is the normalization of the base change to $R_{\mathscr{U}''}$ of $T\otimes_{(R_{\mathscr{U}',M,\infty}\otimes_{R_{\mathscr{U}},M,\infty}S)}T$. For every S and T as above, write $G_{S,T}:=\mathrm{Gal}\big(T\otimes_V K/S\otimes_{R_{\mathscr{U},M,\infty}}R_{\mathscr{U}',M,\infty}\otimes_V K\big)$. Then, $\widetilde{T}_S$ is the product $\prod_{g\in G_{S,T}}\widehat{T\otimes_{R_{\mathscr{U}}}R_{\mathscr{U}''}}$ where tilde stands for the normalization (of $T\otimes_{R_{\mathscr{U}}}R_{\mathscr{U}''}$) and we view $R_{\mathscr{U}''}$ as $R_{\mathscr{U}'}$-algebra choosing the left action. Hence,

$$\mathrm{Ker}_{S,T}=\mathrm{Ker}\left(\ T/pT\rightrightarrows\prod_{g\in G_{S,T}}\frac{\widetilde{T\otimes_{R_{\mathscr{U}}}R_{\mathscr{U}''}}}{\widetilde{pT\otimes_{R_{\mathscr{U}}}R_{\mathscr{U}''}}}\right).$$

The two maps in the display are $a\mapsto(a,\dots,a)$ and $a\mapsto\big(g(a)\big)_{g\in G_{S,T}}$.

For the rest of this proof we make the following notations: if B is a $R_{\mathscr{U},M,\infty}$-algebra we denote by $B':=B\otimes_{R_{\mathscr{U},M,\infty}}R_{\mathscr{U}',M,\infty}=B\otimes_{R_{\mathscr{U}}}R_{\mathscr{U}'}$, by $B'':=B\otimes_{R_{\mathscr{U}',M,\infty}}R_{\mathscr{U}'',M,\infty}=B\otimes_{R_{\mathscr{U}'}}R_{\mathscr{U}''}$ (the second equalities above follow form 6.19) and by $\widetilde{B}$ the normalization of B in $B\big[p^{-1}\big]$. We then get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & S/pS & \longrightarrow & S'/pS' & \rightrightarrows & S''/pS'' \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}_{S,T} & \longrightarrow & T/pT & \rightrightarrows & \widetilde{T}_S/p\widetilde{T}_S=\prod_{g\in G_{S,T}}(\widetilde{T}''/p\widetilde{T}'').
\end{array}\tag{21}$$

The top row is exact by étale descent and the bottom row is exact by construction. We claim that the kernel and cokernel of the map $S/pS\longrightarrow\mathrm{Ker}_{S,T}$ are annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞. To do this we analyze the maps α and β.

Analysis of $\mathrm{Ker}(\alpha)$ *and* $\mathrm{Ker}(\beta)$. — Note that he extension $R_{\mathscr{U},M,\infty}\subset S$ is integral and almost étale by 2.3. Hence, the extensions $R_{\mathscr{U}',M,\infty}\subset S'$ and $R_{\mathscr{U}'',M,\infty}\subset S''$ are integral and almost étale as well. Since the extension $R_{\mathscr{U}}\to R_{\mathscr{U}'}$ (resp. $R_{\mathscr{U}}\to R_{\mathscr{U}''}$) is faithfully flat, the rings S' and S'' have no non-trivial p-torsion. In particular, S' (resp. S'') injects into its normalization $\widetilde{S}'$ (resp. $\widetilde{S}''$) which is $T^{G_{S,T}}$. Thanks to Lemma 6.18 the cokernel of $S'\to\widetilde{S}'=T^{G_{S,T}}$ (resp. $S''\to\widetilde{S}''$) is annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞.

Consider the following. If $0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow 0$ is an exact sequence of abelian groups then the kernel of the induced map $B/pB \to C/pC$ is the image in B/pB of the group of p-torsion elements of D. In particular if B, C, D are V_∞-modules and D is annihilated by an element $a \in V_\infty$ then $\mathrm{Ker}(B/pB \to C/pC)$ is also annihilated by a. It follows from this obvious fact that the kernel of the map $S'/pS' \to \widetilde{S}'/p\widetilde{S}'$ and the kernel of the map $S''/pS'' \to \widetilde{S}''/p\widetilde{S}''$ are annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞.

The map $\widetilde{S}'/p\widetilde{S}' \to T/pT$ (resp. $\widetilde{S}''/p\widetilde{S}'' \to \widetilde{T}_S/p\widetilde{T}_S$) is injective since $\widetilde{S}' \to T$ (resp. $\widetilde{S}'' \to \widetilde{T}_S$) is an integral extension of normal rings. Hence, the kernel of α and the kernel of β are annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞.

Analysis of the image of $\mathrm{Coker}(S/pS \longrightarrow \mathrm{Ker}_{S,T})$ *in* $\mathrm{Coker}(\alpha)$. — Define Z as $Z := \mathrm{Coker}\big(S'/pS' \to (T/pT)^{\mathrm{G}_{S,T}}\big) \subset \mathrm{Coker}(\alpha)$. Since $\mathrm{Ker}_{S,T}$ is $\mathrm{G}_{S,T}$-invariant (by definition), the image of $\mathrm{Coker}(S/pS \longrightarrow \mathrm{Ker}_{S,T})$ in $\mathrm{Coker}(\alpha)$ is contained in Z. Put $Y := \mathrm{Coker}\big(S'/pS' \to \widetilde{S}'/p\widetilde{S}'\big)$. Let us remark that we have an exact sequence of groups:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \mathrm{Coker}\big(\widetilde{S}'/p\widetilde{S}' \longrightarrow (T/pT)^{\mathrm{G}_{S,T}}\big) \longrightarrow 0.$$

We know that Y is annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞, so let us examine the last term of the sequence. This is the same as $\mathrm{Coker}\big(T^{\mathrm{G}_{S,T}}/pT^{\mathrm{G}_{S,T}} \longrightarrow (T/pT)^{\mathrm{G}_{S,T}}\big)$. Consider the exact sequence

$$0 \longrightarrow T^{G_{S,T}}/pT^{G_{S,T}} \longrightarrow \big(T/pT\big)^{G_{S,T}} \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(G_{S,T}, T\big).$$

Since $R_{\mathscr{U}',M,\infty} \to T$ is almost étale, the group $\mathrm{H}^1\big(G_{S,T}, T\big)$ is annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞; see [**12**, Thm. I.2.4(ii)]. Hence, the cokernel of $T^{G_{S,T}}/pT^{G_{S,T}} \longrightarrow \big(T/pT\big)^{G_{S,T}}$ is annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞. We deduce that the same is true for the module Z above.

Now using the snake lemma applied to the commutative diagram (21), we get that the kernel and cokernel of the map $S/pS \longrightarrow \mathrm{Ker}_{S,T}$ are annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞ as claimed.

This concludes the proof in the case that A is the union of almost étale, integral and normal $R_{\mathscr{U},M,\infty}$-subalgebras of $\overline{R}_{\mathscr{U}}$. In the general case, assume that Q is an almost étale, integral $R_{\mathscr{U},M,\infty}$-subalgebra of A and let S be its normalization. Then, the cokernel of $Q \to S$ annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞ by Lemma 6.18. The same then applies to the kernel and the cokernel of $Q/pQ \to S/pS$. The conclusion follows. □

6.4.1. *End of proof of 6.16.* — Assumption (i) clearly holds. We let $\{\mathscr{W}_i\}_i = \mathscr{S}$ be a covering of $\mathscr{X}$ and let $\mathscr{T}_i := \{\mathscr{U}_{ij}\}_j$ be a basis of $\mathscr{W}_i$ as in 6.10(ii). Let $\mathscr{U} \in \mathscr{T}_i$ for some i.

(iii) The group $\mathbb{L}_n(\overline{R}_{\mathscr{U}} \otimes_V K)$ is constant on the connected components of $\mathscr{U}$ and does not depend on $\mathscr{U}$ itself. It then suffices to verify assumption (iii) for $\mathbb{L}_n$ the constant sheaf i. e, $\mathbb{L}_n = \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ for some s in case (A) or $\mathbb{L}_n = (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ in case (B). In this case (iii) follows from 6.20 with $A = \overline{R}_{\mathscr{U}}$.

(iv) Due to 6.20 it suffices to prove that $\mathrm{H}^q\big(\mathscr{H}_{\mathscr{U}},\mathbb{L}_n(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)\otimes\mathbf{W}_n(\overline{R}_{\mathscr{U}}/p\overline{R}_{\mathscr{U}})\big)$ (resp. $\mathrm{H}^q\big(\mathscr{H}_{\mathscr{U}},\mathbb{L}_n(\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V K)\otimes\overline{R}_{\mathscr{U}}/p^n\overline{R}_{\mathscr{U}}\big)$ is annihilated by any power of the maximal ideal of $\mathbf{W}_n\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞) for every $q\geq 1$. In both cases, one reduces by devissage to the case $n=1$. The claim then follows from A.5 and A.3.

(v) Given $n\in\mathbf{N}$, let $R_{\mathscr{U}}\otimes_V K\subset B$ be a finite and étale extension such that $\mathbb{L}_{n+1}$ and $\mathbb{L}_n$ are constant on the étale site of B_M. We may assume that B is defined over a finite extension $K\subset L$ contained in M and that $R_{\mathscr{U}}\otimes_V M\subset B\otimes_L M$ is a Galois extension of integral domains. Define $A_{\mathscr{U}}$ as the normalization of $R_{\mathscr{U}}$ in the subring of $\overline{R}_{\mathscr{U}}\otimes_V M$ generated by $R_{\mathscr{U},M,\infty}$ and B. Then, assumption (v), with $A_{\mathscr{U}}$ in place of $R_{\mathscr{U},M,\infty}$, holds due to 6.20 since we may reduce to the case where $\mathbb{L}$ is trivial.

Let D_n be the kernel of $\mathscr{F}_{n+1}(A_{\mathscr{U}}\otimes_V K)\to\mathscr{F}_n(A_{\mathscr{U}}\otimes_V K)$. Let M_n be the kernel of $L_{n+1}(B)\to L_n(B)$. It is an $\mathbf{F}_p$-vector space. In case (B), the sequence $0\longrightarrow A_{\mathscr{U}}/pA_{\mathscr{U}}\longrightarrow A_{\mathscr{U}}/p^{n+1}A_{\mathscr{U}}\longrightarrow A_{\mathscr{U}}/p^nA_{\mathscr{U}}\to 0$ is exact since $A_{\mathscr{U}}$ is normal. Tensor it with $L_{n+1}(B)$ and put $E_n:=M_n\otimes\big(A_{\mathscr{U}}/pA_{\mathscr{U}}\big)$. Since $L_n(B)=L_{n+1}(B)/p^nL_{n+1}(B)$, the sequence $0\longrightarrow M_n\otimes A_{\mathscr{U}}/pA_{\mathscr{U}}\longrightarrow L_{n+1}(B)\otimes A_{\mathscr{U}}/p^{n+1}A_{\mathscr{U}}\longrightarrow L_n(B)\otimes A_{\mathscr{U}}/p^nA_{\mathscr{U}}\to 0$ is exact. Thanks to 6.20 we get that the natural map $E_n\to D_n$ has kernel and cokernel annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞/pV_∞.

In case (B) consider the exact sequence $0\longrightarrow A_{\mathscr{U}}/p^{\frac{1}{p}}A_{\mathscr{U}}\longrightarrow\mathbf{W}_{n+1}\big(A_{\mathscr{U}}/pA_{\mathscr{U}}\big)\longrightarrow\mathbf{W}_n\big(A_{\mathscr{U}}/pA_{\mathscr{U}}\big)$ where the last map is the natural projection composed with Frobenius. Tensoring it with $L_{n+1}(B)$ we get the exact sequence $0\longrightarrow M_n\otimes A_{\mathscr{U}}/p^{\frac{1}{p}}A_{\mathscr{U}}\longrightarrow L_{n+1}(B)\otimes\mathbf{W}_{n+1}\big(A_{\mathscr{U}}/pA_{\mathscr{U}}\big)\longrightarrow L_n(B)\otimes\mathbf{W}_n\big(A_{\mathscr{U}}/pA_{\mathscr{U}}\big)$. Put $F_n:=M_n\otimes A_{\mathscr{U}}/p^{\frac{1}{p}}A_{\mathscr{U}}$. Also in this case the natural map $F_n\to D_n$ has kernel and cokernel annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞/pV_∞. It follows from A.5 and A.3 that $\mathrm{H}^q(\mathscr{H}_{\mathscr{U}},E_n)$ and $\mathrm{H}^q(\mathscr{H}_{\mathscr{U}},F_n)$ are annihilated by any element of the maximal ideal of V_∞/pV_∞. Thus, the same applies to $\mathrm{H}^q(\mathscr{H}_{\mathscr{U}},D_n)$ and, hence, to the cokernel of the map from $\mathscr{F}_{n+1}(A_{\mathscr{U}}\otimes_V K)^{\mathscr{H}_{\mathscr{U}}}=\mathscr{F}_{n+1}(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)$ to $\mathscr{F}_n(A_{\mathscr{U}}\otimes_V K)^{\mathscr{H}_{\mathscr{U}}}=\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K)$. This concludes the proof of (v).

(vi) For every covering $\mathscr{Z}\to\mathscr{U}$ in $\mathscr{X}_*$ with $\mathscr{Z}\in\mathscr{T}_i$ define $\mathrm{H}^q_{\mathscr{F}_n}(\mathscr{Z}\to\mathscr{U})$ as the Chech cohomology group

$$\mathrm{H}^q_{\mathscr{F}_n}(\mathscr{Z}\to\mathscr{U}):=\mathrm{H}^q\big(\mathscr{Z}\to\mathscr{U},\mathbb{L}_n(B)\otimes\mathbf{W}_n(A_{\mathscr{U}}\underset{R_{\mathscr{U}}}{\otimes}R_{\mathscr{Z}}/pR_{\mathscr{Z}})\big)$$

respectively

$$\mathrm{H}^q_{\mathscr{F}_n}(\mathscr{Z}\to\mathscr{U}):=\mathrm{H}^q\big(\mathscr{Z}\to\mathscr{U},\mathbb{L}_n(B)\otimes(A_{\mathscr{U}}\underset{R_{\mathscr{U}}}{\otimes}R_{\mathscr{Z}}/p^nR_{\mathscr{Z}})\big).$$

See the proof of (v) for the notation. For every $q\geq 1$ the group $\mathrm{H}^q_{\mathscr{F}_n}(\mathscr{Z}\to\mathscr{U})$ is 0 since the sheaves considered are quasi-coherent.

Due to 6.20 we conclude that assumption (vi) holds using $A_{\mathscr{U}}\otimes_{R_{\mathscr{U}}}R_{\mathscr{Z}}\otimes_V K$ instead of $R_{\mathscr{Z},M,\infty}$. Let G be the Galois group of $A_{\mathscr{U}}\otimes_V K$ over $R_{\mathscr{U},M,\infty}\otimes_V K$. Using the spectral sequence

$$\mathrm{H}^p\big(G,\mathrm{H}^q\big(\mathscr{Z}\to\mathscr{U},\mathscr{F}_n(A_{\mathscr{U}}\underset{R_{\mathscr{U}}}{\otimes}(R_{\mathscr{Z}}\underset{V}{\otimes}K)\big)\Longrightarrow\mathrm{H}^{p+q}\big(\mathscr{Z}\to\mathscr{U},\mathscr{F}_n(R_{\mathscr{Z},\infty}\underset{V}{\otimes}K)\big)$$

we deduce that the group $\mathrm{H}^p\big(\mathscr{Z} \to \mathscr{U}, \mathscr{F}_n(R_{\mathscr{Z},\infty} \otimes_V K)\big)$ is isomorphic to the group $\mathrm{H}^p\big(G, \mathrm{H}^0\big(\mathscr{Z} \to \mathscr{U}, \mathscr{F}_n(A_{\mathscr{U}} \otimes_{R_{\mathscr{U}}} (R_{\mathscr{Z}} \otimes_V K))\big)\big)$ i. e., $\mathrm{H}^p\big(G, \mathscr{F}_n(A_{\mathscr{U}} \otimes_V K)\big)$. Let C be the kernel of the surjective map $\mathscr{H}_{\mathscr{U}} \to G$. Consider the spectral sequence

$$\mathrm{H}^p\big(G, \mathrm{H}^q(C, \mathbb{L}_n(B) \otimes \overline{R}_{\mathscr{U}}/p\overline{R}_{\mathscr{U}})\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}\big(\mathscr{H}_U, \mathbb{L}_n(B) \otimes \overline{R}_{\mathscr{U}}/p\overline{R}_{\mathscr{U}}\big).$$

Note that $\mathrm{H}^q(C, \mathbb{L}_n(B) \otimes \overline{R}_{\mathscr{U}}/p\overline{R}_{\mathscr{U}})$ and $\mathrm{H}^q(\mathscr{H}_{\mathscr{U}}, \mathbb{L}_n(B) \otimes \overline{R}_{\mathscr{U}}/p\overline{R}_{\mathscr{U}})$ are annihilated by multiplication by any element of the maximal ideal of $\mathbf{W}\big(V_\infty/pV_\infty\big)$ (resp. V_∞) for $q \geq 1$ due to A.5 and A.3. Hence, the same must hold for $\mathrm{H}^q\big(G, \mathbb{L}_n(B) \otimes A_{\mathscr{U}}/pA_{\mathscr{U}}\big)$. By devissage and 6.20 one concludes that the same must hold for $\mathrm{H}^q\big(G, \mathscr{F}_n(A_{\mathscr{U}} \otimes_V K)\big)$. Thus, (vi) holds. □

6.5. Proof of theorem 6.1. — By theorem 6.12 if $\mathscr{F}$ is a sheaf of $\mathbf{Sh}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*})^{\mathbf{N}}$ such that the assumptions 6.10 are satisfied then $\mathrm{R}^i\widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}(\mathscr{F})\big[\pi^{-1}\big] \cong \mathscr{H}^i_{\mathrm{Gal}_M}(\mathscr{F})$. Using this isomorphism the Leray spectral sequence for the composition of functors $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}_*, -) \circ \widehat{v}_{\mathscr{X},M,*}$ becomes

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^q\big(\mathscr{X}_*, \mathscr{H}^p_{\mathrm{Gal}_M}(\mathscr{F})\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\widehat{\mathfrak{X}}_{M,*}, \mathscr{F}).$$

In particular, we obtain a spectral sequence for $* = \bullet$. Now theorem 6.1 follows as the functors $\mathrm{H}^i(\widehat{\mathfrak{X}}^{\bullet}_M, -)$ and $\mathrm{H}^i(\widehat{\mathfrak{X}}_M, -)$ are canonically isomorphic; see 4.7.

Appendix A
Galois cohomology via the Tate-Sen method

The goal of this section is to prove Proposition A.5 stating that, if M is a $\mathbf{Z}_p$-representation of $\mathscr{G}_S$, then the groups $\mathrm{H}^i(\mathscr{H}_S, \mathfrak{D}(M) \otimes_{\mathbf{A}_S} \mathbf{A}_{\overline{R}})$, $\mathrm{H}^i(\mathscr{H}_S, \widetilde{\mathfrak{D}}(M) \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_S} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}})$, $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}_S, D(M) \otimes_{\mathbf{A}'_S} \mathbf{A}'_{\overline{R}})$ and $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}_S, \widetilde{\mathrm{D}}(M) \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}})$ are trivial for $i \geq 1$. This is the key tool to compute the Galois cohomology of M in terms of the associated (φ, Γ_S)-modules.

To treat all the cases above, we follow the axiomatic approach started by Colmez in [**10**, §3.2 & 3.3] and developed in [**2**, §2].

A.1. The axioms. — Let $\mathscr{G}$ be a profinite group and let $\widetilde{\Lambda}$ be $\mathbf{Z}_p$-algebra which is an integral domain and is endowed with a map $v\colon \widetilde{\Lambda} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ such that:

(i) $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $v(xy) \geq v(x) + v(y)$;
(iii) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$;
(iv) $v(p) > 0$ and $v(px) = v(p) + v(x)$.

We endow $\widetilde{\Lambda}$ with the (separated) topology induced by v. We assume that $\widetilde{\Lambda}$ is complete for this topology and that it is endowed with a continuous action of $\mathscr{G}$ such that $v(g(x)) = v(x)$ for $x \in \widetilde{\Lambda}$ and for $g \in \mathscr{G}$.

Let $\mathscr{H}$ a closed normal subgroup of $\mathscr{G}$ such that $\Gamma = \mathscr{G}/\mathscr{H}$ is endowed with a continuous homomorphism $\chi\colon \Gamma \to \mathbf{Z}_p^\times$ with open image, with kernel isomorphic to

$\mathbf{Z}_p^d$ and such that $\gamma g\gamma^{-1} = g^{\chi(\gamma)}$ for every $g \in \mathrm{Ker}(\chi)$ and every $\gamma \in \Gamma$. Let $\gamma_0 \in \Gamma$ be such that $\mathrm{Im}(\chi) = \mathbf{Z}_p\chi(\gamma_0) \oplus F$ with F a finite group. Assume that there exist $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\Lambda})$ such that $\mathrm{Ker}(\chi)$ is an open subgroup of $\mathbf{Z}_p\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_p\gamma_d$ and let $m_0 \in \mathbf{N}$ be such that $p^{m_0} \oplus_{i=1}^d \mathbf{Z}_p\gamma_i \subset \mathrm{Ker}(\chi)$. Let $\mathrm{G} \subset \mathscr{G}$ be a closed normal subgroup, put $\mathrm{H} := \mathrm{G} \cap \mathscr{H}$ and assume that $\Gamma' := \mathrm{G}/\mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\chi)$.

Assume that for every open normal subgroup $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$ there exists an integer $m_{0,\mathscr{H}'} \geq m_0$ such that for every $i \in \{0, \dots, d\}$ one has

(a) a lifting $\gamma_i^{p^{m_{0,\mathscr{H}'}}} \in \mathscr{G}/\mathscr{H}'$ centralizing $\mathscr{H}/\mathscr{H}'$;

(b) an increasing sequence $\left(\Lambda_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}\right)_{m \geq m_{0,\mathscr{H}'}}$ of *closed* subrings of $\widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}'}$;

(c) maps $\left(\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)} : \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}'} \to \Lambda_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}\right)_{m \geq m_{0,\mathscr{H}'}}$

and the following axioms à la *Tate-Sen* hold:

(TS1) there exists $c_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ such that for every open normal subgroups $H_1 \subseteq H_2$ of $\mathscr{H}$ (resp. of H), there exists $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ such that $v(\alpha) > -c_1$ and $\sum_{\tau \in H_2/H_1} \tau(\alpha) = 1$;

(TS2) there exists $c_{2,\mathscr{H}'} \in \mathbf{R}_{>0}$ such that for every i and $j \in \{0, \dots, d\}$ and every $m \geq m_{0,\mathscr{H}'}$:

(a) $\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}$ is $\Lambda_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}$-linear and $\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}(x) = x$ if $x \in \Lambda_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}$;

(b) one has $v\left(\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}(x)\right) \geq v(x) - c_{2,\mathscr{H}'}$ and $\lim_{m\to\infty} \tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}(x) = x$ for every $x \in \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}'}$;

(c) $\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}$ commutes with $\tau_{m',\mathscr{H}'}^{(j)}$;

(d) the ring $\Lambda_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}$ is stable under $\mathscr{G}/\mathscr{H}'$ and $\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}$ commutes with the action of $\mathscr{G}/\mathscr{H}'$ for $i \in \{1, \dots, d\}$;

(d′) the ring $\Lambda_{m,\mathscr{H}'}^{(0)}$ is stable under $\gamma_0^{p^{m_{0,\mathscr{H}'}}}$ and $\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(0)}$ commutes with $\gamma_0^{p^{m_{0,\mathscr{H}'}}}$ and $\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(0)} \circ \tau_{m,\mathscr{H}'}^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_{m,\mathscr{H}'}^{(d)}$ commutes with the action of $\mathscr{G}/\mathscr{H}'$;

(e) we have $\Lambda_{m,\mathscr{H}'}^{(i)} \subset \Lambda_{m,\mathscr{H}''}^{(i)}$, as subrings of $\widetilde{\Lambda}$, for every open normal subgroup $\mathscr{H}'' \subset \mathscr{H}'$ and the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}'} & \xrightarrow{\tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}} & \Lambda_{m,\mathscr{H}'}^{(i)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}''} & \xrightarrow{\tau_{m,\mathscr{H}''}^{(i)}} & \Lambda_{m,\mathscr{H}''}^{(i)} \end{array}$$

(TS3) let $X_{m,\mathscr{H}'}^{(i)} = \left(1 - \tau_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}'}\right)$. Then,

(a) there exists $c_{3,\mathscr{H}'} \in \mathbf{R}_{>0}$ such that for every $m \geq m_{0,\mathscr{H}'}$ and every $i \in \{0, \dots, d\}$, the map $1 - \gamma_i^{p^m}$ is invertible on $X_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}$ and for every $x \in X_{m,\mathscr{H}'}^{(i)}$, one has $v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)^{-1}(x)\right) \geq v(x) - c_{3,\mathscr{H}'}$.

(b) There exists $c_{4,\mathscr{H}'} \in \mathbf{R}_{>0}$ such that for every $m \geq m_{0,\mathscr{H}'}$ and every $i \in \{1,\dots,d\}$ and every $x \in \Lambda^{(i)}_{m,\mathscr{H}'}$, one has $v\left(\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)\right) \geq v(x) + c_{4,\mathscr{H}'}$.

(TS4) Let $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$ be an open normal subgroup. Assume that there exists an integer $m_{0,\mathrm{H}'} \geq m_0$ and that for every $i \in \{1,\dots,d\}$ one has a lifting $\gamma_i^{p^{m_{0,\mathrm{H}'}}} \in \mathrm{G}/\mathrm{H}'$ centralizing H/H' and an increasing sequence $\left(\Lambda^{(i)}_{m,\mathrm{H}'}\right)_{m\geq m_{0,\mathrm{H}'}}$ of *closed* subrings of $\widetilde{\Lambda}^{\mathrm{H}'}$ stable under G/H' and maps $\left(t^{(i)}_{m,\mathrm{H}'}\colon \widetilde{\Lambda}^{\mathrm{H}'} \to \Lambda^{(i)}_{m,\mathrm{H}'}\right)_{m\geq m_{0,\mathscr{H}'}}$ such that the analogues of (TS2) and (TS3) hold.

We followed closely the formalism of [**2**, §2] with the differences that we added (TS2)(e) and (TS4).

A.2. Notation. — Let W be a free $\widetilde{\Lambda}$-module of finite rank a i. e., $W := \widetilde{\Lambda}^a$. We consider it as a topological module with respect to the (separated) topology defined as the product topology considering on $\widetilde{\Lambda}$ the v-adic topology. Note that such topology is independent of the choice of $\widetilde{\Lambda}$-basis of W. For every positive $n \in \mathbf{Q}$ write $\widetilde{\Lambda}_{\geq n}$ for the subgroup of $\widetilde{\Lambda}$ consisting of elements x such that $v(x) \geq n$. They are a fundamental system of neighborhoods for the topology on $\widetilde{\Lambda}$ for $n \to \infty$. Let $W_{\geq n}$ be the image of $\widetilde{\Lambda}^a_{\geq n}$ in W; they form a fundamental system of neighborhoods for the given topology on W. Assume that W is endowed with a continuous action of $\mathscr{G}$. We consider continuous cohomology of a closed subgroup H' of $\mathscr{G}$ with values in W. If $f \in C^r\left(H', W\right)$ is a continuous cochain, with $r \geq 0$ and with the profinite topology on H', write $v(f) := \min\left\{n \in \mathbf{N} | (\forall g_1,\dots,g_r \in H') f(g_1,\dots,g_r) \in W_{\geq n}\right\}$. We write $\partial\colon C^r\left(H', W\right) \to C^{r+1}\left(H', W\right)$ for the boundary map.

Lemma A.1. — [**23**, §3.2] *Let H_0 be an open subgroup of H (resp. of $\mathscr{H}$) and let f be an r-cochain of H_0 with values in W for $r \geq 1$.*

(1) *Assume that there exists an open normal subgroup $H_1 \subset H_0$ such that f factors via an r-cochain of H_0/H_1. Then, there exists an $(r-1)$-cochain h of H_0/H_1 with values in W such that $v\left(f - \partial h\right) > v(\partial f) - c_1$ and $v(h) > v(f) - c_1$.*

(2) *There exists a sequence of open normal subgroups $H_n \subset H_0$ and continuous cochains $f_n \in C^r\left(H_0/H_n, W\right)$ for $n \in \mathbf{N}$ such that $f \equiv f_n$ modulo $W_{\geq n}$ for $n \to \infty$.*

Proof. — We work out the case of $H_0 \subset H$. For $H_0 \subset \mathscr{H}$ the argument is analogous and the details are left to the reader.

(1) Let $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ be an element satisfying (TS1). Define the $(r-1)$-cochain $\alpha \cup f$ of H_0/H_1 with values in W by

$$\left(\alpha \cup f\right)\left(g_1,\dots,g_{r-1}\right) := (-1)^r \sum_{t\in H_0/H_1} g_1\cdots g_{r-1}t(\alpha)\cdot f\left(g_1,\dots,g_{r-1},t\right).$$

One computes that

$$\begin{aligned}\partial(\alpha\cup f)(g_1,\dots,g_r) &= g_1\big((\alpha\cup f)(g_2,\dots,g_r)\big)+\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j(\alpha\cup f)(\dots,g_jg_{j+1},\dots)+\\ &+(-1)^r(\alpha\cup f)(g_1,\dots,g_{r-1})=\\ &=(-1)^r\sum_{t\in H_0/H_1} g_1\cdots g_rt(\alpha)\cdot g_1f\big(g_2,\dots,g_r,t\big)+\\ &+(-1)^r\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{t\in H_0/H_1}(-1)^j g_1\cdots g_rt(\alpha)\cdot f\big(g_1,\dots,g_jg_{j+1},g_r,t\big)+\\ &+\sum_{t\in H_0/H_1} g_1\cdots g_{r-1}t(\alpha)\cdot f\big(g_1,\dots,g_{r-1},t\big)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\big(\alpha\cup\partial f\big)(g_1,\dots,g_r) &= (-1)^{r+1}\sum_{t\in H_0/H_1} g_1\cdots g_rt(\alpha)\cdot\partial f\big(g_1,\dots,g_r,t\big)=\\ &=(-1)^{r+1}\sum_{t\in H_0/H_1} g_1\cdots g_rt(\alpha)\cdot g_1f(g_2,\dots,g_r,t)+\\ &+(-1)^{r+1}\sum_{t\in H_0/H_1} g_1\cdots g_rt(\alpha)\cdot\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j f\big(g_1,\dots,g_jg_{j+1},g_r,t\big)+\\ &-\sum_{t\in H_0/H_1} g_1\cdots g_rt(\alpha)\cdot f\big(g_1,\dots,g_rt\big)+\\ &+\sum_{t\in H_0/H_1} g_1\cdots g_rt(\alpha)\cdot f(g_1,\dots,g_r)\end{aligned}$$

Since $\sum_{t\in H_0/H_1} t(\alpha)=1$, we have $\big(\alpha\cup\partial f\big)=f-\partial\big(\alpha\cup f\big)$. Put $h=\alpha\cup f$. Then, $v(h)>v(f)-c_1$ and $v\big(f-\partial h\big)=v\big(\alpha\cup\partial f\big)\geq v(\alpha)+v(\partial f)$.

(2) Since f is continuous there exists an open normal subgroup H_n such that the composite $\bar{f}_n\colon H_0^r\to W\to W/W_{\geq n}$ factors via $\big(H_0/H_n\big)^r$. Let f_n be the composite of $\bar{f}_n$ with a splitting $W/W_{\geq n}\to W$ (as sets). Then, f_n is a continuous cochain and $v(f-f_n)\geq n$. □

Proposition A.2. — [**23**, Prop. 10] *We have* $\mathrm{H}^r\big(\mathrm{H},W\big)=0$ *for* $r\geq 1$ *and* $\mathrm{H}^r\big(\mathscr{H},W\big)=0$ *for* $r\geq 1$. *In particular,* $\mathrm{H}^r\big(G,W\big)=\mathrm{H}^r\big(\Gamma',W^H\big)$ *and* $\mathrm{H}^r\big(\mathscr{G},W\big)=\mathrm{H}^r\big(\Gamma,W^{\mathscr{H}}\big)$.

Proof. — The last statement follows from the first one and from the spectral sequences $\mathrm{H}^j(\Gamma,\mathrm{H}^j(\mathscr{H},\_))\Longrightarrow\mathrm{H}^{i+j}(\mathscr{G},\_)$ and $\mathrm{H}^j(\Gamma',\mathrm{H}^j(\mathrm{H},\_))\Longrightarrow\mathrm{H}^{i+j}(\mathrm{G},\_)$. Let $H_0:=H$ or $\mathscr{H}$. Let f be an r-th cochain of H_0, for $r\geq 1$, with values in W. Let $\{H_n,f_n\}_n$ be as in A.1(2) and, for each n, write h_n for the continuous $(r-1)$-cochain satisfying A.1(1) i. e., $v\big(f_n-\partial h_n\big)>v(\partial f_n)-c_1$ and $v(h_n)>v(f_n)-c_1$.

Then, $\{h_n\}$ is Cauchy so that it converges to a continuous $(r-1)$-cochain h. Furthermore, $v(f_n - \partial h_n) \geq n - c_1$ for every n so that $\partial h_n \to f$ for $n \to \infty$. We conclude that $f = \partial h$ as claimed. □

Let $\widetilde{\Lambda}_{\geq n}$ be the subset of $\widetilde{\Lambda}$ consisting of elements b such that $v(b) \geq n$. Then, $\widetilde{\Lambda}_{\geq 0}$ is a ring and $\widetilde{\Lambda}_{\geq n}$ is an ideal for every $n \geq 0$ due to the properties of v. We write $\overline{\Lambda}_n$ for the quotient $\widetilde{\Lambda}_{\geq 0}/\widetilde{\Lambda}_{\geq n}$. Assume that the following strengthening of (TS1) holds:

(TS1′) for every $c \in \mathbf{R}_{>0}$ and for every open normal subgroups $H_1 \subseteq H_2$ of $\mathscr{H}$ (resp. of H), there exists $\alpha \in \widetilde{\Lambda}_{\geq 0}^{H_1}$ such that $v\left(\sum_{\tau \in H_2/H_1} \tau(\alpha)\right) \leq c$.

One then has the following variant of A.2:

Proposition A.3. — *Let W be a free $\overline{\Lambda}_n$-module of finite rank a endowed with a continuous action of $\mathscr{G}$. Then, for every $c \in \mathbf{R}_{>0}$ and every integer $r \geq 1$ there exists an element $\gamma_c \in \widetilde{\Lambda}_{\geq 0}^{\mathscr{H}}$ of valuation $v(\gamma_c) < c$ such that $\gamma_c \cdot \mathrm{H}^r(\mathrm{H}, W) = 0$ and $\gamma_c \cdot \mathrm{H}^r(\mathscr{H}, W) = 0$.*

A.3. Decompletion. — The notation is as in A.2. Write $\mathfrak{D}(W) := W^{\mathscr{H}}$ and $\mathrm{D}(W) := W^{\mathrm{H}}$. They are closed subgroups of W endowed with the topology induced from W.

It is proven in [**2**, Cor. 2.3] that (TS1) implies that there exists an open normal subgroup $\mathscr{H}_W \subset \mathscr{H}$ and a $\widetilde{\Lambda}$-basis $e_1, \ldots, e_a$ of W such that $W^{\mathscr{H}_W} \cong \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}_W} e_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}_W} e_a$. For every $i = 0, \ldots, d$ and every $m \geq m_W = m_{0,\mathscr{H}_W}$ define the map $\tau_{m,\mathscr{H}_W}^{(i)} : W^{\mathscr{H}_W} \to W^{\mathscr{H}_W}$ by $\sum_{i=1}^a \beta_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^a \tau_{m,\mathscr{H}_W}^{(i)}(\beta_i) e_i$. Due to (TS2) such map is independent of $\mathscr{H}_W$ and the basis $e_1, \ldots, e_a$ and it descends to a map on $\mathfrak{D}(W) = W^{\mathscr{H}}$. Due to (TS2)(b) it is continuous for the topology on $W^{\mathscr{H}_W}$ induced from W. We then drop the index $\mathscr{H}_W$ and we write simply

$$\tau_m^{(i)} : \mathfrak{D}(W) \longrightarrow \mathfrak{D}(W) \quad \text{for } i = 0, \ldots, d, \quad m \geq m_W.$$

Using (TS4) and repeating the construction above, we get similarly continuous maps

$$t_m^{(i)} : \mathrm{D}(W) \longrightarrow \mathrm{D}(W) \quad \text{for } i = 1, \ldots, d, \quad m \geq m_W.$$

For every $m \geq m_W$ due to (TS2) we have a decomposition

$$\mathfrak{D}(W) := \mathfrak{D}_m(W) \oplus \mathfrak{D}_m^{(0)}(W) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{D}_m^{(d)}(W),$$

where $\mathfrak{D}_m^{(d)}(W) := \left(1 - \tau_m^{(d)}\right)\left(\mathfrak{D}(W)\right)$, $\mathfrak{D}_m^{(d-1)}(W) := \left(1 - \tau_m^{(d-1)}\right)\left(\mathfrak{D}(W)_{\tau_m^{(d)}=1}\right)$, $\ldots$, $\mathfrak{D}_m^{(0)}(W) := \left(1 - \tau_m^{(0)}\right)\left(\mathfrak{D}(W)_{\tau_m^{(d)}=1,\ldots,\tau_m^{(1)}=1}\right)$ and $\mathfrak{D}_m(W) = \mathfrak{D}(W)_{\tau_m^{(d)}=1,\ldots,\tau_m^{(0)}=1}$. They are closed Γ-submodules of $\mathfrak{D}(W)$. We endow them with the induced topology. By (TS2) the decomposition above is an isomorphism of topological Γ-modules. Similarly, we have an isomorphism of topological Γ'-modules

$$\mathrm{D}(W) := \mathrm{D}_m(W) \oplus \mathrm{D}_m^{(1)}(W) \oplus \cdots \oplus \mathrm{D}_m^{(d)}(W),$$

where $\mathrm{D}_m^{(d)}(W) := \big(1-t_m^{(d)}\big)\big(\mathrm{D}(W)\big), \ldots, \mathrm{D}_m^{(1)}(W) := \big(1-t_m^{(1)}\big)\Big(\mathrm{D}(W)_{t_m^{(d)}=1,\ldots,t_m^{(2)}=1}\Big)$ and $\mathrm{D}_m(W) = \mathrm{D}(W)_{t_m^{(d)}=1,\ldots,t_m^{(1)}=1}$ are closed Γ'-submodules of $\mathrm{D}(W)$.

Proposition A.4. — *There exists an integer $N \geq m_W$ such that for every $n \geq N$, if $\gamma_i^{p^n} \in \Gamma$ the map $\gamma_i^{p^n} - 1$ is bijective with continuous inverse on $\mathfrak{D}_m^{(i)}(W)$ for $i = 0,\ldots,d$ (resp. $\mathrm{D}_m^{(i)}(W)$ for $i = 1,\ldots,d$).*

Then, the maps of continuous cohomology groups $\mathrm{H}^j\big(\Gamma,\mathfrak{D}_m(W)\big) \to \mathrm{H}^j\big(\Gamma,\mathfrak{D}(W)\big)$ and $\mathrm{H}^j\big(\Gamma',\mathrm{D}_m(W)\big) \to \mathrm{H}^j\big(\Gamma',\mathrm{D}(W)\big)$ are isomorphisms.

Proof. — We deduce from the first statement that $\mathrm{H}^j\Big(\mathbf{Z}_p\gamma_i^{p^n},\mathfrak{D}_m^{(i)}(W)\Big) = 0$ and that $\mathrm{H}^j\Big(\mathbf{Z}_p\gamma_i^{p^n},\mathrm{D}_m^{(i)}(W)\Big) = 0$ for every $j \geq 0$. We get from the Hochschild–Serre spectral sequence that $\mathrm{H}^j\Big(\Gamma,\mathfrak{D}_m^{(i)}(W)\Big) = 0$ and $\mathrm{H}^j\Big(\Gamma',\mathrm{D}_m^{(i)}(W)\Big) = 0$ for $i \geq 1$. For $i = 0$ the first statement implies that $\gamma_0^{p^n} - 1$ is bijective with continuous inverse on the group $\mathrm{H}^j(\Gamma',\mathfrak{D}_m^{(0)}(W))$. By Hochschild-Serre $\mathrm{H}^j\Big(\Gamma,\mathfrak{D}_m^{(i)}(W)\Big) = 0$ for $i = 0$ as well. The second statement follows.

Since $\gamma_i^{p^t} - 1 = (\gamma_i^{p^s} - 1)\big(\sum_{j=0}^{p^{t-s}-1}\gamma_i^{p^s j}\big)$ for $t \geq s$, if $\gamma_i^{p^t} - 1$ is bijective with continuous inverse on $\mathfrak{D}_m^{(i)}(W)$ (resp. $\mathrm{D}_m^{(i)}(W)$) also $\gamma_i^{p^s} - 1$ is. Hence, it suffices to prove that $\gamma_i^{p^m} - 1$ is invertible with continuous inverse.

We prove the statement for $\mathfrak{D}_m^{(i)}(W)$. The proof for $\mathrm{D}_m^{(i)}(W)$ is similar and the details are left to the reader. Write $W^{\mathscr{H}_W} \cong \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}_W}e_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}_W}e_a$ as in A.3 and write $W_m^{\mathscr{H}_W,(i)} := \big(1-\tau_m^{(i)}\big)\Big(W^{\mathscr{H}_W}_{\tau_m^{(i-1)}=1,\ldots,\tau_m^{(1)}=1}\Big)$. Due to the assumptions in A.1 we have a lifting $\gamma^{p^{m_{0,\mathscr{H}_W}}} \in \mathscr{G}/\mathscr{H}_W$ commuting with the elements of $\mathscr{H}/\mathscr{H}_W$. Since $\mathfrak{D}_m^{(i)}(W) = \big(W_m^{\mathscr{H}_W,(i)}\big)^{\mathscr{H}}$ by (TS2) it then suffices to prove that $\gamma_i^{p^m} - 1$ is invertible with continuous inverse on $W_m^{\mathscr{H}_W,(i)}$.

Extend v on $\widetilde{\Lambda}e_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\Lambda}e_a$ by $v\big(\sum_{j=1}^a z_j e_j\big) := \inf\{v(z_j) | j = 1,\ldots,a\}$. It defines the weak topology on $\widetilde{\Lambda}e_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\Lambda}e_a$. Since the action of $\mathscr{G}/\mathscr{H}_W$ on $W^{\mathscr{H}_W}$ is continuous, there exists an integer $N \geq m_{0,\mathscr{H}_W}$ such that $\gamma_i^{p^N}$ acts trivially on $W^{\mathscr{H}_W}/W^{\mathscr{H}_W}_{\geq c_{3,\mathscr{H}_W}+1} \cong \oplus_{j=1}^a \widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}_W}/\widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}_W}_{\geq c_{3,\mathscr{H}_W}+1}e_j$. Take $m \geq N$. Following [**8**, Prop. II.6.4] define

$$f_i\colon W_m^{\mathscr{H}_W,(i)} \longrightarrow W_m^{\mathscr{H}_W,(i)}, \quad f_i\Big(\sum_{j=1}^a z_j e_j\Big) := \sum_{j=1}^a \big(1-\gamma_i^{p^m}\big)^{-1}(z_j)e_j.$$

It is well defined, continuous, bijective and with continuous inverse (for the weak topology) due to (TS3). Then, $z - f_i\big((1-\gamma_i^{p^m})(z)\big) = -f_i\Big(\sum_{j=1}^a \gamma_i^{p^m}(z_j)\big(1-\gamma_i^{p^m}\big)(e_j)\Big)$. Write

$$g_{i,z}\colon W_m^{\mathscr{H}_W,(i)} \longrightarrow W_m^{\mathscr{H}_W,(i)}, \quad g_{i,z}(y) := y - f_i\Big(\big(1-\gamma_i^{p^m}\big)(y) - z\Big).$$

Then, $v\big(f_i(z)\big) \geq v(z) - c_{3,\mathscr{H}_W}$ by (TS3) and $v\big(g_{i,0}(y)\big) \geq v(y) + \inf\{v\big((1-\gamma_i^{p^m})(e_i)\big) | i = 1,\ldots,a\} - c_{3,\mathscr{H}_W} \geq v(y) + 1$. Hence, $v\big(g_{i,z}(y_1) - g_{i,z}(y_2)\big) =$

$v\big(g_{i,0}(y_1-y_2)\big) \geq v(y_1-y_2)+1$. This implies that $g_{i,z}$ is a contracting operator for the v-adic topology so that there exists a unique fixed point y_z. Since f_i is bijective, we get that y_z is the only solution of $\big(1-\gamma_i^{p^m}\big)(y)=z$. We deduce that $1-\gamma_i^{p^m}$ is bijective on $W_m^{\mathscr{H}_W,(i)}$. Furthermore, since y_z is the limit of the sequence $g_{i,z}^n(z)$ and $g_{i,z}(z)-z=f_i(\gamma_i^{p^m}(z))$, we have $v(y_z-z)\geq v\big(g_{i,z}(z)-z\big)\geq v\big(\gamma_i^{p^m}(z)\big)-c_{3,\mathscr{H}_W}$. Hence, $\big(1-\gamma_i^{p^m}\big)^{-1}$ is continuous on $W_m^{\mathscr{H}_W,(i)}$. □

We are ready to apply the considerations above in the cases of interest to us. Let S be as in 2.2. Let M be a $\mathbf{Z}_p$-representation of $\mathscr{G}_S$. Let $M\cong \mathbf{Z}_p^a\oplus_{i=1}^b \mathbf{Z}_p/p^{c_i}\mathbf{Z}_p$. For $A=\widehat{\overline{R}}\otimes_V K$, $\mathbf{A}_{\overline{R}}$, $\mathbf{A}_{\overline{R}}^\dagger$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ or $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^\dagger$, then $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}A=A^a\oplus_{i=1}^b\big(A/p^{c_i}A\big)$. We consider $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}A$ as topological module for the product topology considering on A the topology induced from the p-adic topology on $\widehat{\overline{R}}\otimes_V K$ or form the weak topology on $\mathbf{A}_{\overline{R}}$ and considering on each $A/p^{c_i}A$ the quotient topology.

Proposition A.5. — *We have:*

1) *the ring* $\widetilde{\Lambda}:=\widehat{\overline{R}}\otimes_V K$ *with* $v(b):=\min\Big\{\alpha\in\mathbf{Q}|\frac{b}{p^\alpha}\in\widehat{\overline{R}}\Big\}$ *satisfies (TS1). Furthermore, the following holds*
   (TS1′) *for every* $c\in\mathbf{R}_{>0}$ *and every open normal subgroups* $H_1\subseteq H_2$ *of* $\mathscr{H}$ *(resp. of* H*), there exists* $\alpha\in\widehat{\overline{R}}^{H_1}$ *such that* $\sum\limits_{\tau\in H_2/H_1}\tau(\alpha)$ *is an element of* $\overline{V}$ *of valuation* $\leq c$*;*
2) *for every* $r\in\mathbf{Q}_{>0}$ *the ring* $\widetilde{\Lambda}:=\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,r]}$ *with* $v=w_r$ *satisfies (TS1);*
3) *for every* $N\in\mathbf{N}$ *the ring* $\widetilde{\Lambda}:=\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ *with* $v=\mathbf{v}_{\mathbf{E}}^{\leq N}$ *satisfies (TS1);*
4) $\mathrm{H}^i\big(\mathscr{H}_S,M\otimes_{\mathbf{Z}_p}(\widehat{\overline{R}}\otimes_V K)\big)=0$ *for every* $i\geq 1$*;*
5) (a) $\mathrm{H}^i\big(\mathscr{H}_S,M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\big)=0$, (b) $\mathrm{H}^i\Big(\mathscr{H}_S,M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^\dagger\Big)=0$ *for every* $i\geq 1$*;*
6) (a) $\mathrm{H}^i\big(\mathrm{H}_S,M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\big)=0$, (b) $\mathrm{H}^i\Big(\mathrm{H}_S,M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^\dagger\Big)=0$ *for every* $i\geq 1$.

Proof. — For open normal subgroups $\mathscr{H}_1\subset\mathscr{H}_2$ of $\mathscr{H}$ claim (1) follows from [**2**, Prop 3.4 & Rmk. 3.5] and claim (2) follows from [**2**, Prop. 4.4].

Let $\mathrm{H}_1\subset\mathrm{H}_2$ be normal subgroups of H. They correspond to extensions $R'_\infty\subset {S'_\infty}^2\subset {S'_\infty}^1$ which are finite and Galois over $R'_\infty[p^{-1}]$ of degree d_1 and d_2 respectively. In particular, there exists an extension $V_\infty\subset V_\infty^\natural$, finite and Galois after inverting p, such that they arise by taking the normalization of the base change of extensions of $R_\infty\otimes_{V_\infty}V_\infty^\natural$ finite and Galois after inverting p of degree d_1 and d_2 respectively. This is equivalent to require that there exist open normal subgroups of $\mathscr{H}_1\subset\mathscr{H}_2$ of $\mathscr{H}$ such that $\mathscr{H}_1\cap\mathrm{H}=\mathrm{H}_1$, $\mathscr{H}_2\cap\mathrm{H}=\mathrm{H}_2$ and $\mathrm{H}_1/\mathrm{H}_2\cong\mathscr{H}_1/\mathscr{H}_2$. Then, (TS1) (resp. (TS1′)) for $\mathscr{H}_1\subset\mathscr{H}_2$ implies (TS1) (resp. (TS1′)) for $\mathrm{H}_1\subset\mathrm{H}_2$. Hence, (1) and (2) follow.

(3) Let $H_1\subset H_2$ be open normal subgroups of $\mathscr{H}$ (resp. H) and let α_r be an element of $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,r]}$ satisfying (TS1). If we write $\alpha_r:=\sum_k p^k[z_k]$ with $z_k\in\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$, since $w_r(\alpha_r)=$

$\inf\{r\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k)+k\}\geq -c_1$, we get that $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k)\geq \frac{-c_1-k}{r}$. Hence, for every $N\in\mathbf{N}$ we have $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}^{\leq N}(\alpha_r)\geq \frac{-c_1-N}{r}$. In particular, the claim follows.

(4) It follows from A.2.

(5)–(6) Since $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{\dagger}/p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{\dagger}=\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$, claims (5) and (6) follow from A.2 for M a $\mathscr{G}_S$-representation which is free as $\mathbf{Z}_p/p^{N+1}\mathbf{Z}_p$-module. In particular, (5) and (6) hold for torsion representations.

We may then assume that M is torsion free. Let $A:=\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ or $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{\dagger}$ and let $H=\mathscr{H}_S$ or H_S. Let f be an i-th cocycle of H with values in $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}A$, continuous for the weak topology. If $A=\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{\dagger}$, then $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{\dagger}=\cup_r\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{(0,r]}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{(0,r]}$ is open in $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ for the weak topology since it contains $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{+}$. In particular, since H is compact in this case f takes values in $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{(0,r]}$ for some r.

Since f is continuous, for every $n\in\mathbf{N}$ there exists an open normal subgroup H_n of H such that the composite $\bar{f}_n\colon H^i\to M\otimes_{\mathbf{Z}_p}A\to M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\bigl(A/(U_{n+1,[\frac{c_1+n}{r}]+n}\cap A)\bigr)$ factors via $\bigl(H_0/H_n\bigr)^i$; see 2.4 for the notation $U_{n,h}$. Here, for $u\in\mathbf{Q}$ we write $[u]$ for the smallest positive integer bigger or equal to u. Let f_n be the composite of $\bar{f}_n$ with a splitting $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\bigl(A/(U_{n+1,[\frac{c_1+n}{r}]+n}\cap A)\bigr)\to M\otimes_{\mathbf{Z}_p}A$ (as sets). Then, f_n is a continuous i-cochain and we also have $f_n\equiv f$, if viewed as cochains with values in $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\bigl(A/(U_{n+1,[\frac{c_1+n}{r}]+n}\cap A)\bigr)$. For every n let $h_n:=\alpha_r\cup f_n$ be the continuous $(i-1)$-cochain defined as in the proof of A.1(1). The computations in loc. cit. show that $f_n-\partial h_n\equiv\alpha\cup\partial f_n\equiv 0$ and $h_{n+1}\equiv h_n$ in $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\bigl(A/(U_{n+1,n}\cap A)\bigr)$. Then, $\{h_n\}$ is Cauchy for the weak topology and $\{\partial h_n\}_n$ converges to f for the weak topology. In particular, h_n converges to a continuous $(i-1)$-cochain h with values in $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and $\partial h=f$.

If $A=\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$, this concludes the proof. If $A=\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{\dagger}$, since $p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\cap\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{(0,r]}=p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{(0,r]}$ and since $w_r(p)=1$ and $w_r(\pi)\geq\frac{pr}{p-1}$ by [**2**, Prop. 4.2(d)], we conclude that $\{h_n\}$ is Cauchy for the w_r-adic topology as well. Since $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{(0,r]}$ is complete and separated for the w_r-adic topology by [**2**, Prop. 4.2(c)], we conclude that h in fact takes values in $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{(0,r]}$. The conclusion follows. □

A.4. Sen's theory for $\widehat{\widehat{R}}[p^{-1}]$. — Before passing to the (φ,Γ)-modules, we first show that our theory applies in the case of $\widehat{\widehat{R}}[p^{-1}]$-representations. These results are due to Sen [**22**], in the classical case of a DVR with perfect residue field, and are due to [**6**] for a DVR with imperfect residue field. The key point is of course to show that A.4 applies. This follows essentially from results proven in [**2**]. We review some of the basic definitions and properties from loc. cit.

Let S be a R-algebra as in 2.1. Fix $m_{0,S}\in\mathbf{N}$ such that $p^{m_{0,S}}\bigoplus_{i=1}^{d}\mathbf{Z}_p\gamma_i\subseteq\Gamma_S$. Then, for every $m\geq m_{0,S}$, the ring $S_{m+1}[p^{-1}]$ is a free $S_m[p^{-1}]$-module of rank p^{d+1} (resp. $S_{m+1}\cdot W[p^{-1}]$ is a free $S_m\cdot W[p^{-1}]$-module of rank p^d). For every $i\in\{1,\dots,d\}$

and every $n \in \mathbf{N}$, define

$$S_{n,*}^{(i)} = S\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_{i-1}^{\frac{1}{p^n}}, T_{i+1}^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big].V_n$$

and

$$S_{n,*}^{'(i)} = S'\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_{i-1}^{\frac{1}{p^n}}, T_{i+1}^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big].$$

For $i = 0$, one puts $S_{n,*}^{(i)} = S\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big]$. Eventually, let $S_{\infty,*}^{(i)} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_{n,*}^{(i)}$ and $S_{\infty,*}^{'(i)} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_{n,*}^{'(i)}$. For every $i \in \{0, \ldots, d\}$ and $m \in \mathbf{N}$, one defines

$$\widehat{S}_{\infty,m,K}^{(i)} = \begin{cases} \Big(\widehat{S_{\infty,*}^{(0)} \cdot V_m}\Big)[p^{-1}] & \text{if } i = 0, \\ \Big(\widehat{S_{\infty,*}^{(i)} \cdot S_m}\Big)[p^{-1}] & \text{if } i \in \{1, \ldots, d\}, \end{cases}$$

where the hat stands for p-adic completion. Similarly, for $i \in \{1, \ldots, d\}$ and $m \in \mathbf{N}$, put

$$\widehat{S}_{\infty,m,K}^{'(i)} = \Big(\widehat{S_{\infty,*}^{'(i)}.S_m}\Big)[p^{-1}].$$

Note that $\widehat{S}_{\infty,m,K}^{(i)} \subset \widehat{S}_{\infty}[p^{-1}]$ for every $i \in \{0, \ldots, d\}$ and $m \in \mathbf{N}$ and that $\widehat{S}_{\infty,m,K}^{'(i)} \subset \widehat{S'_{\infty}}[p^{-1}]$. For $n \geq m \geq m_0$ and $x \in S_n[p^{-1}]$, one puts

$$\tau_m^{(i)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{p^{n-m}} \mathrm{Tr}_{S_n/S_{n,*}^{(0)} \cdot V_m}(x) & \text{if } i = 0, \\ \frac{1}{p^{n-m}} \mathrm{Tr}_{S_n/S_{n,*}^{(i)} \cdot S_m}(x) & \text{if } i \in \{1, \ldots, d\}. \end{cases}$$

For $n \geq m \geq m_0$ and $x \in S'_n[p^{-1}]$ and every $i = 1, \ldots, d$ define

$$t_m^{(i)}(x) = \frac{1}{p^{n-m}} \mathrm{Tr}_{S'_n/S_{n,*}^{'(i)} \cdot S_m}(x).$$

Such maps do not depend on n for $n \gg 0$ so that they are defined on $S_{\infty}[p^{-1}]$ (resp. $S'_{\infty}[p^{-1}]$).

Proposition A.6. — *For every $i = 0, \ldots, d$ and every $m \geq m_0$ the map $\tau_m^{(i)}$ is continuous for the p-adic topology so that it extends to a unique $\widehat{S}_{\infty,m,K}^{(i)}$-linear map*

$$\tau_m^{(i)} : \widehat{S_{\infty}}[p^{-1}] \longrightarrow \widehat{S}_{\infty,m,K}^{(i)}.$$

Analogously, for every $i = 1, \ldots, d$ and every $m \geq m_0$ the map $t_m^{(i)}$ is continuous for the p-adic topology so that it extends to a unique $\widehat{S}_{\infty,m,K}^{'(i)}$-linear map

$$t_m^{(i)} : \widehat{S'_{\infty}}[p^{-1}] \longrightarrow \widehat{S}_{\infty,m,K}^{'(i)}.$$

Proof. — The claim for $\tau_m^{(i)}$ follows from [**2**, Lem. 3.8]. Since $t_m^{(i)}$ is obtained from $\tau_m^{(i)}$ by base-change from V_{∞} to W, the claim for $t_m^{(i)}$ follows as well. □

Note that $\big(\widehat{R}[p^{-1}]\big)^{\mathscr{H}_S} = \widehat{S_{\infty}}[p^{-1}]$ and $\big(\widehat{R}[p^{-1}]\big)^{\mathrm{H}_S} = \widehat{S'_{\infty}}[p^{-1}]$ due to 2.6. Furthermore,

Proposition A.7. — *The rings $\widehat{S}^{(i)}_{\infty,m,K}$ and the applications $\tau^{(i)}_m$ satisfy (TS2) and (TS3). The rings $\widehat{S}'^{(i)}_{\infty,m,K}$ with the applications $t^{(i)}_m$ satisfy (TS4).*

Proof. — The fact that (TS2) and (TS3) hold is proven in [**2**, Prop. 3.9] and in [**2**, Prop. 3.11]. Axiom (TS4) follows from this since $t^{(i)}_m$ is obtained from $\tau^{(i)}_m$ by base-change from $\widehat{V_\infty}$ to $\widehat{W}$ and taking p-adic completions. □

Lemma A.8. — *We have $\bigcup_m \left(\bigcap_i \widehat{S}^{(i)}_{\infty,m,K}\right) = S_\infty[p^{-1}]$. Analogously, we also have $\bigcup_m \left(\bigcap_i \widehat{S}'^{(i)}_{\infty,m,K}\right) = \bigcup_m \widehat{S'_m}[p^{-1}]$.*

Proof. — The first claim follows from [**2**, Lem. 3.12]. The second is proven as in loc. cit. □

Let M be a $\mathbf{Z}_p$-representation of $\mathscr{G}_S$ and let $Q := M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$. Due to A.2 we know that the natural maps

$$\mathrm{H}^n\left(\Gamma_S, Q^{\mathscr{H}_S}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathscr{G}_S, Q\right) \quad \text{and} \quad \mathrm{H}^n\left(\Gamma'_S, Q^{\mathrm{H}_S}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathrm{G}_S, Q\right)$$

are isomorphisms. Furthermore,

Theorem A.9. — *There exists a finitely generated, projective $S_\infty[p^{-1}]$-submodule $N \subset Q^{\mathscr{H}_S}$, stable under Γ_S, such that $N \otimes_{S_\infty} \widehat{S_\infty} \cong Q^{\mathscr{H}_S}$ and the natural map*

$$\mathrm{H}^n(\Gamma_S, N) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\Gamma_S, Q^{\mathscr{H}_S}\right)$$

is an isomorphism. Furthermore, if $N' := N \otimes_{S_\infty} \left(\bigcup_m \widehat{S'_m}\right)$, then $N' \otimes_{\bigcup_m \widehat{S'_m}} \widehat{S'_\infty} \cong Q^{\mathrm{H}_S}$ and the natural map

$$\mathrm{H}^n\left(\Gamma'_S, N'\right) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\Gamma'_S, Q^{\mathrm{H}_S}\right)$$

is an isomorphism.

Proof. — Put N to be the base change of $\mathfrak{D}_m(Q)$, as defined in A.3, via the natural map $\bigcap_i \widehat{S}^{(i)}_{\infty,m,K} \to S_\infty[p^{-1}]$. Similarly, put N' to be the base change of $\mathrm{D}_m(Q)$ via $\bigcap_i \widehat{S}^{(\prime i)}_{\infty,m,K} \to \bigcup_m \widehat{S'_m}[p^{-1}]$.

Due to [**2**, Thm. 3.1] there exists an $\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$-basis $e_1, \ldots, e_a$ of $M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$ stable under an open subgroup $\mathscr{H}_Q$ of $\mathscr{H}_S$, normal in $\mathscr{G}_S$. Let $S_\infty[p^{-1}] \subset T_\infty[p^{-1}]$ be the corresponding Galois extension. Then $\mathfrak{D}_m(Q)$ (resp. $\mathrm{D}_m(Q)$) is by construction the set of $\mathscr{H}_S/\mathscr{H}_Q$-invariants (resp. $\mathrm{H}_S/\mathrm{H}_Q$-invariants) of the free $\bigcap_i \widehat{T}^{(i)}_{\infty,m,K}$-module (resp. $\bigcap_i \widehat{T}'^{(i)}_{\infty,m,K}$-module) with basis $e_1, \ldots, e_a$. By [**1**, Cor. 3.11] we have $\widehat{T_\infty}[p^{-1}] \cong \widehat{S_\infty}[p^{-1}] \otimes_{S_\infty} T_\infty$ so that the extension $\widehat{S_\infty}[p^{-1}] \subset \widehat{T_\infty}[p^{-1}]$ is finite, étale and Galois with group $\mathscr{H}_S/\mathscr{H}_Q$. Similarly, one proves that $\widehat{T'_\infty}[p^{-1}] \cong \widehat{S'_\infty}[p^{-1}] \otimes_{S_\infty} T_\infty$ so that the extension $\widehat{S'_\infty}[p^{-1}] \subset \widehat{T'_\infty}[p^{-1}]$ is also finite, étale and Galois with group $\mathrm{H}_S/\mathrm{H}_Q$. Then, the claims that $N' = N \otimes_{S_\infty} \left(\bigcup_m \widehat{S'_m}\right)$ and that N and N' satisfy the requirements of the theorem follow as in the proof of A.4 and étale descent. □

A.5. Sen's theory for $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$. — We recall some facts proven in [**2**, §4] needed in order to prove that (TS2) and (TS3) hold also for the rings $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}$. Let S be a R-algebra as in 2.1. For every $i = 0, \dots, d$ let

$$\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty) := \cup_n \mathbf{A}_S\left[\left[x_0\right]^{\frac{1}{p^n}}, \dots, \left[x_{i-1}\right]^{\frac{1}{p^n}}, \left[x_{i+1}\right]^{\frac{1}{p^n}}, \dots, \left[x_d\right]^{\frac{1}{p^n}}\right]$$

and let $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}$ be the closure of $\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)$ in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$ for the weak topology. Here, we write x_0 for the element ϵ and we write $\left[x_i\right]$ for the Teichmüller lift of x_i. By construction it is stable under $\mathscr{G}_R$ if $i \neq 0$ and it is stable under $\gamma_0^{p^s}$, for $s \gg 0$, if $i = 0$. Then,

Proposition A.10. — *For every $m \geq 0$ and every $i = 0, \dots, d$ there exists a homomorphism*

$$\tau_m^{(i)} = \tau_{S,m}^{(i)} \colon \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty} \longrightarrow \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[\left[x_i\right]^{\frac{1}{p^m}}\right],$$

called the generalized trace à la Tate, such that

(i) *it is $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[\left[x_i\right]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-linear and it is the identity on $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[\left[x_i\right]^{\frac{1}{p^m}}\right]$;*

(ii) *it is continuous for the weak topology;*

(iii) *it commutes with the action of $\mathrm{Gal}\,(S_\infty/R)$ if $i \neq 0$ and it commutes with the action of $\gamma_0^{\mathbf{Z}_p}$ if $i = 0$. Furthermore, $\tau_m^{(i)} \circ \tau_n^{(j)} = \tau_n^{(j)} \circ \tau_m^{(i)}$ for $m, n \in \mathbf{N}$ and $i, j \in \{0, \dots, d\}$ and $\tau_m^{(0)} \circ \tau_m^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_m^{(d)}$ commutes with the action of $\mathscr{G}_R$;*

(iv) *for every $n \in \mathbf{Z}$ such that $m + n \geq 0$ we have $\varphi^n \circ \tau_{m+n}^{(i)} = \tau_m^{(i)} \circ \varphi^n$;*

(v) *it is compatible for varying S i. e., given a map of R-algebras $S \to T$ as in 2.1 we have that $\tau_{m,T}^{(i)}$ restricted to $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$ coincides with $\tau_{m,S}^{(i)}$;*

(vi) *there exists $r_S \in \mathbf{Q}_{>0}$ such that (TS2) and (TS3) hold for every $0 < r < r_S$ with $\widetilde{\Lambda} := \mathbf{A}_{\overline{R}}^{(0,r]}$ and $v = w_r$, taking $\widetilde{\Lambda}_m^{(i)}$ for $m \geq 0$ to be the closure of $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^{(0,r]} \cap \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)\left[\left[x_i\right]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ in $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,r]}$ and taking $\tau_{S,m}^{(i)}$ for $m \geq 0$ to be the restriction of the maps defined in (i);*

(vii) *for every $N \in \mathbf{N}$ (TS2) and (TS3) hold for $\widetilde{\Lambda} := \mathbf{A}_{\overline{R}}/p^{N+1}\mathbf{A}_{\overline{R}}$ and $v = \mathbf{v}_{\mathbf{E}}^{\leq N}$, taking $\widetilde{\Lambda}_m^{(i)}$ for $m \geq 0$ to be $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}/p^{N+1}\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[\left[x_i\right]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ and taking $\tau_{S,m}^{(i)}$ for $m \geq 0$ to be the reduction modulo p^{N+1} of the maps defined in (i);*

(viii) *there exists $m_S \in \mathbf{N}$ such that for $m \geq m_S$ the map $\gamma_i^{p^m} - 1$ is an isomorphism on $\left(1 - \tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}\right)$ with continuous inverse (for the weak topology).*

Proof. — Claims (i)-(v) follow from [**2**, Prop. 4.11]. The verification of (TS2) (resp. of (TS3)) in (vi) follows from [**2**, Prop. 4.19] (resp. [**2**, Prop. 4.26 & Prop. 4.28]). The fact that (TS2) holds in (vii) follows from (ii) and the fact that the weak topology on $\mathbf{A}_{\overline{R}}/p^{N+1}\mathbf{A}_{\overline{R}}$ is the $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}^{\leq N}$-adic topology.

Since $\left(1 - \tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}\right)$ is p-adically complete and separated, the fact that $\gamma_i^{p^m} - 1$ is bijective can be verified modulo p and follows from [**2**, Prop. 4.26 & Prop. 4.28]. In particular, $(\gamma_i^{p^m} - 1)^{-1}$ is bijective on $p^{N+1}\left(1 - \tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}\right)$ and, consequently,

on $\big(1-\tau_m^{(i)}\big)\big(\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}/p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}\big)$ for every $N\in\mathbf{N}$. Note that for every $h\in\mathbf{N}$ the group $\pi^h\widetilde{\mathbf{A}}^+_{S_\infty}$ is contained in the subgroup of elements $x\in\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{S_\infty}$ such that $w_r(x)\geq hw_r(\pi)$. By (TS3) for $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_R$ there exist constants $c_{3,S}$ and $c_{4,S}$ such that for every element z in $\pi^h(1-\tau_m^{(i)})\widetilde{\mathbf{A}}^+_{S_\infty}$ (resp. $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\big[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\big]\cap\pi^h\widetilde{\mathbf{A}}^+_{S_\infty}$) one has

$$r\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k)^{\leq N}\big((1-\gamma_i^{p^m})^{-1}(z)\big)\geq w_r\big((1-\gamma_i^{p^m})^{-1}(z)\big)-N\geq w_r(z)-c_{3,S}-N$$

and, respectively,

$$r\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k)^{\leq N}\big((1-\gamma_i^{p^m})(z)\big)\geq w_r\big((1-\gamma_i^{p^m})(z)\big)-N\geq w_r(z)+c_{4,S}-N.$$

Since $w_r(z)\geq r\mathbf{v}_{\mathbf{E}}^{\leq N}(z)$, we conclude that $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k)^{\leq N}\big((1-\gamma_i^{p^m})^{-1}(z)\big)\geq\mathbf{v}_{\mathbf{E}}^{\leq N}(z)-\frac{c_{3,S}+N}{r}$ and $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k)^{\leq N}\big((1-\gamma_i^{p^m})(z)\big)\geq\mathbf{v}_{\mathbf{E}}^{\leq N}(z)+\frac{c_{4,S}-N}{r}$. Hence, (vii) and (viii) follow. □

Similarly, given a R-algebra S as in 2.1, for every $i=1,\dots,d$ let $\mathbf{A}'^{(i)}_S(\infty):=\cup_n\mathbf{A}'_S\Big[[x_1]^{\frac{1}{p^n}},\dots,[x_{i-1}]^{\frac{1}{p^n}},[x_{i+1}]^{\frac{1}{p^n}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^n}}\Big]$ and let $\overline{\mathbf{A}'^{(i)}_S(\infty)}$ be the closure of $\mathbf{A}'^{(i)}_S(\infty)$ in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ for the weak topology. Note that since $i\geq 1$ the ring $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}$ contains the closure for the weak topology of $\cup_n\mathbf{A}_V\Big[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}\Big]$ which is $\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}$ by [**2**, Cor. 4.10]. Then, $\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}}\widetilde{\mathbf{A}}_W$ maps to $\overline{\mathbf{A}'^{(i)}_S(\infty)}$ and the image is dense for the weak topology. Recall that $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}}\widetilde{\mathbf{A}}_W$ injects and is dense in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ and $\mathbf{A}_S\otimes_{\mathbf{A}_V}\widetilde{\mathbf{A}}_W$ injects and is dense in $\mathbf{A}'_S$ by 2.9. Hence, for every $i=1,\dots,d$ we may base-change $\tau_{S,m}^{(i)}$ via $\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_{V_\infty}}\widetilde{\mathbf{A}}_W$ and complete with respect to the weak topology. We obtain a map

$$t_m^{(i)}=t_{S,m}^{(i)}\colon\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}\longrightarrow\overline{\mathbf{A}'^{(i)}_S(\infty)}\Big[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\Big].$$

Proposition A.11. — *The analogues of the statements (i)-(viii) of A.10 hold for $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$, the rings $\overline{\mathbf{A}'^{(i)}_S(\infty)}\Big[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\Big]$ and the maps $t_m^{(i)}$.*

Proof. — The proposition follows from A.10, from the construction of $t_m^{(i)}$ and density arguments. For (vi) note that $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{S_\infty}\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{V_\infty}}\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_W$ maps to $\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}{}^{(0,r]}$ and has dense image for the w_r-adic topology by 2.9(d). □

Lemma A.12. — *We have $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^{\tau_0^{(0)}=1,\dots,\tau_0^{(d)}=1}=\mathbf{A}_S$ and $\big(\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}\big)^{t_0^{(1)}=1,\dots,t_0^{(d)}=1}=\mathbf{A}'_S$.*

Proof. — By [**2**, Cor. 4.10] the monomials $\big\{[x_0]^{\frac{\alpha_1}{p^n}}\cdots,[x_d]^{\frac{\alpha_d}{p^n}}\big\}_{0\leq\alpha_i<p^n}$ form an $\mathbf{A}_S$-basis of $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_S)=\mathbf{A}_S\Big[[x_0]^{\frac{1}{p^n}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^n}}\Big]$ and $\cup_n\varphi^{-n}(\mathbf{A}_S)$ is dense in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$ for the weak topology. In particular, $\cup_n\varphi^{-n}(\mathbf{A}_S)^{\tau_0^{(0)}=1,\dots,\tau_0^{(d)}=1}$ is dense in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^{\tau_0^{(1)}=1,\dots,\tau_0^{(d)}=1}$ and $\cup_n\varphi^{-n}(\mathbf{A}_S\otimes_{\mathbf{A}_V}\widetilde{\mathbf{A}}_W)^{t_0^{(0)}=1,\dots,t_0^{(d)}=1}$ is dense in $\big(\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}\big)^{t_0^{(1)}=1,\dots,t_0^{(d)}=1}$ respectively.

From the fact that $\tau_0^{(i)}\left([x_i]^{\frac{\alpha}{p^n}}\right) = 0$ for $0 < \alpha < p^n$, we get that $\cap_{i=0}^d \mathbf{A}_S^{(i)}(\infty) = \mathbf{A}_S$ is dense in $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^{\tau_0^{(0)}=1,\ldots,\tau_0^{(d)}=1}$ and $\mathbf{A}_S \otimes_{\mathbf{A}_V} \widetilde{\mathbf{A}}_W$ is dense in $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}\right)^{t_0^{(1)}=1,\ldots,t_0^{(d)}=1}$ respectively. The conclusion follows from 2.9. □

A.5.1. *The operators $\tau_m^{(i)}$ and $t_m^{(i)}$ on (φ,Γ)-modules.* — Let S be as in 2.2. Let M be a $\mathbf{Z}_p$-representation of $\mathscr{G}_S$. If $M \cong \mathbf{Z}_p^a \oplus_{i=1}^p \mathbf{Z}_p/p^{c_i}\mathbf{Z}_p$, then $M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \cong \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^a \oplus_{i=1}^b \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^{c_i}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and on the latter we have the product topology considering on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ the weak topology. Recall that we have defined $\widetilde{\mathfrak{D}}(M) = \left(M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\right)^{\mathscr{H}_S}$ and $\widetilde{\mathrm{D}}(M) := \left(M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\right)^{\mathrm{H}_S}$. We then define the weak topology on $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$ to be the topology induced from the inclusions $\widetilde{\mathfrak{D}}(M) \subset \widetilde{\mathrm{D}}(M) \subset M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$.

Assume first that M is killed by p^{N+1}. Since $\widetilde{\Lambda} := \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ satisfies (TS1)-(TS4) due to A.10 & A.11(vii), we may apply A.3 and define the operators $\tau_m^{(i)}$ (resp. $t_m^{(i)}$) on $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$ and on $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$ and we get decompositions

$$\widetilde{\mathfrak{D}}(M) := \widetilde{\mathfrak{D}}_m(M) \oplus \widetilde{\mathfrak{D}}_m^{(0)}(M) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathfrak{D}}_m^{(d)}(M)$$

and

$$\widetilde{\mathrm{D}}(M) := \widetilde{\mathrm{D}}_m(M) \oplus \widetilde{\mathrm{D}}_m^{(1)}(M) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathrm{D}}_m^{(d)}(M).$$

By devissage we get the operators $\tau_m^{(i)}$ (resp. $t_m^{(i)}$) on $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$ and on $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$ and the decomposition above for any torsion $\mathscr{G}_S$-representation M.

If M is torsion free, $\widetilde{\mathfrak{D}}(M) := \varprojlim_{\infty \leftarrow n} \widetilde{\mathfrak{D}}(M/p^nM)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}(M) := \varprojlim_{\infty \leftarrow n} \widetilde{\mathrm{D}}(M/p^nM)$ by 2.12. Using the construction for the torsion case and passing to the limit, we get the operators $\tau_m^{(i)}$ (resp. $t_m^{(i)}$) on $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$ and on $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$ and the decomposition above.

Proposition A.13. — *Let S be as in 2.2 and let M be a $\mathbf{Z}_p$-representation of $\mathscr{G}_S$. Then,*

1) $\widetilde{\mathfrak{D}}_0(M) = \mathfrak{D}(M)$ *and* $\widetilde{\mathrm{D}}_0(M) = \mathrm{D}(M)$;
2) *the operators $\tau_m^{(i)}$ (resp. $t_m^{(i)}$) on $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$) are continuous for the weak topology;*
3) *the operators $\tau_m^{(i)}$ (resp. $t_m^{(i)}$) preserve $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M)$). In particular, we have*
$$\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M) := \widetilde{\mathfrak{D}}_m^\dagger(M) \oplus \widetilde{\mathfrak{D}}_m^{\dagger,(0)}(M) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathfrak{D}}_m^{\dagger,(d)}(M)$$
and
$$\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M) := \widetilde{\mathrm{D}}_m^\dagger(M) \oplus \widetilde{\mathrm{D}}_m^{\dagger,(1)}(M) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathrm{D}}_m^{\dagger,(d)}(M),$$
where the modules on the right hand side are defined as in A.3;
4) *if $\gamma_i^{p^n} \in \Gamma_S$ (resp. Γ'_S) then $\gamma_i^{p^n} - 1$ is bijective on $\widetilde{\mathfrak{D}}_m^{(i)}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}_m^{(i)}(M)$) with continuous inverse (for the weak topology);*
5) *if $\gamma_i^{p^n} \in \Gamma_S$ (resp. Γ'_S) then $\gamma_i^{p^n} - 1$ is bijective on $\widetilde{\mathfrak{D}}_m^{\dagger,(i)}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}_m^{\dagger,(i)}(M)$) with continuous inverse (for the weak topology);*
6) $\widetilde{\mathfrak{D}}_m^\dagger(M) = \widetilde{\mathfrak{D}}_m(M) \cap \widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M)$, $\widetilde{\mathfrak{D}}_m^{\dagger,(i)}(M) = \widetilde{\mathfrak{D}}_m^{(i)}(M) \cap \widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(M)$, $\widetilde{\mathrm{D}}_m^{\dagger,(i)}(M) = \widetilde{\mathrm{D}}_m^{(i)}(M) \cap \widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M)$ *and* $\widetilde{\mathrm{D}}_m^\dagger(M) = \widetilde{\mathrm{D}}_m(M) \cap \widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(M)$. *In particular,* $\widetilde{\mathfrak{D}}_0^\dagger(M) = \mathfrak{D}^\dagger(M)$ *and* $\widetilde{\mathrm{D}}_0^\dagger(M) = \mathrm{D}^\dagger(M)$.

Proof. — Since $\gamma_i^{p^t}-1=(\gamma_i^{p^s}-1)\bigl(\sum_{j=0}^{p^{t-s}-1}\gamma_i^{p^s j}\bigr)$ for $t\geq s$, it suffices to prove the bijectivity and the existence of a continuous inverse in (4) and (5) for $n\gg 0$. Assuming (3), we have $\widetilde{\mathfrak{D}}^{\dagger,(i)}_m(M)=\widetilde{\mathfrak{D}}^{(i)}_m(M)\cap\widetilde{\mathfrak{D}}^{\dagger}(M)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}^{\dagger,(i)}_m(M)=\widetilde{\mathrm{D}}^{(i)}_m(M)\cap\widetilde{\mathrm{D}}^{\dagger}(M)$. Then, (4) and the bijectivity in (5) imply the existence of a continuous inverse in (5). Claim (6) follows from the others. For every m and $n\in\mathbf{N}$ the maps

$$\varphi^n\otimes 1\colon \widetilde{\mathfrak{D}}(M)\overset{\varphi^n}{\underset{\mathbf{A}_S}{\otimes}}\mathbf{A}_S\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathfrak{D}}(M),\qquad \varphi^n\otimes 1\colon \widetilde{\mathfrak{D}}^{\dagger}(M)\overset{\varphi^n}{\underset{\mathbf{A}^{\dagger}_S}{\otimes}}\mathbf{A}^{\dagger}_S\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathfrak{D}}^{\dagger}(M)$$

and

$$\varphi^n\otimes 1\colon \widetilde{\mathrm{D}}(M)\overset{\varphi^n}{\underset{\mathbf{A}'_S}{\otimes}}\mathbf{A}'_S\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathrm{D}}(M),\qquad \varphi^n\otimes 1\colon \widetilde{\mathrm{D}}^{\dagger}(M)\overset{\varphi^n}{\underset{\mathbf{A}'^{\dagger}_S}{\otimes}}\mathbf{A}'^{\dagger}_S\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathrm{D}}^{\dagger}(M)$$

are isomorphisms by 2.12(i). It follows from A.10 and A.11(iv) that $\bigl(\varphi^n\otimes 1\bigr)\circ\tau^{(i)}_{m+n}=\tau^{(i)}_m\circ\bigl(\varphi^n\otimes 1\bigr)$ and $\bigl(\varphi^n\otimes 1\bigr)\circ\tau^{(i)}_{m+n}=t^{(i)}_m\circ\bigl(\varphi^n\otimes 1\bigr)$ and that $\varphi^n\otimes 1$ defines an isomorphism from $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m+n}(M)\otimes^{\varphi^n}_{\mathbf{A}_S}\mathbf{A}_S$ (respectively from $\widetilde{\mathfrak{D}}^{(i)}_{m+n}(M)\otimes^{\varphi^n}_{\mathbf{A}_S}\mathbf{A}_S$, respectively from $\widetilde{\mathrm{D}}_{m+n}(M)\otimes^{\varphi^n}_{\mathbf{A}'_S}\mathbf{A}'_S$, respectively from $\widetilde{\mathrm{D}}^{(i)}_{m+n}(M)\otimes^{\varphi^n}_{\mathbf{A}_S}\mathbf{A}_S$) to $\widetilde{\mathfrak{D}}_m(M)$ (respectively $\widetilde{\mathfrak{D}}^{(i)}_m(M)$, $\widetilde{\mathrm{D}}_m(M)$, $\widetilde{\mathrm{D}}^{(i)}_m(M)$). Hence, it suffices to prove claims (2), (4) and (5) for $m\gg 0$ to deduce it for every $m\in\mathbf{N}$.

Since $\widetilde{\mathfrak{D}}(M):=\varprojlim_{\infty\leftarrow n}\widetilde{\mathfrak{D}}(M/p^nM)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}(M):=\varprojlim_{\infty\leftarrow n}\widetilde{\mathrm{D}}(M/p^nM)$ by 2.12 and the operators $\tau^{(i)}_m$ (resp. $t^{(i)}_m$) are constructed on each $\widetilde{\mathfrak{D}}(M/p^nM)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}(M/p^nM)$) passing to the limit, to prove (1), (2) and (4) one may assume that M is a torsion representation. By devissage one may also assume that M is a free $\mathbf{Z}/p^{N+1}\mathbf{Z}$-module for some $N\in\mathbf{N}$. Note that $\tau^{(i)}_m$ and $t^{(i)}_m$ commute with the Galois action and are compatible with extensions $S_\infty\subset T_\infty$ and $S'_\infty\subset T'_\infty$ by A.10 and A.11. Due to 2.8, 2.9 and 2.10 and étale descent, it then suffices to prove (1), (2) and (4) passing to an extension $S_\infty\subset T_\infty$ in $\overline{R}$ finite, étale and Galois after inverting p i. e., for $\bigl(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\bigr)^{\mathscr{H}_T}$ instead of $\widetilde{\mathfrak{D}}(M)$ and $\bigl(M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\bigr)^{\mathrm{H}_T}$ instead of $\widetilde{\mathrm{D}}(M)$. We may then assume that $\mathscr{H}_T$, and hence H_T, act trivially on M. Claim (1) follows then from A.12. Claim (2) follows from A.10(ii) and A.11(ii). Claim (4) for $m\gg 0$ follows from A.4 since $\widetilde{\Lambda}:=\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ satisfies (TS1)-(TS4). This concludes the proof of (1), (2) and (4).

If M is a torsion representation, then (3) and the bijectivity in (5) follow from 2.12(ii′). Assume that M is free of rank n. Thanks to 2.8, 2.9 and 2.10 and étale descent we may pass to an extension $S_\infty\subset T_\infty$ in $\overline{R}$ finite, étale and Galois after inverting p. By [**2**, Thm. 4.35] there exists such an extension $S_\infty\subset T_\infty$ so that $\mathfrak{D}^{\dagger}(M)\otimes_{\mathbf{A}^{\dagger}_S}\mathbf{A}^{\dagger}_T$ is a free $\mathbf{A}^{\dagger}_T$-module of rank n. Fix a basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ and choose $r\in\mathbf{Q}_{>0}$ such that these elements lie in $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\overline{R}}$. By 2.12(iii′) we have $M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}=\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}e_1\oplus\cdots\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\overline{R}}e_n$. For every $s<\min\{r,r_T\}$, see A.10(vi) & A.11,

let $W_s := M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,s]}$. Define $\widetilde{\mathfrak{D}}^{(0,s]}(M) := W_s^{\mathscr{H}_T}$ and $\widetilde{\mathrm{D}}^{(0,s]}(M) := W_s^{\mathrm{H}_T}$. Then, $\widetilde{\mathfrak{D}}^{\dagger}(M) = \cup_s \widetilde{\mathfrak{D}}^{(0,s]}(M)$ and $\widetilde{\mathrm{D}}^{\dagger}(M) = \cup_s \widetilde{\mathrm{D}}^{(0,s]}(M)$.

Note that $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,s]}$ satisfies (TS1)-(TS4) by A.10(vi) & A.11. Hence, the operators $\tau_m^{(i)}$ (resp. $t_m^{(i)}$) preserve $\widetilde{\mathfrak{D}}^{(0,s]}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}^{(0,s]}(M)$) and we further have decompositions

$$\widetilde{\mathfrak{D}}^{(0,s]}(M) := \widetilde{\mathfrak{D}}_m^{(0,s]}(M) \oplus \widetilde{\mathfrak{D}}_m^{(0,s],(0)}(M) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathfrak{D}}_m^{(0,s],(d)}(M)$$

and

$$\widetilde{\mathrm{D}}^{(0,s]}(M) := \widetilde{\mathrm{D}}_m^{(0,s]}(M) \oplus \widetilde{\mathrm{D}}_m^{(0,s],(1)}(M) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathrm{D}}_m^{(0,s],(d)}(M)$$

by A.3. This proves (3) in the overconvergent case. It follows from A.4 that if $\gamma_i^{p^n} \in \Gamma_S$ (resp. Γ'_S) then $\gamma_i^{p^n} - 1$ is bijective on $\widetilde{\mathfrak{D}}_m^{(0,s],(i)}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{D}}_m^{(0,s],(i)}(M)$ for $m \gg 0$. We conclude that the bijectivity in (5) holds. Claim (5) follows. □

We deduce from A.4, A.5 and A.13 the following theorem which summarizes the results proven so far:

Theorem A.14. — *The natural maps*

$$\mathrm{H}^n\big(\Gamma_S, \mathfrak{D}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(\Gamma_S, \widetilde{\mathfrak{D}}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathscr{G}_S, M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\right),$$

$$\mathrm{H}^n\big(\Gamma'_S, \mathrm{D}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(\Gamma'_S, \widetilde{\mathrm{D}}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathrm{G}_S, M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}\right),$$

$$\mathrm{H}^n\big(\Gamma_S, \mathfrak{D}^{\dagger}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(\Gamma_S, \widetilde{\mathfrak{D}}^{\dagger}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathscr{G}_S, M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}\right)$$

and $$\mathrm{H}^n\big(\Gamma'_S, \mathrm{D}^{\dagger}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(\Gamma'_S, \widetilde{\mathrm{D}}^{\dagger}(M)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^n\left(\mathrm{G}_S, M \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}\right)$$

are all isomorphisms.

A.5.2. *The structure of δ-functors.* — The cohomology groups appearing in A.14 are δ-functors i. e., given an exact sequence $0 \to W_1 \to W_2 \to W_3 \to 0$ of $\mathscr{G}_S$-representations we get an associated long exact sequence of cohomology groups, functorial with respect to morphisms of short exact sequences.

For the cohomology groups on the right hand side it suffices to construct a left inverse (as sets) of the surjection $W_2 \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \to W_3 \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ which is continuous for the weak topology and has the property that the image of $W_3 \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$ is contained in $W_2 \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$. We consider two cases.

The first case is that W_3 is a free $\mathbf{Z}_p$-module. Any left inverse $W_2 \to W_3$ as $\mathbf{Z}_p$-modules induces by extension of scalars the claimed inverse.

The second case is that W_3 is a torsion $\mathbf{Z}_p$-module. By devissage one can suppose that W_3 is a free $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-module. The splitting is defined lifting a basis of W_3 to W_2 and constructing a left inverse ζ_n to the projection $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$.

Since $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = \mathbf{W}_n(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}})$ we define such inverse sending $(a_0,\dots,a_n) \mapsto (a_0,\dots,a_n,0,\dots)$.

For the cohomology groups of (φ,Γ)-modules we argue as follows. Due to A.13 we have continuous right inverses of the inclusions $\mathfrak{D}^*(W_i) \subset \widetilde{\mathfrak{D}}^*(W_i)$ and $\mathrm{D}^*(W_i) \subset \widetilde{\mathrm{D}}^*(W_i)$, where $*$ stands for nothing or $\dagger$. Such inverses are compatible with the morphisms of (φ,Γ)-modules induced by the map $W_2 \to W_3$. Thus, it suffices to construct a left inverse to the map $\widetilde{\mathrm{D}}(W_2) \to \widetilde{\mathrm{D}}(W_3)$ sending $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(W_3)$ to $\widetilde{\mathrm{D}}^\dagger(W_2)$ (resp. to the map $\widetilde{\mathfrak{D}}(W_2) \to \widetilde{\mathfrak{D}}(W_3)$ sending $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(W_3)$ to $\widetilde{\mathfrak{D}}^\dagger(W_2)$). As before we distinguish two cases.

The first is when W_3 is a free $\mathbf{Z}_p$-module. Due to [**2**, Thm. 4.35] there exists an extension $S \subset T$, finite and étale after inverting p, so that $\mathfrak{D}^\dagger(W_3) \otimes_{\mathbf{A}_S^\dagger} \mathbf{A}_T^\dagger$ is a free $\mathbf{A}_T^\dagger$-module. Since $\mathbf{A}_S^\dagger \subset \mathbf{A}_T^\dagger$ is finite and étale by 2.8 we deduce that $\mathfrak{D}^\dagger(W_3)$ is a projective $\mathbf{A}_S^\dagger$-module so that we can find a continuous left inverse to the surjection $\mathfrak{D}^\dagger(W_2) \to \mathfrak{D}^\dagger(W_3)$ as $\mathbf{A}_S^\dagger$-modules. Thanks to 2.12 we conclude the construction in this case simply extending scalars.

The second case is when W_3 is a torsion $\mathbf{Z}_p$-module. By devissage we may assume that W_3 is a free $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-module. Let $S \subset T$ be an extension such that $\mathscr{G}_T$ acts trivially on W_3. Then, $\mathfrak{D}(W_3) \otimes_{\mathbf{A}_S} \mathbf{A}_T = W_3 \otimes \mathbf{A}_T$ is a free $\mathbf{A}_T/p^n\mathbf{A}_T$-module. Due to 2.9 and 2.12 the various (φ,Γ)-modules associated to W_i as $\mathscr{G}_T$-representations, for $i = 2$ and 3, are defined by the corresponding (φ,Γ)-modules as $\mathscr{G}_S$-representations extending scalars via the finite and étale extension $\mathbf{A}_S^\dagger \subset \mathbf{A}_T^\dagger$. A splitting as $\mathbf{A}_S^\dagger$-modules to the inclusion $\mathbf{A}_S^\dagger \subset \mathbf{A}_T^\dagger$ produces at the level of (φ,Γ)-modules a left inverse $\zeta_{T/S}$ to the process of extending scalars. To conclude it suffices to construct the inverse considering $\mathscr{G}_T$-representations composing then with $\zeta_{T/S}$. One gets the seeked for map lifting a basis of W_3 to W_2 and using the left inverse to the projection $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^\dagger \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ constructed above. This map has the required properties since $\zeta_n\colon \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ sends $\widetilde{\mathbf{A}}_{T_\infty}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{T_\infty}$ to $\widetilde{\mathbf{A}}_{T_\infty}^\dagger$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{T_\infty'}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{T_\infty'}$ to $\widetilde{\mathbf{A}}_{T_\infty'}^\dagger$.

Appendix B
Artin-Schreier theory

The aim of this section is to prove the following:

Proposition B.1. — *The map $\varphi - 1$ on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^\dagger$, $\mathbf{A}_{\overline{R}}$, $\mathbf{A}_{\overline{R}}^\dagger$, $\mathbf{A}_{\overline{R}}'$ and $\mathbf{A}_{\overline{R}}'^\dagger$ is surjective and its kernel is $\mathbf{Z}_p$. Furthermore, the exact sequence*

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_p \longrightarrow \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \xrightarrow{\varphi-1} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \longrightarrow 0 \tag{22}$$

admits a continuous right splitting $\sigma\colon \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ (as $\mathbf{Z}_p$-modules) so that so that $\sigma(\mathbf{A}_{\overline{R}}) \subset \mathbf{A}_{\overline{R}}$, $\sigma(\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^\dagger) \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^\dagger$, $\sigma(\mathbf{A}_{\overline{R}}^\dagger) \subset \mathbf{A}_{\overline{R}}^\dagger$, $\sigma(\mathbf{A}_{\overline{R}}') \subset \mathbf{A}_{\overline{R}}'$ and $\sigma(\mathbf{A}_{\overline{R}}'^\dagger) \subset \mathbf{A}_{\overline{R}}'^\dagger$.

Proof. — Note that by [**2**, Prop. 4.2] we have $\varphi(\mathbf{A}_{\overline{R}}^{(0,r]}) \subset \mathbf{A}_{\overline{R}}^{(0,r/p]}$ and $\varphi(\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,r]}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,r/p]}$ so that $(\varphi-1)(\mathbf{A}_{\overline{R}}^{\dagger}) \subset \mathbf{A}_{\overline{R}}^{\dagger}$ and $(\varphi-1)(\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$. We know from 2.4 and 2.9 that p is a regular element of $\mathbf{A}_{\overline{R}}$, $\mathbf{A}'_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and that $\mathbf{A}_{\overline{R}}/p\mathbf{A}_{\overline{R}} = \mathbf{E}_{\overline{R}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}/p\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ and that, thanks to 2.6, the image of $\mathbf{E}_{\overline{R}} \otimes_{\mathbf{E}_V} \widetilde{\mathbf{E}}_W \to \mathbf{A}'_{\overline{R}}/p\mathbf{A}'_{\overline{R}}$ is dense for the $\overline{\pi}$-adic topology. In particular, to prove that $\varphi - 1$ on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$, $\mathbf{A}_{\overline{R}}$ and $\mathbf{A}'_{\overline{R}}$ is surjective and its kernel is $\mathbf{Z}_p$, it suffices to prove that the kernel of $\varphi - 1$ on $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ is $\mathbf{F}_p$ and that $\varphi - 1$ is surjective on $\mathbf{E}_{\overline{R}}$, on $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ and on the completion of $\mathbf{E}_{\overline{R}} \otimes_{\mathbf{E}_V} \widetilde{\mathbf{E}}_W$ for the $\overline{\pi}$-adic topology. Since $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ is an integral domain by 2.3(5), the kernel of $\varphi - 1$ is $\mathbf{F}_p$. The other claim follows from B.2.

Since $\mathbf{A}_{\overline{R}}^{\dagger} = \mathbf{A}_{\overline{R}} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$, to conclude that $\varphi - 1$ is surjective on $\mathbf{A}_{\overline{R}}^{\dagger}$ and on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$, it suffices to prove that for every $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$ the solutions $y \in \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ of $(\varphi - 1)(y) = z$ lie in $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$. Since any such solutions differ by an element of $\mathbf{Z}_p$ and the latter is contained in $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$, it suffices to show that $\varphi - 1$ is surjective on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$. Let $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$ and choose $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ so that $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,r]}$. Write $z = \sum_k [z_k] p^k$ with $z_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$. Then, putting $c = \min\{-1, w_r(z)\}$, we have $r\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k) + k \geq c$ for every $k \in \mathbf{N}$ i. e., $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{c-k}{r}$. By B.2 there exists $y_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ such that $(\varphi-1)(y_k) = z_k$ and $0 \leq \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(y_k) \leq \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k)$ if $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k) \geq 0$ or $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(y_k) = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k)}{p}$ if $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(z_k) < 0$. In any case, $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(y_k) \geq \frac{c-k}{pr}$. Hence, $y := \sum_k p^k [y_k]$ lies in $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{(0,pr]}$ and $(\varphi - 1)(y) = z$. □

Lemma B.2. — *The map $\varphi - 1$ is surjective on $\mathbf{E}_{\overline{R}}$, $\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+}$, $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}$. Furthermore, given a and $b \in \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ such that $a^p - a = b$ we have $0 \leq \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a) \leq \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(b)$ if $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(b) \geq 0$; and $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a) = \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(b)/p$ if $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(b) < 0$.*

Proof. — Recall that $\mathbf{E}_{\overline{R}} := \cup_{S_\infty} \mathbf{E}_S$ (resp. $\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+} := \cup_{S_\infty} \mathbf{E}_S^{+}$) and the union is taken over a maximal chain of finite normal extensions of $\mathbf{E}_R$ (resp. $\mathbf{E}_R^{+}$), étale after inverting $\overline{\pi}$. Then, $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathbf{E}_{\overline{R}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$ and $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$, $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$ and $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$. By Artin-Schreier theory $\mathbf{E}_{\overline{R}}/(\varphi - 1)\mathbf{E}_{\overline{R}}$ injects in $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathbf{E}_{\overline{R}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ and, hence, it is zero. Analogously, $\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+}/(\varphi - 1)\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+} = 0$. This implies that $\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}})/(\varphi - 1)(\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}})) = 0$ and $\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+})/(\varphi - 1)(\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+})) = 0$. By 2.3 the ring $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}$ is the $\overline{\pi}$-adic completion of $\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+})$ and $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}[\overline{\pi}^{-1}]$. In particular, $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}} = \varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}) + \overline{\pi}\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^{+}$ and we are left to prove that given a power series $b = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \overline{\pi}^n$ with $\{b_n\}_n$ in $\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+})$, we can solve the equation $(\varphi-1)(a) = b$. It suffices to find $\{a_n\}_n$ in $\varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+})$ such that $\overline{\pi}^{(p-1)n} a_n^p - a_n = b_n$. Indeed, if we put $a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{\pi}^n$, then $(\varphi - 1)(a) = b$. Given $b_n \in \varphi^{-\infty}(\mathbf{E}_{\overline{R}}^{+})$ there exists S_∞ and m such that $b_n \in \varphi^{-m}(\mathbf{E}_S^{+})$. But $\mathbf{E}_S^{+}$ and $\varphi^{-m}(\mathbf{E}_S^{+})$ are $\overline{\pi}$-adically complete and separated, the equation $\overline{\pi}^{(p-1)n} X^p - X = b_n$ in the variable X has 1 as derivative and

admits b_n as solution modulo $\overline{\pi}$. By Hensel's lemma it admits a unique solution a_n in $\varphi^{-m}(\mathbf{E}_S^+)$. The first part of the lemma follows.

Assume that $a^p - a = b$. Then, the properties of $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}^{\leq 1}$ recalled in 2.4 imply that if $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a) < 0$ we have $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a^p) = p\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a) < \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a)$ and $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(b) = \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a^p - a) = p\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a)$. On the other hand, if $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a) > 0$ we have $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a^p) = p\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a) > \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a)$ and $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(b) = \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a^p - a) = \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a)$. If $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a) = 0$, then $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a^p - a) \geq 0$ and $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}(b) \geq \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(a)$. The second claim follows. □

Lemma B.3. — *For every m and $n \in \mathbf{N}$ we have $(\varphi-1)\big([\overline{\pi}]^n\mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)+p^m\mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)\big) = [\overline{\pi}]^n\mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)+p^m\mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)$ where $[\overline{\pi}]$ is the Teichmüller lift of $\overline{\pi}$. In particular, the map $\varphi - 1\colon \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ is open for the weak topology.*

Proof. — By construction $\{[\overline{\pi}]^n\mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+) + p^m\mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)\}_{m,n}$ is a fundamental system of neighborhoods for the weak topology on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$. Since $\varphi - 1$ is linear, the first claim implies the second. Since $(\varphi - 1)(p^m a) = p^m(\varphi - 1)(a)$ for every $a \in \mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}})$, since $\varphi-1$ is surjective on $\mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)$ by B.2 and since $\mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+) = \mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)/p^m\mathbf{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)$, it is enough to prove that for every n we have $(\varphi-1)\big([\overline{\pi}]^n\mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)\big) = [\overline{\pi}]^n\mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)$. Indeed, $(\varphi - 1)\big([\overline{\pi}]^n\mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)\big) \subset \big([\overline{\pi}]^n\mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)\big)$ remarking that $(\varphi - 1)([\overline{\pi}]^n a) = [\overline{\pi}]^{pn}a^p - [\overline{\pi}]^n a = [\overline{\pi}]^n\big([\overline{\pi}]^{(p-1)n}a^p - a\big)$. On the other hand, $[\overline{\pi}]^n\mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+) \subset (\varphi - 1)\big([\overline{\pi}]^n\mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)\big)$ since for every $b \in \mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)$ the equation $[\overline{\pi}]^{(p-1)n}X^p - X = b$ admits a solution modulo p (cf. proof of B.2) and, hence, in $\mathbf{W}_m(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+)$ by Hensel's lemma. The lemma follows. □

Lemma B.4. — *There exists a left inverse ρ as $\mathbf{Z}_p$-modules of the inclusion $\iota\colon \mathbf{Z}_p \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ of (22), which is continuous for the weak topology.*

Proof. — Let R^* be the p-adic completion of the localization of R at the generic point of $R\otimes_V k$. We then have a map $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R^*}}$, which is continuous for the weak topology, so that it suffices to construct ρ for R^*. We may then assume that $R = R^*$ is a complete discrete valuation ring with residue field L. In particular, $\mathbf{E}_R$ is a discrete valuation field with valuation ring $\mathbf{E}_R^+$ and $\mathbf{A}_R$ is a complete discrete valuation ring with uniformizer p and residue field $\mathbf{E}_R$.

Recall that $\mathbf{E}_{\overline{R}}$ is the union $\cup_S\mathbf{E}_S$ over all finite normal extensions $R \subset S \subset \overline{R}$, étale after inverting p. Let $R \subset S$ be any such. Since R is a complete discrete valuation ring, also S is a complete discrete valuation ring. Then, $\mathbf{E}_S^+$ is a complete discrete valuation ring. For $S \subset T \subset \overline{R}$ finite normal extensions, étale after inverting p of degree $n_{S,T}$, we get that $\mathbf{E}_T^+$ is a finite and torsion free as $\mathbf{E}_S^+$-module, of rank $n_{S,T}$; see 2.3. By loc. cit. the choice of a $\mathbf{E}_S^+$-basis of $\mathbf{E}_T^+$ determines a $\varphi^{-m}(\mathbf{E}_S^+)$-basis of $\varphi^{-m}(\mathbf{E}_T^+)$ for every $m \in \mathbf{N}$ and maps

$$\overline{\pi}^{\frac{\ell_{S,T}}{p^m}}\widetilde{\mathbf{E}}_{T_\infty}^+ \to \varphi^{-m}(\mathbf{E}_T^+) \underset{\varphi^{-m}(\mathbf{E}_S^+)}{\otimes} \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+ \cong \big(\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\big)^{n_{S,T}} \to \widetilde{\mathbf{E}}_{T_\infty}^+,$$

where $\ell_{S,T}$ is a constant depending on $S \subset T$. We thus get an isomorphism $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^{n_{S,T}} \to \widetilde{\mathbf{E}}_{T_\infty}$ as topological groups (for the $\overline{\pi}$-adic topology). Since $\mathbf{E}_S^+$ is integrally closed in $\mathbf{E}_T^+$, we may assume that the given $\mathbf{E}_S^+$-basis of $\mathbf{E}_T^+$ contains 1. Suppose furthermore that $\frac{\ell_{S,S'}}{p^m} < 1$. We then get a splitting of the inclusion $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{E}}_{T_\infty}$ as $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$-modules such that $\overline{\pi}\widetilde{\mathbf{E}}_{T_\infty}^+$ is mapped to $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$. Consider the set $\mathscr{F}$ of pairs (A,t) where A is a normal sub-$\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$-algebra of $\cup_S \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ and $t\colon A \to \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ is a splitting of the inclusion $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty} \subset A$ as $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$-modules such that $t\left(A \cap \left(\overline{\pi} \cdot \cup_S \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+\right)\right) \subset \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$. It is an ordered set in which every chain has a maximal element. Zorn's lemma implies that $\mathscr{F}$ has a maximal element which, by the discussion above, must coincide with $\cup_S \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$. We conclude that there exists a left inverse ξ as $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$-modules of the inclusion $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty} \subset \cup_S \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ such that $\overline{\pi}\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ is mapped to $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$ for every S. Since $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+$) is the $\overline{\pi}$-adic completion of $\cup_S \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ (resp. $\cup_S \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$) and since $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$) is $\overline{\pi}$-adically complete and separated, ξ extends to a left inverse ζ as $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$-modules of the inclusion $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty} \subset \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}$ mapping $\overline{\pi}\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}^+$ to $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$. In particular, ζ is continuous for the $\overline{\pi}$-adic topology.

On the other hand, recall from 2.3 that $\mathbf{E}_R^+ = L \otimes_k k_\infty[\![\pi_K]\!]$ and that $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$ is the completion of $\cup_n \mathbf{E}_R^+\left[\pi_K^{\frac{1}{p^n}}, x_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right]$ for the topology defined by the fundamental system of neighborhoods $\left\{\pi_K^m\left(\cup_n L \otimes_k \mathbf{E}_V^+[\pi_K^{\frac{1}{p^n}}]\left[x_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right]\right)\right\}_m$. Define

$$\delta\colon \cup_n L \underset{k}{\otimes} k_\infty((\pi_K))\left[\pi_K^{\frac{1}{p^n}}, x_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right] \to L \underset{k}{\otimes} k_\infty$$

as the L-linear map sending $\pi_K^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$ to 0 for every $(i_0, i_1, \ldots, i_d) \in \mathbf{Q}^{d+1}$ such that $(i_1, \ldots, i_d)$ is not equal to 0 in $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^d$. It is well defined since $\{\pi_K, x_1, \ldots, x_d\}$ is an absolute p-basis of $\mathbf{E}_R^+$. Furthermore, δ is continuous for the π_K-topology and, hence, it extends to a continuous left inverse ν as L-modules of the inclusion $L \otimes_k k_\infty \subset \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ considering the $\overline{\pi}$-adic topology on $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ and the discrete topology on L. Finally, choose a left splitting τ as $\mathbf{F}_p$-vector spaces of $\mathbf{F}_p \subset L \otimes_k k_\infty$.

Let $\delta\colon \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \to \mathbf{Z}_p$ be the map sending a Witt vector $(a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ of $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = \mathbf{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}}\right)$ to $\left(\tau \circ \nu \circ \zeta(a_0), \ldots, \tau \circ \nu \circ \zeta(a_n), \ldots\right)$. It is a left inverse of the inclusion $\mathbf{Z}_p \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and it is continuous for the weak topology on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and on $\mathbf{Z}_p$. Note that the topology induced on $\mathbf{Z}_p$ from the weak topology on $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ is the p-adic topology. The lemma follows. □

End of the proof of Proposition B.1. — With the notations of B.4, let $e := \iota \circ \rho\colon \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$. It is a continuous homomorphism of $\mathbf{Z}_p$-modules and $e^2 = e$. Thus, if $M := \mathrm{Ker}(e) = \mathrm{Im}(e-1)$, we have that M is closed in $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}} = \mathbf{Z}_p \oplus M$. Then, $(\varphi - 1)|_M\colon M \to \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ is bijective. It is open thanks to B.3. Hence, its inverse is a continuous homomorphism of $\mathbf{Z}_p$-modules. We let σ be the composite of $\left((\varphi-1)|_M\right)^{-1}$ and the inclusion $M \subset \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$. It satisfies the requirements of B.1. □

References

[1] F. ANDREATTA – "Generalized ring of norms and generalized (φ, Γ)-modules", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), p. 599–647.

[2] F. ANDREATTA & O. BRINON – "Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif", in this volume.

[3] M. ARTIN – "Grothendieck topologies", mimeographed notes, Harvard University, 1962.

[4] M. F. ATIYAH & I. G. MACDONALD – *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[5] L. BERGER – "Représentations p-adiques et équations différentielles", *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[6] O. BRINON – "Une généralisation de la théorie de Sen", *Math. Ann.* **327** (2003), p. 793–813.

[7] F. CHERBONNIER – "Représentations p-adiques surconvergentes", Ph.D. Thesis, Université d'Orsay, 1996.

[8] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – "Représentations p-adiques surconvergentes", *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[9] ———, "Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local", *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[10] P. COLMEZ – "Les conjectures de monodromie p-adiques", *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[11] R. ELKIK – "Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **6** (1973), p. 553–603 (1974).

[12] G. FALTINGS – "p-adic Hodge theory", *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), p. 255–299.

[13] ———, "Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations", in *Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988)*, Johns Hopkins Univ. Press, 1989, p. 25–80.

[14] ———, "Almost étale extensions", *Astérisque* **279** (2002), p. 185–270.

[15] J.-M. FONTAINE – "Représentations p-adiques des corps locaux. I", in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[16] O. GABBER – "Affine analog of the proper base change theorem", *Israel J. Math.* **87** (1994), p. 325–335.

[17] A. GROTHENDIECK & J. DIEUDONNÉ – "Éléments de géométrie algébrique", Publ. Math. I.H.É.S., vol. 24, 1964–1965.

[18] L. HERR – "Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques", *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), p. 563–600.

[19] A. IOVITA & G. STEVENS – "A cohomological construction of p-adic families of modular forms", in preparation.

[20] U. JANNSEN – "Continuous étale cohomology", *Math. Ann.* **280** (1988), p. 207–245.

[21] J. DE JONG & M. VAN DER PUT – "Étale cohomology of rigid analytic spaces", *Doc. Math.* **1** (1996), p. 1–56.

[22] S. SEN – "Continuous cohomology and p-adic Galois representations", *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

[23] J. T. TATE – "p-divisible groups", in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, 1967, p. 158–183.

FABRIZIO ANDREATTA, Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques", Universitá Statale di Milano, via C. Saldini 50, Milano 20133, Italie • *E-mail :* andreat@mat.unimi.it

ADRIAN IOVITA, Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, 1455 De Maisonneuve Blvd. West, Montréal, Québec, Canada H3G 1M8
E-mail : iovita@mathstat.concordia.ca